Algunos aspectos teóricos del espacio $C[0,1]$

Autor:
Nykoll Vanessa García González

Director:
Ph.D. Michael Alexánder Rincón Villamizar

Trabajo de grado para optar por el título de
Matemático

Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Octubre de 2025

Tabla de Contenido

Resumen

Título: Algunos aspectos teóricos del espacio C[0,1].
Autor: Nykoll Vanessa García González.
Director: Michael Alexánder Rincón Villamizar.

El presente trabajo aborda de manera detallada diversos aspectos teóricos del espacio $C[0,1]$, entendido como el conjunto de funciones continuas definidas sobre el intervalo cerrado $[0,1]$ y con valores en los números reales. En primer lugar, se presentan las propiedades fundamentales que caracterizan a este espacio cuando se dota de la norma del supremo, destacando su estructura como espacio normado y su completitud, la cual le confiere un papel central dentro del análisis funcional. Posteriormente, se examina la topología inducida por dicha norma, haciendo énfasis en cómo esta determina la forma en que se comportan las sucesiones y las funciones dentro del espacio.

Además, se desarrolla un estudio de la convergencia uniforme, resaltando su relevancia tanto en la comprensión de la estructura topológica de $C[0,1]$ como en la formulación de resultados clásicos del análisis. Se discuten ejemplos y situaciones donde este tipo de convergencia resulta indispensable para garantizar la continuidad de ciertos operadores o la estabilidad de propiedades funcionales.

Finalmente, se expone el enunciado del teorema de representación de Riesz para espacios de funciones continuas, presentando su interpretación, sus implicaciones teóricas y algunos elementos de su aplicación. Se enfatiza la importancia de este teorema en la caracterización de los funcionales lineales continuos definidos sobre $C[0,1]$ y en la conexión profunda que establece entre dichos funcionales y las medidas regulares de Borel. En conjunto, estos elementos permiten mostrar la riqueza estructural del espacio $C[0,1]$ y su relevancia dentro del marco del análisis funcional moderno.

Palabras clave: Espacio funciones continuas; norma del supremo; convergencia uniforme; topología; espacio normado; teorema de representación de Riesz; análisis funcional.

Abstract

Title: Some Theoretical Aspects of the Space C[0,1].
Author: Nykoll Vanessa García González.
Advisor: Michael Alexánder Rincón Villamizar.

This work provides a detailed examination of several theoretical aspects of the space $C[0,1]$, understood as the set of continuous real-valued functions defined on the closed interval $[0,1]$. First, it presents the fundamental properties that characterize this space when endowed with the supremum norm, highlighting its structure as a normed and complete space and underscoring the central role it plays within functional analysis. Subsequently, it explores the topology induced by this norm, emphasizing how it governs the behavior of sequences and functions within the space.

The study also includes an analysis of uniform convergence, emphasizing its importance for understanding the topological structure of $C[0,1]$ and its connection with classical results in analysis. Examples and situations are discussed in which this type of convergence becomes essential for ensuring the continuity of certain operators or the preservation of functional properties. Finally, the work presents the statement of the Riesz representation theorem for spaces of continuous functions, discussing its interpretation, theoretical implications, and elements of its application. Special attention is given to the significance of this theorem in the characterization of continuous linear functionals defined on $C[0,1]$, as well as to the deep connection it establishes between such functionals and regular Borel measures. Altogether, these components highlight the structural richness of the space $C[0,1]$ and its relevance within the broader framework of modern functional analysis.

Keywords: Space of continuous functions; supremum norm; uniform convergence; topology; normed space; Riesz representation theorem; functional analysis.

Introducción

La teoría de espacios de Banach es la rama del Análisis Funcional que estudia las propiedades analíticas y topológicas de los espacios de Banach. Un espacio clásico estudiado en esta teoría es el espacio de funciones continuas sobre un intervalo compacto $[0,1]$, esto es,

$$C[0,1] = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} :\ f \text{ es continua } [0,1]\}.$$

Dada $f \in C[0,1]$, la norma de f es por definición $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Es conocido que $(C[0,1], \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. El objetivo general de este trabajo es estudiar algunas propiedades analíticas y topológicas del espacio $C[0,1]$. Específicamente, queremos:

1. Describir el espacio dual topológico de $C[0,1]$;

2. Dar una condición para que un subespacio cerrado de $C[0,1]$ contenga solo funciones continuamente derivables;

3. Dar una condición para que dado un subespacio cerrado S de $C[0,1]$, el operador identidad $T\colon f \in S \mapsto f \in (C[0,1], \|\cdot\|_2)$ sea continuo, es decir, existe $c > 0$ tal que $\|f\| \leq c\|f\|_2$ para cada $f \in S$, donde $\|f\|_2 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2\, dx$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se dan las definiciones básicas y los resultados que se usarán en el desarrollo del trabajo.

1. Espacios de Banach

Definición 1.1. Un espacio normado es un par $(X, \|\cdot\|)$, donde X es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $\|\cdot\| \colon X \to [0, \infty)$ es una **norma**, es decir, una función que satisface las siguientes propiedades para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. **No negatividad**: $\|x\| \geq 0$, y $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
2. **Homogeneidad**: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
3. **Desigualdad triangular**: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición 1.2. Una sucesion $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es de **Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq N$ se cumple:

$$\|x_m - x_n\|_X < \varepsilon.$$

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es de **Banach** si toda sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X.

Definición 1.3. Un operador lineal $T \colon X \to Y$ entre espacios normados se dice **acotado** si existe $C \geq 0$ tal que:

$$\|Tf\|_Y \leq C\|f\|_X \quad \text{para todo } f \in X.$$

La **norma de** T se define como:

$$\|T\| = \sup\{\|Tf\|_Y : \|f\|_X \leq 1\}.$$

Definición 1.4. Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$. El espacio **dual topológico** X^* de X es el espacio de todas las funciones lineales y continuas de X en $\mathbb{R}$, es decir,

$$X^* := \{F \colon X \to \mathbb{R} \mid F \text{ es lineal y continuo}\}.$$

La norma de este espacio es la dada como en la Definición 1.3, esto es,

$$\|F\|_* := \sup\{|F(x)| : \|x\| \leq 1\}.$$

Proposición 1.5. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado entonces* $(X^*, \|\cdot\|_*)$ *es un espacio de Banach*

Demostración. Veamos que dada una sucesión de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X^*, existe $f \in X^*$ tal que $f_n \to f$ en X^*. Para cada $x \in X$, consideremos la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Mostremos que esta sucesión es de Cauchy en $\mathbb{R}$. En efecto, para $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \leq \|f_n - f_m\|_* \cdot \|x\|.$$

Como (f_n) es de Cauchy en X^*, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$ se cumple que $\|f_n - f_m\|_* < \varepsilon$. Por lo tanto, $(f_n(x))$ es Cauchy en $\mathbb{R}$, y como $\mathbb{R}$ es completo, existe

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Esto define una función $f : X \to \mathbb{R}$. Veamos ahora que $f \in X^*$, es decir, que f es lineal y acotado.

- **Linealidad:** Sean $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$f(x + \alpha y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x + \alpha y) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) + \alpha f_n(y)) = f(x) + \alpha f(y).$$

- **Continuidad:** Como (f_n) es de Cauchy, existe $M > 0$ tal que $\|f_n\|_* \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para todo $x \in X$,

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_* \cdot \|x\| \leq M\|x\|.$$

  Por tanto, f es acotado, es decir, f pertenece a X^*.

Finalmente, mostraremos que $f_n \to f$ en X^*. Sea $\varepsilon > 0$. Como (f_n) es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$, se cumple:

$$\|f_n - f_m\|_* < \varepsilon.$$

Entonces, para $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_* \cdot \|x\| \leq \varepsilon.$$

Si $n \geq N$ es fijo, tomando el límite cuando $m \to \infty$, se obtiene:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } x \in X \text{ con } \|x\| \leq 1,$$

lo cual implica que

$$\|f_n - f\|_* = \sup_{\|x\|\leq 1} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Por tanto, $f_n \to f$ en X^*, lo que prueba que X^* es completo. □

Definición 1.6. Dos espacios de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ se dicen **isométricamente isomorfos** si existe un operador lineal biyectivo $T\colon X \to Y$ que preserva normas, es decir,

$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X, \quad \text{para todo } x \in X.$$

En este caso, T se llama una **isometría lineal,** si X y Y son isométricamente isomorfos se escribe $X \cong Y$.

Definición 1.7. Sean X y Y espacios normados, y $T\colon X \to Y$ un operador lineal. Decimos que la *gráfica de* T es cerrada si el conjunto:

$$\Gamma(T) = \big\{(x, T(x)) \in X \times Y \mid x \in X\big\}$$

es cerrado en el espacio $X \times Y$, dotado de la siguiente norma:

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

A continuación enunciaremos el teorema de la gráfica cerrada. Una demostración se encuentra en Fabian et al (2011, p. 67).

Teorema 1.8. *Sean X y Y espacios de Banach y sea T un operador de X y Y. Entonces T es un operador acotado si, y solo si, su grafica $\Gamma(T)$ es cerrada en $X \times Y$.*

El próximo resultado es la versión analítica del **Teorema de Hahn-Banach** . Una prueba de esto se puede encontrar en Fabian et al (2011, p.55).

Teorema 1.9. *Sean X un espacio normado, $Y \subseteq X$ un subespacio, y $f\colon Y \to \mathbb{R}$ un operador lineal y continuo. Entonces, existe un operador lineal y continuo $\widetilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ que satisface:*

1. $\widetilde{f}(y) = f(y)$ *para todo* $y \in Y$.
2. $\|\widetilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$,

donde $\|\cdot\|_{X^*}$ y $\|\cdot\|_{Y^*}$ denotan las normas en los espacios duales de X y Y, respectivamente.

2. El espacio $C[a, b]$

El conjunto $C[a, b]$ consiste en todas las funciones continuas definidas en el intervalo $[a, b]$ y con valores en $\mathbb{R}$. Se sabe que este conjunto es un espacio vectorial bajo las operaciones de:

- **Suma puntual**: Si $f, g \in C[a, b]$, entonces $f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$ se define como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in [a, b]$;
- **Multiplicación por escalar**: Si $f \in C[a, b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se define por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

No es difícil ver que la aplicación $\|\cdot\|_\infty : C[a.b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad f \in C[a, b],$$

es una norma. En efecto:

- Si $\|f\|_\infty = 0$, se tiene que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Entonces $f \equiv \mathbf{0}$.
- Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C[a, b]$, entonces $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = |\lambda|\|f\|_\infty$.
- Si $f, g \in C[a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} |f(x) + g(x)| \\ &\le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

El espacio $C[0,1]$ es el caso particular de $C[a,b]$ con $[a,b]=[0,1]$.

La convergencia en la norma $\|\cdot\|_\infty$ es la clásica convergencia uniforme. Para precisarla, la introducimos a continuación.

