

**Gestión de inventarios en un almacén doble canal con restricciones de
dimensionamiento**

Fabian Alexander Torres Cárdenas

Trabajo de investigación para optar el título de Magister en Ingeniería Industrial

Director

Carlos Eduardo Díaz Bohórquez

Magister en Ingeniería Industrial

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas

Escuela de Estudios Industriales y Empresariales

Maestría en Ingeniería Industrial

Bucaramanga

2020

Agradecimientos

A Dios, por darme la fortaleza para superar las dificultades.

A mi madre María Cecilia, por su incondicional apoyo y motivación cada día.

A mi tío Ignacio por su apoyo y respaldo a lo largo de la carrera en los momentos
difíciles.

A mis hermanas Diana, Nataly y Dania por ser mi fortaleza y compañía durante este
proceso.

A mis amigos y compañeros del grupo Opalo por su apoyo a lo largo del proyecto. A
mis maestros que con su orientación y consejos fueron el soporte para alcanzar este logro.

Al profesor Carlos Díaz por su orientación y dedicación para el desarrollo del
proyecto.

Tabla de Contenido

Introducción	10
1. Revisión de literatura	13
1.1. Gestión de inventarios en la Cadena de suministro de doble canal	13
1.2. Dimensionamiento de almacenes tradicionales	17
1.3. Discusión revisión de la literatura.....	20
2. Justificación y Planteamiento del problema	21
3. Objetivos	24
3.1 Objetivo general	24
3.2 Objetivos específicos	24
4. Hipótesis	25
5. Formulación del modelo matemático.....	26
5.1. Supuestos	26
5.2. Notación.....	27
5.2.1. <i>Índices</i>	27
5.2.2. <i>Parámetros</i>	27
5.2.3. <i>Variables de decisión</i>	28
6. Análisis del problema de Programación no lineal restringido	31
7. Distribución uniforme	35
7.1. Demanda uniforme tiempo de entrega estocástico	35

8.	Distribución normal	37
9.	Método de bisección modificado	40
10.	Ejemplos numéricos	43
10.1	Demanda uniforme y tiempo de entrega estocástico.....	46
10.2.	Demanda con distribución normal y tiempo de entrega estocástico	47
10.3.	Análisis preliminar	48
11.	Resultados	48
11.1.	Demanda con distribución uniforme y tiempo de entrega estocástico	48
11.2.	Demanda como distribución normal y tiempo de entrega estocástico.....	50
12.	Prueba de hipótesis	52
12.1.	Ejemplo 1	53
12.2	Ejemplo 2	56
13.	Discusión.....	57
14.	Conclusiones	59
15.	Recomendaciones	60
	Referencias Bibliográficas	61

Lista de Tablas

Tabla 1 <i>Ejemplo de cuatro tamaños de almacén disponibles</i>	46
Tabla 2 <i>Parámetros demanda uniforme y tiempo de entrega estocástico.</i>	47
Tabla 3 <i>Ejemplo para cinco tamaños discretos de almacén.</i>	47
Tabla 4 <i>Parámetros distribución normal y tiempo de entrega estocástico</i>	47
Tabla 5 <i>Resultados ejemplo distribución uniforme</i>	48
Tabla 6 <i>Costo de inventario y almacenamiento distribución uniforme</i>	49
Tabla 7 <i>Resultados de asignación de espacio de almacenamiento</i>	49
Tabla 8 <i>Resultados ejemplo de distribución normal</i>	50
Tabla 9 <i>Costos de inventario y almacenamiento por cada tamaño de almacén.</i>	50
Tabla 10 <i>Resultados espacio de almacenamiento distribución normal</i>	52
Tabla 11 <i>Ejemplo de cinco tamaños de almacén disponibles</i>	53
Tabla 12 <i>Parámetros Ejemplo 1</i>	53
Tabla 13 <i>Resultados ejemplo 1 tamaño de almacén 1000 m²</i>	54
Tabla 14 <i>Costos de inventario y de almacenamiento de almacén 1000 m²</i>	54
Tabla 15 <i>Resultados de asignación de espacio de almacenamiento</i>	54
Tabla 16 <i>Resultados de variables de decisión para los tamaños de almacén.</i>	55
Tabla 17 <i>Costos de inventario y almacenamiento para cada tamaño de almacén</i>	55
Tabla 18 <i>Resultados de asignación de espacio de almacenamiento</i>	55
Tabla 19 <i>Resultados para el tamaño de almacén 3500 m²</i>	56
Tabla 20 <i>Costos de inventario y almacenamiento para el caso de 3500 m²</i>	56
Tabla 21 <i>Resultados de asignación de espacio de almacenamiento</i>	57

Lista de Figuras

Figura 1 <i>Modelo conceptual almacén doble canal</i>	23
Figura 2 <i>Función de costo de almacenamiento lineal por partes</i>	45
Figura 3 <i>Costos de inventario y almacenamiento vs tamaño de almacén S_n</i>	51

Lista de Apéndices

(Ver apéndices adjuntos en el CD y pueden visualizarlos en la Base de Datos de la Biblioteca UIS)

Apéndice A Desarrollo de ecuaciones.

Apéndice B Código en Matlab del Método de bisección.

RESUMEN

Título: Gestión de inventarios en un almacén doble canal con restricciones de dimensionamiento*

Autor: Fabian Alexander Torres Cárdenas**

Palabras clave: Almacén doble canal, Gestión de inventarios, Dimensionamiento de almacén, Cumplimiento online, Demanda probabilística.

Descripción:

Con el reciente crecimiento del comercio electrónico, los fabricantes están adaptando los almacenes tradicionales a los almacenes de doble canal, que tiene una estructura única que se divide en dos zonas: una para satisfacer los pedidos del canal en línea y la otra para almacenar y satisfacer el pedido del canal tradicional de tiendas minoristas. Sin embargo, agregar un nuevo canal de ventas crea nuevos desafíos en términos de gestión de inventario debido a las diferencias en el tamaño del pedido y los tiempos de cumplimiento. Además de la gran incertidumbre de la demanda a corto y largo plazo. Los tiempos de entrega más cortos han llevado a que los almacenes de doble canal a menudo estén ubicados cerca de ciudades donde el acceso a la tierra es difícil y costoso, es por esto que el dimensionamiento de estos almacenes es una decisión fundamental para las organizaciones. El objetivo de esta investigación es establecer un modelo integrado de gestión de inventario y dimensionamiento del almacén de doble canal, donde se determina el tamaño total del almacén, así como la política de inventario de cada uno de los canales. Se supone una estructura de costos de almacenamiento lineal por partes para el dimensionamiento del almacén, se diseñó un método de bisección para resolver el problema dual de Lagrangiano costo vs espacio. Se encontró que el tamaño del área de almacenamiento de pedidos en línea es un factor clave en el costo de inventario y de dimensionamiento del almacén doble canal.

* Tesis de maestría.

** Facultad de Ingenierías Físico Mecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Director Carlos Eduardo Díaz Bohórquez, Magister en Ingeniería Industrial.

ABSTRACT

Title: Inventory management in a dual channel warehouse with sizing restrictions[†]

Author: Fabian Alexander Torres Cárdenas**

Key Words: Dual-channel warehouse, Inventory management, Sizing warehouse, Online fulfilment, Probabilistic demand.

Descripción:

Since the recent growth of e-commerce, manufacturers are adapting traditional warehouses to dual-channel warehouses, which has a unique structure that is divided into two zones: one to fulfill online channel orders and the other to load and fulfill orders from the traditional retail channel. However, adding a new sales channel creates new challenges in terms of inventory management due to differences in order size and fulfillment times. In addition to the large uncertainty of demand in the short and long term. Shorter delivery times have led to dual-channel warehouses being often located near cities where access to land is difficult and expensive, which is why the sizing of these warehouses is a fundamental decision for organizations. The objective of this research is to establish an integrated model for inventory management and sizing of the dual-channel warehouse, where the total size of the warehouse is determined, as well as the inventory policy of each of the channels. A linear storage cost structure by parts is assumed for the sizing of the warehouse, a bisection method was designed to solve the dual Lagrangian cost vs space problem. The size of the online order storage area was found to be a key factor in the cost of inventory and sizing of the dual-channel warehouse.

[†] Master Thesis.

** Faculty of Physical-Mechanical Engineering. School of Industrial and Management Studies. Directed by: Carlos Eduardo Díaz Bohórquez, Master in Industrial Engineering.

Introducción

El comercio electrónico ha mostrado un crecimiento significativo en la última década; de acuerdo con el estudio de e-Commerce Transfronterizo, el valor en ventas para el 2019 se estima en 3.4 billones de dólares, moverá 900 mil millones de dólares de gastos en compras a nivel internacional para el 2020, lo que representará cinco veces más que el año 2015. De igual forma, se espera en 2021, que más de 2,140 millones de personas en todo el mundo compren bienes y servicios en línea, frente a los 1,66 mil millones de compradores digitales globales en 2016 (Statista, 2019). (Seifert, Thonemann, y Sieke, 2006) menciona que aunque inicialmente este mercado estaba dirigido por pioneros directos como Amazon y Dell, muchos fabricantes de marcas, como HewlettPackard (Hp), GOME, IBM, Sony, Nike y Apple, vieron el gran potencial de Internet para llegar a los clientes y han agregado a sus operaciones, un canal directo en línea paralelo a las tiendas minoristas tradicionales (Tsay y Agrawal, 2004; (Teimoury, Mirzahosseinian, y Kaboli, 2008); (Xiong, Yan, Fernandes, Xiong, y Guo, 2012); Science, Hui, y Chen, 2014; Xiao y Shi, 2016).

Un estudio realizado por Kilcourse y Rowen (2008), demostró que el 94% de las empresas con mejor desempeño financiero eran empresas de ventas de doble canal. Internet ha creado la oportunidad para que los consumidores compren productos y servicios sin tener que ir a una tienda. Otro aspecto importante, es ofrecer un catálogo más amplio de productos, que por restricciones de espacio no se pueden mostrar en las tiendas tradicionales (Wollenburg, Hubner, Kuhn, y Trautrim, 2018). Además de una experiencia de compra personalizada (Ballesteros y Ballesteros, 2007); (Batarfi, Jaber, y Zanoni, 2016). Sin embargo, agregar un nuevo canal de venta genera nuevos desafíos en términos de gestión de inventarios debido a la

diferencia de: tamaño de los pedidos y tiempos de cumplimiento. Estos canales difieren en costos de oportunidad para la pérdida de ventas y, por lo tanto, requieren diferentes niveles de servicio. Los cuales deben agregarse en un nivel de inventario general y una política de cumplimiento que lo acompañe (Agatz, Fleischmann, y van Nunen, 2008); (Hübner, Holzapfel, y Kuhn, 2015); (De Koster, Johnson, y Roy, 2017); (Fawzat Alawneh y Zhang, 2018); además de la gran incertidumbre en la demanda a largo y corto plazo hace que la planificación de la capacidad y la asignación sean complejas. La comunidad científica se ha centrado principalmente en la planificación de la fuerza laboral, descuidando en gran medida los problemas de infraestructura y capacidad física, como el área de almacenamiento y el equipo (Agatz et al., 2008);(Hübner et al., 2015).

Los plazos de entrega más cortos, la tendencia de la urbanización ha llevado a que los almacenes doble canal a menudo estén ubicados cerca de las ciudades donde el acceso a la tierra es difícil y costoso, en el que los fabricantes buscan formas de maximizar la utilización de la capacidad en sus instalaciones existentes o planificación de nuevas instalaciones de almacenamiento en términos de tamaño de almacén y el tamaños de las áreas de almacenamiento para el canal tradicional y en línea (Kembro, Norrman, y Eriksson, 2018). Lo que ha hecho que las empresas adapten sus almacenes a los requerimientos de los pedidos en línea y de tiendas minoristas, transformándolos así, en un almacén doble canal, el cual consiste en dividir el almacén en dos áreas, una para el cumplimiento de pedidos en línea y, la otra de mayor volumen, para cumplir con los pedidos de las tiendas minoristas. Por lo tanto, se propone diseñar un modelo que integre el dimensionamiento del almacén y la gestión de inventarios para un almacén doble canal. Para el dimensionamiento del almacén se empleó una estructura de costos de almacenamiento lineal por partes que proporciona un valor de costo más realista del espacio de almacén que se adquirirá. Dado que el problema es un modelo de programación no lineal restringido, el algoritmo de bisección se aplica para resolver el problema dual de

Lagrange en el que la restricción de capacidad es igual a cero para alcanzar un equilibrio entre el espacio adquirido y el nivel de inventario de cada uno de los canales para minimizar el costo de inventario y el costo de dimensionamiento del almacén. El método se validó mediante ejemplos numéricos según el problema.

El presente documento está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 1, se encuentra la revisión de literatura sobre el tema de investigación en la cual se identifican aspectos relevantes de la gestión de la cadena de suministro de doble canal, el almacenamiento en la cadena de suministro de doble canal y el dimensionamiento de almacenes; en el capítulo 2 se describe el planteamiento del problema y la justificación del mismo, en el capítulo 3 y 4 se definen respectivamente los objetivos y la hipótesis a corroborar en la presente investigación, en el capítulo 5 la formulación del modelo matemático, en el 6 el Análisis del problema de Programación no lineal restringido, en el capítulo 7 y 8 se presenta el modelo para cada tipo de distribución: uniforme y normal respectivamente. En el capítulo 9 se muestra el Método de Bisección para la solución del problema y en el capítulo 10 se muestran los ejemplos numéricos. Finalmente, en los capítulos 11, 12 ,13 y 14 se presentan los resultados, prueba de hipótesis, discusión y conclusiones.

1. Revisión de literatura

1.1. Gestión de inventarios en la Cadena de suministro de doble canal

El comercio electrónico ha revolucionado los sistemas de distribución actuales, alterando las dinámicas en la logística y comercialización de productos, lo que ha incentivado a la comunidad académica y profesional para analizar los efectos y cambios en las cadenas de suministro y en cada uno de sus componentes, buscando proporcionar modelos y herramientas que se adapten a estos cambios, permitiendo a las empresas ser más eficientes y competitivas.

