

ADECUACIÓN Y CARACTERIZACIÓN PARA UN PROTOTIPO DE LABORATORIO
QUE VERIFICA LOS EFECTOS DEL CAOS DETERMINÍSTICO

Carlos Mario Martínez Castro
Heriberto Meneses Castañeda

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA

2018

ADECUACIÓN Y CARACTERIZACIÓN PARA UN PROTOTIPO DE LABORATORIO
QUE VERIFICA LOS EFECTOS DEL CAOS DETERMINÍSTICO

Carlos Mario Martínez Castro
Heriberto Meneses Castañeda

Proyecto de grado en modalidad de Investigación para optar al título de Ingeniero
Electrónico

Director:

Ernesto Aguilera Bermudez
Ingeniero Electrónico, Ph.D

Codirector:

Ricardo Alzate Castaño
Ingeniero Electrónico, Ph.D

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA

2018

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	13
1. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO	15
1.1. Descripción del Problema	15
2. OBJETIVOS	16
2.1. OBJETIVO GENERAL	16
2.1.1. Objetivos Específicos	16
3. BASES TEÓRICAS	17
3.1. SISTEMAS	17
3.2. SISTEMAS LINEALES	17
3.2.1. Plano de Fase	18
3.2.2. Trayectorias	19
3.2.3. Puntos de equilibrio	19
3.2.4. Ejemplo 1	20
3.2.5. Ejemplo 2	23
3.3. SISTEMAS NO LINEALES	27
3.3.1. Teorema de unicidad y existencia	28
3.3.2. Necesidad de una linealización	28
3.3.3. Clasificación de los puntos fijos	29
3.3.4. Ejemplo	30
3.3.5. Ciclo Límite	32
3.3.6. Ejemplo: Oscilador de Van der Pol	33
3.4. BIFURCACIONES	35
3.4.1. ¿Qué son las bifurcaciones?	35
3.4.2. Bifurcación Silla Nudo	35
3.4.3. Bifurcación de Tridente	37

3.4.4. Bifurcación de Hopf	41
3.5. CAOS	43
3.5.1. Atractor	46
3.5.2. Mapas de Lorenz	46
3.6. CAOS EN EL CIRCUITO OSCILADOR DE CHUA	47
3.6.1. Análisis Global	53
4. METODOLOGÍA EMPLEADA	58
4.1. ETAPAS PARA LA CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA	58
4.2. ETAPAS PARA LA REALIZACIÓN DE LAS GUÍAS	58
5. RESULTADOS	60
5.1. CARACTERIZACIÓN DE LOS MÓDULOS	60
5.1.1. Módulo Básico de Chua	60
5.1.2. Módulo de Comunicaciones de Chua	66
5.2. DISEÑO DE UN MÓDULO DE BIFURCACIONES	69
5.2.1. Elección de Componentes para el módulo de bifurcaciones	70
5.2.2. Elaboración del Módulo de bifurcaciones	70
5.2.3. Caracterización del Módulo de Bifurcaciones	73
5.3. GUÍAS DE LABORATORIO	77
5.4. PROPUESTA DE UN PROTOTIPO DE CAJA PARA EL MÓDULO DE CHUA	78
6. CONCLUSIONES	79
7. RECOMENDACIONES	80
REFERENCIAS	81
ANEXOS	84

LISTA DE FIGURAS

1.	Respuesta temporal de un sistema masa resorte sin amortiguador. . .	21
2.	Espacio de fase de un sistema masa resorte sin amortiguador.(Ver Anexo 1)	22
3.	Retrato de fase de un sistema masa resorte sin amortiguador. Condi- ciones iniciales indicadas como C.I. en la leyenda de la gráfica.	23
4.	Espacio de fase del sistema propuesto para $a < -1$	24
5.	Espacio de fase del sistema propuesto para $a = -1$	25
6.	Espacio de fase del sistema propuesto para $-1 < a < 0$	25
7.	Espacio de fase del sistema propuesto para $a = 0$	26
8.	Espacio de fase del sistema propuesto para $a > 0$	26
9.	Clasificación para los puntos fijos dependiendo de sus valores propios [7].	29
10.	Plano de fase de un modelo de competencia entre dos especies.	32
11.	Respuesta temporal de un sistema oscilador de Van Der Pol para $\mu =$ 1.5.	34
12.	Plano de fase del oscilador de Van der Pol para $\mu = 1.5$ y condiciones iniciales $x = 0.5 \dot{x} = 0$	34
13.	Bifurcación sillanodo para $\mu > 0$	36
14.	Bifurcación sillanodo para $\mu = 0$	36
15.	Bifurcación sillanodo para $\mu < 0$	37
16.	Bifurcación tridente supercrítica para $\mu < 0$	38
17.	Bifurcación tridente supercrítica para $\mu = 0$	38
18.	Bifurcación tridente supercrítica para $\mu > 0$	39
19.	Bifurcación tridente subcrítica para $\mu < 0$	40
20.	Bifurcación tridente subcrítica para $\mu = 0$	40
21.	Bifurcación tridente subcrítica para $\mu > 0$	41
22.	Gráfica de la bifurcación de Hopf para (19) [7].	42

23.	Gráfica de la bifurcación de Hopf para (20) [7].	43
24.	Curva que describe las distintas etapas de las respuestas de las ecuaciones de Lorenz para la variación de un parámetro r [7]	44
25.	Espacio de fases para el sistema de ecuaciones de Lorenz en el plano x,z para a) $r = 1$, b) $r = 8$, c) $r = 13.926$, d) $r = 17.5$, e) $r = 22.5$, f) $r = 24.06$, g) $r = 24.74$, h) $r = 28$, i) $r = 40$. Ver ANEXO 2	45
26.	Respuesta en el tiempo para z de las ecuaciones de Lorenz	47
27.	Esquema del circuito oscilador de Chua[10].	47
28.	Representación gráfica de las regiones presentes en el diodo de Chua[11].	48
29.	Modelo del circuito para la región D_0 [11]	50
30.	Modelo del circuito oscilador de Chua para las regiones exteriores[11].	52
31.	Modelo del circuito para un estado DC.	54
32.	Superposición de la curva de conducción del diodo y el estado de DC.	55
33.	Espacio de Fase para las tensiones de los capacitores al variar el parámetro R en Ω .(Ver ANEXOS 3 Y 4)	56
34.	Módulo de Chua	60
35.	Visualización del comportamiento del circuito de Chua en estado de oscilación saturada. Valores de resistencia entre $1900[\Omega]$ y $1800[\Omega]$. . .	61
36.	Visualización del comportamiento del circuito de Chua en estado de caos con atractor simple. Valores de resistencia entre $1772[\Omega]$ y $1747[\Omega]$. . .	61
37.	Visualización del comportamiento del circuito de Chua en estado de caos con atractor doble. Valores de resistencia entre $1747[\Omega]$ y $1424[\Omega]$. . .	61
38.	Comparación entre las respuestas, simulada y práctica para el circuito oscilador de Chua para una resistencia R entre $1747[\Omega]$ y $1424[\Omega]$. . .	62
39.	Esquema para el diodo de Chua con amplificadores operacionales . . .	63
40.	Gráfica para el punto de conducción del Diodo Chua en MATLAB . . .	64
41.	Gráfica para el punto de conducción del Diodo Chua en OrCAD . . .	65
42.	Módulo de comunicaciones Chua	66

43.	Esquemático del Módulo de Comunicaciones Chua	68
44.	Esquemático para Módulo de Bifurcaciones	71
45.	PCB para el módulo de bifurcaciones	71
46.	Módulo de Bifurcaciones Diseñado	72
47.	Módulo de Bifurcaciones Diseñado	72
48.	Regresión lineal para la función $V(N)$	73
49.	Respuesta temporal ante la variación de la resistencia para el capacitor 1.	75
50.	Respuesta temporal ante la variación de la resistencia para el capacitor 2.	75
51.	Gráfica de bifurcación para la tensión del capacitor 1.	76
52.	Gráfica de bifurcación para la tensión del capacitor 2.	76
53.	Foto de la caja propuesta para el módulo oscilador de Chua	78
54.	Código utilizado para mostrar los retratos de fase, depende del sistema que se desee simular.	84
55.	Código utilizado para simular las ecuaciones de Lorenz	85
56.	Código utilizado para describir el circuito oscilador de Chua.	86
57.	Código utilizado para simular el circuito de Chua.	87
58.	Medidas para el prototipo propuesto	88

LISTA DE TABLAS

1.	Componentes del Módulo de Chua	62
2.	Valores estimados de las relaciones para el modulo disponible	65
3.	Componentes del Módulo de Comunicaciones Chua, resultado de [18].	67
4.	Algunas características del Osciloscopio usado para la caracterización de los módulos.	69

RESUMEN

TÍTULO: ADECUACIÓN Y CARACTERIZACIÓN PARA UN PROTOTIPO DE LABORATORIO QUE VERIFICA LOS EFECTOS DEL CAOS DETERMINÍSTICO.*

AUTORES: CARLOS MARIO MARTÍNEZ CASTRO, HERIBERTO MENESES CASTAÑEDA.**

PALABRAS CLAVES: SISTEMAS LINEALES, CIRCUITOS NO LINEALES, CAOS, CIRCUITO DE CHUA.

DESCRIPCIÓN:

En el siguiente proyecto de grado se realiza una caracterización tanto física como funcional de dos módulos de laboratorio que fueron legado de un proyecto de grado anterior titulado: 'ANÁLISIS Y EXPERIMENTOS CON UN OSCILADOR DE CHUA' en la Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones; se muestran diferentes conceptos relacionados a sistemas lineales y no lineales, se abordan temas como bifurcaciones, ciclos límite y caos y el caos en el circuito oscilador de Chua, se proponen métodos y estrategias para abordar éste tipo de circuitos y se deja como legado un módulo que tiene la capacidad de generar bifurcaciones en un circuito oscilador de Chua en tiempo real, así como guías de laboratorio que permiten el aprovechamiento integral del módulo generado, las cuales están pensadas para ser pedagógicas y ser fácilmente manipulables y modificables por quien sea que desee realizarlas y aplicarlas, de tal forma que sean dinámicas y que puedan ser aprovechadas por un amplio número de áreas en el campo de la ciencia, la tecnología y la ingeniería.

Al final del escrito se sugieren diferentes referencias para las cuales se puede profundizar en el tema por parte de la Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

*Trabajo de Grado

**Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas, Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director: Ernesto Aguilera, Ph.D. Codirector: Ricardo Alzate Castaño, Ph.D.

ABSTRACT

TITLE: ADEQUATION AND CHARACTERIZATION FOR A LABORATORY PROTOTYPE THAT VERIFIES THE EFFECTS OF THE DETERMINISTIC CHAOS.*

AUTHORS: CARLOS MARIO MARTÍNEZ CASTRO, HERIBERTO MENESES CASTAÑEDA.**

KEYWORDS: LINEAR SYSTEMS, NON-LINEAR CIRCUITS, CHAOS, CHUA CIRCUIT.

DESCRIPTION:

In the following degree work a physical and functional characterization of two laboratory modules that were legacy of a previous degree project entitled: 'ANALYSIS AND EXPERIMENTS WITH A CHUA OSCILLATOR' in the School of Electrical, Electronic and Electrical Engineering Telecommunications; different concepts related to linear and non-linear systems is done, treating subjects like bifurcations, limit cycles and chaos and the chaos in the Chua oscillator circuit. Methods and strategies are proposed to approach this type of circuits and a module is left as a legacy that has the ability to generate bifurcations in a Chua oscillator circuit in real time, as well as laboratory guides that allow the integral use of the generated module, which are designed to be pedagogical and easily manipulated and modified by whoever wishes to do them and guide them, thus they are intended to be dynamic and that they can be used by a wide number of areas in the field of science, technology and engineering.

At the end of the paper, different references are suggested for which the School of Electrical, Electronics and Telecommunications Engineering can deepen the subject.

*Degree Work

**Faculty of Physicomechanical Engineering, School of Electrical, Electronics and Telecommunications Engineering. Director: Ernesto Aguilera, Ph.D. Co-director: Ricardo Alzate Castaño, Ph.D.

DEDICATORIAS

Dedico esta tesis a Dios por haberme dado salud y fuerza para siempre continuar y lograr cumplir con mi objetivo, a mi mamá Lilia y a mi papá Heriberto por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos y amor incondicional, además, darles las gracias porque lo que soy hoy en día es gracias a ellos, agradecerles con todo mi corazón por todo lo que hacen por mí y por mis hermanos, espero algún día poder recompensarlos y devolver lo que hacen por nosotros, a mis hermanos que siempre creyeron en mí y me brindaron su apoyo y fuerza para nunca decaer, los quiero mucho, a mi novia que siempre se mantuvo a mi lado apoyándome a pesar de la distancia, a mis amigos y compañeros de estudio con los que superamos y apoyamos durante este largo proceso y agradecerles por todos los momentos compartidos y hacer de esta etapa de mi vida algo inolvidable.

-Heriberto Meneses.

Dedico este proyecto que ha sido para mí como la culminación e integración de todo lo que sé y he aprendido a mis padres Mario y Maritza, por haberme dado las herramientas necesarias para llegar hasta acá, por siempre apoyarme y creer en mí, algún día espero ser por fin el hijo que merecen; a mi hermano Alejandro que siempre me demuestra que la curiosidad, que es la base de la ciencia, no puede despegarse de la inocencia de un niño; a mis amigos, de los cuales he aprendido más que de cualquier libro, aquellos que siempre estuvieron ahí para darme palabras de aliento cuando pensé en tirar la toalla. A todas y cada una de las personas que me ayudaron y acompañaron en éste proceso, esta dedicatoria es poco para lo que les debo.

-Carlos Martínez.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos especialmente a todos y cada uno de los docentes con los que tuvimos la fortuna de cursar materias, cada uno con su metodología y dedicación contribuyeron a lo que hoy somos como futuros profesionales.

-Los autores.

INTRODUCCIÓN

El comportamiento caótico de los sistemas, desde su descripción en los 1960s[1], ha venido despertando la curiosidad de investigadores, debido a sus características como la no linealidad, determinismo y la dependencia sensitiva [2]. Pero, este fenómeno sólo podía ser apreciable de manera no experimental como es el caso de simulaciones para “prever” el clima o de sistemas de manera meramente cualitativa como es el ejemplo de sistemas de desarrollo económico.

En los años 60s, Leon O. Chua propuso un circuito eléctrico práctico capaz de describir las características del caos introduciendo un nuevo elemento eléctrico circuital que puede ser implementado mediante un arreglo de Amplificadores Operacionales y resistencias llamado memristor, el cual se comporta como una resistencia no lineal[3]. De hecho, éste sistema es en la actualidad el más sencillo y de fácil implementación en laboratorio que se conoce. Gracias a esta contribución, el desarrollo de la teoría de sistemas caóticos sufrió un cambio de perspectiva, pues ahora existe un verdadero sistema físico con la posibilidad de estudiar en un laboratorio su dinámica, comportamiento y reacción a la variación de parámetros, mediante la manipulación en tiempo real de sus componentes y así ver reflejadas las ecuaciones y aproximaciones teóricas en éste.

La importancia del circuito de Chua, recae en que es posible llevarlo a un laboratorio, variar sus parámetros de forma manual, agregarle componentes y visualizar su comportamiento en un osciloscopio, cosa que no es posible con la mayoría de los sistemas caóticos, pues son extremadamente dependientes de los factores que se relacionan a ellos y su comportamiento.

En la Universidad Industrial de Santander, existe sólo un trabajo relacionado a este tema, el cual dejó como legado la existencia de dos módulos, uno con el circuito

básico de Chua (incluido su diodo), y otro en donde se ve una de las múltiples aplicaciones relacionadas al caos: un módulo de comunicaciones que aprovecha los niveles de tensión caóticos que produce el circuito de Chua y encripta señales transmitidas para posteriormente ser descriptadas, asegurando así una transmisión segura de datos.

El propósito de este proyecto, es tomar los módulos del trabajo de grado anterior, caracterizarlos mediante implementación en laboratorio y simulaciones en diferentes programas, a fin de hallar las condiciones de funcionamiento las cuales permitan apreciar los fenómenos asociados al caos determinístico. Posteriormente con los resultados obtenidos, se elaborarán guías para los laboratorios de la escuela de ingeniería eléctrica, electrónica y telecomunicaciones de la UIS las cuales contendrán los procedimientos y técnicas necesarias para que, con su uso, puedan ser aprovechadas por la comunidad académica a nivel de pregrado a fin de fortalecer los conocimientos relacionados al estudio de sistemas caóticos determinísticos.

1. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

1.1. Descripción del Problema

Nuestro entorno es no lineal y muchos sistemas reales describen ésta característica, entre esos los caóticos. El comportamiento caótico está presente en muchos ámbitos de nuestra vida, como la física, matemática, biología, química e ingeniería[4]. Un ejemplo de esto es el circuito de Chua, que es el más utilizado para analizar sus características y comportamiento a nivel de laboratorio al ser un sistema sencillo y de fácil manipulación el cual describe varios comportamientos propios de los sistemas caóticos como oscilaciones aperiódicas, bifurcaciones y dependencia sensitiva. Gracias al aprovechamiento de este circuito, se ha avanzado en el estudio de sistemas de detección de ondas débiles[14] control de motores síncronos de campo magnético permanente(PMSM)[13] un sistema de comunicación segura[12] y otros. Por esto se hace interesante el estudio de éste, a fin de aprovechar sus cualidades, de tal forma que se puedan encontrar nuevas aplicaciones o mejorar las ya existentes.

En la Universidad Industrial de Santander el estudio del caos determinístico así como sus aplicaciones no han tenido un desarrollo verdaderamente significativo a nivel de pregrado debido a la dificultad que presentan estos sistemas complejos y de comportamiento no lineal, además de la falta de material teórico práctico; es por esto que surge la necesidad de contribuir al desarrollo de este campo mediante la elaboración de herramientas que permitan apreciar y estudiar las características del caos determinístico de una manera pedagógica a fin de que pueda ser consultado, utilizado y aprovechado por los diferentes programas de pregrado.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GENERAL

Diseñar e implementar guías¹ para ejecutar procedimientos experimentales que verifiquen fenómenos asociados al caos determinístico en un prototipo de laboratorio.

2.1.1. Objetivos Específicos

- Caracterizar los regímenes de funcionamiento de los módulos existentes².
- Adecuar los módulos de forma que muestren un comportamiento adecuado para su estudio en un laboratorio.
- Establecer los componentes teóricos y procedimientos prácticos a ser consignados en las guías.

¹Serán pensadas para ser utilizadas en cualquier contexto académico

²Módulos resultado del trabajo de grado [18]

3. BASES TEÓRICAS

Debido a las características del tema a tratar, se consideró realizar una aproximación por etapas hacia el Caos, a fin de que los conceptos básicos para su comprensión fueran tratados de forma incremental en relación a la complejidad, es decir, se abordan temas relacionados con sistemas lineales, no lineales y se avanza así hasta llegar al Caos.

3.1. SISTEMAS

Un Sistema es la organización de elementos para llevar a cabo un fin, puede estar conformado de elementos básicos y a su vez los sistemas pueden unirse para formar sistemas más complejos. Un ejemplo de lo anterior es un sistema electrónico que resulta de la interconexión de elementos básicos como capacitores, resistencias, inductancias, circuitos integrados. Así, partiendo de un sistema de recepción de señal, uno de audio, uno de procesamiento de señales y otros, se puede tener un sistema aún más complejo como un teléfono celular[5].

Los sistemas pueden modelarse a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales y se pueden clasificar de varias formas, para las intenciones del presente escrito serán clasificados como sistemas lineales y no lineales, entonces, diremos que un sistema lineal puede modelarse por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales y que un sistema no lineal puede modelarse por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

3.2. SISTEMAS LINEALES

Un sistema lineal es aquel que para todas sus entradas cumple las propiedades de proporcionalidad y de aditividad, esto quiere decir que para toda entrada que produzca una salida, si esta es escalada por un valor real, su salida es un múltiplo escalar de la respuesta, y para toda suma de funciones de entrada, la salida será la

suma de cada una de las respuestas a las entradas individuales. En pocas palabras, es aquel que para una combinación lineal de sus entradas genere una combinación lineal de las salidas.

En este texto se tratará a los sistemas lineales descritos por sistemas de ecuaciones diferenciales lineales como grupos de una o más ecuaciones cuyas variables dependientes están elevadas únicamente a la primera potencia y/o que no son función de otras funciones[6]. Como ejemplo, en (1) se tiene una ecuación diferencial lineal, mientras que en (2) no lo es.

$$\frac{dy}{dt} = \sin(t) - y \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} = \sin(w) \quad (2)$$

Un sistema de ecuaciones lineales puede expresarse como en (3), también se puede expresar en forma matricial haciendo $\mathbf{F}(\mathbf{X})=\mathbf{A}\mathbf{X}$ como se ve en (4) similar a una representación de espacio de estados.

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t), \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \quad (4)$$

A continuación se define una herramienta utilizada en el análisis de sistemas de forma cualitativa, el **Plano de Fase**.

3.2.1. Plano de Fase

Es una representación gráfica que consta de un plano coordenado cuyos ejes son las variables de estado del sistema que se está analizando, con el fin de comprender de una forma cualitativa como es la dinámica de éste. Se pueden graficar en el plano

de fase todas las posibles soluciones de un sistema siendo este arreglo conocido como **retrato de fase** en el que cada curva representa una condición inicial diferente.

3.2.2. Trayectorias

Son funciones que representan cada una de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales, que tienen como punto de partida las condiciones iniciales del mismo[7].

Otros componentes de los planos de fase son los puntos fijos, de ellos dependen en gran parte el análisis cualitativo que se desea hacer a partir del retrato de fase.

3.2.3. Puntos de equilibrio

También llamados puntos fijos, se dice que para la expresión en (4) un punto fijo es un estado del sistema para el cual se cumple la condición en (5), es decir que el campo vectorial es cero, así pues si un punto fijo es $X(t) = X_Q$, y una trayectoria tiene su comienzo en punto en X_Q , esta permanecerá en ese punto fijo de forma indefinida[10].

$$\dot{X}(t) = 0 \quad (5)$$

Algunos tipos de puntos fijos son:

- **Nodo estable:** Es un punto fijo al cual llegan las trayectorias cercanas en un tiempo que tiende a infinito. Las trayectorias llegan de forma suave. Está caracterizado porque los polos del sistema son reales y están en el semiplano complejo izquierdo.
- **Nodo inestable:** Es un punto fijo del cual parten las trayectorias a medida que el tiempo tiende a infinito. Las trayectorias parten de forma suave. Está caracterizado porque los polos del sistema son reales y están en el semiplano complejo derecho.

- **Nodo de Estrella:** Es un punto fijo estable al cual las trayectorias llegan de forma recta.
- **Punto de Silla:** Un tipo de punto fijo al cual llegan y también se alejan trayectorias, cuando las trayectorias se alejan en torno a una dirección, esta se llama colector inestable³, si las trayectorias se acercan en torno a una dirección, esta se llama colector estable³. Se caracteriza por tener un polo real en el semiplano complejo izquierdo y otro en el semiplano complejo derecho.[4]

A continuación se realizan una serie de ejemplos que permitirán entender algunos de los conceptos anteriormente mencionados:

3.2.4. Ejemplo 1

Un ejemplo típico de un sistema lineal es el de masa resorte, para este caso consideraremos uno que no posee un elemento amortiguador, lo que significa que el sistema solo presenta fuerzas conservativas de energía por lo cual oscila indefinidamente. Este sistema está descrito por el conjunto de Ecuaciones en (6), donde m es la masa del cuerpo y k es la constante del resorte; se observa que en este caso las ecuaciones son **acopladas**, pues las variables solución aparecen en cada una de las ecuaciones.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{k}{m}x \\ x(0) &= x_0 \quad v(0) = v_0 \end{aligned} \tag{6}$$

En la Figura 1, se muestra la respuesta temporal de un sistema masa resorte con $\frac{k}{m} = 5$ y con condiciones iniciales como $x(0) = 1$ y $v(0) = 1$.

³Son traducciones del término *stable* y *unstable manifold*.

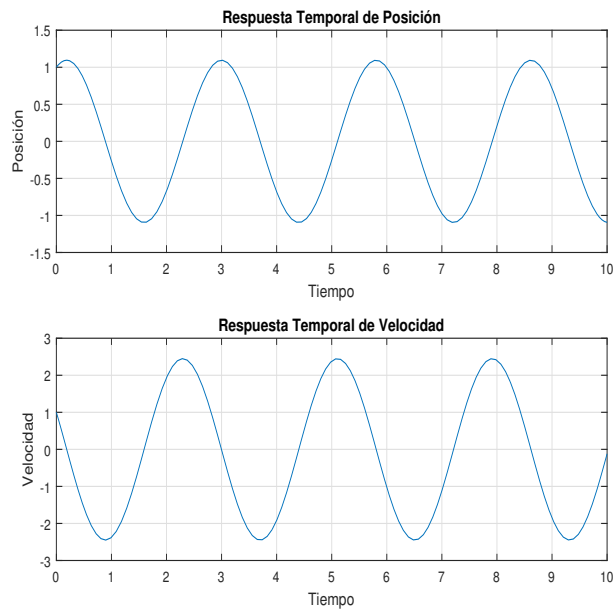


Figura 1: Respuesta temporal de un sistema masa resorte sin amortiguador.

Sin embargo, es posible realizar un análisis de carácter más cualitativo mediante un retrato de fase ver Figura 2. El sistema posee un punto fijo en $(0,0)$, ya que es un sistema que no tiene interacción de fuerzas externas, así que si está en la posición de equilibrio, no tendrá movimiento. Si se observa el plano con detenimiento, es posible apreciar un círculo, este tipo de trayectorias es característica de un sistema netamente oscilatorio.

Considerando el plano de fase de la Figura 2 se genera la posibilidad de un análisis más cómodo, se aprecia que para el mismo sistema y con las condiciones iniciales anteriores, esta será una respuesta oscilatoria que se repetirá con el tiempo indefinidamente: se observa que en $(x, v) = (1, 1)$ se presenta el momento inicial, posterior a este, la masa se desplaza de tal forma que la velocidad va decayendo, hasta llegar al valor $(1.1, 0)$, el cual será la máxima extensión del resorte y por lo tanto la velocidad se hará cero; a medida que la fuerza de restitución actúa, la masa retorna a su posición inicial y la velocidad es máxima, esto ocurre en $(0, -2.45)$, continúa de tal forma que llega al tope del resorte en el otro sentido en $(-1.1, 0)$, donde una vez

más la velocidad es cero, entonces la masa ha retrocedido al mínimo valor posible, nuevamente la velocidad aumenta mientras que la distancia con el punto de equilibrio se hace cero en $(0, 2.45)$; de esta forma el ciclo avanza indefinidamente al ser un sistema sin disipación de energía.

