

UN MODELO INFLACIONARIO VECTORIAL CON
EXPANSIÓN ANISÓTROPA PROLONGADA

LEONARDO FABIÁN CALDERÓN MANTILLA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2010

UN MODELO INFLACIONARIO VECTORIAL CON
EXPANSIÓN ANISÓTROPA PROLONGADA

LEONARDO FABIÁN CALDERÓN MANTILLA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR

YEINZON RODRÍGUEZ GARCÍA, PH.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2010

“Digno eres tú, Jehová, nuestro Dios mismo, de recibir la gloria y la honra y el poder, porque tú creaste todas las cosas, y a causa de tu voluntad existieron y fueron creadas”
Revelación 4:11.

“Cuando veo tus cielos, las obras de tus dedos, la luna y las estrellas que tú has preparado, ¿qué es el hombre mortal para que lo tengas en cuenta, y el hijo del hombre terrestre para que cuides de él?”
Salmo 8:3,4.

Para mi padre Pedro Felipe Calderón.

Agradecimientos

- A Jehová Dios Todopoderoso y a su hijo Jesucristo, por todos los cuidados amorosos y toda la bondad inmerecida que han extendido para conmigo y mi familia. Gracias por tantas bendiciones, gracias por regalarme la vida y junto con ella tantas oportunidades y alegrías.
- A mi amada madre, por traerme al mundo y brindarme tanto amor y comprensión desde que era un niño. Gracias por apoyarme en todos y cada uno de mis proyectos, gracias por brindarme siempre lo mejor de lo mejor en todos los aspectos de mi vida, gracias por enseñarme a ver el conocimiento como algo valioso y divertido, lo cual marco siempre la diferencia entre las demás personas y yo. Te amo mami.
- A mi querida novia... Karito, por todo el amor y ternura con la cual ha llenado mi vida en estos dos últimos años.
- A Holger por brindarme su amor y preocuparse por mi bienestar, gracias por el todo el tiempo dedicado.
- A mi abuela Gloria, por todo el amor y tiernos cuidados que me ha brindado desde que era niño.
- A mi tía Lucy por todo el apoyo, cariño y cuidado que ha tenido conmigo desde la muerte de mi padre. A Henry Duarte por la amabilidad y gran generosidad.
- A mi tío Josué por su cariño y apoyo.
- A mis primos Josué, Hawy, Dubis, Sebas, Erika y Junior por ser tan especiales conmigo, gracias por todos los buenos momentos.
- A mis dos mejores amigos Óscar y Sergio por su incondicionalidad.
- Al profesor Yeinzon Rodríguez por su excelente y oportuna dirección en la realización de este trabajo de grado, gracias por la confianza depositada en mí.
- A los profesores: Rafael Torres, Guillermo González, Carlos Ramírez, David Miranda y Milton Flórez por compartir conmigo su visión de la física.

Contenido

| | |
|---|-----------|
| Resumen | 12 |
| Abstract | 13 |
| Introducción | 14 |
| 1. La expansión de un universo homogéneo e isótropo | 18 |
| 1.1. Geometría del espacio-tiempo de Friedmann - Robertson - Walker (FRW) | 19 |
| 1.2. Dinámica del espacio-tiempo de FRW | 20 |
| 1.3. Horizonte de partículas | 22 |
| 1.4. Problemas de la cosmología estándar | 22 |
| 1.4.1. Problema de horizonte | 23 |
| 1.4.2. Problema de planitud | 24 |
| 2. Inflación cósmica mediante un campo escalar en un universo homogéneo e isótropo | 26 |
| 2.1. El horizonte comóvil durante inflación | 26 |
| 2.2. Inflación | 28 |

| | |
|---|-----------|
| 2.3. Inflación mediante un campo escalar | 29 |
| 2.4. Inflación del tipo rodadura lenta | 30 |
| 2.5. Monto de inflación | 32 |
| 3. Inflación vectorial con expansión anisótropa prolongada | 34 |
| 3.1. Formulación del modelo | 34 |
| 3.2. Ecuaciones de campo e inflación | 36 |
| 3.3. Escogencia de la función $f(\phi)$ | 39 |
| 3.4. Efecto del campo vectorial durante inflación | 40 |
| 3.5. Grado de anisotropía en la expansión | 43 |
| Conclusiones | 46 |
| Bibliografía | 48 |
| Apéndices | 54 |
| A. Obtención de las ecuaciones de campo de Einstein en el universo de Friedmann-Robertson-Walker | 55 |
| B. Teorema del no-cabello cósmico | 57 |
| C. Geometría del espacio-tiempo de Bianchi tipo I | 58 |
| D. Obtención de las ecuaciones de campo para el modelo inflacionario vectorial | 60 |
| D.1. Ecuación de campo para A_μ | 61 |
| D.2. Ecuación de campo para el inflatón ϕ | 62 |
| D.3. Obtención de las ecuaciones de campo de Einstein | 63 |

| | |
|--|----|
| D.3.1. Obtención del tensor $S_{\mu\nu}$ | 63 |
| D.3.2. Obtención del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ | 66 |
| D.3.3. Ecuaciones de campo gravitacional de Einstein | 69 |

Lista de figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1. | Mapa de la temperatura de la radiación cósmica de fondo obtenido por la sonda WMAP [2]. | 15 |
| 2.1. | Evolución del radio de Hubble comóvil $(aH)^{-1}$ durante inflación. La región sombreada corresponde a la parte homogénea del Universo. . . . | 27 |
| 3.1. | Evolución del grado de anisotropía en la expansión para diferentes valores del parámetro $c = 1,1; 1,2; 1,5; 2$ (Orden ascendente). | 44 |

Resumen

TÍTULO: UN MODELO INFLACIONARIO VECTORIAL CON EXPANSIÓN ANISÓTROPA PROLONGADAⁱ.

AUTOR: CALDERÓN MANTILLA, Leonardo Fabiánⁱⁱ.

PALABRAS CLAVES: Cosmología, Inflación vectorial, Dirección preferencial en el Universo, Expansión anisótropa prolongada.

DESCRIPCIÓN: En vista de que existen análisis de datos sobre la radiación cósmica de fondo que sugieren la existencia de una dirección preferencial en el Universo, se analizará un modelo inflacionario en donde el campo del inflatón es acoplado a un campo vectorial sin masa, en el marco de un fondo homogéneo y anisótropo descrito por una métrica de Bianchi tipo I. Se mostrará que la expansión anisótropa generada en este modelo se prolonga hasta el final del período inflacionario, proveyendo un contraejemplo para el teorema del no-cabello cósmico. Este teorema establece que la dinámica de un universo inflacionario en un espacio-tiempo homogéneo pero anisótropo (Bianchi I-VIII), dominado por una constante cosmológica o un campo escalar en la fase de rodadura lenta, evolucionará exponencialmente hacia el universo de Friedmann-Robertson-Walker si la gravedad es de Einstein. De este modo, la isotropización del universo se alcanza rápidamente durante inflación, lo cual no es coherente con la posible existencia de una dirección preferencial en el Universo. En el modelo a analizar se evaden las condiciones del teorema del no-cabello cósmico al introducir un campo vectorial en el marco de la gravedad de Einstein. Se estudiará la dinámica de este modelo inflacionario, y las condiciones necesarias para que el monto de expansión anisótropa al final de inflación sea apreciable pero consistente con las cotas observacionales más recientes.

ⁱTrabajo de grado.

ⁱⁱFacultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez García (Director).

Abstract

TITLE: AN INFLATIONARY VECTOR MODEL WITH PROLONGED ANISOTROPIC EXPANSIONⁱⁱⁱ.

AUTHOR: CALDERÓN MANTILLA, Leonardo Fabián^{iv}.

KEY WORDS: Cosmology, Vector inflation, Prolonged anisotropic expansion.

DESCRIPTION: In view that there exist data analysis about the cosmic microwave background radiation that suggest the existence of a preferred direction in the Universe, we will analyze an inflationary model where the inflaton field is coupled to a massless vector field, in the framework of a homogeneous and anisotropic field described by a Bianchi type I metric. We will show that the generated anisotropic expansion in this model is prolonged until the end of the inflationary period, giving a counterexample for the cosmic no-hair theorem. This theorem establishes that the dynamics of an inflationary model in a homogeneous but anisotropic spacetime (Bianchi I-VIII), dominated by a cosmological constant or a scalar field in the slow-roll phase, will evolve exponentially towards a Friedmann-Robertson-Walker universe if the gravity is of the Einstein type. In this way, the isotropization of the universe is quickly reached during inflation, which is not coherent with the possible existence of a preferred direction in the Universe. In the model we will analyze, the conditions for the cosmic no-hair theorem are evaded by introducing a vector field in the framework of the Einstein gravity. We will study the dynamics of this inflationary model, and the necessary conditions for the amount of anisotropic expansion at the end of inflation to be sizeable but consistent with the most recent observational bounds.

ⁱⁱⁱDegree project.

^{iv}Faculty of Sciences, School of Physics, Yeinzon Rodríguez García (Supervisor).

Introducción

La cosmología moderna se ha convertido en un campo excitante de la ciencia. Nuevas medidas de precisión están revelando un Universo con propiedades sorprendentes e inesperadas, en particular la energía y materia oscura que ahora se creen son los componentes dominantes del cosmos. Reconocimientos de galaxias llevados a cabo por experimentos como ‘the Sloan Digital Sky Survey’ (SDSS) [1], están elaborando mapas a gran escala del Universo, además las sondas WMAP (NASA) [2] y PLANCK (ESA) [3] están realizando mediciones de alta precisión de las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo (RCF).

El descubrimiento de la expansión del Universo [4] por Edwin Hubble en 1929 anunció el nacimiento de la cosmología observacional. Si imaginamos un retroceso en el reloj cósmico, la expansión se convertirá en una contracción, en consecuencia, encontramos que el Universo era más caliente y más denso en su pasado. De hecho, en tiempos tempranos la temperatura era lo suficientemente alta como para ionizar el material que llenaba el Universo. Por lo tanto, el Universo consistía en un plasma de núcleos, electrones y fotones, y la densidad de electrones era tan alta que el camino libre medio para los fotones asociado a la dispersión de Thomson era extremadamente corto. A medida que el Universo se expandió, éste se enfrió, y la energía media de los fotones disminuyó. Con el tiempo, a una temperatura de alrededor de 3000 K, la energía de los fotones llegó a ser demasiado baja para mantener el universo ionizado. En ese momento, conocido como *recombinación*, los electrones se ligaron a los núcleos para dar origen a átomos neutros, y el camino libre medio de los fotones se incrementó a aproximadamente el tamaño del Universo observable. Esta radiación ha viajado desde entonces esencialmente sin obstáculos a través del Universo, y proporciona una imagen de éste cuando tenía apenas 370000 años. Ahora, 13800 millones de años más tarde, la radiación se ha enfriado a una temperatura de ~ 3 K correspondiente a frecuencias de microondas, y es observada como la radiación cósmica de fondo, la reliquia térmica del Big Bang (Fig.1).

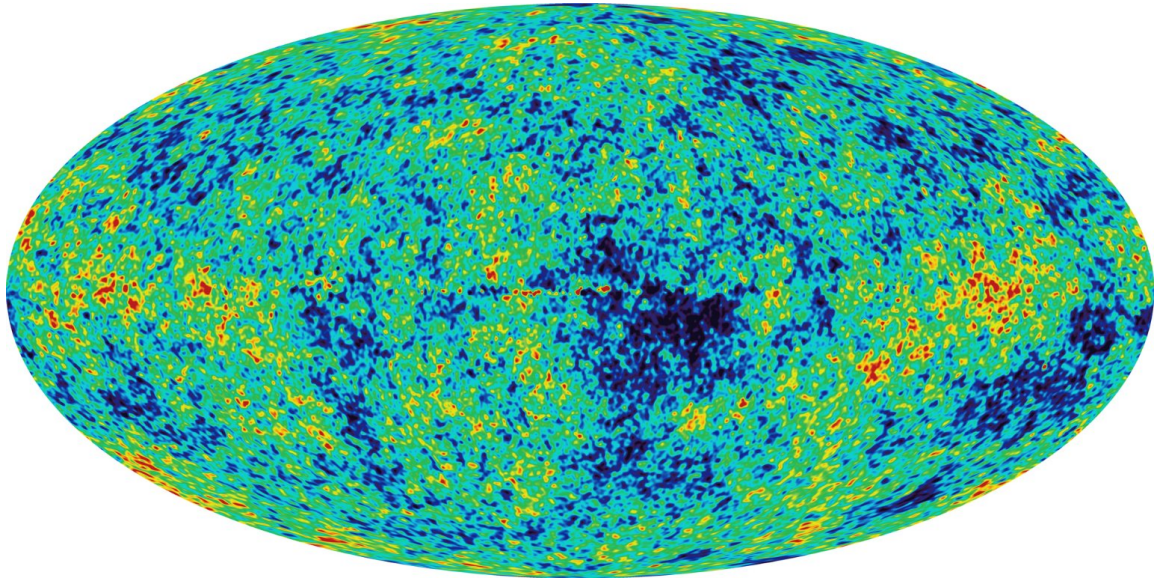


Figura 1: Mapa de la temperatura de la radiación cósmica de fondo obtenido por la sonda WMAP [2].

En una buena aproximación, la temperatura de la radiación cósmica de fondo es uniforme en todo el cielo; además posee el espectro de cuerpo negro más perfecto conocido, con una temperatura promedio de $2,725^\circ\text{K}$ medida por el satélite COBE (Cosmic Background Explorer) en 1992 [5]. El descubrimiento de la radiación cósmica de fondo [6], junto con la naturaleza de cuerpo negro de su espectro de frecuencia, fue de importancia fundamental para la cosmología, puesto que validó la idea de un Big Bang, es decir, el Universo era caliente y denso, y desde entonces se ha enfriado por la expansión [7]. Igualmente importante es el hecho de que la radiación cósmica de fondo posee ligeras variaciones de una parte en 100000 en su temperatura [5]. La medición más precisa de estas fluctuaciones ha sido realizada por el WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [8]. Las anisotropías en la temperatura reflejan las inhomogeneidades primordiales en el campo de densidad fundamental, el cual proporcionó las semillas para la formación de estructuras a gran escala observadas actualmente [9]

La teoría del Big Bang, hace predicciones determinantes que por ahora han sido confirmadas en una serie espectacular de observaciones [4, 6, 10]. No cabe duda que el Universo realmente ha surgido de un estado de alta energía y posteriormente se ha enfriado por la expansión [7]. Sin embargo, hay problemas fundamentales con esta visión simple del Big Bang. Ésta requiere que el estado inicial del Universo sea finamente escogido. Cualquier desviación pequeña de ese estado daría lugar a un Universo totalmente diferente al nuestro. En la década de 1980 los cosmólogos propusieron una solución radical a este problema de ajuste fino [11, 12, 13], la cual corresponde a la

teoría inflacionaria. En el Universo primordial, un período llamado *inflación* podría haber causado que el Universo experimentara una expansión acelerada. Los modelos inflacionarios convencionales [9] consideran que la expansión fue ocasionada por un campo escalar hipotético llamado el *inflatón*, el cual dio origen a la expansión acelerada. El tamaño físico del universo creció tanto, que llegó a ser mucho más grande que la distancia que la luz pudo haber viajado desde el Big Bang. Cualquier inhomogeneidad que precedió a inflación fue borrada, el universo llegó a ser plano y suave a lo largo de nuestro pedazo observable. Además la teoría inflacionaria también predice que pequeñas fluctuaciones cuánticas en el campo del inflatón dieron lugar a las perturbaciones grabadas en la radiación cósmica de fondo [9]. Actualmente ésta es la teoría dominante sobre la generación de inhomogeneidades primordiales, las cuales no serán objeto de estudio en el presente trabajo.

