

ESTUDIO NUMÉRICO DE LA ESTABILIDAD DE
ÓRBITAS CIRCULARES SOBRE EL PLANO ECUATORIAL
EN POTENCIALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS

OSWALDO ALONSO NIETO NARVÁEZ

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2015

ESTUDIO NUMÉRICO DE LA ESTABILIDAD DE
ÓRBITAS CIRCULARES SOBRE EL PLANO ECUATORIAL
EN POTENCIALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS

OSWALDO ALONSO NIETO NARVÁEZ

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR
GUILLERMO GONZÁLEZ VILLEGAS., Ph.D.

CODIRECTOR
FABIO DUVÁN LORA CLAVIJO., Ph.D.

Universidad Industrial de Santander

Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación - UIS

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2015

TABLA DE CONTENIDO

1	INTRODUCCIÓN	16
2	ÓRBITAS CIRCULARES Y ESTABILIDAD RADIAL EN EL PLANO ECUATORIAL.	19
2.1	Movimiento en el plano meridional	19
2.2	Movimiento en el plano ecuatorial y órbitas circulares	21
2.3	Estabilidad de órbitas circulares en el plano ecuatorial y aproximación epicíclica	22
2.3.1	Aproximación epicíclica: frecuencia epicíclica	24
3	POTENCIALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS Y MÉTODOS NUMÉRICOS.	26
3.1	POTENCIALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS	27
3.1.1	Potencial gravitacional de los discos de Toomre	27
3.1.2	Potencial gravitacional de los discos generalizados de Kalnajs DGK	27
3.2	Normalización	28
3.3	Métodos numéricos para la solución de las ecuaciones de movimiento	30

3.3.1	Métodos de Runge-Kutta	30
3.3.2	Convergencia	32
4	ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO EN EL PLANO ECUATORIAL EN POTENCIALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS	34
4.1	Estabilidad radial de las órbitas circulares en el potencial de Toomre	35
4.1.1	Ecuaciones de movimiento	35
4.1.2	Órbitas circulares y estabilidad radial: Discos de Toomre	36
4.2	Estabilidad radial de órbitas circulares en el potencial de Kalnajs	42
4.2.1	Ecuaciones de movimiento	42
4.2.2	Órbitas circulares y estabilidad radial: discos generalizados de Kalnajs	43
5	CONCLUSIONES	68
	BIBLIOGRAFÍA	70

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Gráfica del potencial efectivo Φ en función de la coordenada radial R . En esta se observa tres regiones delimitadas por los valores de energía total E_1 , E_2 y E_3 , las cuales determinan como es el movimiento de una partícula sometida a un potencial de determinada forma.	23
4.1	Gráfica del momento angular \tilde{L}_z contra \tilde{R} para el término $n = 0$ correspondiente al disco de Kuzmin.	37
4.2	Gráfica del potencial efectivo $\tilde{\Phi}$ en función de \tilde{R} , con $\tilde{L}_z = 1,196$ para el modelo de Kuzmin ($n = 0$)	38
4.3	(a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 2$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,196$ y energía $\epsilon = -0,268$ (b) Evolución temporal de la coordenada radial \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 2$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,196$. La resolución temporal utilizada es $h = 0,1$	38
4.4	(a) Órbita cuasi-circular acotada entre los radios $1,98 \leq \tilde{R} \leq 2,02$, con momento angular $\tilde{L}_z = 1,196$ (b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 2,01$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,196$	40
4.5	Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para las tres resoluciones $h_1 = 0,01$, $h_1/2$, $h_1/4$	40
4.6	Gráfica del momento angular \tilde{L}_z contra \tilde{R} para los términos $n = 0$, $n = 2$ y $n = 3$ correspondientes a los discos de Toomre	41

- 4.7 Gráfica de \tilde{L}_z vs \tilde{R} para el modelo $m = 1$ de los discos generalizados de Kalnajs. La líneas horizontales c , b , d y a cortan la curva en los puntos $(\tilde{R} = 1, \tilde{L}_z = 1,535)$, $(\tilde{R} = 2,203, \tilde{L}_z = 1,535)$, $(\tilde{R} = 0,931, \tilde{L}_z = 1,330)$, $(\tilde{R} = 1,050, \tilde{L}_z = 1,330)$, $(\tilde{R} = 1,502, \tilde{L}_z = 1,330)$, $(\tilde{R} = 4, \tilde{L}_z = 2,019)$, $(\tilde{R} = 0,7, \tilde{L}_z = 0,752)$, respectivamente. La región interior al disco está definida por $\tilde{R} \leq 1$ y la región exterior está definida por $\tilde{R} > 1$. . . 45
- 4.8 (a) Gráfica de $\tilde{\Phi}_{eff}$ vs \tilde{R} con $\tilde{L}_z^2 = 1,7689$. Los mínimos y máximos están en los puntos $(\tilde{R} = 0,931, \tilde{\Phi} = -0,3143)$, $(\tilde{R} = 1,050, \tilde{\Phi} = -0,286)$ y $(\tilde{R} = 1,502, \tilde{\Phi} = -0,308)$. (b) Gráfica de $\tilde{\Phi}_{eff}$ vs \tilde{R} con $\tilde{L}_z^2 = 2,356$ donde los mínimos y máximos están en los puntos $(\tilde{R} = 1, \tilde{\Phi} = 0)$ y $(\tilde{R} = 2,203, \tilde{\Phi} = -0,221)$ 46
- 4.9 (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 0,931$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ y energía $\epsilon = -0,314$. (b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,931$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ 48
- 4.10 (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 1,050$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ y energía $\epsilon = -0,286$. (b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,050$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ 48
- 4.11 (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 1,502$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ y energía $\epsilon = -0,308$. (b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,502$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ 49
- 4.12 (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 1$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$ y energía $\epsilon = 0$. (b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$. . . 49
- 4.13 (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 2,203$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$ y energía $\epsilon = -0,221$. (b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 2,203$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$ 50

-
- 4.14 (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$. (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,940$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ 50
- 4.15 (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = -0,01\tilde{R}_0$. (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,920$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ 51
- 4.16 Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,05$, $h_1/2$ y $h_1/4$. 51
- 4.17 (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$. (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,512$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ 52
- 4.18 (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$. (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,492$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ 52
- 4.19 Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,05$, $h_1/2$ y $h_1/4$. 53
- 4.20 (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$. (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 2,213$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$ 53
- 4.21 (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$. (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 2,193$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$ 54
- 4.22 Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,05$, $h_1/2$ y $h_1/4$. 54

-
- 4.23 (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$. (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,060$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ 55
- 4.24 Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,0125$, $h_1/2$ y $h_1/4$ 55
- 4.25 (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$. (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,0395$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ 56
- 4.26 Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,00078125$, $h_1/2$ y $h_1/4$ 56
- 4.27 (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$. (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,01$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$ 57
- 4.28 Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,025$, $h_1/2$ y $h_1/4$ 57
- 4.29 Gráfica de la componente z del momento angular \tilde{L}_z vs la componente radial \tilde{R} para el modelo $m = 3$ de los discos generalizados de kalnajs. La región interior al disco está definida por $\tilde{R} \leq 1$ y la región exterior está definida por $\tilde{R} > 1$ 59
- 4.30 Gráfica de la componente z del momento angular \tilde{L}_z vs la componente radial \tilde{R} para $m = 3$. Las líneas a , b y c representan líneas de momento angular constante $\tilde{L}_z = 1,135$, $1,141$ y $1,149$ el cual cortan la curva en los puntos: $(\tilde{R} = 0,830, \tilde{L}_z = 1,135)$, $(\tilde{R} = 1, \tilde{L}_z = 1,135)$, $(\tilde{R} = 0,851, \tilde{L}_z = 1,143)$, $(\tilde{R} = 0,947, \tilde{L}_z = 1,143)$, $(\tilde{R} = 1,062, \tilde{L}_z = 1,143)$, $(\tilde{R} = 0,894, \tilde{L}_z = 1,149)$, $(\tilde{R} = 1,091, \tilde{L}_z = 1,149)$ 60
- 4.31 Gráfica del potencial efectivo en función de la coordenada radial \tilde{R} . . . 61

-
- 4.32 (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 1$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ y energía $\epsilon = -0,421$. (b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,1351$ 62
- 4.33 (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 0,9472$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ y energía $\epsilon = -0,4205$. (b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,9472$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,1486$ 63
- 4.34 (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$. (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,01$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,1351$ 63
- 4.35 Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,0125$, $h_1/2$ y $h_1/4$. 64
- 4.36 (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$. (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,99$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,1351$ 64
- 4.37 Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,025$, $h_1/2$ y $h_1/4$. 65
- 4.38 (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$. (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,9572$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,1486$ 65
- 4.39 Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,025$, $h_1/2$ y $h_1/4$. 66
- 4.40 (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$. (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,9372$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,1486$ 66

4.41 Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,025$, $h_1/2$ y $h_1/4$. 67

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO NUMÉRICO DE LA ESTABILIDAD DE ÓRBITAS CIRCULARES SOBRE EL PLANO ECUATORIAL EN POTENCIALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS¹.

AUTOR: OSWALDO ALONSO NIETO NARVÁEZ².

PALABRAS CLAVES: DINÁMICA Y CINEMÁTICA ESTELAR, GALAXIAS, MECÁNICA CELESTE.

DESCRIPCIÓN:

En el presente trabajo se realizó, bajo el marco de la teoría Newtoniana, un estudio de la estabilidad radial de órbitas circulares de las partículas de prueba en el plano ecuatorial, sometidas a la acción de un campo gravitacional axialmente simétrico. Como fuente de potenciales gravitacionales de este tipo, se consideraron los modelos de discos de Toomre y discos generalizados de Kalnajs, siendo estas representaciones matemáticas de galaxias altamente planas con simetría axial. En primer lugar, se estudió la estabilidad radial de las órbitas circulares ecuatoriales para el primer modelo de los discos de Toomre. Para esto, se determinaron las expresiones correspondientes al momento angular, el potencial efectivo, la energía total, y las ecuaciones de movimiento. Posteriormente, se realiza el análisis gráfico del potencial efectivo junto con la solución numérica de las ecuaciones de movimiento, las cuales dan la evolución temporal de la coordenada radial, R . Con un procedimiento similar se estudiaron las estabilidades radiales de las órbitas circulares en los modelos uno y dos de los discos generalizados de Kalnajs. Debido a que se realizó un estudio numérico, se presenta un análisis de autoconvergencia, el cual es una prueba que valida las soluciones obtenidas, es decir, comprueba si el método numérico utilizado está tendiendo realmente a una solución.

¹Tesis de Pregrado.

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo Alfonso González Villegas (Director), Fabio Duván Lora Clavijo (Codirector).

ABSTRACT

TITLE: NUMERICAL STUDY OF THE STABILITY OF EQUATORIAL CIRCULAR ORBITS IN AXISYMMETRIC POTENTIALS.¹

AUTHOR: OSWALDO ALONSO NIETO NARVÁEZ².

KEYWORDS: STELLAR DYNAMICS, STELLAR KINEMATICS, GALAXIES, CELESTIAL MECHANICS.

DESCRIPTION:

In this work, we present from the classical theory of Newton, the study of radial stability of equatorial circular orbits of test particles, under the action of an axisymmetric potential. As a source of gravitational potential of this type, we considered the family of thin Toomre's discs and the generalized Kalnajs's discs, being these mathematical representations of galaxies highly flat with axial symmetry. First, the radial stability of the equatorial circular orbits for the first model of Toomre's disks was studied. For this, we determine the expressions for the angular momentum, the effective potential, the total energy, and the equations of motion. Then, from the plot of the effective potential and the numerical solution of the equations of motion, the respective analysis is carried out. With a similar procedure we studied the radial stabilities for the models $m = 1$ y $m = 2$ of the generalized Kalnajs discs. Because a numerical study was made, we present the convergence analysis, which is a prove whether the numerical method is actually tending to a solution.

¹Tesis de Pregrado.

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo Alfonso González Villegas (Director), Fabio Lora Clavijo (Codirector).

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Es usualmente aceptado que muchas de las galaxias en el universo son casi axialmente simétricas, con una distribución de masa formada por tres componentes: un disco delgado, un bulbo central y un halo de materia [2]. Como consecuencia de esto, hay un número de modelos de masa que incorporan ya sea una o todas estas características, [6, 11, 12, 18]. Ya que todos los componentes influyen en el campo gravitacional de la galaxia, tener un modelo que incorpore todos los efectos de tales partes es un problema de gran dificultad e importancia. Sin embargo, la contribución de cada una de las partes en gran manera se limita a ciertas escalas de distancia, permitiendo obtener modelos que sean bastante aproximados a la realidad, sin la inclusión de todos los componentes [5]. En el caso particular de galaxias espirales, la descripción mas aceptada de su composición, es que gran parte de la población estelar reside en el disco galáctico; por esta razón, modelos de discos delgados y el estudio del potencial gravitacional generado han sido un problema de gran interés en dinámica de galaxias [2]. Una vez se ha obtenido una expresión para el potencial gravitacional, se pueden obtener las expresiones correspondientes para la densidad superficial de masa y la velocidad circular de rotación, permitiendo hacer ajustes con datos observacionales de las curvas de rotación de galaxias particulares y así estimar la masa total integrando la correspondiente densidad superficial de masa, [8], [9]. Por lo tanto, un modelo idealizado para una galaxia altamente plana es un disco infinitesimalmente delgado hecho de partículas (estrellas) viajando en órbitas circulares en el campo gravitacional debido a la distribución de materia de las partículas mismas.

Un paso fundamental y de gran importancia en la formulación de modelos galácticos, es el análisis de la estabilidad del modelo, ya que puede sugerir a veces considerar nuevas características en un modelo dado, con el fin de obtener representaciones más realistas. Por ejemplo, el estudio llevado a cabo por Ostriker y Peebles, [16], donde se muestra que sistemas aplanados de partículas autogravitantes, inicialmente mantenidos en contra de la gravedad por rotación no son estables, su forma discoidal no se mantiene en el transcurso del tiempo. En consecuencia, los autores sugirieron que la incorporación de un halo esferoidal con masa del orden de la masa del disco o incluso mayor, mejora sustancialmente la estabilidad del disco. Por otro lado, en el trabajo hecho por Kalnajs, [10], se presenta un argumento diferente al anterior, en el que el autor sugiere lo siguiente: (i) los problemas de estabilidad pueden ser superados mejorando las características de las partes internas de los modelos galácticos; por ejemplo, considerando centros a gran temperatura o pequeñas protuberancias y (ii) que un halo con una escala de longitud mayor que la del disco y más masivo que éste, no contribuye significativamente a la estabilidad, discusión que se basa en el hecho de que la energía cinética de discos autogravitantes determina la estabilidad del sistema: discos fríos, que son formados principalmente por estrellas en movimiento circular (aquellos considerados por Ostriker y Peebles), requieren de un halo prominente con el fin de evitar inestabilidades, contrario al caso de discos calientes (considerados por Kalnajs) que pueden ser soportados por movimientos aleatorios de estrellas. Por lo tanto, el estudio detallado de la estabilidad de las órbitas en modelos galácticos, está asociado con la estabilidad de los mismos.

En el presente trabajo, bajo el marco de la teoría Newtoniana, se estudia la estabilidad radial de las órbitas circulares ecuatoriales para los discos de Toomre, y los discos generalizados de Kalnajs, los cuales son fuentes de potenciales gravitacionales con simetría axial. A diferencia de otros trabajos, en los que solo tienen en cuenta el criterio de la aproximación epicíclica para estudiar de manera general la estabilidad, en este trabajo se presenta un estudio detallado, en el que se determinan las condiciones iniciales apropiadas para resolver de forma numérica las ecuaciones de movimiento, asociadas a las órbitas circulares sometidas a una perturbación radial, para así determinar según el comportamiento de las soluciones obtenidas, su estabilidad. También, se analizan las curvas del potencial efectivo, siendo estas de gran importancia para determinar la estabilidad radial, ya que bajo perturbaciones en cierta dirección, las oscilaciones resultantes respecto a puntos de equilibrio, también indican de manera clara si las partículas describen órbitas circulares estables o no. En el capítulo 2 se muestra el formalismo que se utiliza para estudiar la dinámica de las órbitas en potenciales axialmente simétricos, y se centra el estudio a las órbitas circulares ecuatoriales y su estabilidad. En el capítulo 3 se presentan los potenciales que corresponde a los discos de Toomre y Kalnajs, siendo estos los modelos a los que se les hace el estudio de estabilidad, también se dedica gran parte de este capítulo al método numérico de Runge-Kutta, que se utiliza para la solución de las ecuaciones de movimiento. En el capítulo 4 se hacen los respectivos cálculos y análisis para el estudio de la estabilidad radial de las órbitas circulares en el plano

ecuatorial. Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las respectivas conclusiones.

Capítulo 2

ÓRBITAS CIRCULARES Y ESTABILIDAD RADIAL EN EL PLANO ECUATORIAL.

En este capítulo se presenta el formalismo usado para estudiar las órbitas, que resultan de considerar el movimiento de partículas de prueba individuales sometidas a campos gravitacionales axialmente simétricos. En particular, aquellos que describen configuraciones de materia discoidales para modelos de galaxias planas. El capítulo está constituido de la siguiente manera: en la sección 2.1 se trata el movimiento de las partículas que están por fuera del plano ecuatorial del sistema, mientras que los movimientos que si están en este plano, son tratados con detalle en la sección 2.2, y se finaliza con la sección 2.3 en la cual se estudia la estabilidad cuando las órbitas en el plano ecuatorial son circulares.

SECTION 2.1

Movimiento en el plano meridional

Para el desarrollo de las ecuaciones correspondientes a la dinámica del movimiento de una partícula de prueba, en presencia de un campo gravitacional con simetría axial,

es usual utilizar coordenadas que sean naturales al problema. De acuerdo con esto, es común usar coordenadas cilíndricas (R, φ, z) con origen en el centro de la fuente tal que el eje z coincida con el eje de simetría. Por consiguiente, usando coordenadas cilíndricas la dinámica del movimiento de una partícula de prueba está gobernado por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\dot{R}^2 + (R\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2] - \Phi(R, z), \quad (2.1)$$

donde el punto indica derivadas temporales, y el término Φ es el potencial gravitacional. A partir de este lagrangiano se pueden obtener los momentos en cada dirección y el Hamiltoniano dados por las ecuaciones

$$p_R = \dot{R}, \quad p_\varphi = R^2\dot{\varphi}, \quad p_z = \dot{z}, \quad (2.2)$$

$$H = \frac{1}{2}(p_R^2 + \frac{p_\varphi^2}{R^2} + p_z^2) + \Phi(R, z). \quad (2.3)$$

El cual, usando las ecuaciones de Hamilton se encuentra que las ecuaciones de movimiento son

$$p_{\dot{R}} = \ddot{R} = \frac{p_\varphi^2}{R^3} - \frac{\partial\Phi}{\partial R}, \quad (2.4)$$

$$p_{\dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(R^2\dot{\varphi}) = 0, \quad (2.5)$$

$$p_{\dot{z}} = \ddot{z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad (2.6)$$

donde la ecuación (2.5) expresa la conservación de la componente z del momento angular, la cual se expresa como

$$p_\varphi = L_z = R^2\dot{\varphi} = cte, \quad (2.7)$$

siendo esta una constante del movimiento. Las ecuaciones (2.4) y (2.6) describen el movimiento a lo largo de las direcciones R y z de la partícula de prueba. Ahora, si se define el potencial efectivo como

$$\Phi_{eff} = \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2}, \quad (2.8)$$

las ecuaciones (2.4), (2.6) y (2.3) se escriben de la siguiente forma

$$\ddot{R} = -\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial R}; \quad \ddot{z} = -\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial z}, \quad (2.9)$$

$$H = \frac{1}{2}(p_R^2 + p_z^2) + \Phi_{eff}(R, z). \quad (2.10)$$

Como se puede ver, haciendo uso de la conservación de la componente z del momento angular, los grados de libertad del problema se reducen de 3 a 2, y están dados por las coordenadas R y z . Por lo tanto, el movimiento de una partícula de prueba puede ser descrito tal que, esté confinado en el plano (R, z) (plano meridional), rotando con una velocidad angular $\dot{\varphi}$, siendo el valor numérico de la ecuación (2.10) la energía total de la órbita y otra constante del movimiento.

