

Estudio del fenómeno ondulatorio electromagnético como el límite clásico de la propagación de fotones

PRESENTADO POR:
ELKIN ANDRÉS SANTOS SUÁREZ



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2014

Estudio del fenómeno ondulatorio electromagnético como el límite clásico de la propagación de fotones

ELKIN ANDRÉS SANTOS SUÁREZ

TRABAJO DE GRADO

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

DIRECTOR:

Dr. RAFAEL TORRES AMARIS



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
NOVIEMBRE, 2014

Agradecimiento especial a mi director del trabajo el profesor Rafael Torres por su inmensa paciencia, interés y gran disposición por enseñar. Agradecimientos a mi familia y amigos que me apoyaron durante todo mi proceso de formación universitaria.

TABLA DE CONTENIDO

1. Introducción	12
2. Óptica clásica	16
2.1. Principio de Fermat	16
2.2. Principio de Huygens - Fresnel	17
2.2.1. Aproximación de Fresnel	21
2.2.2. Expresión de la aproximación de Fresnel como una transformación de Fourier fraccionaria	22
2.3. Intensidad de un campo de ondas	25
3. Integrales de camino	28
3.1. El propagador	29
3.2. Derivación de la integral de caminos	30
3.3. Límite clásico	36
3.4. Propagador para el oscilador armónico	37
4. Cuantización del campo Electromagnético	43
4.1. Cuantización del campo de modo único	44

4.1.1. Estados número o de Fock	47
5. Discusión	50
5.1. Propagador armónico de Feynman como una TFFr	50
5.2. Integral de caminos de Feynman para los fotones	54
5.3. Evolución de un estado cuántico del campo electromagnético	55
5.4. Modos transversales en la aproximación de Fresnel	58
5.5. Distribución de probabilidad e intensidad	62
6. Conclusiones	67
6.1. Sobre la integral de caminos	67
6.2. Sobre la TFFr y el principio de Huygens	68
6.3. Sobre la cuantización del campo electromagnético	68
Apéndice	70
A. Transformación de Fourier fraccionaria	70
A.1. Representación integral	72
BIBLIOGRAFÍA	74

Lista de Figuras

1.1.	La teoría de la óptica cuántica provee una explicación para virtualmente todos los fenómenos ópticos. Es más general que la óptica electromagnética que contiene a su vez la óptica ondulatoria y la óptica de rayos. . . .	13
1.2.	Tres trayectorias que puede tomar una partícula cuántica para ir de un punto A a uno B	14
2.1.	Principio de Huygens: cada frente de onda está compuesto por un número infinito de fuentes puntuales que se propagan como ondas esféricas . . .	18
2.2.	Geometría de la difracción	20
2.3.	Difracción de Fresnel de un plano \mathcal{A} observado a una distancia D . La esfera \mathcal{S}_α es tangente al plano \mathcal{D} con radio $R_\alpha = -D/\sin^2 \alpha$. La amplitud compleja sobre \mathcal{S}_α está relacionada a la amplitud de campo sobre \mathcal{A} por una TFFr de orden α	23
3.1.	Evolución temporal de un estado	30
3.2.	Discretización del intervalo de tiempo en N subintervalos de longitud Δt	31
3.3.	Izq: visualización de un conjunto de puntos en el espacio de fase que contribuyen a la configuración integral discreta en el tiempo. Der: en el límite continuo, el conjunto de puntos es una curva suave.	32
3.4.	Análisis del límite clásico. Hay interferencia constructiva entre trayectorias cercanas a la clásica (línea gruesa), mientras que las trayectorias muy alejadas tienden a cancelarse debido a los oscilaciones rápidas de $e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}$	37

4.1. Cavity con paredes perfectamente conductoras ubicadas en $z = 0$ y $z = L$. El campo está polarizado en la dirección x	44
5.1. Movimiento armónico en la dirección x para un z cualquiera	57
5.2. Patrones para distintos modos transversales de un láser: modos puros en a. simetría circular, b. simetría cartesiana. [34, Fig. 11-14]	58
5.3. Dos espejos paralelos considerados como aperturas cuando se aplica la integral RS a una cavidad electromagnética	59
5.4. Primeras cinco funciones ($p = 0, 1, 2, 3, 4$) de Hermite-Gauss $H_p(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$	61
5.5. Interferencia fotón por fotón sobre intervalos crecientes de tiempo. Inicialmente la detección de los fotones pone en evidencia el comportamiento corpuscular de la luz (izquierda). Al final, se vislumbra una distribución de máximos y mínimos típico del comportamiento ondulatorio (derecha). <i>European Journal of Physics Education</i> 3:2 , 1-11 (2012).	63
5.6. Distribución de intensidad y probabilidad	65

RESUMEN

TÍTULO: Estudio del fenómeno ondulatorio electromagnético como el límite clásico de la propagación de fotones¹.

AUTOR: Elkin Andrés Santos Suárez².

PALABRAS CLAVE: Difracción, Intensidad, densidad de probabilidad, cuantización del campo, integral de caminos, transformación de Fourier fraccionaria.

DESCRIPCIÓN: En la línea del estudio de la propagación del campo electromagnético clásico y la teoría de la difracción, surge la necesidad de entender un poco más a nivel fundamental la propagación electromagnética. El estudio de los patrones de difracción guardan estrecha relación con la probabilidad de encontrar una partícula cuántica en un punto, siendo la distribución de intensidad y la densidad de probabilidad proporcionales entre sí. En nuestro desarrollo se pretende dar un poco más de claridad a esta relación enfocada en la propagación de fotones como partícula fundamental ligada al campo electromagnético cuantizado. Se observará como existe una relación entre la distribución de intensidad que produce un análisis clásico del fenómeno de propagación electromagnético y la densidad de probabilidad originada de un estudio cuántico de la evolución temporal de los fotones.

Se realiza un paralelismo entre la propagación electromagnética a partir del principio de Huygens-Fresnel; específicamente a partir de la aproximación de Fresnel, y la propagación de fotones a partir de la cuantización del campo electromagnético en una cavidad y su adaptación a las integrales de camino de Feynman. El Hamiltoniano del campo electromagnético cuantizado puede ser entendido como un oscilador armónico cuyas coordenadas canónicas están relacionadas con el campo eléctrico y magnético. Las integrales de camino de Feynman son adaptadas a la propagación de un estado del campo electromagnético cuantizado (fotones) para de esta manera examinar su evolución.

¹Trabajo de Grado.

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Director: Dr. Rafael Torres.

ABSTRACT

TITLE: Study of the electromagnetic wave phenomena as a classical limit of propagation of photons³.

AUTHOR: Elkin Andrés Santos Suárez⁴.

KEYWORDS: Diffraction, Intensity, probability density, field quantization, path integral, fractional Fourier transform.

DESCRIPTION: On the line of the study of the electromagnetic field propagation and diffraction theory, it emerges the need to understand a little bit more as a fundamental level about electromagnetic propagation. The study of diffraction patterns are strongly related with the probability of finding a quantum particle at a particular region, being the intensity distribution and the probability density proportional one another. In our work, we pretend to clear up a little bit more this connection focusing on the propagation of photons as a fundamental particle of the quantization of the electromagnetic field. We will observe how we can establish a proportionality relation between the intensity distributions produced by a classical analysis of the field propagation and the probability density originated from a quantum study of the time evolution of photons.

We developed a parallelism between the field propagation understood from the Huygens-Fresnel principle; specifically from the Fresnel approximation, and the propagation of photons analysed from the quantization of the electromagnetic field in a cavity. The Feynman path integrals will be adapted to wave functions of the electromagnetic field. The Hamiltonian of the quantized field can be understood as a harmonic oscillator which canonical coordinates are related with the electric and magnetic field. Thanks to this we will adapt the Feynman propagator for the harmonic oscillator to photons. Later, we'll see how the fractional Fourier transform can be adjusted to the time evolution of quantum states of the electromagnetic field.

³Bachelor Thesis.

⁴Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Director: Dr. Rafael Torres.

Capítulo 1

Introducción

Son bastante conocidos hoy en día entre la comunidad científica los sucesos históricos que hacen referencia al desarrollo realizado por grandes físicos para explicar la naturaleza de la luz. Durante el siglo XIX, la mayoría de la comunidad científica aceptaba la teoría corpuscular de Newton con la que se podían explicar fenómenos bastante naturales de la luz, como la reflexión o la refracción sobre un material. La óptica de rayos era la teoría usada para tratar de entender el comportamiento de la luz; Pierre de Fermat, por ejemplo, exponía el principio de que la luz viaja a lo largo de la trayectoria en la que se tarda menos tiempo en ir de un punto a otro¹. Sin embargo, nadie esperaba que otra teoría, propuesta por el científico Holandés Christian Huygens, cobraría tanta fuerza tiempo después; una teoría que argumentaba que la luz era una especie de onda en movimiento. Con esta sencilla hipótesis se explicaban fenómenos inexplicables mediante la teoría corpuscular: los fenómenos de difracción e interferencia. La teoría ondulatoria de Huygens se vería aún más afianzada en 1861 gracias a Maxwell y al desarrollo de la óptica electromagnética, en donde la óptica ondulatoria es sencillamente una aproximación escalar de la segunda. Sin embargo, en el momento que la teoría ondulatoria de la luz parecía estar sobre tierra firme, a principios del siglo XX, la teoría corpuscular de la luz fue retomada por los científicos para explicar fenómenos extraños relacionados con la interacción entre la luz y la materia².

En ese momento, la naturaleza de la luz parecía ser un poco más difícil de explicar. En algunos experimentos, la luz se manifiesta como partículas y en otros experimentos

¹En realidad recorre el camino cuyo tiempo es un extremal, ya que en algunos sistemas ópticos la luz recorre el trayecto que tarda más tiempo. [1]

²Siendo el efecto fotoeléctrico de los más famosos. El problema de la radiación de cuerpo negro y el efecto Compton también se incluyen.

exhibe comportamiento ondulatorio. Un ejemplo de esto último es la difracción. El fenómeno de difracción ha sido estudiado en profundidad por los científicos, y es una teoría bastante desarrollada que considera el aspecto ondulatorio de la luz basado en lo que se conoce como el principio de Huygens³. El éxito de la teoría de la difracción se fundamenta en la propagación del campo electromagnético como ondas, y es en este aspecto en especial que centraremos nuestra atención más adelante.

La óptica electromagnética provee el tratamiento más completo de la luz que engloba la **óptica clásica**. Esta abarca la óptica ondulatoria, la cual a su vez encierra la óptica de rayos (Fig. 1.1). Aunque la teoría electromagnética clásica está en la capacidad de proporcionar explicaciones a una gran cantidad de efectos en óptica, esta, no obstante, falla al considerar ciertos fenómenos ópticos. Este inconveniente, que se volvió más evidente a finales del siglo XX, en última instancia llevó a la formulación de una teoría cuántica electromagnética (**electrodinámica cuántica**) que, aludida a fenómenos ópticos, se conoce como **óptica cuántica** [3–7]. La electrodinámica cuántica (QED, por sus siglas en inglés), es más general que la electrodinámica clásica y es hoy aceptada como una teoría capaz de explicar virtualmente la totalidad de fenómenos ópticos conocidos.

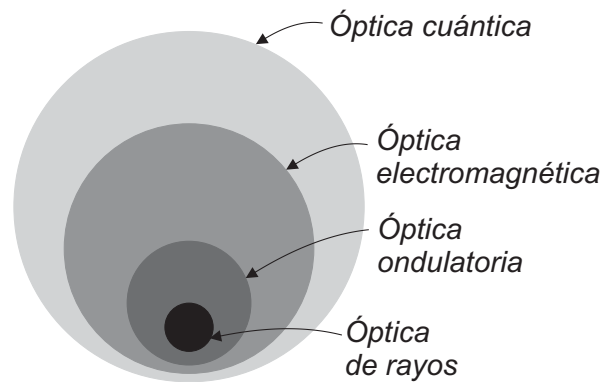


Figura 1.1: La teoría de la óptica cuántica provee una explicación para virtualmente todos los fenómenos ópticos. Es más general que la óptica electromagnética que contiene a su vez la óptica ondulatoria y la óptica de rayos.

El problema que nos impulsa al desarrollo de esta tesis, involucra precisamente la relación indicada anteriormente sobre la equivalencia entre la óptica electromagnética clásica y la óptica cuántica, siendo la primera el límite clásico de la segunda. Se pretende dar un poco más de claridad sobre esta conexión analizando ambos casos

³En un instante dado, sobre una superficie de una onda, cada punto de esta superficie se comporta como una fuente secundaria que reemite la luz. Ver por ejemplo a Goodman [2]

(electromagnético y cuántico) de manera independiente. Desde una perspectiva de “la propagación o evolución de un sistema”, se evidencia el paralelismo que se halla en la propagación del campo electromagnético clásico y la evolución temporal de los estados del campo electromagnético (fotones), mostrando así cómo la densidad de probabilidad que genera un análisis cuántico del fenómeno es correspondiente con la distribución de intensidades que origina el estudio clásico de la propagación del campo electromagnético.

La evolución temporal de una función de onda en la mecánica cuántica se encuentra co-dificada en el llamado propagador de Feynman $K(x, x'; t - t')$, conocido también en ocasiones como amplitud de transición o función de Green. Si conocemos dicha función en un tiempo inicial t' , $\psi(x', t')$, la función de onda en un tiempo posterior puede calcularse a partir de la convolución

$$\psi(x, t) = \int K(x, x'; t - t')\psi(x', t') dx' . \quad (1.0.1)$$

Se hace mención fundamentalmente a la interpretación de Feynman de la propagación de una partícula cuántica⁴, donde se introduce la noción de superposición de trayectorias. Richard Feynman [8], nobel de Física en 1965, construyó una descripción alternativa de la mecánica cuántica en términos de las integrales de camino basadas en una sugerencia originada por Dirac [9]. La formulación de las integrales de camino en la la mecánica cuántica es una descripción de la teoría cuántica, la cuál generaliza el principio de acción de la mecánica clásica. Esta remplaza la noción de una única trayectoria para un sistema con una suma, o integral funcional, sobre un número infinito de posibles trayectorias para calcular una amplitud cuántica (Fig. 1.2).

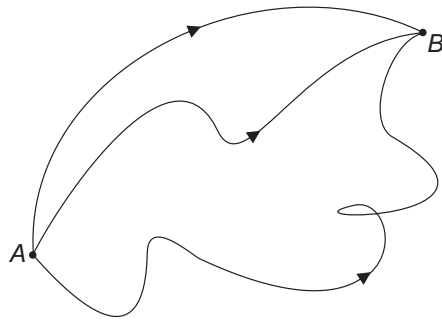


Figura 1.2: Tres trayectorias que puede tomar una partícula cuántica para ir de un punto A a uno B

⁴En nuestro caso se trata de fotones

El tratamiento de las integrales de camino se aplica a experimentos de difracción, como por ejemplo, el experimento de una o doble rendija, el cual ilustra la naturaleza corpuscular de eventos individuales y la naturaleza ondulatoria de un promedio estadístico de eventos repetidos [10]. En los trabajos de Beau [11, 12] y Fanaro [13] se muestra cómo las integrales de camino pueden ser usadas para explicar los patrones de interferencia que produce la difracción de electrones. Otros trabajos interesantes que involucran lo anterior se pueden encontrar en [14, 15]

Nuestro propósito consiste en la aplicación del propagador de Feynman al estudio de los fotones, de esta manera examinamos la evolución temporal de un estado cuántico del campo electromagnético con la intención de averiguar su comportamiento y realizar una correspondencia con el modelo clásico. Para abordar nuestro asunto, iniciaremos presentando en el siguiente Capítulo aspectos preliminares de la óptica clásica, haciendo especial énfasis en el principio de Huygens-Fresnel y la teoría de la difracción⁵, en particular se estudia la aproximación de Fresnel y cómo ésta puede ser interpretada mediante una transformación de Fourier fraccionaria. En el Capítulo 3 presentamos la noción de evolución temporal de un sistema cuántico e introducimos las integrales de camino de Feynman como herramienta idónea para nuestro desarrollo, haciendo hincapié en la interpretación física que permite la deducción de la ecuación 3.2.23, en particular se estudia el propagador para un oscilador armónico, que será de especial interés ya que nos permitirá una adaptación a estados cuantizados del campo electromagnético. Luego, en el Capítulo 4 se explica el formalismo básico de la cuantización del campo electromagnético, que puede ser entendido de manera equivalente a un oscilador armónico y se detalla en particular los estados número o estados de Fock. En el Capítulo 5 se desarrolla nuestra hipótesis, se muestra cómo el propagador de Feynman puede ser aplicado a los fotones y cómo esta propagación puede ser entendida a través de una transformación de Fourier fraccionaria para luego exponer la equivalencia entre los patrones de intensidades relacionados con la amplitud del campo y la densidad de probabilidad relacionada con la amplitud de probabilidad. Finalmente, en el Capítulo 6, presentamos las conclusiones de nuestro trabajo.

⁵En esencia la teoría de la difracción no es más que el estudio de la propagación del campo electromagnético.

Capítulo 2

Óptica clásica

En este capítulo se mostrarán algunos aspectos preliminares a la teoría moderna de la luz. Se discutirá la interpretación física contenida en el principio de Fermat, el cual, en su forma moderna, indica que un rayo de luz para ir de un punto a otro debe tomar una longitud de camino óptico que es estacionario con respecto a variaciones de dicha trayectoria. Luego pasaremos a analizar los aspectos más importantes de la teoría escalar de la difracción. El principio de Huygens-Fresnel funciona como una herramienta poderosa en el estudio de la propagación del campo electromagnético y es principalmente de este aspecto del que nos aprovecharemos para el desarrollo de esta tesis.

Centraremos nuestra atención esencialmente en ciertas aproximaciones de la teoría general, especialmente en la aproximación de Fresnel la cual observaremos se puede escribir en la forma de una transformación de Fourier fraccionaria. Finalmente, se introduce el concepto de intensidad de una onda, la cual está ligada estrechamente al cálculo de los patrones de difracción.

2.1. Principio de Fermat

En óptica, el principio de Fermat o principio de mínima acción es el que explica que la trayectoria tomada por un rayo de luz entre dos puntos es aquella trayectoria que puede ser atravesada en el menor tiempo (o mayor en algunos casos). Este principio describe la trayectoria que puede tomar la luz dentro de lo que se abarca la óptica de rayos. Sin embargo, esta versión del principio no es general; una definición más moderna

consiste en que el trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es estacionario respecto a posibles variaciones de trayectoria.