Definición 1.10. Sean $(f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones y $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. Decimos que (f_n) **converge uniformemente** a f en $[a,b]$ si:

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|=0.$$

Equivalentemente, si para todo $\varepsilon>0$, existe $N:=N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq N$ y para todo $x\in[a,b]$ tenemos que $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Lema 1.11. *Sean (f_n) una sucesión en $C[a,b]$ y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Supongamos que $f_n\to f$ uniformemente en $[a,b]$. Entonces $f\in C[a,b]$.*

Demostración. Sea $x\in[a,b]$ fijo. Sea $\varepsilon>0$. Como $f_n\to f$ uniformemente en $[a,b]$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq N$ y para todo $t\in[a,b]$,

$$|f(t)-f_n(t)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Fijemos $n\geq N$. Como f_n es continua en x, existe $\delta>0$ tal que si $t\in(x-\delta,x+\delta)\cap[a,b]$, entonces

$$|f_n(t)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Luego, para todo $t\in(x-\delta,x+\delta)\cap[a,b]$, se tiene que:

$$\begin{aligned}|f(t)-f(x)|&\leq|f(t)-f_n(t)|+|f_n(t)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Por tanto, f es continua en x. Como $x\in[a,b]$ era arbitrario, se concluye que f es continua en todo $[a,b]$. $\square$

Proposición 1.12. *$(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea (f_n) de Cauchy en $C[a,b]$. Entonces, para todo $\varepsilon>0$ existe un natural n_0 tal que para todo $n,m\geq n_0$ naturales se verifica $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$, y como consecuencia para todo $x\in[a,b]$:

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leq\|f_n-f_m\|<\varepsilon.$$

Luego, para todo $x\in[a,b]$, $(f_n(x))$ es de Cauchy y por tanto convergente pues $\mathbb{R}$ es completo. Defina $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ por

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x).$$

Veamos que $f_n\to f$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$. En efecto, para todo $\varepsilon>0$ existe un número natural N tal que $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon/2$ para todo $x\in[a,b]$. Sea $m\in\mathbb{N}$ tal que $m\geq N$ y $|f_m(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Entonces:

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&=|f_n(x)-f_m(x)+f_m(x)-f(x)|\\&\leq|f_n(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-f(x)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\qquad\text{para todo } n\geq N.\end{aligned}$$

Como $x \in [a,b]$ fue arbitrario, concluimos que $f_n \to f$ uniformemente. Por el Lema 1.11, f es continua, es decir, que pertenece a $C[a,b]$. Se sigue que $C[a,b]$ es completo y por tanto de Banach. $\square$

Proposición 1.13. *$C[a,b]$ y $C[0,1]$ son isométricamente isomorfos, es decir, existe un operador lineal biyectivo*

$$T : C[a,b] \to C[0,1]$$

tal que $\|Tf\|_\infty = \|f\|_\infty$ para todo $f \in C[a,b]$.

Demostración. Definimos el operador $T : C[a,b] \to C[0,1]$ mediante el cambio de variable:

$$(Tf)(t) := f(a + (b-a)t), \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

Veamos que T es lineal y biyectivo.

Linealidad: Sean $f, g \in C[a,b]$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se tiene

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \mu g)(t) &= (\lambda f + \mu g)(a + (b-a)t) \\ &= \lambda f(a + (b-a)t) + \mu g(a + (b-a)t) \\ &= \lambda Tf(t) + \mu Tg(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$.

Inyectiva: Supongamos que $Tf = Tg$. Entonces

$$f(a + (b-a)t) = g(a + (b-a)t) \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

En consecuencia, como todo $x \in [a,b]$ se puede expresar en la forma $a + (b-a)t$ para algún $t \in [0,1]$, se sigue que $f = g$.

Sobreyectiva: Dada $h \in C[0,1]$, definamos $f \in C[a,b]$ como:

$$f(x) := h\left(\frac{x-a}{b-a}\right), \quad x \in [a,b].$$

Note que $\frac{x-a}{b-a} \in [0,1]$ para todo $x \in [a,b]$. Por lo tanto, f está bien definida. Es claro que f es continua y $T(f)(t) = f(a + (b-a)t) = h(t)$. De ahí se sigue que $T(f) = h$. Así, T es sobreyectiva.

Isometría: Para todo $f \in C[a,b]$ se cumple:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_\infty &= \sup_{t \in [0,1]} |f(a + (b-a)t)| \\ &= \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \\ &= \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es un isomorfismo lineal isométrico entre $C[a,b]$ y $C[0,1]$. $\square$

El teorema anterior justifica el porqué abordaremos únicamente el espacio $C[0,1]$ en todo el trabajo.

El próximo teorema nos dice que $C[0,1]$ es isométricamente universal para la clase de todos los espacios de Banach separables, en el sentido de que cualquier espacio de Banach separable puede identificarse con un subespacio cerrado de $C[0,1]$ preservando su estructura normada. En cierto sentido esto justifica por qué estudiar el espacio $C[0,1]$.

Teorema 1.14. *Todo espacio de Banach separable es linealmente isométrico a un subespacio de* $C[0,1]$.

Una prueba de esto puede encontrarse en Fabian et al (2011, p.240).

Para finalizar esta sección, recordemos que el espacio $B[a,b]$ consiste en todas las funciones acotadas definidas en el intervalo cerrado $[a,b]$:

$$B[a,b] := \left\{ f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty \right\},$$

La norma de $B[a,b]$ es la norma del supremo. Este espacio es un espacio de Banach. La demostración de esto es similiar a la de la Proposición 1.12.

3. El espacio BV[a,b]

Definición 1.15. Una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es de **variación acotada** en $[a,b]$ si existe una constante $M > 0$ tal que para toda partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, se cumple:

$$V(f,P) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M.$$

La **variación total** de f en $[a,b]$ se define como:

$$V_f[a,b] := \sup \{V(f,P) \mid P \text{ es partición de } [a,b]\}.$$

El conjunto de funciones de variación acotada en $[a,b]$ se denota por $BV[a,b]$.

Definición 1.16. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, para $x \in [a,b]$, la **variación acumulada** de f desde a hasta x es:

$$V_f[a,x] := \sup \{V(f,P) : \text{P es partición de } [a,x]\}$$

donde $P = \{t_0, \ldots, t_m\}$ es una partición de $[a,x]$.

Observación 1.17. Sea $f \in BV[a,b]$. Entonces:

1. La función $x \mapsto V_f[a,x]$ es creciente en $[a,b]$ ya que si $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, toda partición de $[a,x_1]$ puede extenderse a una de $[a,x_2]$. Luego, $V_f[a,x_1] \leq V_f[a,x_2]$. Además $V_f[a,a] = 0$.

2. Para $a \leq y \leq x \leq b$, $V_f[a,x] = V_f[a,y] + V_f[y,x]$. En efecto, dada una partición P de $[a,x]$, al refinarla con el punto y, la suma de variaciones se descompone en sumas sobre $[a,y]$ y $[y,x]$. Tomando supremos se obtiene la igualdad

3. Para $a \leq y \leq x \leq b$, se tiene que $|f(x) - f(y)| \leq V_f[y, x]$.

Observación 1.18. Veamos que si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es tal que $V_f[a,b] = 0$, entonces f es constante.

En efecto, supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es tal que $V_f[a,b] = 0$, esto significa que

$$V_f[a,b] = \sup\{V(f,P) \mid P \text{ es partición de } [a,b]\} = 0.$$

Así, $V(f,P) = 0$ para toda partición P de $[a,b]$. Si $x \in (a,b)$, tome la partición $P = \{a, x, b\}$. Entonces

$$|f(a) - f(x)| + |f(x) - f(b)| = 0.$$

Por lo tanto, $f(a) - f(x) = 0$ y $f(x) - f(b) = 0$, es decir, $f(x) = f(a) = f(b)$. Esto prueba que f es constante en $[a,b]$.

Proposición 1.19. $BV[a,b]$ *junto con la suma y la multiplicación por escalar usual de funciones es un espacio vectorial.*

Demostración. Debemos verificar dos propiedades fundamentales:

1. **Cerradura bajo la suma**: Sean $f, g \in BV[a,b]$ dadas. Queremos ver que $f + g \in BV[a,b]$. Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$. Nótese que

$$V(f+g,P) \leq V(f,P) + V(g,P). \tag{1.1}$$

   Como $\{V(f,P) : P \text{ es una partición de } [a,b]\}$ y $\{V(g,P) : P \text{ es una partición de } [a,b]\}$ son acotados, entonces el conjunto $\{V(f+g,P) : P \text{ es una partición de } [a,b]\}$ también es acotado. Por lo tanto, $f + g \in BV[a,b]$.

2. **Cerradura bajo multiplicación escalar**: Sean $f \in BV[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$. Veamos que $c \cdot f$ es de variación acotada. Esto se sigue de la igualdad

$$V(cf,P) = |c| \cdot V(f,P), \tag{1.2}$$

   válida para cualquier partición P de $[a,b]$.

Como $BV[a,b]$ está cerrado bajo suma y multiplicación escalar usuales, se sigue que $BV[a,b]$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de todas las funciones definidas en $[a,b]$ y con valores en $\mathbb{R}$. □

Observación 1.20. La aplicación definida por

$$\|f\|_{BV} := |f(0)| + V_f[a,b], \quad f \in BV[a,b],$$

es una norma en el espacio $BV[a,b]$.

En efecto, veamos que se cumplen las siguientes propiedades:

1. Supongamos que $\|f\|_{BV} = 0$, es decir,

$$|f(0)| + V_f[a,b] = 0.$$

Entonces $|f(0)| = 0$ y $V_f[a,b] = 0$, lo cual implica que f es constante por la Observación 1.18. Como además $f(0) = 0$, se concluye que $f \equiv \mathbf{0}$.

Recíprocamente, si $f \equiv \mathbf{0}$, entonces claramente $\|f\|_{BV} = 0$. Por lo tanto, $\|f\|_{BV} = 0$ si, y solo si, $f \equiv \mathbf{0}$.

2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in BV[a,b]$. De la Ecuación (1.2) tenemos que $V_{\alpha f}[a,b] = |\alpha| V_f[a,b]$. Por lo tanto,

$$\|\alpha f\|_{BV} = |\alpha f(0)| + V_{\alpha f}[a,b] = |\alpha||f(0)| + |\alpha| V_f[a,b] = |\alpha| \cdot \|f\|_{BV}.$$

3. Sean $f, g \in BV[a,b]$. De la Ecuación (1.3) tenemos que $V_{f+g}[a,b] \leq V_f[a,b] + V_g[a,b]$. Luego,

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{BV} &= |(f+g)(0)| + V_{f+g}[a,b] \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + V_f[a,b] + V_g[a,b] \\ &= \|f\|_{BV} + \|g\|_{BV}. \end{aligned}$$

Así, $\|\cdot\|_{BV}$ cumple las tres propiedades de una norma.