SECTION 2.2

Movimiento en el plano ecuatorial y órbitas circulares

A continuación se mira en detalle las órbitas en el plano ecuatorial, el cual está definido cuando $z = 0$, para potenciales axialmente simétricos. En este plano, las ecuaciones (2.1), (2.8), (2.9) y (2.10) se reducen a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\dot{R}^2 + (R\dot{\varphi})^2] - \Phi(R, 0) \quad (2.11)$$

$$\Phi_{eff} = \Phi(R, 0) + \frac{L_z^2}{2R^2} \quad (2.12)$$

$$\ddot{R} = -\frac{\partial\Phi_{eff}(R, 0)}{\partial R}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial\Phi_{eff}(R, 0)}{\partial z} \quad (2.13)$$

$$H = \frac{1}{2}p_R^2 + \Phi_{eff}(R, 0). \quad (2.14)$$

Aquí se puede observar que el problema dinámico se reduce de dos un solo grado de libertad. En particular, las órbitas circulares se encuentran examinando el mínimo en el potencial efectivo (2.8), el cual ocurre cuando

$$\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial R} = \frac{\partial\Phi}{\partial R}\Big|_{z=0} - \frac{L_z^2}{R^3} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial z} = 0, \quad (2.16)$$

donde la condición (2.16) se satisface en cualquier parte del plano ecuatorial debido a que se asume que el potencial posee simetría de reflexión respecto a este. La condición (2.15) se satisface en el radio R_0 , de tal forma que

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right|_{R_0,0} = \frac{L_z^2}{R_0^3} = R_0 \dot{\varphi}^2, \quad (2.17)$$

define la condición para la existencia de una órbita circular con velocidad angular $\dot{\varphi}$. De manera concreta, el mínimo del potencial efectivo ocurre cuando se tiene una órbita circular con momento angular L_z , cuya energía es tal que

$$E = \Phi(R, 0)|_{R_0} \quad (2.18)$$

SECTION 2.3

Estabilidad de órbitas circulares en el plano ecuatorial y aproximación epicíclica

En la sección anterior se mostró que la condición que se debe satisfacer para la existencia de órbitas circulares en el plano ecuatorial, está dada por (2.17). Sin embargo, tales órbitas no son necesariamente estables. Por esta razón, en esta sección se presenta el estudio de la estabilidad de órbitas circulares de dos formas diferentes: la primera de ellas se hace mediante un análisis cualitativo del movimiento, partiendo de la conservación de la energía, y la segunda involucra el análisis teórico conocido como la aproximación epicíclica, conduciendo cada una de ellas a criterios simples de estabilidad.

Debido a que en este problema que se está abordando, solo se considera el movimiento bajo la acción de un campo gravitacional axialmente simétrico, el sistema físico es conservativo; en efecto, la ecuación que refleja este hecho es

$$E = T + \Phi_{eff}(R, 0), \quad (2.19)$$

donde T corresponde al término $\dot{R}^2/2$. Esta última ecuación se puede reescribir de la forma

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \sqrt{2(E - \Phi_{eff}(R, 0))}, \quad (2.20)$$

ecuación que corresponde a la velocidad radial de la partícula. Dicha ecuación se hace cero para puntos en los que energía total es igual al potencial efectivo.

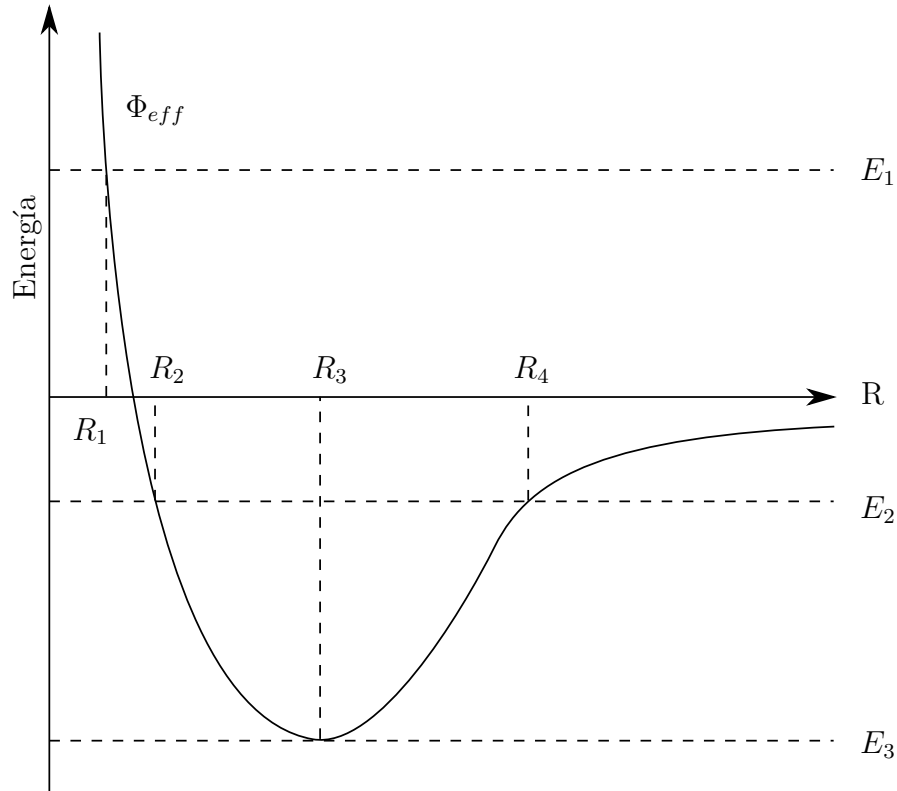


Figura 2.1: Gráfica del potencial efectivo Φ en función de la coordenada radial R . En esta se observa tres regiones delimitadas por los valores de energía total E_1 , E_2 y E_3 , las cuales determinan como es el movimiento de una partícula sometida a un potencial de determinada forma.

Debido a que el término correspondiente a la energía cinética siempre es mayor o igual que cero, de la ecuación (2.19) se satisface la desigualdad $E \geq \Phi_{eff}$. De acuerdo con esto, en la figura 2.1 se muestra que el movimiento es ligado para la energía E_2 , siendo este un movimiento periódico entre los puntos de retorno $R_2 \leq R \leq R_4$. Por otra parte, el movimiento para una partícula con energía E_1 no está confinado, y la partícula viene desde el infinito y se detiene en el punto de retorno $R = R_1$ invirtiendo su movimiento de nuevo hacia el infinito. Finalmente, para una partícula con energía E_3 , el movimiento está restringido en el punto $R = R_3$, concluyendo así que para cualquier tiempo t , la velocidad radial de la partícula es cero en este punto, por lo tanto, el movimiento es circular.

Con lo dicho en el párrafo anterior, una órbita es circular en $R = R_0$ si se cumple

$$\left. \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R} \right|_{R=R_0} = 0. \quad (2.21)$$

Y además es estable, si se tiene un mínimo, es decir, si se satisface la condición

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}(R, 0)}{\partial R^2} \right|_{R=R_0} > 0. \quad (2.22)$$

Calculando ahora la segunda derivada del potencial efectivo (2.12) se encuentra que

$$\frac{\partial^2 \Phi_{eff}(R, 0)}{\partial R^2} = \frac{1}{R^3} \left[\frac{3L_z^2}{R} + R^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right]. \quad (2.23)$$

Utilizando (2.17), esta última ecuación se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 \Phi_{eff}(R, 0)}{\partial R^2} = \frac{1}{R^3} \left[3R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} + R^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right] = \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^3 \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right]. \quad (2.24)$$

Por último, reemplazando nuevamente la ecuación (2.17) en la ecuación anterior, el criterio de la segunda derivada finalmente se reduce a

$$\frac{\partial^2 \Phi_{eff}(R, 0)}{\partial R^2} = \frac{1}{R^3} \frac{d}{dR} (L_z^2) > 0. \quad (2.25)$$

El criterio de estabilidad (2.22), se reduce al análisis del signo de la derivada de la componente z del momento angular con respecto a R . Así, los puntos críticos en que la segunda derivada del potencial efectivo es positiva, representan los puntos de equilibrio estables, mientras que los puntos críticos en que la segunda derivada es negativa, representan los puntos de equilibrio inestables. Para finalizar, de acuerdo con la ecuación (2.25),¹ las órbitas circulares en el plano ecuatorial también serán estables cuando en una gráfica de la componente z del momento angular en función de la coordenada radial R , sea monótonamente creciente o su pendiente sea positiva.

2.3.1 Aproximación epicíclica: frecuencia epicíclica

Con el fin de entender la aproximación epicíclica, se supone una partícula en el plano ecuatorial, que inicialmente se encuentra en una órbita circular con radio R_0 a la que se le aplica una perturbación de la forma

$$R = R_0 + x, \quad (2.26)$$

con x es muy pequeña. Bajo estas circunstancias es útil derivar soluciones aproximadas de (2.9) que sean válidas para tales órbitas. Para esto, se expande en series de Taylor el potencial efectivo (2.12) alrededor del punto de equilibrio $R = R_0$ de la forma

$$\Phi_{eff} \approx \Phi_{eff}(R_0, 0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right)_{R_0} x^2 + O(x^3), \quad (2.27)$$

y la ecuación de movimiento correspondiente a la parte radial de (2.9) se puede expresar de manera muy simple en la aproximación epicíclica, es decir, en la que se desprecian todos los términos cúbicos y de orden superior en la expansión. Si Se define la cantidad

$$\kappa^2 = \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right|_{(R_0, 0)}, \quad (2.28)$$

la ecuación (2.9) para la parte radial se puede escribir de la siguiente manera

$$\ddot{x} = -\kappa^2 x. \quad (2.29)$$

De acuerdo con esta última ecuación, x evoluciona como el desplazamiento de un oscilador armónico, con frecuencia κ , siendo la ecuación (2.28) un criterio de estabilidad una vez se garantice que $\kappa^2 > 0$.

Capítulo 3

POTENCIALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS Y MÉTODOS NUMÉRICOS.

Como se mencionó antes, en presencia de un campo gravitacional general con simetría axial, las partículas de prueba describen órbitas circulares en el plano ecuatorial cuando se satisface la condición dada por (2.17). Ahora, en este capítulo, se presentan de forma explícita las expresiones correspondientes a los potenciales de los discos de Toomre [14, 15, 19], y los discos generalizados de Kalnajs [7], los cuales, además de poseer simetría axial, representan modelos de galaxias planas. Una condición necesaria, para que estos discos sean una aproximación a un sistema físico real, es que las órbitas circulares de las partículas individuales que componen el disco, sean estables. Debido a esto, con el fin de estudiar la estabilidad radial, se resolverán las ecuaciones de movimiento dadas por (2.13). Dado a que no es trivial obtener soluciones analíticas, se dedica gran parte de este capítulo a la teoría correspondiente al método de Runge-Kutta de cuarto orden RK4 para la solución numérica de estas.

De acuerdo a lo anterior, en la sección 3.1 se presentan los potenciales de los discos de Toomre y los discos generalizados de Kalnajs, luego en la sección 3.2 se muestra como a partir de una ecuación diferencial, la cual describe un sistema físico, se obtiene la ecuación normalizada respectiva, con el fin de obtener soluciones numéricas. Finalmente la sección 3.3, trata el método numérico de Runge-Kutta y su convergencia.

SECTION 3.1

POTENCIALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS

3.1.1 Potencial gravitacional de los discos de Toomre

En 1963 Toomre [19], propuso una familia de soluciones a la ecuación de Poisson, obteniendo una familia de discos de extensión infinita con simetría axial como modelos para galaxias planas. Por otro lado en 1975 Miyamoto y Nagai [14], proponen a partir del trabajo hecho por Toomre, una generalización de pares de funciones potencial-densidad, para representar modelos en el cual la masa ya no está confinada a un plano, donde este nuevo par de funciones varían continuamente desde el modelo de disco delgado de Kuzmin [13], al modelo esférico de Plummer aplicado a cúmulos globulares [17]. En estos trabajos se presenta el potencial que representa una distribución de masa discoidal en coordenadas cilíndricas de la forma

$$\Phi_n(R, z) = \frac{GM}{(2n-1)!!} \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!a^k}{2^{n-k}(n-k)!} [R^2 + (a + |z|)^2]^{-\frac{(k+1)}{2}} P_k(x), \quad (3.1)$$

donde

$$x = \frac{a + |z|}{[R^2 + (a + |z|)^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.2)$$

En estas expresiones a representa un parámetro con unidades de longitud, y cada valor de n representa un modelo distinto, donde el modelo $n = 0$ se conoce en la literatura, como el disco de Kuzmin [13].

3.1.2 Potencial gravitacional de los discos generalizados de Kalnajs DGK

En el trabajo hecho por González y Reina [7], se presenta una familia infinita de discos delgados axialmente simétricos de radio finito, cuyo primer miembro es el disco de Kalnajs. En este trabajo el potencial que surge de resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas es

$$\Phi(\xi, \eta)_m = - \sum_{n=0}^m C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (3.3)$$

donde las C_{2n} son constantes conocidas, $P_{2n}(\eta)$ son los polinomios de Legendre, q_{2n} son las funciones de Legendre de segunda clase y cada valor de m corresponde a un modelo distinto de un disco. Las constantes que aparecen en esta última ecuación están dadas por la relación

$$C_{2n} = \frac{MG}{2a} \left[\frac{\pi^{\frac{1}{2}}(4n+1)(2m+1)!}{2^{2m}(2n+1)(m-n)!\Gamma(m+n+\frac{3}{2})q_{2n+1}(0)} \right] \quad (3.4)$$

para $n \leq m$ y $C_{2n} = 0$ para $n \geq m$. Las coordenadas ξ y η son las coordenadas esferoidales oblatas, y se relacionan con las coordenadas cilíndricas de la forma

$$R = a\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}, \quad (3.5)$$

$$z = a\xi\eta. \quad (3.6)$$

Donde a representa el radio del disco.

SECTION 3.2

Normalización

La normalización es la eliminación parcial o total de las unidades de una ecuación que envuelve cantidades físicas por medio de una sustitución de variables adecuadas. Con esta técnica se puede simplificar y parametrizar problemas donde unidades de medida están involucradas y es especialmente útil para sistemas físicos que pueden ser descritos por ecuaciones diferenciales; en este caso, las ecuaciones de movimiento dadas por (2.9). Los pasos a seguir para normalizar un sistema de ecuaciones son los siguientes:

1. Identificar todas las variables dependientes e independientes.
2. Reemplazar cada una de ellas con una cantidad escalada relativa a una unidad característica de medida para ser determinada.
3. Dividir por el coeficiente de mayor orden en la derivada.
4. Elegir la definición de las unidades características para cada variable de tal manera que la mayoría de los coeficientes se conviertan en 1.
5. Reescribir el sistema de ecuaciones en términos de las nuevas cantidades adimensionales.

Como un ejemplo ilustrativo de lo anterior, se considera una ecuación diferencial de primer orden con coeficientes constantes de la forma:

$$a \frac{dx}{dt} + bx = Af(t), \quad (3.7)$$

y aplicando el proceso anterior se tiene que:

1. En esta ecuación la variable independiente es t , y la variable dependiente es x .
2. Sea $x = \chi x_c$, $t = \tau t_c$. Reemplazando en la ecuación diferencial, resulta

$$a \frac{x_c}{t_c} \frac{d\chi}{d\tau} + bx_c \chi = Af(\tau t_c) = AF(\tau). \quad (3.8)$$

3. El coeficiente de mayor orden es el que acompaña a la derivada de primer orden. Dividiendo por este se tiene

$$\frac{d\chi}{d\tau} + \frac{bt_c}{a} \chi = \frac{At_c}{ax_c} F(\tau). \quad (3.9)$$

4. El coeficiente en frente de χ sólo contiene una variable característica t_c , Por lo tanto es fácil escoger ésta como la unidad:

$$\frac{bt_c}{a} = 1 \Rightarrow t_c = \frac{a}{b}, \quad (3.10)$$

seguidamente

$$\frac{At_c}{ax_c} = \frac{A}{bx_c} = \frac{A}{b}. \quad (3.11)$$

5. Así la ecuación sin dimensiones se convierte en una ecuación completamente independiente de cualquier parámetro con unidades:

$$\frac{d\chi}{d\tau} = F(\tau). \quad (3.12)$$

De forma general, cuando se tienen ecuaciones diferenciales de orden superior, la relación

$$t = \tau t_c \Rightarrow dt = t_c d\tau \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t_c}, \quad (3.13)$$

permite normalizar los operadores diferenciales con respecto a las variables independientes de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{t_c} \frac{d}{d\tau} \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \right)^n = \left(\frac{1}{t_c} \frac{d}{d\tau} \right)^n = \frac{1}{t_c^n} \frac{d^n}{d\tau^n}. \quad (3.14)$$

SECTION 3.3**Métodos numéricos para la solución de las ecuaciones de movimiento****3.3.1 Métodos de Runge-Kutta**

Muchas de las ecuaciones que describen sistemas físicos no se pueden resolver analíticamente, es decir, hay situaciones en las que encontrar una solución analítica a una ecuación es bastante difícil. Por esta razón, es de gran importancia acudir a herramientas que permitan encontrar una solución aproximada del problema con el menor margen de error posible. Estas herramientas son los métodos numéricos, siendo estos muy sencillos de implementar, y muy prácticos a la hora de resolver ecuaciones bastante complicadas.

En particular este trabajo, se centra en el estudio del método conocido como Runge-Kutta de cuarto orden, utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x), \quad (3.15)$$

con condición inicial $y(x_i) = y_i$. En general los métodos de Runge-Kutta (**RK**), se basan en las series de Taylor para estimar la solución a la ecuación anterior, mediante la aproximación

$$y_{i+1} = y_i + \Phi(x_i, y_i, h)h, \quad (3.16)$$

donde $\Phi(x_i, y_i, h)$ se conoce como la función incremento, que en analogía con las series de Taylor cuando se trunca a primer orden, puede considerarse como una pendiente representativa en el intervalo. La ecuación (3.16) se escribe en forma general como

$$\Phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n \quad (3.17)$$

donde las a son constantes y las k son relaciones de recurrencia dadas por

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (3.18)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \quad (3.19)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \quad (3.20)$$

.

.

.

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h), \quad (3.21)$$

en las que p y las q son constantes. Es posible tener varios tipos de métodos de Runge-Kutta empleando diferentes números de términos en la función incremento especificada por n ; de hecho, el método de Runge-Kutta de primer orden con $n = 1$ es el método de Euler [4].

Métodos de Runge-Kutta de cuarto orden

El más popular de los métodos **RK** es el de cuarto orden, $n = 4$. Hay muchas versiones de éste método, es decir dependiendo de los valores de las constantes en la ecuación (3.17) se tienen distintos **RK** de cuarto orden. De los métodos RK4, el más usado es de la forma

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) h, \quad (3.22)$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad (3.23)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right), \quad (3.24)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right), \quad (3.25)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h). \quad (3.26)$$

Finalmente, el método de Runge-Kutta también se puede utilizar para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, de la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y, y', x), \quad (3.27)$$

con condiciones iniciales $y(x_i) = y_i$ y $y'(x_i) = y'_i$, ya que esta última ecuación, se puede escribir como el sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden acoplado, dado

por

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \quad (3.28)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f(y, y', x), \quad (3.29)$$

con $y_1 = y$ y $y_2 = dy/dx$. De esta manera, el esquema anterior se aplica a cada una de estas ecuaciones por separado.

3.3.2 Convergencia

Como se dijo antes, cuando se utilizan métodos numéricos para resolver una ecuación diferencial, la solución que se obtiene es una aproximación el cual lleva un error asociado de cierto orden. En el caso particular del método **RK** de cuarto orden tiene un error de truncamiento global de cuarto orden ($O(h^4)$); este error es proporcional al tamaño del paso h en el que se hacen las iteraciones, es decir, entre mas pequeño sea el paso en el que se realizan las iteraciones mas pequeño será el error con el que se está aproximando la solución, y por lo tanto, esta es más precisa. Siendo que lo que se obtiene cuando se utilizan métodos numéricos, es una solución aproximada a un problema dado, es necesario verificar si dicha solución converge a la solución en el continuo.

Para ilustrar el concepto de convergencia de manera más general, se considera una función f_t que es solución numérica de una ecuación diferencial ordinaria a un tiempo dado, y que ha sido construida bajo la discretización de dicha ecuación con una aproximación de segundo orden. Suponiendo además que se conoce la solución exacta $f_0(x)$, el resultado numérico puede escribirse en la forma $f(x) = f_0(x) + E(x)h^2 + O(h^3)$, donde E denota un coeficiente del error. Dado que se conoce la solución exacta, es posible conocer el error con que se calcula la solución numérica usando distintos valores de h . sean f_1 y f_2 dos soluciones numéricas calculadas usando las resoluciones h y $h/2$ respectivamente. La razón entre los errores es la siguiente

$$\frac{f_1 - f_0}{f_2 - f_0} = \frac{h^2 + O(h^3)}{\frac{1}{4}h^2 + O(h^3)} = 4 + O(h). \quad (3.30)$$

El número cuatro en (3.30) se llama factor de convergencia y debe ser evaluado en cada paso del tiempo donde se ha calculado la función f . Cuando en un cálculo numérico que se ha llevado a cabo a partir de una aproximación de segundo orden el factor de convergencia es $4 = 2^2$, se dice que la solución converge a segundo orden. De manera análoga, es posible mostrar que si la aproximación es de cuarto orden, el factor será $16 = 2^4$.

Para el caso en que se desconoce la solución exacta, es posible hacer un estudio de convergencia usando los resultados numéricos calculados con tres resoluciones distintas, llamado estudio de convergencia. Para ilustrar el concepto de autoconvergencia, se consideran tres funciones f_1 , f_2 y f_3 que son solución numérica de una ecuación diferencial ordinaria a un tiempo dado, calculadas usando las resoluciones h , $h/2$ y $h/4$ y que han sido construidas bajo la discretización de dicha ecuación con una aproximación de cierto orden. Una vez obtenidas estas soluciones numéricas, se puede calcular la siguiente razón

$$\begin{aligned} \frac{f_1 - f_2}{f_2 - f_3} &= \frac{h^2 - \frac{1}{4}h^2 + O(h^3)}{\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{16}h^2 + O(h^3)} \\ &= \frac{h^2 + O(h^3)}{\frac{1}{4}h^2 + O(h^3)} = 4 + O(h), \end{aligned} \tag{3.31}$$

donde una vez más el resultado se llama factor de convergencia.