Esto quiere decir que si se expresa el trayecto recorrido por la luz entre dos puntos A y B por medio de un funcional llamado longitud de camino óptico definida como $\mathcal{L}_{CO}[n(\mathbf{r})]$ la trayectoria real de la luz seguirá un camino extremal respecto a esta funcional:

$$t = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{v_i}, \quad (2.1.1)$$

$$t = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n n_i s_i \quad (2.1.2)$$

donde s_i y v_i son la longitud de la trayectoria y la velocidad respectivamente asociada con cada una de las i contribuciones. La sumatoria es conocida como la **longitud de camino óptico** tomada por el rayo. Claramente, para un medio inhomogéneo, donde n es función de la posición, la sumatoria se convierte en la integral:

$$\mathcal{L}_{CO} = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds \quad (2.1.3)$$

y por lo tanto

$$\delta \mathcal{L}_{CO} = \delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0. \quad (2.1.4)$$

La óptica de rayos presenta una descripción bastante clara y precisa de los fenómenos ópticos más fundamentales. Más adelante se retomará nuevamente la noción de trayectoria de la luz, analizando un poco más a fondo este concepto a nivel cuántico y observando como se puede interpretar que la luz, para trasladarse de un punto a otro, toma todas las trayectorias posibles (Sec. 3.2).

2.2. Principio de Huygens - Fresnel

En 1678, el gran físico Holandés Christian Huygens (1629-1695) escribió un tratado llamado *Traité de la Lumière* sobre la teoría ondulatoria de la luz. En este tratado, él propuso que cada punto, al cual una perturbación de la luz llega, se convierte en una fuente de ondas esféricas; la suma de estas ondas secundarias determina la forma

de la onda en un tiempo subsecuente. Una ilustración de esta idea, conocida como el principio de Huygens, es mostrada enseguida (Fig. 2.1).

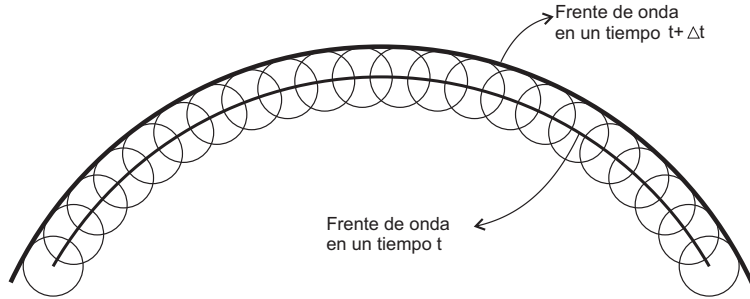


Figura 2.1: Principio de Huygens: cada frente de onda está compuesto por un número infinito de fuentes puntuales que se propagan como ondas esféricas

Huygens fue capaz de proveer una explicación cualitativa de la propagación de una onda esférica y una onda plana, y de derivar las leyes de reflexión y refracción usando este principio, pero no pudo explicar las desviaciones de la propagación rectilínea que ocurre cuando la luz tropezaba con bordes, aperturas o pantallas, comunmente conocido como efectos de difracción. La posibilidad de explicar los efectos de difracción con base en una teoría ondulatoria no fue advertida hasta alrededor del año 1818. En ese año, Fresnel mostró que la difracción podía ser explicada mediante la construcción de Huygens junto con el principio de interferencia.

El principio de Huygens-Fresnel es por hoy la base de la teoría de la difracción de las ondas electromagnéticas. Es consecuencia de las ecuaciones de Maxwell y se puede expresar en una forma matemática rigurosa¹.

En esta sección nos centraremos en una de las formulaciones matemáticas del principio de Huygens-Fresnel, conocida como la primera solución Rayleigh-Sommerfeld (RS) [2], que puede ser expresada matemáticamente como sigue:

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos \theta ds \quad (2.2.1)$$

donde θ es el ángulo entre un vector normal al plano de difracción y el vector \vec{r}_{01} que apunta de P_1 a P_0 . (ver fig. 2.2). $U(P_0)$ y $U(P_1)$ son funciones complejas de posición (algunas veces llamadas *fasores*)

$$U(P) = A(P)e^{-i\phi(P)}. \quad (2.2.2)$$

¹En las referencias [2,16] se hace una síntesis de los trabajos de Kirchhoff, Rayleigh y Sommerfeld.

Estas amplitudes complejas cumplen

$$u(P, t) = \Re\{U(P) \exp(-i2\pi\nu t)\}, \quad (2.2.3)$$

siendo $u(P, t)$ la solución de la ecuación de onda que expresa el campo escalar para una onda monocromática.

Interpretando físicamente esta integral, se entiende que el campo observado $U(P_0)$ es una superposición de ondas esféricas divergente $\exp(ikr_{01})/r_{01}$ provenientes de fuentes secundarias localizadas en cada punto P_1 en una abertura Σ . La fuente secundaria en P_1 tiene las siguientes propiedades:

1. Tiene una amplitud compleja que es proporcional a la amplitud de excitación $U(P_1)$ en el punto correspondiente.
2. Tiene una amplitud que es inversamente proporcional a λ , o directamente proporcional a la frecuencia óptica ν .
3. Tiene una fase que modifica a la fase de la onda incidente en $\pi/2$, como lo indica el factor $1/i$.
4. Cada fuente secundaria tiene un factor de oblicuidad $\cos\theta$.

Nuestra atención se traslada ahora a ciertas aproximaciones de la teoría general, que permiten que los cálculos de los patrones de difracciones se reduzcan comparativamente a manipulaciones matemáticas más simples. Para el desarrollo de esta tesis, nos centramos especialmente en la aproximación de Fresnel; una aproximación de la ecuación RS (Eq. 2.2.1) que puede ser aplicada a la propagación de las ondas en el campo mediano².

Antes de introducir las aproximaciones al principio de Huygens-Fresnel, será de mucha ayuda establecer primero el principio en una forma más explícita para el caso de coordenadas rectangulares. Como se muestra en Fig. 2.2, se asume que la apertura de difracción yace sobre el plano (ξ, η) , y es iluminado en la dirección z positiva, por ejemplo por una onda plana. Se calculará el campo a lo largo del plano (x, y) , el cual es paralelo al plano (ξ, η) y está a una distancia normal z . El eje z corta ambos planos en sus orígenes.

²En nuestro trabajo se define campo mediano como el régimen donde la aproximación de Fresnel es válido; distancias mucho mayores a la longitud de onda. Distancias del orden de la longitud de onda se entienden como campo cercano y el límite de Fraunhofer como campo lejano.

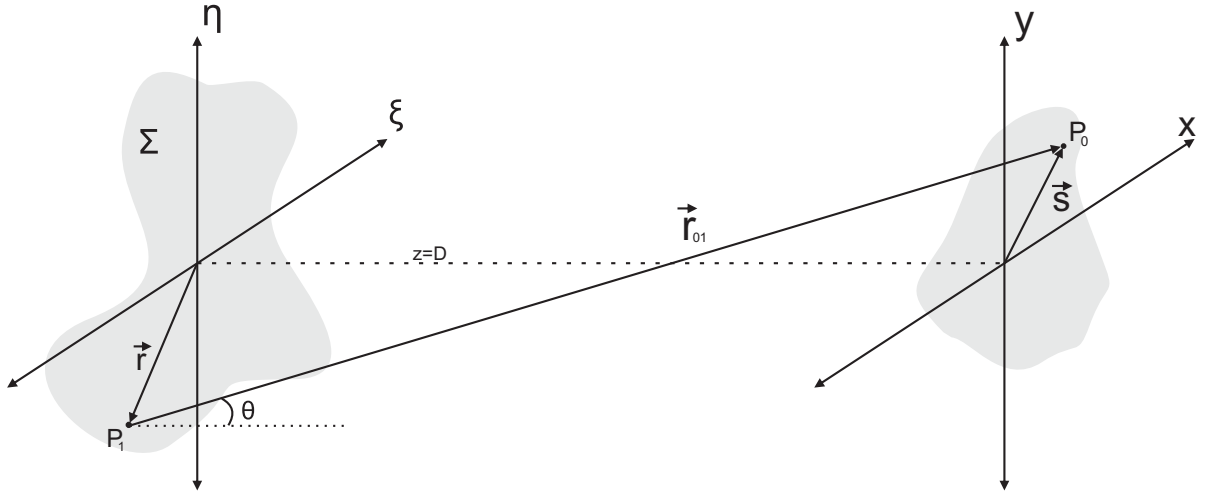


Figura 2.2: Geometría de la difracción

El principio de Huygens-Fresnel, a partir de la Eq. 2.2.1 es

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos \theta \, ds. \quad (2.2.4)$$

El término $\cos \theta$ está dado exactamente por

$$\cos \theta = \frac{z}{r_{01}}, \quad (2.2.5)$$

de esta manera el principio de Huygens-Fresnel puede ser reescrito como

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}^2} \, d\xi d\eta, \quad (2.2.6)$$

donde la distancia r_{01} está dada por

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (2.2.7)$$

Han habido únicamente dos aproximaciones para alcanzar esta expresión. Una es la aproximación inherente a la teoría escalar. La segunda es, que consideramos que la distancia de observación está muchas longitudes de onda lejos de la abertura, $r_{01} \gg \lambda$. Ahora se realizará la aproximación correspondiente a la difracción de Fresnel.

2.2.1. Aproximación de Fresnel

Para reducir el principio de Huygens-Fresnel a una expresión más sencilla y útil, se introducirán aproximaciones para la distancia r_{01} entre P_1 y P_0 . Las aproximaciones están basadas en la expansión binomial de la raíz de la ecuación anterior. Sea b un número menor que la unidad, y considere la expresión $\sqrt{1+b}$. La expansión binomial de la raíz cuadrada está dada por

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots, \quad (2.2.8)$$

donde el número necesario para una buena precisión depende de la magnitud de b .

Para aplicar la expansión binomial a nuestro problema, se factoriza z fuera del radical, y se consideran los términos $\left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2$ como el valor correspondiente para b ,

$$r_{01} = z\sqrt{1 + \left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2}, \quad (2.2.9)$$

$$r_{01} \approx z\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2\right]. \quad (2.2.10)$$

Para el r_{01} que aparece en el denominador de la ecuación 2.2.6 la aproximación a realizar es $r_{01} \approx z$, mientras que para el r_{01} que aparece en la exponencial la aproximación será $r_{01} \approx z\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2\right]$. La razón de esto, es que para el r_{01}^2 que aparece en el denominador, el error introducido al eliminar todos los términos menos z es aceptablemente pequeño. Sin embargo, para el r_{01} que aparece en el exponente, los errores introducidos son mucho más críticos. Primero, están siendo multiplicados por un número bastante grande k y segundo un pequeño cambio en la fase puede cambiar el valor de la exponencial significativamente. Por esta razón se mantienen ambos términos de la aproximación binomial en el exponente. Así, la expresión resultante para el campo en (x, y) se convierte en

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{ikz\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2\right]}}{z^2} d\xi d\eta,$$

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{ik\left[z + \frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2\right]}}{z^2} d\xi d\eta,$$

$$U(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]}}{z} d\xi d\eta,$$

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) e^{\frac{ik}{2z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} d\xi d\eta. \quad (2.2.11)$$

Teniendo en cuenta que $\vec{s} = x\hat{i} + y\hat{j}$, $\vec{r} = \xi\hat{i} + \eta\hat{j}$ y $k = 2\pi/\lambda$, la expresión anterior se puede escribir como

$$U(\vec{s}) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{[\frac{i\pi}{\lambda z}s^2]} \int_{\mathbb{R}^2} U(\vec{r}) e^{[\frac{i\pi}{\lambda z}r^2]} e^{[-\frac{2i\pi}{\lambda z}\vec{s}\cdot\vec{r}]} d\vec{r}. \quad (2.2.12)$$

Nos referimos a ambas formas del resultado, 2.2.11 y 2.2.12, como la *integral de difracción de Fresnel*. Cuando esta aproximación es válida, se dice que el observador está en el régimen de difracción de Fresnel, o lo que es equivalente, en el *campo mediano* de la apertura.

Una interesante relación entre la fórmula de la difracción de Fresnel y una entidad conocida como la “transformación de Fourier fraccionaria” (ver apéndice A) ha sido presentada ultimamente (ver refs. [17–21]). Un desarrollo bastante atractivo de esto lo desarrolla Pellat-Finet en el libro [20]. A continuación se discutirán algunos aspectos interesantes relacionados a la expresión de la difracción de Fresnel y la transformación de Fourier Fraccionaria.

2.2.2. Expresión de la aproximación de Fresnel como una transformación de Fourier fraccionaria

Existe una relación mediante la transformación de Fourier fraccionaria (TFFr) entre las distribuciones de amplitud de la luz sobre dos superficies esféricas con un radio y separación determinadas. La propagación de la luz puede ser vista como un proceso continuo de transformaciones fraccionarias de Fourier. A medida que la luz se propaga, su distribución de amplitud evoluciona a través de transformaciones fraccionarias cuyo orden aumenta a medida la distancia a la que se ha propagado el campo es mayor. Este resultado permite proponer a la transformación de Fourier fraccionaria como una herramienta para el análisis y descripción de sistemas ópticos compuestos por lentes delgadas y secciones de espacio libre. La noción de la transformación de Fourier de orden fraccional que usaremos en nuestro trabajo, será la introducida por Namias [22] en 1980 y completada por Mc.Bride y Kerr [23] en 1987.

Para mostrar la relación que existe entre la TFFr y la difracción de Fresnel, seguiremos el desarrollo propuesto por Pellat-Finet en [19]. Si f es una función de variable

vectorial $\vec{r} = (x, y)$, y α es un número complejo, la transformación de Fourier fraccionaria de orden α de f está dada por [22]

$$\mathcal{F}_\alpha[f](\vec{s}) = \frac{ie^{-i\alpha}}{2\pi \sin \alpha} e^{-\frac{i}{2}s^2 \cot \alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i}{2}r^2 \cot \alpha} e^{\frac{i\vec{r}\cdot\vec{s}}{\sin \alpha}} f(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (2.2.13)$$

donde \vec{s} es también una variable 2-dimensional, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y $d\vec{r} = dx dy$. La transformación de Fourier estándar es $\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}$, y \mathcal{F}_0 es el operador identidad.

La Eq. 2.2.13 se asemeja fuertemente a la expresión matemática de la difracción de Fresnel (2.2.12). Más precisamente, sea \mathcal{A} una pantalla plana difractante y O el origen de un sistema de coordenadas cartesiano en \mathcal{A} . Un punto M en \mathcal{A} está localizado por un vector 2-dimensional $\vec{r} = OM$. Sea \mathcal{D} una pantalla plana a una distancia D de \mathcal{A} (Fig. 2.3), sea O' una coordenada en el origen, y sea \vec{s} el vector que representa un punto en \mathcal{D} (la distancia se considera positiva si es tomada en la dirección de propagación de la luz). La pantalla se ilumina con una onda monocromática plana y la propagación se da en un medio isótropo y homogéneo; la correspondiente longitud de onda es λ . Si $U_A(\vec{r})$ representa la amplitud del campo complejo en el punto \vec{r} de \mathcal{A} y $U_D(\vec{s})$ la amplitud del campo difractado en el punto \vec{s} de \mathcal{D} , entonces

$$U_D(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda D} e^{-\frac{i\pi}{\lambda D} s^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i\pi}{\lambda D} r^2} e^{\frac{2i\pi}{\lambda D} \vec{r}\cdot\vec{s}} U_A(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (2.2.14)$$

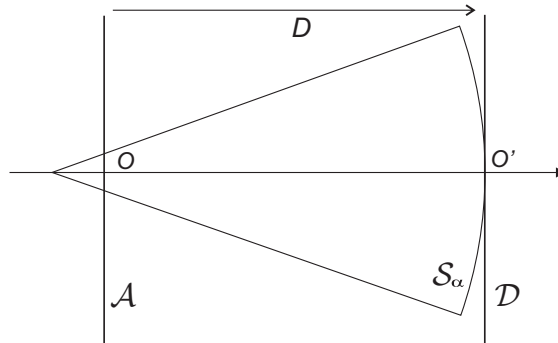


Figura 2.3: Difracción de Fresnel de un plano \mathcal{A} observado a una distancia D . La esfera \mathcal{S}_α es tangente al plano \mathcal{D} con radio $R_\alpha = -D/\sin^2 \alpha$. La amplitud compleja sobre \mathcal{S}_α está relacionada a la amplitud de campo sobre \mathcal{A} por una TFFr de orden α .

Nótese que la ecuación 2.2.14 es ligeramente distinta a la ecuación 2.2.12, pero una equivalencia es fácilmente obtenible al remplazar z con $-z$. Aún más, se debe notar que el factor e^{ikz} ha sido despreciado. Este factor está relacionado con el tiempo de

propagación de \mathcal{A} a \mathcal{D} ; puede ser omitido si el origen del tiempo en \mathcal{D} está desplazado con respecto al origen del tiempo sobre el emisor \mathcal{A} [20, Cap. 3.4, p. 24].

La gran similitud entre las ecuaciones 2.2.13 y 2.2.14 nos lleva a suponer que la transformación de Fourier de orden fraccional puede ser una herramienta matemática que se adecúa a la expresión matemática de la difracción de Fresnel³. Esta explicación debería ser, después de todo, lo más probable considerando que un importante caso previo existe: La difracción de Fraunhofer puede ser descrita a través de la transformación de Fourier estándar.