El canal de distribución juega un papel muy importante en la gestión de la cadena de suministro. En un inicio, los fabricantes producen los productos y los envían a los minoristas, luego los clientes visitan las tiendas minoristas para comprar el producto según sus necesidades este sistema de distribución particular se denomina Canal Tradicional que todavía existe en los negocios (Karim y Xu, 2018). Sin embargo, con la expansión del comercio electrónico, se han creado nuevos sistemas de distribución (Clemons, Gu, y Row, 2000), un ejemplo de estos es la cadena de suministro de doble canal, en el que los fabricantes además de vender en el canal tradicional han agregado un canal directo en línea (Chiang y Monahan, 2005). El canal directo en línea permite a los fabricantes interactuar directamente con los clientes para ofrecer sus productos y servicios sin intermediarios garantizando un mayor margen de beneficio y minimizar los costos (Dumrong Siri, Fan, Jain, y Moinzadeh, 2008); (Cattani, Gilland, Heese, y Swaminathan, 2006), esto permite recopilar información sobre los clientes, para comprender sus preferencias, además, producir productos personalizados que se adaptan a sus necesidades (Batarfi et al., 2016).

En las investigaciones de gestión de inventarios de la cadena de suministro de doble canal se observaron dos enfoques de investigación; el primer enfoque es la coordinación entre los canales y el segundo enfoque es la competencia entre ellos. Chiang y Monahan (2005) propusieron un modelo de coordinación en la cadena de suministro de doble canal, donde el inventario se mantiene en el almacén del fabricante, para satisfacer tanto la demanda del canal directo en línea y la demanda de una tienda minorista; cada canal recibe solicitudes independientes; sin embargo, se tiene una probabilidad de ir al otro canal si alguno de ellos está desabastecido. Los autores desarrollan una estrategia de control de inventario, donde calculan el costo operativo del sistema determinando la tenencia de inventario y los costos de ventas perdidas y, comparan la estrategia de doble canal con la de un solo canal (solo minorista y solo canal directo en línea), obteniendo mejores resultados cuando se usa la estrategia de doble canal. Geng y Mallik (2007) estudiaron la competencia entre un canal directo en línea propiedad de un fabricante y un canal minorista. Teniendo en cuenta que el fabricante tiene capacidad limitada de producción. Definido que, en un canal se encuentra productos agotados, una fracción de los clientes insatisfechos visitan al otro canal. Desarrollaron un enfoque de Stackelberg, el cual consiste en que alguno de los dos canales es el líder, en este caso el fabricante y otro es el seguidor, el minorista. El líder tiene dos decisiones: el nivel de inventario y la cantidad de despacho en cada pedido al minorista, y basado en estas decisiones el minorista decide su nivel de inventario. Demostraron que el fabricante tenía la posibilidad de negarle el inventario al minorista incluso cuando su capacidad fuera suficiente obteniendo mayor beneficio por esta decisión.

Por otro lado, Teimoury et al., (2008) desarrollaron un modelo matemático para la cadena de suministro de doble canal entre un fabricante con un canal directo en línea y un minorista en el que definen que al considerar los costos de ventas perdidas de manera independiente, es decir, cada canal maneja su propio costo, esto puede tener un efecto

significativo en el nivel de inventario. Luego Takahashi, Aoi, Hirotsu, y Morikawa, (2011) estudiaron una cadena de suministro de doble canal en la que considera la decisión de producción y entrega de productos y, propusieron una estrategia de control de inventario, con el objetivo de reducir los costos de mantenimiento de inventario, los costos de ventas perdidas, así como los costos de producción y entrega.

Un aspecto fundamental en la gestión de la cadena de suministro de doble canal ha sido el manejo de los almacenes, dado que estos han sufrido cambios importantes en las últimas décadas influyendo principalmente en el diseño y las operaciones del almacén. La complejidad de las operaciones del almacén se ha multiplicado con el almacenamiento de una gran variedad de SKU en pequeñas cantidades (De Koster et al., 2017). El tamaño pequeño de la transacción difiere con el tamaño del pedido de reposición de la tienda y requiere operaciones de cumplimiento de pedidos de pick-and-pack que requieren mucha mano de obra (alto costo variable) o automatización (alta inversión de capital) (Agatz et al., 2008); (Hübner et al., 2015);(Kembro et al., 2018). Por ello, la adaptación de las operaciones y el diseño al contexto particular está recibiendo una mayor atención en la teoría del almacenamiento.

Dos estrategias comunes para los almacenes en el entorno empresarial de doble canal son las políticas descentralizadas y centralizadas. Una empresa con una política de almacenamiento descentralizado establece un almacén de cumplimiento electrónico, en el que se selecciona, empaqueta y envía el pedido del canal en línea de manera independiente al almacén principal, lo que representa tener por separado equipos de inventario y equipos de operaciones comerciales (Bendoly, 2004); (F Alawneh y Zhang, 2018); (Ishfaq y Bajwa, 2019).

Entre los principales estudios relacionados con la política descentralizada se destacan los realizados por Allgor, Graves, y Xu, (2004) y Xu,(2005). Allgor et al., (2004) investigaron la configuración de diferentes modelos de inventario en un almacén de cumplimiento, que se dividió en dos áreas: área de recolección, donde los artículos se almacenan individualmente en

contenedores, y un área de reserva, donde los artículos se almacenan a granel en pallets teniendo en cuenta la restricción de espacio. Esto para minimizar el costo de mantenimiento y mano de obra, con una política de revisión periódica de inventario con demanda estocástica. Por su parte, el estudio realizado por Xu, (2005) consideró retrasos en el envío y la información de pedidos anticipados. Si bien la opción de separar canales proporciona versatilidad en el cumplimiento de pedidos en línea, esta opción requiere capital operativo adicional, así como un mayor nivel de inventario en el sistema, debido a la necesidad de mantener existencias de seguridad separadas en varias instalaciones en la red de distribución (Ishfaq y Bajwa, 2019).

Por otro lado, la política centralizada se basa en utilizar un almacén centralizado, es decir, un almacén integrado o varios almacenes agrupados en la misma ubicación, para atender tanto los pedidos del canal directo en línea como los pedidos del canal tradicional. Seifert, Thonemann, y Sieke, (2006) desarrollaron modelos matemáticos para la cadena de suministro de doble canal descentralizada y centralizada. Demostraron que cuando la cadena es centralizada el ahorro en costos es significativo, además de beneficiar al minorista y a los clientes.

Yao, Yue, Mukhopadhyay, y Wang, (2009) estudiaron tres estrategias de inventario diferentes: (1) centralizada, (2) enfoque de Stackelberg en la que el minorista es el líder y, (3) una estrategia en la que la operación de canal directo en línea se subcontrata a un proveedor de logística tercerizada o externa (Third Party Logistic, 3PL), en una cadena de suministro de doble canal que comprende un fabricante y un minorista, en el que definió el nivel de inventario tanto para canal directo en línea del fabricante como para el minorista, con el fin de maximizar el beneficio esperado.

El primer estudio del almacén doble canal fue el realizado por Alawneh y Zhang, (2018) basado en la gestión de inventario en la cadena de suministro de doble canal, en la que un fabricante utiliza el almacén que se divide en dos áreas con diferentes niveles de inventario: un

área de baja densidad para cumplir con los pedidos en línea (Etapa 1), en la que se debe acceder a todos los productos, almacenarlos individualmente en contenedores y la otra área de alta densidad para cumplir con los pedidos más grandes de tiendas minoristas (Etapa 2) que se almacenan en pallet y es de donde se abastece el área de baja densidad para cumplir con los pedidos en línea. Desarrollaron un modelo de inventario de artículos múltiples bajo una política de revisión continua de inventario (Q, R) en el que consideran la restricción de capacidad del almacén, la incertidumbre en la demanda y el tiempo de entrega en el que determina el nivel de inventario para cada uno de los canales y la reposición de cada uno de ellos. Resaltan para futuras investigaciones la importancia de determinar el tamaño de cada una de las áreas (Etapas 1 y 2) y como afecta los costos totales.

1.2. Dimensionamiento de almacenes tradicionales

La planificación del tamaño del almacén de las empresas Business-to-business (B2B) que están en la transición al comercio electrónico es una de las decisiones críticas en la gestión de la cadena de suministro (M. J. Yao y Huang, 2017). Debido a la incertidumbre de la demanda de espacio, determinar el tamaño del almacén se convierte en un problema difícil para los gerentes. La planificación deficiente del tamaño del almacén puede tener un impacto significativo en la eficiencia de la operación. Un exceso de espacio de almacenamiento da como resultado un mayor costo de almacenamiento causado por el espacio de almacén vacío. Por otro lado, la falta de espacio de almacenamiento puede generar un costo adicional por arrendar más espacio de almacén y un mayor tiempo de respuesta (Shi, Guo, y Yu, 2018).

El tamaño del almacén determina la capacidad de almacenamiento de un almacén, es decir, al espacio cubico general del edificio (largo, ancho y alto). Una vez construido el almacén el tamaño actuará como la restricción principal sobre las operaciones del almacén, en el tiempo de uso para el cual fue construido, generalmente en el largo plazo (Ballou, 2004).

La política de inventario y los costos de inventario deben considerarse al resolver el problema de dimensionamiento cuando el almacén es propiedad del fabricante. En el caso de que el fabricante sea responsable de controlar el inventario se debe definir una política de inventario que se ajuste a sus necesidades de espacio y que le permita cumplir con los pedidos de los clientes. Por esto, los costos en sus modelos incluyen no solo el costo de construcción del almacén, sino también el costo de mantenimiento de inventario y reposición.

Francis (1971) estudio este problema de dimensionamiento para un solo producto en un horizonte de planificación finito, con el objetivo de encontrar la mejor estrategia de mezclar el espacio de almacén privado y el espacio público. Evalúan diferentes escenarios para tamaños de almacenamiento fijo o cambiante en el que se permite cambios a lo largo del horizonte de planeación, este es formulado como un modelo de programación lineal y se transforma en un problema de flujo de red equivalente para una solución eficiente.

Levy (1974) presenta modelos analíticos para determinar el tamaño de almacenamiento óptimo para un solo producto con demanda determinista o estocástica, buscando minimizar los costos que genera el espacio de almacenamiento adicional para cada uno de los modelos. Comparan el costo operativo generado con el tamaño óptimo del almacén con los costos de construcción para el espacio de almacenamiento adicional que genera el mismo.

Gilles Cormier y Gunn (1996) Estudiaron el problema de minimizar conjuntamente el costo de inventario y los costos de almacenamiento cuando se construye un almacén, en el que se permite que el tamaño del almacén cambie con el tiempo, el modelo estático puede ampliarse para incluir la consideración del problema de dimensionamiento dinámico. Asumen que el costo de almacenamiento es una función lineal simple del tamaño del almacén. Se discuten los casos de un solo artículo y en el caso de varios artículos se modela como un problema de optimización no lineal resolviendo mediante el método de Newton-Raphson el multiplicador

óptimo de Lagrange. Años más tarde G. Cormier y Gunn, (1999) también consideran un problema relacionado al equilibrar el tamaño del pedido de reabastecimiento, el tamaño del almacén y la cantidad de espacio para arrendar. Desarrollaron un modelo de programación dinámica para la expansión óptima del almacén durante períodos de tiempo consecutivos en el que buscan minimizar los costos de almacenamiento cuando se construye un almacén y se alquila el espacio adicional.

Goh, Jihong, y Chung-Piaw (2001) estudiaron el problema de dimensionamiento de almacén y el tamaño del pedido para casos de un solo artículo y varios artículos con demanda determinística. Consideran el costo de almacenamiento como una función lineal por partes más realista en el que se debe elegir el tamaño del almacén entre un conjunto de intervalos discretos de espacio de almacén dados. Por otro lado Petinis, Tarantilis, y Kiranoudis (2005) investigaron el problema de dimensionamiento del almacén de múltiples artículos. El nivel óptimo de inventario del almacén y los puntos de pedido se determinan minimizando los costos totales de pedido y de mantenimiento de inventario durante un período de tiempo específico. El modelo matemático se formuló como un modelo de programación no lineal, el cual es resuelto mediante sucesivos procedimientos de programación cuadrática. Ng, Cheng, Kotov, y Kovalyov (2009) estudiaron el problema D-EOQ-Max de cantidad económica de pedido (Economic order quantity, EOQ) en el que la capacidad (máxima) del almacén es una variable de decisión, el artículo es indivisible es decir es discreto. Separan el costo de mantenimiento de inventario en costo de almacenamiento y costo no relacionado con el almacén, presentan un algoritmo de tiempo polinómico óptimo para resolver el problema.

Hariga (2011) considera el problema de cantidad económica de pedido bajo diferentes escenarios el que se puede definir un almacén propio o elegir entre los proveedores de espacio de almacenamiento a través de contratos de arrendamiento fijos a largo plazo o flexibles.

Además, evalúa la opción de adquirir el espacio adicional si es necesario, comprando de contado (spot market) almacenes disponibles.

Yao y Huang (M. J. Yao y Huang, 2017) Estudiaron el problema de dimensionamiento óptimo y reposición de pedidos bajo una estructura de costos de almacenamiento lineal por partes. Desarrollaron un modelo para varios artículos en el que buscan minimizar los costos de inventario y de almacenamiento de forma conjunta basado en el trabajo de Goh et al. (Goh et al., 2001). Formularon un algoritmo de búsqueda, validándolo a partir de experimentos aleatorios mejorando los resultados de la literatura existente.

Fan y Wang (2018) estudiaron un modelo integrado de decisiones de inventario y almacenamiento para un solo producto. Consideran que el tamaño del almacén puede aumentarse o disminuirse al comienzo de cada período, además de que el costo de mantenimiento es una función lineal donde en cada ajuste del tamaño del almacén se incurre en un costo fijo lineal, al inicio de cada periodo se paga un arriendo por el espacio a adquirir. Presentan un algoritmo eficiente para resolver el problema presentan experimentos computacionales que muestran la eficiencia del algoritmo y la efectividad del modelo

1.3.Discusión revisión de la literatura

En el contexto de la gestión de inventarios de la cadena de suministro de doble canal, los estudios tanto para la política descentralizada Allgor, Graves y Xu (2004), Xu (2005) y centralizada Alawneh y Zhang (Fawzat Alawneh y Zhang, 2018) se tienen en cuenta la capacidad del almacén, esta es representada como una restricción de capacidad, asumen el tamaño del almacén como un parámetro conocido donde el costo de almacenamiento hace parte del costo de mantenimiento de inventario y generalmente se supone que es proporcional a la cantidad de inventario almacenado. Sin embargo, según plantean Goh et al. (Goh et al., 2001), Ng et al, (Ng et al., 2009) y Yao y Huang (M. J. Yao y Huang, 2017) es recomendable separar

los costos de almacenamiento del costo de mantener inventario en el dimensionamiento de almacenes tradicionales, para tener una aproximación a los entornos reales de almacenamiento y de esta manera determinar el tamaño que mejor se ajuste a las necesidades de los canales en el almacén doble canal.

