

**MEDIDAS DIFUSAS**

**ÉDGAR RENÉ RAMÍREZ LAMUS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2012**

**MEDIDAS DIFUSAS**

**ÉDGAR RENÉ RAMÍREZ LAMUS**

**Trabajo presentado como requisito  
parcial para optar al título de  
Magister en Matemáticas**

**Director**

**GILBERTO ARENAS DÍAZ, M.Sc.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

2012

*A Dios a quien le debo lo tengo y lo que soy.*  
*A Laura Daniela, la única portadora de mis genes.*  
*A mi padre y amigo incondicional, Juan Bautista.*  
*A la memoria de mi madre Marina Lamus.*  
*A mi esposa Diana Patricia, mi compañera fiel.*  
*A mi hermana Ruth Yaneth.*

# Agradecimientos

Agradezco a Dios Todopoderoso por darme la victoria en este proyecto.

Agradezco a mi esposa Diana Patricia y a Laura Daniela mi amada hija por amarme mucho, creer en mi y por su apoyo incondicional, las amo mucho.

Agradezco de una manera muy especial a mi director, amigo y maestro Gilberto Arenas Díaz quien me orientó, colaboró y me apoyo en el desarrollo de los estudios de maestría; que Dios le bendiga a él y toda su familia.

Agradezco a mis hermanos por el apoyo recibido durante toda mi existencia, especialmente a mi hermana Ruth Yaneth.

En la parte profesional quiero agradecer a mis maestros de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander: Sofía Pinzón, Sonia Sabogal Pedraza, Bernardo Mayorga, Elder Jesús Villamizar Roa, Rafael Isaacs y Edilberto Reyes por su compromiso, dedicación y motivación en la orientación de las diferentes materias. También agradezco a los profesores Rafael Castro y Sigifredo Herón, calificadores de esta tesis, sus comentarios y observaciones fueron muy oportunos y aportaron al mejoramiento del trabajo.

Agradezco a mis amigos de estudios, Alexánder Mendez, Alexánder Reatiga, William, Olga, Elizabeth, Gladys, Steling, Tilson, Sergio, Arturo, Rosana, Duwang y Clemente.

Agradezco especialmente la colaboración prestada y las voces de apoyo de Claudia Garavito y Rosalba Puentes, secretarias de la Escuela de Matemáticas de la UIS.

Gracias Dios por todo lo que me regalas.

# Tabla de contenido

<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>1. Medidas difusas</b>	<b>16</b>
1.1. Algunos conceptos de medida difusa . . . . .	17
1.2. Algunas caracterizaciones de las medidas difusas . . . . .	19
1.2.1. Propiedades de las medidas difusas . . . . .	19
1.2.2. Clasificación según la aditividad . . . . .	20
1.2.3. Las $\lambda$ -medidas de Sugeno . . . . .	29
1.3. Conjuntos nulos . . . . .	32
1.4. Medidas difusas nula-aditivas . . . . .	35
1.5. Autocontinuidad . . . . .	38
1.5.1. Autocontinuidad uniforme . . . . .	41
<b>2. Integración respecto a medidas difusas</b>	<b>46</b>
2.1. Integral de Sugeno . . . . .	46
2.1.1. Propiedades de la integral de Sugeno . . . . .	50
2.1.2. Teoremas de convergencia para la integral de Sugeno . . . . .	53
2.2. Integral de Choquet . . . . .	59
2.2.1. Propiedades de la integral de Choquet . . . . .	60
2.2.2. Teoremas de convergencia para la integral de Choquet . . . . .	62
2.3. Integrales de Sugeno y Choquet en conjuntos finitos . . . . .	65
<b>3. Aplicaciones de las integrales y las medidas difusas</b>	<b>71</b>
<b>Conclusiones y preguntas abiertas</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>

# Lista de figuras

1.1. Relación entre las diferentes clases de medidas difusas. . . . .	32
1.2. Relación entre las características de las estructuras de las medidas difusas.	43
2.1. Los $\alpha$ -niveles de $f$ . . . . .	47
2.2. Interpretación geométrica de la integral de Sugeno. . . . .	47

**TÍTULO:** MEDIDAS DIFUSAS\*  
**AUTOR:** ÉDGAR RENÉ RAMÍREZ LAMUS\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Medidas Difusas, Integral difusas, Integral de Choquet, Integral de Sugeno, Función equiordenada..

## DESCRIPCIÓN

En los últimos años, la teoría de medidas difusas e integrales difusas se han convertido en una rama de la matemática que ha captado un gran interés de investigación; es por eso, que el propósito de este trabajo de Maestría en Matemáticas es el estudio de dichos conceptos. Los conceptos de medida difusa e integral difusa fueron introducidos por Michio Sugeno en los años setenta del siglo pasado intentando dar un enfoque diferente a la generalización del concepto de medida clásica. La principal característica de las medidas clásicas es la propiedad  $\sigma$ -aditividad. Aunque dicha propiedad puede ser muy efectiva y conveniente en ciertas aplicaciones, como la estadísticas y la economía, también puede resultar demasiado inflexible y rígida en otros contextos, como por ejemplo, la inteligencia artificial, las redes neuronales, el procesamiento de imágenes, entre otros, en los cuales es útil definir medidas no aditivas (medidas difusas). Las medidas difusas se caracterizan por la debilitación de la propiedad  $\sigma$ -aditiva de las medidas clásicas, la cual se puede sustituir por una condición más débil conocida como la monotonía. Mientras que una integral difusa se caracteriza por ser la integral respecto a una medida difusa.