Para mostrar que las ecuaciones 2.2.13 y 2.2.14 están estrechamente relacionadas debemos usar variables y funciones reducidas porque la transformación de Fourier relaciona variables conjugadas (frecuencias espaciales). Eligiendo las variables y funciones reducidas apropiadas, sea

$$\vec{\rho} = \left(\frac{2\pi}{\lambda D} \right)^{\frac{1}{2}} K \vec{r}, \quad (2.2.15)$$

$$\vec{\sigma} = \left(\frac{2\pi}{\lambda D} \right)^{\frac{1}{2}} L \vec{s}, \quad (2.2.16)$$

donde K y L son dos constantes que determinaremos enseguida. Con lo anterior, se escriben las amplitudes de los campos por las amplitudes reducidas

$$V_A(\vec{\rho}) = U_A \left(\sqrt{\frac{\lambda D}{2\pi}} \frac{\vec{\rho}}{K} \right), \quad (2.2.17)$$

$$V_D(\vec{\sigma}) = U_A \left(\sqrt{\frac{\lambda D}{2\pi}} \frac{\vec{\sigma}}{L} \right). \quad (2.2.18)$$

Así, la ecuación 2.2.14 se convierte en

$$V_D(\vec{\sigma}) = \frac{i}{2\pi K^2} e^{-\frac{i\sigma^2}{2L^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i\rho^2}{2K^2}} e^{i\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{\sigma}}{KL}} V_A(\rho) d\vec{\rho}. \quad (2.2.19)$$

Una comparación con la Eq. 2.2.13 conduce a elegir $K^2 = \tan \alpha$ y $L = (\cos \alpha \sin \alpha)^{1/2}$, con $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. La ecuación 2.2.19 es ahora

$$V_D(\vec{\sigma}) = e^{i\alpha} \cos \alpha e^{-\frac{i}{2}\sigma^2 \tan \alpha} \mathcal{F}_\alpha[V_A](\vec{\sigma}). \quad (2.2.20)$$

³En los trabajos de Pellat-Finet [19–21] se puede profundizar más sobre el uso de la transformación de Fourier fraccionaria en la difracción de Fresnel.

El factor $e^{-\frac{i}{2}\sigma^2 \tan \alpha}$ puede ser compensado si, en lugar de observar el campo en el plano \mathcal{D} , se observa sobre una esfera \mathcal{S}_α tangente al plano \mathcal{D} de radio $R_\alpha = \frac{-D}{\sin^2 \alpha}$ (fig. 2.3). La Eq. 2.2.20 se expresa ahora

$$V_S(\vec{\sigma}) = e^{i\alpha} \cos \alpha \mathcal{F}_\alpha[V_A](\vec{\sigma}). \quad (2.2.21)$$

De esta manera, la amplitud de campo en \mathcal{S}_α es la transformación de Fourier fraccionaria de orden α de la amplitud de campo en \mathcal{A} .

A una distancia D ($D > 0$) existe un número infinito de esferas donde la transformación de Fourier fraccionaria puede ser observada. Si \mathcal{S} es una esfera con radio R ; la correspondiente transformación de Fourier fraccionaria tiene un orden α tal que $\sin^2 \alpha = -D/R$, lo cual es posible, para valores reales de α , solo si $R \leq -D$.

Se debe notar que este resultado presenta la expresión de la propagación del campo a través de la transformación de Fourier fraccionaria en dos dimensiones, en una dimensión la constante multiplicativa de la TFFr es diferente [23] y por lo tanto la formulación cambia ligeramente⁴.

En otros trabajos [17, 18], se alude que la transformación de Fourier fraccionaria se encuentra presente para varios casos en donde exista alguna simetría, por ejemplo entre esferas, entre planos, esferas a planos o viceversa. La TFFr entre superficies planas separados por una distancia l tienen distribuciones de entrada y de salida (\hat{p}_{in} y \hat{p}_{out} respectivamente) relacionados por coordenadas unidimensionales que se expresan de acuerdo con [17, Eq. 34] como

$$\hat{p}_{out}(u) = e^{ikl} e^{-i\frac{\alpha}{2}} \mathcal{F}^\alpha[\hat{p}_{in}](u). \quad (2.2.22)$$

Lo que significa que la distribución de salida es esencialmente la transformada de Fourier fraccionaria de orden α de la distribución de entrada.

2.3. Intensidad de un campo de ondas

Cuando hablamos de la cantidad de luz que ilumina una superficie, nos referimos a algo llamado la **intensidad del campo**⁵, denotado por I —la **energía promedio**

⁴El procedimiento en una dimensión es similar al realizado ya que lo único que varía realmente es la constante de la TFFr. El artículo [17] muestra dicha equivalencia en una dimensión.

⁵Por acuerdo internacional, últimamente el término ‘intensidad’ está siendo remplazado paulatinamente por el de ‘irradiancia’. Durante el desarrollo de este trabajo se usaran ambos términos de manera indistinta.

por unidad de área. Cualquier clase de detector de nivel de luz tiene una ventana de entrada que admite energía radiante a través de un área fija A . La dependencia en el tamaño de esta ventana en particular es removida al dividir la energía total por A . Además, debido a que la potencia que llega no puede ser medida instantáneamente, el detector debe integrar el flujo de energía sobre un tiempo finito, T . Esta eliminación temporal presenta un resultado altamente práctico, uno que corresponde a la energía promedio por unidad de área por unidad de tiempo, esto es, I .

El valor de la magnitud del promedio temporal del vector de Poynting, simbolizado $\langle S \rangle_T$, es una medida de I , donde el vecotr de Poynting, \vec{S} , está definido como

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.3.1)$$

Es fácil notar que para un medio isótropo, los campos escalares monocromáticos están definidos como

$$\vec{E} = \Re\{\vec{E}_0 \exp[-i(2\pi\nu t - \vec{k} \cdot \vec{r})]\}, \quad (2.3.2)$$

$$\vec{B} = \Re\{\vec{B}_0 \exp[-i(2\pi\nu t - \vec{k} \cdot \vec{r})]\}, \quad (2.3.3)$$

y por lo tanto la irradiancia instantánea es

$$I \equiv \langle S \rangle_T = \frac{c\epsilon_0}{2} |\vec{E}_0|^2, \quad (2.3.4)$$

la cual es independiente del tiempo, coincidiendo así con la irradiancia promedio.

Relacionando el campo electrico con la notación para el campo escalar complejo $U(P)$ usado anteriormente para explicar la difracción, podemos definir la *intensidad* de una onda escalar monocromática en un punto P como el cuadrado de la magnitud de la representación compleja $U(P)$ de la perturbación,

$$I(P) = C |U(P)|^2, \quad (2.3.5)$$

Donde C es la constante que acompaña a la expresión⁶.

Cuando una onda no es perfectamente monocromática, pero tiene una banda angosta, una sencilla generalización del concepto de intensidad está dada por

$$I(P) = C \langle |u(P, t)|^2 \rangle, \quad (2.3.6)$$

donde los brackets significan un promedio temporal. En algunos casos el concepto de *intensidad instantánea* puede ser útil, definida como

$$I(P, t) = C |u(P, t)|^2. \quad (2.3.7)$$

⁶En adelante tomaremos $|U(P)|^2$ como la cantidad correspondiente para el cálculo de la intensidad.

Cuando se calcula un patrón de difracción, generalmente se centra la mirada en la intensidad de dicho patrón como la cantidad que se desea encontrar.

Capítulo 3

Integrales de camino

Este capítulo pretende mostrar el funcionamiento de las Integrales de camino. Se estudia en primer lugar la concepción del propagador como elemento que permite la evolución de un sistema de un estado inicial a uno final para luego introducir el propagador de Feynman, también conocido como amplitud de transición. La formulación mediante integrales de camino de la mecánica cuántica es un enfoque en que las relaciones fundamentales se derivan utilizando la noción de suma sobre historias, publicada por Richard Feynman en 1948 [8]. Consiste en una formulación no relativística y equivalente a la ecuación de Schrödinger y la mecánica matricial de Heisenberg, y que permite abordar algunos problemas de forma más simple.

Se mostrará la derivación de la integral de camino y se observará su estrecha relación con la cantidad conocida como la acción en mecánica clásica, se presta especial atención a la interpretación de estas integrales y de cómo la noción de superposición de trayectorias es introducida. El observable básico de este enfoque de mecánica cuántica es la probabilidad de que una partícula se propague entre dos puntos a y b en un tiempo dado T . Mediante la integral de caminos, esta cantidad es calculada asignando una amplitud a cada trayectoria que une ambos puntos en ese tiempo para luego sumarlas mediante una integral.

Se analizarán las consecuencias físicas de la expresión calculada, especialmente su correspondencia con la teoría clásica en el límite clásico ($\hbar \rightarrow 0$). Finalmente, en beneficio de nuestro desarrollo, se calcula la expresión de la amplitud de transición para el oscilador armónico cuántico del cual tomaremos ventaja más adelante.

3.1. El propagador

Un propagador $K(xt; x't')$ nos representa la amplitud de probabilidad de que si un sistema se encuentra en la posición y tiempo (x', t') , en un tiempo posterior se encontrará en una posición y tiempo (x, t) . Si el sistema se encuentra en el punto (x', t') con una amplitud de probabilidad $\Psi(x', t')$ entonces la amplitud de probabilidad de que el sistema se halle en el punto (x, t) , $\Psi(x, t)$, está dada por

$$\Psi(x, t) = \int K(xt, x't')\Psi(x', t') d^3x', \quad (3.1.1)$$

donde la amplitud de probabilidad es la suma de todas las amplitudes de probabilidad, $K(xt, x't')\Psi(x', t')$, de que el sistema parta de un estado inicial $(x't')$ con una amplitud de probabilidad $\Psi(x', t')$ y llegue al estado final (xt) .

La ecuación integral 3.1.1 describe la evolución de cualquier función de onda $\Psi(x, t)$ y se puede mostrar que esta función de onda es también solución de la ecuación de Schrödinger: $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\Psi(x, t) + V(x, t)\Psi(x, t) = i\hbar\partial_t\Psi(x, t)$. Para una prueba de la equivalencia entre ambas formulaciones ver [8, 9].

En mecánica cuántica la amplitud de probabilidad $\langle x, t|x', t' \rangle$ permite que $\psi(x', t')$ evolucione temporal y espacialmente en $\psi(x, t)$. Recordando la idea de evolución temporal, se elige el tiempo inicial del estado de una partícula por t' y entonces consideramos la evolución del estado para un tiempo t posterior, como se muestra en la figura 3.1. Esto es, la amplitud de transición está dada por

$$\langle x, t|x', t' \rangle = \langle x|U(t-t')|x' \rangle = \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t')}|x' \rangle, \quad (3.1.2)$$

donde $\hat{U}(t-t')$ es, de forma usual, el operador evolución temporal, y el Hamiltoniano \hat{H} que se asume, es independiente del tiempo¹ y es, en general, una función de los operadores de posición y momento $\hat{H}(\hat{p}, \hat{x})$. Para el caso unidimensional

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}). \quad (3.1.3)$$

Una vez conocida la amplitud, Eq. 3.1.2, podemos usarla para determinar como cualquier estado $|\psi\rangle$ evoluciona en el tiempo, ya que es posible escribir el estado $|\psi\rangle$

¹Para estudiar un sistema cuántico, inicialmente se resuelve la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para luego analizar su evolución temporal a través del propagador.

como una superposición de estados propios de posición

$$\begin{aligned}
 \langle x|\psi(t)\rangle &= \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t')}|\psi(t')\rangle, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t')}|x'\rangle \langle x'|\psi(t')\rangle, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x, t|x', t'\rangle \langle x'|\psi(t')\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{3.1.4}$$

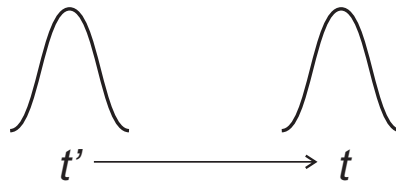


Figura 3.1: Evolución temporal de un estado

La amplitud $\langle x, t|x', t'\rangle$ que aparece en la anterior integral, en la mecánica ondulatoria se conoce como propagador, pues permite determinar cómo un estado arbitrario se propaga con el tiempo. En su trabajo, Feynman desarrolló una forma, cuanto menos curiosa, de expresar el propagador de un sistema. A continuación se discuten las características del propagador de Feynman y su interpretación.

3.2. Derivación de la integral de caminos

Comenzaremos desarrollando un método bastante sencillo para el cálculo del propagador de Feynman.

Cálculo del propagador, amplitud de transición o función de Green

$$G(x_f, x_i; t) = \langle x_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|x_i\rangle. \tag{3.2.1}$$

Se trabajará en una dimensión por simplicidad. Para resolver la anterior ecuación, resultarán útiles las siguientes fórmulas:

- Resolución del operador identidad

$$\hat{1} = \int |x_k\rangle \langle x_k| dx_k, \quad (3.2.2)$$

$$\hat{1} = \int |p_k\rangle \langle p_k| dp_k, \quad (3.2.3)$$

donde $|x_k\rangle$ y $|p_k\rangle$ representan un conjunto completo de estados propios de posición y momento respectivamente, y $k = 1, \dots, N$ sirve como índice para mantener el rastro de los pasos temporales en los cuales el operador unidad es insertado.

- División del intervalo temporal

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle = \hat{U}(t - t_1) |\Psi(t_1)\rangle = \hat{U}(t - t_1) \hat{U}(t_1) |\Psi(0)\rangle. \quad (3.2.4)$$

Teniendo en cuenta el segundo punto, el operador evolución temporal $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t}$ se puede reescribir

$$\hat{U}(t) = \hat{U}(t/2) \hat{U}(t/2), \quad (3.2.5)$$

por lo tanto el propagador puede ser separado mediante el uso del operador identidad 3.2.2

$$\langle x_f | \hat{U}(t) | x_i \rangle = \int dx \langle x_f | \hat{U}(t/2) | x \rangle \langle x | \hat{U}(t/2) | x_i \rangle. \quad (3.2.6)$$

Podemos continuar más allá dividiendo el intervalo temporal en “piezas muy pequeñas” (fig. 3.2) para finalmente tomar el límite continuo cuando $N \rightarrow \infty$ o $\Delta t \rightarrow 0$ de la siguiente manera

$$\hat{U}(t) = \underbrace{\hat{U}(t/N) \times \hat{U}(t/N) \times \dots \times \hat{U}(t/N)}_{N \text{ veces}}, \quad (3.2.7)$$

en donde se puede considerar que $\Delta t = t/N$ sea “muy” pequeña y $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \frac{t}{N}} \approx 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t$, que corresponde a la expansión en series de Taylor del operador evolución temporal tomado hasta el primer orden.

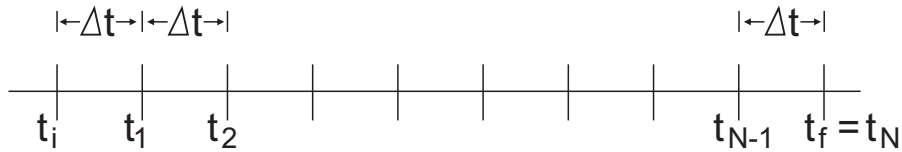


Figura 3.2: Discretización del intervalo de tiempo en N subintervalos de longitud Δt

Lo que se realiza a continuación, es insertar el operador identidad de posición (Eq. 3.2.2) en medio de los operadores evolución temporal de la anterior ecuación y de esta manera nuestro propagador se convierte en un producto de elementos matriciales

$$\langle x_f | \hat{U}(t) | x_i \rangle = \int dx_1 \dots dx_{N-1} \langle x_f | \hat{U}(t/N) | x_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} | \hat{U}(t/N) | x_{N-2} \rangle \dots \langle x_2 | \hat{U}(t/N) | x_1 \rangle \langle x_1 | \hat{U}(t/N) | x_0 \rangle \quad (3.2.8)$$

$$\langle x_f | \hat{U}(t) | x_i \rangle = \int dx_1 \dots dx_{N-1} \prod_{k=0}^{N-1} \langle x_{k+1} | 1 - \frac{i}{\hbar N} \hat{H} t | x_k \rangle \quad (3.2.9)$$

donde $x_N = x_f$ y $x_0 = x_i$.

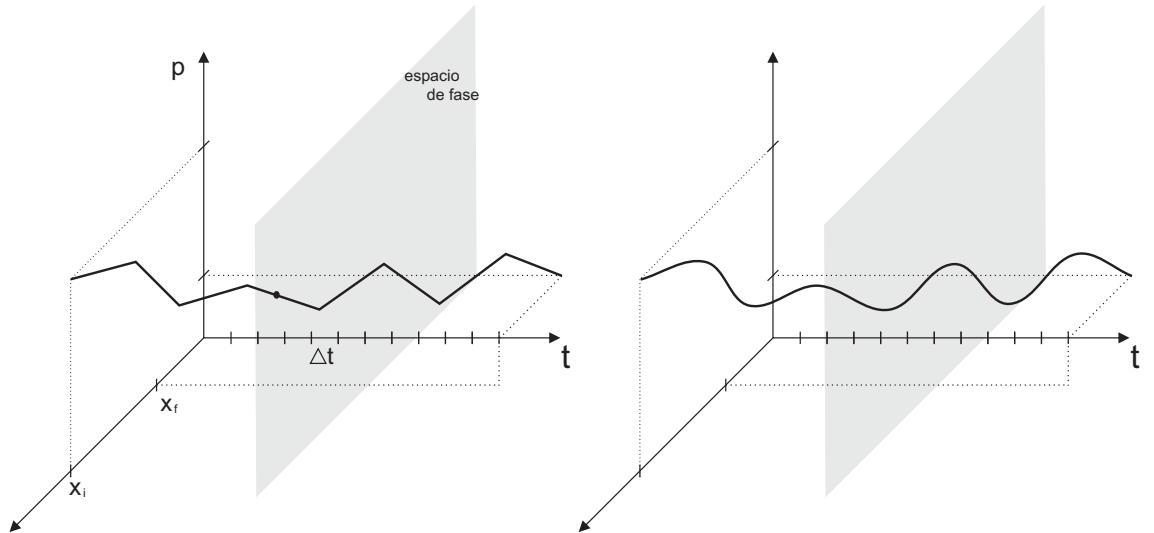


Figura 3.3: Izq: visualización de un conjunto de puntos en el espacio de fase que contribuyen a la configuración integral discreta en el tiempo. Der: en el límite continuo, el conjunto de puntos es una curva suave.

La idea ahora es realizar los cálculos de los elementos matriciales utilizando una expresión lineal más sencilla en vez de la exponencial. Sabiendo que el hamiltoniano es $\hat{H} = \hat{K} + \hat{V}$, los elementos matriciales que se deben calcular con el fin de obtener la expresión para la integral de camino de Feynman son $\langle x_{k+1} | x_k \rangle$, $\langle x_{k+1} | \hat{K} | x_k \rangle$, $\langle x_{k+1} | \hat{V} | x_k \rangle$.