La teoría inflacionaria proporciona una explicación convincente de la planitud, homogeneidad, e isotropía de nuestro Universo a gran escala. Debido a predicciones como las mencionadas anteriormente, la teoría inflacionaria ha dominado la cosmología del Universo primordial en años recientes. A su vez, durante la última década, el conocimiento acerca de la radiación cósmica de fondo ha crecido enormemente debido a los datos obtenidos por la sonda WMAP [8, 14, 15, 16]. La calidad sin precedentes en los datos de la radiación cósmica de fondo (RCF), ha llevado a una serie de análisis de los efectos más finos, encontrando anomalías que parecen ser difíciles de conciliar con los modelos inflacionarios convencionales, es decir, aquellos que involucran únicamente campos escalares. La importancia estadística de dichas anomalías ha sido discutida extensamente, y una explicación debida a efectos sistemáticos o ruido afectando el análisis de datos, no ha sido descartada [16]. No obstante, cabe destacar que dichas anomalías han estado presentes continuamente en todos los análisis de datos de la radiación cósmica de fondo [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]. Las anomalías mencionadas anteriormente sugieren la existencia de una dirección preferencial en la radiación cósmica de fondo [34, 35, 36, 37, 38].

Es muy importante desarrollar modelos inflacionarios que brinden predicciones que estén de acuerdo con las observaciones mencionadas anteriormente. Es decir, se deben formular modelos que predigan una posible dirección preferencial en el Universo primordial, ya que en años venideros, la sonda PLANCK [3] confirmará o refutará las expectativas con respecto a estas observaciones. En el intento por dar una solución que explique una posible dirección preferencial en el Universo, se ha propuesto que un período de expansión anisótropa durante inflación podría explicar este fenómeno. Las primeras soluciones propuestas consistieron en considerar campos escalares, con condiciones anisótropas iniciales dadas al escoger una métrica anisótropa y homogénea del tipo Bianchi I [39, 40, 41]. El problema con dichos modelos es que la isotropización del Universo se alcanza muy rápido, debido a las predicciones del teorema del no-cabello

cósmico [42, 43, 44]. Así, las características anisótropas deseadas para el fondo, observables a grandes escalas sólo serían conseguidas si la duración del período inflacionario fuese ajustada finamente, lo cual es indeseable.

Este ajuste puede evitarse al evadir las condiciones de rápida isotropización del terema del no-cabello cósmico. Lo anterior se puede lograr introduciendo un campo vectorial, con lo cual el estado de expansión anisótropa sería prolongado. La expansión anisótropa es alcanzada cuando el campo vectorial rueda en dirección a un valor esperado en el vacío a lo largo de una dirección espacial. Algunos modelos incluyendo campos vectoriales han sido considerados en la literatura [45, 46, 47, 48]. Se han realizado análisis perturbativos con el fin de comprobar la estabilidad de estos modelos, identificando divergencias que indican la inestabilidad de los mismos [49, 50, 51, 52].

En el presente trabajo se estudiará un modelo inflacionario [53] en donde el campo del inflatón es acoplado al término cinético de un campo vectorial sin masa, y cuyo fondo es un espacio-tiempo homogéneo y anisótropo descrito por una métrica de Bianchi tipo I en el marco de la gravedad de Einstein. Recientemente se ha estudiado la estabilidad de este modelo mediante análisis perturbativos [54], los cuales señalan que el modelo es estable, convirtiéndolo así en el primero estable de su clase. El interés se centrará en mostrar que mediante este modelo se puede generar una expansión anisótropa la cual puede ser prolongada a la duración completa del período inflacionario, generando así una dirección preferencial en el Universo primordial. Lo anterior es posible gracias a que se evaden las condiciones del teorema del no-cabello cósmico por la presencia del campo vectorial sin masa.

Teniendo en cuenta las observaciones [14, 34], se analizará la evolución de la expansión anisótropa prolongada en el régimen de rodadura lenta y baja anisotropía en la expansión. Para llevar esto a cabo, se realizará un estudio analítico de las ecuaciones de campo para los campos escalar y vectorial, así como también de las ecuaciones de campo de Einstein. También se compararán las ecuaciones de campo encontradas con las ecuaciones convencionales de la cosmología estándar, para así poder indentificar las contribuciones debidas a la inclusión del campo vectorial sin masa y la cantidad de expansión anisótropa. Se mostrará que el grado de anisotropía en la expansión es del orden de uno de los parámetros de rodadura lenta, lo cual es coherente con la suposición de baja anisotropía en la expansión, pero que a su vez no es despreciable, sentando así las bases para la explicación de una posible dirección preferencial en nuestro Universo.

1

La expansión de un universo homogéneo e isótropo

La piedra angular de la cosmología moderna es la creencia de que el lugar que ocupamos en el Universo no es de ninguna manera especial, lo cual es conocido como el principio cosmológico. El Universo visible parece ser el mismo en todas las direcciones alrededor nuestro, al menos si observamos distancias mayores a 300 millones de años luz [55, 56]. Lo anterior es confirmado por una variedad de observaciones, y de forma espectacular en la temperatura casi idéntica de la radiación cósmica de fondo de microondas procedente de diferentes partes del cielo [8]. A partir de estas observaciones podemos concluir que el Universo es homogéneo e isótropo a grandes escalas ($\gtrsim 100$ Mpc).

De forma más precisa, la isotropía establece que el Universo luce igual en todas las direcciones (invariancia rotacional con respecto a todos los puntos), y la homogeneidad establece que el Universo luce igual en todo punto (invariancia traslacional) [57, 58, 59]. Es bien conocido que la isotropía con respecto a todos los puntos conlleva a la homogeneidad de forma automática, ya que una traslación espacial se puede obtener a través de sucesivas rotaciones con respecto a diferentes puntos. El comportamiento a gran escala del Universo puede ser descrito asumiendo un fondo isótropo y homogéneo. En el presente capítulo estudiaremos la geometría y dinámica de dicho fondo.

1.1. Geometría del espacio-tiempo de Friedmann - Robertson - Walker (FRW)

La expansión del Universo es entendida en el contexto de la relatividad general. La información acerca de la geometría del espacio-tiempo se encuentra almacenada en la métrica $g_{\mu\nu}$. Ésta debe ser escogida de tal forma que cumpla con los requerimientos físicos que implican homogeneidad e isotropía; así se escoge el tiempo coordenado de modo que las lonjas de espacio-tiempo de un t fijo sean homogéneas e isótropas, en otras palabras, las condiciones físicas sobre cada lonja son las mismas en toda posición y en toda dirección. Se escoge la ensartación, es decir las líneas de espacio-tiempo correspondientes a un x^i fijo, ortogonal a las lonjas, correspondiendo a $g_{0i} = 0$. Isotropía requiere que un observador moviéndose con la ensartación mida una velocidad cero para el fluido cósmico, por lo tanto la ensartación es comóvil. Homogeneidad demanda que el intervalo de tiempo propio entre lonjas sea independiente de la posición, lo cual significa que se puede escoger a t como el tiempo propio, correspondiente a $g_{00} = -1$ [9].

La única métrica que cumple los requerimientos de isotropía y homogeneidad mencionados anteriormente, es denominada la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [60, 61, 62] (Véase también [63]), y queda definida a través del elemento de línea en coordenadas cartesianas:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left[d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K\mathbf{x}^2} \right], \quad (1.1.1)$$

en donde $a(t)$ representa el factor de escala y K es una constante que describe la curvatura de las lonjas de un tiempo t constante, la cual puede adquirir los valores de $(-1, 0, 1)$, correspondiente a geometrías pseudo-esférica, euclídea y esférica respectivamente. Las componentes de la métrica en estas coordenadas son:

$$g_{00} = -1, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = a^2(t) \left(\delta_{ij} + K \frac{x^i x^j}{1 - K\mathbf{x}^2} \right), \quad (1.1.2)$$

siendo i y j índices espaciales, además con $x^0 \equiv t$. En lugar de usar coordenadas cartesianas x^i , podemos usar coordenadas esféricas para las cuales

$$d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega, \quad d\Omega \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.1.3)$$

de modo que el elemento de línea queda definido como:

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega \right]. \quad (1.1.4)$$

El significado físico del factor de escala $a(t)$ puede ser clarificado al calcular la distancia física en un tiempo t , desde el origen a un objeto comóvil ubicado en la coordenada radial r :

$$d(r, t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (1.1.5)$$

Para un objeto comóvil su coordenada radial r es independiente del tiempo, tal que la distancia física desde nosotros a un objeto comóvil aumenta proporcionalmente a $a(t)$ [57, 58]. A su vez, la razón de cambio de cualquier distancia física $d(t)$ es:

$$\dot{d} = \frac{\dot{a}}{a}d, \quad (1.1.6)$$

en donde se define el parámetro de Hubble H como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.1.7)$$

el cual caracteriza la razón de expansión del espacio de Friedmann-Robertson-Walker. El parámetro de Hubble tiene unidades de t^{-1} , y es positivo para un universo en expansión como el nuestro. La Ec. (1.1.6) es conocida como la ley de Hubble, la cual puede ser expresada de manera más usual como $v = Hd$, en donde v representa la razón de cambio de la distancia física d .

Hay varios campos vectoriales y tensoriales, como la corriente de galaxias y el tensor de momentum-energía, cuyos valores medios deben satisfacer los requerimientos de isotropía y homogeneidad. Isotropía requiere que el valor medio de cualquier tri-vector v^i desaparezca, y homogeneidad requiere que el valor medio de cualquier escalar sea sólo función del tiempo. Igualmente, isotropía requiere que el valor medio de cualquier tri-tensor t^{ij} en $\mathbf{x} = 0$ sea proporcional a δ^{ij} y por lo tanto a g^{ij} en virtud del principio de equivalencia. En un sistema de referencia comóvil con el fluido como el de Friedmann-Robertson-Walker, se puede escoger la cuadri-velocidad tal que $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Teniendo en cuenta lo anterior, sumado a los requerimientos de homogeneidad e isotropía, las componentes del tensor de momentum-energía toman la forma:

$$T^{00} = \rho(t), \quad T^{0i} = 0, \quad T^{ij} = g^{ij}(\mathbf{x})p(t), \quad (1.1.8)$$

en donde $\rho(t)$ representa la densidad de energía y $p(t)$ la presión para el fluido en un tiempo t [57].

1.2. Dinámica del espacio-tiempo de FRW

La expansión del Universo es determinada por las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales pueden ser expresadas de forma conveniente como [63]

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}, \quad (1.2.1)$$

en donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, G es la constante de gravitación universal y $S_{\mu\nu}$ está dado en términos del tensor de momentum-energía mediante

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda. \quad (1.2.2)$$

Teniendo en cuenta los resultados acerca de la métrica y el tensor de momentum-energía para el Universo de Friedmann-Robertson-Walker (Ecs. 1.1.1 y 1.1.8), las ecuaciones de Einstein quedan expresadas comoⁱ

$$-\frac{2K}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2M_p^2}(\rho - p), \quad (1.2.3)$$

y

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_p^2}(\rho + 3p), \quad (1.2.4)$$

en donde M_p es la masa reducida de Planck, definida como $M_p = (8\pi G)^{-1/2}$. Se pueden eliminar los términos con segunda derivada adicionando la Ec. (1.2.3) a la Ec. (1.2.4), encontrando así

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3M_p^2} - \frac{K}{a^2}. \quad (1.2.5)$$

La anterior es conocida como la ecuación de Friedmann, la cual nos permite de manera transparente estudiar la evolución del factor de escala en el tiempo y por ende la evolución de nuestro Universo de Friedmann-Robertson-Walker. Ahora al combinar la Ec. (1.2.4) junto con la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (1.2.5) se obtiene la ecuación de continuidad para la densidad de energía

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (1.2.6)$$

De esta forma, dada p como función de ρ a través de una ecuación de estado de la forma $p = w\rho$, se puede resolver la Ec. (1.2.6) para encontrar ρ como función del factor de escala, obteniendo

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}, \quad (1.2.7)$$

en donde ρ_0 y a_0 representan la densidad y el factor de escala en el presente, respectivamente. El anterior resultado se puede usar para encontrar la dependencia en el tiempo del factor de escala a mediante la ecuación de Friedmann (Ec. 1.2.5), teniendo así

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{\frac{2}{3}(1+w)} & w \neq -1, \\ e^{Ht} & w = -1, \end{cases} \quad (1.2.8)$$

es decir, $a(t) \propto t^{2/3}$, $a(t) \propto t^{1/2}$, $a(t) \propto e^{Ht}$, para el factor de escala de un universo plano ($K = 0$) dominado por materia ($w = 0$), radiación ($w = \frac{1}{3}$) y constante cosmológica ($w = -1$), respectivamente.

ⁱVer cálculo en el apéndice A.

1.3. Horizonte de partículas

El horizonte de partículas representa el límite sobre las distancias a las cuales los eventos pasados pueden ser observados. Partiendo del elemento de línea (Ec. 1.1.4), en donde para un fotón se tiene que $d\tau^2 = 0$, es decir

$$dt = -a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (1.3.1)$$

Ésta ecuación puede ser integrada como

$$\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (1.3.2)$$

en donde r_{max} representa el valor más grande de la coordenada radial para la cual un observador en el tiempo t recibirá señales viajando a la velocidad de la luz desde $t = 0$. A partir de la definición de la distancia física d (Ec. 1.1.5), se puede deducir que la cantidad

$$\tau \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (1.3.3)$$

representa una distancia comóvil, la cual se define como el horizonte de partículas comóvil. De esta forma se puede definir la distancia física del horizonte de partículas mediante

$$d_{max} = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.3.4)$$

1.4. Problemas de la cosmología estándar

Lo estudiado en las secciones anteriores corresponde a lo que se conoce como la cosmología estándar del Big Bang, la cual ha tenido un éxito notorio al explicar las características básicas del Universo observable (expansión de Hubble, abundancia de elementos ligeros, radiación cósmica de fondo, etc) [4, 6, 10]. Sin embargo, hay problemas fundamentales con esta visión simple de la cosmología estándar. Ésta requiere que el estado inicial del Universo haya sido finamente escogido. Cualquier desviación de dicho estado inicial podría conllevar a un universo dramáticamente diferente al nuestro. Los problemas básicos de la cosmología estándar se refieren a los problemas de horizonte, planitud y reliquias no deseadas. Esto no significa que la cosmología estándar sea errónea, sino que tiene deficiencias severas en cuanto a su consistencia interna y poder predictivo ya que, por ejemplo, la alta planitud del universo temprano no puede ser predicha por el modelo; en vez de ello tiene que ser asumida en las condiciones iniciales. Una teoría que explique esas condiciones iniciales sería muy atractiva.