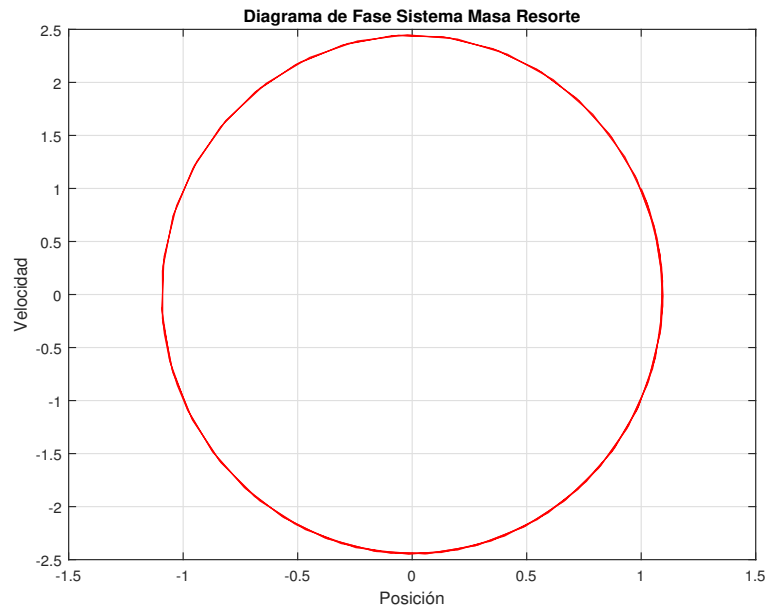


Figura 2: Espacio de fase de un sistema masa resorte sin amortiguador.(Ver Anexo 1)

Ahora, mediante el uso de un plano de fase también se puede observar cómo variaría la respuesta del sistema con relación a las condiciones iniciales, como se aprecia en la Figura 3, se forma el campo vectorial en el cual se aprecia cómo todos los vectores serán tangentes a las trayectorias que varían dependiendo de las condiciones iniciales.

Entonces, se puede decir que el comportamiento del sistema se aprecia completamente de forma cualitativa mediante el plano de fase, definido éste por sus soluciones que varían dependiendo de las condiciones iniciales utilizadas.

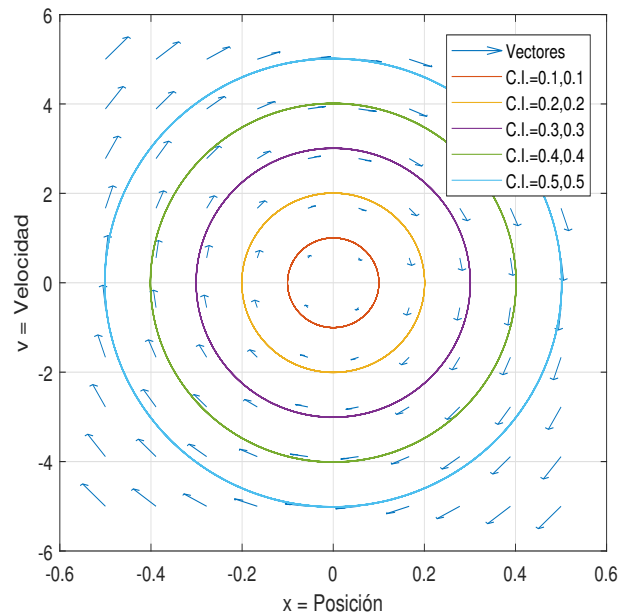


Figura 3: Retrato de fase de un sistema masa resorte sin amortiguador. Condiciones iniciales indicadas como C.I. en la leyenda de la gráfica.

3.2.5. Ejemplo 2

Se observó que en el ejemplo anterior para cada una de las condiciones iniciales existen diferentes trayectorias, sin embargo todas son de la misma forma, esto es porque el sistema no cambia de comportamiento dependiendo de las condiciones iniciales.

Ahora se plantea estudiar cómo para un sistema que depende de un parámetro pueden llegar a cambiar las trayectorias, e incluso presentar distintos tipos de puntos fijos.

Considérese el sistema definido por el conjunto de ecuaciones en (7), se observa que este sistema es de estados desacoplado. Las soluciones para este modelo se pueden calcular de forma analítica y son las expresadas en el arreglo de ecuaciones en (8).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{at} \\ y(t) &= y_0 e^{-t} \end{aligned} \tag{8}$$

Conociendo estas soluciones, solo es necesario reemplazar a y t para obtener las trayectorias, sin embargo, utilizando la herramienta del retrato de fase, es fácil darse cuenta cómo éste cambia dependiendo de un parámetro como a .

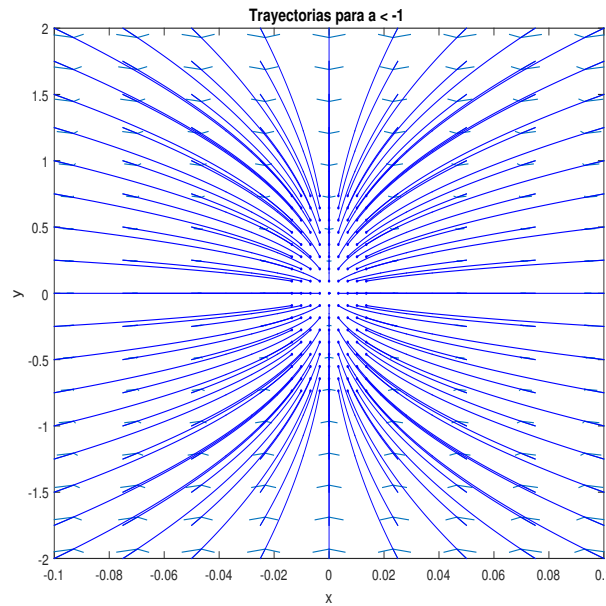


Figura 4: Espacio de fase del sistema propuesto para $a < -1$.

Para la Figura 4, se presentan valores negativos menores a -1 , por lo tanto, sufrirá un decaimiento en la variable x mucho mayor que la variable y , todos siendo atraídos a un nodo estable. Para cuando $a = -1$ (Figura 5) ambas variables decaerán a razón de -1 , este patrón de comportamiento es conocido como nodo estrella.

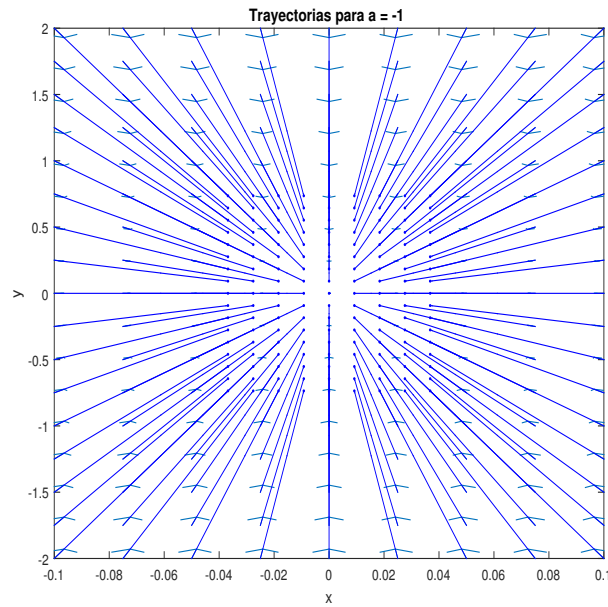


Figura 5: Espacio de fase del sistema propuesto para $a = -1$.

Cuando se tiene el caso en que $-1 < a < 0$ (Figura 6), se observa como ahora el decaimiento en x es menor al de y , de esta manera se tiene un nodo estable.

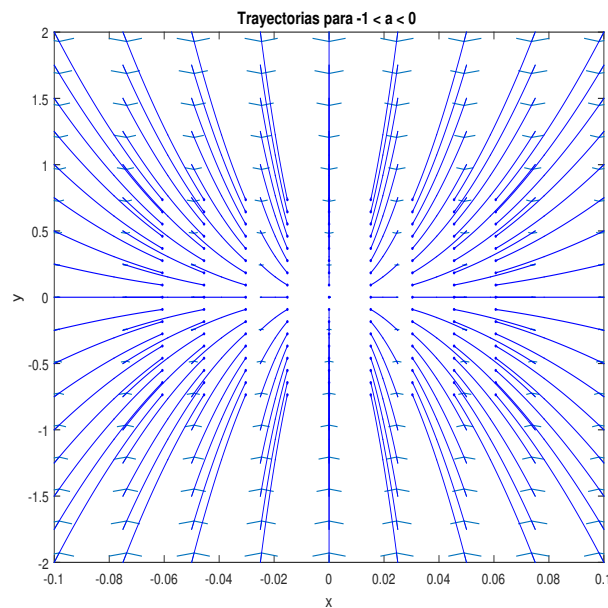


Figura 6: Espacio de fase del sistema propuesto para $-1 < a < 0$.

Para cuando $a = 0$ se presenta un caso particular en el cual no existe decaimiento

en x y sí en y , entonces aparece una cantidad **infinita de nodos estables** (Figura 7). Para valores de $a > 0$, se aprecia como aparece un punto de silla en el origen, ya que en x se observa que no hay decaimiento, mientras que para y sí, el eje y se llama colector estable ver Figura 8.

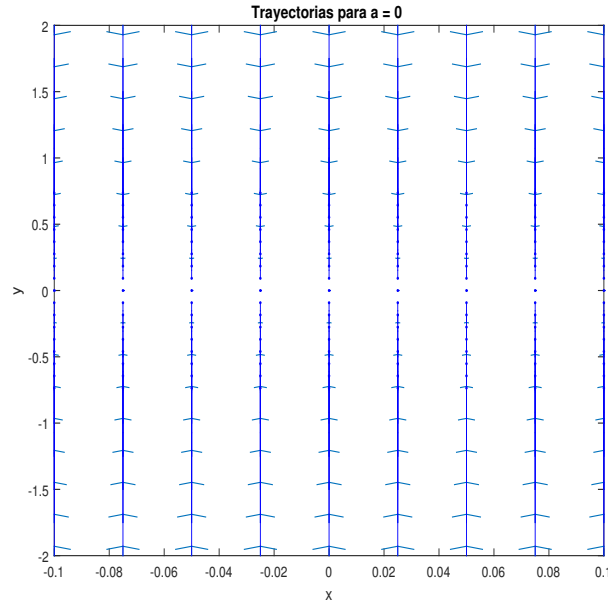


Figura 7: Espacio de fase del sistema propuesto para $a = 0$.

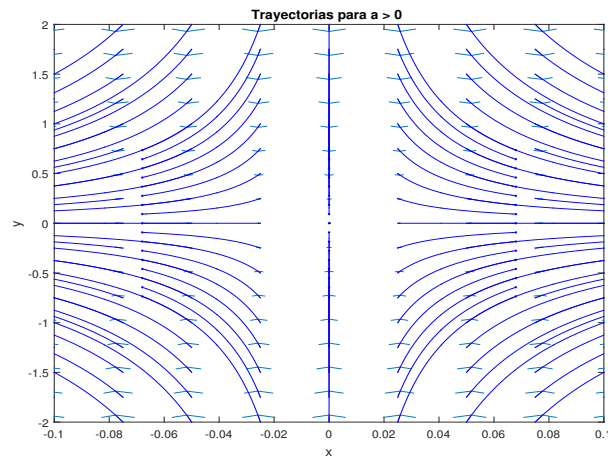


Figura 8: Espacio de fase del sistema propuesto para $a > 0$.

3.3. SISTEMAS NO LINEALES

En esta sección se aborda el concepto de la no linealidad, que está directamente relacionada con la linealidad en el sentido de que todo sistema que no cumple con las condiciones de linealidad, es no lineal[6].

Una vez comprendida la forma en la cual los retratos de fase son importantes para determinar las cualidades del sistema que se está tratando, en el caso de los sistemas lineales las trayectorias(soluciones) pueden hallarse de forma analítica, sin embargo en los sistemas no lineales esto se complica debido a las características de los mismos,entonces, se hace necesario el uso de métodos numéricos para hallar las funciones solución, siendo conscientes que cada trayectoria se verá afectada por las condiciones iniciales. En este texto, todos los sistemas serán resueltos mediante la herramienta computacional MATLAB y su función `ode45` que resuelve sistemas de ecuaciones mediante el método de Runge-Kutta[7].

Partiendo de lo anterior y con el fin de analizar el comportamiento cualitativo de los sistemas no lineales haciendo uso de los planos de fase, es necesario conocer ciertas características que se pueden presentar y que son de gran importancia; a continuación se listan algunas[7]:

- **Puntos fijos** previamente definidos en el capítulo 2.2.
- **Órbitas cerradas** son las soluciones periódicas de los sistemas.
- La distribución de los puntos fijos y las órbitas cerradas.
- La estabilidad de los puntos fijos y las órbitas cerradas.

Con lo anterior se puede obtener la suficiente información del sistema que se está trabajando, sin embargo se toman en cuenta teoremas sobre ecuaciones diferenciales que serán de gran ayuda al momento de estudiar y comprender los planos de fase:

3.3.1. Teorema de unicidad y existencia

A grandes rasgos el también llamado Teorema de Picard-Lindeörf [8], plantea que la existencia y unicidad se garantiza si una función $f(x) = \dot{x}$ es continuamente diferenciable. Esto es de suma importancia en el estudio de planos de fase, pues se puede inferir que ninguna de las trayectorias puede cruzarse entre ellas.[7]

Como complemento a este teorema se puede exponer otro, El **Teorema de Poincaré-Bendixon** dice que si una trayectoria está confinada a una región cerrada acotada, y dentro de esta no hay puntos fijos, la trayectoria debe entonces aproximarse eventualmente a la órbita cerrada.

3.3.2. Necesidad de una linealización

Con la finalidad de analizar la estabilidad local de sistemas no lineales, se recurre a la linealización, esta se realiza en puntos que aporten información sobre la estabilidad del sistema, por esta razón se realiza en los puntos fijos.

Un sistema linealizado mediante la expansión en series de Taylor es de la forma mostrada en (9), donde A_J es la matriz Jacobiana [8] evaluada en el punto fijo de interés; se desprecia la expresión $O(x, t)$ que es la suma de los términos de orden mayor a 1 (los cuales son muy pequeños), se puede decir que el comportamiento es equivalente en cualquier parte del diagrama de fase menos para los puntos de frontera, que son los puntos en los cuales el sistema cambia de topología en sus trayectorias, pues son susceptibles a pequeños cambios[7].

$$\dot{x} = A_J x + O(x, t) \quad (9)$$

Debido a que los puntos fijos se presentan en diferentes formas surge la necesi-

dad de clasificarlos y así poder comprender el comportamiento del sistema al cual pertenecen:

3.3.3. Clasificación de los puntos fijos

Aunque esta clasificación también es válida para Sistemas Lineales, se trata en esta sección por que aplica para cualquier sistema linealizado.

Si X_Q es un punto fijo de un sistema, entonces una definición completa de la estabilidad de éste está contenida en los eigenvalores de la linealización del sistema alrededor de X_Q , estos se definen como la solución de la ecuación característica[10] que está dada por la expresión en (10), donde I es la matriz identidad del mismo orden del sistema.

$$\det(\lambda I - A_J) = 0 \quad (10)$$

Para sistemas de dos estados es posible hallar una clasificación rápida (Ver Figura 9). De lo anterior si se hace $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$, entonces es posible conocer completamente las características de la estabilidad del sistema mediante el arreglo de ecuaciones en (11).

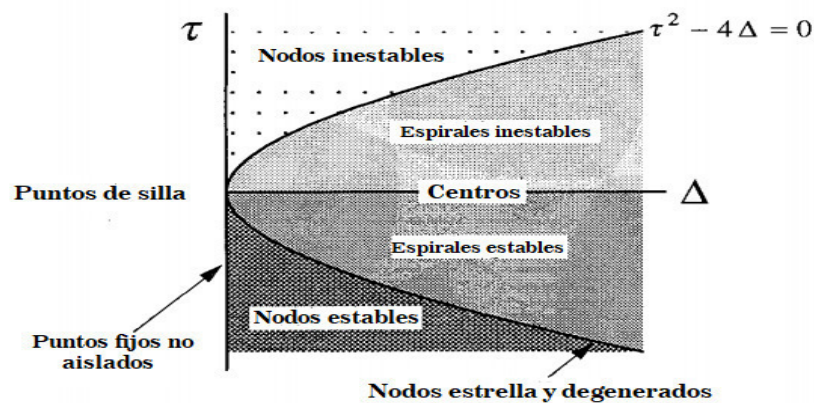


Figura 9: Clasificación para los puntos fijos dependiendo de sus valores propios [7].

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta})$$

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\tau = \lambda_1 + \lambda_2$$
(11)

A continuación se realiza un ejemplo de clasificación de puntos fijos que ayudará a entender lo expuesto anteriormente:

3.3.4. Ejemplo

Un sistema que puede ayudar a evidenciar algunas características que serán de ayuda en análisis posteriores de este escrito es un modelo clásico de competencia entre especies conocido como **Modelo de competencia Lokta-Volterra** [9]. Un arreglo de ecuaciones que puede modelar este tipo de sistemas es el mostrado en (12).

$$\dot{x} = x(3 - x - 2y)$$

$$\dot{y} = y(2 - x - y)$$
(12)

Para dar solución a este sistema se deben realizar una serie de pasos que hacen más sencillo el desarrollo y análisis:

El primer paso es hallar los puntos fijos, por lo que se debe igualar las ecuaciones diferenciales a cero $\dot{x} = 0$ y $\dot{y} = 0$ y resolver de forma simultánea este sistema de ecuaciones (Esto es un sistema de ecuaciones no lineales con dos incógnitas); como resultado de lo hecho anteriormente se podrán obtener los siguientes puntos fijos: $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(3, 0)$ y $(1, 1)$. El segundo paso es obtener la matriz jacobiana que está dada por la expresión en (13).

$$\mathbf{A}_J = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dx} & \frac{dx}{dy} \\ \frac{dy}{dx} & \frac{dy}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{bmatrix} \quad (13)$$

Como tercer paso se toman los puntos fijos para evaluarlos en la matriz Jacobiana y así poder hallar los valores propios:

- Para $X_Q = (0, 0)$, se obtiene el valor propio $\lambda_{1,2} = (3, 2)$, y tras evaluarlo en (11) para calcular Δ y τ , se ubica en la Figura 9, se observa que es un nodo inestable.

Se repite éste procedimiento para los otros tres puntos fijos:

- Para $X_Q = (0, 2)$, se obtiene el valor propio $\lambda_{1,2} = (-1, -2)$, evaluando y ubicando éste se aprecia que es un nodo estable.
- Para $X_Q = (3, 0)$, se halla que el valor propio $\lambda_{1,2} = (-3, -1)$, evaluando y ubicando éste se observa que es un nodo estable.
- Para $X_Q = (1, 1)$, valor propio $\lambda_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{2})$, evaluando y ubicando éste se nota que es un punto de silla.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede graficar un plano de fase aproximado, el resultado se aprecia en la Figura 10, en verde se grafican los puntos fijos del sistema, como se observa, el comportamiento de las trayectorias corresponden a lo estimado previamente.

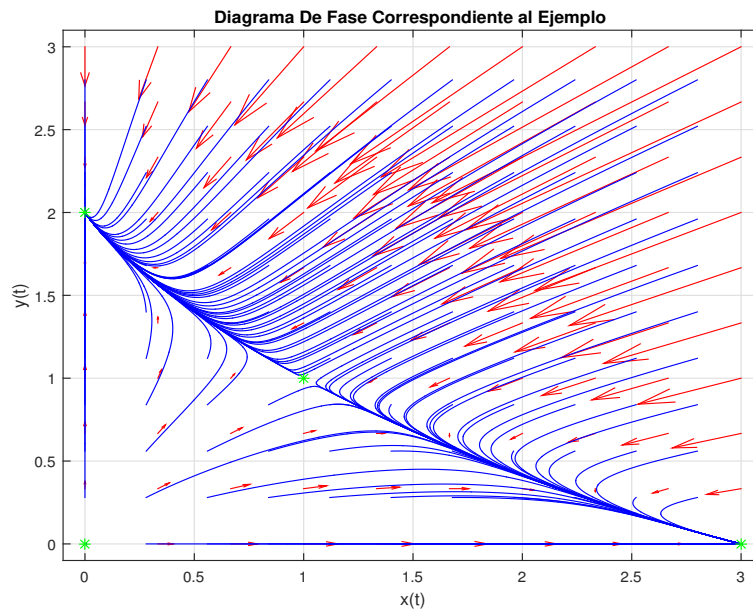


Figura 10: Plano de fase de un modelo de competencia entre dos especies.

Ahora bien, se deben definir otros conceptos de algunos comportamientos que pueden presentarse en un diagrama de fase con el fin de llegar a analizar de una manera acertada el fenómeno caótico.

3.3.5. Ciclo Límite

Previamente se definió qué era una órbita cerrada, ahora se profundizará en un tipo particular de órbita cerrada, los ciclos límites. Un ciclo límite es aquella trayectoria cerrada que está aislada, es decir que no hay otras trayectorias cerradas vecinas a ella. Hay tres casos particulares de ciclo límite: el primero cuando todas las trayectorias tanto de adentro como de afuera del ciclo límite se acercan a la órbita cerrada, se dice que es un ciclo límite estable, el segundo caso es cuando lo anterior no sucede (todas las trayectorias se alejan) y se conoce como ciclo límite inestable, el tercer caso se puede presentar en algunos casos cuando algunas de las trayectorias se acercan y otras no, se dice que es un ciclo límite medio estable.

Los ciclos límite son característicos de los sistemas no lineales, su presencia indica que un sistema puede oscilar por sí mismo, algo que no ocurre con los sistemas lineales; el sistema masa resorte puede llegar a oscilar esto sólo sucede si este es ideal, en su retrato de fase hay órbitas cerradas, sin embargo estas no son aisladas, como se puede ver en la Figura 3.[7]

A continuación se presenta un ejemplo que permite apreciar el concepto de ciclo límite y órbitas cerradas:

3.3.6. Ejemplo: Oscilador de Van der Pol

El Oscilador de Van der Pol es un oscilador que está representado por la ecuación 14, surgió como resultado del estudio del comportamiento de los primeros radios [8], se caracteriza por tener un comportamiento temporal llamado oscilaciones relajadas.

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (14)$$

Expresando la ecuación de segundo orden como un sistema de dos ecuaciones, se obtienen las expresiones en (15), como se puede observar en la Figura 11, la solución se caracteriza por una respuesta oscilatoria similar a la de una función senoidal pero con deformaciones (se trabajan condiciones iniciales $(0, 0.5)$).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\mu(x^2 - 1)y - x \end{aligned} \quad (15)$$

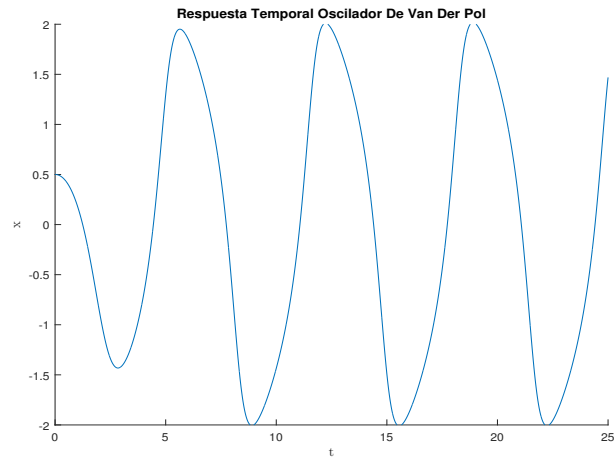


Figura 11: Respuesta temporal de un sistema oscilador de Van Der Pol para $\mu = 1.5$.

Si se analiza su retrato de fase, se puede ver como eventualmente a partir de las condiciones iniciales propuestas las trayectorias que están tanto adentro como afuera de la órbita cerrada serán atraídas a ésta comportándose como espiral. Este es un ejemplo de Ciclo límite estable y se puede apreciar en la Figura 12.

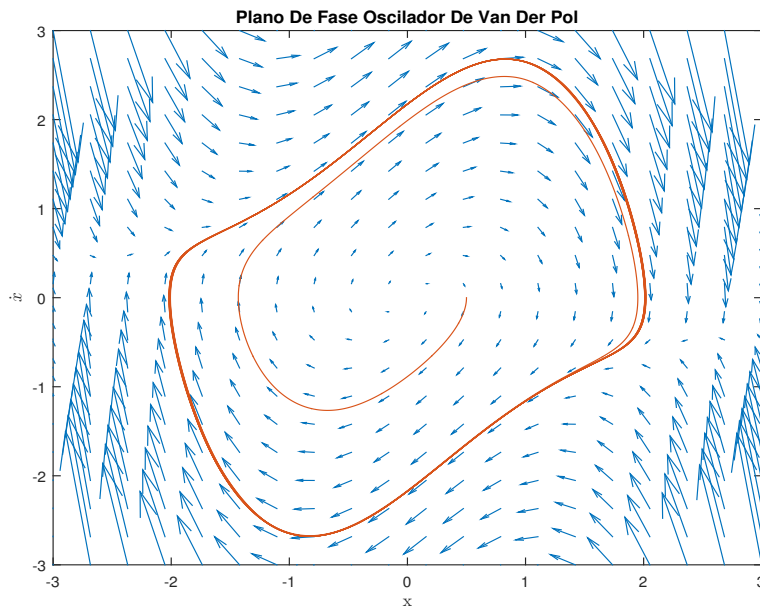


Figura 12: Plano de fase del oscilador de Van der Pol para $\mu = 1.5$ y condiciones iniciales $x = 0.5 \dot{x} = 0$.

Así pues, queda demostrado cómo los ciclos límites son topológicamente interesantes de analizar en los sistemas no lineales, cuando se logra trabajar estos bajo condiciones adecuadas conducirán al caos.

Ahora se abordará un tema interesante como lo son las bifurcaciones, se iniciará con sistemas sencillos y luego se dejarán sentadas las bases para el caos.