Capítulo 4

ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO EN EL PLANO ECUATORIAL EN POTENCIALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS

En este capítulo, se realiza el estudio numérico de la estabilidad radial de las órbitas circulares en el plano ecuatorial, de una partícula de prueba sometida a la acción de los potenciales gravitacionales dados por las ecuaciones (3.1), (3.3). Para esto, se analiza la curva del potencial efectivo junto con el comportamiento de la evolución temporal de la coordenada radial R , la cual se obtiene de la solución numérica de las ecuaciones de movimiento dadas por (2.9). En resumen, la sección 4.1 presenta el estudio detallado de la estabilidad radial, para el primer término de la familia de los discos de Toomre $n = 0$ [14, 15], mientras que en la sección 4.2 se realiza el mismo estudio a los modelos $m = 1$ y $m = 3$ de los discos generalizados de Kalnajs [7].

SECTION 4.1

Estabilidad radial de las órbitas circulares en el potencial de Toomre

4.1.1 Ecuaciones de movimiento

A continuación, se obtienen las expresiones correspondientes a las ecuaciones de movimiento (2.13), para los modelos desde $n = 0$ hasta $n = 2$. Para esta finalidad, a partir de las ecuaciones (3.1) y (2.12) se definen los potenciales efectivos para los 3 primeros modelos de la siguiente forma

$$\Phi_{eff}(R, 0)_0 = -\frac{GM}{(R^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{L_z^2}{2R^2}, \quad (4.1)$$

$$\Phi_{eff}(R, 0)_1 = -\frac{GM}{(R^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{GMa^2}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{L_z^2}{2R^2}, \quad (4.2)$$

$$\Phi_{eff}(R, 0)_2 = -\frac{GM}{(R^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{GMa^2}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{GMa^2}{3} \frac{(2a^2 - R^2)}{(R^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{L_z^2}{2R^2}, \quad (4.3)$$

donde M es la masa del disco, G la constante de Cavendish y a es un parámetro con unidades de longitud. Con base en la sección 3.2 se muestra en detalle la obtención de la ecuación de movimiento normalizada para el modelo $n = 0$. Para empezar, se reemplaza (4.1) en (2.13)

$$\ddot{R} = \frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{d}{dR} \left[-\frac{GM}{(R^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{L_z^2}{2R^2} \right], \quad (4.4)$$

seguidamente, si se definen ahora las cantidades características $R = \tilde{R}a$ y $t = \tau t_c$, la ecuación anterior después de realizar la derivada, se puede escribir de la forma

$$\frac{d^2(\tilde{R})}{d(\tau)^2} = \ddot{\tilde{R}} = k \left[\frac{\tilde{L}_z^2}{\tilde{R}^3} - \frac{\tilde{R}}{(\tilde{R}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad (4.5)$$

donde $\tilde{L}_z^2 = L_z^2(t_c^2/a^4)$ y $k = (tc_2GM)/a^3$. Ahora, normalizando a 1 la cantidad k , finalmente se obtiene

$$\ddot{\tilde{R}}_0 = \frac{\tilde{L}_z^2}{\tilde{R}^3} - \frac{\tilde{R}}{(\tilde{R}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.6)$$

En efecto, esta es la ecuación de movimiento normalizada que se estaba buscando, la cual corresponde al primer modelo de la familia de discos de Toomre. Ahora, con el fin de obtener resultados que puedan representar sistemas astrofísicos, se toman los valores para G , a y M de la siguiente manera

- $G = 6,75 * 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$,
- $a = 1Kpc = 3 * 10^{19} m$,
- $M = 10^{11} M_{\odot} \approx 2 * 10^{41} kg$,

el cual determinan el tiempo característico $t_c = (a^3/GM)^{(1/2)}$, cuyo valor es

- $t_c = 4,4721 * 10^{13} s = 1,4181 * 10^6$ años.

Para concluir, se presentan las ecuaciones de movimiento para los modelos restantes, las cuales están dadas por las expresiones

$$\ddot{\tilde{R}}_1 = \frac{\tilde{L}_z^2}{\tilde{R}^3} - \frac{\tilde{R}}{(\tilde{R}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\tilde{R}}{(\tilde{R}^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \quad (4.7)$$

$$\ddot{\tilde{R}}_2 = \frac{\tilde{L}_z^2}{\tilde{R}^3} - \frac{\tilde{R}}{(\tilde{R}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\tilde{R}}{(\tilde{R}^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\tilde{R}(\tilde{R}^2 - 4)}{(\tilde{R}^2 + 1)^{\frac{7}{2}}}. \quad (4.8)$$

4.1.2 Órbitas circulares y estabilidad radial: Discos de Toomre

A continuación, se estudia con detalle la estabilidad radial de las órbitas circulares para el término $n = 0$, en la ecuación (3.1). Para esto, de la condición para la existencia de las órbitas circulares (2.17), y las ecuaciones (4.1) y (2.14) se obtienen las expresiones para la componente z del momento angular, el potencial efectivo y la energía dadas por

$$\tilde{L}_z^2 = \frac{\tilde{R}_0^4}{(\tilde{R}_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.9)$$

$$\tilde{\Phi}_{eff} = -\frac{1}{(\tilde{R}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\tilde{L}_z^2}{2\tilde{R}^2} \quad (4.10)$$

$$\epsilon = \frac{\dot{\tilde{R}}^2}{2} - \frac{1}{(\tilde{R}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\tilde{L}_z^2}{2\tilde{R}^2}, \quad (4.11)$$

donde $\tilde{L}_z^2 = (t_c^2/a^4)L_z^2$, $\tilde{\Phi}_{eff} = (t_c^2/a^2)\Phi$, $\tilde{R} = R/a$, $\dot{\tilde{R}} = (t_c/a)\dot{R}$ y $\epsilon = (t_c^2/a^2)E$. El valor de la coordenada \tilde{R} que es solución de la ecuación (4.9), es el radio de la órbita circular con momento angular \tilde{L}_z . Así, en la figura 4.1, cada par coordenado $(\tilde{L}_z, \tilde{R}_0)$ define una órbita circular con momento angular constante \tilde{L}_z y radio \tilde{R}_0 .

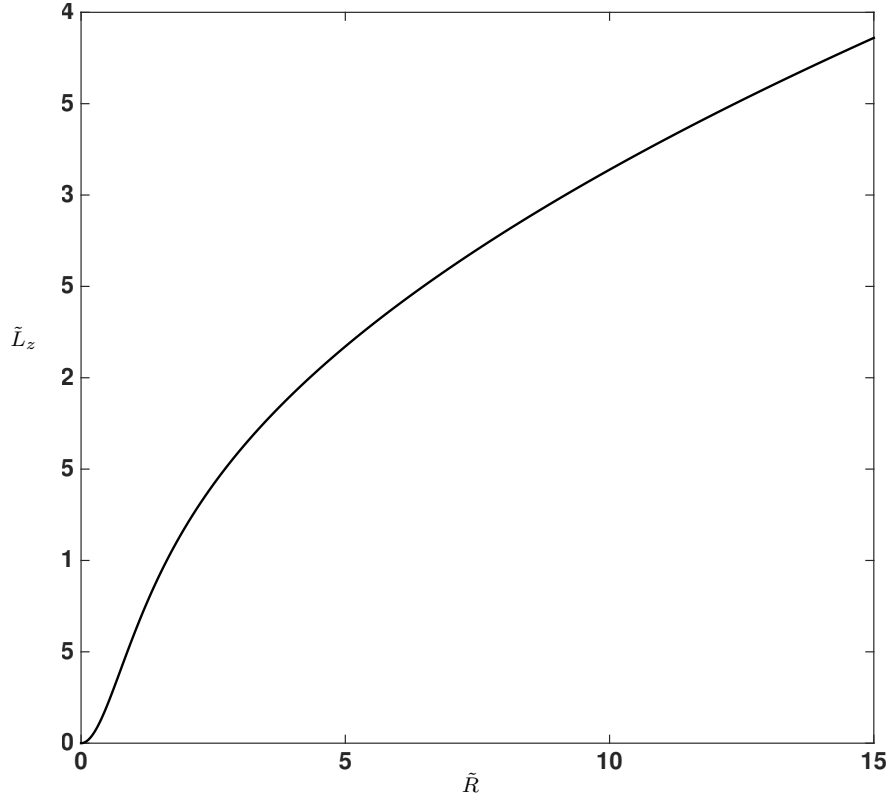


Figura 4.1: Gráfica del momento angular \tilde{L}_z contra \tilde{R} para el término $n = 0$ correspondiente al disco de Kuzmin.

Por ejemplo, para los valores $\tilde{R} = \tilde{R}_0 = 2$ y $\tilde{L}_z = 1,196$ que satisfacen (4.9), se observa que en la figura 4.2, correspondiente a la gráfica del potencial efectivo (4.10), hay un mínimo en el punto $(2, -0,268)$. De acuerdo con lo dicho en la sección 2.2, este punto corresponde a una órbita circular, con radio $\tilde{R}_0 = 2$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,196$, y energía $\epsilon = -0,268$.

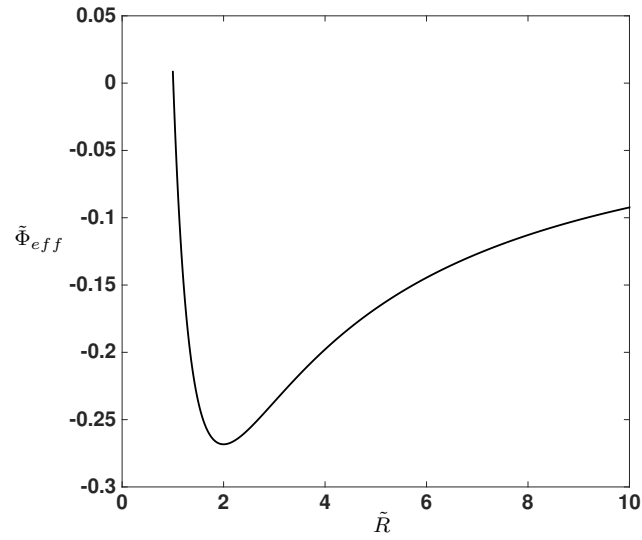


Figura 4.2: Gráfica del potencial efectivo $\tilde{\Phi}$ en función de \tilde{R} , con $\tilde{L}_z = 1,196$ para el modelo de Kuzmin ($n = 0$)

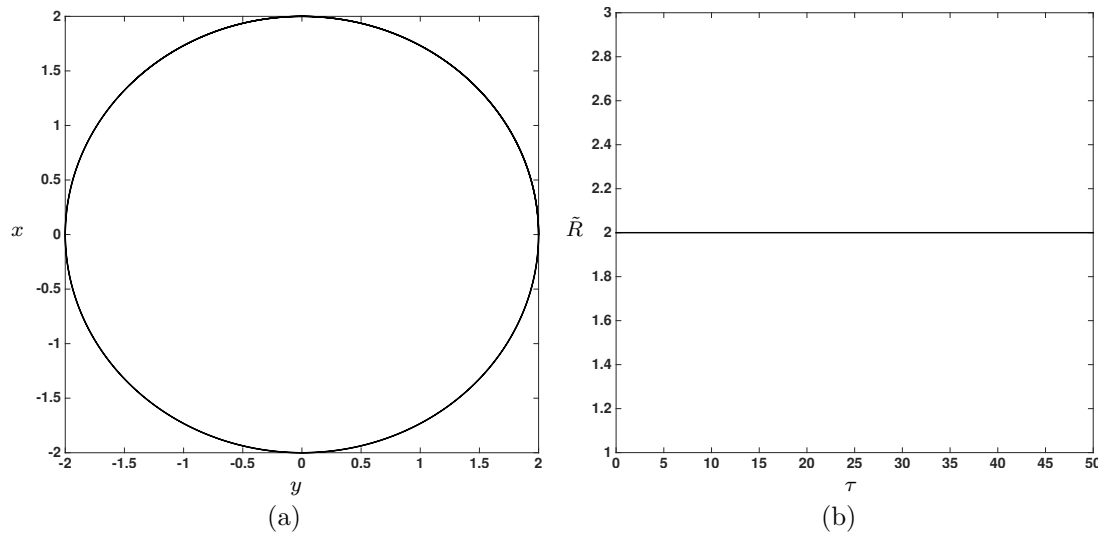


Figura 4.3: (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 2$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,196$ y energía $\epsilon = -0,268$

(b) Evolución temporal de la coordenada radial \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 2$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,196$. La resolución temporal utilizada es $h = 0,1$.

La figura 4.3b, muestra la gráfica de la evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida

a partir de la solución numérica de la ecuación de movimiento

$$\ddot{\tilde{R}}_0 = \frac{\tilde{L}_z^2}{\tilde{R}^3} - \frac{\tilde{R}}{(\tilde{R}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.12)$$

la cual está sujeta a las condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 2$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$. Se observa entonces, que para cualquier tiempo τ , el valor de \tilde{R} permanece constante, siendo este el radio de la órbita circular mostrada en la figura 4.3a.

Ahora, con el fin de estudiar la estabilidad de esta órbita circular bajo una perturbación radial, se procede a resolver de nuevo la ecuación (4.12), esta vez sujeta a las condiciones iniciales

$$\tilde{R}_0 = \tilde{R}_0 + \delta\tilde{R}_0, \quad (4.13)$$

$$\dot{\tilde{R}}_0 = 0, \quad (4.14)$$

donde la expresión (4.13) indica que la partícula, inicialmente en una órbita circular de radio \tilde{R}_0 , sufre una perturbación radial dada por $\delta\tilde{R}_0$. La figura 4.4b muestra la solución numérica obtenida de esta ecuación, en la que se escogió una perturbación igual al 1% del radio inicial de la órbita, es decir, $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$. En la figura se observa, que bajo esta perturbación, el movimiento resultante exhibe un comportamiento oscilatorio alrededor del punto de equilibrio $\tilde{R}_0 = 2$ (radio inicial de la órbita circular). El análisis de este movimiento junto con la gráfica del potencial efectivo, muestra que el movimiento es ligado, encontrándose la partícula confinada en el pozo de potencial definido por el mínimo en la gráfica 4.2, oscilando entre los puntos de retorno $1,98 \leq \tilde{R} \leq 2,02$. Finalmente, la órbita resultante conserva su forma circular como se puede apreciar en la figura 4.4a.

El método numérico utilizado para la solución de las ecuaciones anteriores, es el método de Runge-Kutta de cuarto orden descrito en la sección 3.3. La figura (4.5) muestra las gráficas respectivas de la autoconvergencia de las soluciones encontradas. Se observa de estas que efectivamente, para las resoluciones correspondientes a pasos de tiempo $h_1 = 0,1$, $h_2 = h_1/2$ y $h_3 = h_1/4$, la razón dada por la ecuación (3.31) corresponde a un factor de convergencia de 16, es decir, si en la figura 4.5a la curva a trozos se multiplica por dieciséis, esta debe coincidir de manera aproximada a la curva continua, que es lo que se observa en la figura 4.5b, tal como se espera de la autoconvergencia de un método de cuarto orden.

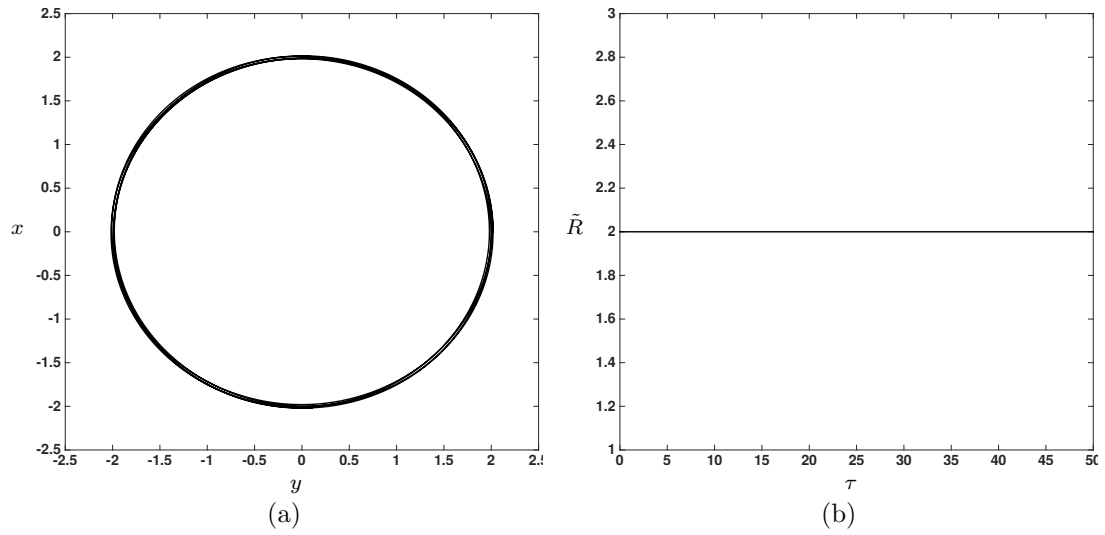


Figura 4.4: (a) Órbita cuasi-circular acotada entre los radios $1,98 \leq \tilde{R} \leq 2,02$, con momento angular $\tilde{L}_z = 1,196$
 (b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 2,01$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,196$.

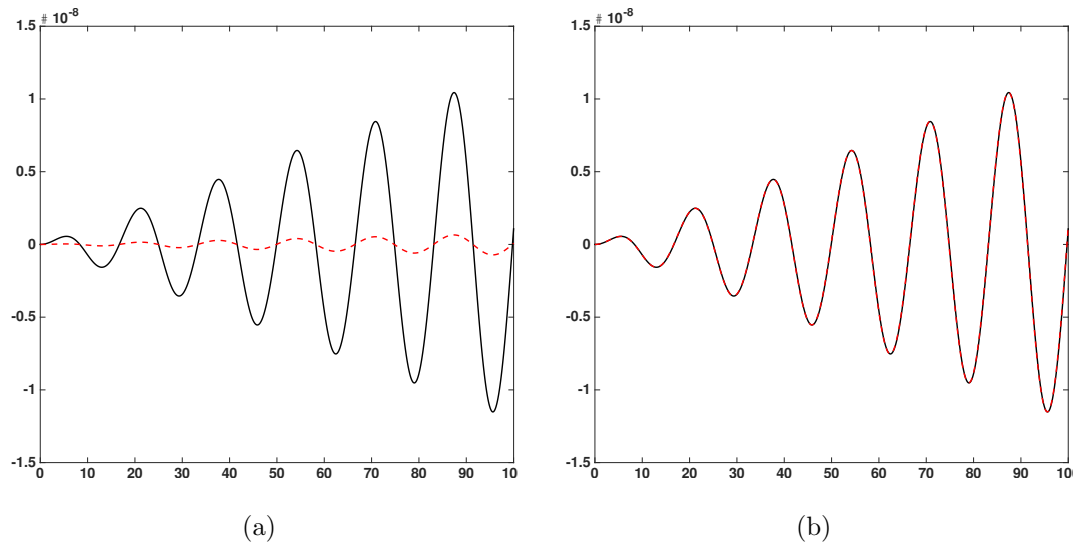


Figura 4.5: Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para las tres resoluciones $h_1 = 0,01$, $h_1/2$, $h_1/4$

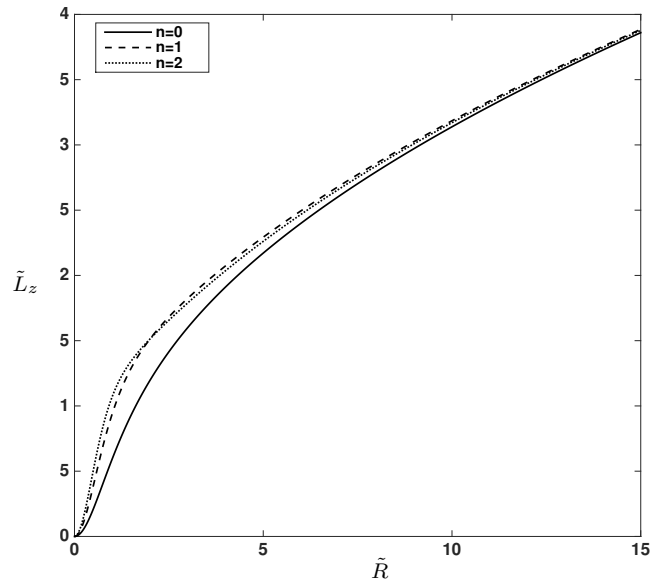


Figura 4.6: Gráfica del momento angular \tilde{L}_z contra \tilde{R} para los términos $n = 0$, $n = 2$ y $n = 3$ correspondientes a los discos de Toomre

La figura 4.6 muestra la gráfica del momento angular para los modelos $n = 0, 1, 2$. Se observa allí que el comportamiento de estas curvas son muy similares, siendo estas monótonamente crecientes, y cualquier punto que se escoja sobre esta curva para los distintos modelos, arrojará resultados muy similares a los que se acaban de obtener, por tal razón, el estudio de la estabilidad radial para las órbitas circulares, para el modelo $n = 0$ se puede extender para los modelos restantes sin perder generalidad.