1.4.1. Problema de horizonte

El problema de horizonte consiste en que observaciones del fondo cósmico de microondas implican la existencia de correlaciones en la temperatura a través de distancias en el cielo que corresponden a escalas de super-horizonte en el momento en que la radiación cósmica de fondo fue liberada. De hecho, regiones que en la cosmología estándar del Big Bang estuvieron causalmente conectadas en la superficie de la última dispersión, corresponden solamente a un ángulo del orden de un grado en el cielo. La radiación cósmica de fondo posee casi la misma temperatura en todas las direcciones en el cielo. Sin embargo, no hay manera de establecer el equilibrio térmico si estos puntos nunca estuvieron en contacto causal antes de la última dispersión.

Teniendo en cuenta la definición del horizonte de partículas comóvil τ (Ec. 1.3.3)

$$\tau \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (1.4.1)$$

y usando la definición para el parámetro de Hubble $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$, se pueden realizar los siguientes cambios de variable: $dt = \frac{da}{aH}$, y $d \ln a = da/a$, para luego expresar el horizonte de partículas comóvil como

$$\tau = \int_0^a \frac{da}{Ha^2} = \int_0^a \left(\frac{1}{aH} \right) d \ln a. \quad (1.4.2)$$

Aquí, se expresa el horizonte de partículas comóvil como la integral del *radio de Hubble comóvil*, $(aH)^{-1}$. Por lo tanto se puede realizar el cálculo del horizonte de partículas comóvil para un universo dominado por un fluido con ecuación de estado w , expresando la razón de expansión en términos del factor de escala. De la ecuación de Friedmann (1.2.5) con $K = 0$, junto con la ecuación de la evolución de la densidad de energía en el tiempo (1.2.7) se obtiene

$$H = ha^{-3(1+w)/2}, \quad \text{en donde} \quad h = \frac{1}{M_p} \sqrt{\frac{a_0^{3(1+w)/2} \rho_0}{3}}. \quad (1.4.3)$$

Para un universo dominado por un fluido con ecuación de estado w , se puede expresar el radio de Hubble comóvil en la forma

$$(aH)^{-1} = h^{-1} a^{(1+3w)/2}. \quad (1.4.4)$$

El comportamiento cualitativo por tanto depende de si $(1 + 3w)$ es positivo o negativo. Durante la expansión del espacio en el Universo temprano (dominación de radiación o materia) ($w \geq 0$), $(aH)^{-1}$ crece monótonamente y el horizonte de partículas comóvil τ o la fracción del Universo en contacto causal crece con el tiempo como

$$\tau = \int_0^a \frac{da}{Ha^2} = \int_0^a h^{-1} a^{(3w-1)/2} da = \frac{2h^{-1}}{3w+1} a^{(3w+1)/2}. \quad (1.4.5)$$

Así, se encuentra una relación directa entre el horizonte de partículas comóvil τ y el radio de Hubble comóvil $(aH)^{-1}$:

$$\tau = \frac{2}{3w+1}(aH)^{-1}. \quad (1.4.6)$$

Teniendo en cuenta la Ec. (1.4.4), se observa que el horizonte de partículas comóvil τ crece monótonamente con el tiempo, lo cual implica que escalas comóviles entrando al horizonte hoy, estuvieron mucho más allá del horizonte en el momento de la última dispersión. Pero la vasta homogeneidad del fondo cósmico de microondas indica que el Universo fue extremadamente homogéneo en el momento de la última dispersión en escalas que abarcan muchas regiones (alrededor de 10^5) que, a priori, son causalmente independientes.

1.4.2. Problema de planitud

Para cualquier valor del parámetro de Hubble, se puede definir la densidad crítica como

$$\rho_{crit} \equiv 3M_p^2 H^2; \quad (1.4.7)$$

de esta forma se puede expresar la ecuación de Friedmann (Ec. 1.2.5) de la forma

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}, \quad (1.4.8)$$

en donde Ω es llamado el parámetro de densidad, definido como $\Omega = \rho/\rho_{crit}$. Por consiguiente, lo que sea que asumamos como componentes del Universo, la constante de curvatura K será $+1$, 0 ó -1 de acuerdo a si la densidad ρ es mayor, igual o menor que la densidad crítica ρ_{crit} . El valor actual del parámetro de densidad Ω_0 de acuerdo a las observaciones es muy cercano a uno ($1,0063 < \Omega_0 < 1,0178$) [14], favoreciendo así una geometría plana ($K = 0$) para el Universo observableⁱⁱ. En la cosmología estándar un universo plano es una solución inestable, y así cualquier curvatura primordial del espacio crecería muy rápidamente. Para explicar la planitud geométrica del espacio actualmente, se requiere de un ajuste fino en las condiciones iniciales de la cosmología del Big Bang.

Una formulación alternativa del problema es la siguiente: En la explicación del problema de horizonte se mostró que el radio comóvil de Hubble $(aH)^{-1}$, crece con el tiempo para fluidos con parámetro de la ecuación de estado ($w \geq 0$, por ejemplo: radiación $w = 1/3$ ó materia $w = 0$). Por lo tanto, la cantidad $|\Omega - 1|$ debe diverger con el tiempo, así el valor crítico $\Omega = 1$ ($K=0$) es un solución inestable. Por otro lado

ⁱⁱEn análisis posteriores se asumirá $K = 0$ para la evolución del fondo de FRW.

la densidad de energía total del Universo actual es todavía una fracción razonable de la densidad crítica. ¿Cómo es que después de billones de años, ρ todavía no es muy diferente de ρ_{crit} , es decir $\Omega \simeq 1$?

2

Inflación cósmica mediante un campo escalar en un universo homogéneo e isótropo

En el capítulo anterior se analizaron las predicciones de la cosmología estándar del Big Bang. Se destacó que ésta requiere de un ajuste fino en las condiciones iniciales del Universo, ya que cualquier desviación con respecto a dichas condiciones iniciales conllevaría a un universo diferente al nuestro. En la década de 1980 los cosmólogos propusieron una solución radical a este problema de ajuste fino [11, 12, 13], la cual corresponde a la teoría inflacionaria.

Al explicar los problemas de planitud y horizonte de la cosmología estándar del Big Bang, se resaltó el papel fundamental del radio de Hubble comóvil. Ambos problemas surgen debido a que en la cosmología convencional el radio de Hubble es estrictamente creciente. Esto sugiere que todos los misterios del Big Bang se resuelven por una idea maravillosamente simple: *invertir el comportamiento del radio de Hubble comóvil, es decir, que disminuya suficientemente en el universo primitivo.*

2.1. El horizonte comóvil durante inflación

La evolución del horizonte comóvil es de crucial importancia para la idea de una inflación cósmica, entonces, vale la pena ser explícito en algunos puntos importantes. Dada la

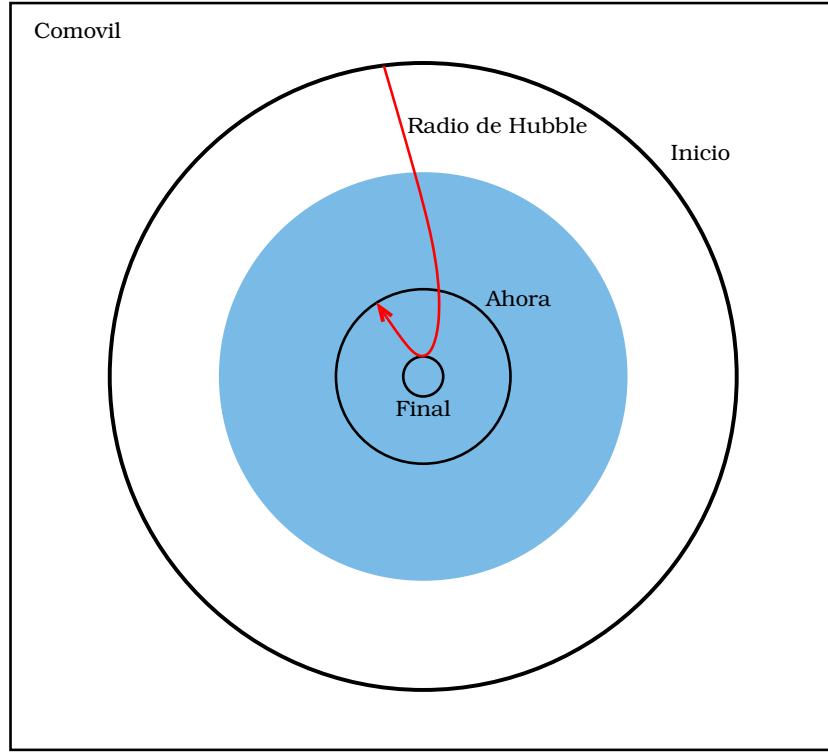


Figura 2.1: Evolución del radio de Hubble comóvil $(aH)^{-1}$ durante inflación. La región sombreada corresponde a la parte homogénea del Universo.

definición de horizonte comóvil τ en función de Hubble comóvil $(aH)^{-1}$

$$\tau = \frac{2}{3w + 1} (aH)^{-1}, \quad (2.1.1)$$

se destaca una sutil distinción entre el horizonte comóvil τ y el radio de Hubble comóvil $(aH)^{-1}$: si las partículas están separadas por distancias mas grandes que τ , ellas nunca podrán comunicarse con otras; si ellas están separadas por distancias mayores que $(aH)^{-1}$, ellas no pueden comunicarse una a otra ahora. De la Ec.(2.1.1) se evidencia que esto podría suceder si el radio comóvil de Hubble en el Universo temprano fuera mucho más grande de lo que es ahora, de modo que τ tendría la mayor parte de su contribución desde tiempos tempranos. Por lo tanto, se requiere de una fase en la cual disminuya el radio de Hubble comóvil (Fig. 2.1). Desde que H sea aproximadamente constante, mientras a crece exponencialmente durante inflación, encontramos que el radio de Hubble comóvil disminuye durante inflación. Un horizonte comóvil decreciente implica que grandes escalas entrando al presente Universo estuvieron dentro del horizonte antes de inflación. La física causal antes de inflación establece la homogeneidad espacial que observamos en el presente. Con un período de inflación, la uniformidad de la RCF no es un misterio.

2.2. Inflación

Inflación se define como una fase en la cual el radio de Hubble comóvil disminuye. A través de las ecuaciones de Friedmann un radio de Hubble comóvil en disminución puede ser relacionado a la aceleración y presión del Universo

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0 \iff \frac{d^2a}{dt^2} > 0 \iff \rho + 3p < 0. \quad (2.2.1)$$

Las tres condiciones equivalentes para inflación son por consiguiente:

- **Horizonte comóvil decreciente:** La esfera de Hubble en reducción es definida como

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0, \quad (2.2.2)$$

Se usa ésta como definición fundamental de inflación ya que se relaciona de manera más directa con los problemas de horizonte y planitud

- **Expansión acelerada:** De la relación

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{-\ddot{a}}{(aH)^2}, \quad (2.2.3)$$

se observa inmediatamente que un radio de Hubble en disminución implica expansión acelerada

$$\frac{d^2a}{dt^2} > 0. \quad (2.2.4)$$

Esto explica el por qué inflación es a menudo definida como un período de expansión acelerada. La segunda derivada con respecto al tiempo del factor de escala puede ser relacionada con la primera derivada con respecto al tiempo del parámetro de Hubble

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \varepsilon), \quad \text{donde } \varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (2.2.5)$$

Por lo tanto un período de expansión acelerada corresponde a

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN} < 1. \quad (2.2.6)$$

Aquí, definimos $dN = Hdt = d \ln a$, el cual mide el número de e -folds N de expansión inflacionaria. El significado físico de la Ec. (2.2.6) corresponde a que el cambio fraccional del parámetro de Hubble por e -fold es pequeño.

- **Presión negativa:** A partir de la Ec. (1.2.4), la cual es conocida como la ecuación de aceleración y teniendo en cuenta la condición dada por la Ec. (2.2.4) se tiene que

$$\rho + 3p < 0. \quad (2.2.7)$$

El resultado anterior suele ser interpretado como una presión negativa, relacionada a la densidad energía como

$$p < -\frac{\rho}{3}. \quad (2.2.8)$$

2.3. Inflación mediante un campo escalar

Los modelos más simples de inflación involucran un solo campo escalar ϕ , llamado inflatón. Aquí no se especifica la naturaleza física del campo ϕ , simplemente se usa éste como un parámetro de orden (o reloj) que da cuenta de la evolución en el tiempo de la densidad de energía durante inflación. La dinámica de un campo escalar acoplado de forma mínima a la gravedad es gobernada por la acción [57, 64]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{M_p^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (2.3.1)$$

La acción (2.3.1) es la suma de la acción de Einstein-Hilbert para la gravitación, S_{EH} , y la acción S_ϕ de un campo escalar con término cinético canónico. El potencial $V(\phi)$ describe las interacciones del campo escalar.

A partir del lagrangiano para el campo escalar

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi), \quad (2.3.2)$$

se puede calcular el tensor de momentum-energía para dicho campo en un espacio-tiempo curvo [64]

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (2.3.3)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi + V(\phi) \right), \quad (2.3.4)$$

en donde $g_{\mu\nu}$ representa la métrica de dicho espacio-tiempo.

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos, podemos hallar las ecuaciones de campo para el inflatón ϕ :

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0, \quad (2.3.5)$$

lo que implica

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\dot{\phi}) + V'(\phi) = 0, \quad \text{en donde } V'(\phi) = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.3.6)$$

Asumiendo la métrica de FRW (1.1.1) para $g^{\mu\nu}$ y restringiendo el tratamiento al caso de un campo escalar homogéneo $\phi(t, \mathbf{x}) \equiv \phi(t)$, el tensor de momentum-energía toma la forma de un fluido perfecto Ec.(1.1.8), con densidad y presión dadas por

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.3.7)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.3.8)$$

El parámetro w en la ecuación de estado resultante es por ende

$$w_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (2.3.9)$$

el cual muestra que un campo escalar puede conducir a una presión negativa ($w_\phi < 0$) y a una expansión acelerada ($w_\phi < -1/3$) si la energía potencial $V(\phi)$ domina sobre la energía cinética $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$. A partir de la Ec. (2.3.6) se observa que la dinámica de un campo escalar homogéneo en el espacio-tiempo de FRW es determinada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (2.3.10)$$

Ahora el parámetro de Hubble queda definido de la forma

$$H^2 = \frac{1}{3M_p^2}\rho_\phi = \frac{1}{3M_p^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right). \quad (2.3.11)$$

2.4. Inflación del tipo rodadura lenta

La aproximación de rodadura lenta consiste en imponer ciertas condiciones al potencial $V(\phi)$ del campo del inflatón. Se desea que dicho potencial sea lo suficientemente plano por dos razones:

1. A través de un potencial suficientemente plano es más fácil obtener un período inflacionario lo suficientemente prolongado, que resuelva los problemas de la cosmología estándar [57].

2. Las observaciones concernientes a la estadística de la estructura a gran escala son consistentes (casi que exigen), que el potencial sea prácticamente plano, desde el punto de vista de la aproximación de rodadura lenta [9, 57].