2. Justificación y Planteamiento del problema

El e-commerce como canal de ventas viene creciendo en porcentajes de dos dígitos en Latinoamérica durante los últimos años, siendo Colombia uno de los países con mejor pronóstico para las ventas digitales en la región, según el e-Commerce Index 2017, el país ocupa el tercer puesto, después de Chile y Brasil, con mayor crecimiento y proyección en este sector de la economía. Teniendo en cuenta las estimaciones de la Cámara Colombiana de Comercio Electrónico (CCCE), la venta y compra de bienes y servicios por Internet creció en un 20 % al cierre del año 2018. Esto se debe en gran medida, a que empresas que operaban principalmente en el canal tradicional de tiendas minoristas, están empezando a incorporar canales de venta directa en línea; un caso reciente es el del grupo empresarial Arturo Calle, una de las 10 empresas más importantes a nivel nacional perteneciente al sector textil (López Bejarano, 2018).

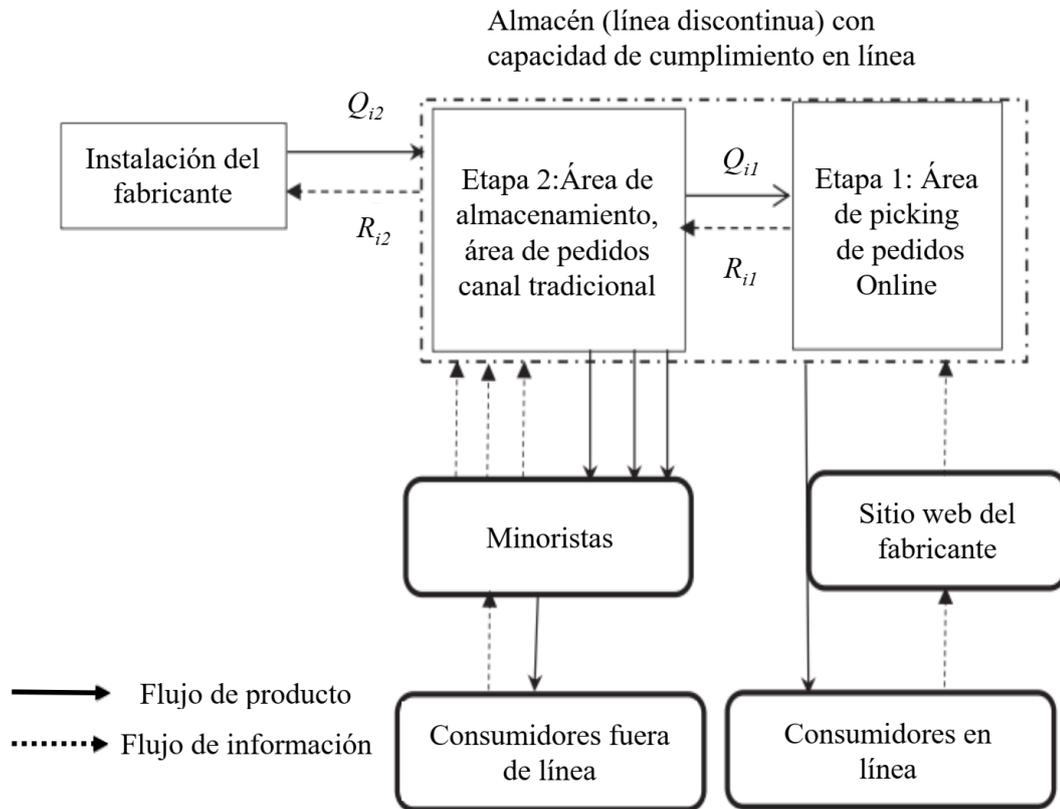
Si bien, incluir un canal directo en línea genera beneficios a los fabricantes, trae consigo nuevos desafíos en términos de gestión de inventario debido a las diferencias en el tamaño del pedido y los tiempos de cumplimiento. Además de la gran incertidumbre de la demanda a corto y largo plazo, hace que la planificación de la capacidad de almacenamiento y la asignación sean complejas. Se considera un almacén doble canal propiedad de un fabricante bajo una política centralizada el cual satisface la demanda del canal tradicional de tiendas minoristas y el canal directo de en línea del fabricante. Los pedidos realizados al fabricante llegan al área

de reserva (Etapa 2) desde donde se suministra a las tiendas minoristas y al área de recolección exclusiva para el cumplimiento de pedidos en línea (Etapa 1) como se muestra en la **Figura 1**; una diferencia importante entre estos canales es el tiempo de entrega del pedido, que para las tiendas tienden a ser más largos porque se programan con anticipación y para los pedidos en línea que tienen un tiempo más corto debido a la rapidez que se requiere para su cumplimiento. Debido a la importancia que representa tener una política integrada para definir el nivel de inventario de cada uno de los canales y un tamaño de almacén adecuado para satisfacer la demanda tanto de tiendas minoristas como del canal directo en línea se propone un modelo integrado de gestión de inventarios para múltiples artículos y dimensionamiento para el almacén doble canal en el que se establece el tamaño total del almacén, así como el de cada una de las áreas de almacenamiento, la política de gestión de inventario, tomando como referencia que la demanda es incierta, así como el tiempo de entrega. Para el dimensionamiento del almacén se determinó separar los costos de almacenamiento del costo de mantener inventario, dado a que el espacio de almacén en entornos reales a menudo solo está disponible en unos pocos tamaños fijos, por ejemplo, si se construyera un almacén de varios pisos, el espacio total disponible dependería de la cantidad de niveles de piso necesarios o en el caso de un almacén arrendado, las unidades de espacio de arrendamiento generalmente se encuentran en partes discretas del área bruta del piso (Goh et al., 2001) y (M. J. Yao y Huang, 2017). Por esto se optó por utilizar una estructura de costos de almacenamiento lineal por partes la cual proporciona un valor de costo más realista del espacio de almacén que se adquirirá.

Finalmente, el proyecto permite fortalecer las líneas de investigación Gestión de Inventarios y Gestión de almacenes del grupo de investigación OPALO (Grupo de optimización de sistemas productivos, administrativos y logísticos) que permita aplicar estas investigaciones en el contexto regional.

Figura 1

Modelo conceptual almacén doble canal.



Nota. La figura representa el modelo conceptual del almacén doble canal se define como es el flujo de información y el flujo de producto dentro del almacén y como se realizan los pedidos de cada uno de los consumidores de los canales Adaptado de Alawneh, F, y Zhang, G. (2018). Dual-channel warehouse and inventory management with stochastic demand (p.88). Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 112, 84–106. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2017.12.012>

3. Objetivos

3.1 Objetivo general

Desarrollar un modelo integrado de gestión de inventarios y dimensionamiento para reducir costos totales de gestión del sistema de inventario en un almacén doble canal.

3.2 Objetivos específicos

- Identificar los modelos de dimensionamiento y gestión de inventario en el que determinen el tamaño de las áreas de los almacenes tradicionales con el fin de establecer el modelo para el tamaño de las áreas del almacén doble canal a partir de una revisión de literatura.
- Formular el modelo matemático que integre el dimensionamiento y gestión de inventarios para un almacén doble canal.
- Diseñar un algoritmo de solución del modelo propuesto.
- Validar el algoritmo de solución mediante instancias adaptadas de la literatura o mediante análisis estadístico.

4. Hipótesis

Integrar la gestión de inventarios en el planteamiento de modelos para el problema de dimensionamiento del almacén doble canal disminuye los costos totales de gestión del sistema de inventario comparado con el modelo de áreas predeterminadas.

5. Formulación del modelo matemático

El objetivo del problema es minimizar los costos de inventario que comprende los costos de pedido, de mantener inventario no relacionados con el almacenamiento y los costos de pedidos pendientes (backorders). Además, para el dimensionamiento del almacén el costo de almacenamiento sigue una función lineal por partes, que comprende el costo fijo anualizado de la adquisición de S_n cantidad de espacio y el costo de almacenamiento variable, para una política de inventario (Q_{ij}, R_{ij}) donde el nivel promedio en cada una de las etapas es el inventario del ciclo promedio $\frac{Q_{ij}}{2}$ más Inventario de seguridad $(R_{ij} - \mu_{x_{ij}})$. Para modelar el costo de almacenamiento, se supone que solo se toman opciones discretas de tamaño de almacén, es decir, $0=S_0 < S_1 < \dots < S_{n-1} < S_n$ son los tamaños de almacén disponibles. Dependiendo de la cantidad de espacio que se requiera los costos asociados vienen dados por el tamaño de espacio que se esté evaluando. Por lo tanto, costo anual esperado se formula con las variables de decisión Q_{ij} y R_{ij} , teniendo en cuenta que los costos de almacenamiento varían de acuerdo con el tamaño de almacén que se está evaluando S_n .

5.1. Supuestos

- La demanda por unidad es una variable aleatoria que se puede modelar como una distribución normal o una distribución uniforme.
- El tiempo de entrega del artículo puede ser determinístico, o una variable aleatoria.
- Se emplea una política de control de inventario de revisión continua (Q, R).
- Cada etapa (cada área en el almacén) tiene un punto de reorden que es igual a la demanda durante el tiempo de entrega más el inventario de seguridad, que es una función de

probabilidad de agotamiento durante el tiempo de entrega. La etapa 2 reabastece a la etapa 1 y recibe los envíos del proveedor.

- La demanda que el inventario no puede satisfacer de inmediato se deja pendiente con un costo de penalización.
- Para el caso de múltiples SKU almacenadas en el mismo almacén, se supone que a cada tipo de SKU se le asigna un espacio de almacenamiento dedicado. En consecuencia, el espacio total de almacén requerido es la suma de los tamaños de pedido y los inventarios de seguridad para todas las SKU almacenadas para cada una de las etapas de almacenamiento.

5.2. Notación

5.2.1. Índices

i : índice del artículo ($i=1, 2, \dots, M$)

j : índice de etapa, donde $j = 1$ para el área de almacén dedicada a satisfacer la demanda en línea (área de picking en línea), y $j = 2$ para el área de almacén dedicada a satisfacer las demandas minoristas y de área en línea dedicada

n : Numero de tamaños de almacén disponible ($n=1, 2, \dots, N$)

5.2.2. Parámetros

L_{ij} : Duración del tiempo de entrega para el artículo i en la etapa j

D_{ij} : Demanda anual esperada para el artículo i en la etapa j

h_{ij} : Costo de mantenimiento por unidad de tiempo para el artículo i en la etapa j

B_{ij} : Costo por unidades pendientes de entrega (Backorder) para el artículo i en la etapa j

A_{ij} : Costo de pedido para el artículo i en la etapa j

x_{ij} : Demanda durante el tiempo de entrega (DDLT, variable aleatoria) del artículo i en la etapa j

$f(x_{ij})$: Función de densidad de probabilidad de demanda durante el tiempo de entrega para el ítem i en la etapa j , con media $\mu_{x_{ij}}$

γ_{ij} : Espacio de almacenamiento requerido por una unidad del artículo i en la etapa j

α : Probabilidad mínima requerida de que las cantidades totales de la orden estén dentro del espacio del almacén

s_n : Espacio disponible de almacenamiento n

b_n : Costo fijo de anualizado para adquirir el espacio disponible de almacenamiento n

c_n : Costo variable de almacenamiento por unidad de artículo en el espacio disponible de almacenamiento n

5.2.3. Variables de decisión

Q_{ij} : Cantidad de pedido del artículo i en la Etapa j de almacenamiento.

R_{ij} : Punto de reorden para el pedido del artículo i en la Etapa j .

S_n : Espacio n de almacenamiento total (Tamaño del almacén)

Objetivo: Minimizar el costo total esperado

$$\begin{aligned} \text{Min } C(Q_{ij}, R_{ij}) = & \sum_i \sum_j \frac{A_{ij} D_{ij}}{Q_{ij}} + \sum_i \sum_j h_{ij} \left[\left(\frac{Q_{ij}}{2} \right) + (R_{ij} - \mu_{x_{ij}}) \right] + \sum_i \sum_j \frac{B_{ij} D_{ij}}{Q_{ij}} \left[\int_{R_{ij}}^{\infty} (x_{ij} - R_{ij}) f(x_{ij}) dx_{ij} \right] \\ & + b_n + \sum_i \sum_j C_n (\gamma_{ij} (Q_{ij} + (R_{ij} - \mu_{x_{ij}}))) \end{aligned} \quad (1)$$

El primer término de la función objetivo (1) se refiere al costo de pedido anual, que es el costo del pedido multiplicado por el número de ciclos. El segundo término se refiere al costo anual aproximado de mantenimiento de inventario. El tercer término representa el costo anual de pedidos pendientes (backorder), que es igual al costo de pedidos pendientes multiplicado por el número esperado de unidades en escasez por ciclo. El cuarto término se refiere al costo fijo anualizado de adquirir S_n . El quinto término se refiere al costo de almacenamiento variable

por unidad de artículo en el tamaño del almacén S_n , el componente de costo variable anualizado relacionado con la cantidad real almacenada y manejada.

Para el costo de pedidos pendientes se tiene en cuenta la escasez esperada por ciclo (ESC) y nivel de servicio por ciclo (CSL). Partiendo de la función de escasez propuesta por F Alawneh y Zhang (Fawzat Alawneh y Zhang, 2018) que utiliza la expresión propuesta por Silver y Paterson (1985) para una sola etapa de almacenamiento con el fin de adaptarla a las dos etapas de almacenamiento del almacén doble canal.

$$ESC(R_{ij}) = \int_{R_{ij}}^{\infty} (x_{ij} - R_{ij})f(x_{ij})dx_{ij}, \quad (2)$$

$$CSL(R_{ij}) = \int_0^{R_{ij}} f(x_{ij})dx_{ij} \quad (3)$$

Dependiendo de la distribución de probabilidad de la demanda y si el tiempo de entrega es determinístico o variable la función de escasez por ciclo varia al igual que la del nivel de servicio por ciclo.