El desarrollo de este trabajo se realiza de la siguiente manera:

En el primer capítulo se hace un estudio de las medidas difusas. Se inicia estudiando el concepto de medida difusa y algunas de sus propiedades, posteriormente se hace una clasificación de las medidas difusas según la propiedad aditiva y la  $\lambda$ -medida, seguidamente se definen las propiedades estructurales de las medidas difusas, se analizan las interrelaciones entre ellas y se dan algunos ejemplos.

El segundo capítulo está dedicado a las integrales difusas: la integral de Sugeno y la integral de Choquet. Después de hacer una breve descripción de sus propiedades, se realiza un estudio sobre la extensión de los principales teoremas de convergencia de la teoría de integración clásica al contexto de las integrales difusas. Se realiza también una comparación entre las integrales difusas de Sugeno y Choquet utilizando el concepto de función equiordenada.

En el tercer capítulo se presentan dos ejemplos interesantes donde se usan las medidas e integrales difusas; para finalizar se describen algunos fenómenos donde son utilizadas las medidas difusas y las integrales difusas.

---

\* Tesis de Grado

\*\* Facultad de Ciencias – Escuela de Matemáticas – Maestría en Matemáticas – Director GILBERTO ARENAS DÍAZ, M.Sc.

**TITLE:** Fuzzy measure\*

**AUTHOR:** ÉDGAR RENÉ RAMÍREZ LAMUS\*\*

**KEY WORDS:** Fuzzy measure,  $\lambda$ -measure, Fuzzy integral, Choquet integral, Sugeno integral, equiordering functions.

## DESCRIPTION

In recent years, the theory of fuzzy measures and fuzzy integrals have become a branch of mathematics that has attracted a great research interest, which is the reason why the purpose of this paper of Master of Mathematics is the study of these concepts. The concepts fuzzy measure and fuzzy integral were introduced by Michio Sugeno in the 1970s trying to give a different approach to the generalization of the classical concept of measure.

The main characteristic of the classical measure is the  $\sigma$ -additivity property. Although this property may be very effective and desirable in some applications, such as statistics and economics, also may be inflexible and rigid in other contexts too, for example, the artificial intelligence, neural networks, Image processing, among others, which is useful to define nonadditive measures (fuzzy measures). Fuzzy measures are characterized by the weakening of the  $\sigma$ -additivity of classical measures, which can be replaced by a weaker condition known as the monotony. While a whole is characterized by fuzzy integral respect to a fuzzy measure.

The development of this work is done as follows:

The first chapter is a study of fuzzy measures. The concept is started studying the fuzzy measure and some of its properties, then it is a classification of fuzzy measures according to the additive and the  $\lambda$ -measure, finally the properties of the structural fuzzy measures are defined, We analyze the interrelationships between them and give some examples. The second chapter is devoted to fuzzy integrals: Sugeno integral and Choquet integral. After a brief description of their properties, where a study on the extension of the main theorems of convergence of classical integration theory to the context of fuzzy integrals is made. It also makes a comparison between the integrals of Sugeno fuzzy and using the concept of Choquet equiordering function. In the third chapter we present two interesting examples where measures and integral fuzzy are used. To finish, there are some phenomena where fuzzy measures and fuzzy integrals are used.

---

\* Graduate dissertation

\*\* Faculty of Sciences – Mathematics School – Mathematics Master – Director GILBERTO ARENAS DÍAZ, M.Sc.

# Introducción

Intentando dar otro enfoque en la generalización del concepto de medida, en los años setenta del siglo pasado, Michio Sugeno define por primera vez los conceptos de “medida difusa e integral difusa” (ver [29]). Una de las características principales de las medidas difusas es que no requieren la propiedad de la aditividad en contraste con las medidas clásicas; por eso también son llamadas medidas no aditivas. Las medidas difusas según Sugeno, se obtienen mediante la sustitución de la aditividad de las medidas clásicas por propiedades más débiles como la monotonía, la continuidad por abajo y la continuidad por arriba. El nombre acuñado por Sugeno fue dado porque él intentaba comparar las medidas de probabilidad con las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos. Sugeno intentó generalizar las medidas clásicas a las medidas difusas, tratando de hacer un proceso análogo al realizado en la generalización de los conjuntos clásicos en conjuntos difusos. Debido a esta analogía fue dado el nombre de dichas medidas. Es de mencionar que la noción de conjunto difuso fue propuesta por Lofti A. Zadeh en 1965 [43] con el objetivo de definir conjuntos que no tienen fronteras bien definidas.

Aunque el término de medida difusa ha sido aceptado por la comunidad científica, también ha servido para confusiones ya que la palabra “difusa” no necesariamente implica que la medida se aplique a conjuntos difusos o que la medida sea difusa en el sentido de dicha teoría. Concretamente, una medida difusa es una función monótona no negativa de valores definidos en “conjuntos clásicos”. Actualmente, en los libros y artículos sobre este tema, el término de “medidas difusas” ha sido sustituido por el término de “medidas monótonas”, “medidas no aditivas” o “medidas generalizadas” (ver por ejemplo, [1, 6, 27, 28, 18, 35, 37, 41]). Cuando las medidas difusas son definidas sobre conjuntos difusos, se habla de medidas monótonas fuzzificadas (ver [37]).