La ecuación de aceleración para un Universo dominado por el campo escalar homogéneo del inflatón puede ser escrita como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_p^2}(\rho_\phi + 3p_\phi) = -\frac{1}{6M_p^2}\rho_\phi(1 + 3w_\phi). \quad (2.4.1)$$

A partir de la definición del parámetro de Hubble y su primera derivada se tiene

$$\frac{\dot{a}}{a} = H^2(1 - \varepsilon), \quad (2.4.2)$$

en donde ε puede ser relacionada con la presión y la densidad a través de la ecuación de estado mediante

$$\varepsilon = \frac{3}{2}(w_\phi + 1). \quad (2.4.3)$$

Derivando el parámetro de Hubble con respecto al tiempo en la Ec.(2.3.11) y utilizando la ecuación de movimiento para el campo escalar homogéneo Ec.(2.3.10) se obtiene un resultado importante:

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_p^2}\dot{\phi}^2. \quad (2.4.4)$$

De esta forma se puede definir el *primer parámetro de rodadura lenta* ε que puede ser relacionado con la evolución del parámetro de Hubble durante inflación de la forma

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\dot{\phi}^2}{2M_p^2 H^2}. \quad (2.4.5)$$

Ahora para formular la *aproximación de rodadura lenta* [9, 57], se comienza asumiendo que la inflación es casi exponencial. Una de las consecuencias de que el factor de escala crezca de la forma $a \sim e^{Ht}$ es que $p \rightarrow -\rho$. Asumiendo esto para el período inflacionario en la aproximación de rodadura lenta se obtiene de la ecuación de estado que $w_\phi \rightarrow -1$, lo que trae como consecuencia a partir de la Ec. (2.4.3) que $\varepsilon \rightarrow 0$. Lo anterior se puede entender a partir de la Ecs. (2.3.11), (2.4.4) y (2.4.5) como

$$\varepsilon = \frac{|\dot{H}|}{H^2} \ll 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{\dot{\phi}^2}{2M_p^2} \ll \frac{1}{3M_p^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right), \quad (2.4.6)$$

$$\boxed{\text{RODADURA LENTA}} \quad \implies \quad V(\phi) \gg \dot{\phi}^2. \quad (2.4.7)$$

De esta forma, la energía potencial domina sobre la energía cinética, lo cual es equivalente a

$$H^2 \simeq \frac{1}{3M_p^2}V(\phi). \quad (2.4.8)$$

Ahora se puede obtener más conclusiones a cerca de las aproximaciones mencionadas anteriormente, si derivamos con respecto al tiempo ambos lados de la Ec. (2.4.8) y se utiliza el resultado obtenido en la Ec. (2.4.4):

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi). \quad (2.4.9)$$

Sin embargo, de la ecuación de movimiento para el campo escalar se tiene

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.4.10)$$

entonces para cumplir con la condición encontrada en la Ec. (2.4.9) se tiene que

$$\boxed{\text{RODADURA LENTA} \implies |\ddot{\phi}| \ll 3H|\dot{\phi}|, |V'(\phi)|}. \quad (2.4.11)$$

A partir de este resultado se puede definir el *segundo parámetro de rodadura lenta* η en la forma

$$|\eta - \varepsilon| = \left| \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \right| \ll 1, \quad (2.4.12)$$

con lo cual se establece que $\dot{\phi}$ no cambia mucho en un tiempo de Hubble. También se podría decir que el cambio fraccional de $\dot{\phi}$ por e-fold es pequeño, por lo tanto se han establecido los dos parámetros de rodadura lenta de Hubble ε y η sujetos a las condiciones

$$\varepsilon, |\eta| \ll 1. \quad (2.4.13)$$

Las condiciones de rodadura lenta, $\varepsilon, |\eta| \ll 1$, pueden ser expresadas como condiciones sobre la forma del potencial inflacionario $V(\phi)$ como [9, 57]

$$\epsilon_V(\phi) \equiv \frac{M_p^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \ll 1, \quad (2.4.14)$$

y

$$\eta_V(\phi) = M_p^2 \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \ll 1. \quad (2.4.15)$$

Quedan entonces plenamente establecidas las condiciones de rodadura lenta sobre el potencial inflacionario $V(\phi)$, las cuales muestran que éste es un potencial bastante plano sometido a las condiciones

$$|\eta_V|, \epsilon_V \ll 1. \quad (2.4.16)$$

2.5. Monto de inflación

El monto de inflación conocido también como el número de e-folds, es una cantidad que da cuenta de la cantidad de expansión producida durante inflación. Usualmente se

define como

$$N \equiv \ln \frac{a(t_f)}{a(t_i)}, \quad (2.5.1)$$

en donde $a(t_i)$ y $a(t_f)$ representan los factores de escala al inicio y al final de inflación, respectivamente. Para resolver los problemas de la cosmología estándar se requieren alrededor de 70 e-folds [9, 57].

3

Inflación vectorial con expansión anisótropa prolongada

Datos obtenidos por la sonda WMAP sugieren la existencia de una dirección preferencial en la radiación cósmica de fondo [34, 35, 36, 37, 38]. Una dirección preferencial en el Universo primordial parece ser difícil de explicar por los modelos inflacionarios convencionales, es decir, aquellos que involucran únicamente campos escalares. Entonces, es de vital importancia desarrollar modelos inflacionarios que brinden predicciones que estén de acuerdo con las observaciones de la RCF.

En el presente capítulo se estudiará la evolución del grado de expansión anisótropa, en un modelo inflacionario [53, 54, 65, 66] en donde hay un campo escalar con masa y un campo vectorial sin masa, y cuyo fondo es un espacio-tiempo homogéneo y anisótropo descrito por una métrica de Bianchi tipo I en el marco de la gravedad de Einstein. En este modelo se evaden las condiciones de rápida isotropización predichas por el teorema del no-cabello cósmico¹ al introducir un campo vectorial sin masa, con lo cual el estado de expansión anisótropa es prolongado a la duración completa del período inflacionario. Existe una gran motivación al estudiar este modelo, debido a que mediante análisis perturbativos se ha evindenciado que es el primer modelo estable de su clase [54].

3.1. Formulación del modelo

Se estudiará un escenario inflacionario [53] en donde el campo escalar del inflatón ϕ es acoplado a un campo vectorial sin masa A_μ mediante un término cinético no canónico,

¹Ver apéndice B

y cuya acción está dada porⁱⁱ

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{M_p^2}{2} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} f^2(\phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (3.1.1)$$

en donde R es el escalar de Ricci, $V(\phi)$ es el potencial del inflatón, $f(\phi)$ es la función de acople del campo del inflatón al campo vectorial y $F_{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos para el campo vectorial. El tensor de esfuerzos del campo vectorial es definido por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \text{en donde} \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \quad (3.1.2)$$

De acuerdo con la generación de estructuras a gran escala mediante modelos inflacionarios vectoriales, se escoge un término cinético no canónico para el campo vectorial en la acción (3.1.1), a través del cual se rompe la invariancia conformal, lo cual es imposible mediante un término cinético canónico.

Gracias a la invariancia de Gauge se puede escoger $A_0 = 0$. Sin pérdida de generalidad, se puede tomar el eje x en la dirección del vector. Por lo tanto, se toman los campos homogéneos de la forma

$$A_\mu = (0, A_1(t), 0, 0) \quad \text{y} \quad \phi = \phi(t); \quad (3.1.3)$$

así la dirección del campo vectorial no varía en el tiempo.

Se asumirá una métrica homogénea pero anisótropa del tipo Bianchi Iⁱⁱⁱ para la evolución del fondo, con simetría residual en el plano perpendicular al valor esperado para el campo vectorial, parametrizada en la forma

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha(t)} \left[e^{-4\sigma(t)} dx^2 + e^{2\sigma(t)} (dy^2 + dz^2) \right]. \quad (3.1.4)$$

La escogencia de la métrica implica que la expansión generada a lo largo de x en dicho espacio-tiempo es distinta a la de y y z .

Al emplear las Ecs. (C.0.1 - C.0.7) en la métrica (3.1.4), se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. La cantidad $e^{\alpha(t)}$ corresponde al factor de escala global.
2. El parámetro de Hubble global es $H = \dot{\alpha}$, el cual caracteriza la razón de expansión isótropa promedio.

ⁱⁱ**Convención:** Un punto sobre un símbolo (Ej: $\dot{\alpha}$) denota la diferenciación respecto al tiempo, y un símbolo primado (Ej: $f'(\phi)$) denota la diferenciación respecto a ϕ .

ⁱⁱⁱVer apéndice C

3. La cantidad $\sigma(t)$ controla el monto de expansión anisótropa generado.
4. El escalar de shear Σ , que en adelante simplemente será llamado shear, queda definido como $\Sigma = \dot{\sigma}$, y representa la razón de expansión anisótropa promedio.

Además, existe una cantidad conocida como el grado de anisotropía en la expansión, el cual es definido como el cociente entre las razones de expansión anisótropa e isotropa Σ/H , y es de gran importancia para el análisis del modelo inflacionario propuesto.

3.2. Ecuaciones de campo e inflación

Definida la acción mediante la Ec. (3.1.1), el lagrangiano de materia de los campos escalar y vectorial está dado por

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) - \frac{1}{4}f^2(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.2.1)$$

Aplicando el principio de acción estacionaria con extremos fijos, se puede encontrar la ecuación de campo para A_μ ^{iv}

$$\ddot{A}_1 + \left[\dot{\alpha} + 4\dot{\sigma} + 2\frac{f'(\phi)}{f(\phi)}\dot{\phi} \right] \dot{A}_1 = 0. \quad (3.2.2)$$

La solución de la Ec. (3.2.2) es

$$\dot{A}_1 = p_A f^{-2}(\phi) e^{-\alpha-4\sigma}, \quad (3.2.3)$$

en donde p_A es una constante de integración. Sustituyendo la solución dada por la Ec. (3.2.3) en las ecuaciones de campo del inflatón y gravitacional de Einstein, se obtiene el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el modelo inflacionario [53]^v. Realizando el paralelo de este conjunto de ecuaciones con respecto a las ecuaciones obtenidas para el modelo convencional del inflatón en el universo de FRW^{vi} (Ecs. 1.2.3, 2.3.10 y 2.3.11), se pueden identificar las contribuciones realizadas por el campo vectorial A_μ y por la cantidad de expansión anisótropa σ ^{vii}. De esta forma, se puede reconocer a cada una de estas ecuaciones a manera de:

^{iv}Ver sección D.1 del apéndice D.

^vEn el apéndice D se presenta la obtención detallada de las ecuaciones de campo.

^{vi}Tomando como factor de escala $a = e^\alpha$, de tal forma que $H = \dot{\alpha}$.

^{vii}Las contribuciones realizadas por A_μ y σ han sido subrayadas en las Ecs. (3.2.4, 3.2.5 y 3.2.6).

- Ecuación de Friedmann

$$\dot{\alpha}^2 = \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{3M_p^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{p_A^2}{2} f^{-2}(\phi) e^{-4\alpha-4\sigma} \right]. \quad (3.2.4)$$

- Ecuación de Einstein espacial

$$\ddot{\alpha} = -3\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{M_p^2} V(\phi) + \frac{p_A^2}{6M_p^2} f^{-2}(\phi) e^{-4\alpha-4\sigma}. \quad (3.2.5)$$

- Ecuación de evolución del inflatón ϕ

$$\ddot{\phi} = -3\dot{\alpha}\dot{\phi} - V'(\phi) + \frac{p_A^2}{3} f^{-3}(\phi) f'(\phi) e^{-4\alpha-4\sigma}. \quad (3.2.6)$$

- Ecuación de evolución de la cantidad de expansión anisótropa σ

$$\ddot{\sigma} = -3\dot{\alpha}\dot{\sigma} + \frac{p_A^2}{3M_p^2} f^{-2}(\phi) e^{-4\alpha-4\sigma}. \quad (3.2.7)$$

La ecuación de evolución de la cantidad de expansión anisótropa σ surge debido a la escogencia de una métrica anisótropa del tipo Bianchi I y la presencia del campo vectorial. Por esta razón, no existe ninguna relación entre la Ec. (3.2.7) y el modelo convencional del inflatón en el universo de FRW. En consecuencia, en el presente modelo inflacionario [53] se recuperan las condiciones usuales de inflación mediante campos escalares en el universo de FRW, en el límite cuando $\dot{\sigma} = \sigma = 0$ y la contribución del campo vectorial es nula.

A partir de la ecuación de Friedmann (Ec. 3.2.4), se puede notar que la expresión dentro de los corchetes en el segundo término de la derecha, corresponde a la densidad de energía total de los campos escalar y vectorial. Teniendo en cuenta que la densidad de energía para el inflatón está dada por $\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)$ (Ec. 2.3.7), se concluye que la densidad de energía del campo vectorial es

$$\rho_A = \frac{p_A^2}{2} f^{-2}(\phi) e^{-4\alpha-4\sigma}. \quad (3.2.8)$$

Ahora, usando las Ecs. (3.2.4) y (3.2.5) se puede hallar la ecuación de aceleración para el universo, la cual está dada por:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 = -2\dot{\sigma}^2 - \frac{1}{3M_p^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{3M_p^2} \left[V(\phi) - \frac{p_A^2}{2} f^{-2}(\phi) e^{-4\alpha-4\sigma} \right]. \quad (3.2.9)$$

Inflación se define como un período en el cual $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$ (Ec. 2.2.4), lo cual implica

$$-2\dot{\sigma}^2 - \frac{1}{3M_p^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{3M_p^2} V(\phi) - \frac{p_A^2}{6M_p^2} f^{-2}(\phi) e^{-4\alpha-4\sigma} > 0, \quad (3.2.10)$$

es decir, para que inflación ocurra se debe cumplir

$$V(\phi) > 6M_p^2 \dot{\sigma}^2 + \dot{\phi}^2 + \rho_A. \quad (3.2.11)$$

Sin embargo, cada una de las cantidades $\dot{\sigma}^2$, $\dot{\phi}^2$ y ρ_A es positiva, lo cual significa

$$\begin{aligned} V(\phi) &> 6M_p^2 \dot{\sigma}^2, \\ V(\phi) &> \dot{\phi}^2, \\ V(\phi) &> \rho_A. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

De acuerdo con las observaciones de la radiación cósmica de fondo y de la estructura a gran escala, se desea estudiar la evolución del grado de anisotropía en la expansión Σ/H en el régimen de rodadura lenta [9] y baja anisotropía en la expansión [34]. Teniendo en cuenta lo anterior, se establecen condiciones suficientes para inflación

$$\underline{\text{Baja anisotropía en la expansión}} \implies V(\phi) \gg 6M_p^2 \dot{\sigma}^2, \quad (3.2.13)$$

$$\underline{\text{Rodadura lenta}} \implies V(\phi) \gg \dot{\phi}^2 \quad \text{y} \quad |\ddot{\phi}| \ll 3H|\dot{\phi}|, |V'(\phi)|, \quad (3.2.14)$$

$$\underline{\text{Condición para que se dé inflación}} \implies V(\phi) > \rho_A. \quad (3.2.15)$$

A partir de la ecuación de Friedmann (Ec. 3.2.4), junto con la condición dada por la Ec. (3.2.13) y la parametrización de la métrica de Bianchi tipo I (Ec. 3.1.4), se obtiene que la condición de baja anisotropía en la expansión puede expresarse en forma más transparente como

$$\underline{\text{Baja anisotropía en la expansión}} \implies \dot{\alpha} \gg \dot{\sigma} \quad \text{y} \quad \alpha \gg \sigma. \quad (3.2.16)$$

Es decir, la razón de expansión isotropa global es mucho mayor que la razón de expansión anisótropa promedio.