SECTION 4.2

Estabilidad radial de órbitas circulares en el potencial de Kalnajs

4.2.1 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento para los DGK se obtienen realizando un procedimiento similar al que se hizo para el caso de los discos de Toomre, sólo que debido a que estos discos son de extensión finita, se tiene en cuenta que en el plano ecuatorial los modelos de los DGK tienen dos regiones, siendo estas la interior ($\xi = 0$) y exterior ($\eta = 0$) al disco. Debido a esto, las expresiones del potencial efectivo normalizado al radio del disco ($\tilde{R} = R/a$), y las ecuaciones de movimiento para los modelos $m = 1, 2, 3$ en las dos regiones son

- Región que comprende el disco

$$\Phi_{eff}(R, 0)_1 = \frac{3GM\pi}{8} \frac{(\tilde{R}^2 - 2)}{a} + \frac{L_z^2}{2\tilde{R}^2 a^2}, \quad (4.15)$$

$$\Phi_{eff}(R, 0)_2 = -\frac{15GM\pi}{128} \frac{(3\tilde{R}^4 - 8\tilde{R}^2 + 8)}{a} + \frac{L_z^2}{2\tilde{R}^2 a^2}, \quad (4.16)$$

$$\Phi_{eff}(R, 0)_3 = \frac{35GM\pi}{512} \frac{(5\tilde{R}^6 - 18\tilde{R}^4 + 24\tilde{R}^2 - 16)}{a} + \frac{L_z^2}{2\tilde{R}^2 a^2} \quad (4.17)$$

$$\ddot{\tilde{R}}_1 = \frac{\tilde{L}_z^2}{\tilde{R}^3} - \frac{3\pi\tilde{R}}{4}, \quad (4.18)$$

$$\ddot{\tilde{R}}_2 = \frac{\tilde{L}_z^2}{\tilde{R}^3} - \frac{1260\pi\tilde{R}(1 - \tilde{R}^2)}{896} - \frac{420\pi\tilde{R}}{896}, \quad (4.19)$$

$$\ddot{\tilde{R}}_3 = \frac{\tilde{L}_z^2}{\tilde{R}^3} - \frac{\tilde{R}\pi(525\tilde{R}^4 - 1260\tilde{R}^2 + 840)}{256}. \quad (4.20)$$

- Región fuera del disco

$$\Phi_{eff}(R, 0)_1 = \frac{3MG}{4a} (2\beta - \tilde{R}^2\beta + q^{\frac{1}{2}}) + \frac{L_z^2}{2\tilde{R}^2 a^2}, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{eff}(R, 0)_2 &= \frac{120MG}{a}(\tilde{R}^2\beta - \beta) - \\ &\quad - \frac{45GM}{64a}(\tilde{R}^4\beta + q^{\frac{1}{2}}) - q^{\frac{3}{2}} + \frac{L_z^2}{2\tilde{R}^2a^2},\end{aligned}\quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{eff}(R, 0)_3 &= \frac{7GM}{768a}(240\beta - 360\tilde{R}^2\beta + 270\tilde{R}^4\beta - 75\tilde{R}^6\beta - 70q^{\frac{3}{2}}) + \\ &\quad + \frac{525GM}{768a}(q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{5}{2}}) + \frac{L_z^2}{2\tilde{R}^2a^2},\end{aligned}\quad (4.23)$$

$$\ddot{\tilde{R}}_1 = \frac{\tilde{L}_z^2}{\tilde{R}^3} + \frac{3q^{\frac{1}{2}}}{2\tilde{R}} - \frac{3\beta\tilde{R}}{2},\quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{R}}_2 &= \frac{\tilde{L}_z^2}{\tilde{R}^3} - \frac{1260\tilde{R}^4 - 1443\tilde{R}^2 - 630\tilde{R} + 813}{448\tilde{R}q^{1/2}} + \\ &\quad + \frac{\tilde{R}\beta(1260\tilde{R}^2 - 1680)}{448},\end{aligned}\quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{R}}_3 &= \frac{\tilde{L}_z^2}{\tilde{R}^3} - \frac{(280\tilde{R}^2 - 1190\tilde{R}^4 + 1435\tilde{R}^6 - 525\tilde{R}^8)}{128\tilde{R}^3} + \\ &\quad + \frac{\tilde{R}^4(105\beta q^{\frac{1}{2}} - 210\beta q^{\frac{3}{2}} + 525\beta q^{\frac{5}{2}})}{128\tilde{R}^3}.\end{aligned}\quad (4.26)$$

Donde $q = \tilde{R}^2 - 1$, $\beta = \cot^{-1}((\tilde{R}^2 - 1)^{(1/2)})$, y $\tilde{L}_z^2 = (t_c^2/a^4)L_z$. Al igual que antes, para tener resultados que representen objetos astrofísicos, se asumen los valores

- $a = 10kpc$
- $t_c = 44,844 * 10^6$ años

siendo a el radio del disco y t_c el tiempo característico, los valores de M y G son los mismos que se utilizaron en la sección anterior.

4.2.2 Órbitas circulares y estabilidad radial: discos generalizados de Kalnajs

Al igual que como se hizo para los discos de Toomre, se presenta ahora, un análisis detallado de la estabilidad radial de las órbitas circulares ecuatoriales, a partir de la solución numérica de las ecuaciones de movimiento obtenidas en la sección anterior, junto con el análisis gráfico del potencial efectivo, para los modelos $m = 1$ y $m = 3$ de los DGK.

modelo $m = 1$

Para empezar, tal como se hizo antes, se definen a partir de las ecuaciones (2.17),(2.14), (4.15), y (4.21) las expresiones normalizadas correspondientes a la componente z del momento angular, el potencial efectivo y la energía como siguen

- Región interior

$$\tilde{L}_z^2 = \frac{3\pi}{4}\tilde{R}_0^4, \quad (4.27)$$

$$\tilde{\Phi}_{eff}(\tilde{R}, 0) = \frac{\pi}{8}(3\tilde{R}^2 - 6) + \frac{\tilde{L}_z}{2\tilde{R}^2}, \quad (4.28)$$

$$\epsilon = \frac{\dot{\tilde{R}}^2}{2} + \frac{\pi}{8}(3\tilde{R}^2 - 6) + \frac{\tilde{L}_z}{2\tilde{R}^2}. \quad (4.29)$$

- Región exterior

$$\tilde{L}_z^2 = \frac{3\tilde{R}_0^4\beta}{2} - \frac{3\tilde{R}_0^2q^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad (4.30)$$

$$\tilde{\Phi}_{eff}(\tilde{R}, 0) = \frac{3}{4}(2\beta - \tilde{R}^2\beta + q^{\frac{1}{2}}) + \frac{L_z^2}{2\tilde{R}^2a^2}, \quad (4.31)$$

$$\epsilon = \frac{\dot{\tilde{R}}^2}{2} + \frac{3}{4}(2\beta - \tilde{R}^2\beta + q^{\frac{1}{2}}) + \frac{L_z^2}{2\tilde{R}^2a^2}. \quad (4.32)$$

Donde $\tilde{L}_z = (t_c^2/a^4)L_z^2$, $\tilde{\Phi}_{eff} = (t_c^2/a^2)\Phi$, $\tilde{R} = R/a$, $\dot{\tilde{R}} = (t_c/a)\dot{R}$ y $\epsilon = (t_c^2/a^2)E$. El conjunto de valores de \tilde{L}_z y \tilde{R} , que satisfacen las ecuaciones (4.27) y (4.30), definen todas las órbitas circulares para el modelo $m = 1$ de los DGK, mientras que el potencial efectivo y la energía total dados por las ecuaciones (4.28),(4.31), (4.29) y (4.32), dan información sobre la dinámica del problema.

La figura 4.7 muestra la gráfica del momento angular vs la coordenada \tilde{R} , la cual indica la condición que se debe cumplir para la existencia de una órbita circular. Así, todo par coordinado $(\tilde{R}_0, \tilde{L}_z)$ sobre la curva, define una órbita circular con momento angular \tilde{L}_z y radio \tilde{R}_0 . En comparación con la gráfica del momento angular obtenida para los modelos de Toomre (figura 4.6), se observa que la curva ya no es monótonamente creciente para cualquier valor de \tilde{R} , ya que decrece a partir del punto $\tilde{R} = 1$ (borde

del disco), hasta el punto $\tilde{R} = 1,17$, el cual vuelve a ser creciente. Debido a esto, las líneas de momento angular constante b y c , intersectan la curva en puntos en los que tres o dos valores distintos de \tilde{R} comparten el mismo valor de la componente z del momento angular, mientras que las líneas a y d definen puntos de intersección en los que la relación entre la coordenada radial \tilde{R} y el momento angular es uno a uno. Por esta razón, este modelo admite distintas órbitas circulares en el plano ecuatorial con el mismo valor de la componente z del momento angular.

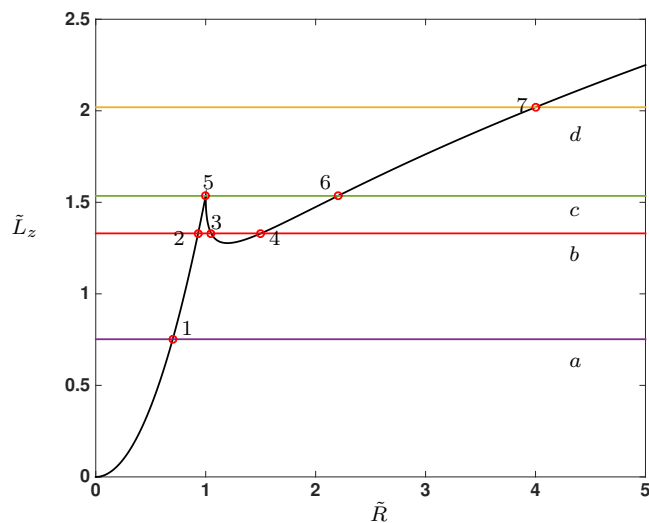


Figura 4.7: Gráfica de \tilde{L}_z vs \tilde{R} para el modelo $m = 1$ de los discos generalizados de Kalnajs. Las líneas horizontales c , b , d y a cortan la curva en los puntos $(\tilde{R} = 1, \tilde{L}_z = 1,535)$, $(\tilde{R} = 2,203, \tilde{L}_z = 1,535)$, $(\tilde{R} = 0,931, \tilde{L}_z = 1,330)$, $(\tilde{R} = 1,050, \tilde{L}_z = 1,330)$, $(\tilde{R} = 1,502, \tilde{L}_z = 1,330)$, $(\tilde{R} = 4, \tilde{L}_z = 2,019)$, $(\tilde{R} = 0,7, \tilde{L}_z = 0,752)$, respectivamente. La región interior al disco está definida por $\tilde{R} \leq 1$ y la región exterior está definida por $\tilde{R} > 1$

Para ilustrar lo dicho en el párrafo anterior, la figura 4.8 muestra las gráficas respectivas del potencial efectivo en función de la coordenada radial \tilde{R} para los valores de la componente z del momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ y $\tilde{L}_z = 1,535$ correspondientes a las líneas b y c en la figura 4.7. Se observa que los valores de las coordenadas radiales $\tilde{R} = 2,203$, $\tilde{R} = 0,931$ y $\tilde{R} = 1,502$ que corresponden a los mínimos 2, 4 y 6 en las figuras 4.8a y 4.8b, son los mismos para los puntos 2, 4 y 6 que están ubicados sobre las regiones en que la curva del momento angular es creciente. De igual forma los valores $\tilde{R} = 1,050$ y $\tilde{R} = 1$, en los que se ubican el máximo y el punto de inflexión 3 y 6, están sobre la región decreciente y el pico pronunciado respectivamente.

Con el fin de analizar la estabilidad de las órbitas circulares para este modelo, se escogen solo las órbitas correspondientes a los puntos 2 al 6, en los que las líneas b y c cortan la curva de la figura 4.1, ya que las órbitas en los puntos 1 y 7 de la intersección con las

líneas a y d , no aportan nada nuevo a lo que ya se hizo para el disco de Kuzmin. De esta manera, las figuras 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13 muestran los resultados obtenidos de resolver las ecuaciones de movimiento (4.18) y (4.24), con condiciones iniciales $\tilde{R} = \tilde{R}_0$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$, donde \tilde{R}_0 son los radios de las órbitas circulares. En estas se aprecia las respectivas órbitas circulares, y las evoluciones temporales de las coordenadas radiales para cada solución obtenida, en las cuales se observa que a medida que pasa el tiempo la partícula se mueve en una órbita circular con radio constante.

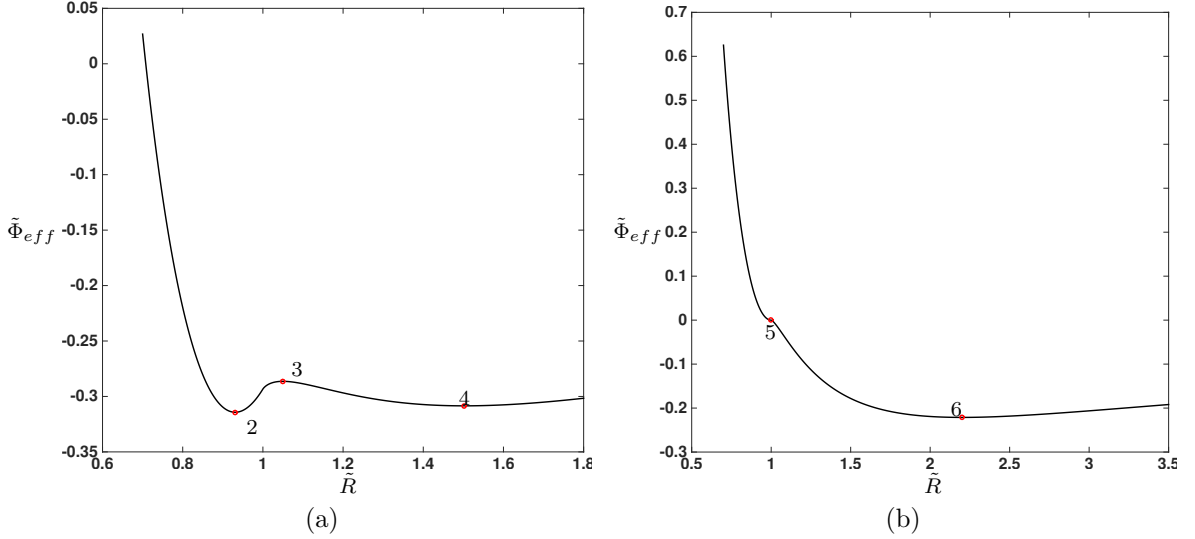


Figura 4.8: (a) Gráfica de $\tilde{\Phi}_{eff}$ vs \tilde{R} con $\tilde{L}_z^2 = 1,7689$. Los mínimos y máximos están en los puntos $(\tilde{R} = 0,931, \tilde{\Phi} = -0,3143)$, $(\tilde{R} = 1,050, \tilde{\Phi} = -0,286)$ y $(\tilde{R} = 1,502, \tilde{\Phi} = -0,308)$.

(b) Gráfica de $\tilde{\Phi}_{eff}$ vs \tilde{R} con $\tilde{L}_z^2 = 2,356$ donde los mínimos y máximos están en los puntos $(\tilde{R} = 1, \tilde{\Phi} = 0)$ y $(\tilde{R} = 2,203, \tilde{\Phi} = -0,221)$.

Como se hizo antes, la estabilidad radial de estas órbitas circulares se hace analizando los resultados que se obtienen de resolver las ecuaciones de movimiento (4.18) y (4.24), con condiciones iniciales dadas por (4.13), siendo \tilde{R}_0 el radio de órbita circular. Para esto, se considera como perturbación el valor correspondiente al uno por ciento de los radios iniciales de las órbitas circulares ($\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$). Con base en la figura 4.8, primero se analizará la estabilidad de las órbitas circulares que corresponden a los mínimos en el potencial efectivo, luego se analiza la estabilidad de la órbita que corresponde al máximo, para terminar con la que corresponde al punto de inflexión.

De acuerdo a lo anterior, las figuras 4.14, 4.15, 4.17, 4.18, 4.20 y 4.21, correspondientes a las perturbaciones de las órbitas con energías $\epsilon = -0,314$, $\epsilon = -0,308$ y $\epsilon = -0,221$ (figuras 4.9, 4.11 y 4.13), muestran que las evoluciones temporales de las coordenadas radiales oscilan con respecto a un punto de equilibrio, siendo estos los radios de las

órbitas circulares iniciales. Como se dijo antes, cada punto de equilibrio en estas gráficas, corresponde a un mínimo en las curvas del potencial efectivo de la figura 4.8, de manera que el movimiento resultante está confinado en estos pozos de potencial, moviéndose la partícula entre un punto de retorno máximo y un punto de retorno mínimo, en los cuales siempre se cumple que la velocidad radial es cero. Se observa también, que las órbitas resultantes son casi circulares, conservando su forma inicial después de la perturbación. Finalmente, para estos casos las figuras 4.16, 4.19 y 4.22 muestran las respectivas gráficas de la autoconvergencia del método RK4, con las resoluciones $h_1 = 0,05$, $h_2 = h_1/2$ y $h_2 = h_1/4$. Se observa en estas, que para cada una de las soluciones obtenidas, el método RK4 autoconverge según lo dicho en la sección 3.3.

Las figuras 4.23 y 4.25, correspondientes a la perturbación de la órbita circular con energía $\epsilon = -0,286$ (figura 4.10), muestran también oscilaciones en la evolución temporal de la coordenada radial, pero con respecto a un punto de equilibrio diferente al radio inicial de la órbita circular. Es importante señalar que la órbita circular inicial, corresponde al máximo del potencial efectivo de la figura 4.8b, y las órbitas resultantes oscilan ahora alrededor de los puntos de equilibrio $\tilde{R} = 1,502$ y $\tilde{R} = 0,931$, los cuales corresponden a los puntos de energía mínima $\epsilon = -0,308$ y $\epsilon = -0,314$, quedando el movimiento ligado a nuevos puntos de retorno cercanos a estas energías. Las órbitas resultantes para estos casos, son las mostradas en las figuras 4.23a y 4.25a, en las cuales, se observa que estas ya no son circulares. Al igual que el caso anterior, las figuras 4.24 y 4.26 muestran el análisis de la autoconvergencia del método RK4 utilizado para las soluciones de las ecuaciones de movimiento. De estas se observa que para las resoluciones $h_1 = 0,0125$, $h_2 = h_1/2$ y $h_2 = h_1/4$, el método autoconverge cuando la perturbación que se hace es positiva, mientras que el criterio no se satisface del todo cuando la perturbación es negativa, aún cuando la resolución utilizada se reduce a $h_1 = 0,00078125$.

Finalmente, la figura 4.27, la cual corresponde a la perturbación de la órbita circular con energía $\epsilon = 0$ (figura 4.12), muestra que el movimiento ya no es ligado, es decir, ya no se producen oscilaciones respecto a ningún punto de equilibrio mostrado en la gráfica del potencial efectivo (figura 4.8). La figura 4.28 muestra la respectiva autoconvergencia para este caso.

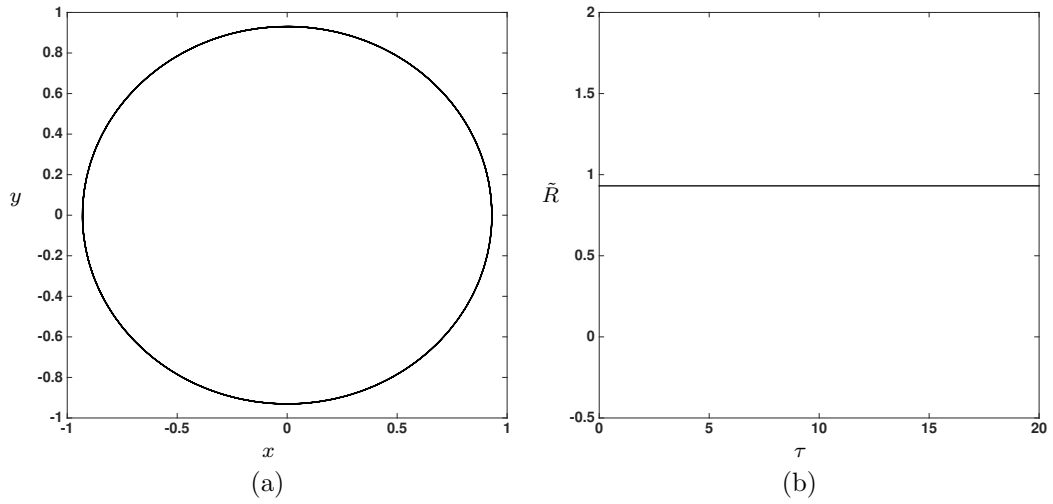


Figura 4.9: (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 0,931$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ y energía $\epsilon = -0,314$.

(b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,931$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$.