El primer caso $\langle x_{k+1} | x_k \rangle$ corresponde a la función delta de Dirac $\delta(x_{k+1} - x_k)$, esta función se puede escribir a través de la transformada de Fourier [24]

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi\hbar} e^{ikx},$$

por lo tanto, teniendo en cuenta $k = p/\hbar$

$$\langle x_{k+1}|x_k\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} e^{i\frac{p_k}{\hbar}(x_{k+1}-x_k)}. \quad (3.2.10)$$

De manera similar, podemos también calcular los elementos matriciales de $\langle x_{k+1}|V(\hat{x})|x_k\rangle$ ya que el potencial depende de la coordenada de posición y el vector $|x_k\rangle$ es el estado propio del operador \hat{x} , lo que implica que la acción de $V(\hat{x})|x_k\rangle = V(x_k)|x_k\rangle$, se obtiene

$$\langle x_{k+1}|V(\hat{x})|x_k\rangle = V(x_k)\delta(x_{k+1} - x_k), \quad (3.2.11)$$

$$\langle x_{k+1}|V(\hat{x})|x_k\rangle = V(x_k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} e^{i\frac{p_k}{\hbar}(x_{k+1}-x_k)}. \quad (3.2.12)$$

Finalmente nos resta calcular $\langle x_{k+1}|\frac{\hat{p}^2}{2m}|x_k\rangle$, para ello haremos uso de la relación de identidad pero ahora formulada para el momento en vez de coordenadas (Eq. 3.2.3)

$$\langle x_{k+1}|\frac{\hat{p}^2}{2m}|x_k\rangle = \int dp_k \langle x_{k+1}|\frac{\hat{p}^2}{2m}|p_k\rangle \langle p_k|x_k\rangle, \quad (3.2.13)$$

$$\langle x_{k+1}|\frac{\hat{p}^2}{2m}|x_k\rangle = \int \frac{dp_k}{2\pi\hbar} \frac{p_k^2}{2m} e^{i\frac{p_k}{\hbar}(x_{k+1}-x_k)}, \quad (3.2.14)$$

donde $\frac{\hat{p}^2}{2m}|p_k\rangle = \frac{p_k^2}{2m}|p_k\rangle$ y $\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px}$.

Después de la realización de estos cálculos, ahora estamos en posición de poner todo junto de nuevo, obteniendo así

$$\langle x_{k+1}|\underbrace{1 - \frac{i}{\hbar N} \hat{H}t}_{\hat{U}(\Delta t)}|x_k\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_k e^{i\frac{p_k}{\hbar}\Delta x_k} \left[1 - \frac{i}{\hbar} \left(\frac{p_k^2}{2m} + V(x_k) \right) \Delta t \right], \quad (3.2.15)$$

donde $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

De inmediato se pueden notar varias cosas, una de ellas es que esta expresión calculada ya no contiene operadores sino números, lo cual permite un entendimiento un poco más intuitivo de la integral. Otra cosa que se puede notar es que el intervalo Δt es muy pequeño, y por lo tanto, recordando que en la expansión en series de Taylor la identidad $e^\epsilon = 1 + \epsilon$ (cuando ϵ es muy pequeño) es válida, lo que se realiza ahora es

el procedimiento inverso; en este caso tenemos la expresión lineal que será convertida a una exponencial

$$\langle x_{k+1} | \hat{U}(\Delta t) | x_k \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_k e^{\frac{i}{\hbar} p_k \Delta x_k} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p_k^2}{2m} + V(x_k) \right) \Delta t \right] \quad (3.2.16)$$

La razón de hacer esto es que ahora la integral que se obtiene es muy conveniente ya que corresponde a una integral Gaussiana, en este caso para el momento, donde se tiene un término cuadrático y uno lineal. Se puede calcular a partir de la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c}.$$

Entonces:

$$\langle x_{k+1} | \hat{U}(\Delta t) | x_k \rangle = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right) \sqrt{\frac{2\pi\hbar m}{i\Delta t}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2} \frac{\Delta x_k^2}{\Delta t^2} - V(x_k) \right) \Delta t \right]. \quad (3.2.17)$$

Con este resultado, estamos en condiciones de escribir la expresión completa del propagador de la siguiente manera:

$$\langle x_f | \hat{U}(t) | x_i \rangle = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \Delta t} \right)^{\frac{N}{2}} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \prod_{k=0}^{N-1} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2} \frac{\Delta x_k^2}{\Delta t^2} - V(x_k) \right) \Delta t \right]. \quad (3.2.18)$$

Continuando hacia la derivación más conocida del propagador de Feynman, en la figura 3.3-Izq., se observa que en la trayectoria la partícula recorre una distancia Δx en un tiempo Δt , esto es básicamente la velocidad de la partícula

$$\langle x_{k+1} | \hat{U}(\Delta t) | x_k \rangle \propto e^{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{mv_k^2}{2} - V(x_k) \right) \Delta t}. \quad (3.2.19)$$

La expresión en paréntesis corresponde al Lagrangiano en física clásica [25], (\mathcal{L}_k) , con lo cual la anterior ecuación se reduce a

$$\langle x_{k+1} | \hat{U}(\Delta t) | x_k \rangle \propto e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{L}_k \Delta t}, \quad (3.2.20)$$

Finalmente, lo que se tiene para calcular el propagador, es un conjunto de integrales sobre todos los puntos de x de la exponencial de los Lagrangianos correspondientes a los pequeños intervalos de posición multiplicados por el intervalo de tiempo

$$\langle x_f | \hat{U}(t) | x_i \rangle = A \int dx_1 dx_2 \dots e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{L}_1 \Delta t} e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{L}_2 \Delta t} \dots \quad (3.2.21)$$

Ahora el último paso para la derivación es reconocer que los productos de las exponenciales se pueden escribir como una suma de los Lagrangianos multiplicados por el intervalo Δt y que cuando $\Delta t \rightarrow 0$ la sumatoria se convierte en la integral

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_k \mathcal{L}_k \Delta t \right] = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L} dt \right].$$

La integral del Lagrangiano sobre el tiempo corresponde a la acción clásica $S[x]$ obteniendo así el resultado principal, donde el propagador se escribe como la integral sobre todas las posibles trayectorias pesadas por la exponencial de la acción clásica

$$\langle x_f | \hat{U}(t) | x_i \rangle = A \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L} dt}, \quad (3.2.22)$$

$$\langle x_f | \hat{U}(t) | x_i \rangle = A \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}, \quad (3.2.23)$$

A es una constante que depende de la dinámica del sistema y $\mathcal{D}x(t)$ es la notación introducida por Feynman para representar todas las posibles trayectorias en la integral de caminos.

La ecuación 3.2.23 representa el resultado central de esta sección. Una amplitud de transición mecanocuántica ha sido expresada en términos de una integral de dimensión infinita que se extiende sobre trayectorias en el espacio de coordenadas. Para entender mejor este resultado, trataremos de entender el significado de $\mathcal{D}x(t)$. Ocurre que en la integración, los puntos inicial y final son puntos fijos del sistema y solo los puntos intermedios se integran en todo el espacio, en otras palabras cualquier configuración espacial conecta los puntos inicial y final, esto es equivalente a decir que se origina un camino entre estos dos puntos (fig 3.3-Der.). O sea, integrar sobre todas estas configuraciones (lo que corresponde a la integración sobre todos los puntos intermedios) supone integrar sobre todos los caminos que conectan los puntos inicial y final. De este modo, de la integral de caminos de Feynman se interpreta que la amplitud de transición entre un estado inicial y final es la suma sobre todos los caminos que conectan los dos puntos y que cada camino está ponderado por su acción clásica.

Se sabe del estudio de la mecánica cuántica, que si un proceso puede tomar lugar en muchas formas distintas, entonces la amplitud de transición es la suma de las amplitudes individuales correspondientes a cada posibilidad de que el proceso ocurra [26, 27] (Principio de superposición), esto permite entender por qué tiene sentido que el resultado de la amplitud de transición sea una suma sobre todos los caminos. Un tanto sorprendente, sin embargo, es el factor de peso $e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}$. Clásicamente se sabe que la acción es la que determina la dinámica de un sistema, pero en mecánica cuántica vemos que todos los caminos contribuyen a la amplitud de transición.

Como hemos visto, la amplitud de transición puede escribirse como una suma sobre todos los caminos que conectan los puntos inicial y final de la trayectoria de una partícula durante su evolución temporal, y para el caso de un Hamiltoniano unidimensional cuadrático en los momentos, se presenta como en la ecuación 3.2.23. Un análisis un poco más cualitativo se puede notar en lo siguiente: debido a que $|e^{i\gamma}| = 1$ para todo γ , cada trayectoria aporta esencialmente la misma contribución a la amplitud de probabilidad, en este sentido la trayectoria clásica no es ni más ni menos importante que cualquier otra trayectoria de la partícula. Sin embargo, cuando integramos, las fases resultan ser cruciales. La fase $S[x(t)]/\hbar$ viene con un número muy pequeño en el denominador \hbar , así que incluso un pequeño cambio en $S[x(t)]$ para diferentes trayectorias causará grandes variaciones en la fase. Cuando las amplitudes de dichas trayectorias se suman, ellas tienden a cancelarse entre sí y causar interferencia destructiva.

3.3. Límite clásico

De la mecánica clásica, conocemos “el principio de mínima acción”. El principio dice que la acción $S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt$ tiene un mínimo (o un máximo en algunos casos) para la trayectoria clásica $x_{cl}(t)$, i.e. $\delta S[x_{cl}(t)] = 0$. Para partículas macroscópicas (clásicas), S es grande en comparación con \hbar . Así, incluso una pequeña (pero aún macroscópica) variación en la acción de dicha partícula causará grandes cambios en la fase. Para estas partículas, muchas amplitudes se cancelan entre sí, volviéndolas irrelevantes para la forma de movimiento de las partículas. Lo que de hecho se descubre en realidad es que una única trayectoria es seguida: la trayectoria clásica. ¿Por qué es este el único camino cuya amplitud no se cancela? La respuesta la encontramos en la teoría clásica [25].

Una pequeña desviación de la trayectoria clásica solamente causa una variación infinitesimal en $S[x(t)]$ y por ende en la fase. Las amplitudes de probabilidad para trayectorias extremadamente cercanas a la trayectoria clásica tienden, entonces, a sumarse y causar interferencia constructiva. Para caminos que se desvían mucho de la trayectoria clásica, el cambio en la acción (i.e en la fase) será tan grande en términos de \hbar que, en cambio, la interferencia será destructiva, esto se debe a la rapidez de oscilación en la fase en este caso, lo que produce un efecto de cancelación entre dichas amplitudes [9, Sec. 2.3]. Lo que sigue es que para partículas macroscópicas solo la trayectoria clásica contribuirá a su movimiento (Fig. 3.4). Esta explicación concuerda con el principio de Fermat en la óptica, en donde el trayecto que sobrevive es la trayectoria que predice Fermat. Este último, no obstante, plantea una única trayectoria para la luz que resulta ser solo una consecuencia de una interpretación clásica de la integral de caminos.

Para partículas microscópicas (mecanocuánticas), por otra parte, la acción es típicamente del orden de \hbar . Por lo tanto se necesita un cambio comparablemente grande en la acción para lograr un cambio significativo en la fase $S[x(t)]/\hbar$. En otras palabras, para partículas ligeras incluso los caminos que se desvían mucho del clásico tendrán importancia. En este caso no se puede seguir hablando de la trayectoria de la partícula, sino de una superposición de diferentes caminos.

En el límite $\hbar \rightarrow 0$, incluso las partículas muy pequeñas lógicamente se comportarán como partículas clásicas, ya que su acción sería entonces muy grande comparada con \hbar . El límite $\hbar \rightarrow 0$ también es el límite donde la cuantización de la energía desaparece, lo cual es otro efecto de consideración en el límite clásico de la mecánica cuántica.

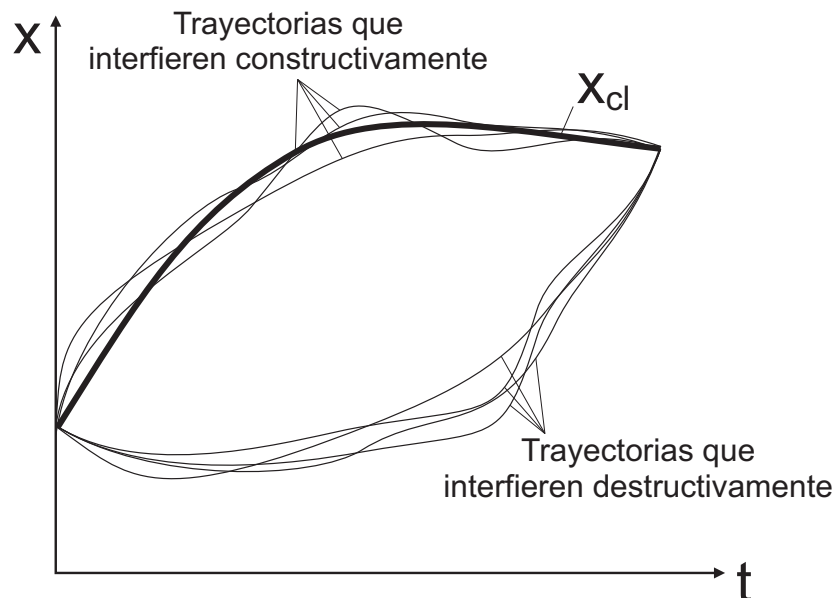


Figura 3.4: Análisis del límite clásico. Hay interferencia constructiva entre trayectorias cercanas a la clásica (línea gruesa), mientras que las trayectorias muy alejadas tienden a cancelarse debido a los oscilaciones rápidas de $e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}$.

3.4. Propagador para el oscilador armónico

Para efectos de esta tesis, mostraremos cómo funciona el método de la integral de caminos en el cálculo del propagador de Feynman de la Mecánica Cuántica aplicado al oscilador armónico, del cual sabemos puede ser resuelto de forma exacta [9, 28].

Consideremos un oscilador armónico descrito por su Lagrangiano correspondiente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (3.4.1)$$

cuya acción está dada por

$$S = \int dt \mathcal{L}. \quad (3.4.2)$$

La ecuación de Euler-Lagrange [25] para la acción en la Eq. 3.4.2 nos da la trayectoria clásica que toma la forma

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} = 0, \quad (3.4.3)$$

$$\text{o, } m\ddot{x}_{cl} + m\omega^2x_{cl} = 0, \quad (3.4.4)$$

donde $\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)}$ representa el cambio en el funcional de acción con respecto a variaciones de trayectoria. La forma general de la amplitud de transición (Eq. 3.2.23) es

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) = A \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}. \quad (3.4.5)$$

Para evaluar esta integral funcional, notemos que la acción es a lo sumo cuadrática en la variable dinámica $x(t)$. Por lo tanto, definiendo

$$x(t) = x_{cl} + \eta(t) \quad (3.4.6)$$

podemos expandir en series de Taylor alrededor de la trayectoria clásica como

$$\begin{aligned} S[x] = S[x_{cl} + \eta] = & S[x_{cl}] + \int dt \eta(t) \left. \frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} \right|_{x=x_{cl}} \\ & + \frac{1}{2!} \int dt_1 dt_2 \eta(t_1)\eta(t_2) \left. \frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t_1)\delta x(t_2)} \right|_{x=x_{cl}}. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Se nota de la Eq. 3.4.4 que la acción es un extremo para la trayectoria clásica

$$\left. \frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} \right|_{x=x_{cl}} = 0. \quad (3.4.8)$$

En consecuencia, también es posible escribir la Eq. 3.4.7 como

$$S[x] = S[x_{cl}] + \frac{1}{2!} \int dt_1 dt_2 \eta(t_1)\eta(t_2) \left. \frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t_1)\delta x(t_2)} \right|_{x=x_{cl}}. \quad (3.4.9)$$

Evaluando las derivadas funcionales podemos reescribir la acción como

$$S[x] = S[x_{cl}] + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt (m\dot{\eta}^2 - m\omega^2\eta^2). \quad (3.4.10)$$

La variable $\eta(t)$ representa las fluctuaciones cuánticas alrededor de la trayectoria clásica, a saber, esta mide la desviación de una trayectoria de la trayectoria clásica. Como los puntos iniciales y finales de todos los caminos son fijos, las fluctuaciones cumplen las siguientes condiciones de frontera

$$\eta(t_i) = \eta(t_f) = 0. \quad (3.4.11)$$

Esto significa que sumar sobre todas las trayectorias es equivalente a sumar sobre todas las posibles fluctuaciones sometidas a las restricciones de la Eq. 3.4.11. En consecuencia de todo lo anterior, podemos reescribir la amplitud de transición como

$$\begin{aligned} U(t_f, x_f; t_i, x_i) &= A \int \mathcal{D}\eta e^{\left[\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}] + \frac{i}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} (m\dot{\eta} - m\omega^2\eta^2) dt\right]}, \\ &= A e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]} \int \mathcal{D}\eta e^{\frac{i}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} (m\dot{\eta} - m\omega^2\eta^2) dt}. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Esta es una integral donde el exponente es cuadrático en las variables y este tipo de integrales pueden ser resueltas de varias maneras, siguiendo el razonamiento de [28] se resolverá mediante el método de la transformación de Fourier.

Primero que todo, notemos que el integrando en el exponente de la integral funcional no depende explícitamente del tiempo. Por lo tanto podemos redefinir la variable de integración como

$$t \longrightarrow t - t_i, \quad (3.4.13)$$

en cuyo caso, la amplitud de transición puede ser escrita como

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) = A e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]} \int \mathcal{D}\eta e^{\frac{i}{2\hbar} \int_0^T (m\dot{\eta}^2 - m\omega^2\eta^2) dt}, \quad (3.4.14)$$

donde hemos identificado el intervalo de tiempo con

$$T = t_f - t_i. \quad (3.4.15)$$

La variable $\eta(t)$ satisface las condiciones de frontera

$$\eta(0) = \eta(T) = 0, \quad (3.4.16)$$

consecuentemente, el valor de la fluctuación en cualquier punto de la trayectoria puede ser representado como una serie armónica de la forma

$$\eta(t) = \sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \quad n = \text{entero.} \quad (3.4.17)$$

Sustituyendo 3.4.17 en 3.4.14, encontramos que

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \dot{\eta}^2 &= \sum_{n,m} \int_0^T dt a_n a_m \left(\frac{n\pi}{T}\right) \left(\frac{m\pi}{T}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{m\pi t}{T}\right) \\ &= \frac{T}{2} \sum_n \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 a_n^2, \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

donde hemos usado las propiedades de ortonormalidad de la función coseno. Similarmente, también se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \eta^2 &= \sum_{n,m} \int_0^T dt a_n a_m \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{m\pi t}{T}\right) \\ &= \frac{T}{2} \sum_n a_n^2. \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

A partir de estos cálculos, se puede notar que integrar sobre todas las posibles configuraciones de $\eta(t)$ o todas las posibles fluctuaciones cuánticas es equivalente a integrar sobre todos los valores posibles de los coeficientes de expansión a_n . También, se observa que debido a que hemos elegido dividir la trayectoria en N intervalos, a saber, hay $N-1$ puntos intermedios, pueden haber solamente $N-1$ coeficientes independientes a_n en la expansión de Fourier (Eq. 3.4.17). Siendo así, nuestra amplitud de transición puede ser escrita como

$$\begin{aligned} U(t_f, x_f; t_i, x_i) &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} A' e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \int da_1 \cdots da_{N-1} e^{\frac{i}{2\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{T}{2} \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 m a_n^2 - \frac{T}{2} m \omega^2 a_n^2 \right)}, \\ &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} A' e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \int da_1 \cdots da_{N-1} e^{\frac{imT}{4\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2 \right) a_n^2}. \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

Notemos que aquí cualquier posible valor que surja del Jacobiano en el cambio de variables de η a los coeficientes a_n han sido agrupados en A' cuya forma se determinará en breve.