3.4. BIFURCACIONES

3.4.1. ¿Qué son las bifurcaciones?

A grandes rasgos, una bifurcación es un cambio topológico (esto es, aparición o desaparición de puntos fijos, órbitas cerradas y ciclos límites) en el campo vectorial de un sistema cuando ocurre la variación de un parámetro propio del éste. Esto quiere decir que si bajo ciertas condiciones, al hacer la variación de un parámetro el comportamiento de las trayectorias del sistema en el plano de fase cambia, ocurre una bifurcación[7]. Dada la gran variedad de sistemas no lineales habrán diferentes tipos de bifurcaciones, con la intención de llegar al caos, se explicarán algunos tipos de bifurcaciones.

3.4.2. Bifurcación Silla Nudo

Este tipo de bifurcación se puede presentar cuando los puntos fijos se crean y se destruyen. Un parámetro se varía y dos puntos fijos se mueven el uno hacia el otro y colisionan desapareciendo.

Un ejemplo para este tipo de bifurcación está dado por el sistema de la ecuaciones en (16), en el cual el parámetro a variar es μ , se observa que a medida que su valor se hace negativo cambia la configuración del retrato de fase, entonces, para valores positivos de μ (Ver Figura 13) hay dos puntos fijos, un nodo estable en $(\sqrt{\mu}, 0)$ y un

punto de silla en $(-\sqrt{\mu}, 0)$, cuando se tiene un valor de $\mu = 0$ los dos puntos fijos colisionan en el origen (Ver Figura 14), hasta que desaparecen para valores $\mu < 0$ (Ver Figura 15).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \tag{16}$$

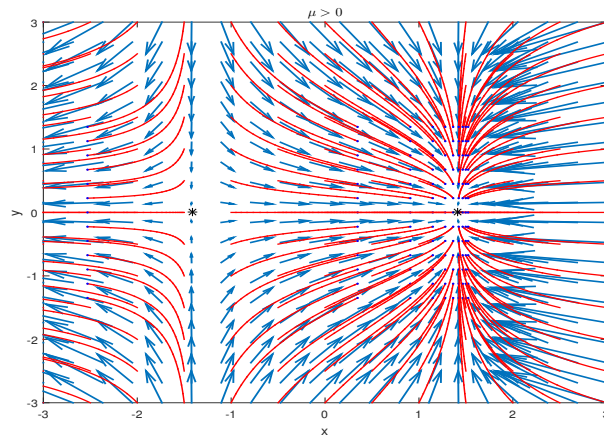


Figura 13: Bifurcación sillanodo para $\mu > 0$

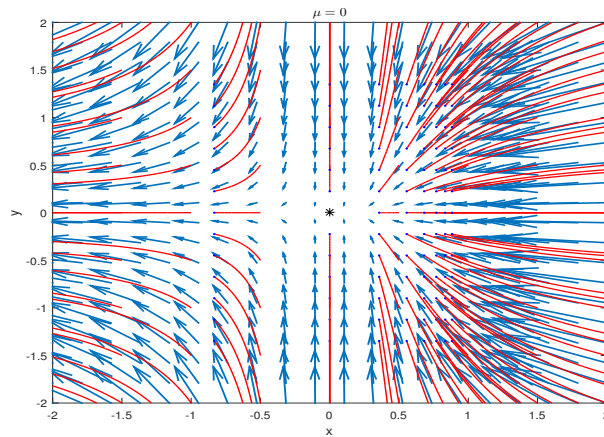


Figura 14: Bifurcación sillanodo para $\mu = 0$

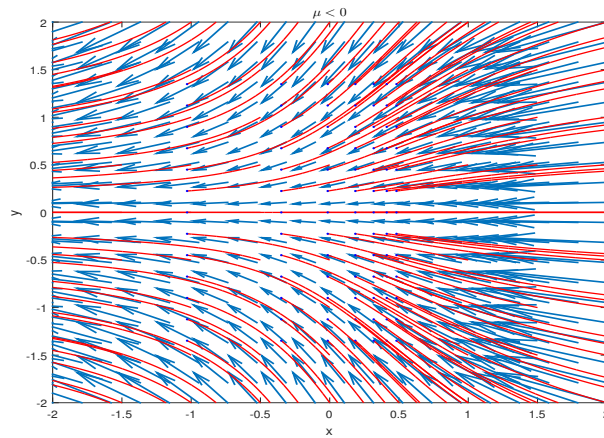


Figura 15: Bifurcación sillanado para $\mu < 0$

3.4.3. Bifurcación de Tridente

Este tipo de bifurcación ocurre en sistemas que presentan simetría en su plano de fase respecto a algún eje, en muchos sistemas sucede en especial entre las regiones izquierda y derecha de los planos, entonces los puntos fijos aparecen y desaparecen en pares. Se pueden distinguir dos tipos de bifurcaciones de tridente[7].

- Bifurcación Tridente Supercrítica
- Bifurcación Tridente Subcrítica

Para el caso de la bifurcación de **tridente supercrítica** se muestra un sistema de ecuaciones de ejemplo en (17), se puede ver como cambia el plano de fases al hacer la variación del parámetro μ , cuando $\mu < 0$ (Ver Figura 16), posee un punto fijo en el origen con muchas trayectorias decayendo exponencialmente hacia él.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \tag{17}$$

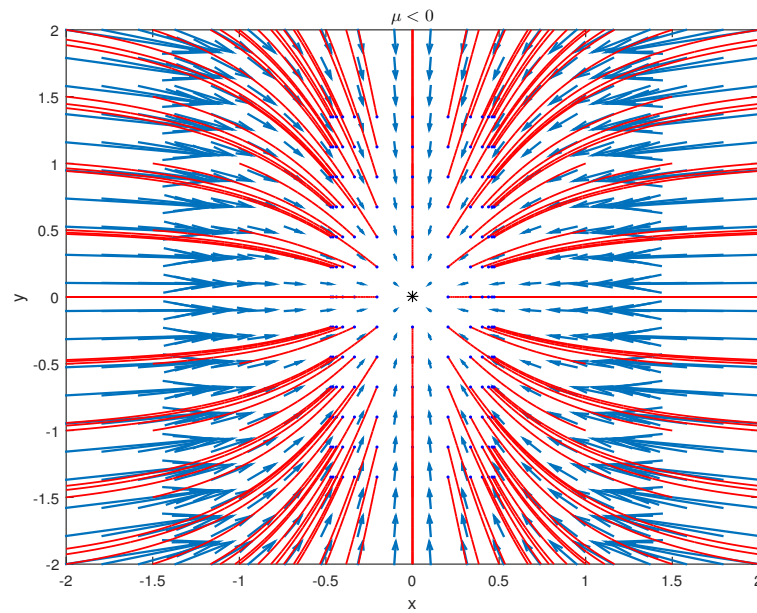


Figura 16: Bifurcación tridente supercrítica para $\mu < 0$

Cuando se llega al valor crítico $\mu = 0$, las trayectorias decaen con mayor velocidad, es decir, con mayor inclinación(Ver Figura 17).

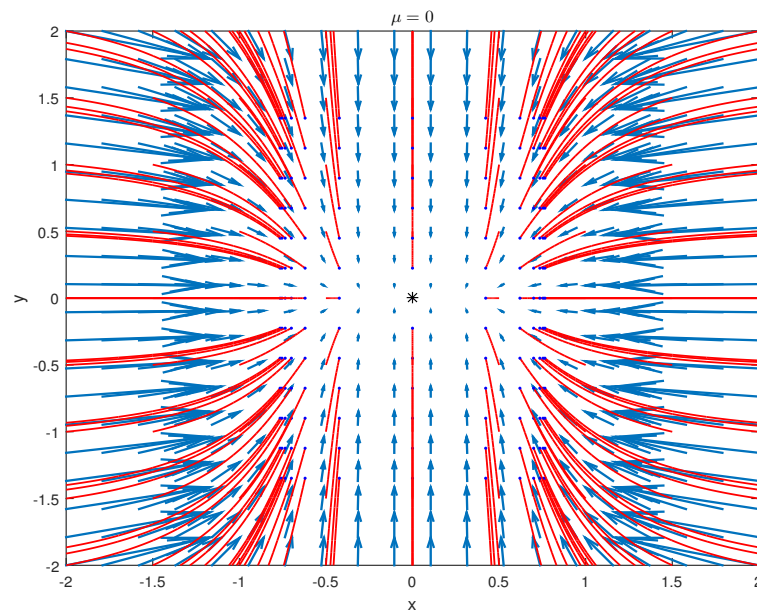


Figura 17: Bifurcación tridente supercrítica para $\mu = 0$

Para cualquier valor de $\mu > 0$, aparecen varios puntos fijos los cuales hacen que

las zonas cercanas a ellos caigan de manera exponencial, se observa una forma de tridente para cada punto fijo.

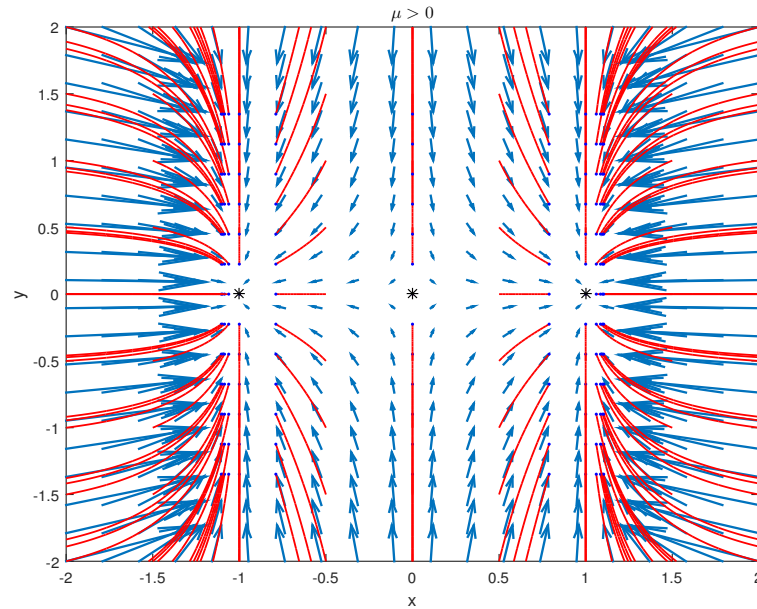


Figura 18: Bifurcación tridente supercrítica para $\mu > 0$

Para el caso de la bifurcación **tridente subcrítica** se aprecia un sistema de ecuaciones de ejemplo en (18), los puntos fijos se encuentran en el origen y en $\pm\sqrt{\mu}$ (Ver Figura 19).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x + x^3 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \tag{18}$$

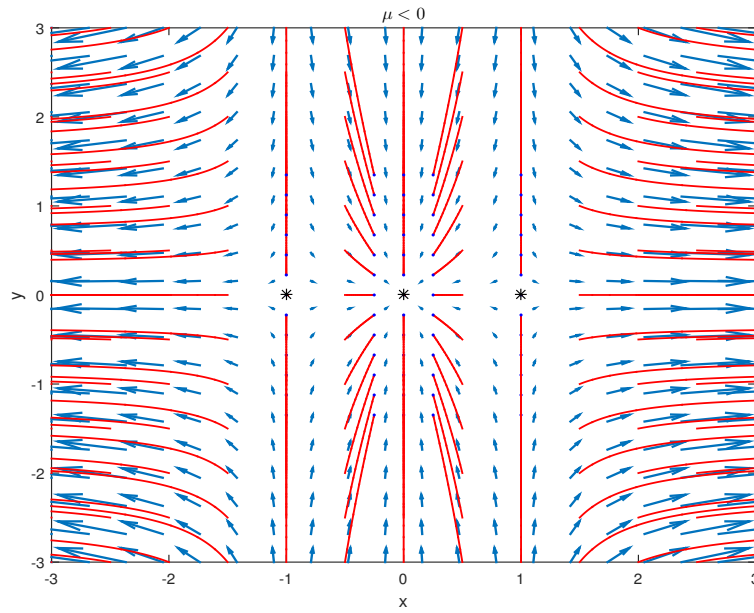


Figura 19: Bifurcación tridente subcrítica para $\mu < 0$

Después, para un valor de $\mu = 0$ ocurre la bifurcación, en la que ahora sólo hay un punto fijo real, ubicado en el origen y los otros dos pasan a ser imaginarios, ubicados en $\pm\sqrt{-\mu}$, como se aprecia en el retrato de fase (Ver Figura 20).

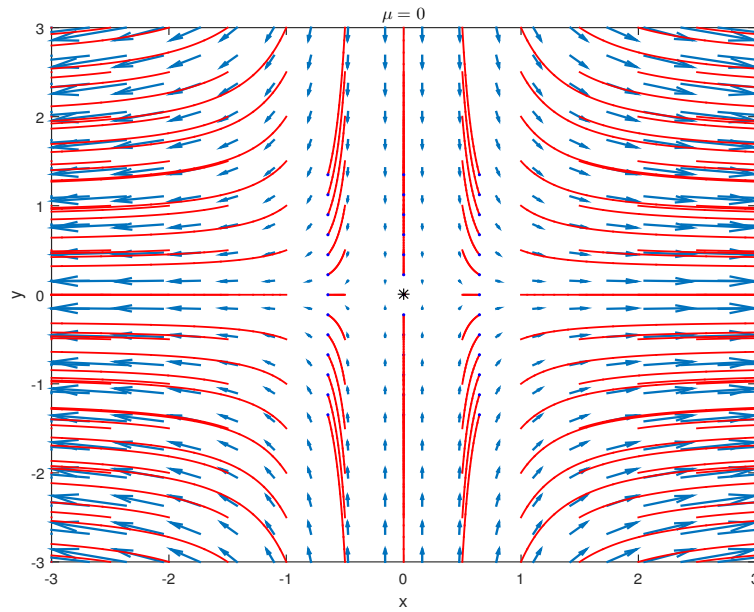


Figura 20: Bifurcación tridente subcrítica para $\mu = 0$

Para un valores de $\mu > 0$ no se presenta ningún cambio topológico en el retrato de fase.

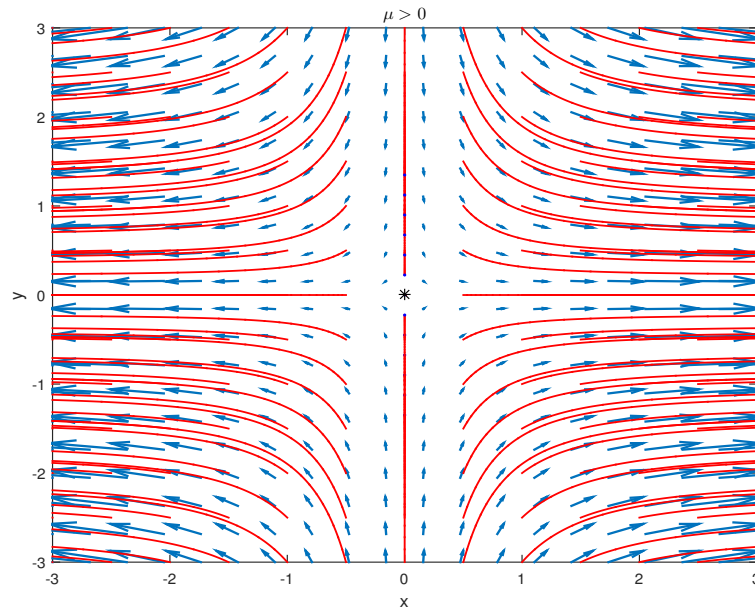


Figura 21: Bifurcación tridente subcrítica para $\mu > 0$

3.4.4. Bifurcación de Hopf

Si se ubican los valores propios en el plano complejo, se sabe que la estabilidad del sistema depende de su posición, así pues si todos los valores propios del sistema se encuentran en el lado izquierdo del plano, el sistema es estable, pero si pasan al lado derecho cruzando el eje imaginario, entonces el sistema será inestable, sabiendo esto se dice que una bifurcación de Hopf ha ocurrido si los valores propios del sistema siendo estos complejos conjugados se cruzan del lado izquierdo al lado derecho del plano complejo.

Existen dos tipos principales de bifurcaciones de Hopf.

- Bifurcación de Hopf Supercrítica
- Bifurcación de Hopf Subcrítica

Para una bifurcación Hopf supercrítica como la mostrada en el arreglo de ecuaciones en (19), cuando μ presenta valores negativos, en el retrato de fase puede observarse un punto fijo estable en el origen y trayectorias siendo atraídas a él en forma de espiral; cuando el valor de μ es positivo, el punto fijo se vuelve inestable y las trayectorias cercanas a él se alejan y convergen a un ciclo límite medio estable(Ver Figura 22).

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2 \end{aligned} \tag{19}$$

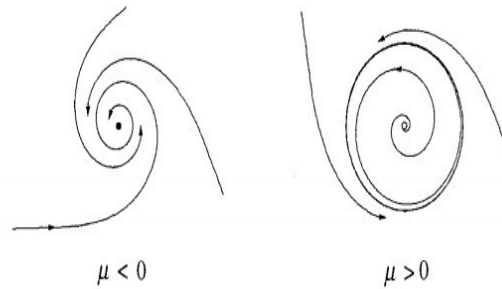


Figura 22: Gráfica de la bifurcación de Hopf para (19) [7].

Para una bifurcación Hopf subcrítica como la mostrada en el sistema de ecuaciones en (20), para valores negativos de μ , en el retrato de fase habrá un punto fijo estable en el origen y un ciclo límite estable por fuera de este, así, ciertas trayectorias en el interior del ciclo limite se acercarán a este y otras se aproximarán al punto fijo; cuando el valor de μ es positivo, el punto fijo se vuelve inestable y las trayectorias cercanas a él se alejan y convergen a un ciclo límite medio estable(Ver Figura 23).

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2 \end{aligned} \tag{20}$$

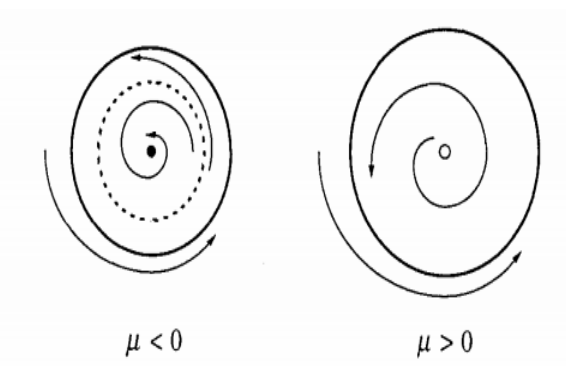


Figura 23: Gráfica de la bifurcación de Hopf para (20) [7].

3.5. CAOS

Aún no hay un consenso sobre la definición del caos, sin embargo varios autores postulan que el caos puede considerarse como: *”Un comportamiento aperiódico de larga duración en un sistema determinístico que exhibe dependencia sensitiva de las condiciones iniciales”*[7].

Entonces las predicciones proyectadas a tiempos muy lejanos al actual acarrear errores, como ejemplo, se puede citar el caso más famoso de caos que hay, el famoso atractor de Lorenz [1].

El atractor de Lorenz está caracterizado por el sistema de ecuaciones en (21), bajo ciertos parámetros de estas ecuaciones es posible obtener comportamientos caóticos, donde σ es una constante proporcional al número de Prandtl, r es el número de Rayleigh y b es un parámetro propio del sistema. Estas ecuaciones fueron obtenidas por Lorenz mientras trataba de modelar el comportamiento de la atmósfera terrestre a fin de poder predecir su comportamiento.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sigma(x - y) \\
 \dot{y} &= rx - y - xz \\
 \dot{z} &= xy - bz
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Con el fin de comprender el fenómeno caótico de las ecuaciones de Lorenz, se hará un recorrido variando el parámetro r de estas, se enunciarán algunos de los fenómenos que suceden mientras su valor se incrementa, sin embargo, no se profundizarán conceptos más allá de los que se han tratado previamente, pues esto se sale del alcance del presente escrito.

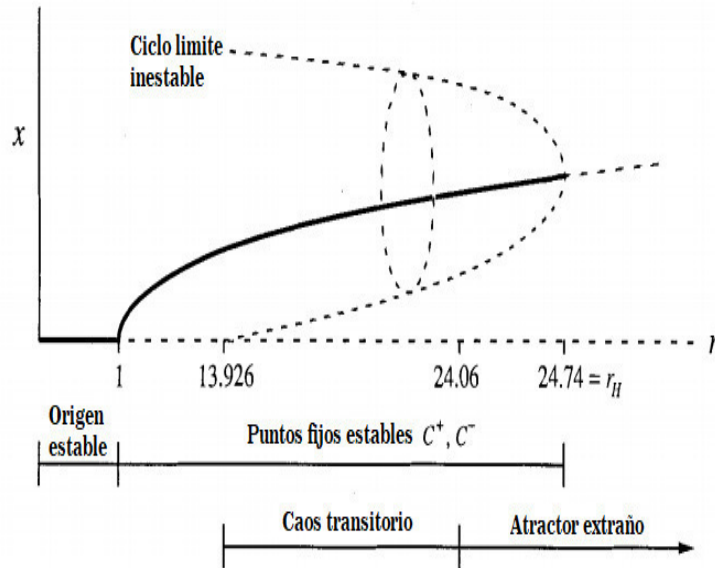


Figura 24: Curva que describe las distintas etapas de las respuestas de las ecuaciones de Lorenz para la variación de un parámetro r [7]

En la Figura 24, se muestra un resumen del comportamiento del sistema para el parámetro $0 < r < 24.74$, se inicia con $r = 0$, y se deja $\sigma = 10$, $b = 8/3$ constantes, se puede apreciar el comportamiento del sistema en la Figura 25. Para cada una de estas respuestas se tomó un tiempo de simulación de 20 segundos, y se presenta en el plano de fases x, z .

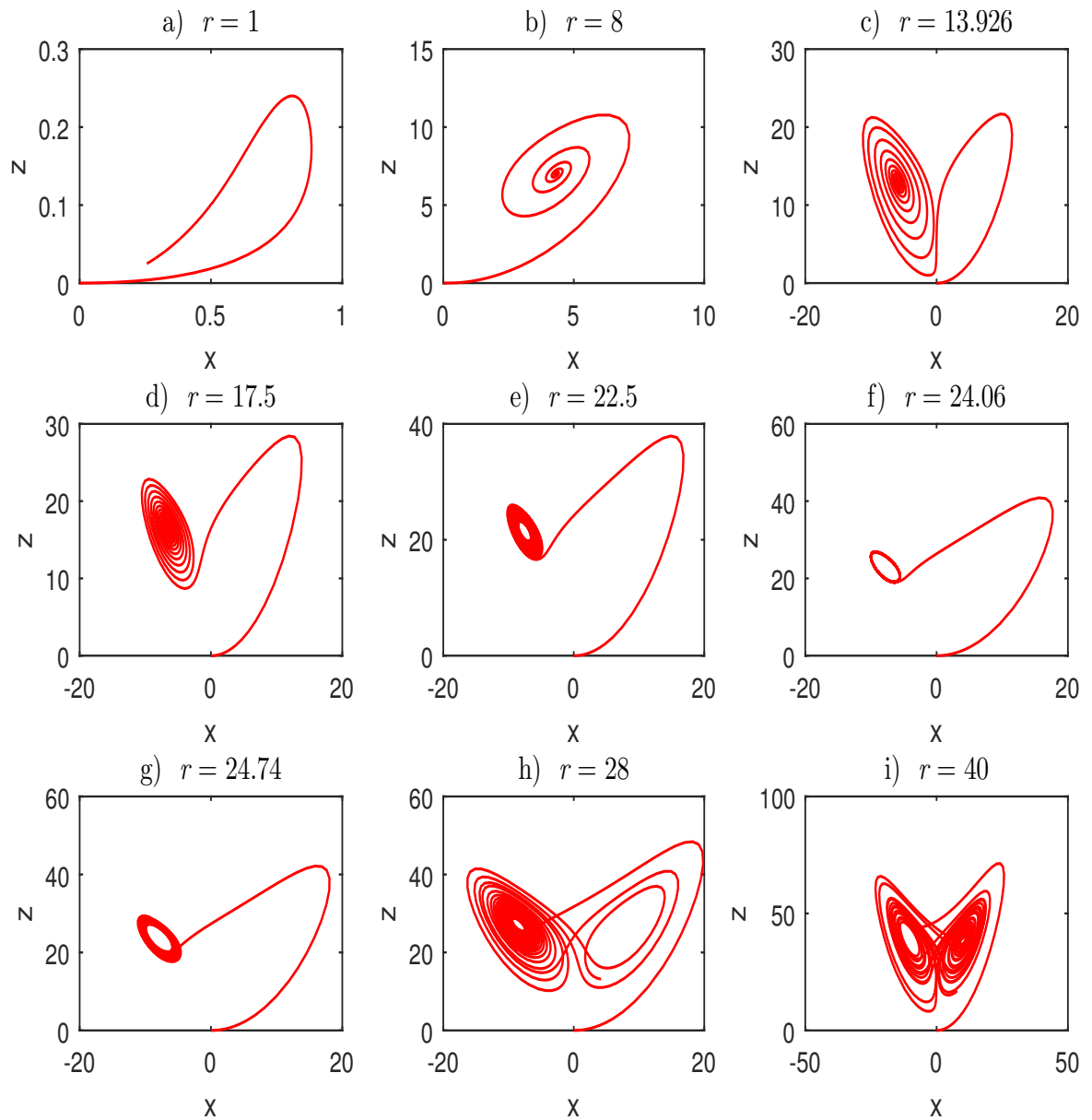


Figura 25: Espacio de fases para el sistema de ecuaciones de Lorenz en el plano x, z para a) $r = 1$, b) $r = 8$, c) $r = 13.926$, d) $r = 17.5$, e) $r = 22.5$, f) $r = 24.06$, g) $r = 24.74$, h) $r = 28$, i) $r = 40$. Ver ANEXO 2

Para valores de $r < 1$ el origen es globalmente estable, lo que significa que todas las trayectorias terminarán en él; cuando $r = 1$ el origen pierde su estabilidad por una bifurcación tridente supercrítica y aparece un par de puntos fijos estables C^+ y C^-

junto con un punto de silla en el origen(Ver Figura 26), para valores de $r < 13.926$ no se aprecia ningún cambio significativo para los puntos fijos del sistema en relación al comportamiento que venían presentando, para $r \geq 13.926$, hay una aparición de dos ciclos límites inestables cerca de los puntos fijos anteriores, que alcanzan a "tocar" el punto de silla, formándose bifurcación homoclínica⁴, estos ciclos van haciéndose más y más pequeños a medida que r crece, es entonces que las trayectorias empiezan a "divagar"por el plano de fase, aunque siempre terminan en los puntos fijos, sin embargo, entre más grande sea r , mayor tiempo tomará para que estas lleguen a C^+ y C^- , hasta cuando $r = 24.06$ este tiempo se torna infinito, formándose un atractor extraño; en $r = 24.74$ los puntos fijos pierden estabilidad, absorbiendo los ciclos límites inestables en una bifurcación Hopf Subcrítica[7]. El anterior recorrido puede verificarse en la figura 25.