Proposición 1.21. *El espacio* $(BV[a,b],\ \|\cdot\|_{BV})$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea (f_n) de Cauchy en $BV[a,b]$. Note que para cualquier $x \in [a,b]$, se cumple:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(0) - f_m(0)| + V_{f_n - f_m}[a,b] = \|f_n - f_m\|_{BV}.$$

Tomando el supremo sobre $x \in [a,b]$, obtenemos $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_{BV}$. Como (f_n) es de Cauchy en $\|\cdot\|_{BV}$, la desigualdad anterior implica que (f_n) también es de Cauchy en el espacio $B[a,b]$.

Dado que $B[a,b]$ es completo, existe $f \in B[a,b]$ tal que $f_n \to f$ uniformemente. Veamos ahora que $f \in BV[a,b]$ y que $\|f_n - f\|_{BV} \to 0$. Sea $\varepsilon > 0$ dado y fijemos una partición $P = \{a = x_0, ..., x_k = b\}$ de $[a,b]$. Por ser (f_n) de Cauchy en $\|\cdot\|_{BV}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq N$,

$$\sum_{j=1}^{k} |(f_n - f_m)(x_j) \ - \ (f_n - f_m)(x_{j-1})| \leq \varepsilon.$$

Haciendo $m \to \infty$,

$$\sum_{j=1}^{k} |(f_n - f)(x_j) \ - \ (f_n - f)(x_{j-1})| \leq \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N. \tag{1.3}$$

Esto implica que $V_{f_n - f}[a,b] \to 0$. Por otro lado, aplicando desigualdad triangular en (1.3) obtenemos que $V_f[a,b] \leq V_{f_n}[a,b] + \varepsilon$. Así $f \in BV[a,b]$. Finalmente, como $|f_n(0) - f(0)| \to 0$ y $V_{f_n - f}[a,b] \to 0$, concluimos que $\|f_n - f\|_{BV} \to 0$. Por lo tanto $(BV[a,b],\ \|\cdot\|_{BV})$ es un espacio de Banach.

$\square$

3.1. Integral de Riemann-Stieltjes

Definición 1.22. Sean $P, Q \in P[a,b]$. Diremos que P es más fina que Q o que P es un refinamiento de Q si $Q \subset P$.

Definición 1.23. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$ y es t_k un punto en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, una suma de la forma

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta\alpha_k,$$

donde $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$, se llama **suma de Riemann-Stieltjes** de f con respecto a $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Definición 1.24. Decimos que f es **Riemann-integrable con respecto a** α en $[a,b]$, y escribimos $f \in R(\alpha)$, si existe un número A tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de $[a,b]$ con la siguiente propiedad:

- Para toda partición P más fina que P_ε (es decir, $P \supset P_\varepsilon$) y para cualquier elección de puntos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, se cumple:
$$|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon.$$

En este caso, el número A se denota como

$$A = \int_a^b f\, d\alpha,$$

y se llama la **integral de Riemann-Stieltjes** de f respecto a α.

La demostración del siguiente resultado puede encontrarse en Rudin W. (1976, p.128).

Proposición 1.25. *Sean $f, g, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $f, g \in R(\alpha)$. Si $c, d \in \mathbb{R}$, entonces $cf + dg \in R(\alpha)$ y*

$$\int_a^b (cf + dg)\, d\alpha = c \int_a^b f\, d\alpha + d \int_a^b g\, d\alpha.$$

Definición 1.26. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $P = \{x_0, \ldots, x_n\} \in P[a,b]$. Dado $k = 1, \ldots, n$, definimos

$$M_k(f) := \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad m_k(f) := \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

La suma superior $U(f, \alpha, P)$ y la suma inferior $L(f, \alpha, P)$ de f respecto a α y P se definen, respectivamente, como

$$U(f, \alpha, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \Delta\alpha_k \quad \text{y} \quad L(f, \alpha, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f) \Delta\alpha_k.$$

Lema 1.27. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces $f \in BV[a,b]$ si, y solo si, f es diferencia de dos funciones crecientes en $[a,b]$.*

Demostración. **(⇒)** Suponga que $f \in BV[a,b]$, queremos ver que $f = g - h$ con g, h crecientes. Definimos para $x \in [a,b]$

$$p(x) := \frac{V_f[a,x] + f(x) - f(a)}{2} \quad \text{y} \quad n(x) := \frac{V_f[a,x] - f(x) + f(a)}{2}.$$

Escribamos $g(x) := f(a) + p(x)$ y $h(x) := n(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Entonces

$$\begin{aligned} g(x) - h(x) &= f(a) + p(x) - n(x) \\ &= f(a) + \frac{V_f[a,x] + f(x) - f(a)}{2} - \frac{V_f[a,x] - f(x) + f(a)}{2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Veamos que g y h son crecientes. Si $a \leq y \leq x \leq b$, usando la propiedad 3 de la observación 1.2:

$$p(x) - p(y) = \frac{V_f[y,x] + (f(x) - f(y))}{2} \geq \frac{|f(x) - f(y)| + (f(x) - f(y))}{2} \geq 0,$$

Análogamente,

$$n(x) - n(y) = \frac{V_f[y,x] - (f(x) - f(y))}{2} \geq \frac{|f(x) - f(y)| - (f(x) - f(y))}{2} \geq 0.$$

Por lo tanto, p y n son crecientes, y con ello g y h también lo son. De esta forma se concluye que f se puede ver como la diferencia de dos funciones crecientes.

(⇐) Veamos ahora que si $f = g - h$ con g, h crecientes, entonces $f \in BV[a,b]$. Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} |(g(x_k) - h(x_k)) - (g(x_{k-1}) - h(x_{k-1}))| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |h(x_k) - h(x_{k-1})|. \end{aligned}$$

Como g y h son crecientes, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| = g(b) - g(a), \quad \sum_{k=1}^{n} |h(x_k) - h(x_{k-1})| = h(b) - h(a).$$

Así,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a).$$

Tomando supremo sobre todas las particiones P, obtenemos

$$V_f[a,b] \leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty.$$

Por lo tanto, $f \in BV[a,b]$. □

Definición 1.28. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ con α creciente. Diremos que f satisface la condición de Riemann respecto a α en $[a,b]$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $P_\varepsilon \in P[a,b]$ tal que $U(f,\alpha,P) - L(f,\alpha,P) < \varepsilon$, si $P \in P[a,b]$ refina a P_ε.

Puede probarse que dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f satisface la condición de Riemann respecto a α en $[a,b]$ si, y solo si, $f \in R(\alpha)$. Ver prueba de esto puede encontrarse en Rudin W. (1976, p.128).

Proposición 1.29. *Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si $f \in C[a,b]$ y $\alpha \in BV[a,b]$, entonces $f \in R(\alpha)$ y*

$$\left| \int_a^b f \, d\alpha \right| \leq \|f\|_\infty V_\alpha[a,b].$$

Demostración. Por el Lema 1.27 existen dos funciones crecientes α_1 y α_2 tales que $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Note que f es Riemann- Stieltjes integrable respecto a α si, y solo si, f lo es respecto a α_1 y α_2, y además

$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b f \, d\alpha_1 \; - \int_a^b f \, d\alpha_2.$$

Por tanto basta probar el resultado cuando α es creciente.

Como f es continua en $[a,b]$, entonces es uniformemente continua. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a,b]$ y $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon'$, donde $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{V_{\alpha_i}[a,b]}$. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $x_k - x_{k-1} < \delta$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

Entonces, como el subintervalo es de longitud menor que δ, se tiene que $M_k(f) - m_k(f) < \varepsilon'$. Así,

$$U(f,\alpha,P) - L(f,\alpha,P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] \leq \varepsilon' \sum_{k=1}^{n} |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| = \varepsilon.$$

Por lo tanto $f \in R(\alpha)$.

Ahora para la desigualdad 1.29, note que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)| \cdot |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| \leq \|f\|_\infty \sum_{k=1}^{n} |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})|, \quad \text{con } t_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Tomando el supremo sobre todas las particiones:

$$\left| \int_a^b f \, d\alpha \right| \leq \|f\|_\infty \cdot V_\alpha[a,b].$$

$\square$

Capítulo 2

Algunos subespacios finitodimesionales de $C[0,1]$

Dentro del estudio del espacio $C[0,1]$, resulta fundamental analizar la estructura de sus subespacios cerrados, especialmente aquellos que están formados por funciones con propiedades adicionales de regularidad, como la diferenciabilidad. En esta sección, nos centraremos en caracterizar algunos de estos subespacios y en establecer resultados importantes sobre su dimensión.

Antes de abordar esto, consideraremos un resultado que será utilizado posteriormente: un ejemplo de operador lineal con gráfica cerrada que no es acotado, lo cual muestra una situación donde el teorema de la gráfica cerrada de Banach no puede aplicarse.

Definición 2.1. $C^{(1)}[0,1]$ denota el subespacio vectorial de $C[0,1]$ de las funciones continuamente diferenciables.

Ejemplo 2.2. Veamos que $(C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ **no** es un espacio de Banach.

Consideremos la sucesión de funciones $\big(f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}\big)$ definida por:

$$f_n(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1].$$

Queremos estudiar su convergencia uniforme hacia una función f. Observemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{2}\right|, \text{ para todo } x \in [0,1].$$

Por lo tanto la función límite es $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|,\ x \in [0,1]$.

Ahora para analizar la convergencia uniforme, notemos que:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right|$$

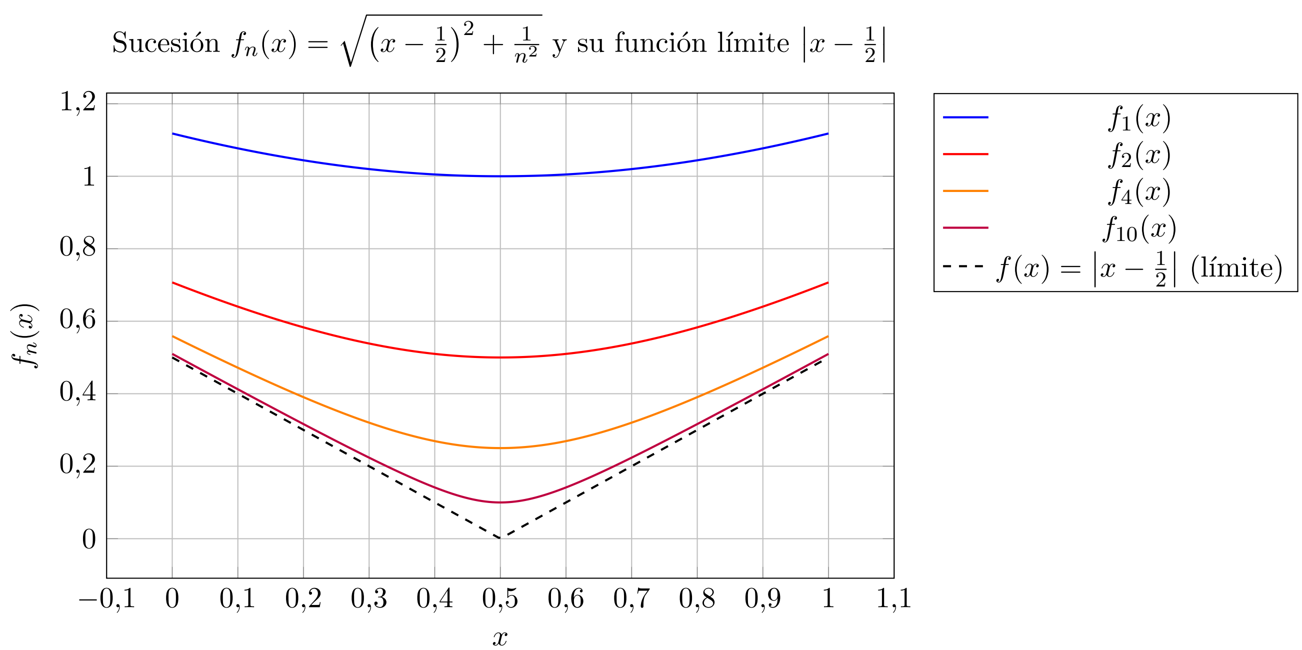
$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} + \left|x-\frac{1}{2}\right|} \right| \\
&= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} + \left|x-\frac{1}{2}\right|}. \\
&\leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

Así, concluimos que:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

es decir, $f_n \to f$ uniformemente en $[0, 1]$.