Al tener en cuenta las condiciones de rodadura lenta del potencial $V(\phi)$ (Ec. 3.2.14), y la baja anisotropía en la expansión (Ec. 3.2.16), se modifican las ecuaciones de campo (3.2.4) y (3.2.6) en la forma

- Ecuación de Friedmann

$$\dot{\alpha}^2 \approx \frac{1}{3M_p^2} \left[V(\phi) + \frac{p_A^2}{2} f^{-2}(\phi) e^{-4\alpha - 4\sigma} \right]. \quad (3.2.17)$$

- Ecuación de evolución para el inflatón ϕ

$$3\dot{\alpha}\dot{\phi} \approx -V'(\phi) + p_A^2 f^{-3}(\phi) f'(\phi) e^{-4\alpha - 4\sigma}. \quad (3.2.18)$$

3.3. Escogencia de la función $f(\phi)$

En el análisis realizado anteriormente, la forma de la función $f(\phi)$ ha sido completamente arbitraria. Se desea darle una forma específica a ésta, con el fin de tener la expansión anisótropa prolongada deseada.

Específicamente, se obtendrá la forma de $f(\phi)$ en el caso límite en donde se desprecia completamente la contribución del campo vectorial en la dinámica del inflatón. La justificación de este procedimiento se debe a que la anisotropía deseada en la expansión es pequeña, según lo muestran las observaciones [34]. De este modo, se garantiza que las soluciones encontradas para el grado de anisotropía en la expansión estén de acuerdo con las cotas observacionales. Así, en este caso límite las Ecs. (3.2.17) y (3.2.18) resultantes son

$$\dot{\alpha}^2 \approx \frac{1}{3M_p^2}V(\phi), \quad 3\dot{\alpha}\dot{\phi} \approx -V'(\phi). \quad (3.3.1)$$

Éstas pueden acoplarse para obtener la forma diferencial

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\phi}} \approx -\frac{V(\phi)}{M_p^2 V'(\phi)}, \quad (3.3.2)$$

la cual puede ser fácilmente integrada como

$$\alpha \approx -\int \frac{V(\phi)}{M_p^2 V'(\phi)} d\phi, \quad (3.3.3)$$

en donde se absorbió una constante de integración en la definición de α .

Se debe encontrar la relación entre $f(\phi)$ y $V(\phi)$ a través de α (Ec. 3.3.3), con el fin de tener un estado de anisotropía prolongado en la expansión. Como se mencionó anteriormente, la cantidad $\Sigma = \dot{\sigma}$ corresponde a la razón de expansión anisótropa, y $H = \dot{\alpha}$ corresponde a la razón de expansión isótropa global; de este modo, se puede escribir la ecuación (3.2.7) de la forma

$$\dot{\Sigma} + 3H\Sigma = \frac{2}{3M_p^2}\rho_A. \quad (3.3.4)$$

Por lo tanto, si la anisotropía en la expansión converge a un valor determinado, se tiene que $\dot{\Sigma} \approx 0$, entonces la ecuación (3.3.4) queda expresada como

$$3H\Sigma \approx \frac{2}{3M_p^2}\rho_A. \quad (3.3.5)$$

A partir de este resultado, se puede encontrar el grado de anisotropía en la expansión

$$\frac{\Sigma}{H} \approx \frac{2\rho_A}{9M_p^2 H^2}. \quad (3.3.6)$$

Incluyendo las condiciones expuestas en (3.3.1), se cumple que

$$\frac{\Sigma}{H} \approx \frac{2\rho_A}{3V(\phi)}. \quad (3.3.7)$$

Con el fin de asegurar que la anisotropía en la expansión sea prolongada a la duración completa del período inflacionario, la cantidad Σ/H debe permanecer constante o crecer durante inflación. Tomando en cuenta que $\dot{\Sigma} \approx 0$, se buscará que la razón

$$\frac{\rho_A}{V(\phi)} = \frac{p_A^2 e^{-4\sigma}}{2V(\phi)} \left(\frac{e^{-2\alpha}}{f(\phi)} \right)^2, \quad (3.3.8)$$

sea prácticamente constante. La cantidad fuera del paréntesis del lado derecho en la Ec. (3.3.8), evoluciona muy lentamente en el régimen de rodadura lenta y baja anisotropía en la expansión, por ende se adopta la forma para la función

$$f(\phi) \propto e^{-2\alpha}, \quad (3.3.9)$$

debido a que la cantidad $e^{-2\alpha}$ evoluciona de manera apreciable durante inflación. Teniendo en cuenta la forma encontrada para α en la Ec. (3.3.3) se tiene que

$$f(\phi) \propto e^{\frac{2}{M_P^2} \int \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi}. \quad (3.3.10)$$

3.4. Efecto del campo vectorial durante inflación

En la sección anterior, se encontró la forma de la función $f(\phi)$, en el límite en donde la contribución del campo vectorial es nula. Ahora, se desea estudiar la evolución del grado de anisotropía en la expansión cuando el efecto del campo vectorial es apreciable en la dinámica del inflatón.

Como se mencionó anteriormente, el interés del presente trabajo se centrará en buscar soluciones para el grado de anisotropía en la expansión, que se encuentren en el régimen de rodadura lenta del potencial $V(\phi)$ y de baja anisotropía en la expansión $\dot{\alpha} \gg \dot{\sigma}$ y $\alpha \gg \sigma$. De acuerdo con esto, la forma deseada para la función de acople $f(\phi)$ no se debe alejar demasiado de la solución encontrada para el modelo inflacionario convencional del inflatón en el régimen de rodadura lenta (Ecs. 3.3.1 y 3.3.9) [53]. Por lo tanto, será de gran utilidad parametrizar la forma encontrada para $f(\phi)$ como

$$f(\phi) \propto e^{-2c\alpha}, \quad (3.4.1)$$

en donde c es una constante. Con el fin de tener una anisotropía en la expansión creciente durante el período inflacionario, se tiene que $c > 1$. De lo contrario, es decir si $c < 1$,

se tendría un rápido decrecimiento de la densidad de energía del campo vectorial (Ec. 3.2.8), lo cual no es lo deseado.

En adelante, se asumirá un potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (3.4.2)$$

en donde m representa la masa del inflatón ϕ . Con esta escogencia, la función $f(\phi)$ toma la forma específica

$$f(\phi) = e^{\frac{c}{2M_p^2}\phi^2}. \quad (3.4.3)$$

Con la definición explícita de la función de acople $f(\phi)$, la densidad de energía para el campo vectorial (Ec. 3.2.8) es

$$\rho_A = \frac{p_A^2}{2} e^{-\frac{c\phi^2}{M_p^2}} e^{-4\alpha-4\sigma}. \quad (3.4.4)$$

Teniendo en cuenta la condición de baja anisotropía en la expansión $\dot{\alpha} \gg \dot{\sigma}$ y $\alpha \gg \sigma$ se tiene

$$\rho_A \approx \frac{p_A^2}{2} e^{-\frac{c}{M_p^2}\phi^2-4\alpha}. \quad (3.4.5)$$

Dada la forma de $V(\phi)$ y $f(\phi)$, entonces la ecuación de campo del inflatón (Ec. 3.2.18) resultante es

$$3\dot{\alpha}\dot{\phi} \approx -m^2\phi + \frac{c p_A^2}{M_p^2} \phi e^{-\frac{c}{M_p^2}\phi^2-4\alpha}. \quad (3.4.6)$$

Si la contribución por parte del campo vectorial A_μ es comparable con la derivada con respecto a ϕ del potencial $V(\phi)$, entonces se encuentra que los términos de la derecha en la Ec. (3.4.6) son comparables, es decir

$$m^2 \sim \frac{c p_A^2}{M_p^2} e^{-\frac{c}{M_p^2}\phi^2-4\alpha}. \quad (3.4.7)$$

Con esto presente, se desea comparar la densidad de energía del campo vectorial ρ_A con el potencial del inflatón $V(\phi)$, con el fin de analizar si la contribución por parte del campo vectorial en la ecuación de Friedmann es importante. Se define la razón entre ρ_A y $V(\phi)$ como

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\rho_A}{V(\phi)} = \frac{\frac{p_A^2}{2} e^{-\frac{c}{M_p^2}\phi^2-4\alpha}}{\frac{1}{2}m^2\phi^2}. \quad (3.4.8)$$

Utilizando el resultado de la Ec. (3.4.7) se tiene

$$\mathcal{R} \sim \frac{M_p^2}{c\phi^2}. \quad (3.4.9)$$

De acuerdo con la definición de α en (3.3.3), junto con la forma del potencial $V(\phi)$, el número de e-folds es

$$N \sim \frac{\phi_i^2}{M_p^2}, \quad (3.4.10)$$

en donde ϕ_i representa el valor del campo del inflatón en el inicio de inflación. De acuerdo a las escalas observadas en la radiación cósmica de fondo $N \gtrsim \mathcal{O}(100)$ [9], por lo tanto si desde el inicio de inflación el campo vectorial tuviese una contribución apreciable a la dinámica del inflatón entonces

$$\mathcal{R}_i \lesssim 10^{-2}. \quad (3.4.11)$$

Por está razón, el efecto de la densidad de energía en la ecuación de Friedmann (3.2.17) es despreciable. En conclusión, aun cuando el efecto del campo vectorial sea apreciable para la dinámica del inflatón (Ec. 3.4.6), la densidad de energía del campo vectorial ρ_A es despreciable con respecto al potencial del inflatón $V(\phi)$. Es decir, las ecuaciones de interés para la dinámica inflacionaria son:

- Ecuación de Friedmann

$$\dot{\alpha}^2 \approx \frac{m^2 \phi^2}{6M_p^2}. \quad (3.4.12)$$

- Ecuación de evolución para el inflatón ϕ

$$3\dot{\alpha}\dot{\phi} \approx -m^2\phi + \frac{cp_A^2}{M_p^2} \phi e^{-\frac{c}{M_p^2}\phi^2-4\alpha}. \quad (3.4.13)$$

Estas dos ecuaciones pueden acoplarse para obtener

$$\phi \frac{d\phi}{d\alpha} = -2M_p^2 + \frac{2cp_A^2}{m^2} e^{-\frac{c}{M_p^2}\phi^2-4\alpha}, \quad (3.4.14)$$

la cual puede ser integrada como

$$e^{-\frac{c}{M_p^2}\phi^2-4\alpha} = \frac{m^2 M_p^2 (c-1)}{c^2 p_A^2} \left[1 + D e^{-4(c-1)\alpha} \right], \quad (3.4.15)$$

en donde D es una constante de integración. Debido a que se está considerando $c > 1$, la Ec. (3.4.15) rápidamente converge a

$$e^{-\frac{c}{M_p^2}\phi^2-4\alpha} \approx \frac{m^2 M_p^2 (c-1)}{c^2 p_A^2}. \quad (3.4.16)$$

Cabe destacar que a partir de este resultado y de la forma específica para la densidad de energía del campo vectorial (Ec. 3.4.5), se concluye que ρ_A es casi constante.

A su vez, reemplazando el resultado de la Ec. (3.4.16) en la ecuación para la dinámica del inflatón se tiene

$$3\dot{\alpha}\dot{\phi} \approx -\frac{m^2\phi}{c}. \quad (3.4.17)$$

3.5. Grado de anisotropía en la expansión

La ecuación de evolución para la cantidad de expansión anisótropa σ

$$\ddot{\sigma} + 3\dot{\alpha}\dot{\sigma} = \frac{p_A^2}{3M_p^2} e^{-\frac{c}{M_p^2}\phi^2 - 4\alpha}. \quad (3.5.1)$$

Para encontrar el grado de anisotropía en la expansión Σ/H , se considerará que $\ddot{\sigma} \ll \dot{\alpha}\dot{\sigma}$, es decir, la cantidad de expansión anisótropa en la expansión evoluciona lentamente durante el período inflacionario. De esta forma

$$3\dot{\alpha}\dot{\sigma} \approx \frac{p_A^2}{3M_p^2} e^{-\frac{c}{M_p^2}\phi^2 - 4\alpha}. \quad (3.5.2)$$

Nuevamente, utilizando las definiciones $\Sigma = \dot{\sigma}$ y $H = \dot{\alpha}$, se puede expresar el grado de anisotropía en la expansión como

$$\frac{\Sigma}{H} \approx \frac{p_A^2 e^{-\frac{c}{M_p^2}\phi^2 - 4\alpha}}{9M_p^2 \dot{\alpha}^2}. \quad (3.5.3)$$

Además, utilizando el resultado encontrado en la Ec. (3.4.16) se puede expresar el grado de anisotropía mediante

$$\frac{\Sigma}{H} \approx \frac{2M_p^2(c-1)}{3c^2\phi^2}. \quad (3.5.4)$$

Este resultado es muy importante ya que muestra que la anisotropía crece durante el período inflacionario, y además lo hace más abruptamente hacia el final de inflación, debido a que el valor para el campo del inflatón decrece a medida que el período inflacionario va transcurriendo (Fig. 3.1).

El grado de anisotropía en la expansión puede ser relacionado con el parámetro de rodadura lenta ε . Al acoplar las ecuaciones de campo (3.2.4) y (3.2.5) en el régimen de rodadura lenta y baja anisotropía en la expansión, se obtiene

$$\ddot{\alpha} \approx -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_p^2} - \frac{p_A^2}{3M_p^2} e^{-\frac{c}{M_p^2}\phi^2 - 4\alpha}. \quad (3.5.5)$$

Así, el parámetro de rodadura lenta ε viene dado por

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}^2} = \frac{2M_p^2}{c\phi^2}, \quad (3.5.6)$$

en donde se han utilizado los resultados obtenidos en las Ecs. (3.4.12), (3.4.16) y (3.4.17). De esta manera, dada la forma encontrada para el grado de anisotropía en la expansión

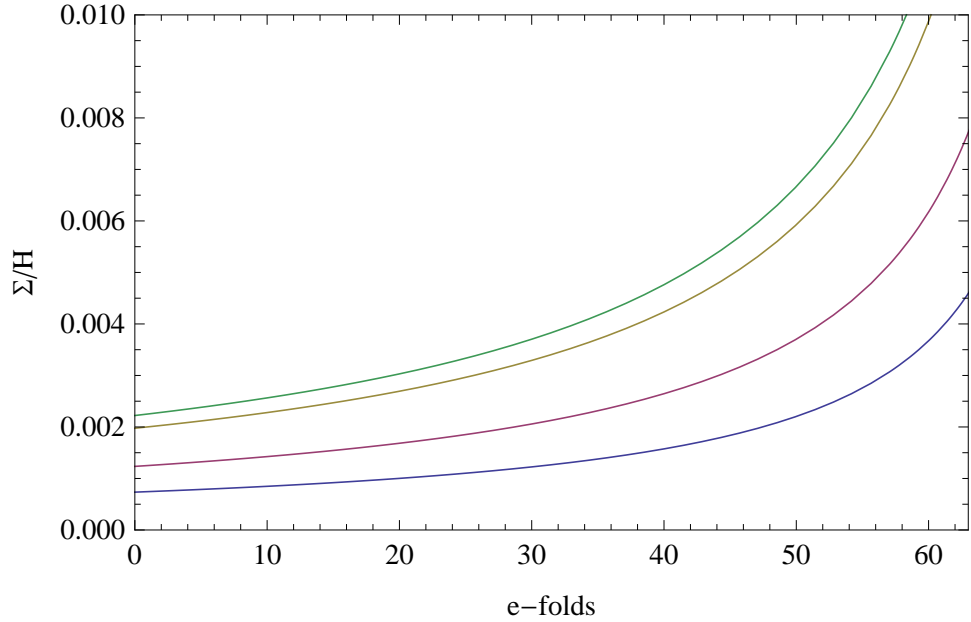


Figura 3.1: Evolución del grado de anisotropía en la expansión para diferentes valores del parámetro $c = 1, 1.1; 1.2; 1.5; 2$ (Orden ascendente).