3.5.1. Atractor

La definición de atractor también se dificulta debido a la falta de consenso entre los autores, sin embargo se expondrán algunas características a fin de que se tenga una idea general de qué se trata, en general un atractor tiende a atraer hacia sí las trayectorias cercanas a él, de esta forma, un atractor:

- Es invariante, así pues, si las condiciones iniciales empiezan en el atractor, permanecen en él para cualquier tiempo.
- Tiene una condición para la atractibilidad, es decir, las trayectorias que serán atraídas deben estar lo suficientemente cercanas a él.

3.5.2. Mapas de Lorenz

Son relaciones elaboradas por Lorenz mientras estudiaba fenómenos caóticos, mediante estas se busca predecir un máximo de una respuesta temporal mediante

⁴Este tipo de bifurcación no se trata en este escrito, pero se puede consultar en [7]

el conocimiento del máximo anterior. Según la Figura 26 el pico producido a los 15 segundos permitirá conocer la amplitud máxima del siguiente pico[7].

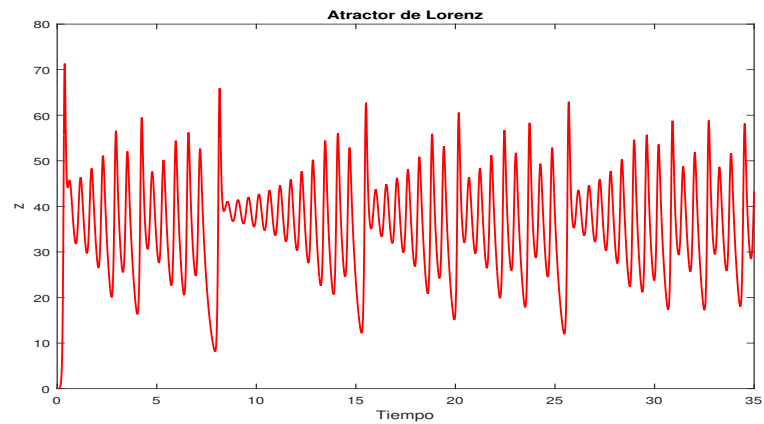


Figura 26: Respuesta en el tiempo para z de las ecuaciones de Lorenz

3.6. CAOS EN EL CIRCUITO OSCILADOR DE CHUA

El circuito Oscilador de Chua, que es el principal objeto de estudio de este trabajo, se puede representar mediante el arreglo de la Figura 27, está conformado por tres elementos almacenadores de energía: dos capacitores y una inductancia, además de una resistencia y un elemento no lineal, el diodo de Chua o memristor que se comporta como una resistencia en función de la tensión que se encuentra entre sus terminales.

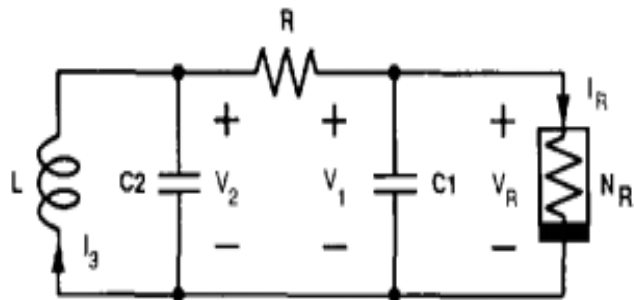


Figura 27: Esquema del circuito oscilador de Chua[10].

Antes de realizar el análisis es necesario conocer el comportamiento del elemento no lineal, para ello se presenta la gráfica de transferencia del memristor.

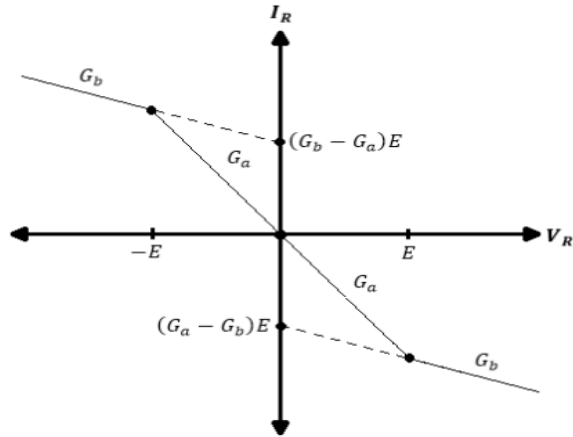


Figura 28: Representación gráfica de las regiones presentes en el diodo de Chua[11].

El circuito de chua está modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales de tercer orden no lineales, esto debido al memristor y a los tres elementos almacenadores de energía que posee, se presenta mediante el arreglo de ecuaciones en (22).

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_3}{dt} &= \dot{I}_3 = -\frac{1}{L}V_2 \\
 \frac{dV_2}{dt} &= \dot{V}_2 = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \\
 \frac{dV_1}{dt} &= \dot{V}_1 = \frac{G}{C_1}(V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1}i_R
 \end{aligned} \tag{22}$$

Las ecuaciones del circuito oscilador de Chua teniendo en cuenta las regiones de operación del diodo, serán:

$$\begin{aligned}
\frac{dI_3}{dt} &= \dot{I}_3 = -\frac{1}{L}V_2 \\
\frac{dV_2}{dt} &= \dot{V}_2 = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \\
\frac{dV_1}{dt} &= \dot{V}_1 = \frac{G}{C_1}(V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1}f(V_1) = \begin{cases} \frac{G}{C_1}V_2 - \frac{G'_b}{C_1}V_1 - \frac{(G_b - G_a)}{C_1}E; & V_1 < -E \\ \frac{G}{C_1}V_2 - \frac{G'_a}{C_1}V_1; & -E \leq V_1 \leq E \\ \frac{G}{C_1}V_2 - \frac{G'_b}{C_1}V_1 - \frac{(G_a - G_b)}{C_1}E; & V_1 > E \end{cases}
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
G'_a &= G + G_a \\
G'_b &= G + G_b
\end{aligned} \tag{24}$$

Debido al comportamiento del elemento no lineal, el circuito de Chua se divide en tres regiones, son nombradas a continuación:

$$\text{Región } D_{-1} \quad V_1 < -E$$

$$\text{Región } D_0 \quad -E \leq V_1 \leq E$$

$$\text{Región } D_1 \quad V_1 > E$$

Por esta razón para el entender cómo funciona el circuito es necesario hacer un análisis lineal a tramos para las diferentes regiones y finalmente unirlas para hacer un análisis global del sistema.

El fin de estos análisis es encontrar los puntos de equilibrio ya que de estos depende en gran parte el comportamiento del oscilador, esto se logra igualando las ecuaciones diferenciales a cero, para posteriormente hallar los valores propios a través de la matriz jacobiana y así poder clasificar el tipo de estabilidad que se presenta en ellos. Este proceso se realiza para cada una de las regiones por separado y para el análisis global como se puede ver en [18].

$$\text{REGIÓN MEDIA} \quad -E \leq V_1 \leq E$$

La región D_0 puede ser modelada por el sistema de ecuaciones en (25).

$$\begin{aligned}\frac{dI_3}{dt} &= \dot{I}_3 = -\frac{1}{L}V_2 \\ \frac{dV_2}{dt} &= \dot{V}_2 = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \\ \frac{dV_1}{dt} &= \dot{V}_1 = \frac{G}{C_1}V_2 - \frac{G'_a}{C_1}V_1\end{aligned}\quad (25)$$

El circuito con el que se puede modelar la región D_0 se presenta en la Figura 29.

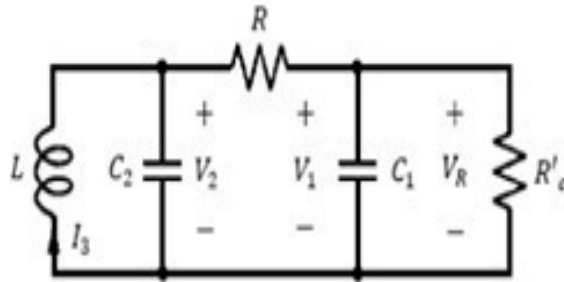


Figura 29: Modelo del circuito para la región D_0 [11]

Hay que calcular los puntos de equilibrio de esta región, para esto se igualan ecuaciones diferenciales a cero; así:

$$\begin{aligned}\frac{dI_3}{dt} &= \dot{I}_3 = -\frac{1}{L}V_2 = 0 \quad \rightarrow \quad V_2 = 0 \\ \frac{dV_1}{dt} &= \frac{G}{C_1}(V_2) - \frac{G'_a}{C_1}V_1 = \frac{G}{C_1}(0) - \frac{G'_a}{C_1}V_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = 0 \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad I_3 = 0\end{aligned}\quad (26)$$

A partir de un análisis algebraico simple se encuentra un punto de equilibrio en el origen $(I_3, V_2, V_1) = (0, 0, 0)$, sabiendo esto, el siguiente paso es hallar los valores propios mediante la matriz jacobiana en (27).

$$\mathbf{J}_{Fa} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{G}{C_2} \\ 0 & \frac{G}{C_1} & -\frac{G'_a}{C_1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Ahora se utiliza la siguiente expresión $\det(\lambda I - J_{Fa})$ para calcular el polinomio en (28) y de éste hallar los valores propios de la región D_0 :

$$\lambda^3 + \left(\frac{G}{C_2} + \frac{G'_a}{C_1}\right)\lambda^2 + \left(\frac{1}{LC_2} + \frac{GG'_a}{C_1C_2}\right)\lambda + \frac{G'_a}{LC_1C_2} = 0 \quad (28)$$

La estabilidad que se pueda presentar en los puntos de equilibrio encontrados para esta región dependerá de los valores propios hallados anteriormente.

REGIONES EXTERIORES $(V_1 < -E)$ y $(V_1 > E)$

El sistema de ecuaciones diferenciales que modela las regiones exteriores (D_{-1} y D_1) se aprecia en (29).

$$\begin{aligned} \frac{dI_3}{dt} &= -\frac{1}{L}V_2 \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \\ \frac{dV_1}{dt} &= \frac{G}{C_1}V_2 - \frac{G'_b}{C_1}V_1 - \frac{I'}{C_1} \end{aligned} \quad (29)$$

Donde:

$$\text{En la región } D_{-1} (V_1 < -E) \quad \rightarrow \quad I' = (G_b - G_a)E$$

$$\text{En la región } D_1 (V_1 > E) \quad \rightarrow \quad I' = (G_a - G_b)E$$

El circuito que modela las regiones exteriores es un RLC paralelo a una resistencia $R_b = \frac{1}{G'_b}$ y una fuente de corriente DC llamada I' como muestra la Figura 30.

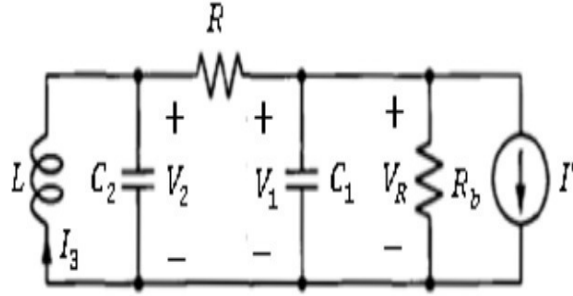


Figura 30: Modelo del circuito oscilador de Chua para las regiones exteriores[11].

Para hallar los puntos de equilibrio de las regiones exteriores lo que se hace es modelar el diodo de Chua como una resistencia R_b y una fuente de corriente en paralelo I' .

$$\begin{aligned} \frac{dI_3}{dt} = \dot{I}_3 &= -\frac{1}{L}V_2 = 0 \quad \rightarrow \quad V_2 = 0 \\ \frac{dV_1}{dt} &= \frac{G}{C_1}(V_2) - \frac{G'_b}{C_1}V_1 - \frac{I'}{C_1} = \frac{G}{C_1}(0) - \frac{G'_b}{C_1}V_1 - \frac{I'}{C_1} = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = -\frac{I'}{G'_b} \quad (30) \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}((0) - (-\frac{I'}{G'_b})) = 0 \quad \rightarrow \quad I_3 = \frac{GI'}{G'_b} \end{aligned}$$

Considerando $I' = (G_b - G_a)E$ para la región D_{-1} , el punto de equilibrio de esta región es:

$$\mathbf{P}^- = \begin{bmatrix} I_3 \\ V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G(G_b - G_a)E}{G + G_b} \\ 0 \\ \frac{(G_a - G_b)E}{G + G_b} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Considerando $I' = (G_a - G_b)E$ para la región D_1 , el punto de equilibrio para esta región es:

$$\mathbf{P}^+ = \begin{bmatrix} I_3 \\ V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G(G_a - G_b)E}{G + G_b} \\ 0 \\ \frac{(G_b - G_a)E}{G + G_b} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Cuando el punto de equilibrio P^- se ubica fuera de la región D_{-1} se dice que es un punto de equilibrio virtual y por tal razón no afecta el circuito.

Se procede a determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio a partir de los valores propios obtenidos de la matriz jacobiana así:

$$\mathbf{J}_{Fb} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{G}{C_2} \\ 0 & \frac{G}{C_1} & -\frac{G'_b}{C_1} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Donde el polinomio característico es determinado por $\det(\lambda I - J_{Fb})$ y dando solución a éste se obtienen los valores propios para estas regiones.

$$\lambda^3 + \left(\frac{G}{C_2} + \frac{G'_b}{C_1}\right)\lambda^2 + \left(\frac{1}{LC_2} + \frac{GG'_b}{C_1C_2}\right)\lambda + \frac{G'_b}{LC_1C_2} = 0 \quad (34)$$

3.6.1. Análisis Global

En éste análisis se pretende integrar las regiones encontradas en la sección anterior, de tal forma que sea posibles agruparlas como si fuera un sólo comportamiento. Se procede a hallar los puntos equilibrio del sistema en (35) después se expresa de forma matricial con el fin de hallar sus valores propios, ya que estos darán una noción del comportamiento de los puntos fijos del sistema, todo este procedimiento está consignado de forma más extensa en [18], sin embargo, ante la necesidad de un análisis, se tratarán los aspectos más importantes relacionados a la forma de encontrar los valores propios del sistema.

A continuación se igualan las ecuaciones diferenciales a cero:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{L}V_2 \\
0 &= \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \\
0 &= \frac{G}{C_1}(V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1}I_R
\end{aligned} \tag{35}$$

Se realiza un análisis en DC (Figura 31), pues, es de esta forma es como se encuentran los puntos de equilibrio [10], este procedimiento se muestra en (36).

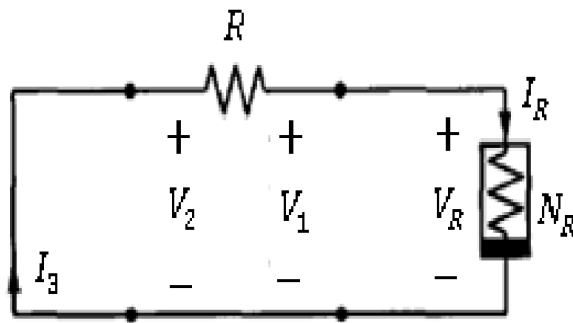


Figura 31: Modelo del circuito para un estado DC.

$$\begin{aligned}
V_2 &= 0, V_1 = V_R \\
0 &= -\frac{1}{L}V_2 \rightarrow V_2 = 0 \\
0 &= \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \rightarrow I_3 = -GV_1 \\
0 &= \frac{G}{C_1}(V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1}I_R \rightarrow I_R = -GV_1 \\
I_3 &= I_R = -GV_1 = -GV_R \\
I_R &= -GV_R
\end{aligned} \tag{36}$$

Para hallar los puntos fijos, se superponen las soluciones en DC del circuito y se grafican junto con la función de conducción del diodo de Chua, en los puntos de intersección estarán los puntos de equilibrio.

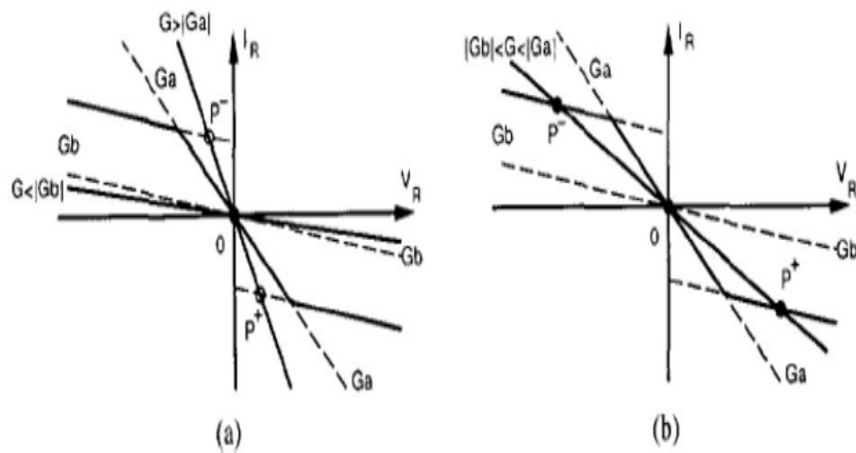


Figura 32: Superposición de la curva de conducción del diodo y el estado de DC.

si $G > |G_a|$ Y $G < |G_b|$) el circuito tendrá un punto de equilibrio en el origen y dos puntos de equilibrio virtuales P^- y P^+ .(Figura 31 a). Si por el contrario $|G_b| < G < |G_a|$) el circuito tendrá tres puntos de equilibrio los cuales serán $P^+, 0$ y P^- .(Figura 31 b). Posterior a esto, se analizan los valores propios del sistema de igual forma como se realizó anteriormente.

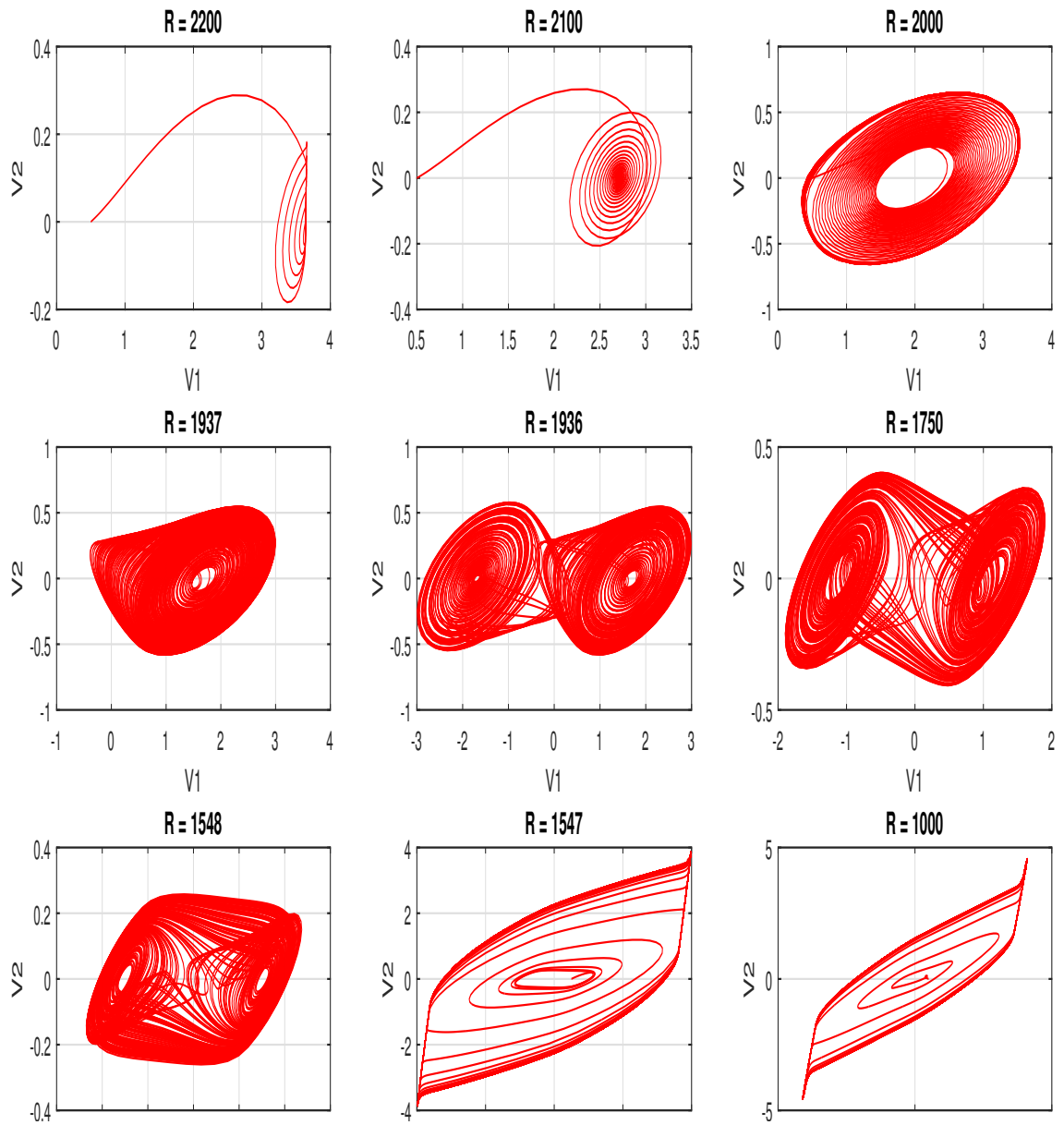


Figura 33: Espacio de Fase para las tensiones de los capacitores al variar el parámetro R en Ω .(Ver ANEXOS 3 Y 4)

En la Figura 33, se observa el comportamiento para diferentes valores de resistencia sin ningún patrón en específico, sino mostrando las formas de trayectorias destacadas, así pues, se varía su valor de forma descendente con la intención de observar cómo se comporta el circuito oscilador de Chua (Ver Figura 27) para cada

valor de la resistencia R . Para valores de $R > 2000 \Omega$ se aprecia como la respuesta oscila levemente hasta quedar atenuada en una espiral, al alcanzar el valor de $R = 2000 \Omega$ se puede observar que la trayectoria empieza a necesitar más tiempo para llegar al un punto de equilibrio formado en $(2, 0)$ las respuestas oscilatorias se desarrollan de tal forma que se empiezan a generar comportamientos tales que las amplitudes de las oscilaciones y la magnitud de los periodos cambian (bifurcaciones de Hopf), se considera que este es el final del caos en el oscilador de Chua. En el intervalo de $1548 < R < 1936 \Omega$ ocurre el comportamiento caótico en el cual se aprecian las distintas formas como el atractor de 'doble hoja' así como trayectorias que describen un comportamiento caótico; para valores de $R < 1548 \Omega$ se observan oscilaciones que son saturadas por la alimentación del circuito.

4. METODOLOGÍA EMPLEADA

Para la metodología de este proyecto se eligieron dos fases, la primera relacionada compuesta de cuatro etapas para poder hacer la correcta caracterización del sistema y la segunda relacionada a la elaboración de las guías.

4.1. ETAPAS PARA LA CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA

- **Recopilación de Información Teórica:** Se recoge información relacionada a la teoría de los circuitos oscilatorios no lineales, el caos determinístico, el circuito de Chua y las ecuaciones no lineales que lo rigen.
- **Simulación:** Se simulan los circuitos correspondientes a cada módulo, así como posibles arreglos y/o propuestas para ser incorporados en el desarrollo de las prácticas de laboratorio, esto con el fin de establecer un comportamiento teórico que concuerde con la descripción matemática de los circuitos.
- **Implementación:** Se hacen pruebas de laboratorio en las cuales se replican de forma práctica los análisis hechos mediante simulación, se halla el posible error asociado al proceso y se analiza la forma como se comporta el circuito en el laboratorio para realizar la comparación con el comportamiento teórico.
- **Documentación y Análisis de Datos:** Se usan los datos recopilados, se clasifican y discriminan de tal forma que se establece qué comportamientos y resultados son pertinentes para la elaboración de las guías.

4.2. ETAPAS PARA LA REALIZACIÓN DE LAS GUÍAS

El curso y desarrollo de las guías pasó por dos etapas, en la primera se aplica el modelo exógeno con énfasis en los contenidos y en la segunda etapa se aplica el modelo exógeno con énfasis en los efectos[15]

Teniendo en cuenta que sin un mínimo de teoría no puede haber un aprendizaje eficaz, se busca a partir de la realización de este trabajo transmitir conocimiento acerca de diferentes temas que se presentan al abordar el circuito de Chua. Por esto en una primera etapa de avance del proyecto se usó el modelo **exógeno con énfasis en los contenidos** debido a que se ha adquirido el conocimiento de una manera tradicional, esto quiere decir que se obtuvo la información de libros, *papers* y proyectos que son el resultado del trabajo de maestros, doctores e incluso estudiantes que han dedicado su tiempo y esfuerzo a profundizar en estas temáticas con la finalidad de aportar a esta teoría para que sea posible apoyarse en ella y se logre entenderla; luego de esto se quiere transmitir lo aprendido de un modo más sencillo y simplificado, el actual trabajo no solo se busca compartir el conocimiento, sino se espera que mediante este proceso el estudiante cumpla con una serie de objetivos que se han planteado para ellos en éste material, y es aquí cuando se da uso al modelo de educación **exógeno con énfasis en los efectos** en el cuál los autores hacen el rol de educadores y mediante el uso y seguimiento de las guías propuestas se desea que aquellas personas que hagan uso del material logren cumplir con el propósito que será comprender y analizar los resultados de este texto, el cuál se ha construido a partir de conceptos que se consideraron importantes para que el aprendiz obtenga de el suficiente conocimiento a través de la lectura y profundización en los textos referenciados, así le permitirá alcanzar la concreción de las metas planteadas, con esto finalmente conocer y adentrarse en temas como lo es circuito de Chua y el Caos determinístico.