Sin embargo, la función límite no es derivable en $x = \frac{1}{2}$, por lo que $f \notin C^{(1)}[0, 1]$. Esto muestra que la sucesión de Cauchy (f_n) en $C^{(1)}[0, 1]$ converge uniformemente a una función que no pertenece a $C^{(1)}[0, 1]$, lo cual implica que $(C^{(1)}[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ no es un espacio de Banach.



Teorema 2.3. *Sea* $((f_n) : [a, b] \to \mathbb{R})$ *una sucesión de funciones. Supongamos que*

- $f_n \to f$ *uniformemente en* $[a, b] \setminus \{x\}$ *para algún* $x \in [a, b]$.
- *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe el límite*

$$\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n.$$

Entonces, la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a un limite* $L \in \mathbb{R}$ *y se cumple:*

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} A_n = L.$$

En otras palabras, los límites conmutan:

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t).$$

Esta demostración se encuentra en Rudin W. (1976, p.149).

Teorema 2.4. *Sea* $(f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R})$ *una sucesión de funciones diferenciables tales que:*

1. $(f_n(x_0))$ *converge para algún* $x_0 \in [a,b]$,
2. (f_n') *converge uniformemente en* $[a,b]$.

Entonces:

1. (f_n) *converge uniformemente en* $[a,b]$ *a una función* f,
2. *La función límite* f *es diferenciable en* $[a,b]$ *y su derivada satisface:*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad \textit{para todo } x \in [a,b].$$

Demostración. Veamos primero que (f_n) convergen uniformemente en $[a,b]$ a una funcion f. Dado $\varepsilon > 0$, por la convergencia uniforme de (f_n'), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n,m \geq N$ y todo $t \in [a,b]$:

$$|f_n'(t) - f_m'(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \text{y} \quad |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Aplicando el **Teorema del Valor Medio** a $f_n - f_m$ en $[x,t] \subseteq [a,b]$ existe $c \in [x,t]$ tal que:

$$\begin{aligned}|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(t) - f_m(t))| &= |f_n'(c) - f_m'(c)| \cdot |x-t| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Fijando $t = x_0$ y $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Por tanto, (f_n) es de Cauchy y converge uniformemente a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Por otro lado, para $x \in [a,b]$ fijo, definimos:

$$\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x}, \quad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t-x}, \quad t \in [a,b], t \neq x.$$

Es claro que $\lim_{t\to x} \phi_n(t) = f_n'(x)$. De la desigualdad 2, implica que $|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ para $n,m \geq N$. Así (ϕ_n) converge uniformemente en $[a,b] \setminus \{x\}$.

Como $f_n \to f$ uniformemente y $\phi_n \to \phi$ uniformemente tenemos por el Teorema 2.3

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \phi(t) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

□

Ejemplo 2.5. Sea $T\colon (C^{(1)}[0,1],\ \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1],\ \|\cdot\|_\infty)$ dada por $T(f) = f'$ si $f \in C^{(1)}[0,1]$. Entonces T tiene gráfica cerrada y T no es acotado.

- Veamos que **la gráfica de T es cerrada**. Supongamos que $(f_n, f_n') \to (f, g)$ en $C^{(1)}[0,1] \times C[0,1]$. De la definición de $\|\cdot\|_\infty$ en $C^{(1)}[0,1]$ tenemos que $f_n \to f$ uniformemente en $[0,1]$ y $f_n' \to g$ uniformemente en $[0,1]$. Del teorema anterior, f es diferenciable y $f' = g$. Por lo tanto, $(f, g) = (f, f') \in \Gamma(T)$, lo que implica que $\Gamma(T)$ es cerrada.

- **T no es acotado**: Consideremos la sucesión (f_n) en $C^{(1)}[0,1]$ definida por:

$$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}, \quad x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Observe que

$$\|f_n\|_{C^{(1)}[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{\sin(n^2 x)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Por otra parte,

$$f_n'(x) = n\cos(n^2 x), \quad x \in [0,1] \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, la norma $\|\cdot\|_\infty$ de f_n' es:

$$\|f_n'\|_{C[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |n\cos(n^2 x)| = n \cdot \sup_{x\in[0,1]} |\cos(n^2 x)| = n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Supongamos ahora que T es acotado. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que:

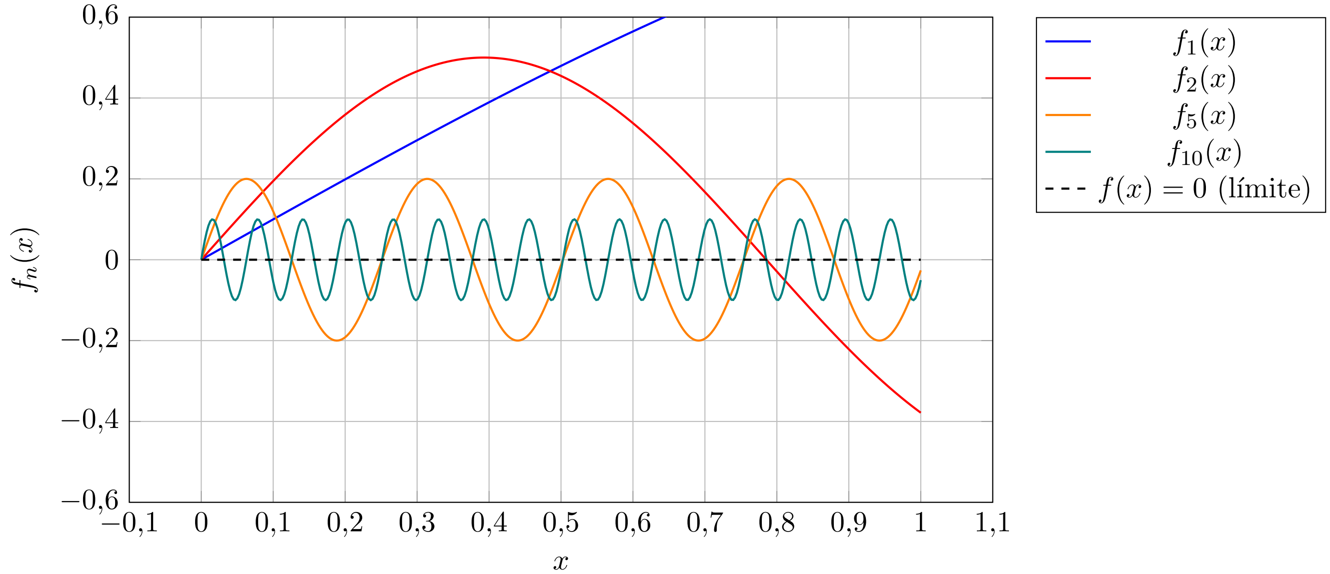
$$\|T(f_n)\|_{C^1[0,1]} = \|f_n'\|_{C[0,1]} \leq C\|f_n\|_{C^{(1)}[0,1]} \leq C \cdot \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, tendríamos:

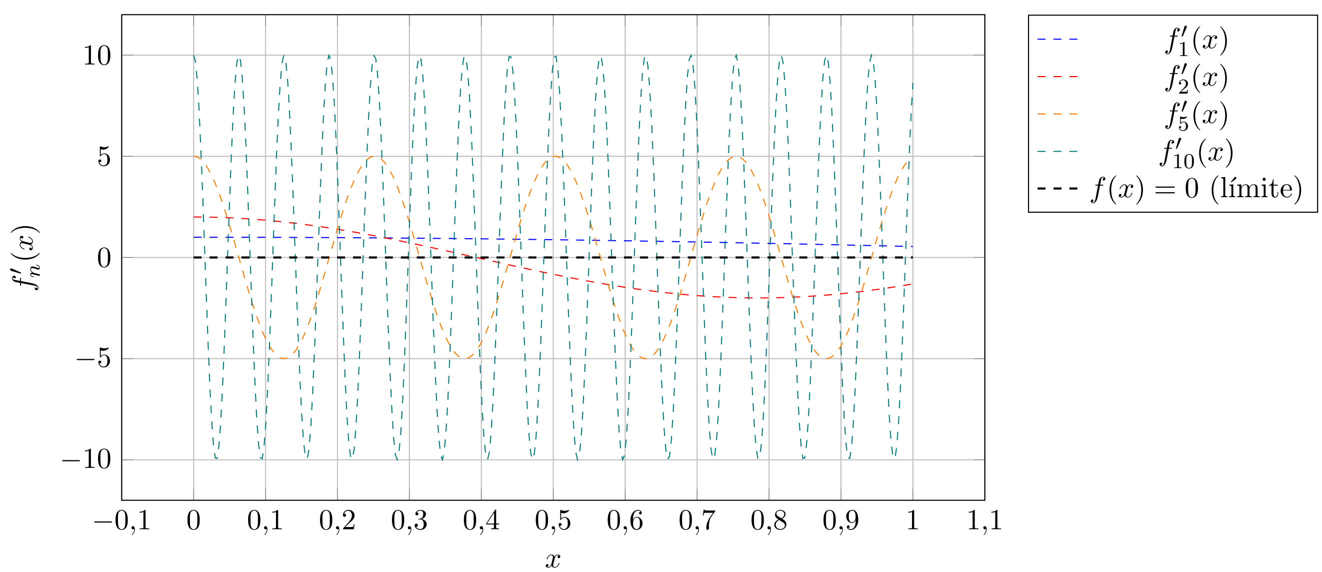
$$n \leq \frac{C}{n} \Rightarrow n^2 \leq C \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, la hipótesis de que T es acotado es falsa. Así, T no es acotado.