Para la restricción de dimensionamiento del almacén (4), considera el espacio ocupado por la suma de todos los pedidos más el inventario de seguridad menos el espacio que ocuparía la demanda promedio durante el tiempo de entrega (9). Dado que la demanda es incierta se establece que la probabilidad de que el total de inventario dentro del almacén de manera simultánea, cuando se reciba un pedido no sea menor que α . Obteniendo así la restricción de espacio de dimensionamiento (8), donde $z(1-\alpha)$ es el valor de la distribución acumulada de la demanda en el punto $1-\alpha$ (Ghalebsaz-Jeddi, Shultes, y Haji, 2004) y (F Alawneh y Zhang, 2018).

$$P \left[\left(\sum_i \gamma_{i2} (Q_{i2} + (R_{i2} - x_{i2})) + \gamma_{i1} (Q_{i1} + (R_{i1} - x_{i1})) \right) \leq S_n \right] \geq \alpha \quad (4)$$

$$R_{ij}, Q_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j. \quad (5)$$

$$P \left[\sum_i ((\gamma_{i2} Q_{i2} + \gamma_{i2} R_{i2} - \gamma_{i2} x_{i2}) + (\gamma_{i1} Q_{i1} + \gamma_{i1} R_{i1} + \gamma_{i1} x_{i1})) - S_n \right] \geq \alpha \quad (6)$$

$$P \left[\sum_i \gamma_{i2} x_{i2} + \gamma_{i1} x_{i1} \geq \sum_i (\gamma_{i2} (Q_{i2} + R_{i2}) + \gamma_{i1} (Q_{i1} + R_{i1})) - S_n \right] \geq \alpha \quad (7)$$

$$\sum_i (\gamma_{i2} (Q_{i2} + R_{i2}) + \gamma_{i1} (Q_{i1} + R_{i1})) \leq S_n + \mu_Y + z_{1-\alpha} \sigma_Y \quad (8)$$

$$Y = \sum_i (\gamma_{i2} x_{i2} + \gamma_{i1} x_{i1}); \quad \mu_Y = \sum_i (\gamma_{i1} \mu_{x_{i1}} + \gamma_{i2} \mu_{x_{i2}}); \quad \sigma_Y^2 = \sum_i (\gamma_{i1}^2 \sigma_{x_{i1}}^2 + \gamma_{i2}^2 \sigma_{x_{i2}}^2) \quad (9)$$

Donde $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ como lo define Ghalebsaz-Jeddi, Shultes, y Haji, (2004)

Siendo este un problema de programación no lineal restringido (P) conformado por (1)

,(5) y (8) donde encontrar la solución de forma cerrada es complicado.

6. Análisis del problema de Programación no lineal restringido

La programación no lineal restringida es el proceso de resolución de un sistema de igualdades y desigualdades sujetas a un conjunto de restricciones sobre un conjunto de variables reales desconocidas, con una función objetivo a minimizar (o maximizar), cuando la función objetivo o alguna de las restricciones no son lineales.

Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) permiten abordar la resolución de modelos de programación no lineal que consideran restricciones tanto de igualdad (ecuaciones) como desigualdad (inecuaciones) los cuales son difíciles de resolver. Aplicando el teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) verificamos si la función C es una función convexa.

Teorema 1. El problema de programación no lineal (P) es convexo.

Prueba

$$\begin{aligned}
 C(Q_{ij}, R_{ij}) &= \sum_i \frac{A_{i1}D_{i1}}{Q_{i1}} + \sum_i \frac{A_{i2}D_{i2}}{Q_{i2}} \\
 &+ \sum_i h_{i1} \left[\left(\frac{Q_{i1}}{2} \right) + (R_{i1} - \mu_{x_{i1}}) \right] + \sum_i h_{i2} \left[\left(\frac{Q_{i2}}{2} \right) + (R_{i2} - \mu_{x_{i2}}) \right] + \\
 &+ \sum_i \frac{B_{i1}D_{i1}}{Q_{i1}} \int_{R_{i1}}^{\infty} (x_{i1} - R_{i1})f(x_{i1})dx_{i1} + \sum_i \frac{B_{i2}D_{i2}}{Q_{i2}} \int_{R_{i2}}^{\infty} (x_{i2} - R_{i2})f(x_{i2})dx_{i2} \\
 &+ b_n + \sum_i C_n(\gamma_{i1}(Q_{i1} + (R_{i1} - \mu_{x_{i1}}))) + \sum_i C_n(\gamma_{i2}(Q_{i2} + (R_{i2} - \mu_{x_{i2}})))
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$C_{Q_{i1}Q_{i1}} = \frac{\partial^2 C}{\partial Q_{i1}^2} = \frac{2D_{i1}}{Q_{i1}^3} \left\{ A_{i1} - B_{i1} \left[\int_{R_{i1}}^{\infty} (x_{i1} - R_{i1})f(x_{i1})dx_{i1} \right] \right\} > 0 \tag{11}$$

$$C_{Q_{i1}R_{i1}} = \frac{\partial^2 C}{\partial Q_{i1} \partial R_{i1}} = \frac{D_{i1}B_{i1}}{Q_{i1}^2} \left\{ \int_{R_{i1}}^{\infty} f(x_{i1}) dx_{i1} \right\} > 0 \quad (12)$$

$$C_{R_{i1}Q_{i1}} = \frac{\partial^2 C}{\partial R_{i1} \partial Q_{i1}} = \frac{D_{i1}B_{i1}}{Q_{i1}^2} \left\{ \int_{R_{i1}}^{\infty} (x_{i1} - R_{i1}) f(x_{i1}) dx_{i1} \right\} > 0 \quad (13)$$

$$C_{R_{i1}R_{i1}} = \frac{\partial^2 C}{\partial R_{i1}^2} = \frac{A_{i1}D_{i1}}{Q_{i1}} f(R_{i1}) > 0 \quad (14)$$

$$C_{Q_{i2}Q_{i2}} = \frac{\partial^2 C}{\partial Q_{i2}^2} = \frac{2D_{i2}}{Q_{i2}^3} \left\{ A_{i2} - B_{i2} \left[\int_{R_{i2}}^{\infty} (x_{i2} - R_{i2}) f(x_{i2}) dx_{i2} \right] \right\} > 0 \quad (15)$$

$$C_{Q_{i2}R_{i2}} = \frac{\partial^2 C}{\partial Q_{i2} \partial R_{i2}} = \frac{D_{i2}B_{i2}}{Q_{i2}^2} \left\{ \int_{R_{i2}}^{\infty} f(x_{i2}) dx_{i2} \right\} > 0 \quad (16)$$

$$C_{R_{i2}Q_{i2}} = \frac{\partial^2 C}{\partial R_{i2} \partial Q_{i2}} = \frac{D_{i2}B_{i2}}{Q_{i2}^2} \left\{ \int_{R_{i2}}^{\infty} (x_{i2} - R_{i2}) f(x_{i2}) dx_{i2} \right\} > 0 \quad (17)$$

$$C_{R_{i2}R_{i2}} = \frac{\partial^2 C}{\partial R_{i2}^2} = \frac{A_{i2}D_{i2}}{Q_{i2}} f(R_{i2}) > 0 \quad (18)$$

Dado a que todas las derivadas de segundo orden son mayores que 0 para todos los valores no negativos. Por lo tanto, C es estrictamente convexo. Además, como las restricciones

(5), (9) son lineales, el problema (P) es convexo. Teniendo en cuenta esto, se plantea la siguiente función lagrangiana.

$$\begin{aligned}
 L(Q_{ij}, R_{ij}, \theta) = & \sum_i \sum_j \frac{A_{ij} D_{ij}}{Q_{ij}} \\
 & + \sum_i \sum_j h_{ij} \left[\left(\frac{Q_{ij}}{2} \right) + (R_{ij} - \mu_{x_{ij}}) \right] + \sum_i \sum_j \frac{B_{ij} D_{ij}}{Q_{ij}} \left[\int_{R_{ij}}^{\infty} (x_{ij} - R_{ij}) f(x_{ij}) dx_{ij} \right] \\
 & + b_n + \sum_i \sum_j C_n (\gamma_{ij} (Q_{ij} + (R_{ij} - \mu_{x_{ij}}))) + \theta \left[\sum_i \sum_j \gamma_{ij} (Q_{ij} + R_{ij}) - S_n - \mu_Y - z_{1-\alpha} \right]
 \end{aligned} \tag{19}$$

Donde θ es el multiplicador de Lagrange para la restricción de espacio. Aplicando las condiciones de primer orden de KKT obtenemos:

$$\text{A partir de } \frac{\partial L}{\partial Q_{ij}} = 0,$$

Se tiene

$$-\frac{A_{ij} D_{ij}}{Q_{ij}^2} + \frac{h_{ij}}{2} - \frac{B_{ij} D_{ij}}{Q_{ij}^2} \left[\int_{R_{ij}}^{\infty} (x_{ij} - R_{ij}) f(x_{ij}) dx_{ij} \right] + \gamma_{ij} C_n + \theta \gamma_{ij} = 0 \tag{20}$$

Despejando Q_{ij} de (20) se obtiene

$$Q_{ij} = \sqrt{\frac{2D_{ij}(A_{ij} + B_{ij}ESC(R_{ij}))}{h_{ij} + 2\gamma_{ij}\theta + 2\gamma_{ij}C_n}} \tag{21}$$

$$\text{A partir de } \frac{\partial L}{\partial R_{ij}} = 0,$$

Se obtiene

$$h_{ij} - \frac{B_{ij} D_{ij}}{Q_{ij}} \left[\int_{R_{ij}}^{\infty} f(x_{ij}) dx_{ij} \right] + \gamma_{ij} C_n + \theta \gamma_{ij} = 0 \tag{22}$$

Reorganizando (22) se obtiene

$$\int_{R_{ij}}^{\infty} f(x_{ij}) dx_{ij} = \frac{(h_{ij} + \gamma_{ij} C_n + \gamma_{ij} \theta) Q_{ij}}{B_{ij} D_{ij}} \quad (23)$$

Remplazando (21) en (23) se obtiene

$$\int_{R_{ij}}^{\infty} f(x_{ij}) dx_{ij} = \frac{(h_{ij} + \gamma_{ij} C_n + \gamma_{ij} \theta) \sqrt{\frac{2D_{ij}(A_{ij} + B_{ij} ESC(R_{ij}))}{h_{ij} + 2\gamma_{ij} \theta + 2\gamma_{ij} C_n}}}{B_{ij} D_{ij}} \quad (24)$$

Se eleva al cuadrado ambos lados para eliminar la raíz y se obtiene

$$\begin{aligned} \left[\int_{R_{ij}}^{\infty} f(x_{ij}) dx_{ij} \right]^2 B_{ij}^2 D_{ij}^2 \\ = (h_{ij} + \gamma_{ij} C_n + \gamma_{ij} \theta)^2 \left[\frac{2D_{ij}(A_{ij} + B_{ij} ESC(R_{ij}))}{h_{ij} + 2\gamma_{ij} \theta + 2\gamma_{ij} C_n} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\int_{R_{ij}}^{\infty} f(x_{ij}) dx_{ij} = 1 - CLS(R_{ij}) \quad (26)$$

Remplazando (26) en (25) y reorganizando (25) se obtiene

$$(1 - CLS(R_{ij}))^2 B_{ij} D_{ij} - \frac{2A_{ij}}{B_{ij}} \left[\frac{(h_{ij} + \gamma_{ij} C_n + \gamma_{ij} \theta)^2}{h_{ij} + 2\gamma_{ij} \theta + 2\gamma_{ij} C_n} \right] - 2ESC(R_{ij}) \left[\frac{(h_{ij} + \gamma_{ij} C_n + \gamma_{ij} \theta)^2}{h_{ij} + 2\gamma_{ij} \theta + 2\gamma_{ij} C_n} \right] = 0 \quad (27)$$

Finalmente se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_i \sum_j \gamma_{ij} (Q_{ij} + R_{ij}) - S_n - \mu_Y - z_{1-\alpha} \sigma_Y \leq 0 \quad (28)$$

Y

$$Q_{ij}, R_{ij}, \theta \geq 0 \quad (29)$$

La ecuación (27) es la referencia para la solución del problema cuando la demanda se distribuye como una distribución uniforme para el tiempo de entrega estocástico.

7. Distribución uniforme

En el contexto de la cadena de suministro de doble canal es común el comercio de nuevos productos, de los cuales no se tienen datos históricos para determinar el comportamiento de la demanda, siendo la distribución uniforme una alternativa adecuada para describir este comportamiento ((Wanke, 2008); (Das y Hanaoka, 2014) y (F Alawneh y Zhang, 2018)).

7.1. Demanda uniforme tiempo de entrega estocástico

En este caso se considera que la demanda estocástica y el tiempo de entrega estocástico siguen una distribución conjunta tomando de referencia el trabajo realizado por F Alawneh y Zhang, (F Alawneh y Zhang, 2018) (F Alawneh y Zhang, 2018) quienes se basaron en los estudios de Wanke (Wanke, 2008) y (Das y Hanaoka, 2014) para adaptar esta función al contexto de doble canal:

$$f(x_{ij}) = \frac{1}{(d_{M_{ij}} - d_{m_{ij}})(t_{M_{ij}} - t_{m_{ij}})} \quad (30)$$

La media de demanda durante el tiempo de entrega es:

$$\mu_{x_{ij}} = \frac{(d_{M_{ij}} + d_{m_{ij}})(t_{M_{ij}} + t_{m_{ij}})}{4} \quad (31)$$

Y la desviación durante el tiempo de entrega es

$$\sigma_{x_{ij}} = \sqrt{\frac{(d_{M_{ij}} - d_{m_{ij}})^2(t_{M_{ij}} + t_{m_{ij}})^2 + 3(d_{M_{ij}} + d_{m_{ij}})^2(t_{M_{ij}} - t_{m_{ij}})^2 + 3(d_{M_{ij}} - d_{m_{ij}})^2(t_{M_{ij}} + t_{m_{ij}})^2}{144}} \quad (32)$$

Donde $[d_{m_{ij}}, d_{M_{ij}}]$ representan respectivamente el límite inferior y superior de la distribución uniforme demanda, de igual forma para $[t_{m_{ij}}, t_{M_{ij}}]$ representa el límite inferior y superior tiempo de entrega respectivamente. Para determinar la escasez por ciclo (ESC) y nivel de servicio por ciclo (CLS) se integra la función conjunta (30) partiendo de si la demanda por unidad de tiempo sigue una distribución uniforme dada por $U \sim [0, d_{M_{ij}}]$ y un tiempo de entrega $U \sim [0, t_{M_{ij}}]$ se tienen entonces:

$$\begin{aligned} ESC(R_{ij}) &= \int_{R_{ij}}^{\infty} (x_{ij} - R_{ij})f(x_{ij})dx_{ij} \\ &= \frac{1}{(2d_{M_{ij}}t_{M_{ij}})} \left[\frac{t_{M_{ij}}^2}{2} \left(d_{M_{ij}}^2 - \frac{R_{ij}^2}{t_{M_{ij}}^2} \right) - R_{ij}^2 \ln \left(\frac{d_{M_{ij}}t_{M_{ij}}}{R_{ij}} \right) \right] \\ &\quad - R_{ij} \left[1 - \left(\frac{R_{ij}}{(d_{M_{ij}}t_{M_{ij}})} \left(1 + \ln \left(\frac{d_{M_{ij}}t_{M_{ij}}}{R_{ij}} \right) \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (33)$$

$$CSL(R_{ij}) = \int_0^{R_{ij}} f(x_{ij})dx_{ij} = \frac{R_{ij}}{(d_{M_{ij}}t_{M_{ij}})} \left(1 + \ln \left(\frac{d_{M_{ij}}t_{M_{ij}}}{R_{ij}} \right) \right) \quad (34)$$

Remplazando (33) y (34) en (27) se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \left(\left(1 - \left(\frac{R_{ij}}{(d_{M_{ij}} t_{M_{ij}})} \left(1 + \ln \left(\frac{d_{M_{ij}} t_{M_{ij}}}{R_{ij}} \right) \right) \right) \right) \right)^2 B_{ij} D_{ij} \\
 & - 2 \frac{(h_{ij} + \gamma_{ij} C_n + \gamma_{ij} \theta)^2}{h_{ij} + 2\gamma_{ij} \theta + 2\gamma_{ij} C_n} \left(\frac{1}{(2d_{M_{ij}} t_{M_{ij}})} \left[\frac{t_{M_{ij}}^2}{2} \left(d_{M_{ij}}^2 - \frac{R_{ij}^2}{t_{M_{ij}}^2} \right) - R_{ij}^2 \ln \left(\frac{d_{M_{ij}} t_{M_{ij}}}{R_{ij}} \right) \right] \right) \\
 & - R_{ij} \left[1 - \left(\frac{R_{ij}}{(d_{M_{ij}} t_{M_{ij}})} \left(1 + \ln \left(\frac{d_{M_{ij}} t_{M_{ij}}}{R_{ij}} \right) \right) \right) \right] - \frac{2A_{ij}}{B_{ij}} \frac{(h_{ij} + \gamma_{ij} C_n + \gamma_{ij} \theta)^2}{h_{ij} + 2\gamma_{ij} \theta + 2\gamma_{ij} C_n} = 0
 \end{aligned} \tag{35}$$

La ecuación (35) representa la expresión para determinar el punto de reorden R_{ij} para cada artículo i en la etapa j para la distribución uniforme dado un valor de θ en términos de $d_{M_{ij}}$ y $t_{M_{ij}}$.