5. RESULTADOS

5.1. CARACTERIZACIÓN DE LOS MÓDULOS

Como resultados del proyecto se logra una completa caracterización de los módulos disponibles, es decir, tanto para el módulo de comunicaciones como para el módulo básico del oscilador de Chua.

5.1.1. Módulo Básico de Chua

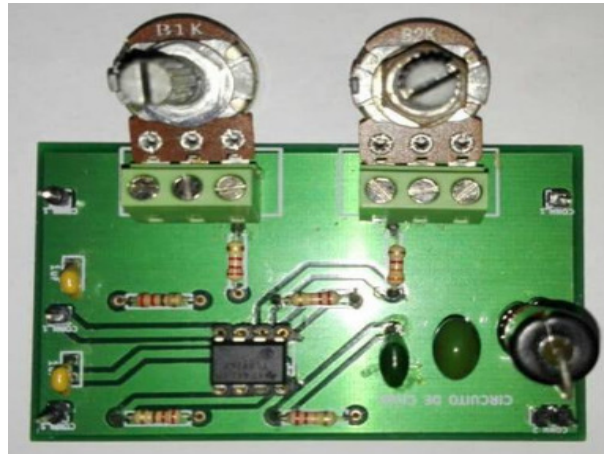


Figura 34: Módulo de Chua

Primero, se verifica el estado de los módulos. Para el oscilador de Chua, se pudo apreciar su funcionamiento para oscilaciones saturadas (Ver Figura 35), caos con un atractor simple (Ver Figura 36) y con uno doble (Ver Figura 37). Se verifican algunos valores previamente mencionados en la sección 3.6.

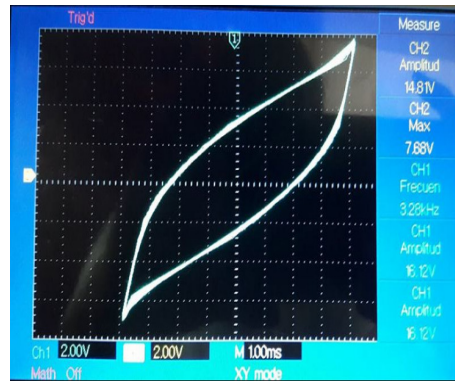


Figura 35: Visualización del comportamiento del circuito de Chua en estado de oscilación saturada. Valores de resistencia entre $1900[\Omega]$ y $1800[\Omega]$.

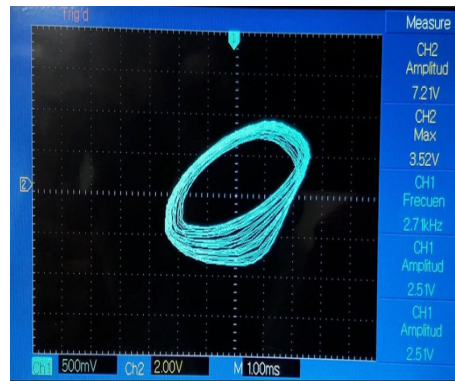


Figura 36: Visualización del comportamiento del circuito de Chua en estado de caos con atractor simple. Valores de resistencia entre $1772[\Omega]$ y $1747[\Omega]$.

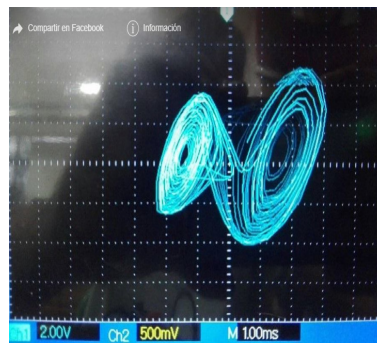


Figura 37: Visualización del comportamiento del circuito de Chua en estado de caos con atractor doble. Valores de resistencia entre $1747[\Omega]$ y $1424[\Omega]$.

También se compararon retratos de fase de simulación con los valores que se obtienen en el laboratorio, esto se muestra en la figura 38

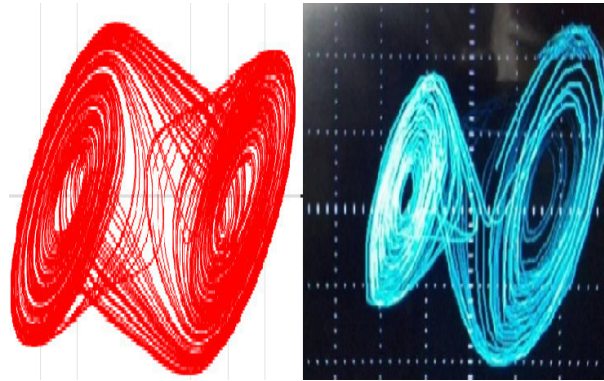


Figura 38: Comparación entre las respuestas, simulada y práctica para el circuito oscilador de Chua para una resistencia R entre $1747[\Omega]$ y $1424[\Omega]$.

Para la correcta caracterización del módulo es necesario conocer cada uno de sus componentes, una lista detallada de los mismos está disponible en el trabajo de grado anterior del cual se basa este [18], se puede observar en la Tabla 1 un resumen de esta información.

Tabla 1. Componentes del Módulo de Chua

Elemento	Referencia	Comentario
Capacitor de Tántalo	100 y 10 [nF]	El fabricante no entrega valores de tolerancia
Inductancia 18 mH $\pm 10\%$	RFC0807	Núcleo de Hierro
Resistencias 1/4 W	Valores varios	Tolerancia 5 %
Amplificador Operacional Dual	TL082	GBW = 4 MHz
Potenciómetros	De $1k\Omega$ y $2k\Omega$	Sin referencia específica o Tolerancia

El Diodo de Chua se caracteriza por dos amplificadores operacionales con un arreglo de resistencias como se muestra en la Figura39

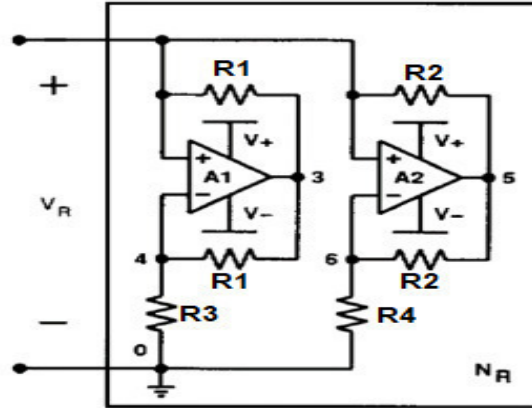


Figura 39: Esquema para el diodo de Chua con amplificadores operacionales

Para comenzar con el análisis se debe recordar que un Amplificador Operacional funciona de forma lineal siempre que su entrada diferencial no exceda la tensión de saturación, la cual es un porcentaje de la tensión de alimentación. Siendo v_R la tensión del memristor y i_R la corriente que pasa por él, la conductancia estará dada por la función a trozos en (37). En éste caso, E_p y E_n son los valores de saturación E_{sat} del Amplificador Operacional positivo y negativo respectivamente y A_1 y A_2 son las ganancias de resistencias en (38).

$$i_R(v_R) = \begin{cases} -v_R \frac{(R3+R4)}{(R3R4)}; & |v_R| \leq \frac{E_p}{A1} \wedge |v_R| \leq \frac{E_p}{A2} \\ v_R \frac{(R4-R1)}{(R1R4)} - \frac{E_p}{R1}; & v_R \geq \frac{E_p}{A1} \wedge v_R \leq \frac{E_p}{A2} \\ v_R \frac{(R4-R1)}{(R1R4)} - \frac{E_n}{R1}; & v_R \leq \frac{E_n}{A1} \wedge v_R \geq \frac{E_n}{A2} \\ v_R \frac{(R1+R2)}{(R1R2)} - E_p \frac{(R1+R2)}{(R1R2)}; & v_R \geq \frac{E_p}{A2} \wedge v_R \leq E_p \\ v_R \frac{(R1+R2)}{(R1R2)} - E_n \frac{(R1+R2)}{(R1R2)}; & v_R \leq \frac{E_n}{A2} \wedge v_R \geq E_n \\ v_R \frac{(R1+R2)}{(R1R2)} - E_p \frac{(R1+R2)}{(R1R2)}; & v_R > E_p \end{cases} \quad (37)$$

$$A_1 = \frac{R3 + R1}{R3} \quad (38)$$

$$A_2 = \frac{R2 + R4}{R4}$$

Según [17] para una alimentación de $\pm 15V$, la máxima tensión de salida asegurada por el fabricante será de $\pm 12V$ lo que equivale a un 80% de la tensión de alimentación (Este valor idealmente debe ser del 100%). Este factor se toma en cuenta para realizar las simulaciones correspondientes de los diferentes trazos de las regiones en el diodo de Chua, el cual se aprecia en la Figura 40. Para la realización de esta gráfica de punto de conducción, se utilizaron valores de $V_{CC}=10V$, $V_{EE}=-10V$, $E_{sat}=85\%$, y $R1 = 22k\Omega$, $R2 = 220\Omega$, $R3 = 3.3k\Omega$ y $R4 = 2.2k\Omega$.

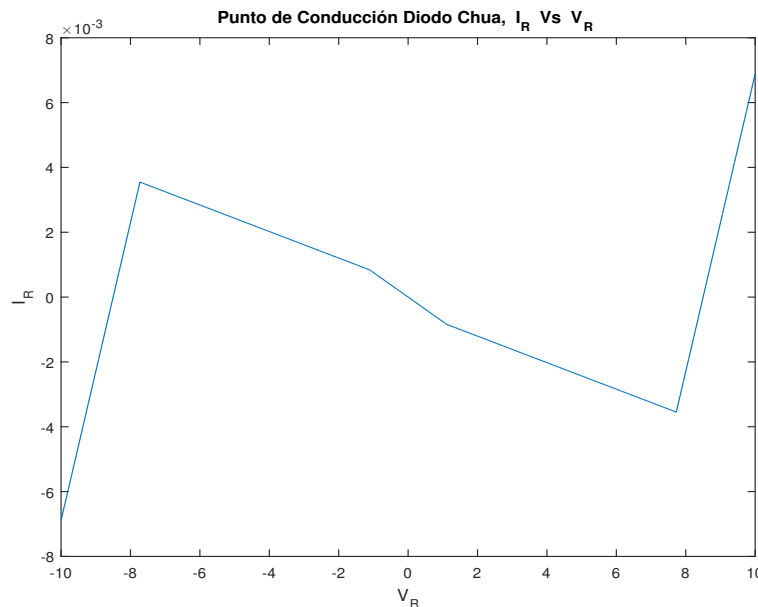


Figura 40: Gráfica para el punto de conducción del Diodo Chua en MATLAB

Este resultado fue posteriormente puesto a prueba mediante simulación utilizando el programa *OrCAD Capture CIS Lite* de *Cadence*, se mide la corriente en el diodo de forma indirecta utilizando una resistencia tipo *Shunt*, esto se aprecia en la Figura 41, como se observa se obtienen resultados muy aproximados (Este procedimiento se expone de manera más detallada en la Guía #2 [ANEXO 6].).

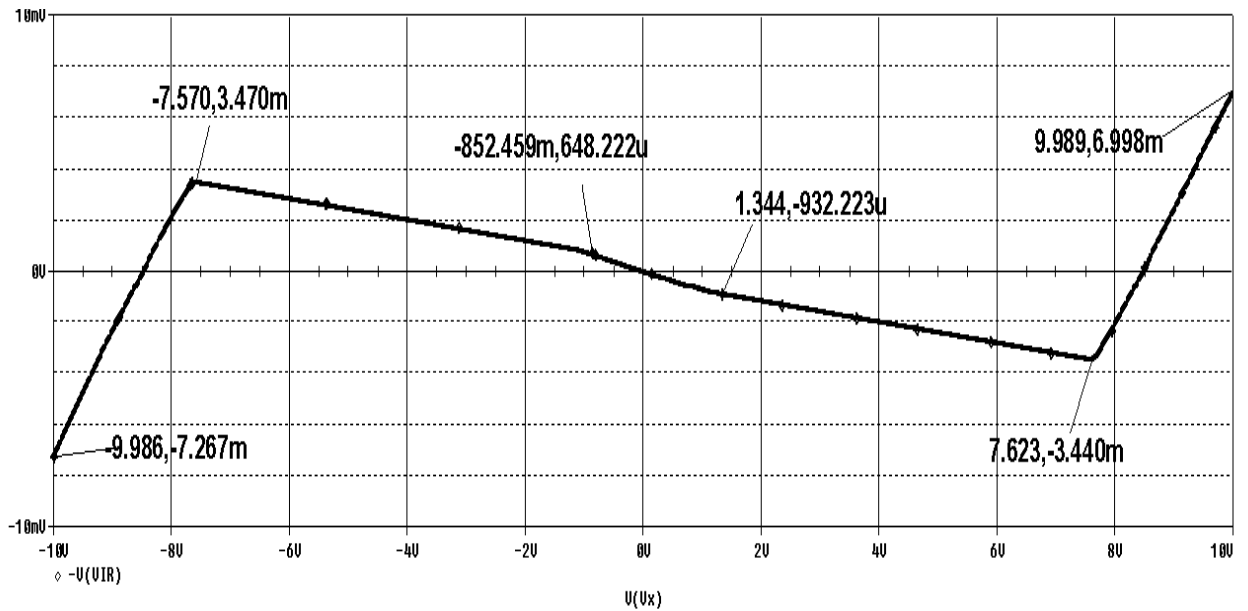


Figura 41: Gráfica para el punto de conducción del Diodo Chua en OrCAD

Finalmente, como por simple inspección se conocen los valores de las resistencias con su respectivo valor de incertidumbre, siendo $R1 = 22k\Omega$, $R2 = 220\Omega$, $R3 = 3.3k\Omega$ y $R4 = 2.2k\Omega$ todos con una tolerancia del 5 %, los valores de las relaciones para la ecuación 37 son los mostrados en la tabla 2.

Tabla 2. Valores estimados de las relaciones para el modulo disponible

Relación	Valor con Incertidumbre en Ω
$\frac{(R3+R1)}{(R3)}$	7.666 ± 0.766
$\frac{(R2+R4)}{(R4)}$	11 ± 1.1
$\frac{(R3+R4)}{(R3R4)}$	$7.576 \times 10^{-4} \pm 0.015$
$\frac{(R4-R1)}{(R1R4)}$	$5 \times 10^{-4} \pm 7.5 \times 10^{-5}$
$\frac{(R1+R2)}{(R1R2)}$	$4.591 \times 10^{-3} \pm 6.886 \times 10^{-4}$

Así, el sistema de ecuaciones que describe el módulo de Chua está descrito por el sistema en (39), para el cual, i_R está expresado como se muestra en (37), quedando así el módulo caracterizado en función de su diodo de Chua.

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_3}{dt} &= \dot{I}_3 = -\frac{1}{L}V_2 \\
 \frac{dV_2}{dt} &= \dot{V}_2 = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \\
 \frac{dV_1}{dt} &= \dot{V}_1 = \frac{G}{C_1}(V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1}i_R
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

5.1.2. Módulo de Comunicaciones de Chua

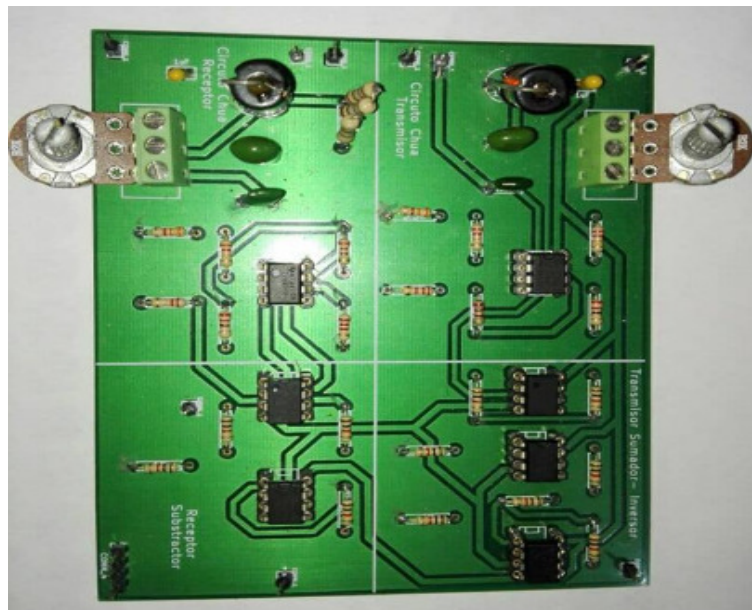


Figura 42: Módulo de comunicaciones Chua

Este módulo es diseñado a partir del esquemático Figura 43, está conformado por los elementos en la tabla 3, esta estructura está pensada para hacer la suma de la tensión V_1 del capacitor1 del circuito de Chua con otra tensión que hace las veces de mensaje, esto se logra mediante un arreglo de operacionales, posterior a esto, en el receptor se resta la tensión del capacitor V_1 y en teoría debería obtenerse el mensaje transmitido, en[12] se encuentra el mismo diseño, sin embargo en este documento no se pone a prueba este diseño debido a que no funciona correctamente y la razón de esto es explicada a continuación:

Este módulo no funciona por varias razones: Analizando el esquemático del circuito, disponible en [18] y en la imagen 43, se observa como se une la salida del circuito transmisor con el nodo de tensión V_2 del oscilador para el circuito receptor mediante una resistencia de $30 M\Omega$, esto tiene como fin práctico sincronizar ambos circuitos, pero esto no es posible debido a que las tensiones son de naturalezas distintas, es decir, la tensión de salida del sumador sería la señal modulada y la del receptor es la señal para demodular, por lo tanto no tiene sentido que estén conectadas entre sí.

Tabla 3. Componentes del Módulo de Comunicaciones Chua, resultado de [18].

Elemento	Referencia	Comentario
Capacitor de Tántalo	100 y 10 [nF]	El fabricante no entrega valores de tolerancia
Inductancia 18 mH $\pm 10\%$	RFC0807	Núcleo de Hierro
Resistencias 1/4 W	Valores varios	Tolerancia 5%
Amplificador Operacional Dual	TL082	GBW = 4 MHz
Amplificador Operacional Single	LM741	GBW = 500 kHz
Potenciómetros	De $2k\Omega$ y $2k\Omega$	Sin referencia específica o Tolerancia

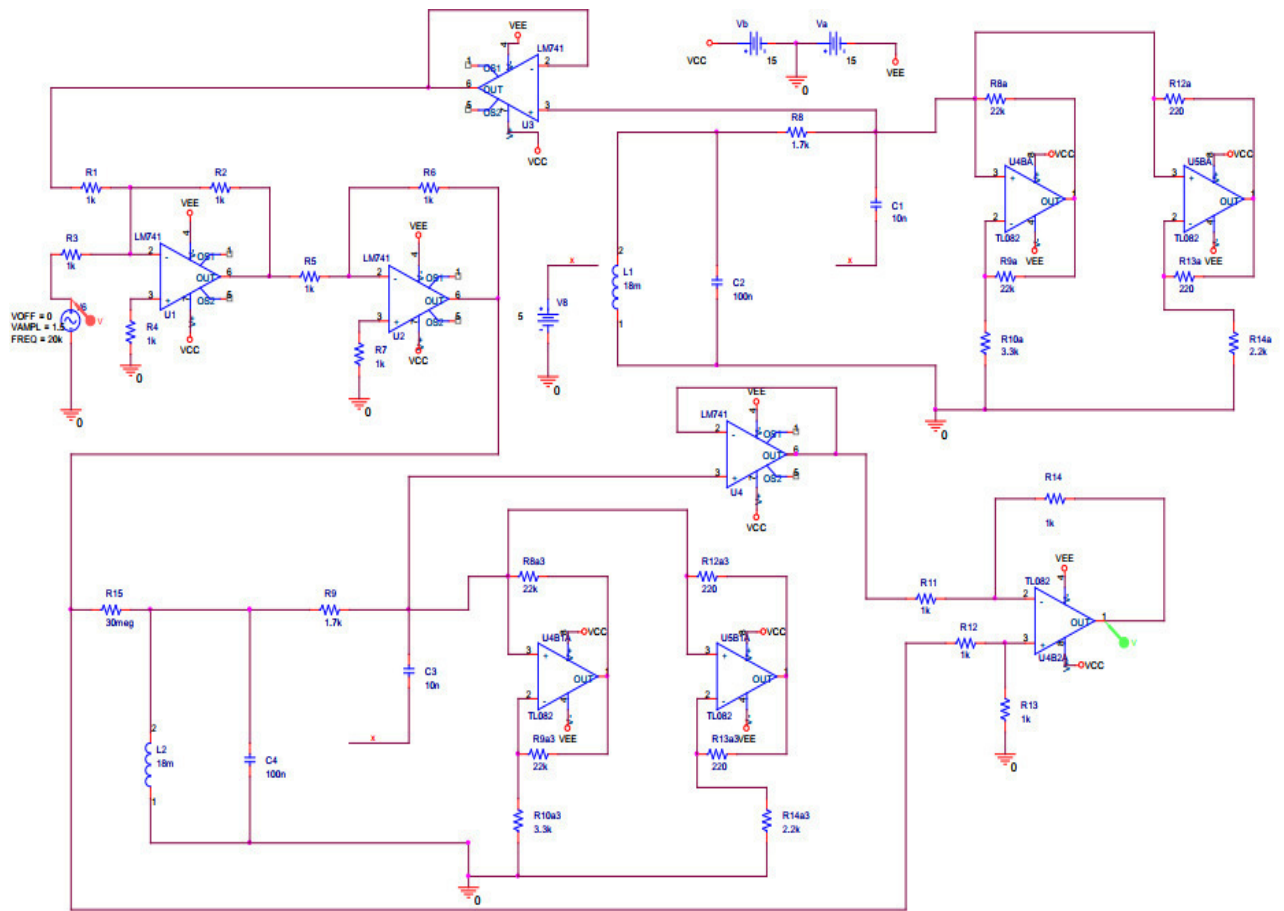


Figura 43: Esquemático del Módulo de Comunicaciones Chua

Otra razón por la cual este módulo no cumple su fin es porque la alimentación para todos los componentes activos es la misma, entonces, esto dificulta la sincronización pues las condiciones iniciales serán diferentes, esto debido a que la corriente demandada por un sólo circuito de Chua (transmisor o receptor) es de diferente magnitud y forma a la corriente que se necesita para la alimentación de dos circuitos de Chua.

En la Tabla 4 se aprecian algunas de las características del osciloscopio utilizado durante la realización de este proyecto, para obtener más detalles en [23].

Tabla 4. Algunas características del Osciloscopio usado para la caracterización de los módulos.

Osciloscopio UNIT-T 2120	
Rango de Exploración/ barrido	$2ns/div - 50s/div$
Convertidor analógico a digital (A/D)	Resolución de 8 bits con muestreo sincrónico de 2 canales
Precisión de la medición de CD (Modo de adquisición promedio)	($\pm 4\%$ de la lectura $0.1\text{ grid } 1mV$) seleccionando $2mV/div$ o $5mV/div$ ($\pm 3\%$ de la lectura $0.1\text{ grid } 1mV$) seleccionando $10mV/div$ o $5mV/div$
Velocidad de muestreo	1GS/s
Retardo entre canales (típico)	150 ps

Se sugiere entonces un nuevo modelo para el Módulo de Comunicaciones de Chua en el cual los nodos sean completamente sincronizados, sin embargo, la implementación de este módulo se sale del alcance de este proyecto.

5.2. DISEÑO DE UN MÓDULO DE BIFURCACIONES

Se diseña un módulo de laboratorio que permite observar cómo ocurren las bifurcaciones en el módulo de Chua. Para esto se optó por hacer un diseño en el que se hace posible visualizar el cambio en el valor de la resistencia y observar el cambio en las tensiones de los capacitores.

Se vio la necesidad de usar un potenciómetro digital cuyo valor de resistencia es variado por un microcontrolador que a su vez genera una señal de tensión

proporcional al valor actual de resistencia que tenga el potenciómetro, de esta forma se logra hacer un recorrido en el tiempo equivalente al barrido de la resistencia, expresado en una señal de tensión tipo diente de sierra.

5.2.1. Elección de Componentes para el módulo de bifurcaciones

Uno de los componentes utilizado para este diseño es un potenciómetro digital, ya que la intención de este proyecto es que sus resultados sean fácilmente replicables en el contexto de la Universidad Industrial de Santander, se optó por utilizar únicamente materiales del mercado local, por esta razón se usa el potenciómetro digital X9C102P[20] que es común en el mercado, este potenciómetro no utiliza un protocolo de comunicación en específico, sino que se activa mediante la generación de flancos de subida o bajada dependiendo de la dirección en la cual se quiera que aumente o disminuya la resistencia del mismo, está disponible en el empaquetado DIP-8, el cual facilita su manipulación en protoboard, cuenta con 100 Ω de resistencia y su valor nominal es de $1k\Omega$.

Posterior a esto, se utiliza un microcontrolador capaz de generar una señal de tipo diente de sierra; después de realizar la consideración en varias referencias de microcontroladores (Atmel, Microchip, Expressif y Freescale), se optó por usar el microcontrolador ESP32 de Expressif, pues este presenta un grado de consumo muy bajo, además posee dos *Digital to Analog ports*, los cuales son suficientes para nuestro diseño. Se decidió usar una tarjeta de desarrollo que ya incorporara el ESP32, debido a que es más económico comprar este módulo que construirlo, además la tarjeta se puede desacoplar del módulo, permitiendo su incorporación en otras posibles aplicaciones.

5.2.2. Elaboración del Módulo de bifurcaciones

Para el diseño del módulo de bifurcaciones se utilizó el programa de libre uso *Eagle*, debido a que la tarjeta de desarrollo no contaba con una PCB donde colocarla,

se diseñó una huella y se propuso el esquemático que se aprecia en la Figura 44, en esta se controla el funcionamiento del potenciómetro digital por medio de los puertos de salida digital D27, D14 y D23 y la conexión del potenciómetro se hace a los pines INC', U/D' y CS', respectivamente.