La amplitud de transición, en este caso, es un producto de un grupo de integrales des-
acopladas las cuales tienen la forma de una integral Gaussiana que puede ser fácilmente
evaluada. Las integrales individuales tienen los valores

$$\begin{aligned} \int da_n e^{\frac{imT}{4\hbar} \left(\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right) a_n^2} &= \left(\frac{4\pi i \hbar}{mT} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{4\pi i \hbar}{mT} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n\pi}{T} \right)^{-1} \left(1 - \left(\frac{\omega T}{n\pi} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Sustituyendo este resultado en la expresión para la amplitud de transición (Eq. 3.4.20),
obtenemos

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} A'' e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \prod_{n=1}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{\omega T}{n\pi} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.4.22)$$

usando la representación de Euler para la función seno a través de un producto infinito

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{\omega T}{n\pi} \right)^2 \right) = \frac{\sin \omega T}{\omega T} \quad (3.4.23)$$

podemos reducir la expresión del propagador a

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} A'' e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \left(\frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.4.24)$$

La constante A'' se puede determinar simplemente notando que cuando $\omega \rightarrow 0$,
el oscilador armónico se reduce al de una partícula libre cuya amplitud de transición
es [9, Chap. 3].

$$U_{F.P.}(t_f, x_f; t_i, x_i) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{S[x_{cl}]}, \quad (3.4.25)$$

por lo tanto comparando esta expresión con la ecuación 3.4.2, se obtiene

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} A'' = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.4.26)$$

Finalmente, se determina la forma completa de la amplitud de transición para el

oscilador armónico reemplazando los resultados

$$\begin{aligned} U(t_f, x_f; t_i, x_i) &= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{S[x_{cl}]} \\ &= \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T} \right)^{\frac{1}{2}} e^{S[x_{cl}]} . \end{aligned}$$

Se observa cláramente que esta expresión se reduce al propagador de una partícula libre en el límite cuando $\omega \rightarrow 0$.

Es inmediato mostrar que

$$\begin{aligned} S[x_{cl}] &= \frac{m}{2} \int_0^T dt (\dot{x}_{cl}^2 - \omega^2 x_{cl}^2) \\ &= \frac{m\omega}{2} \left[(x_i^2 + x_f^2) \cot(\omega T) - \frac{2x_i x_f}{\sin \omega T} \right] . \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando $x_f = x$ y $x_i = x'$ se obtiene la expresión más familiar

$$K(x, t; x', t') = \langle x | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | x' \rangle = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega t} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} m\omega \left([x'^2 + x^2] \cot \omega t - \frac{2x'x}{\sin \omega t} \right) \right] . \quad (3.4.27)$$

Esta es la expresión que representa la amplitud de transición para una partícula cuántica con masa m ² sometida a un potencial armónico. Como veremos más adelante, esta amplitud de transición o función de Green en particular es equivalente al Kernel de la transformación de Fourier fraccionaria (Apéndice A) que nos resultará conveniente para nuestro posterior análisis.

Pasemos ahora a examinar otro de los asuntos que nos incumbe vinculado al campo electromagnético y los fotones.

²Fermiones.

Capítulo 4

Cuantización del campo Electromagnético

En este capítulo se presenta una discusión acerca de la cuantización del campo electromagnético y se examinan sus propiedades, con particular atención a la interpretación del fotón como el elemento de excitación de un modo normal del campo. Empezamos des-arrrollando la cuantización para el caso de un campo de modo único confinado por paredes conductoras en una cavidad unidimensional para luego calcular el hamiltoniano correspondiente a la radiación electromagnética y sus niveles de energía.

Se observará que el campo electromagnético es formalmente equivalente a un conjunto de osciladores armónicos, lo que nos lleva naturalmente a la idea de interpretar la cuantización electromagnética de manera análoga al oscilador armónico cuántico a partir de los operadores de creación y aniquilación introducidos en correspondencia con las variables canónicamente conjugadas del oscilador armónico clásico [26]. Esta metodología es un patrón que siguen la mayoría de textos de mecánica cuántica y óptica cuántica¹.

Se inspeccionará uno de los estados del campo electromagnético apropiados para la descripción de los campos ópticos. Los estados número o estados de Fock, cuya principal característica es que tiene un número bien definido de fotones asociados al campo electromagnético cuantizado. Estos estados serán de importancia durante nuestro desarrollo y se retomarán más adelante. Existen otros estados del campo electromagnético que involucran una superposición de estados número. Uno de estos campos son los estados coherentes que tienen el mínimo de incertidumbre en la amplitud y la fase per-

¹Se citan entre otros a [3, 5–7].

mitidos por el principio de incertidumbre, y por ende es el estado mecanocuántico más cercano posible al clásico, existen también estados térmicos y estados Squeezed. Estos estados no serán tratados en nuestro trabajo y se referencia al lector [3–7] para mayor información.

4.1. Cuantización del campo de modo único

El procedimiento que seguimos para la cuantización del campo electromagnético es el de la cuantización de un modo único del campo electromagnético [4, 5], en los libros [3, 6, 7] se realiza la cuantización del campo electromagnético de modos múltiples, entendiendo estos últimos como una superposición de campos de modo único.

Comenzamos con el caso simple pero muy importante de un campo de radiación confinado a una cavidad unidimensional a lo largo del eje z con paredes perfectamente conductoras en $z = 0$ y $z = L$ como se muestra en la figura 4.1.

El campo eléctrico debe anularse en los extremos y por lo tanto tomará la forma de una onda estacionaria, i.e. no hay corrientes, cargas o medio dieléctrico en la cavidad. El campo se asume polarizado a lo largo de la dirección x , $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x E_x(z, t)$, donde \mathbf{e}_x es un vector unitario que indica la polarización del campo. Sin cargas ni corrientes eléctricas, las ecuaciones de Maxwell en el Sistema Internacional se escriben

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (4.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4.1.4)$$

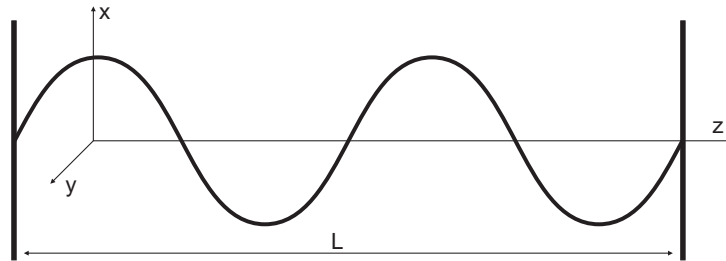


Figura 4.1: Cavidad con paredes perfectamente conductoras ubicadas en $z = 0$ y $z = L$. El campo está polarizado en la dirección x .

Un campo de modo único que satisface las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera está dado por

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right) q(t) \sin(kz), \quad (4.1.5)$$

donde ω es la frecuencia del modo y k es el número de onda relacionado con la frecuencia a partir de $k = \omega/c$. La condición de frontera $z = L$ implica las frecuencias permitidas $\omega_m = c(m\pi/L)$, $m = 1, 2, \dots$. Asumimos que ω en la ecuación 4.1.5 es una de esas frecuencias e ignoramos el resto por ahora. V es el volumen efectivo de la cavidad y $q(t)$ es un factor dependiente del tiempo que tiene unidades de longitud. Como veremos, $q(t)$ actuará como la variable de posición canónica, aunque más adelante se dará una interpretación más detallada referente a la cantidad $q(t)$ en beneficio al desarrollo de esta tesis.

El campo magnético en la cavidad, de la Eq. 4.1.5 y Eq. 4.1.4 es $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_y B_y(z, t)$ donde

$$B_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0\epsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right) \dot{q}(t) \cos(kz). \quad (4.1.6)$$

Aquí, $\dot{q}(t) = p(t)$ juega el papel de momento canónico para una partícula de masa unitaria, i.e. $p(t) = \dot{q}(t)$.

La energía clásica, o Hamiltoniano H , contenida para un campo electromagnético en unidades S.I. está dada por

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int dV \left[\epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int dV \left[\epsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right]. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

De las ecuaciones anteriores es sencillo mostrar que el valor de la energía para el campo clásico es

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \quad (4.1.8)$$

de lo cual resulta aparente, que el campo electromagnético para un modo único es formalmente equivalente al de un oscilador armónico de masa unitaria, donde el campo eléctrico y magnético aparte de unos factores de escala juegan el papel de posición y momento canónicos.

Cualquier libro elemental de mecánica cuántica discute la cuantización del oscilador armónico unidimensional. Aquí, tomaremos el enfoque que, habiendo identificado las

variables canónicas q y p para el sistema clásico, usamos simplemente la regla de correspondencia para remplazarlas por sus operadores equivalentes \hat{q} y \hat{p} . Estos operadores deben satisfacer las relaciones canónicas de conmutación

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\hat{1}. \quad (4.1.9)$$

Es así, que los campos eléctrico y magnético para un modo único se convierten en los operadores

$$\hat{E}_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right) \hat{q}(t) \sin(kz), \quad (4.1.10)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0\epsilon_0}{k}\right) \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right) \hat{p}(t) \cos(kz) \quad (4.1.11)$$

respectivamente. Y por lo tanto el hamiltoniano como operador es ahora

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2). \quad (4.1.12)$$

Los operadores \hat{q} y \hat{p} son Hermíticos y en consecuencia corresponden a cantidades observables. Sin embargo, es conveniente y tradicional introducir los operadores no Hermíticos (no observables) aniquilación \mathcal{A} y creación \mathcal{A}^\dagger , definidos como

$$\mathcal{A} = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad (4.1.13)$$

$$\mathcal{A}^\dagger = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (4.1.14)$$

Los campos eléctrico y magnético se pueden escribir a partir de los operadores aniquilación y creación de la siguiente manera

$$\hat{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_0(\mathcal{A} + \mathcal{A}^\dagger) \sin(kz), \quad (4.1.15)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \mathcal{B}_0 \frac{1}{i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^\dagger) \cos(kz), \quad (4.1.16)$$

donde $\mathcal{E}_0 = (\hbar\omega/\epsilon_0V)^{1/2}$ y $\mathcal{B}_0 = (\mu_0/k)(\epsilon_0\hbar\omega^3/V)^{1/2}$ representan respectivamente el campo eléctrico y magnético “por fotón”. Las comillas indican que esto no es exactamente correcto, ya que el promedio de los campos para un número definido de fotones es cero [6, Sec. 3.1.1]. Sin embargo, estas cantidades son medidas útiles de las fluctuaciones del campo cuantizado. Los operadores \mathcal{A} y \mathcal{A}^\dagger satisfacen la relación de conmutación

$$[\mathcal{A}, \mathcal{A}^\dagger] = \hat{1} \quad (4.1.17)$$

y como resultado, el operador hamiltoniano se escribe de la forma

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + \frac{1}{2} \right), \quad (4.1.18)$$

donde

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (4.1.19)$$

4.1.1. Estados número o de Fock

El Hamiltoniano 4.1.18 tiene los valores propios $\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$ donde n es un entero ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$). Los estados propios escritos como $|n\rangle$ son conocidos como estados número o estados de Fock. Estos son estados propios del operador número $\hat{n} = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}$

$$\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (4.1.20)$$

con

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left(\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle. \quad (4.1.21)$$

El estado base del oscilador (o estado de vacío para el campo) está definido por

$$\mathcal{A}|0\rangle = 0. \quad (4.1.22)$$

Así, el problema de valores propios para el estado base es

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega \left(\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + \frac{1}{2} \right) |0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} |0\rangle, \quad (4.1.23)$$

el valor propio de energía más baja $\hbar\omega/2$ es llamado energía del punto cero. Los operadores \mathcal{A} y \mathcal{A}^\dagger son operadores de elevación o disminución en la escalera de los estados propios del oscilador armónico. En términos de fotones ellos representan la aniquilación y creación de un fotón de energía $\hbar\omega$. La aplicación de los operadores aniquilación y creación a los estados número conduce

$$\mathcal{A}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \mathcal{A}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (4.1.24)$$

Los estados más excitados pueden ser obtenidos mediante repeticiones sucesivas del operador creación

$$\frac{(\mathcal{A}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (4.1.25)$$

Los estados número son ortogonales y completos

$$\langle n|m \rangle = \delta_{mn} \quad (4.1.26)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{1}. \quad (4.1.27)$$

Siendo la norma de estos vectores propios finita, estos estados forman un conjunto completo de vectores bases en el espacio de Hilbert. Aunque los estados número son una representación útil para fotones de alta energía, i.e. rayos Γ donde el número de fotones es muy pequeño, no son la mejor representación para campos ópticos donde el número total de fotones es grande. Dificultades experimentales han impedido la generación de estados número con más de un pequeño número de fotones². La mayoría de sistemas ópticos son o una superposición de estados número (estados puros) o una mezcla de estados número (estados mixtos). A pesar de esto, los estados número del campo electromagnético han sido usados como base para muchos problemas en óptica cuántica incluyendo algunas teorías del láser.

Concentrémonos ahora en algunas de las propiedades de los estados de Fock. A causa de que un sistema de modo único en un estado de fock $|n\rangle$ contiene exactamente n excitaciones de $\hbar\omega$, estos describen fotones en un estado número con exáctamente n cuantos. La energía media de dicho sistema es

$$\langle n|H|n \rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (4.1.28)$$

así que, en efecto, una energía $\hbar\omega$ está asociada a cada fotón. Notemos que incluso cuando no hay fotones presentes ($n = 0$), la energía de vacío del oscilador armónico es $\langle n|H|n \rangle = \hbar\omega/2 > 0$.

Las fluctuaciones de un observable \hat{O} son medidas por la varianza $\langle (\Delta\hat{O})^2 \rangle$, donde $\Delta\hat{O} = \hat{O} - \langle \hat{O} \rangle$. Para las fluctuaciones de un número de fotones de un campo de radiación de modo único en un estado de Fock calculamos

$$\langle n|(\Delta\hat{n})^2|n \rangle = \langle n|\hat{n}^2|n \rangle - \langle n|\hat{n}|n \rangle^2 = 0. \quad (4.1.29)$$

Las fluctuaciones deben anularse ya que el valor del número de fotones es preciso para un estado de Fock. Por la misma razón no hay fluctuaciones de energía en un estado de Fock.

Una característica más contundente de los estados de Fock es revelada cuando miramos el valor esperado del campo eléctrico, es fácil ver que

$$\langle n|\hat{E}_x(z,t)|n \rangle = 0. \quad (4.1.30)$$

²Avances se han logrado por ejemplo [29, 30].

Esto es, el valor esperado del campo eléctrico se anula en un estado de Fock, aunque n fotones estén presentes. Este es un comportamiento algo inusual y muestra que los estados de Fock se comportan diferente a su contraparte clásica. En contraste, el valor esperado de la intensidad en un estado número de fotones es proporcional al número de fotones en si mismo

$$\langle n | \hat{I} | n \rangle = \omega^2 |\mathbf{A}(\mathbf{r})|^2 n, \quad (4.1.31)$$

donde $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ es el potencial vectorial [6, Sec. 3.3.1]. Este resultado concuerda con nuestras expectativas clásicas [1].

Capítulo 5

Discusión

En este capítulo se retoma la información necesaria discutida anteriormente para el análisis final de nuestra tesis. Inicialmente, se plantea al propagador de Feynman como una transformación de Fourier fraccionaria para luego adaptar las integrales de camino a la propagación de fotones y por ende, adaptar la transformación de Fourier fraccionaria a la propagación de fotones. Posteriormente, se realiza el desarrollo para investigar el comportamiento del campo electromagnético en una cavidad resonante, especialmente se busca encontrar los modos transversales del campo electromagnético dentro de una cavidad. Finalmente se discute la relación entre la distribución de probabilidad e intensidad calculadas durante nuestro desarrollo.

5.1. Propagador armónico de Feynman como una TFFr

La transformación de Fourier fraccionaria también se encuentra presente en la amplitud de transición para el oscilador armónico. Para mostrar esto, se tiene, como se mostró anteriormente [Sec. 3.4], que el propagador armónico para un oscilador cuántico se escribe (Eq. 3.4.27).

$$K(q_F, q_I) = \langle q_F | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | q_I \rangle = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega t} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} m\omega \left([q_I^2 + q_F^2] \cot \omega t - \frac{2q_I q_F}{\sin \omega t} \right) \right]. \quad (5.1.1)$$

Notando que el propagador es una función de Green y por lo tanto, si se realiza

una convolución del propagador con $\psi(q_I, t = 0)$, es posible determinar la evolución del paquete de ondas mediante¹

$$\psi(q_F, t) = \int_{\mathbb{R}} \langle q_F | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | q_I \rangle \psi(q_I, 0) dq_I, \quad (5.1.2)$$

$$\psi(q_F, t) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega t} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} m\omega \left([q_I^2 + q_F^2] \cot \omega t - \frac{2q_I q_F}{\sin \omega t} \right) \right] \psi(q_I, 0) dq_I \quad (5.1.3)$$

La ecuación integral 5.1.3 describe la evolución de cualquier función de onda $\psi(q, t)$ sometida a un potencial armónico $V(q, t) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$, donde $\psi(q, t)$ es también solución de la ecuación de Schrödinger.