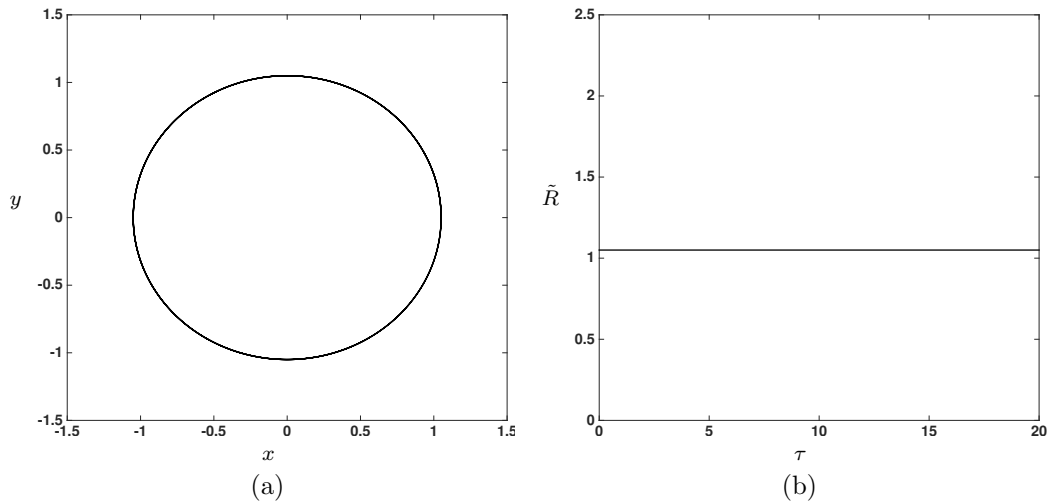


Figura 4.10: (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 1,050$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ y energía $\epsilon = -0,286$.

(b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,050$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$.

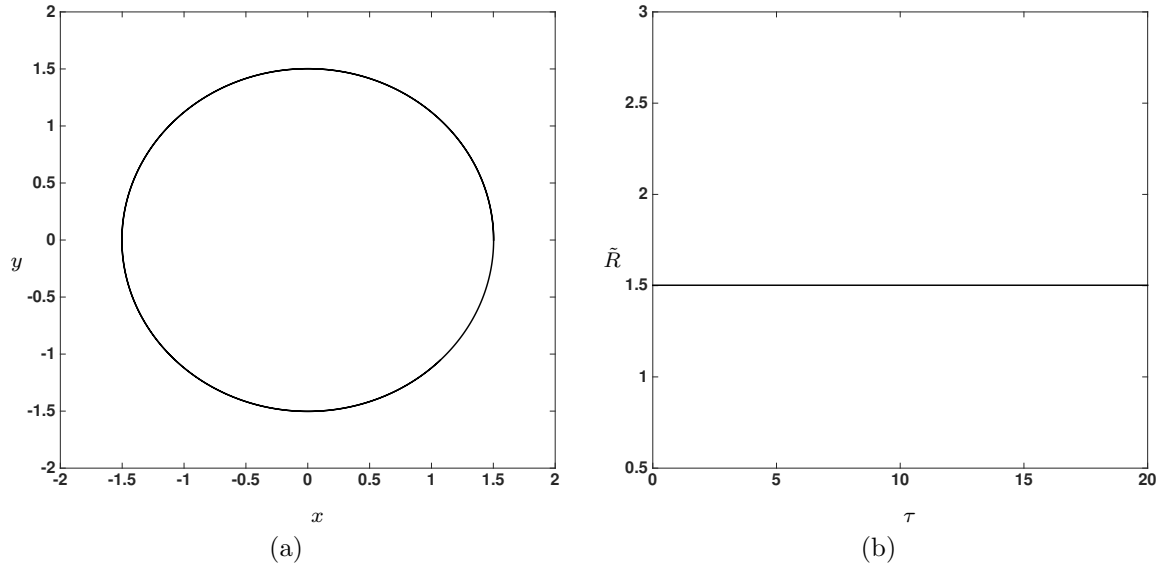


Figura 4.11: (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 1,502$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ y energía $\epsilon = -0,308$.

(b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,502$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$.

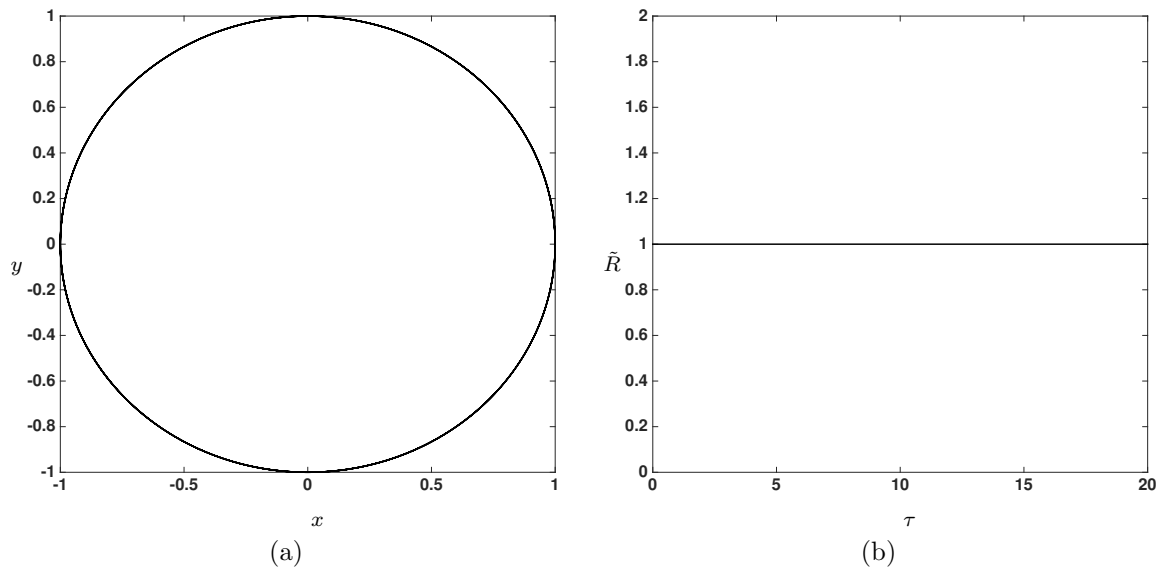


Figura 4.12: (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 1$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$ y energía $\epsilon = 0$.

(b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$.

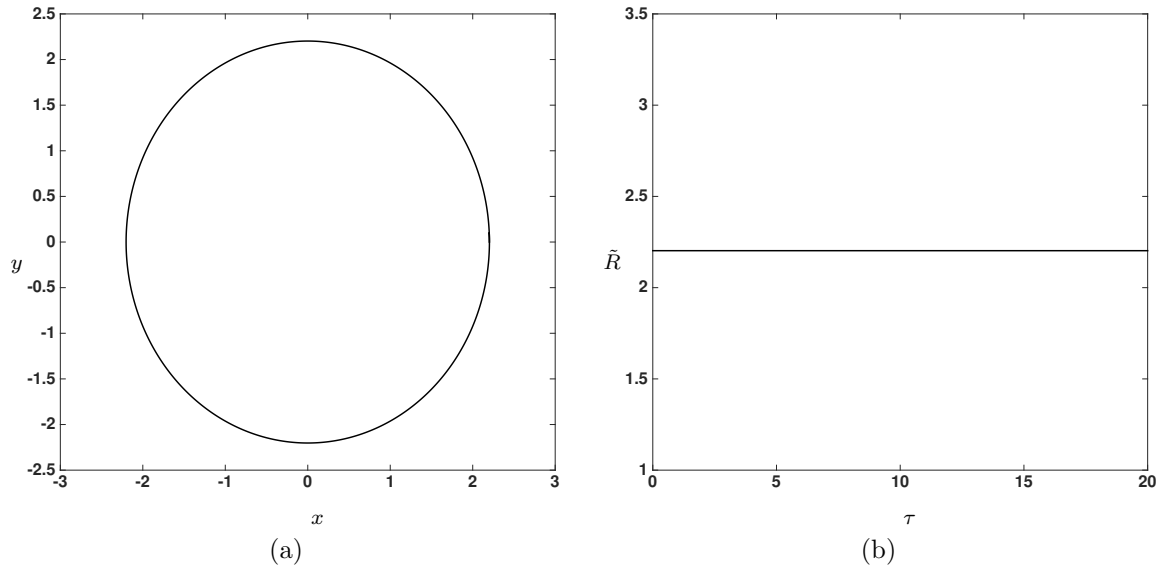


Figura 4.13: (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 2,203$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$ y energía $\epsilon = -0,221$.

(b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 2,203$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$.

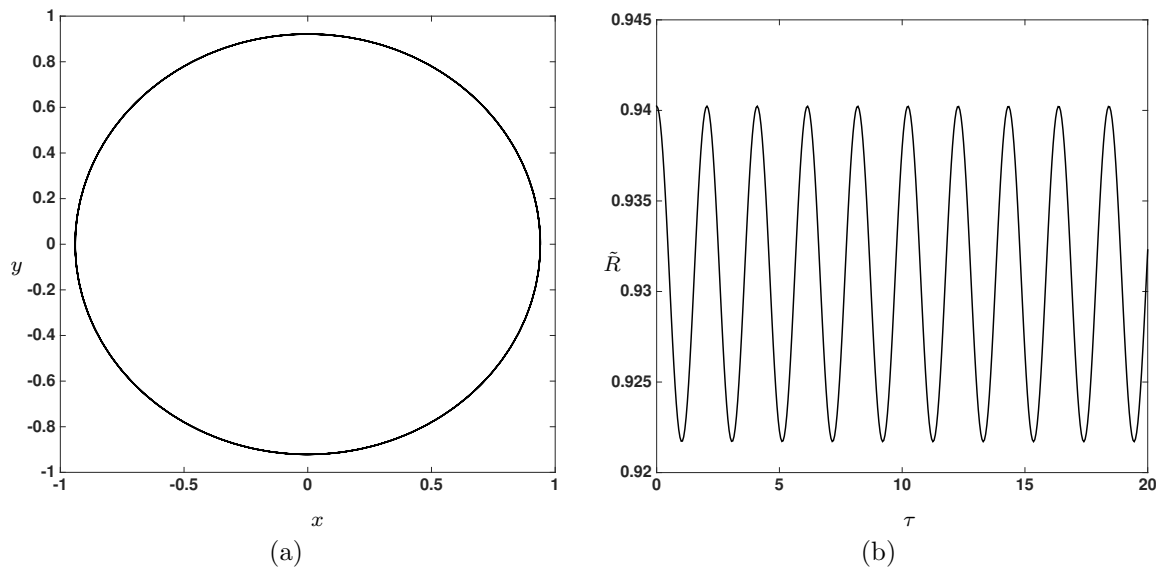


Figura 4.14: (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$.

(b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,940$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$.

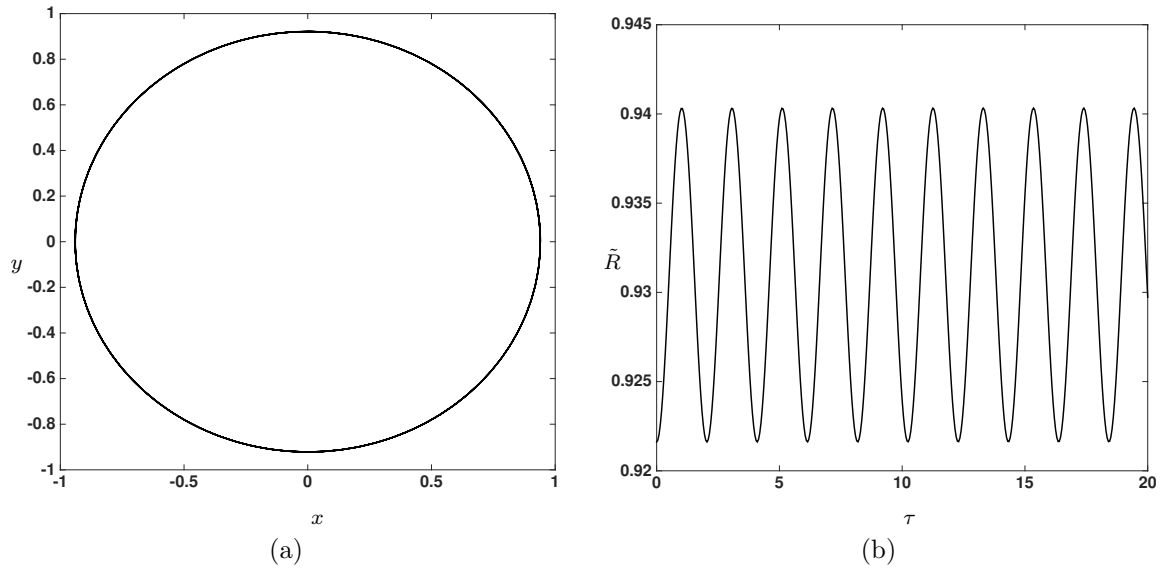


Figura 4.15: (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = -0,01\tilde{R}_0$.

(b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,920$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$.

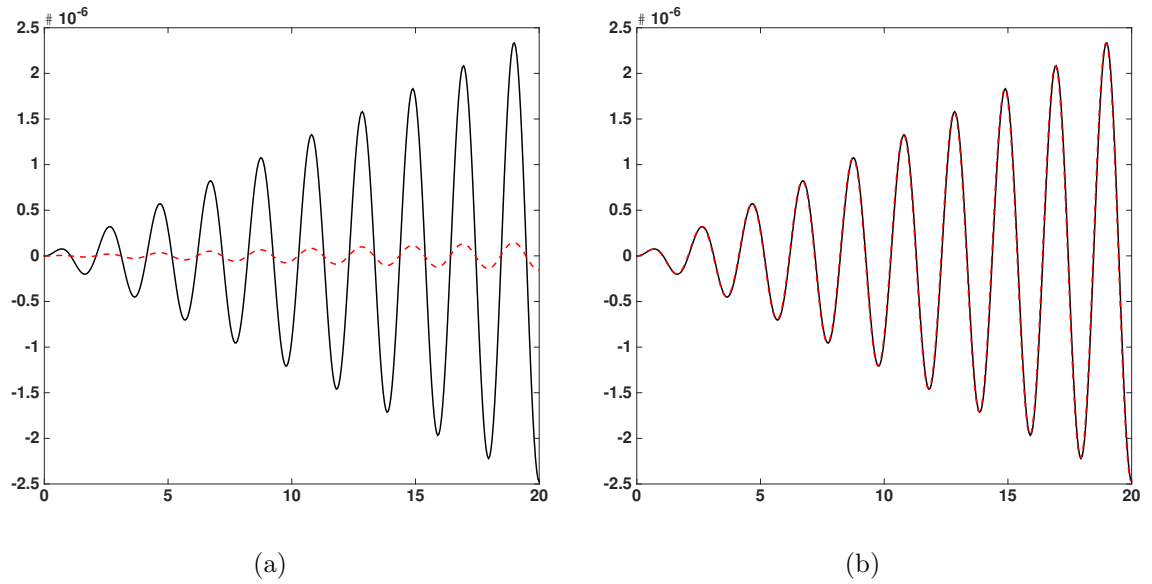


Figura 4.16: Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,05$, $h_1/2$ y $h_1/4$

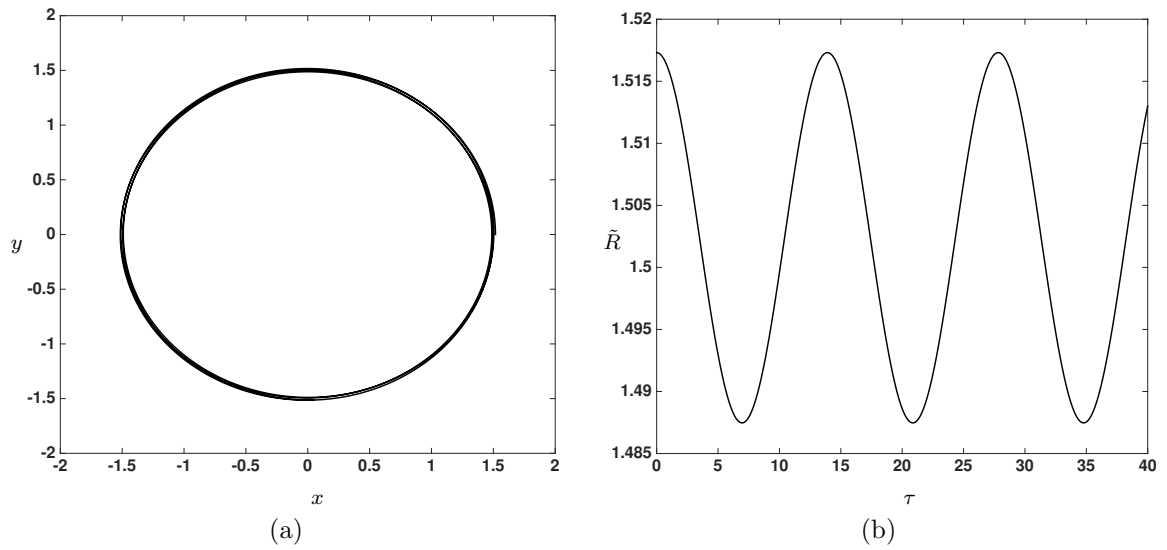


Figura 4.17: (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$.

(b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,512$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$.

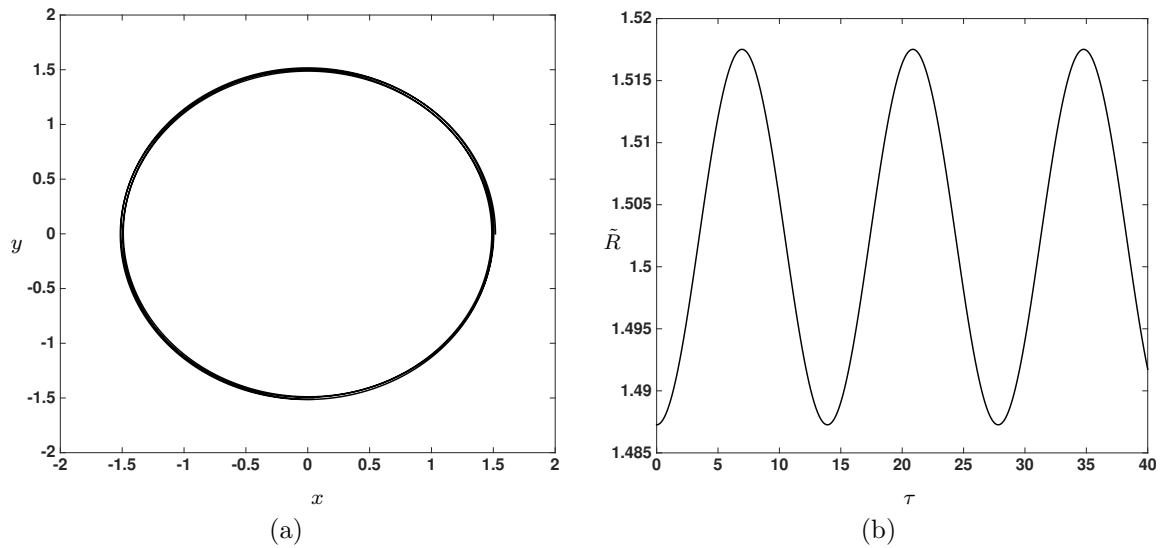


Figura 4.18: (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$.

(b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,492$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$.