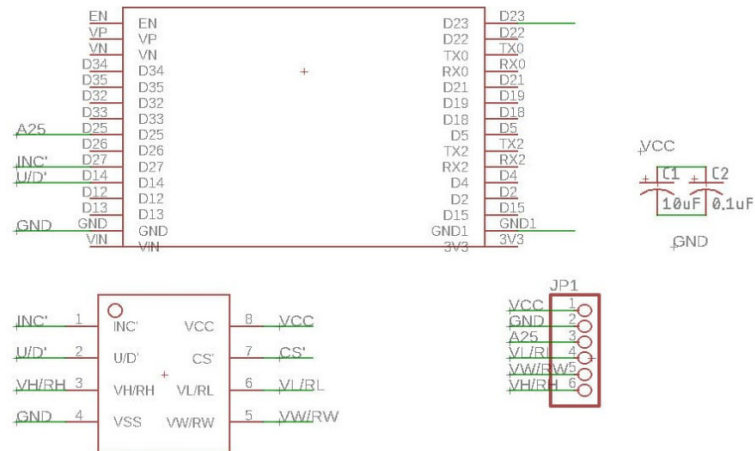


Figura 44: Esquemático para Módulo de Bifurcaciones

El diseño de la PCB se muestra en la Figura 45, se usa una regleta de cuatro pines como salida y dos de entrada, los puertos de salida son, *VW, VH, VR* y *AD25* (los tres primeros son pines que salen del potenciómetro digital y el cuarto es la señal que sale del DAC del microcontrolador), y los puertos de entrada *VCC* y *GND*.

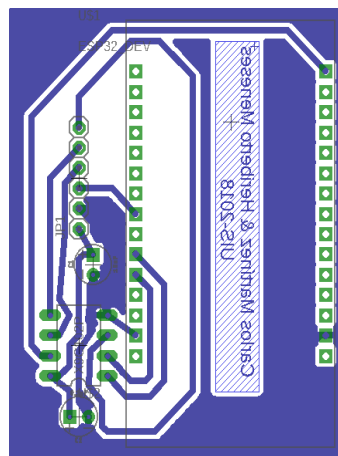


Figura 45: PCB para el módulo de bifurcaciones

En la Figura 47, se muestra el resultado final después de ensamblar todos los componentes en su lugar.

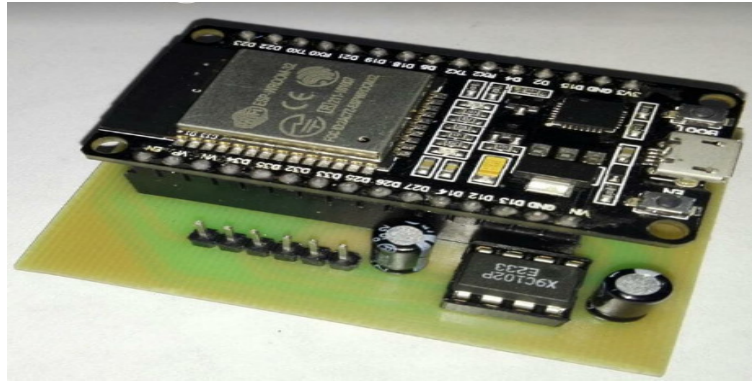


Figura 46: Módulo de Bifurcaciones Diseñado

Un esquema de conexión sugerida para el módulo de Bifurcaciones, en esta se muestra el sistema formado por el microcontrolador y el potenciómetro digital que se conecta al módulo de Chua al potenciómetro dispuesto para la variación de la resistencia, se puede ver el comportamiento de las tensiones de los capacitores mediante el osciloscopio, y si se desea observar el valor de la resistencia, se puede hacer conectando la salida del DAC al osciloscopio en el canal X del mismo.

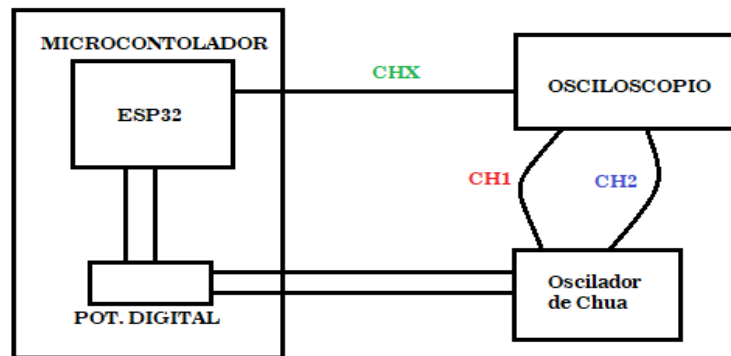


Figura 47: Módulo de Bifurcaciones Diseñado

5.2.3. Caracterización del Módulo de Bifurcaciones

Debido a que el módulo de bifurcaciones tiene un DAC (*Digital to Analog Converter*), es necesario proponer un método para la caracterización de éste módulo, considerando que este prototipo puede ser mejorado con el tiempo.

Primero se utiliza el DAC al valor mínimo de su salida, se hace un barrido de tensión desde el nivel 0 hasta el nivel 99, correspondiendo con los 100 valores de resistencia del potenciómetro. Una vez tomados estos datos, se hace una regresión lineal para expresar el valor de tensión relacionado al nivel que se esté seleccionando, el resultado de esta regresión se expresa mediante la función $V(N)$, se probó esta ecuación para niveles fuera del rango máximo, para estos el error fue menor al 1 %.

$$V(N) = 0.0122N + 0.0897 \quad (40)$$

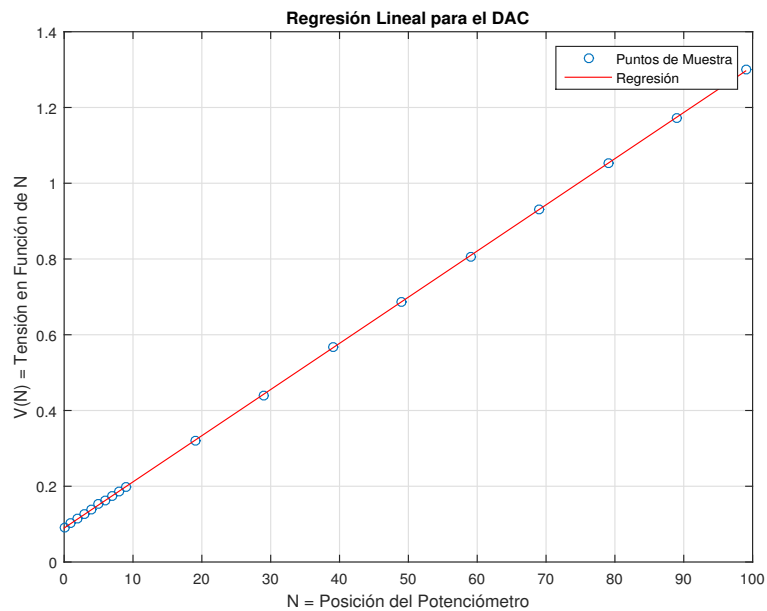


Figura 48: Regresión lineal para la función $V(N)$

De la medición del potenciómetro, se determina que su valor mínimo de resistencia

es 43Ω , este correspondería al nivel cero ($N=0$). Se halla una función de resistencia que depende del nivel, esta expresada por la función $R_p(N)$ en (41). Luego, se despeja N de la ecuación en (40) y se halla una relación para la resistencia en función de la tensión presentada en el diente de sierra, dando como resultado la función $R(V)$ expresada en (42).

$$R_p(N) = 10N + 43 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} R(V) &= 10 \frac{V - 0.0897}{0.0122} + 43 \\ &= 819.7V - 30.52\Omega \end{aligned} \quad (42)$$

Remplazando en la expresión un valor de tensión de 1.3 V, que corresponde al nivel 99, se obtiene una resistencia de 1035.051Ω , produciéndose un error absoluto de 0.76 %. Implementando este módulo, para una señal diente de sierra de $10s$ de periodo, es decir, 0.1 por nivel de tensión, se obtienen las gráficas de la Figura 49 y 50 como respuestas temporales a la variación de la resistencia contra la tensión en los capacitores 1 y 2 respectivamente, siendo la señal azul la salida del módulo de bifurcaciones y la señal amarilla la respuesta temporal de la tensión medida.

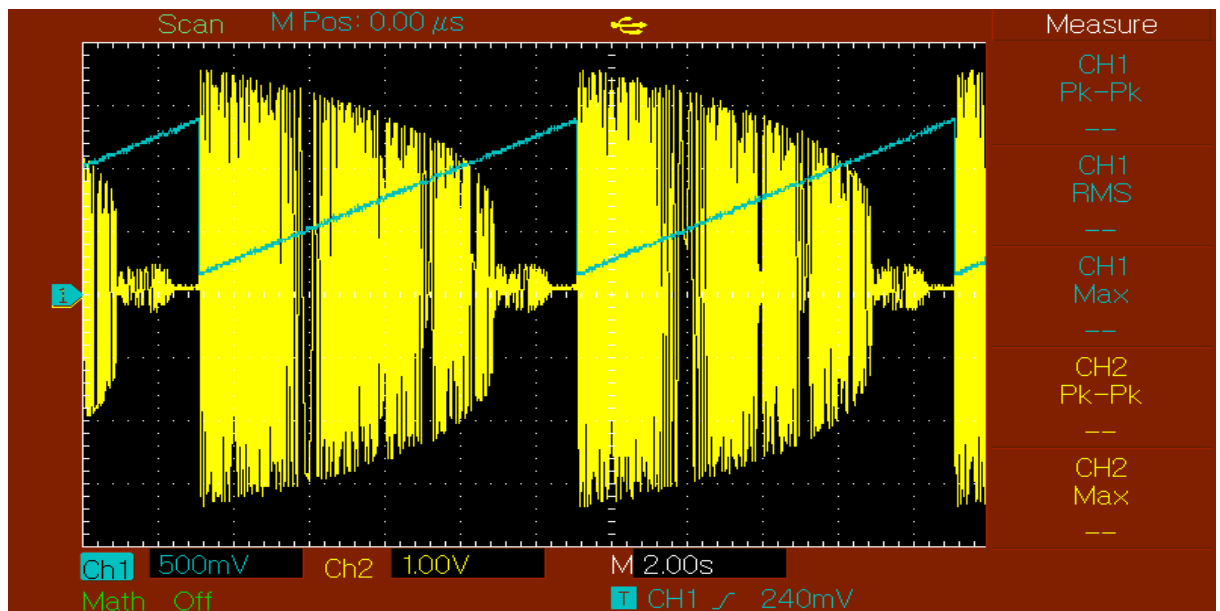


Figura 49: Respuesta temporal ante la variación de la resistencia para el capacitor 1.

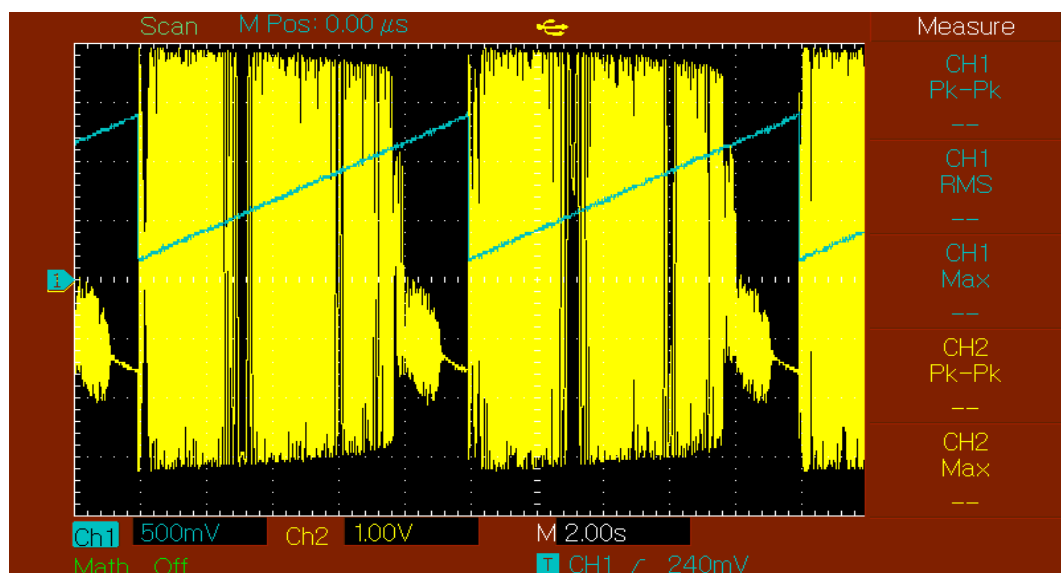


Figura 50: Respuesta temporal ante la variación de la resistencia para el capacitor 2.

Quando se usa el modo XY del osciloscopio, es posible apreciar el diagrama de bifurcación en todo su esplendor, tanto para el capacitor 1(Figura 51) como para el capacitor 2 (Figura 52), en el eje del canal 1 se representa la variación de resistencia y en el eje del canal 2 se muestra la tensión respectiva.

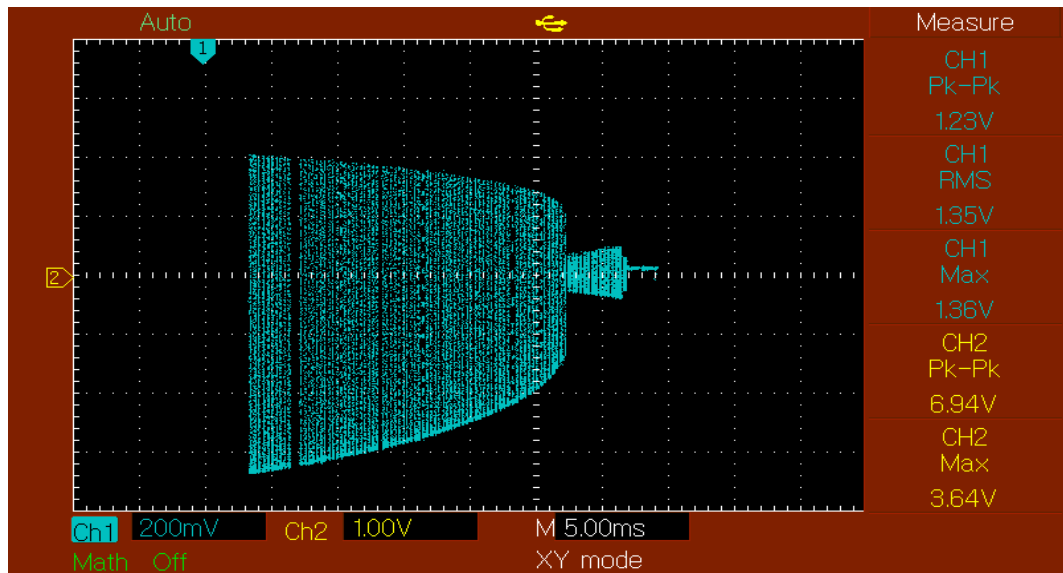


Figura 51: Gráfica de bifurcación para la tensión del capacitor 1.

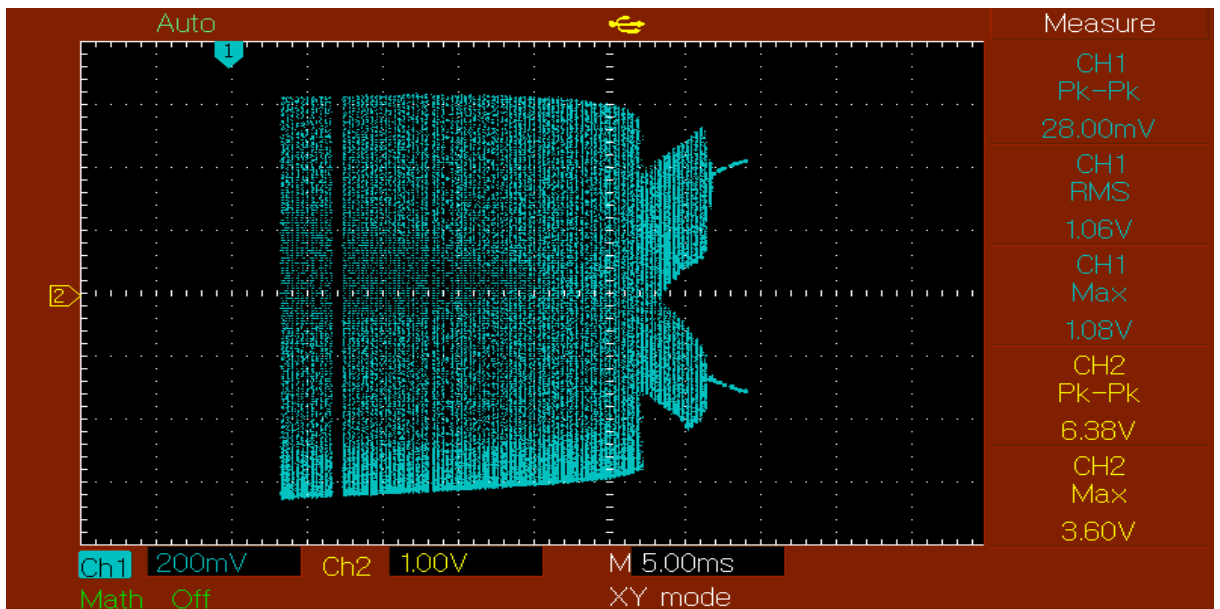


Figura 52: Gráfica de bifurcación para la tensión del capacitor 2.

5.3. GUÍAS DE LABORATORIO

Después de la caracterización y análisis de los diferentes módulos se ve la necesidad de crear unas guías básicas que incluyan de manera practica los conceptos relacionados a sistemas lineales, sistemas no lineales, bifurcaciones y finalmente caos, el laboratorio conformado por estas guías tiene como nombre 'Laboratorio de Sistemas Caóticos', a continuación se listan los nombres de las guías individualmente y se da una breve descripción de las mismas. Éstas pueden ser consultadas a partir del ANEXO 5.

- **Eventos oscilatorios** Debido a que el circuito disponible presenta un comportamiento de tipo oscilatorio, es necesario profundizar en teoría de los circuitos osciladores, se tratan osciladores tipo LC de forma teórica, RLC mediante simulaciones y se sientan las bases para el análisis lineal de circuitos a partir de sus valores propios.
- **Sistemas no lineales** Se introduce el Diodo de Chua, se muestran los pasos necesarios para caracterizarlo y se muestra el por qué de su comportamiento lineal.
- **Bifurcaciones** Se evidencia como en un circuito de segundo orden es posible presenciar el cambio de la topología de los puntos fijos y el plano de fase debido a la incorporación de un componente no lineal, se utiliza el módulo de bifurcaciones producto de este trabajo de grado.
- **Introducción al Caos** Se utiliza el módulo de Chua para explicar algunos fenómenos relacionados al caos, donde es necesario comprender la influencia de los pequeños cambios en las condiciones iniciales en el comportamiento de un sistema en términos de su estabilidad.

5.4. PROPUESTA DE UN PROTOTIPO DE CAJA PARA EL MÓDULO DE CHUA

Utilizando el Software de diseño CAD, *SolidWorks 2012* se diseñó una caja que contendrá el circuito oscilador de Chua de tal forma que facilite su manipulación al momento de alimentarlo y al tomar medidas con el osciloscopio. Esta propuesta se muestra en la Figura 53, disponible un diagrama de sus medidas en el ANEXO 5.

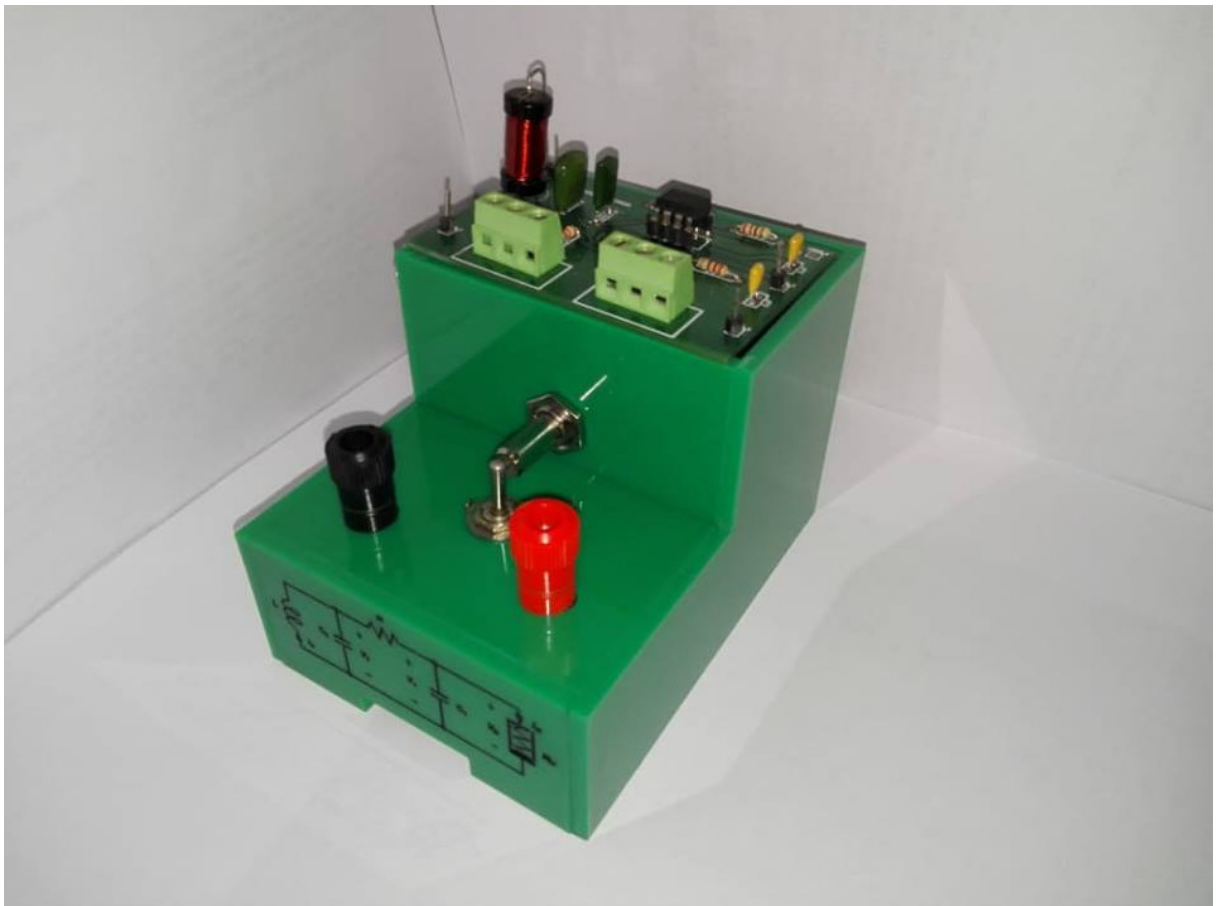


Figura 53: Foto de la caja propuesta para el módulo oscilador de Chua

6. CONCLUSIONES

- Fue posible realizar una caracterización cualitativa y cuantitativa del módulo (Ver capítulo 5) de Chua mediante procedimientos sencillos fácilmente replicables en el cual se puedan mostrar características de sistemas lineales, sistemas no lineales, bifurcaciones y caos.
- Gracias a los componentes disponibles en el mercado local es posible realizar un espectro de bifurcaciones completamente práctico y en tiempo real que permite profundizar en el entendimiento de este fenómeno(Ver capítulo 5.2.3).
- Las guías de laboratorio resultado de este proyecto permiten una aproximación práctica a un tema que suele abordarse de manera teórica.
- Se encontró una relación de los intervalos de funcionamiento para el diodo de Chua que depende de las resistencias que lo componen(Ver ecuación 37), la cual fue corroborada mediante simulación circuital.
- Debido a un error de sincronización de las tensiones del transmisor y el receptor en el módulo de comunicaciones diseñado en el proyecto de grado 'ANÁLISIS Y EXPERIMENTOS CON UN OSCILADOR DE CHUA' hecho en la Universidad Industrial de Santander, no es posible adecuar éste módulo pues ello implicaría realizarlo una vez más.

7. RECOMENDACIONES

Como recomendaciones los autores sugieren que se revisen las referencias [13], [14] y [12] en las cuales se observan aplicaciones del circuito oscilador de Chua con el fin de que se puedan realizar nuevas incursiones en el tema de Caos en este circuito.

De igual forma se sugiere una adaptación curricular de la electiva 'Control en espacio de estados' en la que se incluya el uso de este módulo, así como de las guías producidas por este proyecto y el mismo documento resultado de éste.

REFERENCIAS

- [1] LORENZ, Edward. Deterministic non-periodic flows. Journal of Atmospheric Science, Vol.20. 1963. p. 130-141.
- [2] SMITH, Leonard. Chaos, A Very Short Introduction. Oxford University Press. 2007.
- [3] MATSUMOTO, T. A chaotic attractor from Chua's circuit. IEEE Trans. Circuits Syst. Vol. CAS-31 Dec. 1984. p. 1055-1058.
- [4] ANZUREZ, Juan; PADILLA, José y CUEVAS, Omar. Estabilidad de Sistemas No-lineales: Sistema de Nivel de Líquidos de Dos Tanques Interconectados. REVISTA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y COMPUTACIÓN. Vol.5 No.2. DICIEMBRE 2008.
- [5] SALGADO, Mario; YUZ, Juan y ROJAS, Ricardo. ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES. Departamento de Electrónica Universidad Técnica Federico Santa María Valparaíso. CHILE. 2014
- [6] MCLACHLAN, N. W. ORDINARY NON LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN ENGINEERING AND PHYSICAL SCIENCES. Oxford at the Clarendon Press. 1950. p. 9.
- [7] STROGATZ, Steven. Non Linear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. Perseus Books. 1994
- [8] ZILL, Dennis. Matemática Avanzada para Ingenierías. Vol 1. McGrawHill. 2011. p. 17.
- [9] FREEDMAN, I. Deterministic Mathematical Models in Population Ecology. Pure and Applied Mathematics. 1980. p. 33.

- [10] KENNEDY, Michael. Three Steps to Chaos – Part I: Evolution. IEEE Transactions on circuits and systems – I: Fundamental Theory and Applications, Vol 40. October 1993. p. 640 – 656.
- [11] KENNEDY, Michael. Three Steps to Chaos – Part II: A Chua’s Circuit Primer. IEEE Transactions on circuits and systems – I: Fundamental Theory and Applications, Vol 40. October 1993. p. 657 – 674.
- [12] MULUKUTLA, Mahesh y AISSI, Cherif. Implementation of the Chua’s circuit and its applications. University of Louisiana at Lafayette. 2002.
- [13] GUOZHENG, Li. y BO, Zhang. Sensorless Control of PMSM Using Chua’s Circuit Based on Sliding Mode Observer. IEEE 8th International Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC-ECCE Asia). 2016
- [14] GUOZHENG, Li. y BO, Zhang. Novel Weak Signal Detection Method via Chaotic Synchronization Using Chua’s Circuit. IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL. 64, NO. 3, MARCH 2017.
- [15] KAPLÚN, Mario. Una Pedagogía De La Comunicación. Vol 1 Ediciones De La Torre. 1998.p.12.
- [16] SPARROW, Colin. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors. King’s College University of Cambridge. Springer-Verlag New York Inc, VOL 41.1982.
- [17] Texas Instruments. “TL082 Wide Bandwidth Dual JFET Input Operational Amplifier”, datasheet TL082. Apr. 1998 [Revised Apr. 2013].
- [18] MEJÍA, Juan y GÓMEZ, Ricardo. ANÁLISIS Y EXPERIMENTOS CON UN OSCILADOR DE CHUA. Universidad Industrial De Santander. 2015.
- [19] Espressif Systems. “ESP-WROOM-32 Datasheet”, datasheet ESP-WROOM-32. September.2017.V2.1.