(Ec. 3.5.5) y el resultado encontrado para el parámetro de rodadura ε (Ec. 3.5.6) se obtiene

$$\frac{\Sigma}{H} \approx \frac{c-1}{3c} \varepsilon. \quad (3.5.7)$$

Este resultado es muy importante ya que está de acuerdo con las cotas observacionales provenientes de la radiación cósmica de fondo ($\Sigma/H < 10^{-1}$) [34]. El grado de anisotropía en la expansión puede ser relacionado con la razón \mathcal{R} entre ρ_A y $V(\phi)$ (Ecs. 3.4.8 y 3.4.12) como

$$\frac{\Sigma}{H} \approx \frac{2}{3} \mathcal{R}. \quad (3.5.8)$$

El valor al final de inflación para el parámetro de rodadura lenta ε es del orden de 10^{-2} [9], de tal forma que el valor para el grado de anisotropía en la expansión (Ec. 3.5.7) al final de inflación es

$$\frac{\Sigma}{H} \sim 10^{-3}. \quad (3.5.9)$$

A partir de este resultado, se puede encontrar el valor de la razón \mathcal{R} al final de inflación

$$\mathcal{R}_f \sim 10^{-2}. \quad (3.5.10)$$

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en la Ec. (3.4.11), para el caso en el que el efecto del campo vectorial es apreciable durante inflación, se puede concluir que realmente al inicio del período inflacionario la contribución por parte del campo vectorial

a la dinámica inflacionaria era despreciable, es decir $\mathcal{R}_i \ll 10^{-2}$; de otra forma no habría concordancia con el resultado obtenido en la Ec. (3.5.9).

Conclusiones

Con el fin de explicar una posible dirección preferencial en el universo primordial, se analizó un modelo inflacionario [53], en donde están presentes el campo escalar del inflatón y un campo vectorial sin masa, acoplados mediante un término cinético no canónico, en un fondo homogéneo pero anisótropo descrito por una métrica de Bianchi tipo I. Mediante el principio de acción estacionaria con extremos fijos se encontraron las ecuaciones de campo, a través de las cuales se estudió la dinámica inflacionaria. Con las ecuaciones de campo establecidas, se identificaron las contribuciones por parte del campo vectorial A_μ y de la cantidad de expansión anisótropa σ , gracias a una comparación con las ecuaciones convencionales para inflación mediante campos escalares en el universo de FRW. De manera notable, se pudo identificar claramente la densidad de energía del campo vectorial (Ec. 3.2.8). A partir de la ecuación de aceleración para el universo (Ec. 3.2.9) se definieron las condiciones para que inflación ocurra (Ec. 3.2.11). De acuerdo con las observaciones [34], se plantearon las condiciones de rodadura lenta y baja anisotropía en la expansión (Ecs. 3.2.14 y 3.2.16), y conforme a éstas se realizaron todos los análisis posteriores.

Se determinó la forma de la función de acople $f(\phi)$, en el límite en donde el efecto del campo vectorial es completamente despreciable. A partir de este resultado, se parametrizó la función $f(\phi)$ para el caso en donde el efecto del campo vectorial no es despreciable. Posteriormente, se analizó la contribución por parte del campo vectorial a la ecuación de evolución del inflatón para un potencial de la forma $V(\phi) = m^2\phi^2/2$, encontrándose que aún cuando el efecto del término proveniente del campo vectorial sea comparable al de la derivada del potencial $V(\phi)$ en la dinámica del inflatón, el potencial del inflatón $V(\phi)$ domina sobre la densidad de energía del campo vectorial (Ec. 3.5.10).

Como resultado final, se encontró que el grado de anisotropía en la expansión está da-

do por

$$\frac{\Sigma}{H} \approx \frac{2M_p^2(c-1)}{3c^2\phi^2}, \quad (3.5.11)$$

de donde se deduce que el grado de anisotropía en la expansión crece durante el período inflacionario (Fig. 3.1), debido a que el campo del inflatón ϕ disminuye a medida que inflación va transcurriendo. Además, se encontró la relación entre el grado de anisotropía y el parámetro de rodadura lenta ε

$$\frac{\Sigma}{H} \approx \frac{c-1}{3c}\varepsilon, \quad (3.5.12)$$

lo cual está de acuerdo con las observaciones de la radiación cósmica de fondo [34], permitiendo demostrar que el monto de expansión anisótropa generado al final de inflación es coherente con la suposición de baja anisotropía en la expansión, pero que a su vez no es despreciable. Por lo tanto, se concluye que es posible dar una explicación de una posible dirección preferencial en nuestro Universo.

Bibliografía

- [1] Sloan Digital Sky Survey: <http://www.sdss.org/>.
- [2] NASA's Wilkinson Microwave Anisotropy Probe: <http://wmap.gsfc.nasa.gov/>.
- [3] ESA's PLANCK mission homepage: <http://planck.esa.int/>.
- [4] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
- [5] G. F. Smoot *et. al.*, *Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps*, Astrophys. J. **396**, L1 (1992).
- [6] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *A measurement of excess antenna temperature at 4080- Mc/s*, Astrophys. J. **142**, 419 (1965).
- [7] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, and D. T. Wilkinson, *Cosmic black-body radiation*, Astrophys. J. **142**, 414 (1965).
- [8] N. Jarosik *et. al.*, *Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: sky maps, systematic errors, and basic results*, [arXiv:1001.4744](https://arxiv.org/abs/1001.4744) [astro-ph.CO].
- [9] D. H. Lyth and A. R. Liddle, *The primordial density perturbation: cosmology, inflation and the origin of structure*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (2009).
- [10] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow, *The origin of chemical elements*, Phys. Rev. **73**, 803 (1948).
- [11] A. H. Guth, *The inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. **D23**, 347 (1981).

- [12] A. D. Linde, *A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*, Phys. Lett. **B108**, 389 (1982).
- [13] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).
- [14] E. Komatsu *et. al.*, *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation*, arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO].
- [15] D. Larson *et. al.*, *Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: power spectra and WMAP-derived parameters*, arXiv:1001.4635 [astro-ph.CO].
- [16] C. L. Bennett *et. al.*, *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: are there cosmic microwave background anomalies?*, arXiv:1001.4758 [astro-ph.CO].
- [17] Z. Hou, A. J. Banday, K. M. Gorski, N. E. Groeneboom, and H. K. Eriksen, *Frequentist comparison of CMB local extrema statistics in the five-year WMAP data with two anisotropic cosmological models*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **401**, 2379 (2010).
- [18] J. Hoftuft *et. al.*, *Increasing evidence for hemispherical power asymmetry in the five-year WMAP data*, Astrophys. J. **699**, 985 (2009).
- [19] F. K. Hansen, A. J. Banday, K. M. Gorski, H. K. Eriksen, and P. B. Lilje, *Power asymmetry in cosmic microwave background fluctuations from full sky to sub-degree scales: is the Universe isotropic?*, Astrophys. J. **704**, 1448 (2009).
- [20] H. K. Eriksen, A. J. Banday, K. M. Gorski, F. K. Hansen, and P. B. Lilje, *Hemispherical power asymmetry in the three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe sky maps*, Astrophys. J. **660**, L81 (2007).
- [21] H. K. Eriksen, F. K. Hansen, A. J. Banday, K. M. Gorski, and P. B. Lilje, *Asymmetries in the CMB anisotropy field*, Astrophys. J. **605**, 14 (2004).
- [22] F. K. Hansen, A. J. Banday, and K. M. Gorski, *Testing the cosmological principle of isotropy: local power spectrum estimates of the WMAP data*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **354**, 641 (2004).
- [23] F. K. Hansen, P. Cabella, D. Marinucci, and N. Vittorio, *Asymmetries in the local curvature of the WMAP data*, Astrophys. J. **607**, L67 (2004).

- [24] C. Dvorkin, H. V. Peiris, and W. Hu, *Testable polarization predictions for models of CMB isotropy anomalies*, Phys. Rev. **D77**, 063008 (2008).
- [25] K. Land and J. Magueijo, *The axis of evil*, Phys. Rev. Lett. **95**, 071301 (2005).
- [26] K. Land and J. Magueijo, *The axis of evil revisited*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **378**, 153 (2007).
- [27] T. R. Jaffe, A. J. Banday, H. K. Eriksen, K. M. Gorski, and F. K. Hansen, *Evidence of vorticity and shear at large angular scales in the WMAP data: A violation of cosmological isotropy?*, Astrophys. J. **629**, L1 (2005).
- [28] A. de Oliveira-Costa, M. Tegmark, M. Zaldarriaga, and A. Hamilton, *The significance of the largest scale CMB fluctuations in WMAP*, Phys. Rev. **D69**, 063516 (2004).
- [29] G. Efstathiou, *A maximum likelihood analysis of the low CMB multipoles from WMAP*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **348**, 885 (2004).
- [30] C. Copi, D. Huterer, D. Schwarz, and G. Starkman, *The uncorrelated Universe: statistical anisotropy and the vanishing angular correlation function in WMAP Years 1-3*, Phys. Rev. **D75**, 023507 (2007).
- [31] D. J. Schwarz, G. D. Starkman, D. Huterer, and C. J. Copi, *Is the low- l microwave background cosmic?*, Phys. Rev. Lett. **93**, 221301 (2004).
- [32] M. Tegmark, A. de Oliveira-Costa, and A. Hamilton, *A high resolution foreground cleaned CMB map from WMAP*, Phys. Rev. **D68**, 123523 (2003).
- [33] E. F. Bunn, P. Ferreira, and J. Silk, *How anisotropic is our Universe?*, Phys. Rev. Lett. **77**, 2883 (1996).
- [34] N. E. Groeneboom, L. Ackerman, I. K. Wehus, and H. K. Eriksen, *Bayesian analysis of an anisotropic universe model: systematics and polarization*, Astrophys. J. **722**, 452 (2010).
- [35] N. E. Groeneboom and H. K. Eriksen, *Bayesian analysis of sparse anisotropic universe models and application to the 5-year WMAP data*, Astrophys. J. **690**, 1807 (2009).
- [36] C. Armendariz-Picon and L. Pekowsky, *Bayesian limits on primordial isotropy breaking*, Phys. Rev. Lett. **102**, 031301 (2009).
- [37] D. Hanson and A. Lewis, *Estimators for CMB statistical anisotropy*, Phys. Rev. **D80**, 063004 (2009).

- [38] P. K. Samal, R. Saha, P. Jain, and J. P. Ralston, *Signals of statistical anisotropy in WMAP foreground- cleaned maps*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **396**, 511 (2009).
- [39] A. E. Gumrukcuoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso, *Inflationary perturbations in anisotropic backgrounds and their imprint on the CMB*, JCAP **0711**, 005 (2007).
- [40] T. S. Pereira, C. Pitrou, and J.-P. Uzan, *Theory of cosmological perturbations in an anisotropic universe*, JCAP **0709**, 006 (2007).
- [41] C. Pitrou, T. S. Pereira, and J.-P. Uzan, *Predictions from an anisotropic inflationary era*, JCAP **0804**, 004 (2008).
- [42] R. M. Wald, *Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant*, Phys. Rev. **D28**, R2118 (1983).
- [43] A. A. Starobinsky, *Isotropization of arbitrary cosmological expansion given an effective cosmological constant*, JETP Lett. **37**, 66 (1983).
- [44] S. Chakraborty and B. C. Paul, *Inflation in Bianchi models and the cosmic no-hair theorem*, Phys. Rev. **D64**, 127502 (2001).
- [45] L. H. Ford, *Inflation driven by a vector field*, Phys. Rev. **D40**, 967 (1989).
- [46] L. Ackerman, S. M. Carroll, and M. B. Wise, *Imprints of a primordial preferred direction on the microwave background*, Phys. Rev. **D75**, 083502 (2007).
- [47] A. Golovnev, V. Mukhanov, and V. Vanchurin, *Vector inflation*, JCAP **0806**, 009 (2008).
- [48] S. Kanno, M. Kimura, J. Soda, and S. Yokoyama, *Anisotropic inflation from vector impurity*, JCAP **0808**, 034 (2008).
- [49] B. Himmetoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso, *Instability of anisotropic cosmological solutions supported by vector fields*, Phys. Rev. Lett. **102**, 111301 (2009).
- [50] B. Himmetoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso, *Instability of the ACW model, and problems with massive vectors during inflation*, Phys. Rev. **D79**, 063517 (2009).
- [51] T. R. Dulaney, M. I. Gresham, and M. B. Wise, *Classical stability of a homogeneous, anisotropic inflating space-time*, Phys. Rev. **D77**, 083510 (2008).
- [52] B. Himmetoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso, *Ghost instabilities of cosmological models with vector fields nonminimally coupled to the curvature*, Phys. Rev. **D80**, 123530 (2009).

- [53] M.-a. Watanabe, S. Kanno, and J. Soda, *Inflationary universe with anisotropic hair*, Phys. Rev. Lett. **102**, 191302 (2009).
- [54] B. Himmetoglu, *Spectrum of perturbations in anisotropic inflationary universe with vector hair*, JCAP **1003**, 023 (2010).
- [55] K. K. S. Wu, O. Lahav, and M. J. Rees, *The large-scale smoothness of the Universe*, Nature **397**, 225 (1999).
- [56] J. Yadav, S. Bharadwaj, B. Pandey, and T. R. Seshadri, *Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey data release one*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **364**, 601 (2005).
- [57] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford, UK: Oxford University Press (2008).
- [58] V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (2005).
- [59] M. Hobson, G. Efstathiou, and A. Lasenby, *General Relativity: an introduction for physicists*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (2006).
- [60] A. Friedmann, *Über die krümmung des raumes*, Z. Phys. **10**, 377 (1922).
- [61] H. P. Robertson, *Kinematics and world structure I*, Astrophys. J. **82**, 248 (1935).
- [62] A. G. Walker, *On Milnes's theory of world structure*, Proc. London Math. Soc. **42**, 90 (1936).
- [63] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, New York, USA: John Wiley & Sons, Inc. (1972).
- [64] D. Baumann, *TASI Lectures on Inflation*, arXiv:0907.5424 [hep-th].
- [65] M.-a. Watanabe, S. Kanno, and J. Soda, *The nature of primordial fluctuations from anisotropic inflation*, Prog. Theor. Phys. **123**, 1041 (2010).
- [66] A. E. Gumrukcuoglu, B. Himmetoglu, and M. Peloso, *Scalar-scalar, scalar-tensor, and tensor-tensor correlators from anisotropic inflation*, Phys. Rev. **D81**, 063528 (2010).
- [67] C. B. Collins and S. W. Hawking, *Why is the Universe isotropic?*, Astrophys. J. **180**, 317 (1973).
- [68] J. D. Barrow, *The isotropy of the Universe*, Quart. J. Roy. Astron. Soc. **23**, 344 (1982).