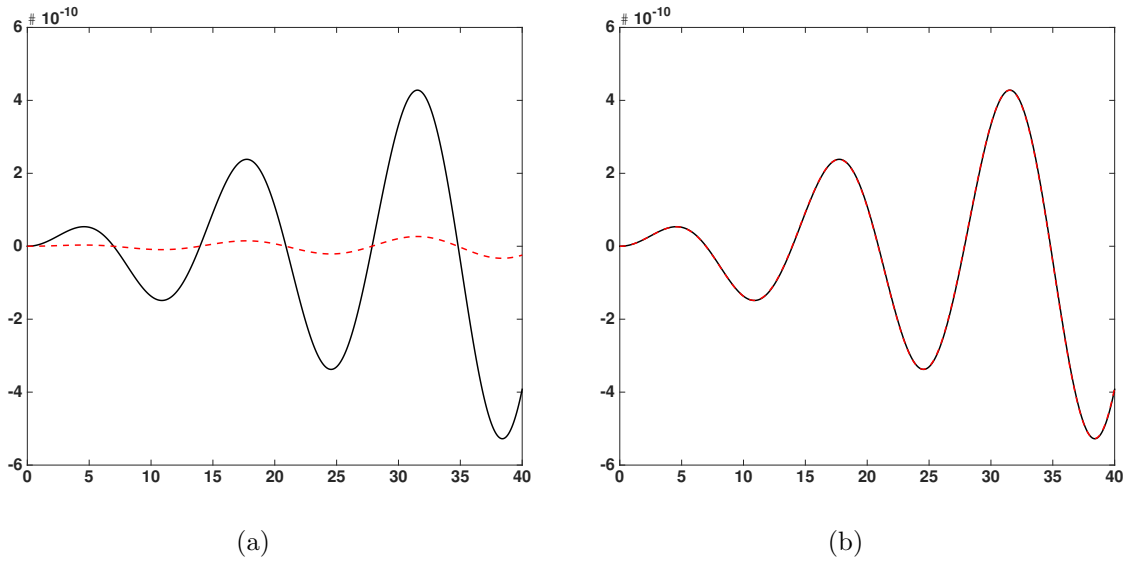


Figura 4.19: Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,05$, $h_1/2$ y $h_1/4$

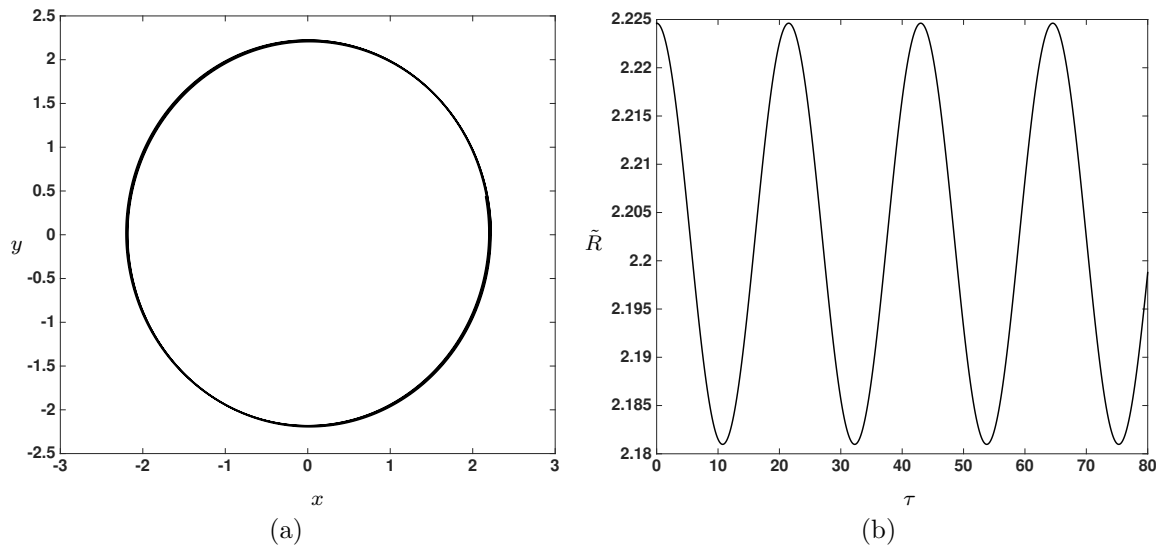


Figura 4.20: (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$.
 (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 2,213$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$.

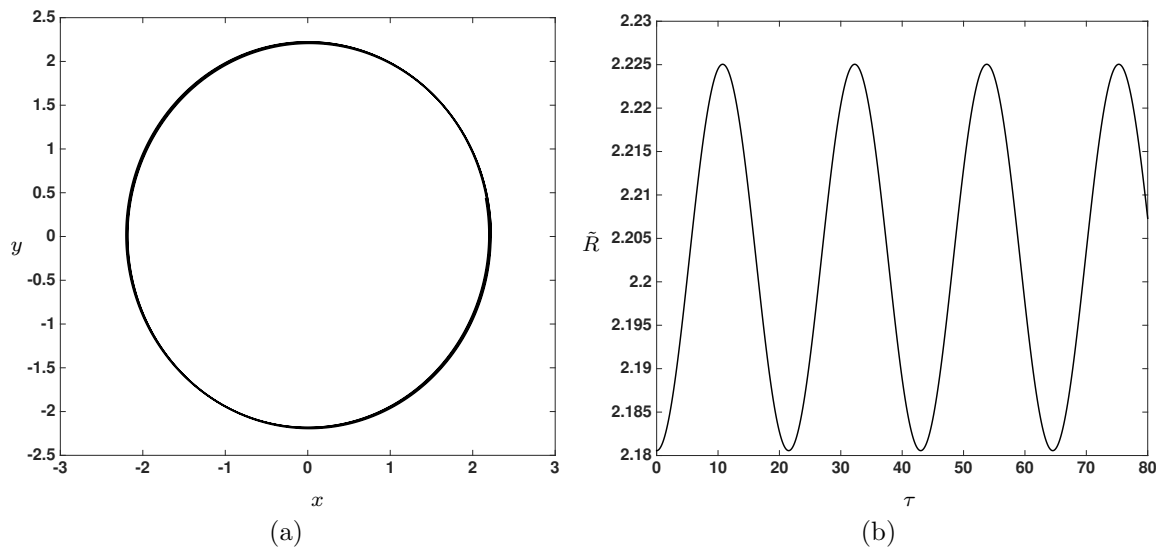


Figura 4.21: (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$.

(b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 2,193$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$.

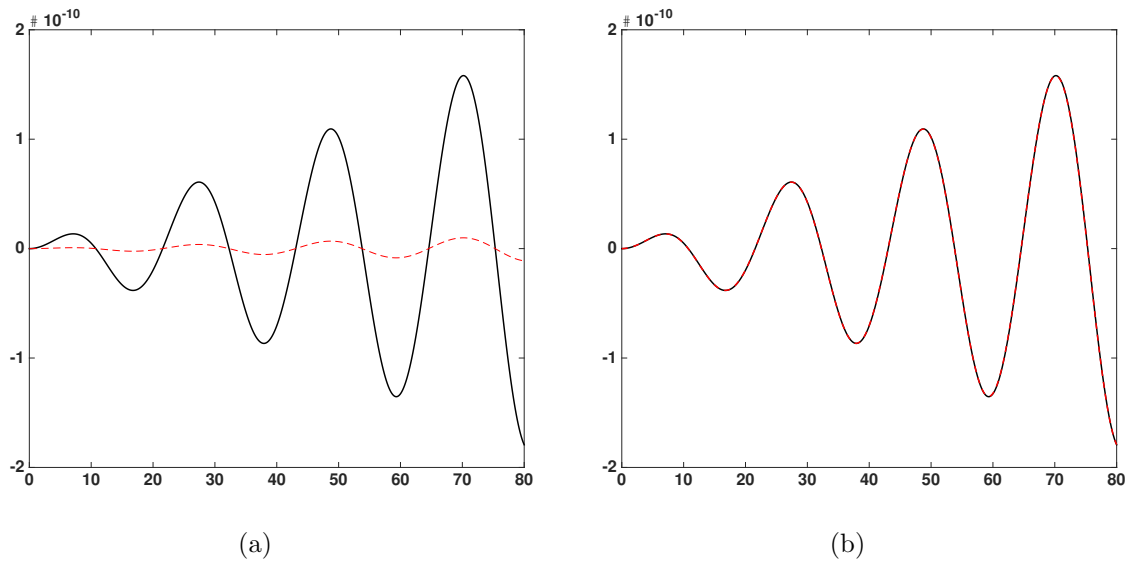


Figura 4.22: Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,05$, $h_1/2$ y $h_1/4$

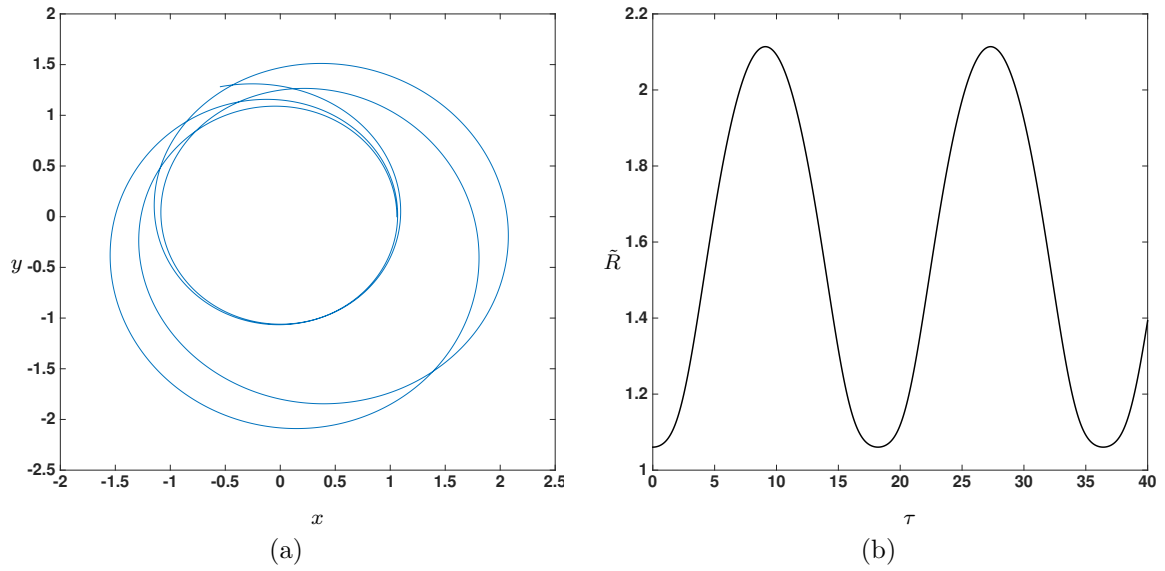


Figura 4.23: (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$.
 (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,060$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$.

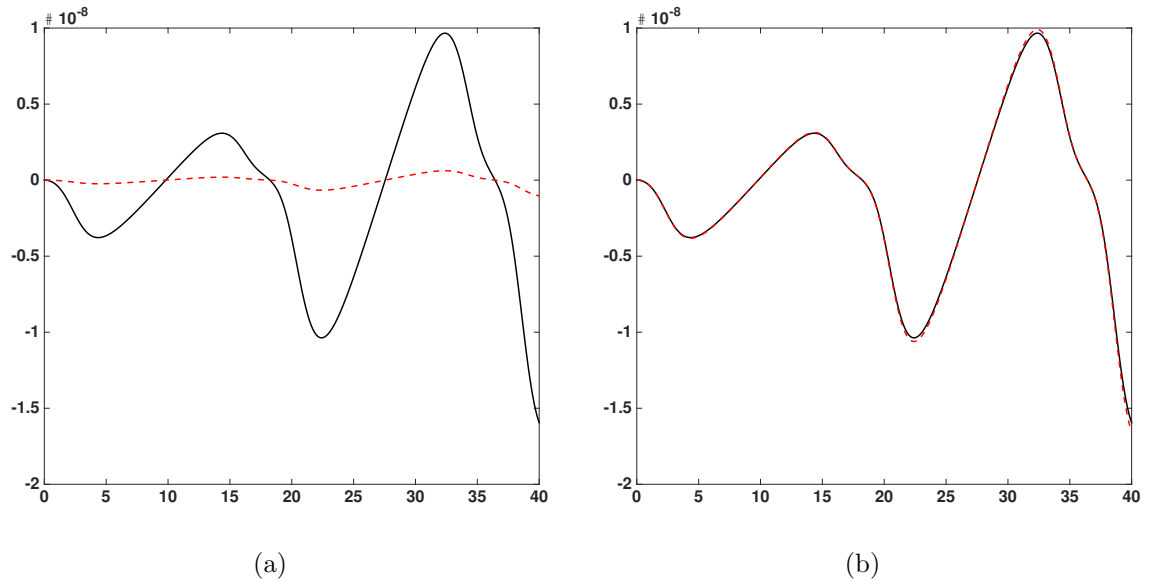


Figura 4.24: Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,0125$, $h_1/2$ y $h_1/4$

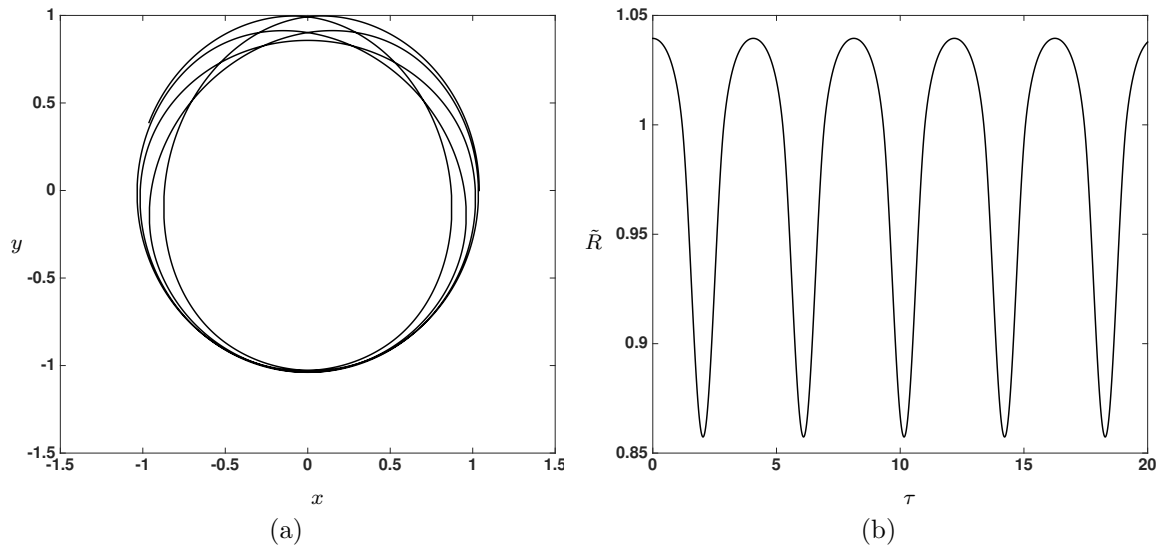


Figura 4.25: (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$.
 (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,0395$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$.

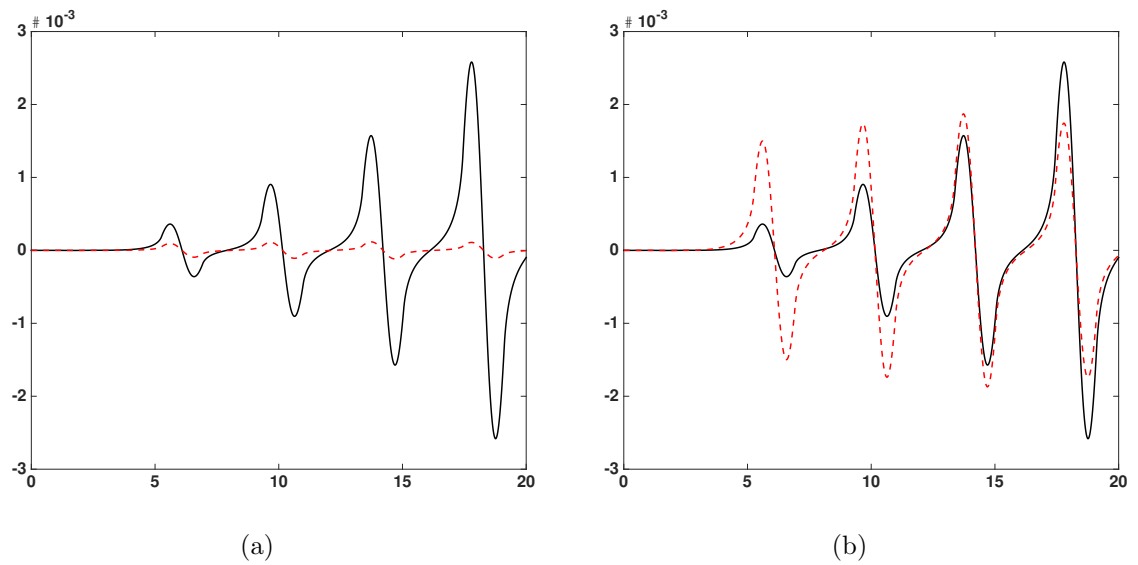


Figura 4.26: Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,00078125$, $h_1/2$ y $h_1/4$

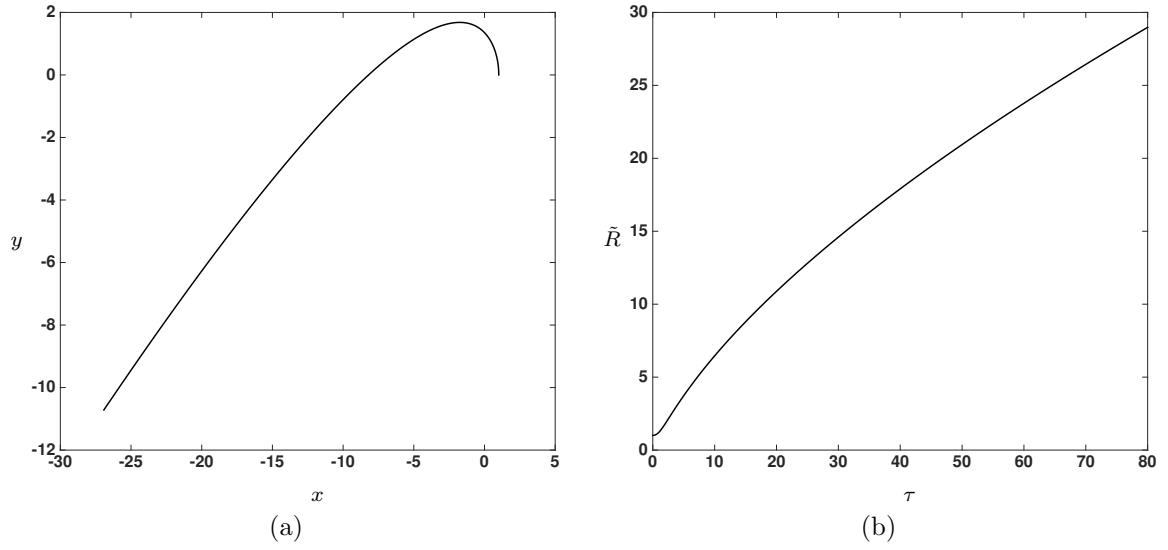


Figura 4.27: (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$.
 (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,01$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,535$.

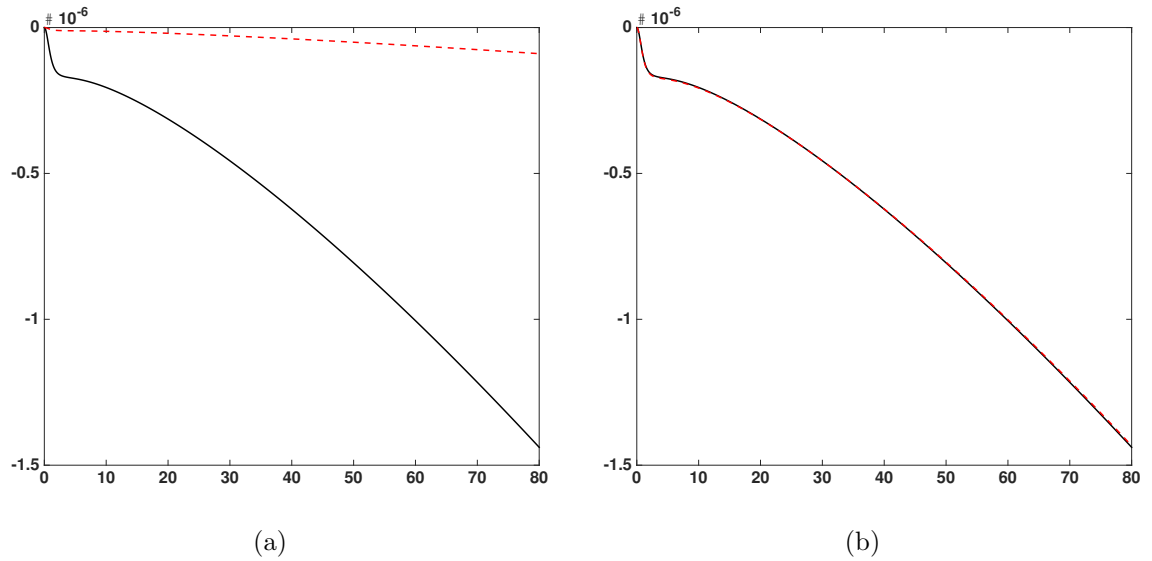


Figura 4.28: Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,025$, $h_1/2$ y $h_1/4$

Modelo $m = 3$

Las expresiones normalizadas correspondientes a la componente z del momento angular, el potencial efectivo y la energía para este modelo en la parte exterior e interior, se expresan de la siguiente forma

- Región interior

$$\tilde{L}^2 = \frac{105\pi\tilde{R}_0^4(5\tilde{R}_0^4 - 12\tilde{R}_0^2 + 8)}{256}, \quad (4.33)$$

$$\Phi_{eff}(\tilde{R}, 0) = \frac{35\pi}{512}(5\tilde{R}^6 - 18\tilde{R}^4 + 24\tilde{R}^2 - 16) + \frac{L_z^2}{2\tilde{R}^2}, \quad (4.34)$$

$$\epsilon = \frac{\dot{\tilde{R}}^2}{2} + \frac{35\pi}{512}(5\tilde{R}^6 - 18\tilde{R}^4 + 24\tilde{R}^2 - 16) + \frac{L_z^2}{2\tilde{R}^2}. \quad (4.35)$$

- Región exterior

$$\begin{aligned} \tilde{L}^2 = & \frac{35\tilde{R}^2(41\tilde{R}^4 - 34\tilde{R}^2 - 15\tilde{R}^6 + 3\tilde{R}^2\beta q^{\frac{1}{2}} - 6\tilde{R}^2\beta q^{\frac{3}{2}})}{128q^{\frac{1}{2}}} + \\ & + \frac{35\tilde{R}^2(15\tilde{R}^2\beta q^{\frac{5}{2}} + 8)}{128q^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{eff}(\tilde{R}, 0) = & \frac{7}{768}(240\beta - 360\tilde{R}^2\beta + 270\tilde{R}^4\beta - 75\tilde{R}^6\beta - 70q^{\frac{3}{2}}) + \\ & + \frac{525}{768}(q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{5}{2}}) + \frac{L_z^2}{2\tilde{R}^2}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{\dot{\tilde{R}}^2}{2} + \frac{7}{768}(240\beta - 360\tilde{R}^2\beta + 270\tilde{R}^4\beta - 75\tilde{R}^6\beta - 70q^{\frac{3}{2}}) + \\ & + \frac{525}{768}(q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{5}{2}}) + \frac{L_z^2}{2\tilde{R}^2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Al igual que en el modelo anterior, el conjunto de valores de \tilde{L}_z y \tilde{R} que satisfacen las ecuaciones (4.33) y (4.36), definen todas las órbitas circulares para el modelo $m = 3$ de los DGK, mientras que el potencial efectivo y la energía total dados por las ecuaciones (4.34), (4.37), (4.35) y (4.38), dan información sobre la dinámica del problema.