A pesar de las muchas aplicaciones de la teoría clásica, cada vez más, se reconoce que ella está limitada por el requisito de la aditividad de las medidas. Exigir la aditividad en la medición de una propiedad de un conjunto de algún tipo, es básicamente suponer que no hay interacción entre los elementos del conjunto y la medida de ellos. Sin embargo,

hay problemas en los cuales si hay interacción entre los elementos del conjunto y la medida de ellos. Sea  $(X, \mathcal{A})$  un espacio medible<sup>3</sup>. Se dice que una función  $\mu$  describe una interacción entre los elementos de los conjuntos  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $A \cap B = \emptyset$ , si sucede alguna de las siguientes situaciones:

- Se expresa una interacción positiva (cooperación, mejora, ampliación) entre  $A$  y  $B$  en términos de la propiedad medida, si  $\mu(A \cup B) > \mu(A) + \mu(B)$ .
- Se expresa una interacción negativa (incompatibilidad, rivalidad, inhibición) entre  $A$  y  $B$  en términos de la propiedad medida, si  $\mu(A \cup B) < \mu(A) + \mu(B)$ .
- Se expresa que no hay interacción entre  $A$  y  $B$  en términos de la propiedad medida, si  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

Obsérvese que las medidas clásicas solo pueden capturar la tercera situación que es aplicable sólo a las propiedades que no son interactivas.

La utilización de medidas no aditivas en determinados contextos de aplicación, ofrece un enfoque más flexible y realista a una amplia gama de problemas. Por ejemplo, si se considera un conjunto de trabajadores  $X$  en un taller, que son involucrados en la elaboración de productos de un tipo específico, y se supone que el conjunto  $X$  es dividido en subgrupos  $G_1, G_2, \dots, G_N$ , donde  $\mu(G_i)$  indica el número de productos fabricados por cada grupo  $G_i$ , dentro de una determinada unidad de tiempo, entonces se puede presentar que cuando los grupos trabajan por separado, la función  $\mu$  es una medida aditiva. Sin embargo, cuando algunos de los grupos trabajan juntos y hay cooperación eficiente entre ellos, la medida es superaditiva. Por el contrario, si la cooperación es ineficaz, la medida es subaditiva.

Como se ha dicho, en general, las medidas difusas pierden la propiedad de aditividad, que aparentemente las hace mucho más flexible que las medidas clásicas. Pero debido a esto, es difícil desarrollar una teoría general de las medidas difusas sin ninguna condición adicional.

En el trabajo pionero de Sugeno se introduce una medida difusa llamada  $\lambda$ -difusa o medida de Sugeno, que permite generalizar la propiedad aditiva de las medidas de probabilidad ([2, 9]):

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B) \quad \text{siempre que} \quad A \cap B = \emptyset,$$

---

<sup>3</sup>Llamaremos espacio medible al par  $(X; \mathcal{A})$ , donde  $X$  es un conjunto y  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $X$ . A los elementos de  $\mathcal{A}$  los llamaremos conjuntos medibles.

donde  $\lambda \in (-1, \infty)$ . Posteriormente, Shafer en 1976 introduce en [26] dos medidas difusas llamadas medidas de credibilidad y plausibilidad, fundamentales en el desarrollo de la teoría de la evidencia; éste trabajo fue motivado por la investigación previa de Dempster sobre probabilidades inferior y superior, investigación enmarcada también dentro de la teoría de la evidencia, y conocida como la teoría Dempster-Shafer (ver [4, 5, 26]).

Más adelante, en 1978, Zadeh en [44] introduce una nueva medida difusa llamada medida de posibilidad que satisface  $\Pi(A \cup B) = \max\{\Pi(A), \Pi(B)\}$ . Una medida de posibilidad es un caso particular de una medida de plausibilidad. También definen una medida difusa dual a la medida de posibilidad llamada medida de necesidad, y que satisface la ecuación  $Nec(A) = 1 - \Pi(A^c)$ . Una medida de necesidad es un caso particular de una medida de credibilidad, y que cumple la propiedad  $Nec(A \cap B) = \min\{Nec(A), Nec(B)\}$ . Una relación detallada entre las medidas difusas anteriormente nombradas, al igual que una clasificación, es realizada en 1981 por Banon en [2].

Como se mencionó antes, es difícil desarrollar una teoría general de las medidas difusas sin imponer condiciones adicionales. En este sentido, Wang en [33, 34] introduce algunos conceptos nuevos sobre las características estructurales de las medidas difusas, y por medio de ellos genera un desarrollo de la teoría general de las medidas difusas: nula-aditividad, autocontinuidad, autocontinuidad uniforme, pseudo nula-aditividad y pseudo autocontinuidad, entre otras. Estos conceptos estructurales de las medidas difusas han servido para garantizar condiciones suficientes y necesarias para generalizar teoremas de la teoría clásica de la medida al contexto de las medidas difusas.

Posteriormente, muchos autores se han dedicado a mejorar los resultados propuestos. Por ejemplo, en 1992 Sun en [30] estudió los conceptos dados por Wang y la relación existente entre ellos; en el 2005 S. Asahina en [1] realiza un estudio sobre las condiciones de continuidad y nula-aditividad de las medidas difusas.

Actualmente, las medidas difusas se han aplicado en varias disciplinas como la inteligencia artificial, psicología, teoría de juegos, teoría de la decisión, economía, redes neuronales, procesamiento de imágenes, entre otras, (ver [15, 23]). Para la comunidad científica es una rama de la matemática muy interesante donde hay mucho que explorar y que tiene muchísimas aplicaciones potenciales.

Unido al concepto de medida difusa se encuentra el de integral difusa. Sugeno definió en [18] “la integral difusa” como la integral respecto a una medida difusa. Entre las integrales respecto una medida difusa se encuentran las integrales dadas por Sugeno y por Webber (ver [18, 29, 39]).