- [69] A. B. Burd and J. D. Barrow, *Inflationary models with exponential potentials*, Nucl. Phys. **B308**, 929 (1988).
- [70] S. Byland and D. Scialom, *Evolution of the Bianchi I, the Bianchi III and the Kantowski-Sachs universe: isotropization and inflation*, Phys. Rev. **D57**, 6065 (1998).
- [71] J. M. Aguirregabiria, A. Chamorro, L. P. Chimento, and N. A. Zuccala, *Assisted inflation in Friedmann-Robertson-Walker and Bianchi spacetimes*, Phys. Rev. **D62**, 084029 (2000).
- [72] J. D. Barrow and S. Hervik, *Anisotropically inflating universes*, Phys. Rev. **D73**, 023007 (2006).
- [73] G. F. R. Ellis and H. van Elst, *Cosmological models*, Math. Phys. Sci. **541**, 1 (1999).
- [74] G. F. R. Ellis and M. A. H. MacCallum, *A class of homogeneous cosmological models*, Commun. Math. Phys. **12**, 108 (1969).
- [75] M. P. Ryan and L. C. Shepley, *Homogeneous relativistic cosmologies*, New Jersey, USA: Princeton University Press (1975).

Apéndices

A

Obtención de las ecuaciones de campo de Einstein en el universo de Friedmann-Robertson-Walker

Las ecuaciones de campo de Einstein pueden ser expresadas en la forma [63]

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}, \quad (\text{A.0.1})$$

en donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci definido como

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma}, \quad (\text{A.0.2})$$

y $S_{\mu\nu}$ está dado en términos del tensor de momentum-energía mediante

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\lambda}_{\lambda}. \quad (\text{A.0.3})$$

Las cantidades $\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}$ son llamadas conexiones afines y se definen como

$$\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left[\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda}} \right]. \quad (\text{A.0.4})$$

Teniendo en cuenta la forma de la métrica (Ec. 1.1.2) y el tensor de momentum-energía (1.1.8) en el universo de FRW las conexiones afines son

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{00}^i = \Gamma_{0i}^0 = 0, \\ \Gamma_{ij}^0 &= a\dot{a}\tilde{g}_{ij}, \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}, \\ \Gamma_{jl}^i &= \tilde{\Gamma}_{jl}^i. \end{aligned} \quad (\text{A.0.5})$$

Las cantidades \tilde{g}_{ij} y $\tilde{\Gamma}_{jl}^i$ representan la métrica y las conexiones afines puramente espaciales, definidas como

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + K \frac{x^i x^j}{1 - K\mathbf{x}^2}, \quad \tilde{\Gamma}_{jl}^i = K \tilde{g}_{jl} x^i. \quad (\text{A.0.6})$$

Teniendo ya definadas las conexiones afines diferentes de cero, se pueden calcular las componentes del tensor de Ricci

$$R_{0i} = R_{i0} = 0, \quad (\text{A.0.7})$$

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{i0}^0}{\partial t} + \Gamma_{0j}^i \Gamma_{0i}^j = 3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (\text{A.0.8})$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{\partial \Gamma_{ki}^k}{\partial x^j} - \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial t} \right] + \left[\Gamma_{ik}^0 \Gamma_{j0}^k + \Gamma_{i0}^k \Gamma_{jk}^0 + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k \right] - \left[\Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^l + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0l}^l \right] \\ &= - \left[2K + \dot{a}^2 + a\ddot{a} \right] \tilde{g}_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.0.9})$$

Por otra parte se necesitan calcular las componentes del tensor $S_{\mu\nu}$ definido mediante la Ec. (A.0.3). Para llevar a cabo esto se toma en cuenta la forma del tensor de momentum-energía (Ec. 1.1.8). Teniendo en cuenta lo anterior se obtiene

$$S_{i0} = 0, \quad (\text{A.0.10})$$

$$S_{00} = T_{00} + \frac{1}{2} \left(T^k_k + T^0_0 \right) = \rho + \frac{1}{2} (3p - \rho) = \frac{1}{2} (\rho + 3p), \quad (\text{A.0.11})$$

$$S_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ij} a^2 \left(T^k_k + T^0_0 \right) = a^2 p \tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2} a^2 \tilde{g}_{ij} (3p - \rho) = \frac{1}{2} (\rho - p) a^2 \tilde{g}_{ij}. \quad (\text{A.0.12})$$

Por lo tanto las ecuaciones de campo de Einstein para el universo de FRW son :

$$-\frac{2K}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho - p), \quad (\text{A.0.13})$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p). \quad (\text{A.0.14})$$

B

Teorema del no-cabello cósmico

El teorema del no-cabello cósmico hace referencia a la rápida isotropización de universos homogéneos pero anisótropos dominados por una constante cosmológica o un campo escalar en la fase de rodadura lenta en el marco de la gravedad de Einstein. Los principales modelos estudiados han sido los espacio-tiempos de Bianchi [42, 43, 44, 67, 68, 69, 70, 71, 72].

Este teorema es de vital importancia en inflación, porque hace predicciones sobre la evolución cosmológica de una fase inflacionaria que comienza en un universo anisótropo. El teorema establece que si se cumplen las condiciones dominante y fuerte para la energía, las cuales pueden ser enunciadas respectivamente como [42, 43, 44]:

$$T_d[t] = T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0, \quad (\text{B.0.1})$$

y

$$T_f[t] = \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) t^\mu t^\nu \geq 0, \quad (\text{B.0.2})$$

en donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de momentum-energía y t^μ es un vector unitario tipo tiempo, cualquier fase inflacionaria iniciando en un espacio-tiempo anisótropo descrito por una métrica de Bianchi, sin importar si es dominada por una constante cosmológica o un campo escalar, evolucionará exponencialmente hacia el espacio-tiempo de FRW, el cual es homogéneo e isótropo (Véase Sec. 1.1). De esta forma, la isotropía del universo es una predicción para períodos inflacionarios dominados por campos escalares en la fase de rodadura lenta [42, 43, 44].

C

Geometría del espacio-tiempo de Bianchi tipo I

Los espacio-tiempos de Bianchi tipo I son los modelos más simples de universos homogéneos pero anisótropos [73, 74, 75].

Los modelos de Bianchi tipo I permiten diferentes factores de expansión en tres direcciones ortogonales. En coordenadas cartesianas comóviles, la métrica adquiere la forma general

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \sum_{i=1}^3 X_i^2(t)(dx^i)^2, \quad (\text{C.0.1})$$

en donde los X_i representan los factores de escala para cada una de las tres direcciones ortogonales. Mediante esta métrica se puede recobrar la métrica de FRW, para el caso en que los tres factores de escala son iguales.

Se puede definir un factor de escala global (o promedio), definido por:

$$a(t) \equiv [X_1(t)X_2(t)X_3(t)]^{1/3}, \quad (\text{C.0.2})$$

el cual caracteriza la expansión global. Esto permite escribir la métrica (C.0.1) como

$$ds^2 = dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}(t)dx^i dx^j. \quad (\text{C.0.3})$$

La métrica espacial γ_{ij} es la métrica sobre lonjas de tiempo constante. Éstas pueden descomponerse como [75]:

$$\gamma_{ij}(t) = \exp[2\beta_i(t)]\delta_{ij}, \quad (\text{C.0.4})$$

en donde $\beta_i(t)$ no son las componentes de un vector, luego no están sujetos al convenio

de sumación de Einstein. Sin embargo, deben cumplir con la restricción

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i = 0. \quad (\text{C.0.5})$$

Como definiciones importantes que facilitarán la comprensión de las secciones siguientes, se tiene que el tensor de shear viene descrito por [40, 75]

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{ij}, \quad (\text{C.0.6})$$

y el escalar shear Σ como

$$\Sigma^2 \equiv \sigma_{ij} \sigma^{ij}. \quad (\text{C.0.7})$$

D

Obtención de las ecuaciones de campo para el modelo inflacionario vectorial

La acción descrita a través de la Ec. (3.1.1) puede ser escrita de forma conveniente como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{M_p^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} f^2(\phi) g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} F_{\alpha\rho} F_{\beta\sigma} \right]. \quad (\text{D.0.1})$$

A su vez, el lagrangiano de materia para los campos escalar y vectorial es

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} f^2(\phi) g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} F_{\alpha\rho} F_{\beta\sigma}. \quad (\text{D.0.2})$$

De acuerdo a la parametrización de la métrica de Bianchi tipo I, descrita mediante la Ec. (3.1.4), será útil expresar el elemento de línea en la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + c^2(t) dx^2 + b^2(t) [dy^2 + dz^2], \quad (\text{D.0.3})$$

en donde

$$c = e^{\alpha-2\sigma}, \quad b = e^{\alpha+\sigma}. \quad (\text{D.0.4})$$

Teniendo en cuenta lo anterior, las componentes covariantes y contravariantes de la métrica quedan definidas respectivamente como

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} g_{00} = -1, \\ g_{0i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \\ g_{11} = c^2 = e^{2\alpha-4\sigma}, \\ g_{22} = g_{33} = b^2 = e^{2\alpha+2\sigma}. \end{cases} \quad (\text{D.0.5})$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{cases} g^{00} = -1, \\ g^{0i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \\ g^{11} = \frac{1}{c^2} = e^{-2\alpha+4\sigma}, \\ g^{22} = g^{33} = \frac{1}{b^2} = e^{-2\alpha-2\sigma}. \end{cases} \quad (\text{D.0.6})$$

Por lo tanto, el determinante de la métrica es definido mediante la expresión

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = g_{00} \cdot g_{11} \cdot g_{22} \cdot g_{33} = -e^{6\alpha}. \quad (\text{D.0.7})$$

D.1. Ecuación de campo para A_μ

De acuerdo con el principio de acción estacionaria con extremos fijos, la ecuación de campo vectorial se determina a través de

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0. \quad (\text{D.1.1})$$

Dada la definición para el lagrangiano de materia (Ec. D.0.2) se tiene que

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial A_\nu} = 0. \quad (\text{D.1.2})$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4}\sqrt{-g}f^2(\phi)g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma} \left[(\delta_\alpha^\mu\delta_\rho^\nu - \delta_\rho^\mu\delta_\alpha^\nu)F_{\beta\sigma} + F_{\alpha\rho}(\delta_\beta^\mu\delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu\delta_\beta^\nu) \right] \\ &= -\frac{1}{4}\sqrt{-g}f^2(\phi) \left[g^{\mu\beta}g^{\nu\sigma}F_{\beta\sigma} - g^{\nu\beta}g^{\mu\sigma}F_{\beta\sigma} + g^{\alpha\mu}g^{\rho\nu}F_{\alpha\rho} - g^{\alpha\nu}g^{\rho\mu}F_{\alpha\rho} \right] \\ &= -\sqrt{-g}f^2(\phi)g^{\mu\beta}g^{\nu\sigma}F_{\beta\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{D.1.3})$$

Reemplazando D.1.2 y D.1.3 en D.1.1, se encuentra la ecuación de campo para A_μ

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}f^2(\phi)g^{\mu\beta}g^{\nu\sigma}F_{\beta\sigma}) = 0. \quad (\text{D.1.4})$$

Las cantidades $g^{\mu\beta}$, $f^2(\phi)$ y $F_{\beta\sigma}$ dependen únicamente del tiempo. Por lo tanto, se puede expresar la ecuación de campo vectorial como

$$\partial_0(\sqrt{-g}f^2(\phi)g^{00}g^{11}F_{01}) = 0.$$

Sustituyendo las componentes de la métrica y el tensor de esfuerzos se obtiene

$$\partial_0 \left[e^{3\alpha} f^2(\phi) (-1) e^{-2\alpha+4\sigma} (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) \right] = 0,$$

la cual puede ser expresada de forma conveniente mediante

$$\frac{d}{dt}(f^2(\phi)e^{\alpha+4\sigma}\dot{A}_1) = 0.$$

Al realizar la derivación con respecto al tiempo se tiene

$$\left[2\frac{f'(\phi)}{f(\phi)}\dot{\phi} + \dot{\alpha} + 4\dot{\sigma}\right]\dot{A}_1 + \frac{d\dot{A}_1}{dt} = 0. \quad (\text{D.1.5})$$

Esta ecuación diferencial puede ser fácilmente integrada como

$$\int \frac{d\dot{A}_1}{\dot{A}_1} = - \int \left(\dot{\alpha} + 4\dot{\sigma} + 2\frac{f'(\phi)}{f(\phi)}\dot{\phi}\right) dt,$$

obteniendo así que

$$\ln \dot{A}_1 = -\alpha - 4\sigma + \ln f^{-2}(\phi) + cte.$$

Por consiguiente, la solución de la ecuación de campo para A_μ es

$$F_{01} \equiv \dot{A}_1 = p_A f^{-2}(\phi) e^{-\alpha-4\sigma}, \quad (\text{D.1.6})$$

en donde p_A es la constante de integración.

D.2. Ecuación de campo para el inflatón ϕ

Aplicando el principio de acción estacionaria con extremos fijos, se puede encontrar la ecuación de campo para el inflatón ϕ

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0. \quad (\text{D.2.1})$$

A partir de la definición para el lagrangiano de materia (Ec. D.0.2), se pueden resolver cada uno de los términos en la Ec. (D.2.1), de esta forma

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial\phi} = -\sqrt{-g}V'(\phi) - \frac{1}{2}\sqrt{-g}f(\phi)f'(\phi)g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}F_{\alpha\rho}F_{\beta\sigma}. \quad (\text{D.2.2})$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial(\partial_\mu\phi)} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta_\alpha^\mu\partial_\beta\phi - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\delta_\beta^\mu \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\beta}\partial_\beta\phi - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\mu}\partial_\alpha\phi \\ &= -\sqrt{-g}g^{\mu\beta}\partial_\beta\phi. \end{aligned} \quad (\text{D.2.3})$$

Por lo tanto, al reemplazar los resultados obtenidos en las Ecs. (D.2.2 y D.2.3), la ecuación de campo para el inflatón queda determinada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\beta}\partial_\beta\phi) - V'(\phi) - \frac{1}{2}f(\phi)f'(\phi)g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}F_{\alpha\rho}F_{\beta\sigma} = 0. \quad (\text{D.2.4})$$

Teniendo en cuenta que las cantidades sólo dependen del tiempo, la Ec. (D.2.4) queda expresada como

$$\frac{1}{e^{3\alpha}}\partial_0(e^{3\alpha}g^{00}\partial_0\phi) - V'(\phi) - \frac{1}{2}f(\phi)f'(\phi)g^{00}g^{11}2F_{10}^2 = 0$$

Al reemplazar los valores de las componentes de la métrica (Ec. D.0.6) y la solución de la ecuación de campo para A_μ (Ec. D.1.6) se obtiene

$$-\frac{1}{e^{3\alpha}}(3\dot{\alpha}e^{3\alpha}\dot{\phi} + e^{3\alpha}\ddot{\phi}) - V'(\phi) - f(\phi)f'(\phi)(-1)e^{-2\alpha-4\sigma}p_A^2f^{-4}(\phi)e^{-2\alpha-8\sigma} = 0.$$

En consecuencia, la ecuación de campo para el inflatón ϕ es

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\alpha}\dot{\phi} + V'(\phi) = P_A^2f^{-3}(\phi)f'(\phi)e^{-4\alpha-4\sigma}. \quad (\text{D.2.5})$$

D.3. Obtención de las ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein pueden ser expresadas en la forma

$$R_{\mu\nu} = -8\pi GS_{\mu\nu}, \quad (\text{D.3.1})$$

en donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci (Ec. A.0.2) y $S_{\mu\nu}$ está dado en términos del tensor de momentum-energía (Ec. A.0.3).