Por otra parte, la transformación de Fourier fraccionaria en una dimensión se expresa ([22, 23])

$$\mathcal{F}_\alpha[f](x') = \frac{e^{-i(\operatorname{sgn}(\sin \alpha) \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i\pi \left(\cot \alpha [x^2 + x'^2] - \frac{2xx'}{\sin \alpha} \right) \right] f(x) dx, \quad (5.1.4)$$

donde $\operatorname{sgn}(x)$ es la función signo y la constante $\frac{e^{-i(\operatorname{sgn}(\sin \alpha) \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{|\sin \alpha|}}$ la introdujo McBride [23], así la inversa se obtiene cambiando α por $-\alpha$ en la ecuación 5.1.4.

Es inmediato notar la similitud existente entre la transformación de Fourier fraccionaria y la integral para calcular la evolución de la función de onda (Eq. 5.1.4 y Eq. 5.1.3). Lo que se pretende ahora es escribir una expresión que permita representar dicha evolución del paquete de ondas a través de una transformación de Fourier fraccionaria.

Se realiza el siguiente cambio de variables

$$x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} q_I, \quad x' = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}} q_F, \quad xx' = \frac{m\omega}{2\pi\hbar} q_I q_F, \quad (5.1.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi(q_F, t) &= \psi \left(\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m\omega}} x', t \right) = \phi(x', t), \\ \psi(q_I, 0) &= \psi \left(\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m\omega}} x, 0 \right) = \phi(x, 0). \end{aligned}$$

¹Por simplicidad se trabajará de aquí en adelante $t_i = 0$.

Entonces, definiendo $\alpha = \omega t$, la Eq. 5.1.3 se escribe ahora a partir de las nuevas variables adimensionales como

$$\phi(x', t) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} m\omega \left(\left[\frac{2\pi\hbar}{m\omega} x^2 + \frac{2\pi\hbar}{m\omega} x'^2 \right] \cot \alpha - \frac{2\pi\hbar}{m\omega} \frac{2xx'}{\sin \alpha} \right) \right] \phi(x, 0) d \left(\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m\omega}} x \right), \quad (5.1.6)$$

$$\phi(x', t) = \left(\frac{1}{i \sin \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left[i\pi \left([x^2 + x'^2] \cot \alpha - \frac{2xx'}{\sin \alpha} \right) \right] \phi(x, 0) dx. \quad (5.1.7)$$

Comparando las ecuaciones 5.1.4 y 5.1.7, es inmediato que la función de onda $\phi(x', t)$ puede ser escrita mediante una transformación de Fourier fraccionaria a través de la expresión

$$\phi(x', t) = \sqrt{\frac{|\sin \alpha|}{\sin \alpha}} e^{i(\operatorname{sgn}(\sin \alpha) \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4})} \mathcal{F}_{\alpha} [\phi(x, 0)] (x'). \quad (5.1.8)$$

Debe notarse que la constante multiplicativa depende del valor de alfa, si estableciéramos $\sin \alpha > 0$ por ejemplo para un rango de alfa $\alpha = (0, \pi/2)$, la expresión anterior se reduce a

$$\phi(x', t) = e^{-i\frac{\alpha}{2}} \mathcal{F}_{\alpha} [\phi(x, 0)] (x'). \quad (5.1.9)$$

Esta elección del rango de alfa es de especial interés ya que la transformación de Fourier para el valor $\alpha = \pi/2$ corresponde precisamente a la transformación de Fourier estandar. lo que observaremos más adelante es que esta elección permite una analogía directa con la teoría clásica, concretamente con la difracción de Fresnel expuesta mediante la transformación de Fourier fraccionaria.

No es coincidencia que la expresión de la amplitud de transición para el oscilador armónico permita de manera tan sencilla un análisis a través de la transformación de Fourier fraccionaria como elemento de evolución temporal de un paquete de ondas, de hecho se espera que sea así ya que, siguiendo el razonamiento de Namias en [22], el operador \mathcal{F} (operador transformada de Fourier) tiene como valor propio $e^{-in\frac{\pi}{2}}$ de acuerdo a la ecuación de valores propios²

$$\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} |\varphi_n(x)\rangle = e^{-in\frac{\pi}{2}} |\varphi_n(x)\rangle, \quad (5.1.10)$$

donde $\varphi_n(x)$ corresponde a los polinomios de Hermite-Gauss que son funciones propias del operador \mathcal{F} .

²Se escribe el sufijo $\pi/2$ en \mathcal{F} para indicar que la transformada estandar de Fourier se comporta como tal cuando $\alpha = \pi/2$.

Si ahora consideramos el operador \mathcal{F}_α : la transformación de Fourier para cualquier orden α ; que satisface la siguiente ecuación de valores propios

$$\mathcal{F}_\alpha |\varphi_n(x)\rangle = e^{-in\alpha} |\varphi_n(x)\rangle . \quad (5.1.11)$$

El operador generalizado \mathcal{F}_α se puede representar en la forma $e^{-i\alpha\mathcal{N}}$, donde $\mathcal{N} = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$ es el operador número.

Por otra parte, si analizamos el operador evolución temporal, calculado a partir de la ecuación de Schrödinger,

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} , \quad (5.1.12)$$

teniendo en cuenta el Hamiltoniano para el oscilador armónico escrito de la forma

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} + \frac{1}{2} \right) , \quad (5.1.13)$$

se observa que

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} = e^{-i\omega t/2} e^{-i\omega t\mathcal{N}} \quad (5.1.14)$$

y que dentro de esta expresión está implícita la transformación de Fourier fraccionaria con $\alpha = \omega t$

$$\hat{U}(t) = e^{-i\alpha/2} \mathcal{F}_\alpha . \quad (5.1.15)$$

De esta manera, la transformación de Fourier fraccionaria es la representación matemática de la evolución temporal de cualquier sistema cuyo Hamiltoniano corresponda al de un oscilador armónico y nuestro desarrollo para la integral de caminos de Feynman con dicho Hamiltoniano se corresponde con este resultado³.

Lo que se persigue ahora es aplicar el mismo análisis al campo electromagnético cuantizado cuyo Hamiltoniano 4.1.12 sabemos se asemeja a un sistema de masa unitaria sometido a un potencial $\frac{1}{2}\omega\hat{q}^2$, cuyas observables \hat{p} y \hat{q} están relacionadas con el campo eléctrico y magnético según 4.1.10 y 4.1.11 respectivamente.

Si extrapolamos el análisis anterior a estados cuánticos del campo electromagnético, podemos notar que **la transformación de Fourier fraccionaria se ajusta a la propagación de fotones**, y la ecuación 5.1.9 representa ahora la propagación de un estado cuántico del campo electromagnético gobernado por el Hamiltoniano 4.1.12. A continuación se examina más en profundidad las consecuencias de entender la propagación de fotones como una transformación de Fourier fraccionaria.

³En la referencia [31] se discute más a profundidad esta relación.

5.2. Integral de caminos de Feynman para los fotones

A continuación, se aplicará el propagador armónico de Feynman para el caso de un fotón: la partícula elemental responsable de las manifestaciones cuánticas del fenómeno electromagnético⁴.

Para plantear nuestro argumento, comenzaremos realizando una analogía con el resultado de la ecuación 3.4.27 calculado a partir de un Hamiltoniano armónico

$$H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2.$$

Notando la equivalencia entre las coordenadas q y p del campo electromagnético, donde $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$ y $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$, con las coordenadas posición y momento x y p utilizadas en la derivación de la integral de caminos (Sec. 3.2), y tomando en cuenta la masa unitaria, la amplitud de transición 3.4.27 se escribe ahora, para el caso de los fotones, de la forma

$$K(q_F, q_I) = \left(\frac{\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega t} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{i}{2\hbar} \omega \left([q_I^2 + q_F^2] \cot \omega t - \frac{2q_I q_F}{\sin \omega t} \right) \right]. \quad (5.2.1)$$

Esta ecuación se interpreta como la amplitud de transición o función de Green que propaga o evoluciona temporalmente el estado cuántico de un fotón desde una “posición” q_I hasta una “posición” q_F .

Feynman tenía una posición bastante sólida en cuanto a la naturaleza de la luz se refiere: “*Quiero enfatizar que la luz viene en esta forma—partículas. Es muy importante saber que la luz se comporta como partículas, especialmente para aquellos quienes han ido a la escuela, donde probablemente les dijeron algo acerca de la luz comportandose como ondas. Te estoy diciendo la forma en que realmente se comportan—como partículas*”. (Richard P. Feynman, QED: The strange theory of light and matter, Princeton University Press, 1985, p. 15).

Para él la luz está compuesta por partículas (como Newton originalmente pensó); es una corriente de fotones cuyo comportamiento en masa puede ser determinado estadísticamente. El análisis de Feynman proviene de unos pequeños cálculos generales los cuales corresponden a lo que hemos hecho hasta ahora.

⁴Una descripción detallada sobre los fotones se puede encontrar en [1, 32, 33].

1. La amplitud de probabilidad asociada a la ocurrencia de un evento es la “suma” de las constituyentes amplitudes de probabilidad que corresponden cada una de las posibles formas de que el evento ocurra.
2. Cada una de dichas amplitudes de probabilidad constituyentes se expresa como una cantidad compleja.
3. La probabilidad de la ocurrencia del evento como un todo es proporcional al cuadrado del valor absoluto de la amplitud de probabilidad resultante.

5.3. Evolución de un estado cuántico del campo electromagnético

Siguiendo nuestro anterior argumento, sea Ψ una función de onda cualquiera para un fotón. Los estados propios del operador \hat{q} los denotamos como $|q\rangle$, donde $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$. La correspondiente función de onda para dicho estado es $\Psi(q)$, con

$$\Psi(q) = \langle q|\Psi\rangle. \quad (5.3.1)$$

Asumiendo $t = 0$ para el estado inicial de la función de onda, la evolución temporal de dicho estado con Hamiltoniano 4.1.12 es (ver Eq.3.1.1)

$$\Psi(q_F, t) = \left(\frac{\omega}{2\pi i\hbar \sin \omega t}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \omega \left([q_I^2 + q_F^2] \cot \omega t - \frac{2q_I q_F}{\sin \omega t} \right) \right] \Psi(q_I, 0) dq_I. \quad (5.3.2)$$

Como se presentó en la sección 5.1, la anterior expresión que representa la evolución temporal de un estado cuántico del campo electromagnético $\Psi(q_I, 0)$ se puede escribir en la forma de una TFFr (Eq. 5.1.9) a partir de un pequeño cambio de variables (Eqs. 5.1.5) como sigue

$$\phi(x', t) = e^{-i\frac{\alpha}{2}} \mathcal{F}_\alpha [\phi(x, 0)] (x'). \quad (5.3.3)$$

La pregunta que se desea responder en nuestras condiciones es: ¿a qué corresponde el observable \hat{q} y sus estados propios $|q\rangle$? Y en consecuencia ¿qué significa el estado $\Psi(q, t)$ y más importante aún el cuadrado de dicha función $|\Psi(q_F, t)|^2$?

Para responder esto hay que tener en cuenta que el observable \hat{q} que se encuentra en el Hamiltoniano para el campo electromagnético no corresponde a un estado de

posición tal como lo conocemos de forma natural, pero como veremos a continuación, este observable representa una dirección en particular.

Es necesario notar que durante el desarrollo de las integrales de camino de Feynman se lidió con variables de posición x y momento p como se conocen naturalmente, pero en el caso del campo electromagnético las variables conjugadas no son las mismas y por esta razón se puede decir que el desarrollo de Feynman cuando se aplica al campo electromagnético cuantizado se realiza con unas coordenadas generalizadas q y p que para nuestro beneficio poseen unidades de posición y momento respectivamente.

Para analizar el significado de estos observables comenzaremos por notar que las correspondientes funciones de onda para un estado número son⁵

$$\psi_n(q) = \langle q|n\rangle = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi), \quad (5.3.4)$$

donde $\xi = q\sqrt{\omega/\hbar}$ y donde $H_n(\xi)$ son los polinomios de Hermite.

La función de onda representa la proyección de un estado número hacia el observable \hat{q} que corresponden a las funciones de Hermite-Gauss. Este resultado recuerda particularmente a los modos transversales de un campo electromagnético dentro de una cavidad, cuyo tratamiento conduce a que el resultado de dichos modos transversales son también funciones de Hermite-Gauss. El modo transversal de un frente de onda electromagnético es el perfil del campo en un plano perpendicular (transversal) a la dirección de propagación del haz y estos modos precisamente toman la forma de las funciones de Hermite-Gauss⁶. En la figura 5.2 se muestran los modos transversales de un campo electromagnético dentro de una cavidad resonadora, que corresponden a las distribuciones de intensidad formadas por las funciones de Hermite-Gauss.

Veamos más claramente de qué se trata esto, recordemos la ecuación 4.1.5 del campo eléctrico que corresponde a una onda estacionaria

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right) q(t) \sin(kz). \quad (5.3.5)$$

La función $q(t)$ es una función armónica $q(t) = C \sin \omega t$ [33, Chap. 11.3] y en consecuencia existe una oscilación armónica dentro de la propia expresión del campo eléctrico. Este proceso armónico tiene lugar para un valor de z fijo y es precisamente esta función la que garantiza la naturaleza oscilatoria de la amplitud del campo eléctrico. La figura 5.1 muestra un esquema cualitativo de lo mencionado anteriormente.

⁵Cualquier libro de mecánica cuántica donde se discuta el oscilador armónico muestra que las funciones propias del Hamiltoniano armónico son las funciones de Hermite-Gauss [26].

⁶Una explicación profunda se puede encontrar en [32–34], aunque más adelante se analizará un caso particular.

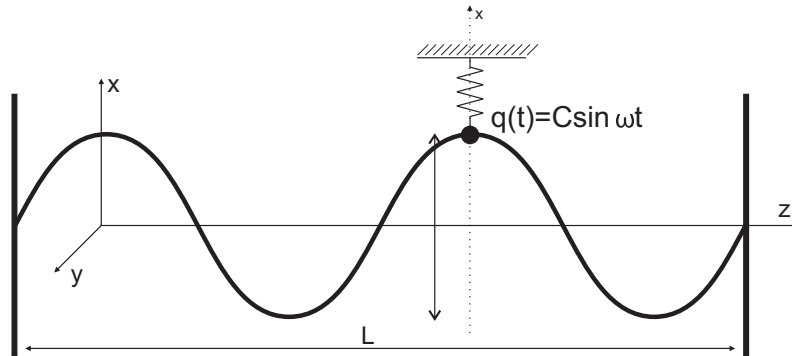


Figura 5.1: Movimiento armónico en la dirección x para un z cualquiera

Notemos que la dirección de oscilación es precisamente la misma en la que está polarizado el campo eléctrico. Es así, que el observable q representa justamente una posición, la posición en la dirección transversal a la propagación del campo y paralela a la dirección de polarización del campo eléctrico.

Con esto en mente, es posible concluir que para el caso de los estados número la amplitud de probabilidad $\psi_n(q)$, que está presentada como funciones de Hermite-Gauss, es la re-presentación del estado proyectado en la dirección transversal q equivalente a la dirección x .

En general, el mismo razonamiento es aplicable a una función de onda cualquiera $\Psi(q)$, que de igual manera simboliza la proyección de la función de onda en la dirección q perpendicular a la propagación del campo electromagnético, la dirección x ; y el cuadrado de esta función $|\Psi(q)|^2$ representa la distribución de probabilidad de encontrar el fotón en dicha dirección.

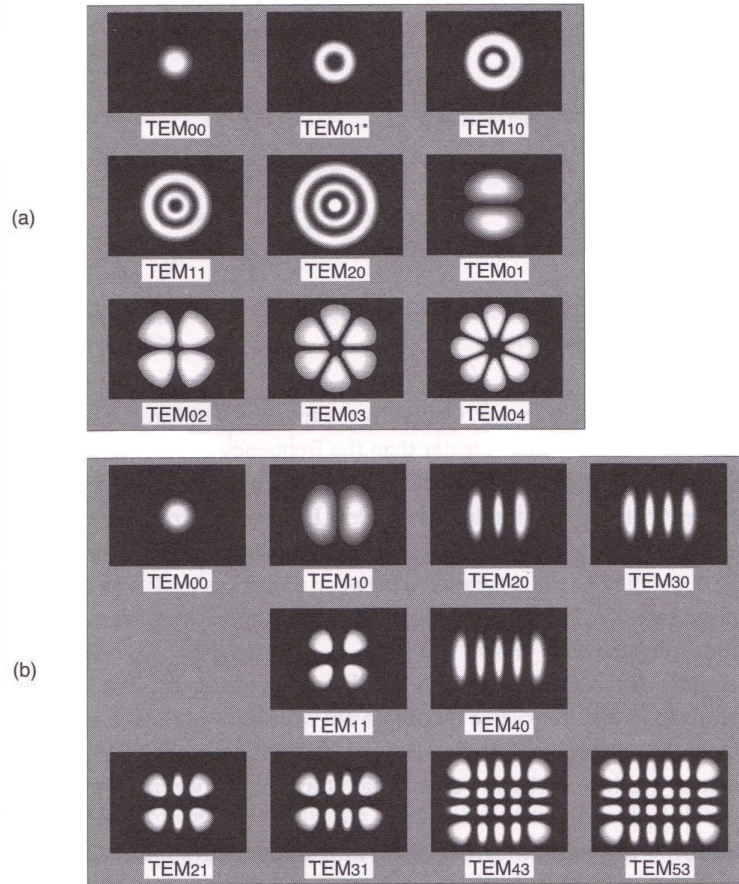


Figura 5.2: Patrones para distintos modos transversales de un láser: modos puros en **a.** simetría circular, **b.** simetría cartesiana. [34, Fig. 11-14]

5.4. Modos transversales en la aproximación de Fresnel

En esta sección se mostrarán los modos transversales de un campo electromagnético confinado en una cavidad resonadora plana finita (espejos planos), para ello seguiremos un razonamiento similar al realizado en [34, Sec. 11.3], pero utilizando, en lugar de la de Fresnel-Kirchhoff (FK), la ecuación de Rayleigh-Sommerfeld (RS) (Eq. 2.2.1) que sabemos, rectifica unas inconsistencias en la escogencia de las condiciones de frontera asociadas a la función de Green (ver por ejemplo [35,36]).