- [20] RENESAS." Digitally Controlled Potentiometer (XDCP™)", datasheet FN8222. July.2009[Revised 3.00].
- [21] KILIC, Recai. A Practical Guide For Studying Chua's Circuit. World Scientific Series on Non-Linear Science. Series A. Vol 71. Chapter 7.
- [22] DISÁBATO, Ricardo. Manejo del Multímetro o Tester Digital. [Consultado Feb.2018.]
- [23] UNIT-T, "Osciloscopio Digital MANUAL DE OPERACIÓN ", SERIES UTD-2000EX. 2008.
- [24] GANDHI, Gauruv; MUTHUSWAMY, Bharathwaj y TAMAS, Roska. Chua's Circuit for High School Students. University of California, Bekerley. Nonlinear Electronics Laboratory.
- [25] JINLONG, Li et Al. A New Butterfly Attractor Based on Chua's Circuit And its Application in Security Communication.

ANEXOS

ANEXO A

```
1 - clear all; close all; clc %Limpia todas las figuras, variables y la ventana
2 - %de comandos
3 - %Solución de la ecuación diferencial
4 - [t,Y] = ode45(@ (t,Y) MasaR(t,Y,5),[0:0.01:10],[1 1]);
5 -
6 - %Se crean dos matrices para todos los valores de x y y de interés
7 -
8 - y1 = linspace(-0.5,0.5,10);
9 - y2 = linspace(-5,5,10);
10 - [x,y] = meshgrid(y1,y2);
11 - size(x)
12 - size(y)
13 - |
14 - %Se definen los vectores que contienen las derivadas
15 - %Se pre localizan u y v para ahorrar tiempo de cómputo.
16 - u = zeros(size(x));
17 - v = zeros(size(x));
18 - % Mediante el ciclo for, se computan las derivadas para cada valor de
19 - % (y1, y2)
20 - t=0;%Se desean las derivadas para cada tiempo inicial
21 - for i = 1:numel(x)
22 -     Yprime = MasaR(t,[x(i); y(i)],100);
23 -     u(i) = Yprime(1);
24 -     v(i) = Yprime(2);
25 - end
26 -
27 - %Se grafica el campo vectorial correspondiente al sistema
28 - P=quiver(x,y,u,v,0.5);%0.5 es la longitud del vector
29 - set(P,'MaxHeadSize',0.01);%Se configura el tamaño de la cabeza de los vectores
30 - xlabel('x = Posición');%Etiqueta para el eje x
31 - ylabel('v = Velocidad');%Etiqueta para el eje y
32 -
33 -
34 - %Se pre localiza el vector pl
35 - pl=ones(1,5);
36 - %Se grafican las trayectorias
37 - hold on
38 - for Mas = [0.1 0.2 0.3 0.4 0.5]
39 -     [ts,ys] = ode45(@ (t,Y) MasaR(t,Y,100),[0:0.01:10],[Mas Mas]);
40 -     pl(Mas.*10)=plot(ys(:,1),ys(:,2));
41 - end
42 -
43 - %Leyenda de la gráfica
44 - legend ('Vectores', 'C.I.=0.1,0.1','C.I.=0.2,0.2','C.I.=0.3,0.3','C.I.=0.4,0.4','C.I.=0.5,0.5')
45 - grid on;
```

Figura 54: Código utilizado para mostrar los retratos de fase, depende del sistema que se desee simular.

ANEXO B

```

1 - x0=[0 1 0]; %valores iniciales
2 - tspan=[0 100];
3 - p=[10 8/3 24.06]; %parámetros
4 - [t,x]=ode45(@lorentz,tspan,x0,[],p);
5 - figure
6 - plot(x(:,1),x(:,3),'r')
7 - xlabel('x')
8 - ylabel('z');
9 - title('Atractor de Lorenz')
10
11 - figure
12 - subplot(3,1,1)
13 - plot(t,x(:,1),'r')
14 - ylabel('x');
15 - subplot(3,1,2)
16 - plot(t,x(:,2),'r')
17 - ylabel('y');
18 - subplot(3,1,3)
19 - plot(t,x(:,3),'r')
20 - ylabel('z');
21 - xlabel('t')
22 - %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
23 - hold on
24 - x0=[0 1 0]; %valores iniciales
25 - tspan=[0 100];
26 - p=[10 8/3 25]; %parámetros
27 - [t,x]=ode45(@lorentz,tspan,x0,[],p); % llama la función lorentz
28 - figure
29 - plot(x(:,1),x(:,3),'b') %gráfica x vs z
30 - xlabel('x')
31 - ylabel('z');
32 - title('Atractor de Lorenz')
33 - %%%
34 -
35 - hold on
36 - figure
37 - subplot(3,1,1)
38 - plot(t,x(:,1))%gráfica t vs x
39 - ylabel('x');
40 - subplot(3,1,2)
41 - plot(t,x(:,2)) %gráfica t vs y
42 - ylabel('y');
43 - subplot(3,1,3)
44 - plot(t,x(:,3))%gráfica t vs z
45 - ylabel('z');
46 - xlabel('t')
47 -
48 -
49 - function fg=lorentz(t,x,p)
50 - %x(1) es x, x(2) es y y x(3) es z
51 - % p(1) es sigma, p(2) es beta y p(3) es rho
52 - fg=[-p(1)*x(1)+p(1)*x(2); p(3)*x(1)-x(2)-x(1)*x(3); -p(2)*x(3)+x(1)*x(2)];
53 - end

```

Figura 55: Código utilizado para simular las ecuaciones de Lorenz

ANEXO C

```
1 function Salida = Chua(E,in,R)
2 %Definición Parámetros del Circuito
3 - C1 = 10*10^(-9);
4 - C2 = 100*10^(-9);
5 - %R = 1800;
6 - G = 1/R;
7 - L=18e-3;
8 - R1=22e3;
9 - R2=220;
10 - R3=3.3e3;
11 - R4=2.2e3;
12 - VEE=-5;
13 - VCC=5;
14 %Definición Variables
15 - x = in(1); %v_1
16 - y = in(2); %v_2
17 - z = in(3); %i_L
18 - vcl=x;
19 %Fin Definición Variables
20
21 %Diodo de Chua
22 - vr=vcl;
23 - A1=(R3+R1)/R3;
24 - A2=(R2+R4)/R4;
26 %Tensiones de Saturación
27 - Ep=VCC*0.8;
28 - En=VEE*0.8;
29 - vo1=vr*A1;
30 - vo2=vr*A2;
31
32 - if abs(vr)<=Ep/A1 && abs(vr)<=Ep/A2
33 -     il=-vr*(R3+R4)/(R3*R4);
34 - elseif vr>=Ep/A1 && vr<=Ep/A2 %====Región Media====%
35 -     il=vr*(R4-R1)/(R1*R4)-Ep/R1;
36 - elseif vr<=En/A1 && vr>=En/A2
37 -     il=vr*(R4-R1)/(R1*R4)-En/R1;
38 - elseif vr>=Ep/A2 %====Región Externa====%
39 -     il=vr*(R1+R2)/(R1*R2)-Ep*(R1+R2)/(R1*R2);
40 - else
41 -     il=vr*(R1+R2)/(R1*R2)-En*(R1+R2)/(R1*R2);
42 - end
43 %Fin Diodo de Chua
44 %Ecuación Oscilador de Chua
45 - xdot = (1/C1)*(G*(y-x)-il);
46 - ydot = (1/C2)*(G*(x-y)+z);
47 - zdot = -(1/L)*y;
48 %Ecuación Oscilador de Chua
49 - Salida = [xdot ydot zdot]';
50 - end
```

Figura 56: Código utilizado para describir el circuito oscilador de Chua.

ANEXO D

```
1 function Var=Simula(Re)
2 - R=120;
3 - [t,y] = ode45(@(t,y) Chua(t,y,R), [0 0.08], [0.5 0 0]);
4 %Atractor
5 - Var=y;
6 - plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3));
7 - grid on
8
9 - figure
10
11 %Tensión en el Capacitor 1
12 - subplot(3,1,1)
13 - plot(t,y(:,1));
14 - grid on
15
16 %Tensión en el Capacitor 2
17 - subplot(3,1,2)
18 - plot(t,y(:,2), 'r');
19 - grid on
20
21 %Tensión en el Inductor
22 - subplot(3,1,3)
23 - plot(t,y(:,3), '-k');
24 - grid on
25
26 %====Diagramas de Fase====%
27 - figure
28 %Tensión V2 con relación a V1
29 - subplot(2,1,1)
30 - plot(y(:,1),y(:,2), '-r');
31 - grid on
32 %Corriente I1 con relación a V1
33 - subplot(2,1,2)
34 - plot(y(:,1),y(:,3), '-k');
35
36 - grid on
37 - end
```

Figura 57: Código utilizado para simular el circuito de Chua.

ANEXO E

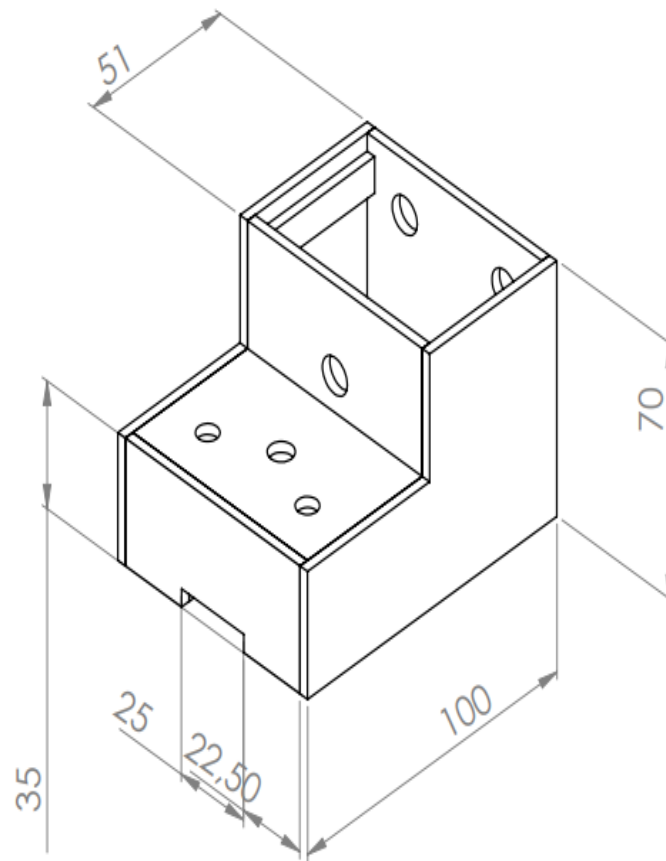
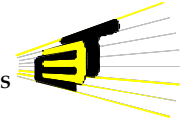


Figura 58: Medidas para el prototipo propuesto

ANEXO F

A continuación se muestran las guías de laboratorio.



Laboratorio para el entendimiento del Caos

Guía # 1 “Eventos oscilatorios”

I. INTRODUCCIÓN

Los eventos oscilatorios son comportamientos que tienen un patrón de tipo periódico. En la actualidad, muchos de los procesos que se llevan a cabo en situaciones prácticas describen este comportamiento, es el caso de reacciones químicas, sistemas mecánicos, entre otros [1].

Con el fin de facilitar el estudio de estos sistemas se plantea un símil de estos usando circuitos sencillos con elementos pasivos, de tal forma que se estudien diferentes características de estos.

II. OBJETIVOS

- Estudiar qué se entiende por oscilador y sus características.
- Evidenciar las principales cualidades de un oscilador mediante simulaciones numéricas.
- Modificar parámetros propios de sistemas osciladores y verificar su respuesta ante estos cambios.

III. EQUIPOS Y MATERIALES

- Software para simulación circuital, se sugiere OrCAD Capture CIS de Cadence. Además de software de simulación numérica como Matlab, Scilab, Octave etc.

IV. ACTIVIDADES PREVIAS DE LABORATORIO

1. Análisis previo

- Encuentre las ecuaciones diferenciales que describen los circuitos que se tratarán en la

guía, a partir de ellas extraiga las ecuaciones de estado (En términos de la tensión del capacitor y de la corriente de la inductancia).

- Revise previamente el concepto de planos de fase y determinismo en el análisis de sistemas dinámicos y cómo se relacionan con los circuitos tratados.

2. Simulación numérica de los circuitos.

Con el fin de agilizar el desarrollo de la práctica realice previamente la simulación numérica de las ecuaciones encontradas, puede utilizar herramientas como ode45 en Matlab.

V. ACTIVIDADES DE LABORATORIO

1. Circuito LC

- a) Se considera un circuito oscilador con componentes pasivos como se aprecia en la Figura 1.

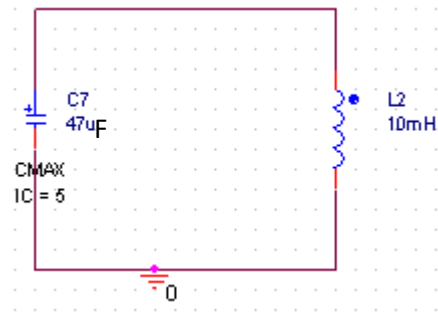
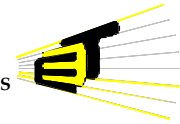


Figura 1. Circuito LC

En un laboratorio para una situación real no es posible implementar capacitancias e inductancias ideales, debido a esto, para la simulación se sugiere



Laboratorio para el entendimiento del Caos

Guía # 1 “Eventos oscilatorios”

colocar una resistencia de 1 Ohm que modela las pérdidas que se pueden presentar en el laboratorio, como se muestra en la Figura 2.

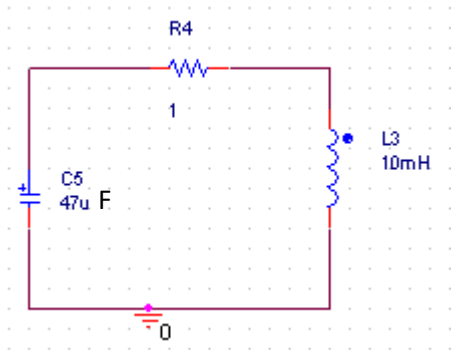


Figura 2. Circuito RLC con R4 muy pequeña.

Por conveniencia, se modificará el circuito por uno como se muestra en la Figura 3.

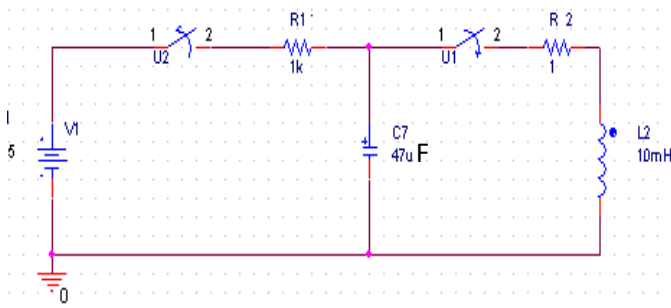


Figura 3. Circuito RLC

Esto debido a que se desea simular la carga del capacitor junto con su respuesta posterior a activar los interruptores.

b) Visualice las respuestas temporales de tensión y corriente (medida indirectamente a través de la tensión de la resistencia de 1 Ohm), luego obtenga la gráfica de tensión del capacitor contra la corriente del inductor.

Nota: Esto correspondería a visualizar la respuesta temporal del sistema en el modo YT de un

osciloscopio, y luego a utilizar el modo XY para obtener un diagrama de fase.

- Tome los datos que sean necesarios en modo XY y modo YT de acuerdo con su consulta previa.
- Cambie el valor de la capacitancia del circuito en la Figura 3, repitiendo los literales b) y c) Utilice valores de 10 uF, 47 uF, 100 uF, 470 uF, y 100 uF.
- Responda las siguientes preguntas:

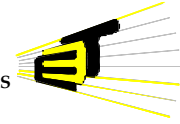
- ¿Qué error absoluto hay entre las medidas simuladas y las halladas mediante las ecuaciones?
- Después de realizar una variación de la capacitancia, ¿Cómo se relaciona ésta con el comportamiento dinámico del circuito? Tenga en cuenta las ecuaciones diferenciales encontradas en las actividades previas.

Nota: Esto sería, encontrar las constantes temporales de cada circuito, así como tiempos pico y tiempo de extinción.

- ¿Qué relación existen entre las gráficas YX y los planos de fase?

2. Circuito RLC (Serie)

a) Monte el circuito que se observa en la Figura 4, el cual es similar al circuito anteriormente trabajado.



Laboratorio para el entendimiento del Caos

Guía # 1 “Eventos oscilatorios”

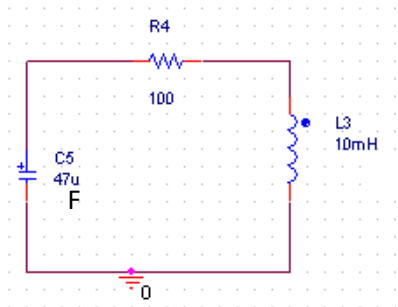


Figura 4. Circuito RLC serie

- Visualice el comportamiento de la tensión del capacitor y de corriente en la bobina, de igual forma como se hizo en el literal b) del numeral anterior.
- Tome los datos que le sean necesarios para los análisis posteriores a fin de que pueda realizar contrastes con los cálculos de las ecuaciones de las actividades previas.
- Cambie el valor de la capacitancia manteniendo constante el de la resistencia en el circuito de la Figura 4, repitiendo los procedimientos de los literales b) y c). Utilice valores de 10 uF, 47 uF, 100 uF, 470 uF, y 100 uF.
- Cambie el valor de la resistencia manteniendo constante el de capacitancia en 100 uF en el circuito de la Figura 4, repitiendo los procedimientos de los literales b) y c). Utilice valores de 10, 50, 100 y 200 [Ω].

- ¿Qué error absoluto hay entre las medidas simuladas y las halladas mediante ecuaciones?
- Después de realizar una variación de los parámetros indicados (de Capacitancia y Resistencia), ¿Cómo se relaciona esta variación con el comportamiento dinámico del

circuito? Tenga en cuenta las ecuaciones diferenciales encontradas en las actividades previas.

- Superponga los diagramas de fase obtenidos mediante simulación en este numeral y el anterior para valores iguales de capacitancia, ¿Qué diferencia puede apreciar al hacer esta comparación? ¿Cómo se relaciona con las ecuaciones diferenciales de ambos circuitos?

3. Circuito RLC (Paralelo)

Considere el circuito que se muestra en la Figura 5.

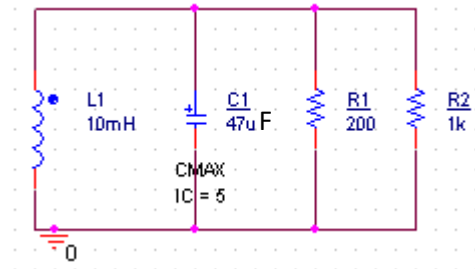
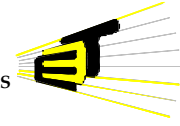


Figura 5. Circuito RLC paralelo

Aunque se podría considerar una resistencia equivalente entre R1 y R2, la intención es considerar el efecto de modificar esta resistencia (el paralelo); evidentemente, cuando R2 sea mayor que R1, los valores de resistencia tenderán a ser R1, mientras que si R2 es menor que R1 el valor de resistencia total será aproximadamente R2.

- Realice variaciones para R2 de la siguiente manera, $R2 > R1$, $R2 = R1$, $R2 < R1$. ¿Cómo se afecta la respuesta dinámica del sistema, explique cómo se ve afectada la frecuencia natural del sistema?



Laboratorio para el entendimiento del Caos

Guía # 1 “Eventos oscilatorios”

- Para un valor constante de $R_2=R_1=200$ Ohm, varíe la capacitancia C_1 , en valores como $10\mu\text{F}$, $100\mu\text{F}$ y $1000\mu\text{F}$. ¿Cómo se afecta la respuesta dinámica del sistema, explique cómo se ve afectada la frecuencia natural del sistema?
- Contraste los resultados obtenidos de las simulaciones circuitales con las halladas mediante la solución numérica de sus ecuaciones.

4. Circuito de un caso especial de oscilador.

Considere el nuevo circuito Oscilador que se muestra en la Figura 6.

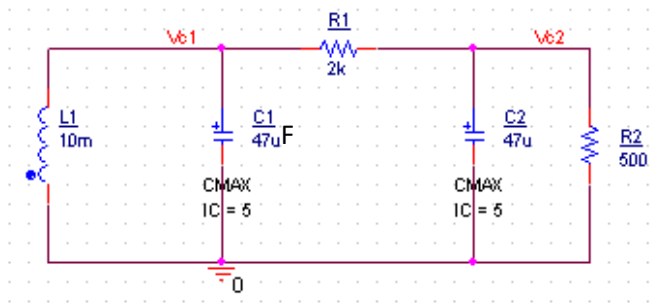


Figura 6.

Fije para ambos capacitores (C_1 y C_2) una tensión inicial de 5 V. Observe el comportamiento de la tensión de ambos capacitores.

- Usando el modo XY visualice la gráfica de V_{C1} y V_{C2} en el simulador.
- Responda:
 - a) ¿Qué comportamiento dinámico puede apreciar en los voltajes de los capacitores?, ¿Es similar?
 - b) Al contrastar las tensiones en el modo XY ¿qué comportamiento puede observar del sistema? ¿Corresponde con el de las simulaciones?
- Cambie el valor del capacitor C_2 a $10\mu\text{F}$ y conserve el valor del capacitor C_1 como $47\mu\text{F}$,

responda las mismas preguntas de los literales anteriores.

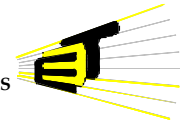
- Cambie ahora el valor de C_2 por $100\mu\text{F}$ y observe lo que sucede con relación a los literales a) y b).
- Cambie el valor de C_1 por $10\mu\text{F}$ y mantenga constante el valor de C_2 en $47\mu\text{F}$; observe lo que sucede con relación a los literales a) y b).
- Cambie el valor de C_1 por $100\mu\text{F}$ y mantenga constante el valor de C_2 en $47\mu\text{F}$; observe lo que sucede con relación a los literales a) y b).
- Finalmente analice los procedimientos anteriores y contrástelos con los resultados que se obtienen al realizar las mismas variaciones con las ecuaciones diferenciales que describen el circuito.

VI. ACTIVIDADES DE CIERRE

Posterior a la toma de los datos que considere necesarios para el informe de este laboratorio, y de responder las preguntas para cada actividad; saque sus respectivas conclusiones entre las ecuaciones diferenciales de los distintos sistemas y su comportamiento práctico-simulado. Relaciónelo con el significado de **Determinismo**.

VII. REFERENCIAS

- [1] S. H. Strogatz. “*Non Linear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*”. Perseus Books. 1994
- [2] MARTINEZ, Carlos y MENESES, Heriberto. Adecuación y Caracterización para un prototipo de laboratorio que verifica los efectos del caos determinístico. Universidad Industrial de Santander. 2018.



Laboratorio para el entendimiento del Caos

Guía # 2 “Sistemas no lineales”

I. INTRODUCCIÓN

Un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales es aquel para el cual su variable dependiente o sus derivadas están elevadas a una potencia mayor a 1 o son argumentos de otras funciones [1-2].

El diodo de Chua (Ver Figura 1) es un elemento no lineal que hace las veces de una resistencia cuyo valor depende de la tensión en sus terminales[3]. Debido a su fácil implementación y a que las ecuaciones que describen su comportamiento son sencillas de inferir, se convierte en uno de los elementos más apropiados para comprender el fenómeno de la *no linealidad*.

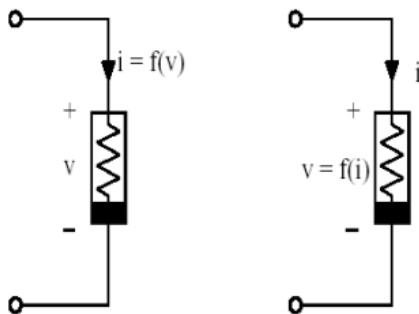


Figura 1. Símbolo del Diodo de Chua, $f(v)$ y $f(i)$ son funciones no lineales descritas a trozos [5].

II. OBJETIVOS

- Estudiar y evidenciar qué es un sistema no lineal y sus características.
- Obtener ecuaciones diferenciales o algebraicas no lineales que describen un fenómeno físico particular y contrastarlas con el sistema práctico del que se obtuvo el modelo.
- Mostrar el significado práctico de la no linealidad y sus implicaciones en los circuitos.

III. EQUIPOS Y MATERIALES

- Amplificador Operacional TL082 o equivalente (1)
- Resistencias de 220 Ω (2), 22 k Ω (2), 3.3 k Ω (1), 2.2 k Ω (1).
- Resistencia tipo SHUNT 1 Ohm 5 W.
- Fuente de DC regulada de laboratorio.
- Osciloscopio mínimo de dos canales .
- Multímetro.
- Software para simulación circuital, se sugiere OrCAD Capture CIS de Cadence. Además de software de simulación numérica como Matlab, Scilab, Octave etc.

IV. ACTIVIDADES PREVIAS DE LABORATORIO

1. Simulaciones numéricas

Para la simulación del circuito en la Figura 2 use los valores reales de los elementos pasivos que serán usados en el laboratorio.

2. Análisis previo

- Encuentre las ecuaciones no lineales que describen al circuito que se muestra en la Figura 2. Obtenga su respuesta en el tiempo mediante software de simulación numérica (Octave, Matlab, Scilab) para un tiempo de 80 ms.
- Consulte sobre el diodo de Chua o Memristor de Chua, su composición y bloques funcionales.