8. Distribución normal

Para la distribución normal el punto de reorden se determina mediante la siguiente ecuación $R_{ij} = \mu_{x_{ij}} + z_{ij} \sigma_{x_{ij}}$ en función del factor de seguridad z_{ij} , donde inventario de seguridad está determinado por $z_{ij} \sigma_{x_{ij}} = (R_{ij} - \mu_{x_{ij}})$. En este caso la función objetivo está en función del factor de seguridad z_{ij} al igual que la restricción de dimensionamiento. En este caso la función de escasez (ESC) (38) basada en el trabajo de F Alawneh y Zhang (F Alawneh y Zhang, 2018) quienes adaptaron la propuesta de Kundu y Chakrabarti, (2012) al contexto de doble canal.

Situación donde la demanda y el tiempo de entrega están normalmente distribuidos y son independientes, entonces la media (36) y la desviación estándar (37) de la demanda durante el tiempo de entrega son:

$$\mu_{x_{ij}} = \mu_{L_{ij}} \times \mu_{d_{ij}} \tag{36}$$

$$\sigma_{x_{ij}} = \sqrt{\mu_{L_{ij}} \times \sigma_{d_{ij}}^2 + \mu_{d_{ij}}^2 \times \sigma_{L_{ij}}^2}; \quad (37)$$

$$ESC(R_{ij}) = \int_{R_{ij}}^{\infty} (x_{ij} - R_{ij})f(x_{ij})dx_{ij} = \frac{\sigma_{x_{ij}}}{2} \left(\sqrt{1 + z_{ij}^2} - z_{ij} \right) \quad (38)$$

$$\begin{aligned} C(Q_{ij}, z_{ij}) = & \sum_i \sum_j \frac{A_{ij}D_{ij}}{Q_{ij}} \\ & + \sum_i \sum_j h_{ij} \left[\left(\frac{Q_{ij}}{2} \right) + z_{ij}\sigma_{x_{ij}} \right] + \sum_i \sum_j \frac{B_{ij}D_{ij}}{Q_{ij}} \left[\frac{\sigma_{x_{ij}}}{2} \left(\sqrt{1 + z_{ij}^2} - z_{ij} \right) \right] \\ & + b_n + \sum_i \sum_j C_n (Y_{ij}(Q_{ij} + z_{ij}\sigma_{x_{ij}})) \end{aligned} \quad (39)$$

$$\sum_i (\gamma_{i1}(Q_{i1} + z_{i1}\sigma_{x_{i1}}) + \gamma_{i2}(Q_{i2} + z_{i2}\sigma_{x_{i2}})) \leq S_n + \mu_Y + z_{1-\alpha}\sigma_Y \quad (40)$$

Donde la ecuación correspondiente de la Lagrange es:

$$\begin{aligned} L(Q_{ij}, z_{ij}, \theta) = & \sum_i \sum_j \frac{A_{ij}D_{ij}}{Q_{ij}} \\ & + \sum_i \sum_j h_{ij} \left[\left(\frac{Q_{ij}}{2} \right) + z_{ij}\sigma_{x_{ij}} \right] + \sum_i \sum_j \frac{B_{ij}D_{ij}}{Q_{ij}} \left[\frac{\sigma_{x_{ij}}}{2} \left(\sqrt{1 + z_{ij}^2} - z_{ij} \right) \right] \\ & + b_n + \sum_i \sum_j C_n (Y_{ij}(Q_{ij} + z_{ij}\sigma_{x_{ij}})) \\ & + \theta \left[\sum_i \sum_j \gamma_{ij} (Q_{ij} + z_{ij}\sigma_{x_{ij}}) - S_n - \mu_Y - z_{1-\alpha} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Donde θ es el multiplicador de Lagrange para la restricción de espacio. Aplicando las condiciones de primer orden de KKT obtenemos:

$$\text{A partir de } \frac{\partial L}{\partial Q_{ij}} = 0,$$

Se obtiene

$$-\frac{A_{ij}D_{ij}}{Q_{ij}} + \frac{h_{ij}}{2} - \frac{B_{ij}D_{ij}}{Q_{ij}^2} + \gamma_{ij}C_n + \theta\gamma_{ij} = 0 \quad (42)$$

Despejando Q_{ij} de (42) se obtiene

$$Q_{ij} = \sqrt{\frac{2D_{ij} \left[A_{ij} + B_{ij} \left(\frac{\sigma_{x_{ij}}}{2} (\sqrt{1+z_{ij}^2} - z_{ij}) \right) \right]}{h_{ij} + 2\gamma_{ij}\theta + 2\gamma_{ij}C_n}} \quad (43)$$

A partir de $\frac{\partial L}{\partial z_{ij}} = 0$ se obtiene

$$h_{ij}\sigma_{x_{ij}} + \frac{B_{ij}D_{ij}}{2Q_{ij}} \left[\sigma_{x_{ij}} \left(\frac{z_{ij}}{\sqrt{1+z_{ij}^2}} - 1 \right) \right] + \gamma_{ij}C_n\sigma_{x_{ij}} + \theta\gamma_{ij}\sigma_{x_{ij}} = 0 \quad (44)$$

Reemplazando (43) en (44) se tiene que

$$\frac{B_{ij}D_{ij}}{2 \sqrt{\frac{2D_{ij} \left[A_{ij} + B_{ij} \left(\frac{\sigma_{x_{ij}}}{2} (\sqrt{1+z_{ij}^2} - z_{ij}) \right) \right]}{h_{ij} + 2\gamma_{ij}\theta + 2\gamma_{ij}C_n}}} \left[\sigma_{x_{ij}} \left(\frac{z_{ij}}{\sqrt{1+z_{ij}^2}} - 1 \right) \right] + h_{ij}\sigma_{x_{ij}} + \gamma_{ij}C_n\sigma_{x_{ij}} + \theta\gamma_{ij}\sigma_{x_{ij}} = 0 \quad (45)$$

La ecuación (45) representa la expresión para determinar el factor de seguridad z_{ij} para cada artículo i en la etapa j dado un valor de θ .

También se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_i (\gamma_{i2}(Q_{i2} + z_{i2}\sigma_{x_{i2}}) + \gamma_{i1}(Q_{i1} + z_{i1}\sigma_{x_{i1}})) - S_n - \mu_Y - z_{1-\alpha} \leq 0 \quad (46)$$

9. Método de bisección modificado

Basado en el algoritmo propuesto por F Alawneh y Zhang, (F Alawneh y Zhang, 2018) la búsqueda de bisección se adapta al problema de dimensionamiento, calculando la mejor solución para cada uno de los tamaños de almacén para resolver el problema dual de la función Lagrangiana.

Para la solución del problema cuando se considera la demanda uniforme con tiempo de entrega estocástico, se puede obtener la solución óptima para cada uno de los tamaños discretos de almacén resolviendo el problema dual de la función lagrangiana dada en (19) usando un método de búsqueda iterativo basado en la ecuación (28) se tiene:

$$\text{Max}_{\theta} \text{Min} L(Q_{ij}, R_{ij}, \theta)$$

$$\sum_i \sum_j \gamma_{ij} (Q_{ij} + R_{ij}) - S_n - \mu_Y - z_{1-\alpha} \sigma_Y = 0 \quad (47)$$

Dado que para un valor de θ , se puede calcular los valores de R_{ij} reemplazando en (35) y posteriormente determinar el valor de escasez en (33) para finalmente determinar el valor de Q_{ij} usando (21) para el caso de tiempo de entrega estocástico, lo cual reduce el problema a la solución del problema para una única variable desconocida θ . Obteniendo así una función con una única variable reemplazando en (48).

$$g(\theta) = \sum_i \sum_j \gamma_{ij} (\widetilde{Q}_{ij} + \widetilde{R}_{ij}) - S_n - \mu_Y - z_{1-\alpha} \sigma_Y = 0 \quad (48)$$

Como hay una única variable y solución para cada uno de los tamaños de almacén disponibles se adapta el método de búsqueda por bisección para determinar la solución para

cada uno de estos y de esta manera determinar cuál es la solución que mejor se ajusta y que proporciona el menor costo total esperado.

Consiste en comenzar desde un intervalo $[x_0, x_1]$ tal que $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$, por lo que se sabe que hay al menos una raíz real. Desde este punto, el intervalo se reduce sucesivamente hasta que se vuelve tan pequeño como la precisión determinada. $a_n \leq k_n \leq b_n$ donde los valores iniciales están dados por: $a_0 = a$ y $b_0 = b$ (Fern, 2007).

$$k_n = x_{n+1} = \frac{(a_n + b_n)}{2} \tag{49}$$

$$a_{n+1} = \{a_n \text{ if } f(a_n) \cdot f(k_n) < 0; k_n \text{ if } f(a_n) \cdot f(k_n) > 0\} \tag{50}$$

$$b_{n+1} = \{b_n \text{ if } f(b_n) \cdot f(k_n) < 0; k_n \text{ if } f(b_n) \cdot f(k_n) > 0\} \tag{51}$$

Cabe resaltar que para resolver la ecuación (35) para el caso de tiempo de entrega estocástico fue necesario usar el solver del software matemático Matlab debido a que son ecuaciones no lineales con única variable de punto de reorden R_{ij} la cual es compleja de resolver para determinar el punto de reorden óptimo para el valor de θ dado. Posteriormente se calcula la escasez (ESC) y finalmente se calcula la cantidad óptima de pedido Q_{ij} . El método es el siguiente:

1. Se definen los valores de $a_0 = \theta_1$ tal que al evaluar $g(\theta)$ sea $g(\theta) > 0$ y $b_0 = \theta_2$ sea un valor tal que al evaluar $g(\theta) < 0$.
2. Se calcula \tilde{Q}_a, \tilde{R}_a a partir de $\theta = \theta_1$ y \tilde{Q}_b, \tilde{R}_b a partir de $\theta = \theta_2$.
3. Se determina $c = \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ y calcula \tilde{Q} y \tilde{R} a partir de $c = \theta$; se remplazan \tilde{Q} y \tilde{R} en $g(\theta)$.
4. Si el valor de $g(\theta) > 0$, entonces define $\theta_1 = \theta$, $\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}$, y $\tilde{R}_1 = \tilde{R}$; de lo contrario si $g(\theta) < 0$, entonces se define que $\theta_2 = \theta$, $\tilde{Q}_2 = \tilde{Q}$, y $\tilde{R}_2 = \tilde{R}$.

5. Si $(g(\theta_1) - g(\theta_2)) < \varepsilon_g$ (margen de error o tolerancia), se finaliza las iteraciones. En otro caso vuelva al paso 3.
6. Este proceso se repite para cada uno de los tamaños de almacén disponibles. S_n .

En el caso en el que el tamaño de almacén evaluado S_n sea mucho mayor a el espacio requerido por el valor óptimo de $\gamma_{ij} (\widetilde{Q}_{ij} + (\widetilde{R}_{ij} - \mu_{x_{ij}}))$ cuando el valor de $\theta = 0$ el tamaño de almacén seleccionado sera el limite inferior del intervalo.

Para la solución del escenario cuando la demanda se comporta como una distribución normal y tiempo de entrega estocástico se aplica el método de bisección modificado de manera similar al escenario con demanda uniforme. Se tiene en cuenta la ecuación (46) de referencia:

$$\sum_i (\gamma_{i2} (Q_{i2} + z_{i2} \sigma_{x_{i2}}) + \gamma_{i1} (Q_{i1} + z_{i1} \sigma_{x_{i1}})) - S_n - \mu_Y - z_{1-\alpha} = 0 \quad (52)$$

Para un valor θ se calcula z_{ij} con la ecuación (45) posteriormente se calcula la escasez por ciclo (ESC) con la ecuación (38) y finalmente calcular la cantidad de pedido óptimo Q_{ij} con la ecuación (43), remplazando en (52) se tiene.

$$g(\theta) = \sum_i (\gamma_{i2} (\widetilde{Q}_{i2} + \widetilde{z}_{i2} \sigma_{x_{i2}}) + \gamma_{i1} (\widetilde{Q}_{i1} + \widetilde{z}_{i1} \sigma_{x_{i1}})) - S_n - \mu_Y - z_{1-\alpha} = 0 \quad (53)$$

Para calcular el valor de la ecuación (53) fue necesario utilizar el solver del software matemático Matlab dada la complejidad para determinar el valor óptimo de z_{ij} para un valor de θ . Posteriormente se calcula el valor de escasez por ciclo de la ecuación (38) y se calcula el valor de pedido optimo con la ecuación (43). A continuación, se presenta el método de bisección modificado en términos de Q_{ij} y z_{ij} .