Sugeno introduce la siguiente definición de integral difusa, conocida como integral de Sugeno: Sea  $\mu$  una medida difusa sobre  $X$  y  $f : X \rightarrow [0, 1]$  una función medible no negativa con respecto a la medida difusa  $\mu$ , entonces la integral de  $f$  respecto a  $\mu$  es dada por

$$\int f d\mu = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \mu(\{x | f(x) \geq \alpha\})],$$

donde  $\wedge$  es el operador mínimo. Es de mencionar, que aunque las medidas difusas son una extensión de las medidas de probabilidad, la integral de Sugeno no es una extensión de la integral de Lebesgue. Si reemplazamos la suma y la multiplicación de los números reales por el supremo y su ínfimo respectivamente en la fórmula de la integral de Lebesgue sobre la recta real se obtiene la integral de Sugeno. Obsérvese que si  $A$  es un conjunto clásico su integral de Sugeno es igual a la medida de  $A$ , debido a esto la integral de Sugeno es la generalización de la medida de Lebesgue, pero no de la integral de Lebesgue.

Por otra parte, Weber en [39] introduce otra integral respecto a una medida difusa que llamó la integral de Choquet, y definida por

$$\int f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x | f(x) \geq \alpha\}) d\alpha.$$

Dado que varias definiciones para la integral de Choquet son equivalentes a las definiciones para la integral de Lebesgue, puede considerarse que la integral de Choquet es una generalización de la integral de Lebesgue (ver [3]).

Es de mencionar que mientras la integral de Sugeno se basa en operadores no lineales (mínimo y máximo), la integral de Choquet se basa en operadores lineales (suma y producto). La integral de Sugeno tiene como aplicaciones la evaluación subjetiva de fenómenos y la integral de Choquet es utilizada para representar medidas estadísticas como la media, la mediana y L-estimadores.

El propósito de este trabajo es realizar un estudio de las medidas difusas y las integrales difusas, incluyendo principalmente sus propiedades, clasificaciones, ejemplos y propiedades estructurales.

Para ello se plantea el desarrollo del trabajo de la siguiente manera: en el primer capítulo se hace un estudio de las medidas difusas, para lo cual nos apoyamos fundamentalmente de las referencias [9, 33, 34, 35, 36, 37, 41]. Este primer capítulo está constituido por tres partes: en la primera se estudia el concepto de medida difusa y algunas de sus propiedades; en la segunda parte se estudia una clasificación de las medidas difusas según la propiedad aditiva y la  $\lambda$ -medida; en la tercera parte se definen las propiedades

estructurales de las medidas difusas, se analizan las interrelaciones entre ellas y se dan algunos ejemplos.

El segundo capítulo tiene como objetivo el estudio de las integrales difusas de Sugeno y Choquet; se hace una recapitulación de los principales resultados sobre estas integrales, enfocando dicho trabajo en la extensión de los principales teoremas de convergencia de la teoría de integración clásica; posteriormente, haciendo uso del concepto de equiorden, se hace una comparación entre las integrales de Choquet y Sugeno. Este capítulo se elaboró tomando como fuente las referencias [3, 18, 37].

En el tercer capítulo se presentan dos ejemplos donde se aplican las medidas difusas y las integrales difusas y se hace una breve descripción de las principales aplicaciones de las medidas e integrales difusas. Este capítulo se realizó teniendo como referencias [10, 11, 15, 23, 38].

Finalmente, se describen los conceptos estudiados, se dejan algunas preguntas abiertas que surgieron a lo largo de este estudio, y que pueden servir como motivación para futuras investigaciones.

# Capítulo 1

## Medidas difusas

En muchas situaciones reales, a menudo, donde hay manipulación de la información nos encontramos con obstáculos debido a la incertidumbre que puede estar dada por la imposibilidad de utilizar datos exactos, la imprecisión e indecisión de los fenómenos a estudiar, etc. Dicha incerteza no tiene necesariamente que ser aleatoria; en consecuencia esta incertidumbre no tiene que ser medida a través de la probabilidad.

La medida de probabilidad constituye un ejemplo muy importante de medida clásica, pero es aplicable solamente en ciertos casos especiales de incertidumbre basada en la aleatoriedad, la cual no es aplicable a la imprecisión e incerteza de la información, que son la base del razonamiento humano. Sus limitaciones fueron cada vez más reconocidas.

En 1965 Zadeh abrió las puertas a la solución al problema presentado por la medida de probabilidad dando la definición de *“conjunto difuso”*. Para complementar la solución aparecen los términos *“medida difusa”* e *“integral difusa”* que fueron introducidos por Michio Sugeno, como la forma más adecuada de medir ciertos grados de incerteza, valores que dependen únicamente de la subjetividad humana.

La subjetividad humana se puede clasificar en dos tipos: la incerteza dada por la imprecisión y la incerteza dada por la indecisión; un conocimiento es impreciso cuando cuenta solamente con predicados vagos, es decir, que las variables no reciben un valor preciso, sino que solamente se especifica un subconjunto al que pertenecen, como: *“Carlos es alto”*, *“Diana tiene entre 25 y 30 años”*; un conocimiento es indeciso cuando está expresado con predicados precisos, pero donde no puede establecerse el valor de verdad, como por ejemplo: *“creo que ...”*, *“es posible que ...”*

El primer tipo de incerteza puede ser estudiado usando el concepto de conjunto difuso

(medidas de borrosidad), en cuanto al segundo tipo puede ser estudiado utilizando las medidas difusas.