$$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n} \text{ en } [0,1]$$



$$f_n'(x) = n\cos(n^2 x) \text{ en } [0,1]$$



A continuación, estudiaremos los subespacios cerrados de $C[0,1]$ que contienen solo funciones continuamente diferenciables. En términos precisos, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.6. *Sea $X \subset C^{(1)}[0,1]$ un subespacio cerrado de $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Entonces X tiene dimensión finita.*

Demostración. Como $\Gamma(T)$ es cerrada en $X \times C[0,1]$, por el Teorema de la Gráfica Cerrada 1.8, el operador

$$T(f) = f', \quad f \in X$$

es acotado. Así, existe una constante $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|f'\|_\infty \leq n\|f\|_\infty \quad \text{para todo } f \in X.$$

Dado $i = 0, 1, \ldots, 4n$. Sea $x_i = \frac{i}{4n}$, considere la aplicación lineal dada por

$$S : X \to \mathbb{R}^{4n+1}, \quad S(f) = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{4n})), \quad \text{si } f \in X.$$

Veamos que S **es inyectiva**. Supongamos por contradicción que existe una función $f \in X$, con $\|f\|_\infty = 1$ y $S(f) = 0$. Esto significa que:

$$f\left(\frac{i}{4n}\right) = 0, \quad \text{para todo } i = 0, 1, \ldots, 4n.$$

Como $\|f\|_\infty = 1$, existe algún $x \in [0,1]$ tal que $|f(x)| = 1$. Si x fuera algún $x_i = \frac{i}{4n}$, entonces $|f(x)| = |f(x_i)| = 0$, contradiciendo $\|f\|_\infty = 1$. Luego,

$$x \in \left(\frac{i}{4n}, \frac{i+1}{4n}\right) \quad \text{para algún } i \in \{0, 1, \ldots, 4n-1\}.$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio en el intervalo $\left[\frac{i}{4n}, x\right]$, entonces existe $\xi \in \left(\frac{i}{4n}, x\right)$ tal que:

$$f(x) - f\left(\frac{i}{4n}\right) = f'(\xi) \cdot \left(x - \frac{i}{4n}\right).$$

Como $f\left(\frac{i}{4n}\right) = 0$, tenemos que $f(x) = f'(\xi) \cdot \left(x - \frac{i}{4n}\right)$. En consecuencia,

$$|f(x)| = |f'(\xi)| \cdot \left|x - \frac{i}{4n}\right|.$$

De lo anterior se sigue que

$$1 = |f'(\xi)| \cdot \left|x - \frac{i}{4n}\right| \leq \|f'\|_\infty \cdot \left|x - \frac{i}{4n}\right|.$$

Puesto que $x \in \left(\frac{i}{4n}, \frac{i+1}{4n}\right)$, $\left|x - \frac{i}{4n}\right| < \frac{1}{4n}$. Así,

$$1 < \|f'\|_\infty \cdot \frac{1}{4n} \leq n\|f\|_\infty \cdot \frac{1}{4n} = \frac{1}{4},$$

lo cual es una contradicción.

Por tanto, S debe ser inyectiva. Como $S\colon X \to \mathbb{R}^{4n+1}$ es lineal e inyectiva, se deduce que $\dim(X) \leq 4n+1$, es decir, X es de dimensión finita. □

Recordemos que $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$ es el espacio de funciones continuas en $[0,1]$ con la norma L^2, es decir,

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}, \quad \text{si } f \in C[0,1].$$

Ejemplo 2.7. El espacio $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$ no es completo.

Definamos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C[0,1]$ por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-nx, & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{n} < x \le 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Es claro que cada f_n es continua. Veamos que (f_n) **es de Cauchy en** $\|\cdot\|_2$**.** Tomemos $m > n$, y calculemos $\|f_n - f_m\|_2$. Se tiene que

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_0^{1/m} (m-n)^2 x^2\, dx + \int_{1/m}^{1/n} (1-nx)^2\, dx.$$

Para la **primera integral** tenemos que

$$\int_0^{1/m} (m-n)^2 x^2\, dx = (m-n)^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/m} = \frac{(m-n)^2}{3m^3}.$$

Ahora en la **segunda integral** hacemos el cambio de variable $u = 1-nx$, $du = -n\,dx$. Con esto encontramos que

$$\begin{aligned}\int_{1/m}^{1/n} (1-nx)^2\, dx = \frac{1}{n}\int_0^{1-n/m} u^2\, du = \frac{1}{n}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{1-n/m} &= \frac{(1-n/m)^3}{3n} \\ &= \frac{(m-n)^3}{3m^3 n}.\end{aligned}$$

Combinando estos resultados se sigue que:

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_2^2 = \frac{(m-n)^2}{3m^3} + \frac{(m-n)^3}{3m^3 n} = \frac{(m-n)^2}{3m^3}\left(1 + \frac{m-n}{n}\right) &= \frac{(m-n)^2}{3m^2 n} \\ \le \frac{m^2}{3m^2 n} = \frac{1}{3n}.\end{aligned}$$

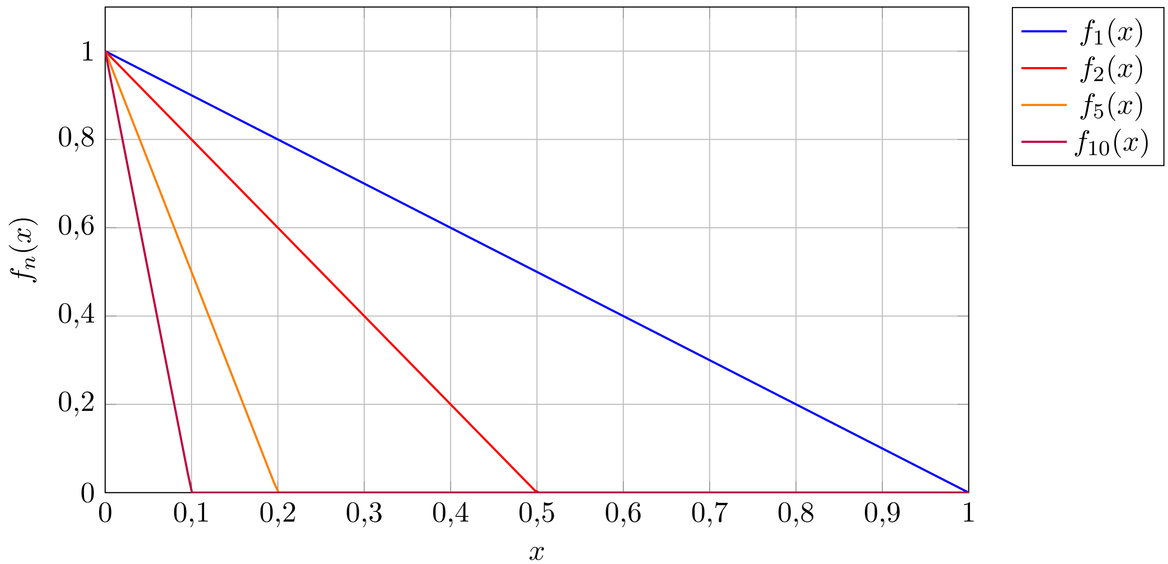
Por lo tanto $\|f_n - f_m\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{3n}}$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos N tal que $\frac{1}{\sqrt{3N}} < \varepsilon$. Entonces, para todo $m, n \ge N$ se tiene que $\|f_n - f_m\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{3N}} < \varepsilon$. Así, la sucesión (f_n) es de Cauchy en $\|\cdot\|_2$.

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$

Para cada $x \in (0,1]$ fijo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$ para todo $n \ge N$. Por lo tanto, $f_n(x) = 0$ para todo $n \ge N$. Además, $f_n(0) = 1$ para todo n. Se sigue que la sucesión (f_n) converge puntualmente a $f(x)$. Note que la función f a la que converge puntualmente la sucesión (f_n) no es continua en $[0,1]$, ya que presenta una discontinuidad en $x = 0$.

Dado que la sucesión $(f_n) \subset C[0,1]$ es de Cauchy en $\|\cdot\|_2$ y que $f \notin C[0,1]$, concluimos que $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$ no es un espacio completo.

$$\text{Sucesión } f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$



A partir de lo anterior, podemos demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.8. *El operador identidad* $Id : (C[0,1], \|\cdot\|_2) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ *no es continuo.*

Demostración. Supongamos que existe $c > 0$ tal que para todo f en $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$ se tiene que $\|f\|_\infty \le c\|f\|_2$. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$ que **no** es convergente en este espacio (sabemos que existe por el ejemplo anterior). Entonces

$$\frac{1}{c}\|f_n - f_m\|_\infty \le \|f_n - f_m\|_2, \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto (f_n) es de Cauchy en $\|\cdot\|_\infty$. Así, existe f en $C[0,1]$ tal que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Por otra parte sabemos que

$$\|f\|_2 \le \|f\|_\infty, \quad \text{para todo } f \in C[0,1].$$

De ahí que:

$$\|f_n - f\|_2 \le \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

En consecuencia $\|f_n - f\|_2 \to 0$ lo cual es absurdo porque la sucesión (f_n) no es convergente en $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$. □

Sin embargo, si S es un subespacio de $C[0,1]$ tal que $\dim S < \infty$, entonces $f \in (S, \|\cdot\|_2) \to f \in (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ sí es continua. En efecto, como S es de dimensión finita, todas las normas sobre S son equivalentes. En particular, existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que para todo $g \in S$,

$$C_1\|g\|_2 \le \|g\|_\infty \le C_2\|g\|_2.$$

Sea $(f_n) \subset S$ tal que $f_n \to f$ en la norma L^2, es decir,

$$\|f_n - f\|_2 \to 0.$$

Por la equivalencia de normas en S, se tiene:

$$\|f_n - f\|_\infty \leq C_2 \|f_n - f\|_2 \to 0.$$

Por lo tanto, $f_n \to f$ en norma $\|\cdot\|_\infty$.
Es natural preguntarse si el recíproco se cumple. En este sentido tenemos el siguiente teorema. Recordemos que todo conjunto linealmente independiente en un espacio con producto interno puede ortonormalizarse **(Gram-Schmidt)** manteniendo el mismo subespacio generado. Vease Axler, S. (2015). Linear Algebra Done Right (3rd ed.). Springer.

Teorema 2.9. *Sea S un subespacio de $C[0,1]$. Supongamos que existe una constante $c > 0$ tal que para todo $f \in S$, se cumple que*

$$\|f\|_\infty \leq c\|f\|_2 \quad \textit{para cada } f \in S.$$

Entonces S tiene dimensión finita.