1. Se definen los valores de $a_0 = \theta_1$ tal que al evaluar $g(\theta)$ sea $g(\theta) > 0$ y $b_0 = \theta_2$ sea un valor tal que al evaluar $g(\theta) < 0$.
2. Se calcula $\widetilde{Q}_a, \widetilde{z}_a$ a partir de $\theta = \theta_1$, $\widetilde{Q}_b, \widetilde{z}_b$ a partir de $\theta = \theta_2$.

3. Se determina $c = \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ y calcula \tilde{Q} y \tilde{z} a partir de $c = \theta$ y se replazan \tilde{Q} y \tilde{z} en $g(\theta)$.
4. Si el valor de $g(\theta) > 0$, entonces se define $\theta_1 = \theta$, $\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}$, y $\tilde{z}_1 = \tilde{z}$; de lo contrario si $g(\theta) < 0$, entonces se define que $\theta_2 = \theta$, $\tilde{Q}_2 = \tilde{Q}$, y $\tilde{z}_2 = \tilde{z}$
5. Si $(g(\theta_1) - g(\theta_2)) < \varepsilon_g$ (margen de error o tolerancia), se finaliza las iteraciones. En otro caso vuelva al paso 3.
6. Este proceso se repite para cada uno de los tamaños de almacén disponibles S_n .

En el caso en el que el tamaño de almacén evaluado S_n sea mucho mayor a el espacio requerido por el valor óptimo de $\gamma_{ij} (\tilde{Q}_{ij} + \tilde{z}_{ij} \sigma_{x_{ij}})$ cuando el valor de $\theta = 0$ el tamaño de almacén seleccionado sera el límite inferior del intervalo.

El método de bisección fue programado en el software matemático Matlab y se encuentra en el Apéndice B.

10. Ejemplos numéricos

Para los ejemplos numéricos se tomaron de referencia los datos propuestos por F Alawneh y Zhang (F Alawneh y Zhang, 2018) en los que se establecen los parámetros de entrada para los problemas de gestión de inventario con demanda distribución uniforme con tiempo de entrega estocástico y demanda normal con tiempo de entrega estocástico. Los costos de inventario como: el costo de pedir, el costo de mantener inventario, el costo de pedidos pendientes. Además de las características del producto como el espacio requerido para almacenarlo.

En la formulación de los parámetros en el contexto de doble canal, se resalta las diferencias que existen entre los dos canales en términos de demanda, costos de inventario y perfiles de almacenamiento.

La demanda $D_2 > D_1$ donde la demanda del canal tradicional es mayor que la demanda del canal en línea al igual que el tamaño del pedido de las tiendas es mayor que el de los pedidos del canal directo en línea. El costo de pedido $A_2 > A_1$ dado que en la etapa 2 se realiza los pedidos al proveedor el costo de pedido es mayor que el de la etapa 1. El costo de pedido pendiente $B_2 > B_1$ el cual es mayor para el canal tradicional dado que está sujeto a contratos establecidos entre el fabricante y los minoristas, a diferencia de los pedidos del canal directo en línea que presenta flexibilidad en la entrega de los pedidos lo que representa un impacto económico menor para el fabricante.

Para la separación del costo de almacenamiento del costo de mantenimiento se define el costo variable de almacenamiento por unidad de producto c_n en los que se tienen los costos netamente de almacenamiento como los costos de los bienes y equipos del almacén, mano de obra (mantenimiento, limpieza, seguridad), servicios públicos (electricidad, gas, agua) y controles específicos (plagas, temperatura y otros controles ambientales) además del costo fijo anualizado de adquirir una cantidad de espacio s_n y los costos que no se relacionan con el almacenamiento como la inversión de inventario, seguro de inventario y pérdidas de calidad y precio (debido al largo tiempo de almacenamiento) son asumidos como costo de mantenimiento de inventario. Por esto el costo de mantenimiento de inventario h_1 y h_2 es similar en las dos etapas dado a que se separa el costo de mantener inventario y el costo de almacenamiento de acuerdo con el espacio que ocupa el producto en cada una de las etapas de almacenamiento.

Los requisitos de almacenamiento en el almacén $\gamma_1 > \gamma_2$ en la etapa 1 donde se almacenan los productos de canal en línea requieren mayor espacio de almacenamiento que los de la etapa 2 del canal tradicional, debido a que son almacenados en sistemas de almacenamiento de baja densidad lo cual permite un acceso rápido de los mismos pero el

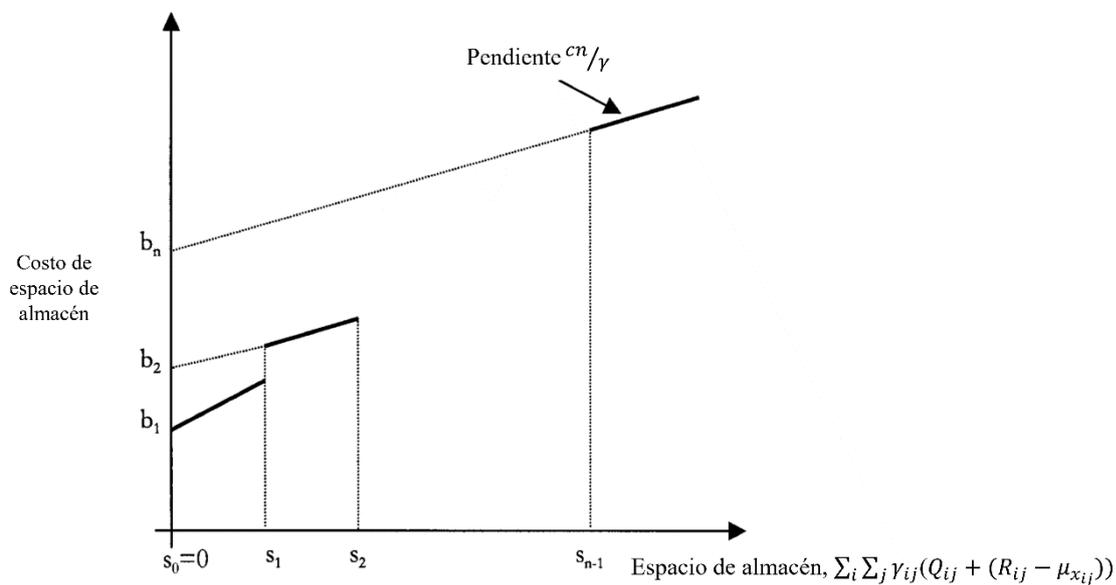
espacio requerido por unidad de producto es mayor, a diferencia del almacenamiento de alta densidad de la etapa 2 en la cual la unidad de producto requiere menor espacio al ser almacenado a granel en pallets.

Para el dimensionamiento del almacén se tomó de referencia que la estructura de costos de almacenamiento se comporta como una función lineal por partes como en los trabajos de Goh et al., (Goh et al., 2001) y Yao y Huang (M. J. Yao y Huang, 2017) la cual está compuesta por b_n costo fijo de adquirir una unidad del espacio S_n y c_n costo variable de almacenamiento por unidad de acuerdo al tamaño de almacén disponible S_n como se ve en la

Figura 2.

Figura 2

Función de costo de almacenamiento lineal por partes.



Nota: En el gráfico se representa el costo de almacenamiento por partes que define el costo fijo y el costo variable de almacenamiento de acuerdo con el espacio adquirido. Adaptado de Goh, M., Jihong, O., y Chung-Piaw, T. (2001). Warehouse sizing to minimize inventory and storage costs (p.302). Naval Research Logistics, 48(4), 299–312. <https://doi.org/10.1002/nav.10>

Los parámetros de dimensionamiento (S_n , b_n , c_n) se generan aleatoriamente mediante el uso de distribuciones uniformes de acuerdo a los parámetros presentados por Yao y Huang (M. J. Yao y Huang, 2017)

Los ejemplos numéricos consisten en escenarios con diferentes distribuciones de demanda y tiempos de entrega. Además de comparar los costos totales de los modelos de gestión de inventario con el tamaño de almacén como un parámetro conocido con los costos totales cuando se hace el modelo integrado de gestión de inventario y dimensionamiento de almacenes, esto con el fin de contrastar la Hipótesis planteada “Integrar el dimensionamiento y la gestión de inventarios en el almacén doble canal disminuye los costos totales de gestión del sistema de inventario comparado con el modelo de áreas predeterminadas”.

10.1 Demanda uniforme y tiempo de entrega estocástico

En la **Tabla 1** se presenta el ejemplo de cuatro tamaños de almacén con los costos correspondientes de almacenamiento y en la **Tabla 2** se presentan los parámetros correspondientes de demanda, costos y perfil de almacenamiento.

Tabla 1

Ejemplo de cuatro tamaños de almacén disponibles

Parámetros	n			
	1	2	3	4
S_n	(0, 3817)	(3817, 11391)	(11391, 17840)	(17840, ∞)
b_n	157.4	212.4	338.2	457.5
C_n	9.35	8.03	6.42	4.61

Tabla 2

Parámetros demanda uniforme y tiempo de entrega estocástico.

Parámetros	Valor	Parámetros	Valor
D ₁	60000	B ₁	60
D ₂	45000	B ₂	60
h ₁	10	A ₁	500
h ₂	10	A ₂	500
d _{M1}	60	γ ₁	1
d _{M2}	50	γ ₂	0.2
t _{M1}	15		
t _{M2}	18		

10.2. Demanda con distribución normal y tiempo de entrega estocástico

En la Tabla 3 se muestra el ejemplo para cinco tamaños discretos de almacén en el que se presentan los costos asociados a la función lineal por partes y cada uno de los tamaños en intervalos y en la

Tabla 4 se presentan los parámetros correspondientes de demanda, costos y perfil de almacenamiento.

Tabla 3

Ejemplo para cinco tamaños discretos de almacén.

Parámetros	n				
	1	2	3	4	5
S _n	(0, 250)	(250, 1908)	(1908, 8920)	(8920, 12519)	(12519, ∞)
bn	83.47	107.68	162.976	210	249.753
cn	6.06	5.23	3.34	1.73	0.37

Tabla 4

4 Parámetros distribución normal y tiempo de entrega estocástico

Parámetros	Valor	Parámetros	Valor	Parámetros	Valor	Parámetros	Valor
D ₁₁	240	μ ₁₁	3	B ₁₁	10	γ ₁₁	5
D ₂₁	350	μ ₂₁	2.5	B ₂₁	10	γ ₂₁	4
D ₁₂	2400	μ ₁₂	120	B ₁₂	60	γ ₁₂	0.2
D ₂₂	4500	μ ₂₂	100	B ₂₂	50	γ ₂₂	0.1
h ₁₁	2	σ ₁₁	0.5	A ₁₁	50		
h ₂₁	3	σ ₂₁	0.3	A ₂₁	40		
h ₁₂	1	σ ₁₂	4	A ₁₂	125		
h ₂₂	0.5	σ ₂₂	2.9	A ₂₂	100		

10.3. Análisis preliminar

Para la implementación del método de búsqueda de bisección se verifica la factibilidad de la restricción (5) en el que define que las variables de decisión Q y R deben ser variables positivas. Dado que para cada valor de θ se tiene un valor de Q y R, se realiza un procedimiento paso a paso en el que se remplazan valores de θ en la ecuación (35) para calcular el valor de R y se verifica el signo. Además, de la naturaleza de las mismas para evitar casos de números complejos. Este proceso también se realiza cuando se calcula el valor de factor de seguridad z en (45).

11. Resultados

11.1. Demanda con distribución uniforme y tiempo de entrega estocástico

En la Tabla 5 se presentan los resultados en términos de las variables de decisión para cada uno de los intervalos de tamaño de almacén evaluados, así como el costo total esperado y el multiplicador de Lagrange con el resultado de evaluar este valor en la función $g(\theta)$. En la **Tabla 6** se detallan el valor de los costos de inventario y almacenamiento para cada uno de los tamaños de almacén.

Tabla 5

Resultados ejemplo distribución uniforme

Sn	θ	$g(\theta)$	R_1	R_2	Q_1	Q_2	Costo total
S1	404	-0.16976	668.71	732.92	2822.3	2246	107189
S2	0	-7791	790.47	788.08	2490.2	2158.9	90514
S3	0	-14240	791.97	788.26	2488.5	2158.7	84117
S4	0	-14400	793.61	788.43	2486.8	2158.6	76904

Tabla 6*Costo de inventario y almacenamiento distribución uniforme*

Sn	Costo total	Costo de pedir	Costo de mantener inventario	Costo de pedido pendiente	Costo fijo de almacenamiento	Costo variable de almacenamiento
S1	107188.9	18792	36409	9215.5	157.4	42615
S2	90514	22469	34531	775.91	212.4	32525
S3	84117	22478	34538	757.86	338.2	26004
S4	76904	22488	34547	738.97	457.5	18673

En la **Tabla 7** se presentan los resultados relacionados con la asignación de espacio de acuerdo con los tamaños de almacén evaluados tanto para el tamaño general como para cada uno de los canales de ventas, además del costo de almacenamiento variable correspondiente a cada canal, para ajustar el tamaño del almacén general se toma de referencia la condición establecida en la sección de Método de bisección en la que establece de que si el tamaño del almacén de referencia era mucho mayor al espacio requerido se define el multiplicador de Lagrange como cero y el tamaño de almacén seleccionado para cada caso correspondería al límite inferior del intervalo del tamaño de almacén Sn.

Tabla 7*Resultados de asignación de espacio de almacenamiento*

Tamaño de almacén disponible	(0, 3817)	(3817, 11391)	(11391, 17840)	(17840, ∞)
Requerimiento de espacio	3816.794	3600.066	3599.862	3599.816
Ajuste del espacio de almacenamiento para el tamaño general del almacén	3817	3817	11391	17840
Espacio ocupado Canal en línea	3266	3056	3055	3055
Espacio ocupado Canal Tradicional	551	544	544	544
Costo de almacenamiento variable canal En línea	36465	27607	22072	15849
Costo de almacenamiento variable canal tradicional	6150	4918	3932	2824

11.2. Demanda como distribución normal y tiempo de entrega estocástico

En la **Tabla 8** se presentan los resultados para el escenario de la demanda normal con tiempo de entrega estocástico en la que se muestran las variables de decisión para cada uno de los artículos en cada uno de los canales. Aplicando el método de bisección se determinó el valor de multiplicador de Lagrange θ adecuado para que el valor de la función $g(\theta)$ relacionada con la restricción de espacio sea un valor muy bajo lo que quiere decir que se tiene un ajuste aproximado al tamaño del almacén para el caso de S1. En la **Tabla 9** se presentan los costos resultantes de almacenamiento e inventario.