Una medida (medida clásica) en un espacio medible  $(X, \mathcal{A})$ , donde  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra, es una aplicación  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  que satisface las propiedades:

$$(\mu_1) \quad \mu(\emptyset) = 0.$$

$(\mu_2)$  Si  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$  es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

La segunda propiedad es conocida como la  $\sigma$ -aditividad, y constituye la principal característica de las medidas clásicas. Aunque dicha propiedad puede ser muy efectiva y conveniente en ciertas aplicaciones, como la estadísticas y la economía, también puede resultar demasiado inflexible y rígida en otros contextos, como por ejemplo, la inteligencia artificial, las redes neuronales, los procesamientos de imágenes, entre otros (ver [15, 23]), en los cuales es útil definir medidas no aditivas (medidas difusas). Las medidas difusas se caracterizan por la debilitación de la propiedad  $\sigma$ -aditividad de las medidas clásicas, la cual se puede sustituir por una condición más débil, conocida como la monotonía, por lo que también las medidas difusas reciben el nombre de medidas no aditivas.

## 1.1. Algunos conceptos de medida difusa

En 1974 M. Sugeno, en su tesis doctoral (ver [18]), introduce el concepto de medida difusa basándose en el hecho de que para las medidas clásicas la propiedad de  $\sigma$ -aditividad implica monotonía, continuidad por abajo y continuidad por arriba.

**Definición 1.1** ([9, 29, 37]). Sean  $X$  un conjunto clásico y  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ . Se dice que  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es una medida difusa si satisface:

$$(M_{D_1}) \quad \mu(\emptyset) = 0 \quad (\text{condición de frontera}).$$

$$(M_{D_2}) \quad \text{Para todo } A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \text{ implica que } \mu(A) \leq \mu(B) \quad (\text{monotonía}).$$

En algunos casos es deseable que  $\mu$  satisfaga, una o ambas de las siguientes condiciones:

$$(M_{D_3}) \quad A_n \in \mathcal{A} \text{ y } A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots, \text{ se tiene que } \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \\ (\text{continuidad por abajo}).$$

$(M_{D_4})$   $B_n \in \mathcal{A}$  y  $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$  con  $\mu(B_1) < \infty$ , entonces  $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$   
(continuidad por arriba).

Una medida difusa que satisface la condición  $(M_{D_3})$  es llamada continua por debajo, y si satisface  $(M_{D_4})$  entonces se dice que es una medida difusa continua por arriba. Si la medida difusa satisface las dos condiciones, entonces se dice que es una medida difusa según Sugeno o que es una medida difusa continua.

Cuando se desea caracterizar la incertidumbre son utilizadas las medidas difusas normalizadas, las cuales surgen al adicionar la condición  $\mu(X) = 1$ .

Cuando  $X$  es finito, las condiciones  $(M_{D_3})$  y  $(M_{D_4})$  no son necesarias, porque si se tuviera una sucesión creciente o decreciente de una colección finita de conjuntos, tal sucesión será estacionaria.

**Ejemplo 1.2.** Sea  $X = \{0, 1\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu$  definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \\ 0,5, & \text{si } A = \{0\} \text{ o } A = \{1\}, \\ 1, & \text{si } A = X. \end{cases}$$

Obsérvese que  $\mu$  cumple con  $(M_{D_1})$  y  $(M_{D_2})$ . Como  $X$  es finito se cumplen  $(M_{D_3})$  y  $(M_{D_4})$ . Entonces  $\mu$  es una medida difusa y también es una medida difusa según Sugeno.

En busca de un concepto más amplio para la definición de medida difusa, varios autores como T. Mifushii, Sugeno, Nguyen y Walker entre otros (ver [7, 16, 20]), han estudiado una definición de medida difusa, en la cual se debilita la definición dada inicialmente por Sugeno, eliminando definitivamente  $\mu(X) = 1$  que no es esencial en la teoría de Lebesgue; se eliminan también las condiciones  $(M_{D_3})$  y  $(M_{D_4})$ , que aunque son esenciales para la teoría Lebesgue, no lo son para la integración respecto a una medida difusa, ya que en este caso se utiliza la integral de Sugeno o de Choquet, donde dichas condiciones no son necesarias, pero si se necesita que  $\mu$  sea monótona. De aquí en adelante, se entenderá por medida difusa, aquella que satisface sólo las condiciones  $(M_{D_1})$  y  $(M_{D_2})$  de la Definición 1.1.

Es claro que está noción es más general que la introducida por Sugeno, es decir, todas las medidas difusas según Sugeno son medidas difusas. También es de mencionar, que las medidas clásicas son medidas difusas, pero en cambio, no toda medida difusa es una medida clásica.

A continuación se presenta un ejemplo de una medida difusa que no es una medida difusa según Sugeno porque no cumple con  $(M_{D_4})$ .

**Ejemplo 1.3.** Sea  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \\ 1, & \text{si } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Nótese que por la definición dada,  $\mu$  satisface  $(M_{D_1})$  y  $(M_{D_2})$ . En consecuencia  $\mu$  es una medida difusa.

$\mu$  no es una medida difusa según Sugeno. En efecto, considérese que  $A_n = (0, \frac{1}{n})$ , entonces  $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$  pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 1$  ya que  $A_n \neq \emptyset$  para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Luego  $\mu$  no cumple con  $(M_{D_4})$ .