Demostración. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto ortonormal de funciones en S, es decir,

$$\int_0^1 v_j(x)\ v_k(x)\, dx = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k; \\ 0, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Sea $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ fijo y defínamos $\phi_a \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$\phi_a(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j\ v_j(x), \quad x \in [0,1].$$

Nótese que ϕ_a es continua y pertenece al espacio S generado por las funciones $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Observe que

$$\|\phi_a\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \phi_a^2(x)\, dx = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\ v_j(x) \right)^2 dx.$$

Expandiendo el cuadrado y usando la linealidad de la integral encontramos que

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j a_k\ v_j(x) v_k(x) \right) dx = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j a_k \int_0^1 v_j(x) v_k(x)\, dx.$$

Se sigue de la ortogonalidad del conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ que,

$$\|\phi_a\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j a_k \delta_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 = \|a\|^2.$$

Como $\|f\|_\infty \leq c\|f\|_{L^2}$ para toda función $f \in S$, tenemos que

$$\|\phi_a\|_\infty \leq c\|\phi_a\|_{L^2} = c\ \|a\|_2.$$

Esto implica que para todo $x \in [0,1]$ tenemos que

$$|a_1 v_1(x)\ + \cdots +\ a_n v_n(x)| \leq c\|a\|_2. \tag{2.1}$$

Puesto que esta desigualdad es válida para todo $a \in \mathbb{R}^n$, se deduce que:

$$v_1^2(x) + \cdots + v_n^2(x) \leq c^2, \quad \text{para todo } x \in [0,1].$$

En efecto, si $x \in [0,1]$ y $a = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$, se sigue de la desigualdad (2.1) que

$$v_1(x)^2 + \cdots + v_n(x)^2 \leq c\|a\|_2 = \sqrt{v_1(x)^2 + \cdots + v_n(x)^2}.$$

Así, $\sqrt{v_1(x)^2 + \cdots + v_n(x)^2} \leq c$ si $v_1(x)^2 + \cdots + v_n(x)^2 \neq 0$. Note que si $v_1(x)^2 + \cdots + v_n(x)^2 = 0$, la desigualdad anterior también vale porque $c > 0$. Esto demuestra que

$$v_1^2(x) + \cdots + v_n^2(x) \leq c^2, \quad \text{para todo } x \in [0,1].$$

Integrando sobre $[0,1]$ y usando la ortonormalidad de las funciones v_j obtenemos

$$\int_0^1 \left(v_1^2(x) + \cdots + v_n^2(x)\right) dx = \sum_{j=1}^n \int_0^1 v_j^2(x)\, dx = \sum_{j=1}^n 1 = n \leq c^2.$$

Por lo tanto, se concluye que la dimensión S, está acotada por c^2. $\square$

Capítulo 3

El dual de $C[0,1]$

En este capítulo, nos enfocaremos en demostrar que el dual de $C[0,1]$ puede identificarse con el espacio de funciones de variación acotada $BV[0,1]$, donde cada funcional lineal acotado L en $C[0,1]$ admite una representación integral mediante una integral de Riemann-Stieltjes:

$$L(f) = \int_0^1 f\,dg, \qquad \text{para todo } f \in C[0,1], \text{ donde } g \in BV[0,1].$$

Primero note que si $g \in BV[0,1]$, entonces la integral de Riemann-Stieltjes define un funcional **continuo** en $C[0,1]$ respecto a la norma supremo $\|f\|_\infty$ porque

$$\left| \int_0^1 f\,dg \right| \leq \|f\|_\infty \cdot V_g[0,1].$$

Por la Proposición 1.29. De esta forma, se tiene

$$|L(f)| \leq V_g[0,1] \cdot \|f\|_\infty, \quad \text{para todo } f \in C[0,1]. \tag{3.1}$$

Así L es un funcional continuo definido en $C[0,1]$, es decir, $L \in C[0,1]^*$. En este capitulo veremos que todo los elementos de $C[0,1]^*$ son de esta forma. Este resultado, conocido como el **Teorema de Representación de Riesz** para $C[0,1]$, no solo revela la estructura del dual, sino que también establece un puente entre el análisis funcional y la teoría de la integración.

Recordemos que la **función signo** $sgn\colon \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ es definida por:

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Teorema 3.1 (Teorema de Representación de Riesz I)**.** *Si* $L \in C[0,1]^*$, *entonces existe* $g \in BV_0[0,1] = \{f \in BV[0,1] \mid f(0) = 0\}$ *tal que*

$$L(f) = \int_0^1 f\ dg, \quad \textit{para todo } f \in C[0,1], \ \textit{y } \|L\| = V_g[0,1].$$

Demostración. Sea $L : C[0,1] \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y acotado. Como $C[0,1]$ es un subespacio de $B[0,1]$, por el Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.9), existe $\widetilde{L} : B[0,1] \to \mathbb{R}$ lineal tal que

$$\widetilde{L}|_{C[0,1]} = L \quad \text{y} \quad \|\widetilde{L}\| = \|L\|.$$

Dado $t \in [0,1]$, sea $f_t : \; [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_t(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq t, \\ 0, & t < \tau \leq 1. \end{cases}$$

Note que $f_t \in B[0,1]$ y $\|f_t\|_\infty = 1$. Definimos $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ como:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \widetilde{L}(f_t), & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Afirmamos que $g \in BV[0,1]$. Sea $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ una partición arbitraria. Para cada $k = 1, \dots, n$, escribamos $\varepsilon_k = \operatorname{sgn}(g(t_k) - g(t_{k-1}))$. Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (g(t_k) - g(t_{k-1})) \\ &= \widetilde{L}\left(\varepsilon_1 f_{t_1} + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k (f_{t_k} - f_{t_{k-1}}) \right). \end{aligned}$$

Sea $F := \varepsilon_1 f_{t_1} + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k (f_{t_k} - f_{t_{k-1}})$. Para cada $\tau \in [0,1]$, solo un término de $F(\tau)$ es no nulo , y su valor es ± 1 pues τ es fijo y solo está en un subintervalo de la partición. Por lo tanto, $\|F\|_\infty = 1$. Así:

$$\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq \|\widetilde{L}\| \cdot \|F\|_\infty = \|L\|.$$

Esto implica que $g \in BV[0,1]$ y que $V_g[0,1] \leq \|L\|$.

Dados $f \in C[0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(\tau) = f(t_0) f_{t_1}(\tau) + \sum_{k=2}^{n} f(t_{k-1}) \left[f_{t_k}(\tau) - f_{t_{k-1}}(\tau) \right], \tau \in [t_{k-1}, t_k].$$

Veamos que $f_n \to f$ uniformemente. Por la continuidad uniforme de f, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|t_k - t_{k-1}| < \delta$, entonces $|f(\tau) - f(t_{k-1})| < \varepsilon$ para $\tau \in [t_{k-1}, t_k]$.
Esto implica que $|f_n(\tau) - f(\tau)| < \varepsilon$, para todo $\tau \in [0,1]$, y por tanto $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$. Por lo que $f_n \to f$ uniformemente en $[0,1]$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \widetilde{L}(f_n) &= f(t_0) \widetilde{L}(f_{t_1}) + \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1}) [\widetilde{L}(f_{t_k}) - \widetilde{L}(f_{t_{k-1}})] \\ &= f(t_0) g(t_1) + \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1}) [g(t_k) - g(t_{k-1})] \\ &= \int_0^1 f_n \, dg. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\left| \widetilde{L}(f_n) \; - \int_0^1 f \, dg \right| = \left| \int_0^1 f_n \, dg \; - \int_0^1 f \, dg \right| \leq \|f_n - f\|_\infty \cdot V_g[0,1].$$

Como $\widetilde{L}$ es acotado y $f_n \to f$ uniformemente, tenemos $\widetilde{L}(f_n) \to \widetilde{L}(f) = L(f)$. De la desigualdad anterior se sigue que $L(f) = \int_0^1 f\,dg$.

Para cualquier $f \in C[0,1]$, la Proposición 1.29 garantiza

$$|L(f)| = \left| \int_0^1 f\,dg \right| \leq \|f\|_\infty \cdot V_g[0,1].$$

Por lo tanto, $\|L\| \leq V_g[0,1]$. Combinado con $V_g[0,1] \leq \|L\|$ (probado anteriormente), concluimos:

$$\|L\| = V_g[0,1] \qquad \square.$$

El teorema no asegura unicidad en la representación de L, ya que distintas funciones de variación acotada pueden inducir la misma integral de Stieltjes. En efecto, observe que si g representa a L, entonces para todo $C > 0$, la función $g + C$ también lo hace pues

$$\int_0^1 f\,d(g+C) = \int_0^1 f\,dg + \int_0^1 f\,dC = \int_0^1 f\,dg, \quad \text{para todo } f.$$

Para resolver esto, introduciremos una relación $\sim$ sobre $BV[0,1]$ de la siguiente manera:

$$f \sim g \quad \text{si} \quad \int_0^1 x(t)\,df(t) \;=\; \int_0^1 x(t)\,dg(t) \quad \text{para todo } x \in C[0,1].$$

Veamos que $\sim$ es una relación de equivalencia.

- $\displaystyle\int_0^1 x(t)df(t) = \int_0^1 x(t)df(t)$ para todo $x \in C[0,1]$. Luego, $\sim$ es reflexiva.
- Si $f \sim g$, entonces $\displaystyle\int_0^1 x(t)df(t) = \int_0^1 x(t)dg(t)$ para todo $x \in C[0,1]$. Luego, $g \sim f$. Así, $\sim$ es simétrica.
- Si $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces para todo $x \in C[0,1]$:

  $$\int_0^1 x(t)df(t) = \int_0^1 x(t)dg(t) = \int_0^1 x(t)dh(t).$$

  Por tanto, $f \sim h$. Esto muestra que $\sim$ es transitiva.

Proposición 3.2. *Sea $f \in BV[0,1]$. Entonces, $f \sim \mathbf{0}$ si, y solo si, se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $f(0) = f(1)$;
2. $f(c^-) = f(c^+) = f(0)$ *si* $0 < c < 1$, *donde* $f(c^-) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ *y* $f(c^+) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.

Demostración. Veamos que si $f \sim \mathbf{0}$, entonces valen las condiciones (1) y (2).

Supongamos que $f \sim \mathbf{0}$, es decir,

$$\int_0^1 x(t)\,df(t) = 0, \quad \text{para todo } x \in C[0,1].$$

Tomando x como la función constante igual a 1, tenemos que

$$0 = \int_0^1 1 \cdot df(t) = f(1) - f(0).$$

Así, $f(0) = f(1)$.