Para ello, primero asumimos que los espejos son planos y de dimensión finita. También se asume que la fuente de luz se origina de un amplificador laser en medio de los espejos, en vez de una onda plana incidente desde el exterior de la cavidad. Con referencia a la figura 5.3, la integral de difracción RS para una amplitud U a una distancia z y una apertura Σ es

$$U'(x', y', z) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(x, y, 0) \frac{e^{ikr}}{r} \cos \chi \, dx \, dy, \quad (5.4.1)$$

donde $r = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2]^{1/2}$ es la distancia entre $(x, y, 0)$ y (x', y', z) . χ es el ángulo de difracción en el punto $(x, y, 0)$, i.e. el ángulo que el rayo difractado hace con la normal al plano, y la integral se realiza sobre el área de la apertura.

Consideremos la figura 5.3. Se evaluará una distribución de luz que inicia en varios puntos del espejo primado y radía hacia el espejo no primado para luego reflejarse de regreso a un punto en el espejo primado.

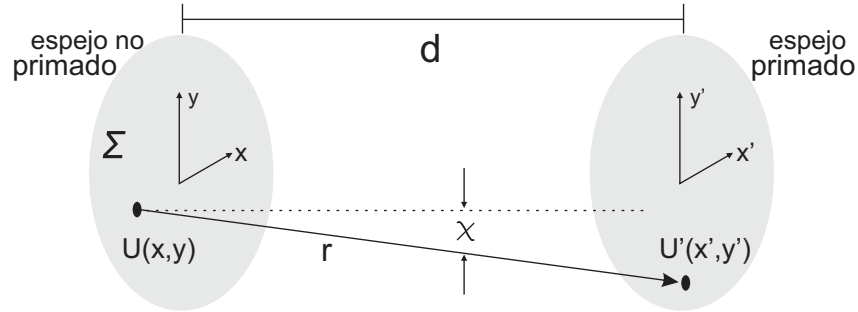


Figura 5.3: Dos espejos paralelos considerados como aperturas cuando se aplica la integral RS a una cavidad electromagnética

Por simetría de la cavidad, para que un modo en un estado estable se produzca, la distribución de amplitud de la luz en los dos espejos debe ser idéntica. Se considera entonces una función $U(x, y)$ como punto de origen en las coordenadas (x, y) del espejo no primado, la cual es la suma de las contribuciones de radiación provenientes de los puntos en el espejo primado que llegan a (x, y) . Esta función $U(x, y)$ luego radía de regreso al espejo primado para llegar a varios puntos en (x', y') con una función de amplitud $U'(x', y')$, después de haber recorrido una distancia r .

En esencia, lo que se busca son soluciones para el caso en el cual la luz ha rebotado varias veces de ida y vuelta entre los dos espejos, hasta que haya alcanzado un perfil transversal estable. Esto es, el campo no cambia más en su forma, aunque la amplitud

en su conjunto pueda disminuir en un factor γ . Este factor representa las pérdidas de difracción alrededor de los espejos.

Esto significa, que estamos buscando soluciones tales que U' y U sean proporcionales para cada punto en (x', y') y (x, y) en los dos espejos. Esto puede ser expresado escribiendo la integral de RS como

$$U'(x', y') = \gamma U(x, y) = \iint_A U(x, y) K(x, y, x', y') dx dy, \quad (5.4.2)$$

donde

$$K(x', y', x, y) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \cos \chi. \quad (5.4.3)$$

Esta es una ecuación integral en U ; K es el kernel de la ecuación y γ es el valor propio. Hay un número infinito de soluciones U_n y γ_n para esta ecuación ($n = 1, 2, 3, \dots$). Estas soluciones se denominan los modos transversales del resonador.

Es importante notar que γ_n es un número complejo: $\gamma = |\gamma_n| e^{i\phi_n}$. $|\gamma|$ representa el cambio en la amplitud después de un recorrido, y ϕ_n representa el cambio de fase en el mismo recorrido. La pérdida de energía por recorrido (ida y vuelta del haz) es

$$\frac{\text{pérdida energía}}{\text{recorrido}} = 1 - |\gamma|^2. \quad (5.4.4)$$

En la sección 2.2.2 se presentó cómo la ecuación de Rayleigh-Sommerfeld se podía escribir a través de una serie de aproximaciones como una transformación de Fourier fraccionaria. De esta manera la ecuación 5.4.2 se puede entender, aparte de unos factores de escala, como

$$\gamma U(x, y) = C \mathcal{F}_\alpha [U(x, y)]. \quad (5.4.5)$$

Esta ecuación nos dice que $U(x, y)$ **es su propia transformada de Fourier fraccionaria** y existe un grupo infinito de funciones que son su propia transformada de Fourier fraccionaria: Estas pueden ser escritas como productos de los polinomios de Hermite ($H_n(x)$) y la función gaussiana: las funciones de Hermite-Gauss.

$$\mathcal{F}_\alpha \left[H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right] = e^{in\alpha} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5.4.6)$$

Por lo tanto

$$U_{pq}(x, y) = C_{pq} H_p \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) H_q \left(\frac{\sqrt{2}y}{w} \right) e^{-(x^2+y^2)/w^2}. \quad (5.4.7)$$

Aquí, p y q son enteros que designan el orden de los polinomio de Hermite y w es una constante de escala, $C_{p,q}$ es un valor constante inherente a la TFFr que depende del

orden de los polinomios de Hermite. Cada par (pq) representa una distribución estable de la amplitud de onda en uno de los espejos, un modo transversal específico de una cavidad sin paredes. La grafica 5.4 muestra las primeras cinco funciones Hermite-Gauss en una dimensión.

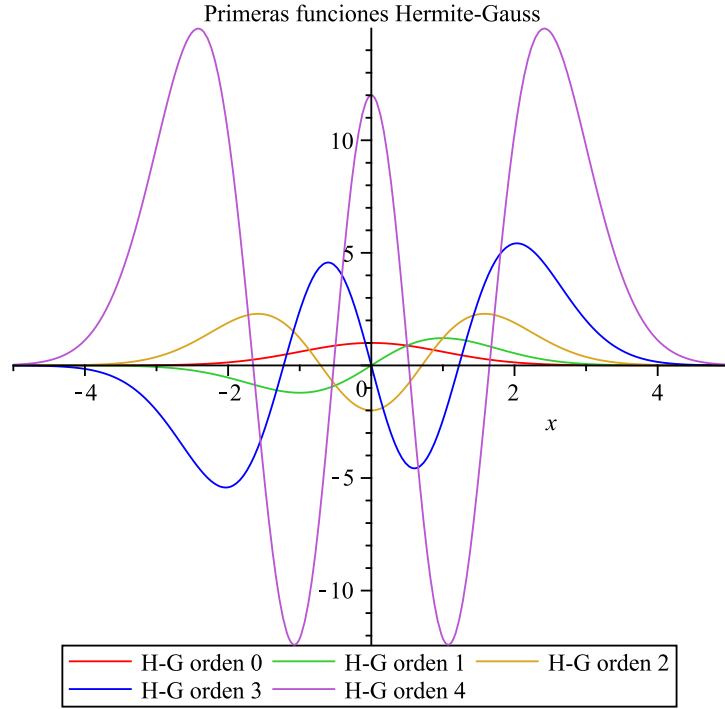


Figura 5.4: Primeras cinco funciones ($p = 0, 1, 2, 3, 4$) de Hermite-Gauss $H_p(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$

Cada una de las distribuciones $U_{pq}(x, y)$ están definidas como TEM_{pq} (transversal electromagnético). El modo más bajo es simplemente la distribución Gaussiana $e^{-(x+y)/w^2}$. Hay que tener en cuenta que lo que se observa experimentalmente es la intensidad y por lo tanto según la ecuación 2.3.5 los modos transversales se comportan de acuerdo a $|U_{pq}(x, y)|^2$, es decir el cuadrado de las funciones de Hermite-Gauss.

Las soluciones Hermite-Gauss de la Eq. 5.4.2 se obtuvieron resolviendo la ecuación integral en coordenadas cartesianas (x, y) , la cual tiene simetría $x - y$. También es posible resolver la integral RS en coordenadas cilíndricas, resultando en modos transversales con simetría cilíndrica. Estas forman un grupo de soluciones **Laguerre-Gauss**(L-G), las cuales son designadas por un par de enteros que indican el orden radial y azimutal. Las soluciones L-G no serán escritas aunque en la figura 5.2-a se muestran las distribuciones de intensidad que se forman [33, 34].

5.5. Distribución de probabilidad e intensidad

De las anteriores secciones hemos inferido un par de cosas: primero, que la función de onda para los estados número $\psi_n(q)$, cuyas soluciones son las funciones Hermite-Gauss, respresenta una amplitud de probabilidad de un estado número proyectado en la posición q , $\langle q|\psi\rangle$, y que el cuadrado de esta función, $|\psi_n(q)|^2$ se interpreta como la probabilidad de encontrar el fotón en dicha posición q transversal a la propagación del campo. Por otro lado, vimos como los modos transversales de un campo electromagnético, es decir los patrones de intensidad producidos en una sección transversal a la propagación del rayo, también pueden ser descritos como funciones Hermite-Gauss. La relación de esto resulta más clara ahora al advertir que los patrones de intensidad formados corresponden al límite clásico del análisis cuántico.

A medida que el número de fotones que ocupan un mismo estado va aumentando, el caracter granular intrínseco de luz va desapareciendo, siendo, en el límite clásico, remplazado por el campo electromagnético como medio continuo de una onda electromagnética.

Imaginemos un haz uniforme de luz con una irradiancia constante (y, por lo tanto, un flujo medio de fotones constante) incidente en una pantalla. La energía del haz se deposita en la pantalla como una ráfaga aleatoria de pequeños impactos. Los fotones inciden, individualmente, en puntos del plano de observación cuya ubicación y momento de llegada son completamente imprevisibles. Es así, que se puede decir que la luz se compone de paquetes de energía aleatorios en términos de espacio y de tiempo a lo largo del haz.

Imaginemos que proyectamos una luz en la pantalla; podría ser una serie de franjas de interferencias o una imagen cualquiera (fig. 5.5). El frente de fotones que constituyen la imagen obedece a cierta distribución estadística, a partir de la cual no podemos prever cuando un fotón llegará a un punto cualquiera pero podemos calcular la probabilidad de que uno o varios fotones incidan en un punto específico durante un periodo de tiempo considerable. **En cualquier punto de la pantalla, el valor medido (o calculado según los parámetros clásicos) de la irradiancia es proporcional a la probabilidad de detectar un fotón en ese punto.** Esto ha sido confirmado experimentalmente por ejemplo en [37, 38] observando la interferencia de fotones individuales.

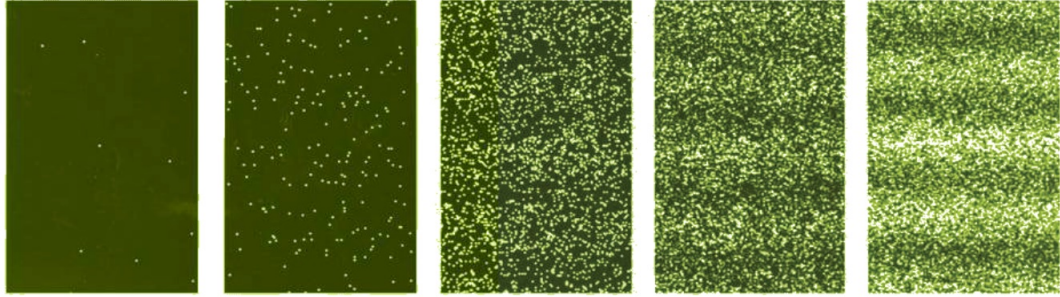


Figura 5.5: Interferencia fotón por fotón sobre intervalos crecientes de tiempo. Inicialmente la detección de los fotones pone en evidencia el comportamiento corpuscular de la luz (izquierda). Al final, se vislumbra una distribución de máximos y mínimos típico del comportamiento ondulatorio (derecha). *European Journal of Physics Education* **3:2**, 1-11 (2012).

Yendo un poco más allá, lo anteriormente mencionado se apoya notoriamente en el análisis que realizamos a continuación.

La propagación de una onda electromagnética está determinada a partir del principio de Huygens - Fresnel mediante la ecuación de Rayleigh-Sommerfeld (Eq. 2.2.1)

$$U(x) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(x') \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos \theta \, ds, \quad (5.5.1)$$

a su vez se mostró cómo esta ecuación se reduce a una expresión más simple y útil, conocida como la aproximación de Fresnel o de campo mediano, escribiendo la Eq. 2.2.12 unidimensionalmente

$$U(x) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{[i\frac{\pi}{\lambda z}x^2]} \int_{\mathbb{R}^2} U(x') e^{[i\frac{\pi}{\lambda z}x'^2]} e^{[-\frac{2i\pi}{\lambda z}xx']} \, dx', \quad (5.5.2)$$

y que, aún más, existe una relación entre la expresión anterior y la entidad matemática conocida como *transformación de Fourier fraccionaria* donde se puede mostrar que (Eq. 2.2.21)

$$U(x) \propto \mathcal{F}_{\alpha}[U(x')](x). \quad (5.5.3)$$

El estudio del patrón de difracción se realiza mediante el cálculo de la intensidad que produce la onda al ser difractada por ejemplo mediante una rendija de apertura finita. Según la Eq. 2.3.5 la *intensidad* de una onda monocromática escalar en el punto x está definida como el cuadrado de la magnitud de la función compleja de posición $U(x)$

$$I(x) = |U(x)|^2. \quad (5.5.4)$$

Esto significa que la intensidad se calcula a partir de [18, Eq. 21]

$$I(x) \propto |\mathcal{F}_\alpha[U(x')](x)|^2. \quad (5.5.5)$$

Por otra parte, el estado de una partícula cuántica evoluciona mediante la convolución de su propagador y la función de onda en un tiempo previo (Eq. 3.1.1). Para el caso de un fotón, una amplitud de probabilidad se propaga a partir de la integral de Feynman de acuerdo a Eq. 5.3.2, que de igual forma se puede interpretar a partir de la transformación de Fourier fraccionaria (Eq. 5.1.9)

$$\Psi(x, t) \propto \mathcal{F}_\alpha[\Psi(x', 0)](x). \quad (5.5.6)$$

La densidad de probabilidad asociada a $|\Psi\rangle$ se define como

$$\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 \quad (5.5.7)$$

y representa la probabilidad de encontrar la partícula en una región determinada del espacio. Reemplazando se tiene

$$\rho(x, t) \propto |\mathcal{F}_\alpha[\Psi(x', 0)](x)|^2. \quad (5.5.8)$$

Se nota entonces, que la expresión cuántica se complementa de manera adecuada con lo que se espera clásicamente. Es claro que no puede ser de otra manera, ya que como se dijo anteriormente las regiones más brillantes corresponden a puntos en donde hay más probabilidad de encontrar el fotón, y viceversa las regiones oscuras representan una probabilidad nula.

Consideremos, a manera de ejemplo, la irradiancia sobre una pantalla ubicada mucho más allá de una abertura con forma de rendija (Fig. 5.6) tal que $I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2 \beta(\theta)$ [1, Sec. 10.2]. Supongamos que en lugar de observar el patrón visiblemente, utilizamos un detector compuesto por un diafragma seguido de un tubo fotomultiplicador. Este mecanismo podría transportarse de un punto a otro y, en un intervalo de tiempo constante, podría medir el número de fotones que llega a cada punto, $N(\theta)$. Tomando un gran número de estas medidas, obtendríamos una distribución espacial del número de recuentos fotónicos que correspondería a la misma fórmula de la irradiancia, a saber, $N(\theta) = N_0 \text{sinc}^2 \beta(\theta)$. **El número de fotones detectados es proporcional a la irradiancia.**

Cabe notar que una distribución de intensidad es observada si los fotones al ser lanzados uno a uno sobre la rendija están en el mismo estado cuántico, de esta manera

la energía se va sumando una a una hasta formar el patrón de franjas característico del experimento. Esto se corresponde clásicamente con la noción de coherencia. Los experimentos de difracción se realizan mediante el uso de luz coherente (e.g. láser), de no ser así, lo que se observaría será una mancha de luz (por ejemplo si se usara luz de una bombilla convencional o de una vela). Cuánticamente esto se interpreta: si se lanzan fotones uno a uno en diferentes estados cuánticos, las distribución de probabilidad de cada fotón propagado será distinta y no se sumarán coherentemente; en consecuencia, la irradiancia asociada a un gran número de fotones no formarán patrón de difracción alguno.

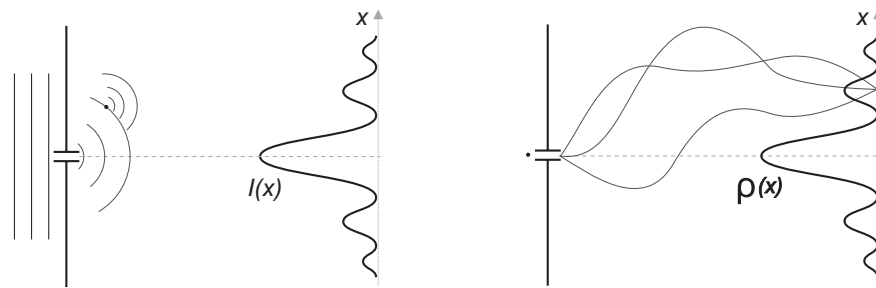


Figura 5.6: Distribución de intensidad y probabilidad

El cuadrado de la amplitud del campo eléctrico neto en cada punto del espacio corresponde a la irradiancia (que puede medirse directamente) y que es equivalente a la probabilidad de encontrar fotones en cualquier punto dado. De acuerdo con esto, hagamos un intento de definir la amplitud de probabilidad como esa cantidad cuyo valor elevado al cuadrado es la densidad de probabilidad. Así, podemos interpretar a $U(x)$ como un valor proporcional a una amplitud de probabilidad semiclassical ya que **la probabilidad de detectar un fotón en un punto cualquiera del espacio depende de la irradiancia que haya en dicho punto $I \propto U^2$** . Desde este punto de vista, las ondas de dicho campo revelan el modo en que los fotones se distribuyen en el espacio, en el sentido de que el cuadrado del valor absoluto de la amplitud de onda está relacionado con la densidad de probabilidad de los fotones que llegan a un punto

$$I(x) \propto \rho(x, t). \quad (5.5.9)$$

En el tratamiento formal de la mecánica cuántica la función de onda de Schrödinger corresponde a esta amplitud de probabilidad cuyo valor absoluto elevado al cuadrado se entiende como la densidad de probabilidad.