Otros autores han estudiado el concepto de medida difusa; por ejemplo, en 1999 Enrick Trillas y Alsinas introducen (ver [31]) una definición más general de medida difusa, basada en el hecho de que para medir una característica de los elementos de un conjunto  $X$ , es necesario disponer de una relación de comparación que indique para todo par de elementos si uno presenta más dicha característica que el otro. Esta definición no es usada frecuentemente en el mundo científico, por lo cual no profundizaremos en este concepto, si el lector desea saber más sobre dicha noción de medida difusa se le recomienda ver [8, 31].

## 1.2. Algunas caracterizaciones de las medidas difusas

### 1.2.1. Propiedades de las medidas difusas

Una razón importante para el estudio de las medidas difusas en el caso finito, es que hasta ahora casi todas las aplicaciones prácticas se tienen en conjuntos finitos.

Una forma de obtener ejemplos de medidas difusas es partiendo de una medida clásica como lo afirma la siguiente proposición.

**Proposición 1.4** ([9]). Sean  $r$  una medida difusa y  $T : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  una función real monótona y creciente tal que  $T(0) = 0$ . Entonces la composición  $\mu = T \circ r$  define una medida difusa.

*Demostración.* En efecto,  $\mu(\emptyset) = T \circ r(\emptyset) = T(0) = 0$ , luego se tiene  $(M_{D_1})$ .

Para probar la segunda condición ( $M_{D_2}$ ) considere  $A, B \in \mathcal{A}$  tales que  $A \subseteq B$ , entonces  $\mu(A) = T \circ r(A) = T(r(A))$  y  $\mu(B) = T \circ r(B) = T(r(B))$ . Como  $r(A) \leq r(B)$  y  $T$  es creciente, entonces se tiene que  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .  $\square$

Enseguida daremos dos propiedades generales de las medidas difusas. En la primera propiedad se demuestra que una medida difusa es un número real no negativo. La segunda propiedad relaciona la medida de la unión y la intersección de dos conjuntos con el máximo y el mínimo de las medidas de estos conjuntos.

**Proposición 1.5** ([9]). *Sea  $\mu$  una medida difusa en  $\mathcal{A}$ , entonces:*

$$(i) \quad \mu(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

$$(ii) \quad \forall A, B \in \mathcal{A},$$

$$\min\{\mu(A), \mu(B)\} \geq \mu(A \cap B) \quad y \quad \max\{\mu(A), \mu(B)\} \leq \mu(A \cup B).$$

*Demostración.* (i) Sea  $A \in \mathcal{A}$ , como  $\emptyset \subseteq A$  y  $\mu$  es monótona, entonces  $\mu(A) \geq \mu(\emptyset) = 0$ .

(ii) Como  $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$  y  $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$ , entonces por ( $M_{D_2}$ ) se tiene

$$\mu(A \cap B) \leq \mu(A) \quad y \quad \mu(A \cap B) \leq \mu(B),$$

luego  $\min\{\mu(A), \mu(B)\} \geq \mu(A \cap B)$ .

Analogamente se realiza la otra parte de la demostración.  $\square$

### 1.2.2. Clasificación según la aditividad

En una medida clásica la propiedad de aditividad implica monotonía, pero su recíproco no es cierto. Por ejemplo, sea  $X = \{0, 1\}$  y  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \\ 1, & \text{si } A = \{0\} \text{ o } A = \{1\}, \\ 3, & \text{si } A = X. \end{cases}$$

Dado que

$$\{0\} \subseteq X \quad y \quad \mu(\{0\}) \leq \mu(X); \quad y \quad \{1\} \subseteq X \quad y \quad \mu(\{1\}) \leq \mu(X),$$

en consecuencia se tiene, que  $\mu$  es una medida monótona, pero  $\mu$  no es una medida aditiva debido a que  $\mu(\{0\} \cup \{1\}) \neq \mu(\{0\}) + \mu(\{1\})$ .

Obsérvese que en este ejemplo  $\mu(\{0\} \cup \{1\}) = \mu(\{X\}) > \mu(\{0\}) + \mu(\{1\})$ . Pero si se cambia, en la definición de  $\mu$ , que  $\mu(X) = a$ , con  $a \in (1, 2)$ , entonces se tendría que  $\mu(\{0\} \cup \{1\}) = \mu(X) = a < \mu(\{0\}) + \mu(\{1\})$ . Es decir, se tienen tres posibilidades; la siguiente definición se relaciona con esta observación.

**Definición 1.6.** Una medida difusa  $\mu$  definida en  $\mathcal{A}$  es llamada:

- *Aditiva* si para todo  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $A \cap B = \emptyset$  se tiene que

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

- *Subaditiva* si para todo  $A, B \in \mathcal{A}$  se tiene que

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

- *Superaditiva* si para todo  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $A \cap B = \emptyset$  se tiene que

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B).$$

Con base en esta definición se presentan a continuación algunos ejemplos de medidas difusas que se han convertido en fundamento para algunas teorías matemáticas, como la teoría de la probabilidad, la teoría de la evidencia y la teoría de la necesidad, las cuales se pueden clasificar como aditivas, subaditivas y superaditivas, respectivamente.