Tabla 8

Resultados ejemplo de distribución normal

Sn	θ	$g(\theta)$	R ₁₁	R ₁₂	R ₂₁	R ₂₂	Q ₁₁	Q ₁₂	Q ₂₁	Q ₂₂	Costo total
S1	8.21	-0.000052	3.10	141.61	2.66	121.36	13.14	312.00	15.64	530.60	5705
S2	0	-1522.65	3.28	144.56	2.76	124.22	21.32	457.28	25.20	779	5069
S3	0	-8460.43	3.36	145.40	2.80	125.03	26.36	525.49	30.92	896	4337
S4	0	-11937.70	3.46	146.11	2.85	125.72	35.64	616.87	41.05	1052	3562
S5	0	-15962.04	3.64	146.54	2.93	126.14	65.44	748.49	68.94	1277	2656

Tabla 9

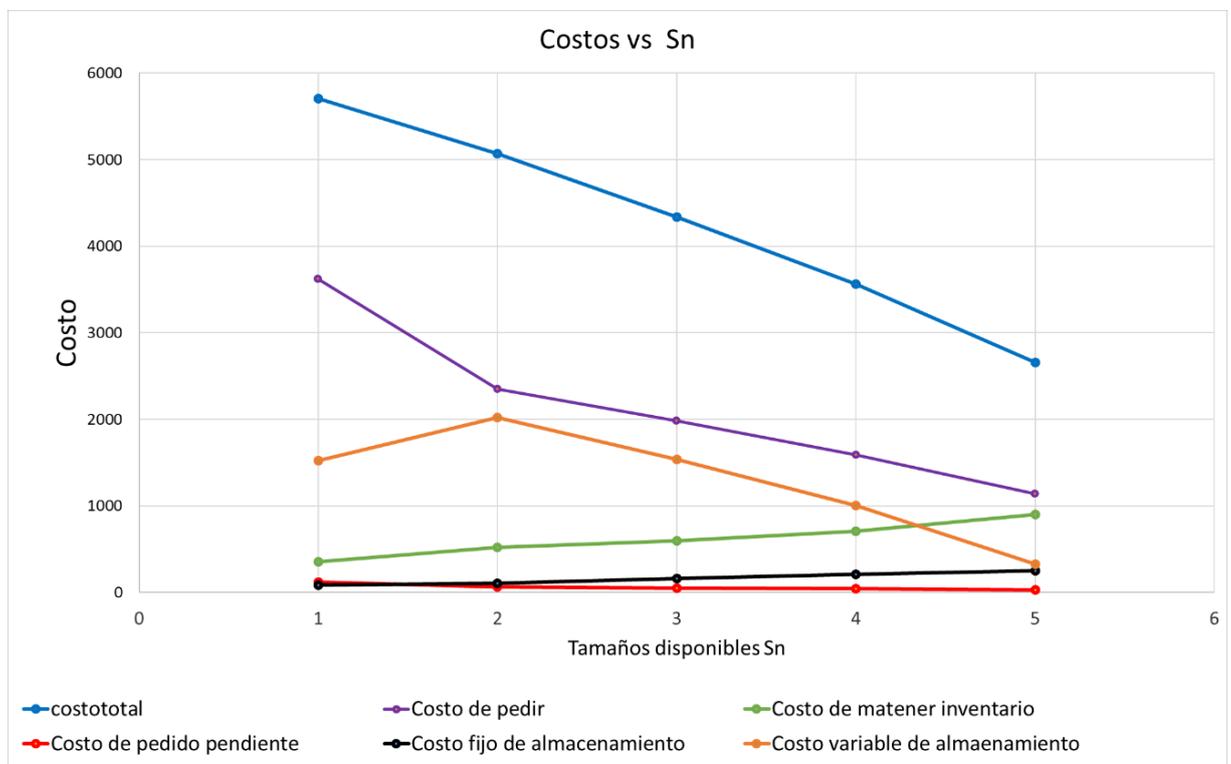
Costos de inventario y almacenamiento por cada tamaño de almacén.

Sn	Costo total	Costo de pedir	Costo de mantener inventario	Costo de pedido pendiente	Costo fijo de almacenamiento	Costo variable de almacenamiento
S1	5704.80	3618.14	358.21	122.10	83.47	1522.88
S2	5069.35	2351.72	520.64	67.18	107.68	2022.13
S3	4336.69	1980.89	599.06	54.46	162.98	1539.30
S4	3562.13	1591.68	709.70	42.85	210.00	1007.90
S5	2656.42	1139.63	904.57	31.97	249.75	330.51

En la **Figura 3** se presenta la relación de los costos de inventario y almacenamiento para cada uno de los tamaños de almacén, en los que se puede observar que el costo anual de ordenar para el tamaño de almacén S1 es mayor que el almacén de mayor tamaño S5 además del costo anual de pedidos pendientes.

Figura 3

Costos de inventario y almacenamiento vs tamaño de almacén Sn



Nota: En el grafico se muestra el costo de inventario de cada uno de los espacios disponibles Sn

De igual forma como se presentaron los resultados para el escenario descrito en la sección 11.1 se presentan los resultados de asignación de espacio de almacenamiento con distribución normal.

Tabla 10*Resultados espacio de almacenamiento distribución normal*

Tamaño de almacén disponible	(0, 250)	(250, 1908)	(1908, 8920)	(8920, 12519)	(12519, ∞)
Requerimiento de espacio	250	386.53	460.761	582.468	893.2
Ajuste a espacio de almacenamiento	250	387	1908	8920	12519
Espacio ocupado Canal en línea	129	210	258	346	608
Espacio ocupado Canal Tradicional	121	177	202	236	285
Costo de almacenamiento En línea	784.164	1097.4632	878.832	598.753	224.9156
Costo de almacenamiento tradicional	738.82308	924.0887	687.7554	408.91664	105.5684

12. Prueba de hipótesis

Para contrastar la Hipótesis “Integrar el dimensionamiento y la gestión de inventarios en el almacén doble canal disminuye los costos totales de gestión del sistema de inventario comparado con el modelo de áreas predeterminadas”, se aplica el siguiente procedimiento primero se calcula el costo fijo de almacenamiento y el costo variable para el tamaño del almacén dado, posteriormente se hallan las variables de decisión Q y R acordes a este tamaño y se determinan los costos correspondientes, estos costos se comparan con los obtenidos a partir del modelo integrado de gestión de inventarios y dimensionamiento desarrollado en esta investigación.

12.1. Ejemplo 1

Para la prueba de hipótesis primero se utilizó el escenario propuesto por (F Alawneh y Zhang, 2018) en el que se define el tamaño del almacén y una restricción del tamaño del área de almacenamiento para el canal en línea. Segundo se prueba la hipótesis con el ejemplo de la sección 11.2

Tabla 11

Ejemplo de cinco tamaños de almacén disponibles

Parámetros	n				
	1	2	3	4	5
Sn	(0, 250)	(250, 1908)	(1908, 8920)	(8920, 12519)	(12519, ∞)
bn	83.47	107.68	162.976	210	249.753
cn	6.06	5.23	3.34	1.73	0.37

Tabla 12

Parámetros Ejemplo 1

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
D11	165	σ_{11}	2	h_{11}	8
D21	185	σ_{21}	1,5	h_{12}	8
D12	1650	σ_{12}	8,5	h_{21}	8
D22	1850	σ_{22}	10	h_{22}	8
μ_{11}	5	A_{11}	6,5	γ_{11}	10
μ_{21}	4	A_{21}	8,5	γ_{12}	1
μ_{12}	85	A_{12}	85	γ_{21}	10
μ_{22}	100	A_{22}	85	γ_{22}	1
B11	10	b_{12}	10	S	1000
B21	10	b_{22}	10	S1en línea	300

Para 1000 m² se tiene los siguientes costos de almacenamiento: costo fijo de adquirir una unidad tamaño de almacén bn=107.68 y el costo variable de almacenamiento por unidad de artículo Cn =5,23.

En la Tabla 13 se presentan los resultados de las variables de decisión al evaluar el tamaño de almacén 1000 m². En la Tabla 14 se detallan los costos de inventario y almacenamiento para el caso de 1000m² y finalmente se presenta en la

Tabla 15 la asignación de espacios para cada uno de los canales, así como los costos de almacenamiento en espacio de almacenamiento 1000m².

Tabla 13

Resultados ejemplo 1 tamaño de almacén 1000 m²

S	θ	$g(\theta)$	R ₁₁	R ₁₂	R ₂₁	R ₂₂	Q ₁₁	Q ₁₂	Q ₂₁	Q ₂₂	Costo total
1000	0	-547.56	6.43	95.84	5.11	113.18	5.97	135.18	6.49	144.67	6626.14

Tabla 14

Costos de inventario y de almacenamiento de almacén 1000 m²

Costo total	Costo de pedir	Costo de mantener inventario	Costo de pedido pendiente	Costo fijo de almacenamiento	Costo variable de almacenamiento
6626.14	2546.54	1381.66	321.56	107.68	2268.70

Tabla 15

Resultados de asignación de espacio de almacenamiento

Tamaño de almacén disponible	1000 m ²
Requerimiento de espacio	454
Ajuste del espacio de almacenamiento para el tamaño general del almacén	1000
Espacio ocupado Canal en línea	150
Espacio ocupado Canal Tradicional	304
Costo de almacenamiento variable canal en línea	861
Costo de almacenamiento variable canal tradicional	1407

A continuación, se presentan los resultados para el ejemplo 1 obtenidos mediante modelo integrado de gestión de inventario y dimensionamiento, en este caso el modelo considera todos los intervalos de almacenamiento con el fin de determinar el tamaño de almacén en el que se disminuyan los costos totales de sistema de inventario.

En la **Tabla 16** se presentan los resultados de las variables de decisión al evaluar los tamaños de almacén disponibles S_n. En la **Tabla 17** se detallan los costos de inventario y

almacenamiento para cada uno de los tamaños de almacén disponibles y finalmente se presenta en la

Tabla 18 la asignación de espacios para cada uno de los canales, así como los costos de almacenamiento.

Tabla 16

Resultados de variables de decisión para los tamaños de almacén.

Sn	θ	$g(\theta)$	R ₁₁	R ₁₂	R ₂₁	R ₂₂	Q ₁₁	Q ₁₂	Q ₂₁	Q ₂₂	Costo total
S1	17.37	0	5.02	93.34	4.15	110.18	3.37	78.64	3.45	84.32	7717.0
S2	0	-1455.56	6.43	95.84	5.11	113.18	5.97	135.18	6.49	144.67	6626.1
S3	0	-8410.36	6.70	96.12	5.31	113.52	7.00	149.47	7.68	159.93	5934.0
S4	0	-11918.50	7.10	96.36	5.59	113.81	9.02	168.96	9.99	180.76	5144.5
S5	0	-16075.51	7.61	96.49	5.96	113.95	14.56	193.35	16.29	206.85	4316.3

Tabla 17

Costos de inventario y almacenamiento para cada tamaño de almacén

Costo total	Costo de pedir	Costo de mantener inventario	Costo de pedido pendiente	Costo fijo de almacenamiento	Costo variable de almacenamiento
7717.04	4422.95	828.59	859.14	83.47	1522.87
6626.14	2546.54	1381.66	321.56	107.68	2268.70
5934.08	2279.53	1517.52	267.53	162.98	1706.53
5144.53	1976.33	1705.73	211.35	210.00	1041.12
4316.36	1655.79	1964.25	158.05	249.75	288.52

Tabla 18

Resultados de asignación de espacio de almacenamiento

Tamaño de almacén disponible	(0, 250)	(250, 1908)	(1908, 8920)	(8920,12519)	(12519, ∞)
Requerimiento de espacio	250	454	510.94	601.89	779.84
Ajuste del espacio de almacenamiento para el tamaño general del almacén	250	454	1908	8920	12519
Espacio ocupado Canal en línea	70	150	176.9	227	354.2

Espacio ocupado Tradicional	Canal	180	304	334.04	374.89	425.64
Costo de almacenamiento variable canal en línea		426.40	749.57	590.84	392.65	131.04
Costo de almacenamiento variable canal tradicional		1096.47	1519.13	1115.69	648.47	157.48

En términos de costo el modelo integrado de gestión de inventario y dimensionamiento de almacenes proporciona diferentes opciones de tamaño de almacén que permiten determinar un menor costo de inventario y almacenamiento. En este caso las opciones que tienen menor costo que el costo del almacén de 1000 m² son S3, S4 y S5. Dado a que el tamaño de almacenamiento de 1000 m² presenta mayor valor en el costo de pedir, en el costo de pedidos pendientes y en el costo variable de almacenamiento.

12.2 Ejemplo 2

Segundo se prueba la hipótesis con el ejemplo de la sección 11.2 . Para 3500 m² se tiene los siguientes costos de almacenamiento: costo fijo de adquirir una unidad tamaño de almacén $b_n=162.976$ y el costo variable de almacenamiento por unidad de artículo $C_n =3.34$.

En la Tabla 19 se presentan los resultados de las variables de decisión al evaluar el tamaño de almacén 3500 m². En la Tabla 20 se detallan los costos de inventario y almacenamiento para el caso de 3500 m² y finalmente se presenta en la Tabla 21 la asignación de espacios para cada uno de los canales, así como los costos de almacenamiento en espacio de almacenamiento 3500 m².

Tabla 19

Resultados para el tamaño de almacén 3500 m²

S	θ	$g(\theta)$	R ₁₁	R ₁₂	R ₂₁	R ₂₂	Q ₁₁	Q ₁₂	Q ₂₁	Q ₂₂	Costo total
3500	0	-3040.43	3.36	145.40	2.80	125.04	26.37	525.50	30.93	895.99	4336.6

Tabla 20

Costos de inventario y almacenamiento para el caso de 3500 m²

Costo total	costo de pedir	costo de mantener inventario	costo de pedido pendiente	costo fijo de almacenamiento	costo variable de almacenamiento
4336.69	1980.89	599.06	54.46	162.98	1539.30

Tabla 21*Resultados de asignación de espacio de almacenamiento*

Tamaño de almacén disponible	3500 m²
Requerimiento de espacio	460.761
Ajuste del espacio de almacenamiento para el tamaño general del almacén	1908
Espacio ocupado Canal en línea	258
Espacio ocupado Canal Tradicional	202
Costo de almacenamiento variable canal en línea	878.832
Costo de almacenamiento variable canal tradicional	687.7554

Al igual que en ejemplo anterior el modelo integrado de gestión de inventarios y de dimensionamiento al proporcionar diferentes tamaños de almacenamiento para seleccionar brinda la solución de menor costo a el parámetro determinado de tamaño de almacén de 3500 m². A partir de los anteriores ejemplos se comprueba la hipótesis de que Integrar el dimensionamiento y la gestión de inventarios en el almacén doble canal disminuye los costos totales de gestión del sistema de inventario comparado con el modelo de áreas predeterminadas.