Laboratorio para el entendimiento del Caos

Guía # 2 “Sistemas no lineales”

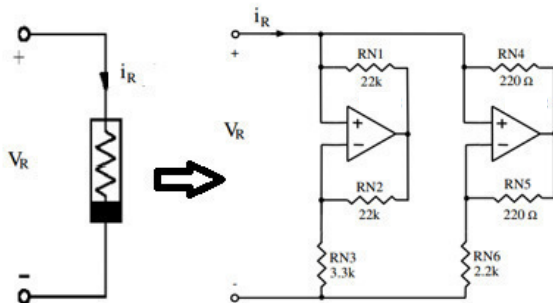


Figura 2. Circuito con amplificadores operacionales que simbolizan un Diodo Chua.

3. Montaje de los circuitos

Con el fin de agilizar el desarrollo de la práctica realice previamente el montaje en protoboard del circuito de la Figura 3.

V. ACTIVIDADES DE LABORATORIO

Para cada una de las actividades a realizar, tome evidencia gráfica de su realización (Fotos o capturas del osciloscopio).

Una vez se tenga montado el circuito en protoboard, conecte a éste una fuente generadora de señal senoidal en serie con una resistencia de 1 Ohm de al menos 5W de potencia, como se muestra en la Figura 3 para tomar registro de la corriente de Chua.

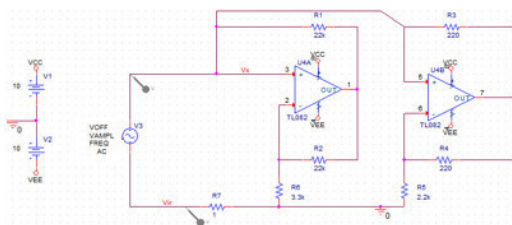
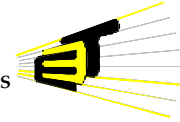


Figura 3. Circuito para implementar en el laboratorio.

- Con las fuentes de alimentación V1 y V2, configuradas como se muestra en la Figura 3, establezca una tensión de 10 y -10 [V] respectivamente.
- Conecte la fuente generadora de señal senoidal entre las terminales Vf y tierra del circuito del Diodo Chua. Genere una señal de 200 [mVpp] y una frecuencia de 1 [kHz].
- Tome la corriente de forma indirecta a través de la resistencia de 1Ohm conectada a la fuente con la sonda del canal 2 del osciloscopio.
- Tome la tensión del Diodo Chua en su terminal positiva con la sonda del canal 1 del osciloscopio.
- Realice una gráfica en la que contraste la tensión del diodo con relación a su corriente en el modo XY y responda:
 - a) ¿Cuál es la pendiente de la región lineal observada?
 - b) ¿A qué parámetro del Diodo Chua corresponde esa pendiente?
 - c) ¿Corresponde ese valor al parámetro hallado con el análisis teórico? ¿Y con el simulado?
 - d) Halle los errores absolutos entre el análisis teórico (presentado en el trabajo de grado [5]), práctico (mediante el uso del osciloscopio) y simulado (realizado mediante orCAD).

Realice el procedimiento anterior para una tensión de 2 [Vpp] y 8 [Vpp] a una frecuencia de 1 [kHz] y dé solución a las mismas preguntas de los literales a),b),c),d) para cada uno de estos casos.



Laboratorio para el entendimiento del Caos Guía # 2 “Sistemas no lineales”

VI. ACTIVIDADES DE CIERRE

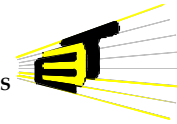
Posterior a la toma de los datos que considere necesarios para el informe de este laboratorio, y de responder las preguntas para cada actividad; concluya de tal forma que use la información que responda las siguientes preguntas:

- a) De acuerdo con las experiencias realizadas, describa brevemente la relación no lineal que caracteriza la curva tensión-corriente en un Diodo de Chua.
- b) Exponga otros modelos que aparezcan en la literatura para el Diodo de Chua, ¿Qué diferencias hay con el presentado en la guía?
- c) ¿De qué manera cambia el error absoluto de la tensión y la corriente a medida que va cambiando la tensión de entrada?

VII. REFERENCIAS

- [1] MCLACHLAN, N. W. *Ordinary Non Linear Differential Equations In Engineering And Physical Sciences*. Oxford at the Clarendon Press. 1950. p. 9
- [2] S. H. Strogatz. “*Non Linear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*”. Perseus Books. 1994
- [3] R. Kilic. “*A PRACTICAL GUIDE FOR STUDYING CHUA'S CIRCUITS*”. World Scientific Series on Nonlinear Science. 2010.
- [4] M. P. Kennedy, “Three Steps to Chaos – Part I: Evolution”. *IEEE Transactions on circuits and systems – I: Fundamental Theory and Applications*, vol 40, n|10, pp. 640 – 656, October 1993.

[5] MARTINEZ, Carlos y MENESES, Heriberto. *Adecuación y Caracterización para un prototipo de laboratorio que verifica los efectos del caos determinístico*. Universidad Industrial de Santander. 2018.



Laboratorio para el entendimiento del Caos

Guía # 3 “Bifurcaciones”

I. INTRODUCCIÓN

Los puntos fijos son aquellos en los que para todo sistema $\dot{x} = f(x)$ cumplen que $f(x) = 0$, de igual forma son conocidos como puntos de equilibrio [1]; el estudio de estos puntos permite definir y conocer características de estabilidad alrededor de ellos. Este concepto es útil cuando se tiene un sistema no lineal, pero es posible realizar una linealización de este alrededor de estos puntos [2].

En ciertos sistemas dinámicos, los puntos fijos pueden crearse y destruirse, o cambiar el tipo de su estabilidad dependiendo del valor específico de un parámetro propio del sistema [1]. Este fenómeno es conocido como **bifurcación**.

Las bifurcaciones son importantes pues ofrecen un modelo que permite estudiar inestabilidades que aparecen en un sistema a medida que uno de sus parámetros cambia. Una herramienta que se puede utilizar para apreciar las bifurcaciones es un diagrama de bifurcación, un ejemplo se muestra en la Figura 1, esta es la representación de un mapa logístico en el que X representa la razón entre la población actual y la máxima población posible y r representa la razón de crecimiento de la población.

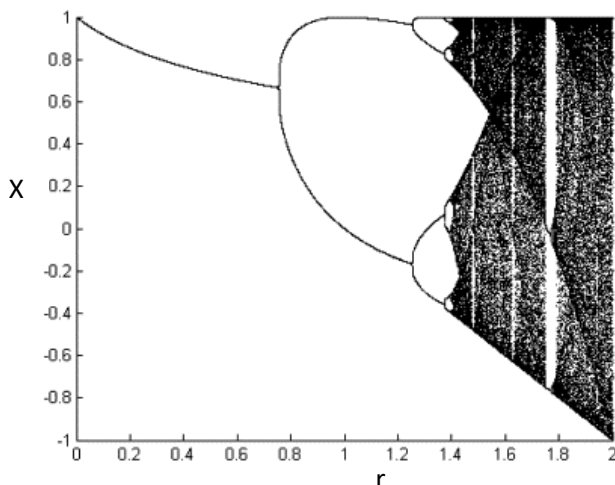


Figura 1. Diagrama de Bifurcaciones[3]

II. OBJETIVOS

- Evidenciar algunos conceptos básicos relacionados a la teoría de bifurcaciones.
- Observar la respuesta de un sistema a la variación de un parámetro de forma que se aprecien bifurcaciones.
- Relacionar el significado de un cambio cuantitativo en el valor de un parámetro del sistema con los cambios cualitativos que se producen en este.

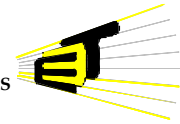
III. EQUIPOS Y MATERIALES

- Amplificador Operacional LM324 o equivalente (1)
- Resistencias de 10 Ω (1), 22 k Ω (2), 3.3 k Ω (1), 2.2 k Ω (1).
- Capacitor de 100 nF no polarizado.
- Inductor 18 mH.
- Potenciómetro 2 k Ω de varias vueltas.
- Fuente de DC regulada de laboratorio.
- Osciloscopio mínimo de dos canales.
- Multímetro.
- Módulo de chua.
- Software para simulación circuital, se sugiere OrCAD Capture CIS de Cadence. Además de software de simulación numérica como Matlab, Scilab, Octave etc.

IV. ACTIVIDADES PREVIAS DE LABORATORIO

1. Simulaciones numéricas

Mediante el uso de la herramienta OrCAD, realice simulaciones temporales (*Time domain*) para los circuitos que serán tratados en la guía. Replique los



Laboratorio para el entendimiento del Caos Guía # 3 “Bifurcaciones”

procedimientos prácticos que se proponen en las guías.

2. Actividades previas

- Encuentre las ecuaciones diferenciales no lineales que describen al circuito (Ver Figura 2) que se tratará en la guía. Descríbalas usando una lógica de funciones lineales a trozos (Una descripción de esto está disponible en [5]).
- Consulte literatura sobre el fenómeno de bifurcaciones y su manifestación en los circuitos eléctricos y electrónicos.
- Revise las características propias del circuito variador de resistencia o módulo de bifurcaciones a fin de que se familiarice con los terminales de salida que éste posee y sobre sus modos de funcionamiento [5].
- Consulte sobre los significados de, puntos de equilibrio y fijos, estabilidad y ciclo límite.
- Encuentre mediante simulación los valores para G_a y G_b , y para E relacionando las Figuras 2 y 3.

circuito de la guía con los elementos descritos en el literal III.

V. ACTIVIDADES DE LABORATORIO

Para cada una de las actividades a realizar tome evidencia gráfica de su realización (Fotos o capturas de pantalla del osciloscopio).

Considere el subcircuito NR que modela al diodo de Chua, el cual corresponde con un arreglo de amplificadores operacionales y resistencias R_1, R_2, R_3, R_4 como se observa enmarcado en la Figura 2, alimente el circuito con ± 15 [V].

- Halle la gráfica que relacione la tensión y la corriente del diodo de Chua, que debe corresponder con la mostrada en la Figura 3. Similar al procedimiento realizado para la guía número 2.
- Compruebe los valores hallados en las actividades previas. G_a y G_b , y para E.
- Considere NR' como el paralelo entre R y NR, responda:

¿Cómo varían G_a y G_b y E en función de R?

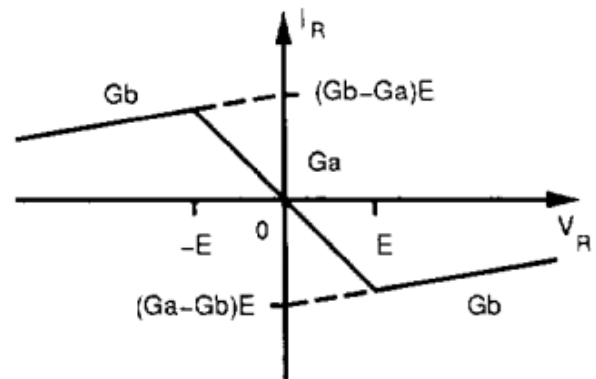


Figura 3. Gráfica de tensión vs corriente del diodo de Chua.

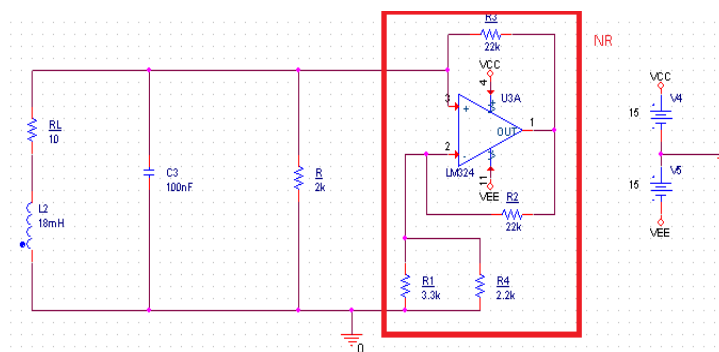
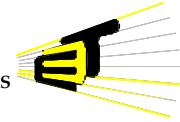


Figura 2. Circuito a trabajar en esta guía. $R_3=R_2=2$ k Ω . $R_1=3.3$ k Ω . $R_4=2.2$ k Ω . $C=100$ nF y $L=18$ mH.

3. Montaje de los circuitos

Con el fin de agilizar el desarrollo de la práctica realice previamente el montaje en protoboard del



Laboratorio para el entendimiento del Caos

Guía # 3 “Bifurcaciones”

A continuación, se analizarán características del circuito mostrado en la Figura 2.

- Con el potenciómetro para un valor de $R = 0$ [Ω]:
 - a) ¿Cuál es el valor de corriente y de tensión para este parámetro?
 - b) Cualitativamente hablando, ¿Qué significan los valores de tensión y de corriente constantes que aparecen en el circuito?

- Incremente el valor de la resistencia R hasta observar que el punto de equilibrio en el origen pasa por una bifurcación, esto significa que su comportamiento cambia de forma (comienza a oscilar).
 - a) ¿A qué valor de resistencia se empiezan a presentar las oscilaciones?
 - b) ¿Qué pasa si se sigue incrementando el valor de R con la respuesta de los estados?
 - c) ¿Dónde se presenta un ciclo límite? ¿ a partir de qué valor de resistencia?
 - d) Realice un diagrama de bifurcaciones tomando como parámetro variable el valor de R, y compárelo con los valores pico de las oscilaciones, tanto de forma positiva como de forma negativa. Tome al menos 10 diferentes valores de tensión y resistencia en donde aprecie todo el fenómeno de interés y graficarlos usando Matlab, una hoja de cálculo u otra herramienta similar.

- Usando el módulo variador de frecuencia, caracterice a qué valor de resistencia

equivale cada salida de tensión, realice esto mediante la configuración de la Figura 4.

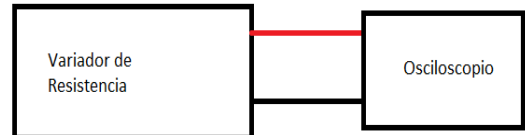


Figura 4 Configuración para caracterizar el variador

Para esto responda:

- a) ¿Qué tipo de señal se aprecia en el osciloscopio?
 - b) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la señal?
 - c) Conectando el multímetro en los pines de salida del variador, relacione valores máximos y mínimos de tensión con resistencia.
- Utilice el módulo del circuito Chua disponible junto con el circuito variador de resistencia, e implemente la configuración de elementos como se ve en la Figura 5, donde CH1 y CH2 corresponden a las entradas del osciloscopio respectivas y el conector para potenciómetro es el puerto que permite extraer el valor de la resistencia que se variará.

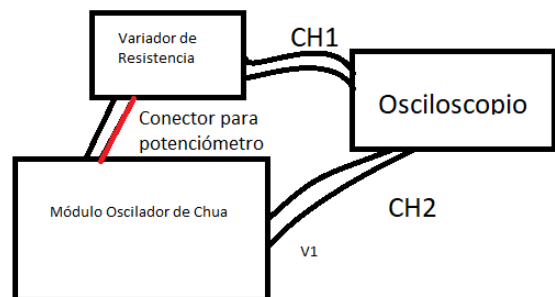
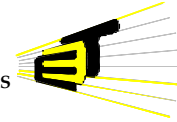


Figura 5 Configuración para variación automática de la resistencia

Observe por aparte las señales de entrada del



Laboratorio para el entendimiento del Caos Guía # 3 “Bifurcaciones”

osciloscopio y note de qué naturaleza son. ¿A qué señal corresponde cada una de las entradas tomadas?

Utilice el modo XY del osciloscopio y configure la variable M, que es la ventana de tiempo en el valor más grande menor a 2 segundos posible.

Nota: La variable M suele ser utilizada como las divisiones de tiempo que usará el osciloscopio, así como la tasa de muestreo a la cual se procesan las señales.

Finalmente seleccione una escala adecuada para cada uno de los ejes y observe, para qué valor en el eje X empiezan a presentarse las bifurcaciones; este valor está dado en volts, y puede relacionarse a la resistencia con la actividad realizada anteriormente.

VI. ACTIVIDADES DE CIERRE

Posterior a la toma de los datos que considere necesarios para el informe de este laboratorio y de responder las preguntas para cada actividad, concluya de tal forma que use esta información para dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Por qué no es posible presenciar bifurcaciones en el circuito RLC normal y sí con el de Chua?
- Relacionado a la simulación, ¿es posible simular las distintas regiones en las que el diodo chua opera como regiones separadas con un valor determinado de resistencia y luego unirlos para obtener los mismos resultados que trabajando con el circuito completo? ¿A qué se debe esto?
- ¿De qué manera cambia el error absoluto de la tensión y la corriente a medida que va cambiando el

valor de la resistencia R tomando como valor teórico los valores simulados?

VII. REFERENCIAS

- [1] S. H. Strogatz. “*Non Linear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*”. Perseus Books. 1994.
- [2] M. P. Kennedy, “Three Steps to Chaos – Part I: Evolution”. IEEE Transactions on circuits and systems – I: Fundamental Theory and Applications, vol 40, n|10, pp. 640 – 656, October 1993
- [3] Z. Yagang & W. Zengping. “Bifurcation criterion of faults in complex nonlinear systems”. Physics Letters A. Elsevier. 2014.
- [4] R. Kilic. “*A Practical Guide For Studying Chua's Circuits*”. World Scientific Series on Nonlinear Science. 2010.
- [5] MARTINEZ, Carlos y MENESES, Heriberto. Adecuación y Caracterización para un prototipo de laboratorio que verifica los efectos del caos determinístico. Universidad Industrial de Santander. 2018.

Laboratorio para el entendimiento del Caos

Guía # 4 “Introducción al Caos”

I. INTRODUCCIÓN

En la guía 3, se aplicaron los conceptos vistos en las guías 1 y 2 sobre linealidad, no linealidad y solución de ecuaciones dinámicas al fenómeno de las bifurcaciones utilizando el concepto de punto fijo, ahora avanzaremos un peldaño más en nuestro camino, llegando a presenciar el caos en un sistema físico.

El caos es un fenómeno que presentan ciertos sistemas, los cuales pueden ser estudiados desde tres puntos de vista importantes: su determinismo, la alta sensibilidad a pequeños cambios en sus condiciones iniciales los cuales producen notables cambios en su dinámica, y su no linealidad[1].

Durante el desarrollo de esta guía se podrán presenciar algunas características del caos, entre ellas, las oscilaciones producidas en sistemas no lineales y las bifurcaciones[2], en la Figura 1 se aprecia el famoso atractor de Lorenz, el caso más representativo de los sistemas caóticos.

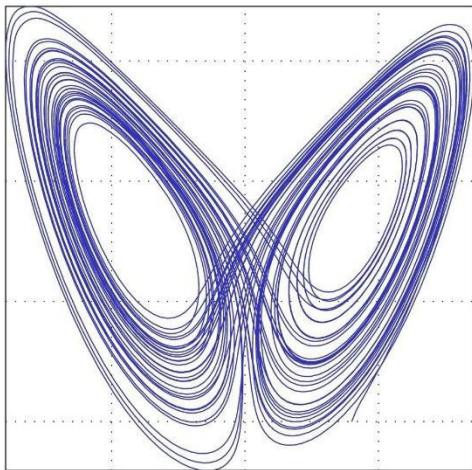


Figura 1. Atractor Extraño de Lorenz, ejemplo típico en la teoría del Caos.

El oscilador de Chua (ver Figura 2), es un circuito electrónico capaz de mostrar un escenario caótico. De hecho es el sistema más sencillo que se puede implementar en un laboratorio[3], permitiendo su

estudio, comprensión y relación con otros sistemas caóticos, de esta forma es posible sentar las bases para el estudio del caos utilizando este circuito.

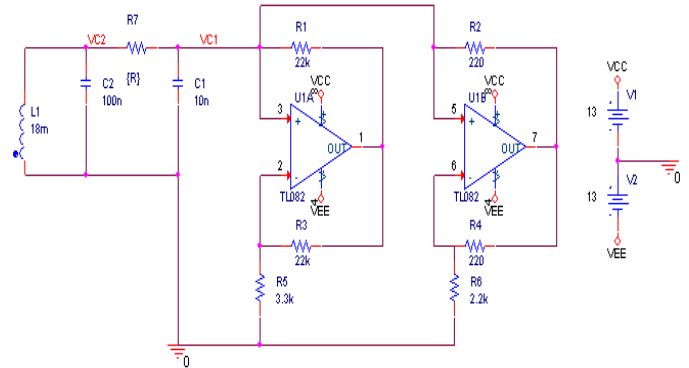


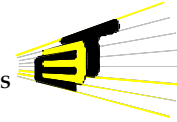
Figura 2. Circuito Oscilador de Chua.

II. OBJETIVOS

- Observar el comportamiento de un sistema caótico en condiciones de laboratorio.
- Comprender la dependencia a los cambios pequeños de las condiciones iniciales mediante la variación de una resistencia como parámetro.
- Integrar los conocimientos y destrezas obtenidas en las anteriores prácticas.

III. EQUIPOS Y MATERIALES

- Módulo de Chua.
- Fuente dual de DC regulada de laboratorio.
- Osciloscopio mínimo de 2 canales.
- Multímetro.
- Software para simulación circuital, se sugiere OrCAD Capture CIS de Cadence. Además de software de simulación numérica como Matlab, Scilab, Octave etc.



Laboratorio para el entendimiento del Caos

Guía # 4 “Introducción al Caos”

IV. ACTIVIDADES PREVIAS DE LABORATORIO

1. Simulaciones Numéricas

Simule mediante OrCAD el circuito que se muestra en la Figura 2, utilice los valores indicados para cada componente.

2. Consulta previa

- Encuentre las ecuaciones no lineales que describen al circuito (Ver Figura 2) que se tratará en la guía. Describalas usando una lógica de funciones lineales a trozos (Una descripción de esto está disponible en [5]).
- Consulte sobre un tipo de bifurcación llamado *Bifurcación de Hopf* y su relación con el circuito de Chua.
- Halle mediante simulación circuital los valores de la resistencia R7 en los que se presentan bifurcaciones y posteriormente caos en el oscilador de Chua; identificando así los intervalos de operación en los que se presentan diferentes fenómenos para este circuito, esto quiere decir que se debe hacer énfasis en el comportamiento de las trayectorias y atractores con el fin de apreciar los cambios, además observar como es el comportamiento temporal con relación a intervalos de la resistencia R7.

3. Montaje de los circuitos

Aunque en esta fase en realidad no se realizan montajes pues se dispone del módulo de Chua, se recomienda que si el responsable de la realización de la guía desea poner a pruebas otras configuraciones se deben montar previamente en

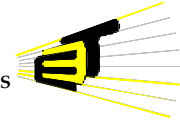
protoboard con el fin de ahorrar tiempo y se alcance a finalizar esta práctica.

V. ACTIVIDADES DE LABORATORIO

Para cada una de las actividades a realizar tome evidencia gráfica de su realización (fotos o capturas de lo observado en el osciloscopio).

Considere el módulo de Chua disponible con esta guía; identifique el potenciómetro que varía la resistencia R7 de la Figura 2. Realice las siguientes actividades:

- Alimente el circuito con una tensión de polarización de ± 13 [V] en sus terminales de alimentación.
- Tome las puntas de los canales 1 y 2 del Osciloscopio y sitúelas en las respectivas terminales para las tensiones de los capacitores VC1 y VC2.
- Varíe la resistencia R7 de forma que obtenga las siguientes respuestas en modo YT: Continua, Cambio de periodo (Bifurcación), Aumento de periodo de oscilación (Aparición de más bifurcaciones), cambio de amplitud de forma aperiódica (Caos), y Senoidal. Para cada una de estas manifestaciones, tome los valores de la resistencia que las provocan.
- Retorne el potenciómetro a su valor inicial y repita la actividad anterior, pero usando en este caso la visualización en modo XY del Osciloscopio, realice la misma variación de R7 y observe las gráficas de fase que aparecen al contrastar la tensión del capacitor 1 con la tensión del capacitor 2, contrástelo con el rango de resistencias obtenido en el ítem anterior.
- Una vez finalizada esta variación realice un segundo barrido, pero ahora empezando desde el valor final del potenciómetro y regresándolo a su estado inicial. Tome nota



Laboratorio para el entendimiento del Caos

Guía # 4 “Introducción al Caos”

de cómo aparecen los diversos fenómenos y el intervalo en el que suceden. ¿Coinciden? ¿A qué se debe esto?

VI. ACTIVIDADES DE CIERRE

Habiendo ya realizado todas las guías, o solo la actual, se espera que haya alcanzado un nivel de conocimiento relacionado a los sistemas caóticos, posterior a la toma de los datos que servirán para dar solución a las preguntas planteadas anteriormente se pide concluir la realización de esta guía dando respuesta a las siguientes preguntas:

- a) ¿Por qué no es posible presenciar el Caos en un circuito con sólo 2 estados? Sugerencia, consulte [1].
- b) Relacionado a la simulación, ¿A qué se debe la diferencia de valores encontrados de resistencias (parámetro variado) en las simulaciones y en la práctica?
- c) ¿Cómo se relacionan los diferentes intervalos de resistencias con el diodo de Chua? (Una descripción de esto está disponible en [5]).
- d) ¿De qué manera cambia el error absoluto de la tensión y la corriente a medida que va cambiando el valor de la resistencia R tomando como valor teórico los valores simulados?
- e) Como complemento final consulte sobre teoría del caos y su manifestación en los circuitos eléctricos de potencia [4] y electrónicos de potencia.

VII. REFERENCIAS

- [1] Smith, L. Chaos, “A Very Short Introduction”. Oxford University Press. 2007.
- [2] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag, 1983
- [3] T. Matsumoto, “A chaotic attractor from Chua’s circuit”. *IEEE Trans. Circuits Syst.*; vol. CAS-31, pp. 1055-1058, Dec. 1984.
- [4] S. Maity, T. Bhattacharya, and S. Banerjee. *Experimental Study of Chaos and Bifurcation in the Buck Converter*.
- [5] M. P. Kennedy, “Three Steps to Chaos – Part I: Evolution”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, vol 40, n°10, pp. 640 – 656, October 1993
- [6] R. Kilic. “A PRACTICAL GUIDE FOR STUDYING CHUA’S CIRCUITS”. World Scientific Series on Nonlinear Science. 2010.
- [7] MARTINEZ, Carlos y MENESES, Heriberto. *Adecuación y Caracterización para un prototipo de laboratorio que verifica los efectos del caos determinístico*. Universidad Industrial de Santander. 2018.