### Ejemplos de medidas difusas aditivas

Un ejemplo importante de medida difusa aditiva es la medida de probabilidad, la cual mide la frecuencia con la que se obtiene un resultado (o conjunto de resultados) al llevar a cabo un experimento aleatorio del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables. La definición formal de medida de probabilidad surge de incluir en la definición de la medida, que  $\mu(X) = 1$  y la propiedad aditiva. Formalmente sería:

**Definición 1.7** ([9]). Sea  $P$  una función real definida en  $\mathcal{A}$ . Se dice que  $P$  es una medida de probabilidad si se satisface:

$$(Pr_1) \quad P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

$$(Pr_2) \quad P(X) = 1,$$

(Pr<sub>3</sub>) Si  $A_i$  es una sucesión en  $\mathcal{A}$  tal que  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ , entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\mathcal{A}_i).$$

Obsérvese que cuando  $X$  es un conjunto finito la propiedad (Pr<sub>3</sub>) se puede modificar por

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{A} \text{ tal que } A \cap B = \emptyset.$$

**Ejemplo 1.8.** Sean  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu$  una medida definida como:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \\ \frac{1}{3}, & \text{si } A = \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ \frac{2}{3}, & \text{si } A = \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \\ 1, & \text{si } A = X. \end{cases}$$

Por definición,  $\mu$  cumple con (Pr<sub>1</sub>) y (Pr<sub>2</sub>). Realizando unos pequeños cálculos se comprueba que  $\mu$  cumple con (Pr<sub>3</sub>), por lo tanto se concluye que  $\mu$  es una medida de probabilidad.

A partir de la definición de medida de probabilidad, es posible demostrar ciertas propiedades que ella cumple. Por ejemplo:

**Proposición 1.9.** Si  $P$  es una medida de probabilidad entonces satisface las siguientes propiedades:

- (i)  $P(\emptyset) = 0$ .
- (ii)  $\forall A, B \in \mathcal{A}$ , si  $A \subseteq B$  entonces  $P(A) \leq P(B)$ .

Consecuentemente,  $P$  es una medida difusa.

*Demostración.* (i) Como  $X = X \cup \emptyset$ , por (Pr<sub>2</sub>) y (Pr<sub>3</sub>) se tiene que  $P(X) = P(X) + P(\emptyset)$ , luego  $P(\emptyset) = 0$ .

(ii)  $A \subseteq B$  implica que  $B = A \cup (B \setminus A)$ , aplicando (Pr<sub>1</sub>) y (Pr<sub>2</sub>) se obtiene que

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Como  $P(B \setminus A) \geq 0$ , entonces  $P(B) \geq P(A)$ .

Como se cumplen estas dos propiedades, entonces se puede concluir que  $\mu$  es una medida difusa. □

## Ejemplos de medidas difusas subaditivas

Un ejemplo importante de medida difusa subaditiva es la medida de plausibilidad, la cual sirve para medir grados de verosimilitud, los cuales representan la máxima creencia en una hipótesis como resultado de una evidencia. La definición formal de medida de plausibilidad es:

**Definición 1.10** ([13]). Sean  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ . Una medida de plausibilidad <sup>2</sup> es una función  $Pl : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  que satisface:

$$(Pl_1) \quad Pl(\emptyset) = 0,$$

$$(Pl_2) \quad Pl(X) = 1,$$

( $Pl_3$ ) si  $\{A_i\}_{i=1}^n$  es una colección de elementos de  $\mathcal{A}$ , entonces

$$Pl(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) \leq \sum_j Pl(A_j) - \sum_{j < k} Pl(A_j \cup A_k) \\ + \dots + (-1)^{n+1} Pl(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n).$$

Cuando  $n = 2$ , la propiedad ( $Pl_3$ ) se escribe como

$$Pl(A_1 \cap A_2) \leq Pl(A_1) + Pl(A_2) - Pl(A_1 \cup A_2).$$

En consecuencias,

$$Pl(A_1 \cup A_2) \leq Pl(A_1) + Pl(A_2),$$

por lo tanto, se puede concluir que  $Pl$  es una medida subaditiva.

De la definición de medida de plausibilidad se deduce que

$$1 \leq Pl(A) + Pl(A^c).$$

En efecto,

$$1 = Pl(X) = Pl(A \cup A^c) \leq Pl(A) + Pl(A^c).$$

## Ejemplos de medidas difusas superaditivas

Un ejemplo importante de medida difusa superaditiva es la medida de credibilidad; la cual es importante en el estudio de la teoría de la evidencia; esta teoría se centra en la credibilidad que se asigna a que un evento pueda ocurrir (o haya ocurrido), desde el punto de

---

<sup>2</sup>Se utiliza  $Pl$  para nombrar las medidas de plausibilidad; la palabra plausibilidad significa inverosímil.

vista y de acuerdo con la experiencia de la persona que toma las decisiones, en contraste con la probabilidad clásica, que supone la existencia de valores de probabilidad asociados a eventos determinados independientemente de que el observador pueda conocer el valor real de la probabilidad. La definición formal de medida de credibilidad es:

**Definición 1.11** ([13]). Sean  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ . Una medida de credibilidad <sup>2</sup> es una función  $Bel : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  que satisface:

$$(B_1) \quad Bel(\emptyset) = 0,$$

$$(B_2) \quad Bel(X) = 1,$$

(B<sub>3</sub>) si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  es una colección de elementos de  $\mathcal{A}$ , entonces

$$Bel(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) \geq \sum_j Bel(A_j) - \sum_{j < k} Bel(A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n+1} Bel(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n).$$

Cuando  $n = 2$ , la propiedad (B<sub>3</sub>) se escribe como

$$Bel(A_1 \cup A_2) \geq Bel(A_1) + Bel(A_2) - Bel(A_1 \cap A_2).$$

Además, si  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , entonces

$$Bel(A_1 \cup A_2) \geq Bel(A_1) + Bel(A_2)$$

por lo tanto, se puede concluir que  $Bel$  es una medida superaditiva.

A  $Bel(A)$  se le llama “grado de creencia” y representa la mínima creencia en la hipótesis  $A$ , como resultado de una evidencia.