13. Discusión

En la actualidad a nivel nacional el comercio electrónico ya se está implementado en la mayoría de los sectores de la economía, esto ha llevado a los investigadores ha analizar los

diferentes factores que afectan la eficiencia en el cumplimiento electrónico y el canal tradicional de tiendas minoristas. Los modelos de gestión de inventarios que puedan representar de manera aproximada los entornos reales y de esta manera hacer uso eficiente de los recursos ya existentes o en la proyección hacia la adquisición de diferentes alternativas de almacenamiento que requieran un enfoque global de la cadena de suministro interconectada y con un ritmo más exigente en el cumplimiento de las necesidades de los clientes.

La flexibilidad de los modelos para la toma de decisiones de dimensionamiento y gestión de inventario permiten tener un panorama más amplio en la asignación y determinación del tamaño adecuado del almacén, así como las áreas de almacenamiento, bajo entornos de incertidumbre la simulación previa de diferentes alternativas permite proyectar posibles expansiones o adquisición de diferentes espacios de almacén de acuerdo con las necesidades que se presenten en el almacén de doble canal.

Tener en cuenta diferentes representaciones de la incertidumbre de la demanda permite analizar distintos comportamientos como es el caso de los productos nuevos los cuales no tienen datos históricos que generen una aproximación más clara de su comportamiento, sin embargo, diferentes estudios avalan que la distribución uniforme permite hacer una aproximación importante cuando se desconocen estos datos, como es el caso en el contexto de la gestión de inventarios en la cadena de suministro de doble canal en la creación de nuevas líneas de productos que se venden por internet que requieren un almacenamiento acorde a su comportamiento.

La integración de los modelos de dimensionamiento de almacenes y de gestión de inventario en el almacén doble canal bajo condiciones de incertidumbre fue complejo en el aspecto de integración de las condiciones del modelo matemático, así como en el desarrollo de

las ecuaciones base que contemplaran las decisiones de inventario y parámetros asociados con el almacenamiento. Otro aspecto crítico fue en el desarrollo de los primeros modelos de prueba del método de solución debido al alto costo computacional que le llevaba encontrar la solución del problema, adicional al tiempo de ejecución que consumían las funciones del solver del software matemático Matlab en la resolución de las ecuaciones para determinar los valores del punto de reorden R_{ij} en el caso de la demanda uniforme con tiempo de entrega estocástico y el factor de seguridad z_{ij} para el caso de la distribución Normal con tiempo de entrega estocástico donde garantizar la factibilidad de estos valores era una prioridad.

14. Conclusiones

De acuerdo con la revisión de literatura se encontró que la integración de modelos en términos de modelación matemática utilizando diferentes distribuciones para modelar la incertidumbre está tomando relevancia en el contexto de comercio electrónico.

El espacio que ocupa el canal de ventas en línea es un factor determinante en el costo del almacén doble canal, si la demanda de este canal es alta el costo de almacenamiento aumenta por el espacio que ocupa, comparado con el costo de almacenamiento del canal tradicional.

El costo total del sistema de inventario se reduce al aumentar el tamaño del almacén con la estructura de costos de almacenamiento por partes, sin embargo, se desperdicia gran parte de este espacio generando así un sobredimensionamiento del almacén.

El método de búsqueda de bisección proporciona versatilidad a la hora de resolver los dos escenarios de demanda uniforme y tiempo de entrega estocástico y la demanda normal con tiempo de entrega estocástico, sin embargo, su velocidad de convergencia es lenta.

15. Recomendaciones

Para futuras investigaciones se recomienda evaluar otras distribuciones de demanda, con el fin de establecer contrastes entre los diferentes tipos de modelamiento de la incertidumbre, así como la combinación de distribuciones para cada uno de los canales de ventas del almacén doble canal.

Ampliar el modelo propuesto aplicando demanda variable en el tiempo para cada uno de los canales en los que se evalué diferentes escenarios de estacionalidad, además de definir el modelo cuando la demanda es dependiente, es decir, una demanda global en la que se correlacionen los pedidos de los dos canales.

Considerar un enfoque de reaprovisionamiento conjunto de inventario para cada una de las etapas de almacenamiento con el fin de comparar como se pueden integrar los pedidos que llegan a la etapa 2 del fabricante y el reaprovisionamiento del canal en línea.

Implementar un algoritmo de búsqueda alternativo con el fin de evaluar el rendimiento con problemas de mayor tamaño a partir de ejemplos numéricos, además de implementar el almacenamiento aleatorio con el fin de compararlo con el almacenamiento dedicado en el almacén doble canal.

Referencias Bibliográficas

- Agatz, N. A. H., Fleischmann, M., y van Nunen, J. A. E. E. (2008). E-fulfillment and multi-channel distribution - A review. *European Journal of Operational Research*, 187(2), 339–356. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.04.024>
- Alawneh, F, y Zhang, G. (2018). Dual-channel warehouse and inventory management with stochastic demand. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 112, 84–106. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2017.12.012>
- Alawneh, Fawzat, y Zhang, G. (2018). Dual-channel warehouse and inventory management with stochastic demand. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 112(February 2017), 84–106. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2017.12.012>
- Allgor, R., Graves, S., y Xu, P. J. (2004). Traditional inventory models in an e-retailing setting: A two-stage serial system with space constraints. *Proceedings of 2004 SMA Conference*, 6–12.
- Ballesteros, D. P., y Ballesteros, P. P. (2007). El comercio electrónico y la logística en el contexto latinoamericano. *Scientia et Technica Año XIII*, 35(35), 269–274.
- Ballou, R. H. (2004). *Ronald ballod*.
- Batarfi, R., Jaber, M. Y., y Zanoni, S. (2016). Dual-channel supply chain: A strategy to

- maximize profit. *Applied Mathematical Modelling*, 40(21–22), 9454–9473.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.06.008>
- Bendoly, E. (2004). Integrated inventory pooling for firms servicing both on-line and store demand. *Computers and Operations Research*, 31(9), 1465–1480.
[https://doi.org/10.1016/S0305-0548\(03\)00102-3](https://doi.org/10.1016/S0305-0548(03)00102-3)
- Cattani, K., Gilland, W., Heese, H. S., y Swaminathan, J. (2006). Boiling frogs: Pricing strategies for a manufacturer adding a direct channel that competes with the traditional channel. *Production and Operations Management*, 15(1), 40–56.
- Chiang, W. Y. K., y Monahan, G. E. (2005). Managing inventories in a two-echelon dual-channel supply chain. *European Journal of Operational Research*, 162(2), 325–341.
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2003.08.062>
- Clemons, E., Gu, B., y Row, M. (2000). eCommerce and eDistribution : Understanding The Role of Power When Selecting Alternatives Channel Strategies. *Workshop on IS and Economics, Melbourne ...*, 1–39. Retrieved from <http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:eCommerce+and+eDistribution++Understanding+The+Role+of+Power+When+Selecting+Alternatives+Channel+Strategies#0>
- Cormier, G., y Gunn, E. A. (1999). Modelling and analysis for capacity expansion planning in warehousing. *Journal of the Operational Research Society*, 50(1), 52–59.
<https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2600671>
- Cormier, Gilles, y Gunn, E. A. (1996). Simple models and insights for warehouse sizing. *Journal of the Operational Research Society*, 47(5), 690–696.
<https://doi.org/10.1057/jors.1996.80>
- Das, R., y Hanaoka, S. (2014). Relief inventory modelling with stochastic lead-time and demand. *European Journal of Operational Research*, 235(3), 616–623.

<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.12.042>

De Koster, R. B. M., Johnson, A. L., y Roy, D. (2017). Warehouse design and management.

International Journal of Production Research, 55(21), 6327–6330.

<https://doi.org/10.1080/00207543.2017.1371856>

Dumrongsiri, A., Fan, M., Jain, A., y Moinzadeh, K. (2008). A supply chain model with direct and retail channels. *European Journal of Operational Research*, 187(3), 691–718.

<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.05.044>

Fan, J., y Wang, G. (2018). Joint optimization of dynamic lot and warehouse sizing problems.

European Journal of Operational Research, 267(3), 849–854.

<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.12.019>

Fern, C. (2007). Convergencia Lineal y el algoritmo de bisección. *Revista de Educación Matemática*, 22(3), 16–21.

Francis, R. L. (1971). Normative models for some warehouse sizing problems. *AIIE*

Transactions, 3(3), 185–190. <https://doi.org/10.1080/05695557108974805>

Geng, Q., y Mallik, S. (2007). Inventory competition and allocation in a multi-channel

distribution system. *European Journal of Operational Research*, 182(2), 704–729.

<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.08.041>

Ghalebsaz-Jeddi, B., Shultes, B. C., y Haji, R. (2004). A multi-product continuous review

inventory system with stochastic demand, backorders, and a budget constraint. *European*

Journal of Operational Research, 158(2), 456–469. [https://doi.org/10.1016/S0377-](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(03)00363-1)

[2217\(03\)00363-1](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(03)00363-1)

Goh, M., Jihong, O., y Chung-Piaw, T. (2001). Warehouse sizing to minimize inventory and

storage costs. *Naval Research Logistics*, 48(4), 299–312. <https://doi.org/10.1002/nav.10>

Hariga, M. A. (2011). Inventory models for multi-warehouse systems under fixed and flexible

space leasing contracts. *Computers and Industrial Engineering*, 61(3), 744–751.

<https://doi.org/10.1016/j.cie.2011.05.006>

Hübner, A., Holzzapfel, A., y Kuhn, H. (2015). Operations management in multi-channel retailing: an exploratory study. *Operations Management Research*, 8(3–4), 84–100.

<https://doi.org/10.1007/s12063-015-0101-9>

Ishfaq, R., y Bajwa, N. (2019). Profitability of online order fulfillment in multi-channel retailing. *European Journal of Operational Research*, 272(3), 1028–1040.

<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.07.047>

Karim, M. T., y Xu, Q. (2018). Review Dual-channel supply chain pricing and coordination. *International Journal of Business and Applied Social Science*, 4(9), 93–108. Retrieved from <http://ijbassnet.com/>

Kembro, J. H., Norrman, A., y Eriksson, E. (2018). Adapting warehouse operations and design to omni-channel logistics: A literature review and research agenda. *International Journal of Physical Distribution and Logistics Management*, 48(9), 890–912.

<https://doi.org/10.1108/IJPDLM-01-2017-0052>

Kilcourse, B., y Rowen, S. (2008). *Finding the integrated multi-channel retailer*.

Kundu, A., y Chakrabarti, T. (2012). A multi-product continuous review inventory system in stochastic environment with budget constraint. *Optimization Letters*, 6(2), 299–313.

<https://doi.org/10.1007/s11590-010-0245-3>

López Bejarano, J. M. (2018). La República.

Ng, C. T., Cheng, T. C. E., Kotov, V., y Kovalyov, M. Y. (2009). The EOQ problem with decidable warehouse capacity: Analysis, solution approaches and applications. *Discrete Applied Mathematics*, 157(8), 1806–1824. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2009.01.004>

Petinis, V. V., Tarantilis, C. D., y Kiranoudis, C. T. (2005). Warehouse sizing and inventory scheduling for multiple stock-keeping products. *International Journal of Systems Science*, 36(1), 39–47. <https://doi.org/10.1080/0020772042000320795>

- Seifert, R. W., Thonemann, U. W., y Sieke, M. A. (2006). Integrating direct and indirect sales channels under decentralized decision-making. *International Journal of Production Economics*, 103(1), 209–229. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2005.06.006>
- Shi, Y., Guo, X., y Yu, Y. (2018). Dynamic warehouse size planning with demand forecast and contract flexibility. *International Journal of Production Research*, 56(3), 1313–1325. <https://doi.org/10.1080/00207543.2017.1336680>
- Statista. (2019). Statista.
- Takahashi, K., Aoi, T., Hirotsu, D., y Morikawa, K. (2011). Inventory control in a two-echelon dual-channel supply chain with setup of production and delivery. *International Journal of Production Economics*, 133(1), 403–415. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2010.04.019>
- Teimoury, E., Mirzahosseini, H., y Kaboli, A. (2008). A Mathematical method for managing inventories in a Dual Channel Supply Chain. *International Journal of Industrial Engineering y Production Research*, 19(4), 31–37.
- Tsay, A. A., y Agrawal, N. (2004). Channel Conflict and Coordination in the E-Commerce Age. *Production and Operations Management*, 13(1), 93–110. <https://doi.org/10.1111/j.1937-5956.2004.tb00147.x>
- Wanke, P. F. (2008). The uniform distribution as a first practical approach to new product inventory management. *International Journal of Production Economics*, 114(2), 811–819. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2008.04.004>
- Wollenburg, J., Hubner, A., Kuhn, H., y Trautrim, A. (2018). “From bricks- and-mortar to bricks-and-clicks: Logistics networks in omni-channel grocery retailing.” *International Journal of Physical Distribution y Logistics Management*, 45(1/2), 69–89. <https://doi.org/10.1108/IJPDLM-05-2013-0155>
- Xiao, T., y Shi, J. (2016). Pricing and supply priority in a dual-channel supply chain. *European Journal of Operational Research*, 254(3), 813–823.

<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.04.018>

Xiong, Y., Yan, W., Fernandes, K., Xiong, Z. K., y Guo, N. (2012). “Bricks vs. Clicks”: The impact of manufacturer encroachment with a dealer leasing and selling of durable goods. *European Journal of Operational Research*, 217(1), 75–83. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.08.012>

Xu, P. J. (2005). Order Fulfillment in Online Retailing: What Goes Where. *Mit*.

Yao, D. Q., Yue, X., Mukhopadhyay, S. K., y Wang, Z. (2009). Strategic inventory deployment for retail and e-tail stores. *Omega*, 37(3), 646–658. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2008.04.001>

Yao, M. J., y Huang, J. Y. (2017). Optimal lot-sizing and joint replenishment strategy under a piecewise linear warehousing cost structure. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 28(3), 791–803. <https://doi.org/10.1007/s10845-014-1027-z>

Zhang, H., y Tian, C. (2014). Inventory decisions of a dual-channel supply chain based on service level. *International Conference on Management Science and Engineering - Annual Conference Proceedings*, (71371093), 294–300. <https://doi.org/10.1109/ICMSE.2014.6930243>