Las figuras 4.29 y 4.30 muestran la gráfica de la componente z del momento angular en función de la coordenada radial \tilde{R} , correspondientes a las ecuaciones (4.33) y (4.36). Al igual que en el modelo anterior, la figura 4.30 muestra que las líneas de momento angular constante a , b y c , intersectan la curva en los puntos 1 al 7, y de igual forma se observa que hay mas de un punto con el mismo valor de \tilde{L}_z , concluyendo de nuevo, que

en este modelo se permiten órbitas distintas con en el mismo valor de la componente z del momento angular.

La figura 4.31, muestra las gráficas de los potenciales efectivos correspondientes a las ecuaciones (4.34) y (4.37), para los valores de la componente z del momento angular dados por las líneas horizontales a , b y c de la figura 4.30. En las figuras 4.31a, 4.31b, y 4.31c, los puntos de equilibrio con etiquetas de los números uno al siete, corresponden a los puntos con las mismas etiquetas en la gráfica del momento angular (figura 4.30). Se observa también, que en estas, los mínimos de los potenciales efectivos (1, 3, 5 y 7), corresponden a puntos en los que la curva del momento angular es creciente, mientras que los puntos de inflexión y el máximo (2, 6 y 4), corresponden a los puntos ubicados en el máximo, el mínimo y la zona decreciente (2, 4 y 6), en la curva del momento angular.

Las figuras 4.32 y 4.33 muestran las órbitas circulares y la evolución temporal de la coordenada radial \tilde{R} , para las condiciones correspondientes a los puntos de inflexión con etiquetas dos y seis en las gráficas del potencial efectivo (figuras 4.31a y 4.31c).

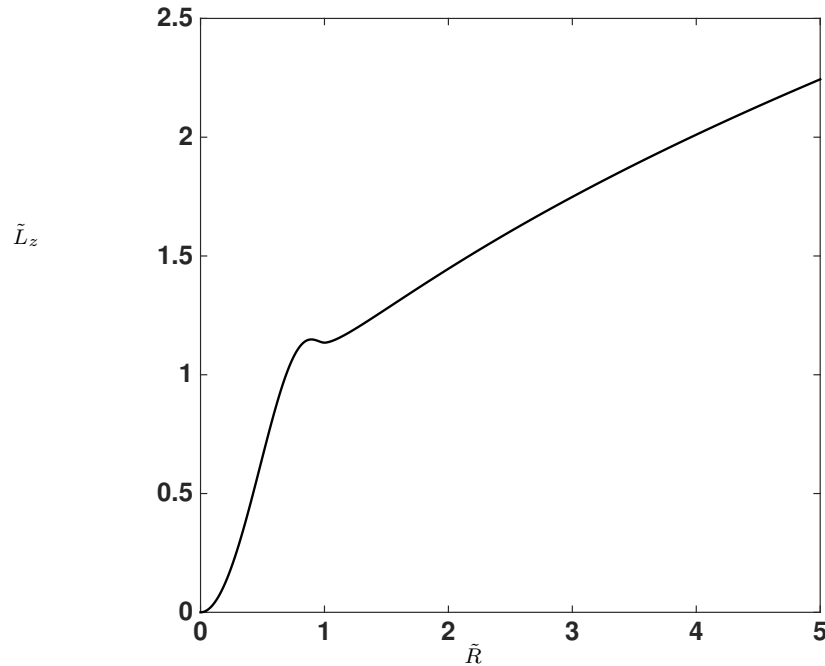


Figura 4.29: Gráfica de la componente z del momento angular \tilde{L}_z vs la componente radial \tilde{R} para el modelo $m = 3$ de los discos generalizados de Kalnajs. La región interior al disco está definida por $\tilde{R} \leq 1$ y la región exterior está definida por $\tilde{R} > 1$

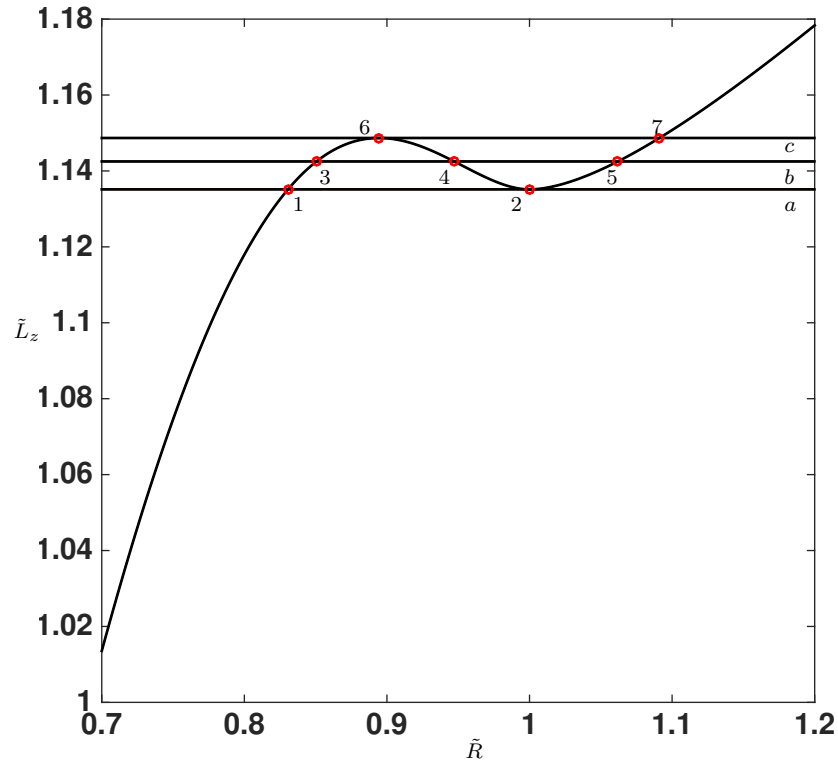


Figura 4.30: Gráfica de la componente z del momento angular \tilde{L}_z vs la componente radial \tilde{R} para $m = 3$. Las líneas a , b y c representan líneas de momento angular constante $\tilde{L}_z = 1,135, 1,141$ y $1,149$ el cual cortan la curva en los puntos: $(\tilde{R} = 0,830, \tilde{L}_z = 1,135)$, $(\tilde{R} = 1, \tilde{L}_z = 1,135)$, $(\tilde{R} = 0,851, \tilde{L}_z = 1,143)$, $(\tilde{R} = 0,947, \tilde{L}_z = 1,143)$, $(\tilde{R} = 1,062, \tilde{L}_z = 1,143)$, $(\tilde{R} = 0,894, \tilde{L}_z = 1,149)$, $(\tilde{R} = 1,091, \tilde{L}_z = 1,149)$.

Ahora, al igual que en el modelo anterior, se resuelven las ecuaciones de movimiento (4.20) y (4.26) bajo las condiciones iniciales dadas por (4.13), para el respectivo estudio de la estabilidad de estas órbitas circulares, en el que se considera una perturbación radial igual al 1% del radio inicial de la órbita ($\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$). Las figuras 4.34, 4.36, 4.38 y 4.40 muestran como son ahora las evoluciones, temporales de la coordenada radial \tilde{R} , bajo esta perturbación. Analizando estas evoluciones junto con el comportamiento de las gráficas de los potenciales efectivos correspondientes (figuras 4.31a y 4.31c), se observa que los movimientos de las partículas de prueba no son alrededor de los puntos de equilibrio inicial, si no que son oscilaciones alrededor de los puntos de equilibrio con etiquetas uno y siete, los cuales corresponden a los mínimos en las curvas de estos potenciales efectivos. Por esta razón, las órbitas mostradas (figuras 4.34a, 4.36a, 4.38a, y 4.40a), exhiben un compartamiento en el que

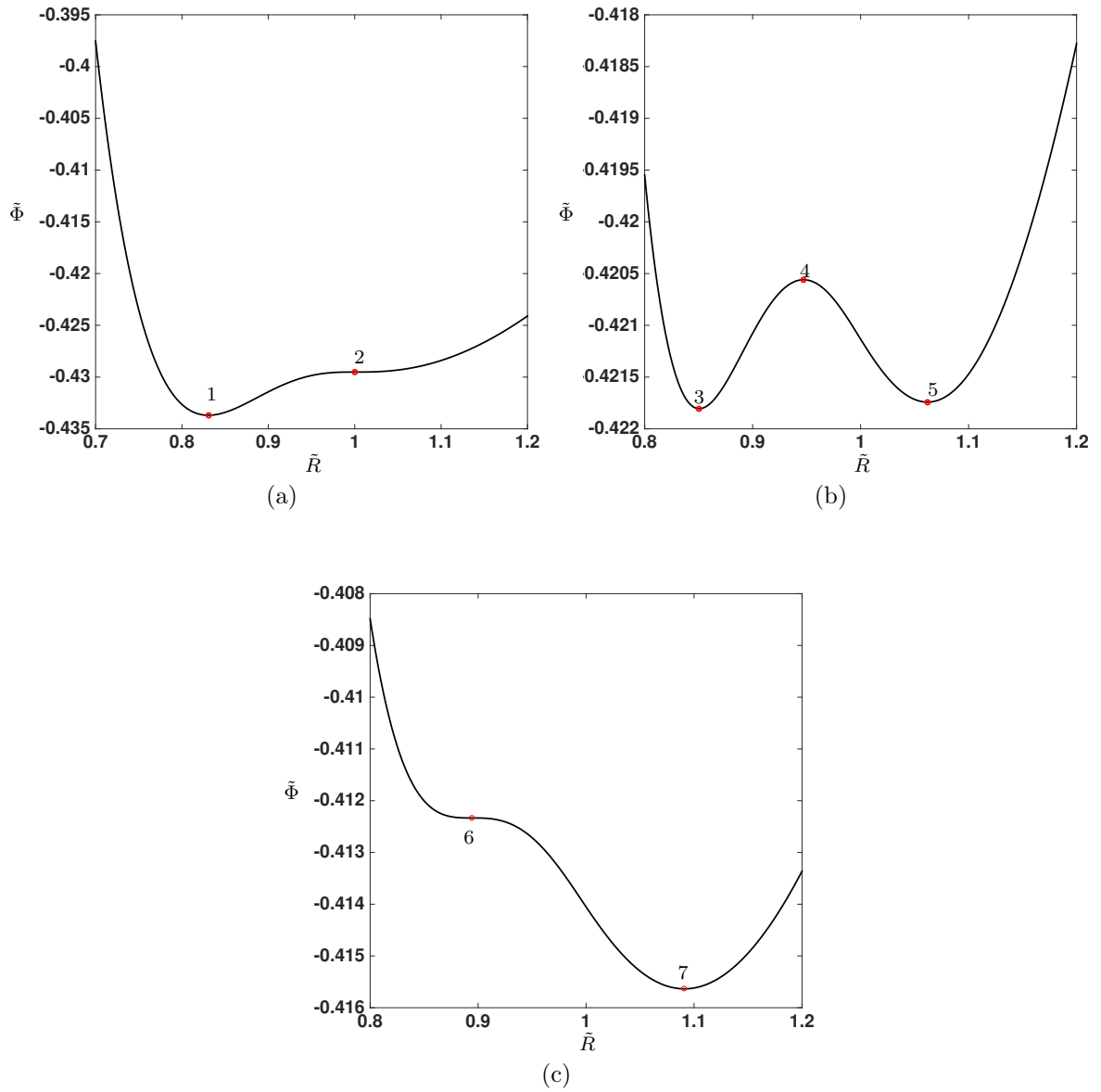


Figura 4.31: Gráfica del potencial efectivo en función de la coordenada radial \tilde{R}

ya no conservan la forma circular de las órbitas iniciales (figuras 4.32, y 4.33). Finalmente las figuras 4.35, 4.37, 4.39, y 4.37, corresponden a la autoconvergencia del método RK4 utilizado para resolver las ecuaciones de movimiento.

Para concluir, los resultados obtenidos para las órbitas circulares asociadas con los puntos de equilibrio restantes, se pueden resumir debido a la similitud con los comportamientos

de las órbitas perturbadas resultantes en el modelo $m = 1$. Primero, las perturbaciones radiales de las órbitas circulares asociadas a los mínimos en el potencial efectivo, resultan en movimientos oscilatorios alrededor de los puntos de equilibrio inicial, el cual, son los radios iniciales de las órbitas circulares, por esta razón las formas de las nuevas órbitas no cambian casi, siendo casi circulares. Segundo, la órbita asociada al máximo que presenta el potencial efectivo en la figura 4.31b, cuando se perturba radialmente, exhibe dos comportamientos distintos según la dirección de la perturbación; Una perturbación en la dirección positiva, produce un movimiento oscilatorio respecto al punto de equilibrio correspondiente al mínimo inmediatamente después a la derecha (etiqueta número cinco en la figura 4.31b), mientras que una perturbación en la dirección negativa, finaliza en un movimiento oscilatorio alrededor del mínimo ubicado ahora a la izquierda de este máximo (etiqueta con el número 3 en la figura 4.31b). Las gráficas de autoconvergencia también muestran resultados similares a los ya obtenidos, mostrando que para estos casos, el método RK4 autoconverge con gran exactitud a las soluciones.

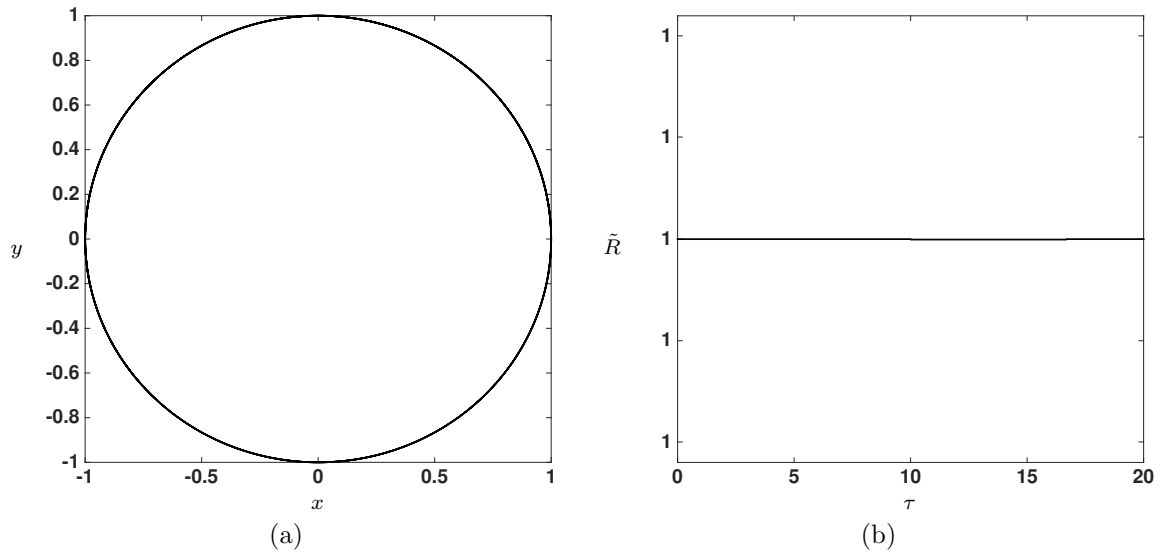


Figura 4.32: (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 1$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ y energía $\epsilon = -0,421$.

(b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,1351$.

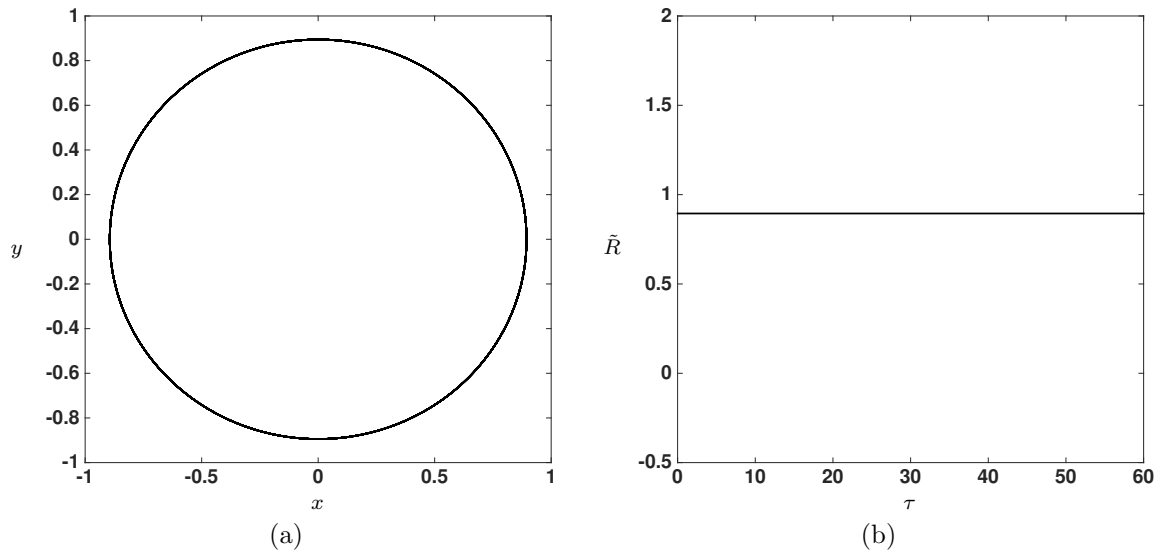


Figura 4.33: (a) Órbita circular con radio $\tilde{R}_0 = 0,9472$, momento angular $\tilde{L}_z = 1,330$ y energía $\epsilon = -0,4205$.

(b) Evolución temporal de la coordenada \tilde{R} , obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,9472$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,1486$.

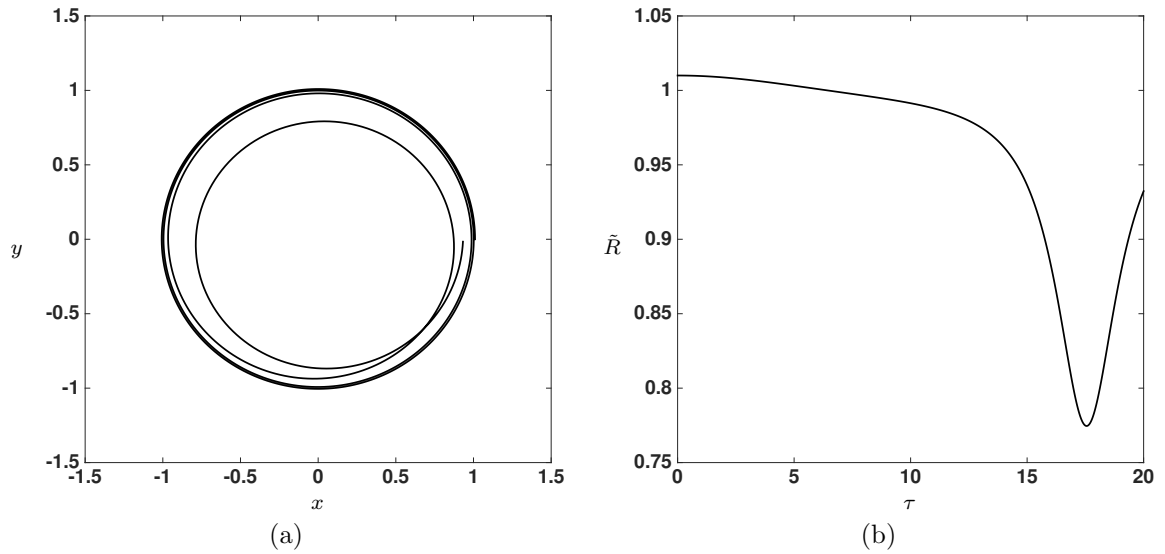


Figura 4.34: (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$.

(b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 1,01$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,1351$.