D.3.1. Obtención del tensor $S_{\mu\nu}$

El tensor $S_{\mu\nu}$ está dado en términos del tensor de momentum-energía mediante

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda. \quad (\text{D.3.2})$$

Por esta razón, se deben calcular las componentes y la traza del tensor de momentum-energía. A través del principio de acción estacionaria con extremos fijos, el tensor de momentum-energía es definido como

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - 2\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (\text{D.3.3})$$

en donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2} \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{1}{4} f^2(\phi) \left[\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta g^{\rho\sigma} + g^{\alpha\beta} \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma \right] F_{\alpha\rho} F_{\beta\sigma} \\
&= -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{4} f^2(\phi) \left[g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} + g^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} f^2(\phi) g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma},
\end{aligned} \tag{D.3.4}$$

además

$$g^{\mu\nu} \mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) - \frac{1}{4} f^2(\phi) g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} F_{\alpha\rho} F_{\beta\sigma}. \tag{D.3.5}$$

En consecuencia, el tensor de momentum-energía es

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) - \frac{1}{4} f^2(\phi) g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} F_{\alpha\rho} F_{\beta\sigma} \\
&\quad + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + f^2(\phi) g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma}
\end{aligned} \tag{D.3.6}$$

Ahora, se requiere encontrar la traza del tensor de momentum-energía

$$\begin{aligned}
T^\lambda{}_\lambda &= g^{\kappa\lambda} T_{\kappa\lambda} \\
&= g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + f^2(\phi) g^{\kappa\lambda} g^{\rho\sigma} F_{\kappa\rho} F_{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} g_{\kappa\lambda} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \\
&\quad - g^{\kappa\lambda} g_{\kappa\lambda} V(\phi) - \frac{1}{4} f^2(\phi) g^{\kappa\lambda} g_{\kappa\lambda} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} F_{\alpha\rho} F_{\beta\sigma} \\
&= -g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi - 4V(\phi).
\end{aligned} \tag{D.3.7}$$

Entonces resulta que

$$S_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} V(\phi) + f^2(\phi) g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} - \frac{1}{4} f^2(\phi) g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} F_{\alpha\rho} F_{\beta\sigma}. \tag{D.3.8}$$

Las únicas componentes diferentes de cero en $S_{\mu\nu}$, corresponden a las componentes diagonales S_{00} , S_{11} , S_{22} y S_{33} , las cuales se calculan a continuación:

$$\begin{aligned}
S_{00} &= (\partial_0\phi)^2 + g_{00}V(\phi) + f^2(\phi)g^{\rho\sigma}F_{0\rho}F_{0\sigma} - \frac{1}{4}f^2(\phi)g_{00}g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}F_{\alpha\rho}F_{\beta\sigma} \\
&= \dot{\phi}^2 - V(\phi) + f^2(\phi)g^{11}F_{01}^2 + \frac{1}{4}f^2(\phi)2g^{00}g^{11}F_{01}^2 \\
&= \dot{\phi}^2 - V(\phi) + \frac{1}{2}f^2(\phi)g^{11}F_{01}^2 \\
&= \dot{\phi}^2 - V(\phi) + \frac{1}{2}f^2(\phi)e^{-2\alpha+4\sigma}p_A^2f^{-4}(\phi)e^{-2\alpha-8\sigma} \\
&= \dot{\phi}^2 - V(\phi) + \frac{1}{2}p_A^2f^{-2}(\phi)e^{-4\alpha-4\sigma}. \tag{D.3.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{11} &= g_{11}V(\phi) + f^2(\phi)g^{\rho\sigma}F_{1\rho}F_{1\sigma} - \frac{1}{4}f^2(\phi)g_{11}g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}F_{\alpha\rho}F_{\beta\sigma} \\
&= g_{11}V(\phi) + f^2(\phi)g^{00}F_{01}^2 - \frac{1}{4}f^2(\phi)g_{11}2g^{00}g^{11}F_{01}^2 \\
&= e^{-2\alpha+4\sigma}V(\phi) - \frac{1}{2}f^2(\phi)F_{01}^2 \\
&= e^{-2\alpha+4\sigma}V(\phi) - \frac{1}{2}p_A^2f^2(\phi)f^{-4}(\phi)e^{-2\alpha-8\sigma} \\
&= e^{-2\alpha+4\sigma}V(\phi) - \frac{1}{2}p_A^2f^{-2}(\phi)e^{-2\alpha-8\sigma}. \tag{D.3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{22} &= g_{22}V(\phi) - \frac{1}{4}f^2(\phi)g_{22}g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}F_{\alpha\rho}F_{\beta\sigma} \\
&= g_{22}V(\phi) - \frac{1}{4}f^2(\phi)g_{22}2g^{00}g^{11}F_{01}^2 \\
&= g_{22}V(\phi) + \frac{1}{2}f^2(\phi)g_{22}g^{11}F_{01}^2 \\
&= e^{2\alpha+2\sigma}V(\phi) + \frac{1}{2}f^2(\phi)e^{2\alpha+2\sigma}e^{-2\alpha+4\sigma}p_A^2f^{-4}(\phi)e^{-2\alpha-8\sigma} \\
&= e^{2\alpha+2\sigma}V(\phi) + \frac{1}{2}p_A^2f^{-2}(\phi)e^{-2\alpha-2\sigma}. \tag{D.3.11}
\end{aligned}$$

Existe una simetría en el plano $y - z$ debido a la escogencia de la métrica de Bianchi tipo I (Ec. 3.1.4), por lo tanto $S_{22} = S_{33}$.

D.3.2. Obtención del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$

El tensor de Ricci está definido como

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma}, \quad (\text{D.3.12})$$

en donde las cantidades $\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}$ son llamadas conexiones afines

$$\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left[\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda}} \right]. \quad (\text{D.3.13})$$

Teniendo en cuenta las componentes covariantes y contravariantes para la métrica $g_{\mu\nu}$ (Ecs. D.0.5 y D.0.6), se pueden calcular las conexiones afines

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{0\lambda} [g_{\lambda 0,0} + g_{\lambda 0,0} - g_{00,\lambda}] = 0. \quad (\text{D.3.14})$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{i\lambda} [g_{\lambda 0,0} + g_{\lambda 0,0} - g_{00,\lambda}] = 0. \quad (\text{D.3.15})$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2} g^{0\lambda} [g_{\lambda 0,i} + g_{\lambda i,0} - g_{0i,\lambda}] = 0. \quad (\text{D.3.16})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{0i}^j &= \frac{1}{2} g^{j\lambda} [g_{\lambda 0,i} + g_{\lambda i,0} - g_{0i,\lambda}] \\ &= \frac{1}{2} g^{jl} [g_{l 0,i} + g_{l i,0} - g_{0i,l}] \\ &= \frac{1}{2} g^{jl} g_{li,0}. \end{aligned} \quad (\text{D.3.17})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\lambda} [g_{\lambda i,j} + g_{\lambda j,i} - g_{ij,\lambda}] \\ &= \frac{1}{2} g^{00} [g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}] \\ &= -\frac{1}{2} (-g_{ij,0}). \end{aligned} \quad (\text{D.3.18})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{jl}^i &= \frac{1}{2} g^{i\lambda} [g_{\lambda j,l} + g_{\lambda l,j} - g_{jl,\lambda}] \\ &= \frac{1}{2} g^{im} [g_{mj,l} + g_{ml,j} - g_{jl,m}] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.3.19})$$

Así, las componentes diferentes de cero se reducen a:

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{c}}{c}, \quad \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{b}}{b}. \quad (\text{D.3.20})$$

$$\Gamma_{11}^0 = c\dot{c}, \quad \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = b\dot{b}. \quad (\text{D.3.21})$$

Ahora, habiendo calculado las conexiones afines, se pueden calcular las componentes del tensor de Ricci

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\partial \Gamma_{\lambda 0}^\lambda}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{00}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{0\sigma}^\lambda \Gamma_{0\lambda}^\sigma - \Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma \\
&= \frac{\partial \Gamma_{i0}^i}{\partial x^0} + \Gamma_{0\sigma}^0 \Gamma_{00}^\sigma + \Gamma_{0\sigma}^i \Gamma_{0i}^\sigma \\
&= \frac{\partial \Gamma_{i0}^i}{\partial x^0} + \Gamma_{0j}^i \Gamma_{0i}^j \\
&= \frac{d}{dt} (\Gamma_{10}^1 + \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{30}^3) + (\Gamma_{01}^1)^2 + (\Gamma_{02}^2)^2 + (\Gamma_{03}^3)^2 \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{c}}{c} + 2\frac{\dot{b}}{b} \right) + \left(\frac{\dot{c}}{c} \right)^2 + 2 \left(\frac{\dot{b}}{b} \right)^2 \\
&= \frac{\ddot{c}c - \dot{c}^2}{c^2} + 2\frac{\ddot{b}b - \dot{b}^2}{b^2} + \left(\frac{\dot{c}}{c} \right)^2 + 2 \left(\frac{\dot{b}}{b} \right)^2 \\
&= (\ddot{\alpha} - 2\ddot{\sigma}) + (\dot{\alpha} - 2\dot{\sigma})^2 - (\dot{\alpha} - 2\dot{\sigma})^2 + 2\{(\ddot{\alpha} + \ddot{\sigma}) + (\dot{\alpha} + \dot{\sigma})^2 - (\dot{\alpha} + \dot{\sigma})^2\} \\
&\quad + (\dot{\alpha} - 2\dot{\sigma})^2 + 2(\dot{\alpha} + \dot{\sigma})^2 \\
&= 3\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2 + 6\dot{\sigma}^2. \quad (\text{D.3.22})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{0i} &= \frac{\partial \Gamma_{\lambda 0}^\lambda}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{0i}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{0\sigma}^\lambda \Gamma_{i\lambda}^\sigma - \Gamma_{0i}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma \\
&= \Gamma_{0\sigma}^0 \Gamma_{i0}^\sigma + \Gamma_{0\sigma}^j \Gamma_{ij}^\sigma - \Gamma_{0i}^0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma - \Gamma_{0i}^j \Gamma_{j\sigma}^\sigma \\
&= \Gamma_{00}^j \Gamma_{ij}^\sigma + \Gamma_{0m}^j \Gamma_{ij}^m - \Gamma_{0i}^j \Gamma_{j0}^\sigma - \Gamma_{0i}^j \Gamma_{jm}^m \\
&= 0. \quad (\text{D.3.23})
\end{aligned}$$

$$(\text{D.3.24})$$

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \frac{\partial \Gamma_{\lambda i}^{\lambda}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{i\sigma}^{\lambda} \Gamma_{j\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{ij}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} \\
&= \cancel{\Gamma_{i0}^0 \Gamma_{j0}^0} + \Gamma_{im}^0 \Gamma_{j0}^m + \Gamma_{i0}^l \Gamma_{jl}^0 - \cancel{\Gamma_{im}^l \Gamma_{jl}^m} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial x^0} \\
&\quad - \cancel{\Gamma_{ij}^0 \Gamma_{00}^0} - \Gamma_{i0}^0 \Gamma_{0m}^m - \cancel{\Gamma_{ij}^0 \Gamma_{l0}^0} - \cancel{\Gamma_{ij}^l \Gamma_{lm}^m} \\
&= \Gamma_{im}^0 \Gamma_{j0}^m + \Gamma_{i0}^l \Gamma_{jl}^0 - \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0m}^m - \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial x^0}.
\end{aligned} \tag{D.3.25}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \Gamma_{1m}^0 \Gamma_{10}^m + \Gamma_{10}^l \Gamma_{1l}^0 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{0m}^m - \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial x^0} \\
&= \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{11}^0 (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) - \frac{\partial \Gamma_{11}^0}{\partial x^0} \\
&= 2\dot{c}^2 - a\dot{c} \left(\frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - (c^2 + c\ddot{c}) \\
&= 2\dot{c}^2 - \dot{c}^2 - \frac{2c\dot{c}\dot{b}}{b} - (c^2 + c\ddot{c}) \\
&= -\frac{2c\dot{c}\dot{b}}{b} - c\ddot{c} \\
&= [-\ddot{\alpha} + 2\ddot{\alpha} - 3\dot{\alpha}^2 + 6\dot{\alpha}\dot{\sigma}]e^{2\alpha-4\sigma}.
\end{aligned} \tag{D.3.26}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \Gamma_{22}^0 \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{22}^0 (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) - \frac{\partial \Gamma_{22}^0}{\partial x^0} \\
&= 2\dot{b}^2 - b\dot{b} \left(\frac{\dot{c}}{c} + 2\frac{\dot{b}}{b} \right) - (b^2 + b\ddot{b}) \\
&= 2\dot{b}^2 - \frac{b\dot{b}\dot{c}}{c} - 2\dot{b}^2 - \dot{b}^2 - b\ddot{b} \\
&= -\frac{b\dot{b}\dot{c}}{c} - \dot{b}^2 - b\ddot{b} \\
&= e^{2\alpha+2\sigma} [\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\sigma} + 2\dot{\sigma}^2 - 2\dot{\alpha}^2 - 4\dot{\alpha}\dot{\sigma} - 2\dot{\alpha}^2 - \ddot{\alpha} - \ddot{\sigma}] \\
&= e^{2\alpha+2\sigma} [-\ddot{\alpha} - \ddot{\sigma} - 3\dot{\alpha}^2 - 3\dot{\alpha}\dot{\sigma}].
\end{aligned} \tag{D.3.27}$$

Debido a la simetría presente en la métrica $R_{22} = R_{33}$; además las componentes no diagonales del tensor R_{ij} son iguales a cero.

D.3.3. Ecuaciones de campo gravitacional de Einstein

Con las componentes ya definidas para el tensor $S_{\mu\nu}$ y el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, las ecuaciones de campo de Einstein resultantes son

$$\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 + 2\dot{\sigma}^2 = -\frac{1}{3M_p^2} \left[\dot{\phi}^2 - V(\phi) + \frac{1}{2} \frac{p_A^2}{f^2(\phi)} e^{-4\alpha-4\sigma} \right], \quad (\text{D.3.28})$$

$$-\ddot{\alpha} + 2\ddot{\sigma} - 3\dot{\alpha}^2 + 6\dot{\alpha}\dot{\sigma} = -\frac{1}{M_p^2} \left[V(\phi) - \frac{1}{2} \frac{p_A^2}{f^2(\phi)} e^{-4\alpha-4\sigma} \right], \quad (\text{D.3.29})$$

$$-\ddot{\alpha} - \ddot{\sigma} - 3\dot{\alpha}^2 - 3\dot{\alpha}\dot{\sigma} = -\frac{1}{M_p^2} \left[V(\phi) + \frac{1}{2} \frac{p_A^2}{f^2(\phi)} e^{-4\alpha-4\sigma} \right]. \quad (\text{D.3.30})$$

Mediante combinaciones entre estas ecuaciones, se pueden encontrar las ecuaciones expuestas en el modelo inflacionario (Ecs. 3.2.4, 3.2.5 y 3.2.7).