Fijemos $0 < c < 1$. Dado $0 < h < \text{mín}(c, 1-c)$, definamos:

$$x_h(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t \leq c; \\ 1 - \frac{t-c}{h}, & \text{si } c \leq t \leq c+h; \\ 0, & \text{si } c+h \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Como $f \sim \mathbf{0}$,

$$0 = \int_0^1 x_h(t)\, df(t) = [f(c) - f(0)] + \int_c^{c+h} x_h(t)\, df(t).$$

Integrando por partes se obtiene:

$$\int_c^{c+h} x_h(t)\, df(t) = -f(c) + \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\, dt$$

Combinando:

$$0 = -f(0) + \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\, dt, \quad \text{es decir,} \quad \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\, dt = f(0). \tag{3.2}$$

Finalmente, note que $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\, dt = f(c^+)$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in [a, b]$ y $c < x < c + h$, tenemos que $|f(x) - f(c^+)| < \varepsilon$. Consecuentemente,

$$\left| \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\, dt - f(c^+) \right| \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f(t) - f(c^+)|\, dt < \varepsilon.$$

De (3.2) y lo anterior se sigue que $f(c^+) = f(0)$. Análogamente, $f(c^-) = f(0)$. De esta forma, $f(c^-) = f(c^+) = f(0)$ para todo $0 < c < 1$.

Supongamos ahora que $f \in BV[0, 1]$ satisface las condiciones (1) y (2) para todo $c \in (0, 1)$. Veamos que $f \sim \mathbf{0}$, es decir, que para toda $x \in C[0, 1]$ se cumple

$$\int_0^1 x(t)\, df(t) = 0.$$

Dado que $f \in BV[0, 1]$, tiene a lo sumo una cantidad numerable de discontinuidades [2, Teorema 3.27], los puntos de continuidad son densos en $[0, 1]$[1]. La hipótesis (2) implica que en todo punto interior $c \in (0, 1)$, los límites laterales valen $f(0)$. En particular, si c es un punto de continuidad de f, entonces $f(c) = f(0)$.

Así, f coincide con la función constante $f(0)$ salvo en un conjunto numerable de puntos. Consideremos ahora cualquier intervalo $[a, b] \subset (0, 1)$. Recordemos que la variación total de f en $[a, b]$ está dada por

$$V_f[a, b] = \sup\{V(f, Q) : Q \text{ es una partición de } [a, b]\}.$$

[1]Dado que un conjunto numerable no puede contener intervalos abiertos, su complemento es denso en $[0, 1]$.

Como los puntos de continuidad son densos, es posible elegir una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tal que para cada punto t_i (para $0 < i < n$) sea un punto de continuidad de f. Para tal partición, se tiene $f(t_i) = f(0)$ para $i = 1, \dots, n-1$, y por la existencia de los límites laterales, también $f(t_0^+) = f(t_n^-) = f(0)$. Luego, todas las diferencias $f(t_i) - f(t_{i-1}) = 0$, por lo que $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = 0$. Como esto vale para una partición arbitraria formada por puntos de continuidad, se concluye que

$$V_f[a,b] = 0 \quad \text{para todo } [a,b] \subset (0,1).$$

Dado que los puntos de continuidad son densos, cualquier punto de discontinuidad puede aproximarse arbitrariamente por tales particiones, y como los saltos en los puntos de discontinuidad son nulos (por la condición 2 de la proposición), no aportan nada a la variación. Esto significa que f no varía en el interior del intervalo, salvo posiblemente en un conjunto numerable de puntos.

Sea $x \in C[0,1]$ dada. Como $f \in BV[0,1]$ y x es continua, existe la integral de Riemann–Stieltjes $\displaystyle\int_0^1 x\,df$. Por la fórmula de integración por partes,

$$\int_0^1 x(t)\,df(t) = x(1)f(1) - x(0)f(0) - \int_0^1 f(t)\,dx(t).$$

Puesto que x es continua, el valor de la integral no se altera si se modifica f en un conjunto numerable de puntos [4, Capítulo 4, Proposición 15]. Como f coincide con la constante $f(0)$ en un conjunto denso se sigue que

$$\int_0^1 f(t)\,dx(t) = \int_0^1 f(0)\,dx(t) = f(0)(x(1) - x(0)).$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes:

$$\int_0^1 x(t)\,df(t) = x(1)f(1) - x(0)f(0) - f(0)(x(1) - x(0)).$$

Simplificando y usando la hipótesis (1) $f(1) = f(0)$, obtenemos

$$\int_0^1 x(t)\,df(t) = x(1)(f(1) - f(0)) = 0.$$

Así $\displaystyle\int_0^1 x\,df = 0$ para toda $x \in C[0,1]$, es decir, $f \sim \mathbf{0}$. □

La proposición anterior muestra que la representación de un funcional $x^* \in C[a,b]^*$ mediante una función $v \in BV[a,b]$ no es única, sino que está determinada únicamente por una clase de equivalencia. Para resolver esta ambigüedad introducimos la noción de función normalizada.

Definición 3.3. Diremos que una función $v \in BV[a,b]$ es **normalizada** si cumple:

$$v(a) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \to 0^+} v(t+h) = v(t), \quad \text{con } a < t < b.$$

Proposición 3.4. *Si $v \in BV[0,1]$, entonces existe una única $v^* \in BV[0,1]$ normalizada tal que $v \sim v^*$. Más aún,*

$$V_{v^*}[0,1] = V_v[0,1].$$

Demostración. Sea $v \in BV[0,1]$. Definimos $v^* \in BV[0,1]$ por

$$v^*(0) := 0, \qquad v^*(1) = v(1) - v(0), \qquad v^*(t) := \lim_{h\to 0^+} (v(t+h) - v(0)) \quad \text{para } 0 < t < 1.$$

Así, v^* queda bien definida en todo el intervalo $[0,1]$. Afirmamos que v^* está normalizada. Por construcción $v^*(0) = 0$. Sea ahora $t \in (0,1)$. Por definición de v^* tenemos, para $0 < t < 1$, $v^*(t) = \lim\limits_{s\to 0^+} v(t+s) - v(0)$. Calculamos el límite por derecha

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} v^*(t+h) &= \lim_{h\to 0^+}\left(\lim_{s\to 0^+} v(t+h+s) - v(0)\right)\\ &= \lim_{h\to 0^+}\lim_{s\to 0^+} v(t+h+s) - v(0)\\ &= \lim_{u\to 0^+} v(t+u) - v(0), \quad \text{tomando } u = h+s\\ &= v^*(t), \quad \text{con } t \in (0,1).\end{aligned}$$

De esta forma v^* está normalizada. Veamos ahora que $v^* \sim v$; es decir, que para todo $x \in C[0,1]$

$$\int_0^1 x(t)\, dv^*(t) = \int_0^1 x(t)\, dv(t). \tag{3.3}$$

Definamos ahora la función

$$\varphi(t) := v(t) - \big(v^*(t) + v(0)\big), \qquad t \in [0,1].$$

Mostraremos que φ satisface las condiciones 1 y 2 de la Proposición 3.2 y así se deduce entonces $\varphi \sim \mathbf{0}$.

1. Veamos que $\varphi(0) = \varphi(1)$.

   - Para $t = 0$ tenemos $\varphi(0) = v(0) - (v^*(0) + v(0)) = v(0) - (0 + v(0)) = 0$.
   - Para $t = 1$, $\phi(1) = v(1) - (v^*(1) + v(0)) = v(1) - v(1) = 0$.

   Luego, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

2. Veamos que $\varphi(c^-) = \varphi(c^+) = 0 = \varphi(0)$. Sea $c \in (0,1)$.

   - Calculemos $\varphi(c^+)$.

   $$\begin{aligned}\phi(c^+) &= \lim_{x\to c^+} \phi(x)\\ &= -v(0) + \lim_{x\to c^+} v(x) - v^*(x)\\ &= -v(0) + \lim_{h\to 0^+} v(c+h) - v^*(c+h)\\ &= -v(0) + v^*(c) + v(0) - v^*(c)\\ &= 0.\end{aligned}$$

   - Ahora calculemos $\varphi(c^-)$.

   $$\begin{aligned}\varphi(c^-) = \lim_{x\to c^-} \varphi(x) &= \lim_{x\to c^-} \big(v(x) - (v^*(x) + v(0))\big)\\ &= \lim_{x\to c^-} v(x) - \lim_{x\to c^-} v^*(x) - v(0).\\ &= \lim_{x\to c^-} v(x) - \big(\lim_{h\to 0^-} v(c+h) - v(0)\big) - v(0) = 0.\end{aligned}$$

Así, para todo $c \in (0,1)$ se tiene $\varphi(c^-) = \varphi(c^+) = 0 = \varphi(0)$.

Concluimos que $\varphi \sim \mathbf{0}$. Es decir $v \sim v^* + v(0)$. Como sumar la constante $v(0)$ no altera la clase de equivalencia, por consiguiente deducimos que$v \sim v^*$.

Note que la unicidad de v^* se deduce de la Proposición 3.2: si v_1^* y v_2^* son dos funciones normalizadas equivalentes, entonces $v_1^* - v_2^* \sim 0$. Pero al ser ambas normalizadas, se cumple que $v_1^*(0) = v_2^*(0) = 0$ y como sus límites laterales coinciden, entonces $v_1^* = v_2^*$.

Falta ver que $V_{v^*}[0,1] = V_v[0,1]$. Para esto probemos primero $V_{v^*}[0,1] \leq V_v[0,1]$. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos una partición arbitraria $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Para cada $k = 0, \ldots, n$ elegimos un punto s_k con $s_0 = a,\ s_n = b$ y s_k suficientemente cercano a t_k, de modo que se cumpla

$$\left| \lim_{h \to 0^+} v(t_k + h) - v(s_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |v^*(t_k) - v^*(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left| \lim_{h \to 0^+} v(t_k + h) - \lim_{h \to 0^+} v(t_{k-1} + h) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |v(s_k) - v(s_{k-1})| + \varepsilon.$$

La suma $\sum_{k=1}^{n} |v(s_k) - v(s_{k-1})|$ está acotada por $V_v[0,1]$, por lo que

$$\sum_{k=1}^{n} |v^*(t_k) - v^*(t_{k-1})| \leq V_v[0,1] + \varepsilon.$$

De esta forma se concluye $V_{v^*}[0,1] \leq V_v[0,1]$.

Falta ver $V_v[0,1] \leq V_{v^*}[0,1]$. Sea $x^* \in C[0,1]^*$, entonces existe $v \in BV[0,1]$ normalizada tal que

$$x^*(x) = \int_0^1 x(t)\, dv(t), \quad \text{para todo } x \in C[0,1].$$

Note que $\|x^*\| = |v(0)| + V_v[0,1]$, al v estar normalizada $v(0) = 0$, así $\|x^*\| = V_v[0,1]$. De lo demostrado anteriormente podemos encontrar un representante normalizado v^* tal que $v \sim v^*$, entonces por la ecuacion 3.3 tenemos

$$x^*(x) = \int_0^1 x(t)\, dv^*(t), \qquad \text{para todo } x \in C[0,1].$$

Por la Desigualdad 3.1 se sigue que $\|x^*(x)\| \leq V_{v^*}[0,1]\, \|x\|_\infty$, para todo $x \in C[0,1]$, es decir $\|x^*\| \leq V_{v^*}[0,1]$. Teniendo en cuenta que $\|x^*\| = V_v[0,1]$, y $\|x^*\| \leq V_{v^*}[0,1]$, se sigue que $V_v[0,1] \leq V_{v^*}[0,1]$. $\square$

Combinando el Teorema 3.1 y la Proposición 3.4 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.5 (Teorema de Representación de Riesz II)**.** *Si $L \in C[0,1]^*$, entonces existe una única $g \in BV_0[0,1] = \{f \in BV[0,1] \mid f(0) = 0\}$ normalizada tal que*

$$L(f) = \int_0^1 f\ dg, \quad \textit{para todo } f \in C[0,1],\ \textit{y } \|L\| = V_g[0,1].$$

A continuación, ilustraremos el Teorema 3.1 con un ejemplo.