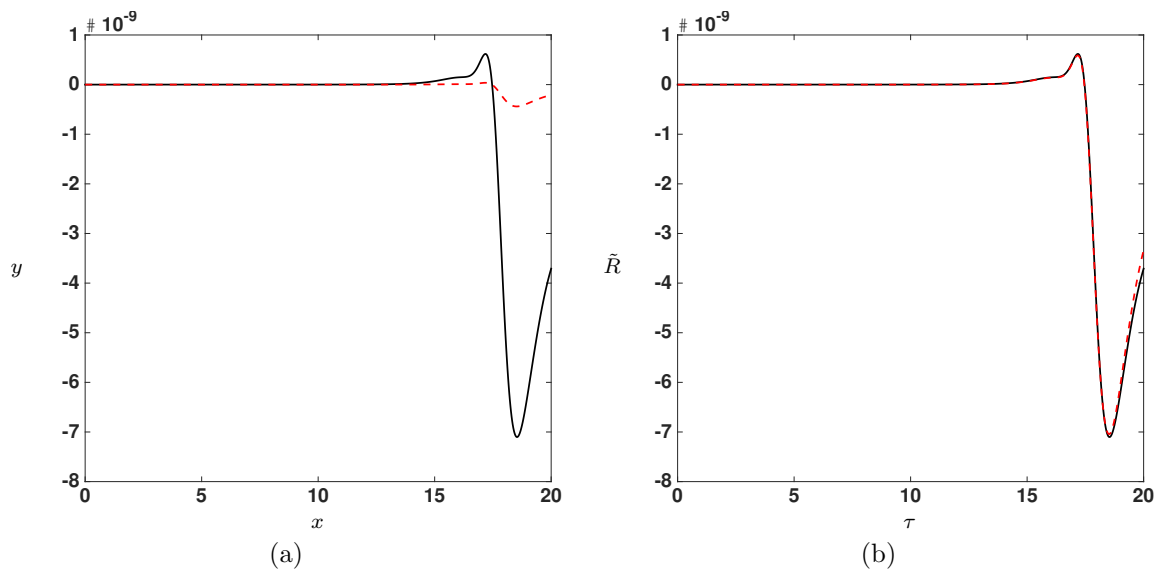


Figura 4.35: Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,0125$, $h_1/2$ y $h_1/4$.

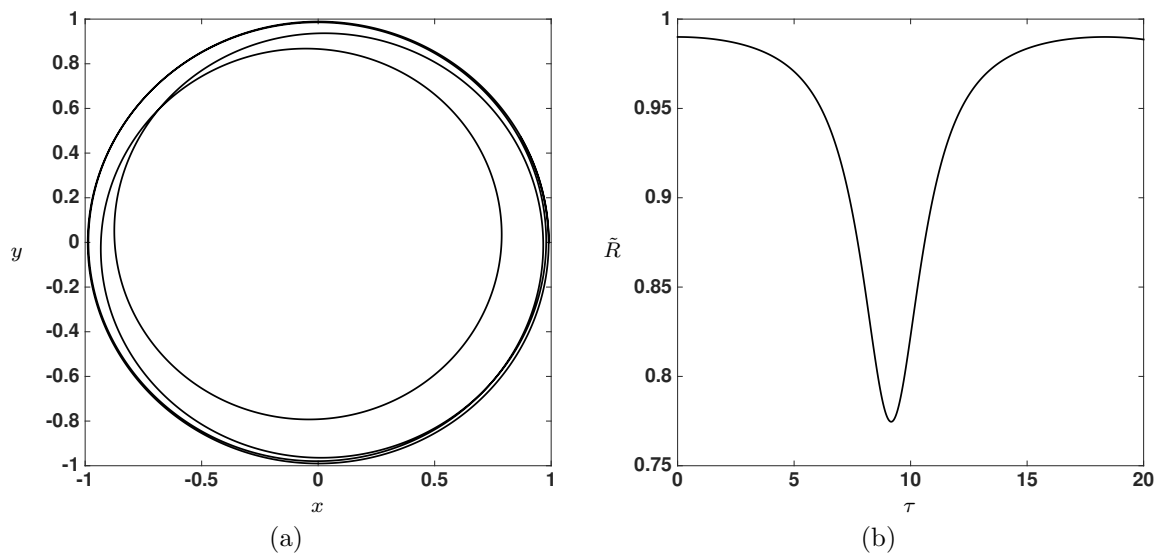


Figura 4.36: (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$.
 (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,99$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,1351$.

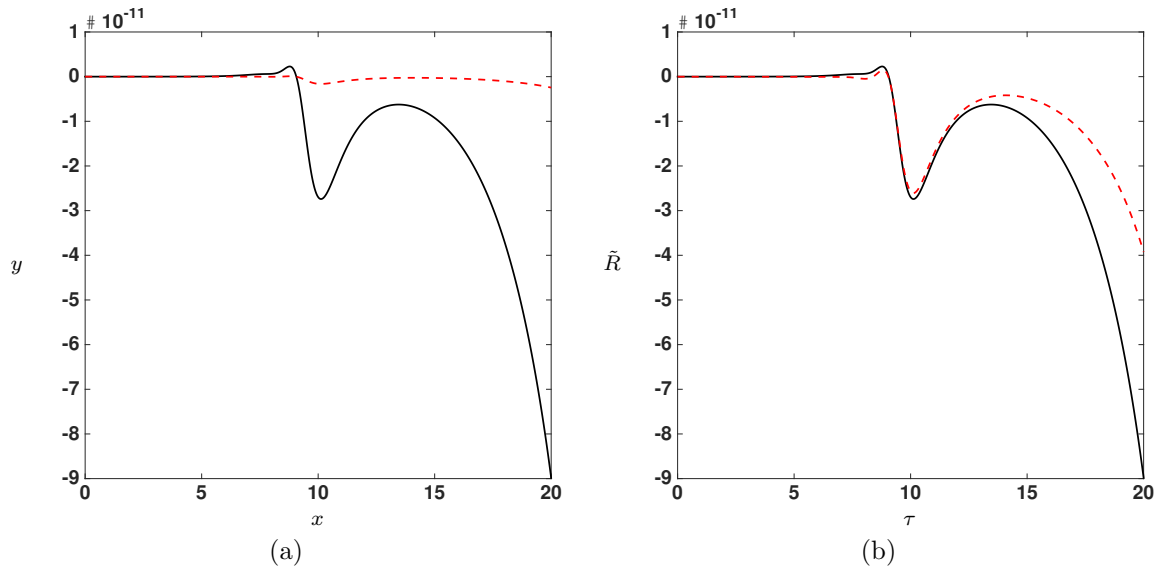


Figura 4.37: Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,025$, $h_1/2$ y $h_1/4$.

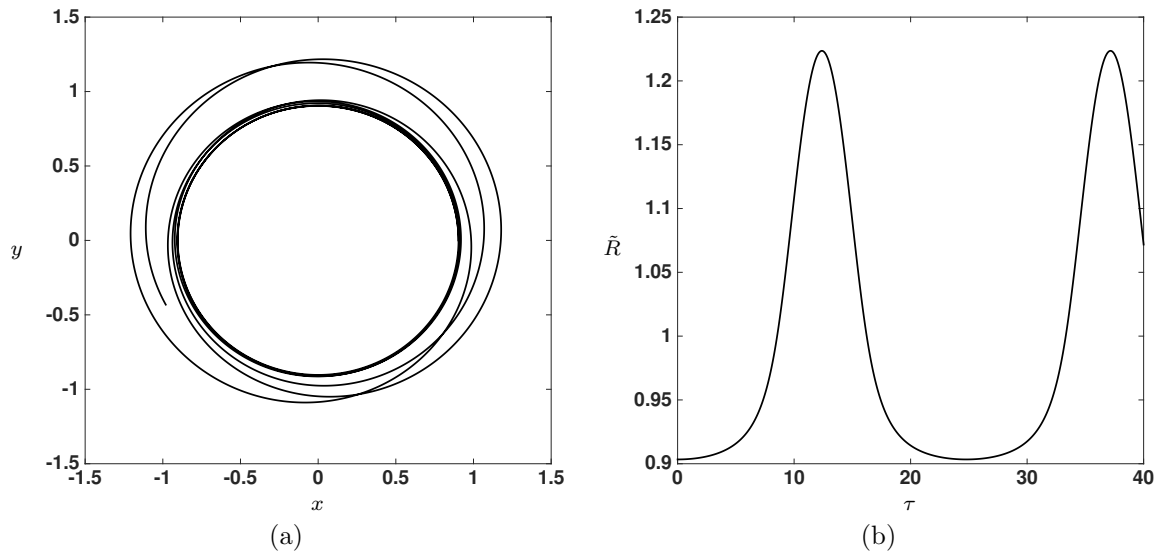


Figura 4.38: (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$.

(b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,9572$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,1486$.

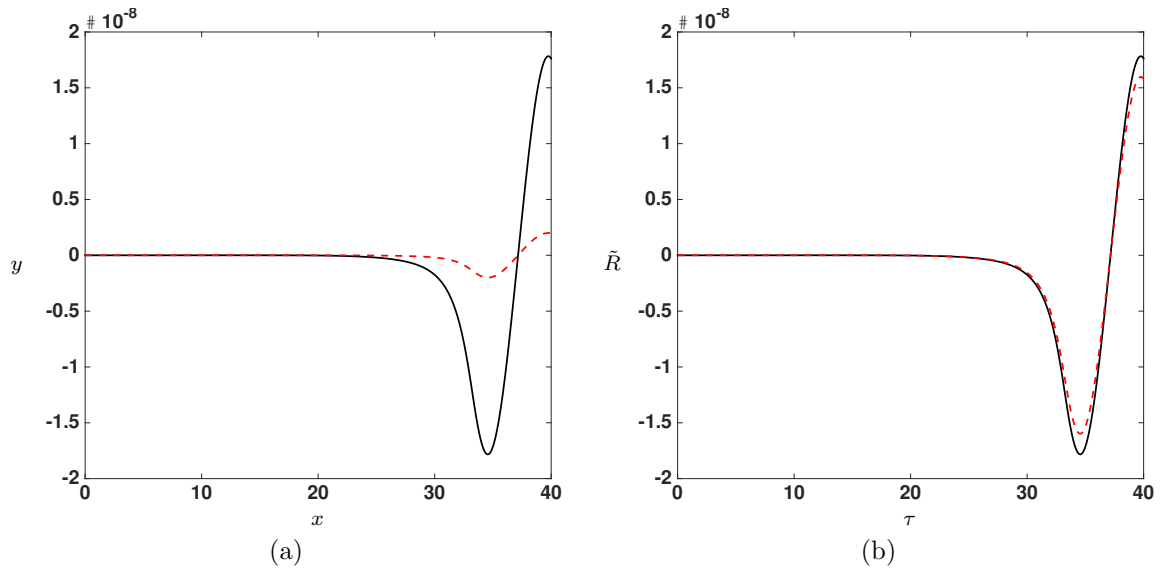


Figura 4.39: Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,025$, $h_1/2$ y $h_1/4$.

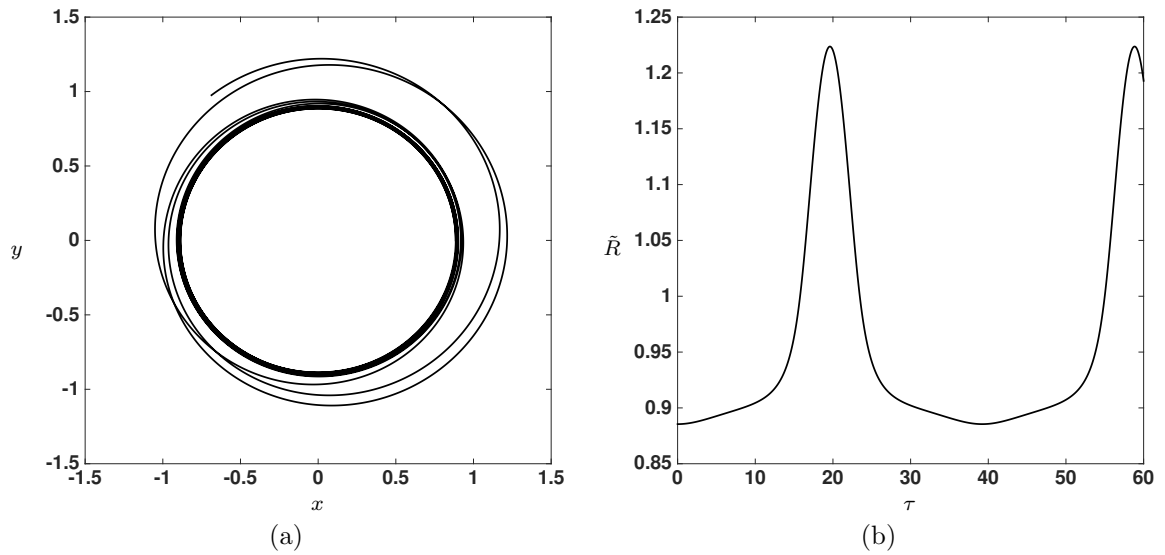


Figura 4.40: (a) Órbita resultante de la perturbación $\delta\tilde{R}_0 = 0,01\tilde{R}_0$.
 (b) Evolución temporal $\tilde{R}(\tau)$, obtenida por la solución numérica de las ecuaciones de movimiento con el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R}_0 = 0,9372$ y $\dot{\tilde{R}} = 0$ y momento angular $\tilde{L}_z = 1,1486$.

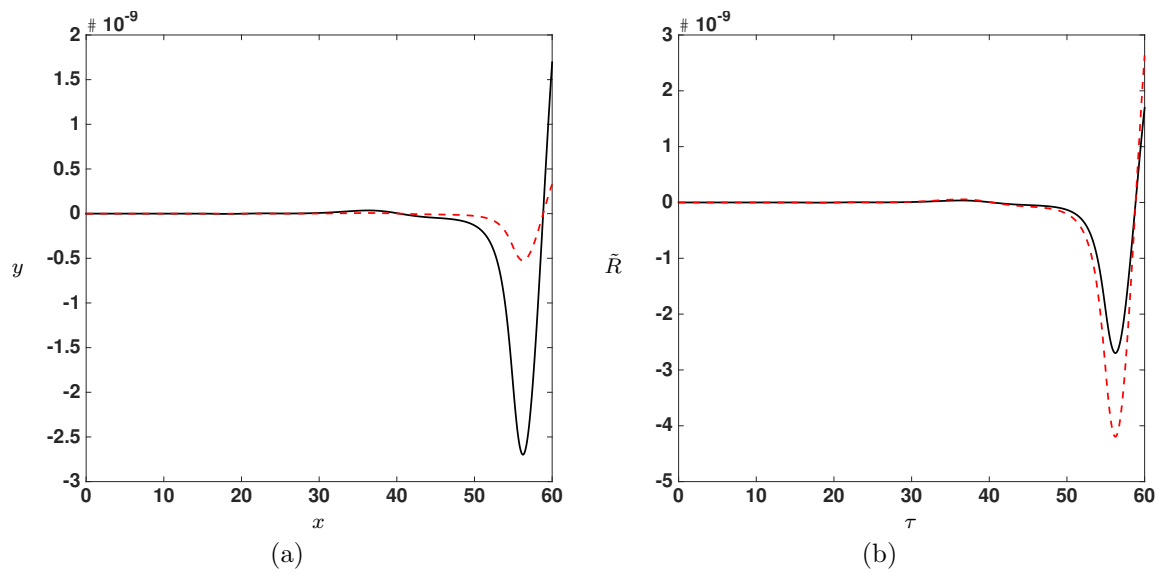


Figura 4.41: Las gráficas (a) y (b) muestran el criterio de autoconvergencia del método numérico RK4, para tres resoluciones distintas $h_1 = 0,025$, $h_1/2$ y $h_1/4$.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Se analizó la estabilidad de las órbitas ecuatoriales en los modelos de discos delgados de Toomre y discos generalizados de kalnajs. Para esto, se escogieron los primeros miembros de cada familia de discos, y se determinaron las expresiones del momento angular, el potencial efectivo, la energía total, y las ecuaciones de movimiento respectivamente. Luego, se encontró de forma explícita la condición que relaciona el momento angular con la coordenada radial, tal que, las órbitas circulares en el plano ecuatorial de las partículas de prueba en presencia de estos campos gravitacionales fueran circulares. Por último, para los modelos de Kuzmin ($n = 0$) y kalnajs ($m = 1, 3$), se hizo un análisis detallado de la estabilidad radial, a partir del análisis del potencial efectivo y las soluciones de las ecuaciones de movimiento correspondientes a las órbitas ya perturbadas. De este análisis se concluyó que una órbita circular es estable, solo cuando el movimiento resultante de la perturbación, es oscilatorio respecto al radio de la órbita circular inicial.

Los resultados obtenidos mostraron que el estudio de estabilidad de las órbitas circulares en el plano ecuatorial bajo perturbaciones radiales, se puede hacer mediante la caracterización de las gráficas de la componente z del momento angular en función de la coordenada radial \tilde{R} y el potencial efectivo de la siguiente manera: i) Las órbitas circulares correspondientes a regiones en las que la curva del momento angular es creciente, tienen asociadas en la gráfica del potencial efectivo un mínimo, en los que la órbita circular es estable. ii) Órbitas circulares que corresponden a regiones en los que la gráfica del momento angular muestra una pendiente negativa, tienen asociadas un

máximo en la gráfica del potencial efectivo, en el cual, la órbita circular es inestable. iii) Las órbitas circulares correspondientes a puntos en los que hay un máximo o un mínimo local en la curva de la componente z del momento angular, tienen asociadas un punto de inflexión en la gráfica del potencial efectivo, y al igual que el caso anterior, la órbita circular es inestable.

Se mostró que en el primer modelo de la familia de los discos de Toomre ($n = 0$), todas las órbitas circulares ecuatoriales son estables, mientras que los modelos $m = 1$ y $m = 2$ de los discos generalizados de Kalnajs son inestables. Los resultados obtenidos para estos últimos modelos, muestran que bajo perturbaciones radiales, las partículas de prueba que inicialmente se mueven en órbitas circulares con energías iguales a un máximo o un punto de inflexión en el potencial efectivo, se mueven hacia regiones que permiten otras órbitas circulares estables. Por lo tanto, una condición necesaria para que los discos sean una buena aproximación a un sistema físico aceptable, es que bajo el criterio de la aproximación epicíclica [1] [3], las partículas individuales describan órbitas circulares estables.

Se elaboró el código que resuelve las ecuaciones de movimiento de cada modelo considerado, en el que se evalúa la respectiva convergencia de las soluciones obtenidas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] BARDEEN, J. M. Stability of circular orbits in stationary, axisymmetric spacetimes. *The Astrophysical Journal* 161 (1970), 103.
- [2] BINNEY, J., AND TREMAINE, S. Galactic dynamics, princeton univ, 1987.
- [3] CHANDRASEKHAR, S. *Principles of stellar dynamics*. Courier Corporation, 2005.
- [4] CHAPRA, S. C., AND CANALE, R. P. *Numerical methods for engineers*, vol. 2. McGraw-Hill, 2012.
- [5] FABER, T. Galactic halos and gravastars: static spherically symmetric spacetimes in modern general relativity and astrophysics. *arXiv preprint gr-qc/0607029* (2006).
- [6] GONZÁLEZ, G. A., PLATA-PLATA, S. M., AND RAMOS-CARO, J. Finite thin disc models of four galaxies in the ursa major cluster: Ngc 3877, ngc 3917, ngc 3949 and ngc 4010. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 404, 1 (2010), 468–474.
- [7] GONZÁLEZ, G. A., AND REINA, J. I. An infinite family of generalized kalnajs discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 371, 4 (2006), 1873–1876.
- [8] HUNTER, C., AND MESTEL, L. The structure and stability of self-gravitating disks. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 126, 4 (1963), 299–315.
- [9] KALNAJS, A. J. The equilibria and oscillations of a family of uniformly rotating stellar disks. *The Astrophysical Journal* 175 (1972), 63.
- [10] KALNAJS, A. J. Theory of spiral structure. In *Internal kinematics and dynamics of galaxies*. Springer, 1983, pp. 109–116.
- [11] KENT, S. M. Dark matter in spiral galaxies. i-galaxies with optical rotation curves. *The Astronomical Journal* 91 (1986), 1301–1327.

-
- [12] KENT, S. M. Dark matter in spiral galaxies. ii-galaxies with hi rotation curves. *The Astronomical Journal* 93 (1987), 816–832.
- [13] KUZMIN, G. Model of the steady galaxy allowing of the triaxial distribution of velocities. *Astronomicheskii Zhurnal* 33 (1956), 27.
- [14] MIYAMOTO, M., AND NAGAI, R. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. *Publications of the Astronomical Society of Japan* 27 (1975), 533–543.
- [15] NAGAI, R., AND MIYAMOTO, M. A family of self-gravitating stellar systems with axial symmetry. *Publications of the Astronomical Society of Japan* 28 (1976), 1–17.
- [16] OSTRIKER, J. P., AND PEEBLES, P. J. A numerical study of the stability of flattened galaxies: or, can cold galaxies survive? *The Astrophysical Journal* 186 (1973), 467–480.
- [17] PLUMMER, H. On the problem of distribution in globular star clusters. *Monthly notices of the royal astronomical society* 71 (1911), 460–470.
- [18] SOFUE, Y., HONMA, M., AND OMODAKA, T. Pasj 61 (2009) 229. *arXiv preprint arXiv:0811.0859*.
- [19] TOOMRE, A. On the distribution of matter within highly flattened galaxies. *The astrophysical journal* 138 (1963), 385.