Se advierte a la transformación de Fourier fraccionaria como elemento matemático que caracteriza la propagación de un sistema electromagnético tanto clásico como

cuántico, el cual nos permite deducir que el patrón de intensidad que se observa corresponde al límite clásico del sistema cuántico; esto es, al realizar el experimento para una gran cantidad de fotones individuales, o lo que es lo mismo, el mismo experimento fotón por fotón una gran cantidad de veces, se observa el caso clásico.

Capítulo 6

Conclusiones

Una vez examinada las cuestiones más relevantes para nuestro tratamiento sobre la propagación del fenómeno ondulatorio electromagnético como límite clásico de la propagación de fotones, falta tan solo presentar las conclusiones a las que hemos llegado al término de nuestra investigación. Realizaremos esto presentando consideraciones generales desde nuestra perspectiva para luego detallar un poco más al respecto.

6.1. Sobre la integral de caminos

En nuestro trabajo, la integral de caminos de Feynman corresponde a una herramienta útil en el estudio de la propagación de los estados cuánticos¹; fundamentalmente porque permite una interpretación más intuitiva de la evolución temporal de un estado. Se interpreta que una partícula cuántica se desplaza de un punto a otro mediante una superposición de infinitas trayectorias a la que cada una le corresponde un factor de peso, es decir la noción de trayectoria es retomada y se concibe al mundo macroscópico como una proyección de lo que ocurre cuánticamente, compensando, de alguna manera, esa extraña sorpresa que produce el comportamiento algunas veces ondulatorio de las partículas [11, 12, 39]. Para el caso de los fotones la integral de caminos es equivalente matemáticamente al de una partícula con masa unitaria sometida a un potencial armónico. Esto es, como si de alguna manera el fotón intrínsecamente estuviera sometido a un potencial armónico producido por las coordenadas generalizadas q y p asociadas al campo eléctrico y magnético a nivel macroscópico. Los fundamentos más profundos

¹La integral de caminos es sencillamente la formulación integral de la mecánica cuántica y la ventaja que esta tiene es la fácil asociación con la mecánica clásica a través de la acción.

sobre la idea del fotón van más allá de nuestro trabajo y su interpretación física aún es objeto de discusión y estudio [40, 41].

6.2. Sobre la TFFr y el principio de Huygens

La transformación de Fourier fraccionaria se adapta a la expresión matemática de la difracción de Fresnel, justo como la transformación de Fourier se adapta a la difracción de Fraunhofer. La continuidad de las transformaciones fraccionarias de Fourier corresponden a la continuidad de la propagación ondulatoria y su composición está en concordancia con el principio de Huygens. La TFFr, de igual manera se ajusta a la integral de caminos de Feynman para un potencial armónico y por extensión se ajusta a la aplicación de la integral de caminos para los fotones.

La transformación de Fourier fraccionaria se relaciona directamente con la aproximación de Fresnel del principio de Huygens (2.2.12) y no con la ecuación de Rayleigh-Sommerfeld (2.2.1) directamente. Y la posterior asociación que se realiza entre el modelo clásico y el cuántico es, por ende, entre la aproximación de Fresnel y la propagación de los fotones. Esto se puede entender desde el punto de vista de que el principio de Huygens, como tal, usa un argumento idealizado: los frentes de ondas se componen de fuentes puntuales que a su vez producen frentes de ondas esféricos. Las fuentes puntuales no existen en la naturaleza y, ciertamente, los fotones no corresponden a partículas puntuales, aunque a nivel macroscópico se comporten como tal; los átomos tampoco emiten frentes de onda esféricos. El hecho de que cuánticamente la propagación de los fotones se ajuste mejor a una aproximación del principio de Huygens que al propio principio en sí, plantea ciertas cuestiones acerca de qué tan fundamental puede llegar a ser el principio de Huygens. Por ahora, nuestro trabajo permite concluir que la propagación de un fotón expuesta mediante el uso de la integral de caminos de Feynman asociada a la cuantización de campo electromagnético sometido a una cavidad es formalmente equivalente a la aproximación de Fresnel del principio de Huygens expresado a través de la ecuación de Rayleigh-Sommerfeld.

6.3. Sobre la cuantización del campo electromagnético

Hemos visto que el campo electromagnético sometido a una cavidad se comporta de manera equivalente, por lo menos matemáticamente, al de un oscilador armónico. Una

extención al campo electromagnético libre se describe mediante una colección de osciladores armónicos desacoplados, cada uno de los cuales está descrito por el Hamiltoniano 4.1.21. No obstante, como los osciladores son desacoplados, basta con el estudio de uno solo.

En el estudio de los estados cuánticos de la luz se analizaron con especial atención los estados de Fock. La cuantización de las ecuaciones de Maxwell implica la existencia de elementos de excitación del campo electromagnético con energía cuantizada $\hbar\omega$. Estas excitaciones, o partículas, son los *fotones*. Los estados de Fock, son estados del campo electromagnético con un número bien definido de fotones, y en concordancia, los operadores \mathcal{A} y \mathcal{A}^\dagger aniquilan y crean fotones. Desde el punto de vista de la dualidad onda partícula, este tipo de estado está estrechamente relacionado a la naturaleza corpuscular de la radiación más que a su naturaleza ondulatoria.

De nuestro trabajo concluimos que el paquete de ondas de un estado número $\psi_n(q) = \langle q|n\rangle$, cuya representación son las funciones de Hermite-Gauss representa la amplitud de probabilidad de encontrar el fotón en la dirección q transversal al campo. Y además, que esto se ajusta clásicamente con los modos transversales de un campo electromagnético en una cavidad resonante. Se hace notar que claramente los modos transversales se analizan a través de los patrones de intensidad formados sobre una pantalla, lo cual, como vimos en la sección 5.5, existe una relación de proporcionalidad con la densidad de probabilidad asociada a una función de onda, en este caso $|\psi_n(q)|^2$.

Un aspecto interesante de un análisis más profundo consiste en la razón de que los estados de Fock sean los que se comportan de esta manera y no sea así por ejemplo, para los estados coherentes del campo electromagnético. Aunque se puede considerar que los estados de Fock son los más apropiados para el estudio de los fotones ya que estos son los que representan un número de fotones bien definidos.

Finalmente, parece justo concluir que en nuestro estudio se expuso la presencia de una relación matemática de proporcionalidad entre la distribución de intensidad $I(x)$ para una amplitud de campo electromagnético $U(x)$ y la densidad de probabilidad $\rho(x)$ de un fotón asociado a un paquete de ondas $\Psi(x)$ a partir del análisis de los fenómenos clásicos y cuánticos independientemente. Y que el resultado corresponde a lo esperado desde el punto de vista que dicta que el cuadrado de la amplitud del campo eléctrico en cualquier punto en el espacio corresponde a la irradiancia, y que esta es coincidente con la posibilidad de hallar un fotón en un punto cualquiera.

Apéndice A

Transformación de Fourier fraccionaria

Si n es un número entero positivo, el polinomio de Hermite de orden n es

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x)^2 \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2). \quad (\text{A.0.1})$$

Los primeros polinomios de Hermite son

$$H_0(x) = 1, \quad (\text{A.0.2})$$

$$H_1(x) = 2x, \quad (\text{A.0.3})$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad (\text{A.0.4})$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad (\text{A.0.5})$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \quad (\text{A.0.6})$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x. \quad (\text{A.0.7})$$

Los polinomios de Hermite son tales que [42]

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixy} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) dx = \sqrt{2\pi} i^n e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y). \quad (\text{A.0.8})$$

De la ecuación A.0.8, resulta que si \mathcal{F} representa la transformación de Fourier, las funciones φ_n de Hermite - Gauss, definidas por

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2}} H_n(\beta x), \quad (\text{A.0.9})$$

con $\beta = \sqrt{2\pi}$

$$\varphi_n(x) = H_n(\sqrt{2\pi}x) \exp[-\pi x^2], \quad (\text{A.0.10})$$

son tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\varphi_n] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \nu} e^{-\pi x^2} H_n(\sqrt{2\pi}x) dx, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \nu} e^{-\pi \frac{u^2}{2\pi}} H_n(u) du, \quad (u = \sqrt{2\pi}x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{2\pi} i u \nu} e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u) du, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i u y} e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u) du, \quad (y = -\sqrt{2\pi} \nu) \\ &= i^n e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y), \\ &= i^n (-1)^n e^{-\pi \nu^2} H_n(\sqrt{2\pi} \nu), \quad (H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)) \\ &= i^n (-1)^n \varphi_n, \\ &= e^{-\frac{i n \pi}{2}} \varphi_n, \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[\varphi_n] = \exp\left[-i \frac{n\pi}{2}\right] \varphi_n. \quad (\text{A.0.11})$$

La función φ_n es función propia de \mathcal{F} con el valor propio $e^{-in\pi/2}$.

Para encontrar la transformación de Fourier Fraccionaria, Victor Namias [22] debió considerar a \mathcal{F} como un operador diferencial lineal

$$\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} |\varphi_n(x)\rangle = e^{-in\frac{\pi}{2}} |\varphi_n(x)\rangle. \quad (\text{A.0.12})$$

El procedimiento ahora consiste en construir un operador que satisfaga la ecuación de valores propios

$$\mathcal{F}_\alpha |\varphi_n(x)\rangle = e^{-in\alpha} |\varphi_n(x)\rangle. \quad (\text{A.0.13})$$

Este operador \mathcal{F}_α se puede representar en la forma $e^{-i\alpha\mathcal{N}}$ tal que

$$e^{-i\alpha\mathcal{N}} |\varphi_n(x)\rangle = e^{-in\alpha} |\varphi_n(x)\rangle, \quad (\text{A.0.14})$$

donde \mathcal{N} es el operador número

$$\mathcal{N} |\varphi_n(x)\rangle = n |\varphi_n(x)\rangle, \quad (\text{A.0.15})$$

con $\mathcal{N} = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}$ y los operadores \mathcal{A} y \mathcal{A}^\dagger son los operadores aniquilación y creación respectivamente.

A.1. Representación integral

Para realizar los cálculos de las transformaciones de una manera más práctica, una representación integral se hace necesaria.

Toda función $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ se puede desarrollar de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad \text{con } a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) f(x) dx, \quad (\text{A.1.1})$$

y calculando su transformada correspondiente se obtiene

$$\mathcal{F}_\alpha[f](x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-in\alpha} \varphi_n(x). \quad (\text{A.1.2})$$

entonces, al insertar a_n de la ecuación A.1.1 en la ecuación A.1.2 y usando la fórmula de Melher basada en la representación integral de los polinomios de Hermite

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-in\alpha}}{2^n n!} H_n(\sqrt{2\pi}x) H_n(\sqrt{2\pi}x') = (1 - e^{-i2\alpha})^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{4\pi x x' e^{-i\alpha} - e^{-i2\alpha} 2\pi(x^2 + x'^2)}{1 - e^{-i2\alpha}} \right], \quad (\text{A.1.3})$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha[f](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\alpha} \varphi_n(x') \varphi_n(x) f(x') dx', \\ &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x'^2+x^2)} f(x') \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-in\alpha}}{2^n n!} H_n(\sqrt{2\pi}x') H_n(\sqrt{2\pi}x) \right] dx', \\ &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi(x'^2+x^2)}}{\sqrt{1 - e^{-i2\alpha}}} f(x') \exp \left[\frac{4\pi x x' e^{-i\alpha} - 2\pi e^{-i2\alpha}(x^2 + x'^2)}{1 - e^{-i2\alpha}} \right] dx', \\ &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi(x'^2+x^2)} e^{\frac{i\alpha}{2}}}{\sqrt{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}} f(x') \exp \left[\frac{4\pi x x' - 2\pi e^{-i\alpha}(x^2 + x'^2)}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}} \right] dx', \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi(x'^2+x^2)} e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{-i\pi}{4}}}{\sqrt{\sin \alpha}} f(x') \exp \left[\frac{-i2\pi x x' + i\pi e^{-i\alpha}(x^2 + x'^2)}{\sin \alpha} \right] dx', \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{-i\pi}{4}}}{\sqrt{\sin \alpha}} f(x') \exp \left[\frac{-i2\pi x x' + i\pi \cos \alpha(x^2 + x'^2)}{\sin \alpha} \right] dx'. \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{F}_\alpha[f](x) = \frac{e^{-i(\operatorname{sgn}(\sin \alpha)\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i\pi \left(\cot \alpha [x'^2 + x^2] - \frac{2xx'}{\sin \alpha} \right) \right] f(x') dx', \quad (\text{A.1.4})$$

donde la función $\frac{e^{-i(\operatorname{sgn}(\sin \alpha)\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{|\sin \alpha|}}$ la introduce Mc Bride en [23].

BIBLIOGRAFÍA

- [1] E. Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, 2002.
- [2] J.W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill physical and quantum electronics series. Roberts & Company, 2005.
- [3] D.F. Walls and G.J. Milburn. *Quantum Optics*. SpringerLink: Springer e-Books. Springer, 2008.
- [4] P. Meystre and M. Sargent. *Elements of Quantum Optics*. SpringerLink: Springer e-Books. Springer, 2007.
- [5] C. Gerry and P. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005.
- [6] W. Vogel and D.G. Welsch. *Quantum Optics*. Wiley, 2006.
- [7] M.O. Scully and S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [8] Richard Phillips Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 20(2):367, 1948.
- [9] R.P. Feynman and A.R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals: Emended Edition*. Dover Publications, Incorporated, 2012.
- [10] A.O. Barut and S. Basri. Path integrals and quantum interference. *American journal of physics*, 60(10):896–899, 1992.
- [11] Mathieu Beau. Feynman integral and one/two slits electrons diffraction: an analytic study. *arXiv preprint arXiv:1110.2346*, 2012.
- [12] Mathieu Beau. Feynman path integral approach to electron diffraction for one and two slits: analytical results. *European Journal of Physics*, 33(5):1023, 2012.

- [13] Maria de los Angeles Fanaro, Marcelo Arlego, and Maria Rita Otero. A didactic proposed for teaching the concepts of electrons and light in secondary school using feynman's path sum method. *European Journal of Physics Education*, 3(2):1–11, 2012.
- [14] H. Yabuki. Feynman path integrals in the young double-slit experiment. *International journal of theoretical physics*, 25(2):159–174, 1986.
- [15] S.W. Lee. Path integrals for solving some electromagnetic edge diffraction problems. *Journal of Mathematical Physics*, 19(6):1414–1422, 1978.
- [16] M. Born, E. Wolf, A.B. Bhatia, D. Gabor, A.R. Stokes, A.M. Taylor, P.A. Wayman, and W.L. Wilcock. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, 2000.
- [17] Haldun M. Ozaktas and David Mendlovic. Fractional fourier optics. *JOSA A*, 12(4):743–751, 1995.
- [18] T. Alieva, V. Lopez, F. Agullo-Lopez, and L.B. Almeida. The fractional fourier transform in optical propagation problems. *Journal of modern optics*, 41(5):1037–1044, 1994.
- [19] Pierre Pellat-Finet. Fresnel diffraction and the fractional-order fourier transform. *Optics Letters*, 19(18):1388–1390, 1994.
- [20] P. Pellat-Finet. *Lecciones de óptica de Fourier*. Universidad Industrial de Santander, 2004.
- [21] Cesar O. Torres, Yezid Torres, and Pierre Pellat-Finet. Optica fraccional de fourier.
- [22] Victor Namias. The fractional order fourier transform and its application to quantum mechanics. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 25(3):241–265, 1980.
- [23] A.C. McBride and F.H. Kerr. On namias's fractional fourier transforms. *IMA Journal of applied mathematics*, 39(2):159–175, 1987.
- [24] D.W. Kammler. *A First Course in Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 2007.
- [25] S.T. Thornton and J.B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Brooks/Cole, 2004.
- [26] J.J. Sakurai and J.J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Pearson Education, 2014.

- [27] R. Martínez. *Teoría cuántica de campos*. Colección Textos. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Física, 2002.
- [28] A. Das. *Field Theory: A Path Integral Approach*. World Scientific lecture notes in physics. World Scientific, 2006.
- [29] Simon Brattke, Benjamin T.H. Varcoe, and Herbert Walther. Generation of photon number states on demand via cavity quantum electrodynamics. *Physical review letters*, 86(16):3534, 2001.
- [30] Benjamin TH Varcoe, Simon Brattke, Matthias Weidinger, and Herbert Walther. Preparing pure photon number states of the radiation field. *Nature*, 403(6771):743–746, 2000.
- [31] M. Alper Kutay and Haldun M. Ozaktas. The fractional fourier transform and harmonic oscillation. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4):157–172, 2002.
- [32] F.G. Smith, T.A. King, and D. Wilkins. *Optics and Photonics: An Introduction*. Manchester physics series. Wiley, 2007.
- [33] B.E.A. Saleh and M.C. Teich. *Fundamentals of photonics*. Wiley series in pure and applied optics. Wiley, 1991.
- [34] W.T. Silfvast. *Laser Fundamentals*. Cambridge University Press, 2004.
- [35] Robert L Lucke. Rayleigh–sommerfeld diffraction and poisson’s spot. *European journal of physics*, 27(2):193, 2006.
- [36] E. Wolf and W. Marchand. Comparison of the kirchhoff and the rayleigh-sommerfeld theories of diffraction at an aperture. *JOSA*, 54(5):587–594, 1964.
- [37] Philippe Grangier, Gerard Roger, and Alain Aspect. Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: a new light on single-photon interferences. *EPL (Europhysics Letters)*, 1(4):173, 1986.
- [38] Anton Zeilinger. Experiment and the foundations of quantum physics. *Reviews of Modern Physics*, 71(2):S288, 1999.
- [39] Anton Zeilinger, Roland Gähler, CG Shull, Wolfgang Treimer, and Walter Mampe. Single and double-slit diffraction of neutrons. *Reviews of modern physics*, 60(4):1067, 1988.
- [40] Chandra Roychoudhuri, Al F Kracklauer, and Kathy Creath. *The nature of light: what is a photon?* CRC Press, 2008.

- [41] Anton Zeilinger, Gregor Weihs, Thomas Jennewein, and Markus Aspelmeyer. Happy centenary, photon. *Nature*, 433(7023):230–238, 2005.
- [42] N. N. Lebedev. *Special functions and their applications*. Edición original: Prentice Hall(1965). Dover Publications, 1972.