Ejemplo 3.6. Sea $L : C[0,1] \to \mathbb{R}$ definido por:

$$L(f) = \int_0^1 f(x)\,dx + f\left(\tfrac{1}{2}\right), \quad f \in C[0,1].$$

Veamos que $L \in C[0,1]^*$.

- **Linealidad.** Sean $f, g \in C[0,1]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tenemos

$$\begin{aligned} L(\alpha f + \beta g) &= \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x)\,dx + (\alpha f + \beta g)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \alpha \int_0^1 f(x)\,dx + \beta \int_0^1 g(x)\,dx \ + \alpha f\left(\frac{1}{2}\right) + \beta g\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \alpha \int_0^1 f(x)\,dx + f\left(\frac{1}{2}\right)\Bigg) + \beta \left(\int_0^1 g(x)\,dx \ + g\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \alpha L(f) + \beta L(g). \end{aligned}$$

  Por lo tanto L es lineal.

- **Continuidad.** Sea $f \in C[0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned} |L(f)| &= \left| \int_0^1 f(x)\,dx \ + f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| + \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \ + \|f\|_\infty \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot (1-0) \ + \|f\|_\infty \\ &= 2\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Queremos probar que $L(f) = \int_0^1 f\,dg$, para todo $f \in C[0,1]$, donde $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ es dada por

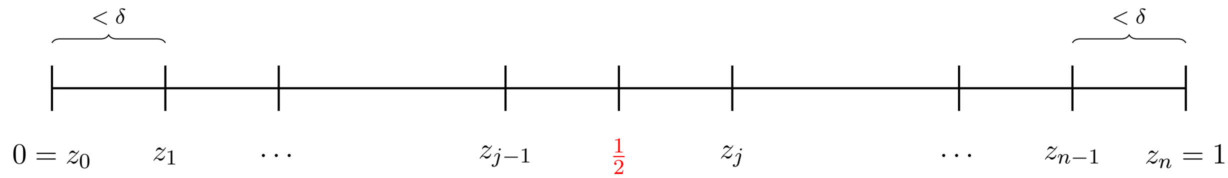
$$g(x) = x + H\left(x - \tfrac{1}{2}\right), \quad x \in [0,1],$$

y H es la **función escalón de Heaviside**:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

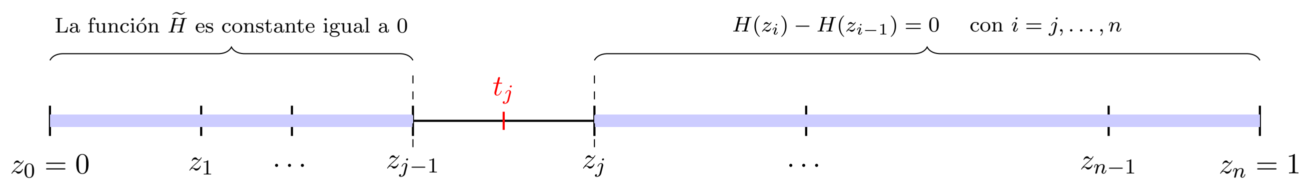
Para esto veamos primero que$\int_0^1 f\,d\widetilde{H} = f\left(\frac{1}{2}\right)$, donde $\widetilde{H} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{H}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$

Al ser f continua en $\frac{1}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que si $t \in [0,1]$ y $|t - \frac{1}{2}| < \delta$, entonces $|f(t) - f(\frac{1}{2})| < \varepsilon$. Sea $P_\varepsilon = \{0 = y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n = 1\}$ una partición de $[0,1]$ tal que $\max_{1 \leq j \leq k}(y_j - y_{j-1}) < \delta$. Tome $P = \{0 = z_0, z_1, \ldots, z_n = 1\}$ una partición de $[0,1]$ que refine a P_ε ($P_\varepsilon \subset P$). Escoja $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\frac{1}{2} \in [z_{j-1}, z_j]$. Como P refina a P_ε, se cumple $\max_{1 \leq i \leq n}(z_i - z_{i-1}) < \delta$. Esto se ilustra en la siguiente figura:



En particular, $[z_{j-1}, z_j] < \delta$, lo que implica que $|t_j - \frac{1}{2}| < \delta$. Por la continuidad de f en $\frac{1}{2}$ tenemos que $|f(t_j) - f\left(\frac{1}{2}\right)| < \varepsilon$. Así,

$$\begin{aligned}
\left|S(f, P, \widetilde{H}) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\big(\widetilde{H}(z_i) - \widetilde{H}(z_{i-1})\big) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\
&= \left|f(t_j) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$



De lo anterior se concluye que

$$\int_0^1 f d\widetilde{H} = f\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
L(f) &= \int_0^1 f(x)dx + f\left(\tfrac{1}{2}\right) \\
&= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)d\widetilde{H}(x) \\
&= \int_0^1 f(x)d\big(x + \widetilde{H}(x)\big) \\
&= \int_0^1 f(x)dg(x).
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $V_g[0,1] = \|L\|$. Sea $P = \{x_0 = 0, \ldots, x_n = 1\}$ una partición de $[0,1]$. Tome $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\frac{1}{2} \in [t_{j-1}, t_j]$. Dado que g es creciente en $[0, \frac{1}{2})$ y en $[\frac{1}{2}, 1]$, entonces

$$\begin{aligned}
V(g, P) &= \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \\
&= \sum_{0 < i \leq j-1} |g(x_i) - g(x_{i-1})| + |g(x_j) - g(x_{j-1})| + \sum_{j < i \leq n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \\
&= g(x_{j-1}) - g(x_0) + x_j - x_{j-1} + 1 + g(x_n) - g(x_j) \\
&= g(x_n) - g(x_0) + 1 = 1 + 1 = 2
\end{aligned}$$

Como P fue arbitrario, concluimos que $V_g[0,1] = 2$.

De la demostración de continuidad de L tenemos $\|L\| \leq 2$. Falta ver que $2 \leq \|L\|$. Para esto considere la sucesión de funciones $f_n \in C[0,1]$ con $\|f_n\|_\infty = 1$ y $n \geq 3$ definidas por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}, \\ 1 - 2n(x - (1 - \frac{1}{n})), & \text{si } 1 - \frac{1}{n} < x < 1. \end{cases}$$

Note que $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$. La expresión en el segundo tramo es lineal. Luego, f_n es continua. Veamos ahora

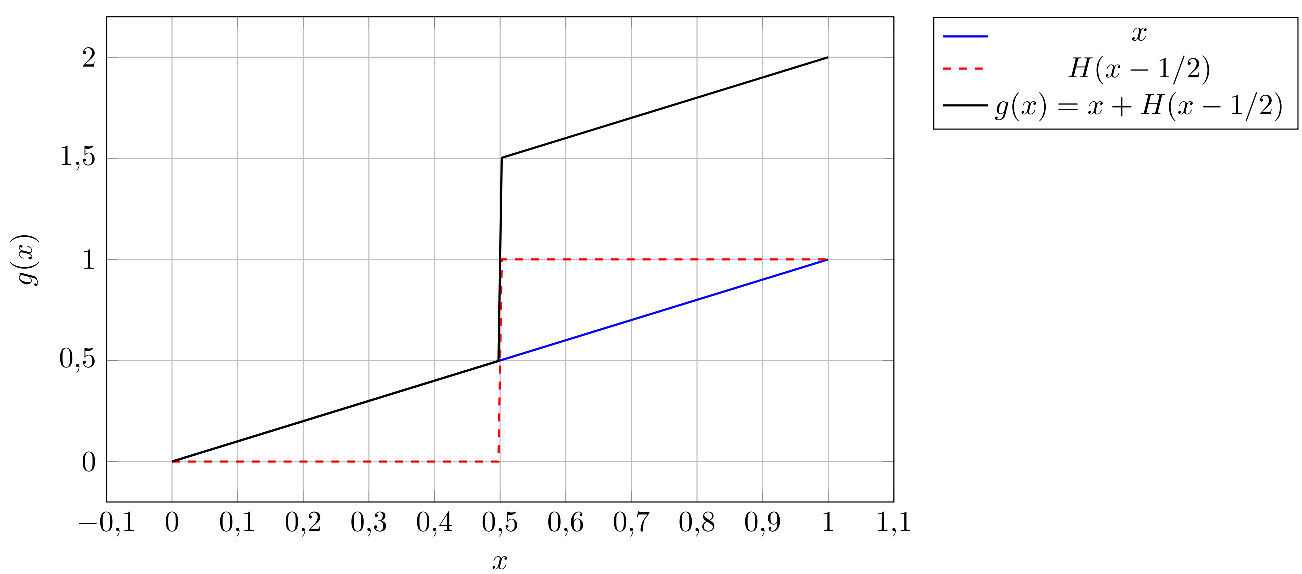
$$\begin{aligned} L(f_n) &= \int_0^1 f_n(x)\,dx + f_n\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f_n(x)\,dx\right) + f_n\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\int_0^{1-\frac{1}{n}} 1\,dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \left[1 - 2n\left(x - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)\right]\,dx\right) + 1 \\ &= \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 0\right) + 1 = 1 - \frac{1}{n} + 1 = 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Para estas funciones:

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Por tanto, como $\|f_n\|_\infty = 1$ para todo $n \geq 3$, tenemos $\|L\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |L(f)| \geq \lim_{n\to\infty} |L(f_n)| = 2$. De ambos resultados concluimos que $\|L\| = 2$. Así, $V_g[0,1] = \|L\|$

Gráfica del ejemplo 3.2



Bibliografía

[1] Fabian, M.; Habala, P.; Hájek, P.; Montesinos, V; Zizler, V. Banach space theory. *The basis for linear and nonlinear analysis.* CMS Books Math./Ouvrages Math. SMC Springer, New York, 2011.

[2] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd ed., Wiley, 1999.

[3] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications.* Wiley Classics Lib. John W. & Sons, Inc., New York, 1989.

[4] H. L. Royden y P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, 4th ed., Pearson, 2010.

[5] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd ed., McGraw–Hill, New York, 1991.

[6] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw–Hill, New York, 1976.

[7] A. E. Taylor and D. C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1980.