Cuando los conjuntos son disjuntos dos a dos la propiedad (B<sub>3</sub>) se requiere para que los grados de credibilidad asociados con la unión de los conjuntos no sea menor que la suma de los grados de credibilidad asociados a cada conjunto individualmente.

Considere el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.12.** Sean  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu$  una medida definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \\ t, & \text{si } A = \{a\}, \{b\}, \quad \text{donde } t \in (0, 1). \\ 1, & \text{si } A = X, \end{cases}$$

Fácilmente se puede verificar que  $\mu$  es una medida monótona. Ahora, si  $t \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $\mu$  es una medida de credibilidad. Si  $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $\mu$  es una medida de plausibilidad.

<sup>2</sup>Se utiliza  $Bel$  para nombrar las medidas de credibilidad; debido a que la palabra belief proviene del inglés que significa credibilidad.

**Proposición 1.13.** *Si Bel es una medida de credibilidad, entonces satisface las siguientes propiedades:*

(i) *Bel es una medida difusa monótona en X.*

(ii)  $Bel(A) + Bel(A^c) \leq 1$ .

*Demostración.*

(i) Por definición  $Bel(\emptyset) = 0$ . Para demostrar la propiedad de monotonía, considérense  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $A \subseteq B$  y  $C = B - A$ .

Entonces aplicando  $(B_3)$  para  $n = 2$  y el hecho de que  $A \cup C = B$  se tiene que

$$Bel(B) = Bel(A \cup C) \geq Bel(A) + Bel(C) - Bel(A \cap C).$$

Puesto que  $A \cap C = \emptyset$  y  $Bel(\emptyset) = 0$ , se concluye que

$$Bel(B) \geq Bel(A) + Bel(C),$$

y en consecuencia  $Bel(B) \geq Bel(A)$ .

(ii) Como  $A \cap A^c = \emptyset$ , se tiene que

$$1 = Bel(X) = Bel(A \cup A^c) \geq Bel(A) + Bel(A^c). \quad \square$$

Si  $\mu$  es una medida difusa sobre  $\mathcal{A}$ , se puede definir una medida difusa dual dada por

$$\mu^d(A) = \mu(X) - \mu(A^c), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Pero como se esta trabajando con medidas difusas normalizadas, es decir, con  $\mu(X) = 1$ , entonces

$$\mu^d(A) = 1 - \mu(A^c), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

En consecuencia, para cada medida de credibilidad se puede definir su medida de plausibilidad por medio de la ecuación

$$Pl(A) = 1 - Bel(A^c).$$

Nótese que a partir de esta ecuación se obtiene que

$$Pl(A^c) = 1 - Bel(A), \quad Bel(A) = 1 - Pl(A^c) \quad \text{y} \quad Bel(A^c) = 1 - Pl(A).$$

$Bel(A^c)$  se llama “el grado de duda en  $A$ ”, representa la mínima creencia en la negación de la hipótesis  $A$ , como resultado de una evidencia.

Como se mencionó, las medidas de credibilidad y las medidas de plausibilidad son dos medidas difusas duales, que adicionalmente son la base de una teoría conocida como la Teoría de la evidencia, la cual fue desarrollada por Dempster en 1967 y posteriormente extendida por Shafer en 1976 (ver [4, 5, 26]). Esta teoría es una extensión de la teoría de la probabilidad para representar la ignorancia y para manejar la necesidad de que las creencias asignadas a un evento y su negación sumen uno. Ella se centra en la credibilidad que se asigna a que un evento pueda ocurrir (o haya ocurrido), desde el punto de vista y de acuerdo con la experiencia de la persona que toma las decisiones, en contraste con la probabilidad clásica, que supone la existencia de valores de probabilidad asociados a eventos determinados, independientemente de que el observador pueda conocer el valor real de la probabilidad.

Por otra parte, se puede mostrar fácilmente que las medidas de credibilidad y plausibilidad satisfacen la relación

$$Pl(A) \geq Bel(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

La anterior desigualdad se puede interpretar para algunas aplicaciones, como que la medida de credibilidad es el límite inferior y la medida de plausibilidad como el límite superior de una evidencia sólida.

### Otros dos ejemplos importantes de medidas difusas

Una rama de la teoría de la evidencia es la teoría de la posibilidad, que fue estudiada por Zadeh. Una medida de posibilidad es una medida de plausibilidad que se le impone la condición

$$Pl(A \cup B) = \max\{Pl(A), Pl(B)\}.$$

De forma análoga, cuando a una medida de credibilidad se le impone la condición de que

$$Bel(A \cap B) = \min\{Bel(A), Bel(B)\}$$

se obtiene una medida difusa conocida como medida de necesidad.

Formalmente se tienen las siguientes definiciones.

**Definición 1.14** ([7]). *Dado un espacio medible  $(X, \mathcal{A})$ , una medida de posibilidad es una función  $\Pi : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  que satisfice:*

$$(Pos_1) \quad \Pi(\emptyset) = 0, \quad \Pi(X) = 1,$$

$$(Pos_2) \quad A \subseteq B \text{ implica que } \Pi(A) \leq \Pi(B),$$

$$(Pos_3) \quad \text{dado un conjunto de } \text{índices } I, \quad \Pi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} \{\Pi(A_i)\}.$$

**Definición 1.15** ([8]). *Dado un espacio medible  $(X, \mathcal{A})$ , una medida de necesidad es una función  $Nec : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  que satisface:*

$$(N_1) \quad Nec(\emptyset) = 0, \quad Nec(X) = 1,$$

$$(N_2) \quad A \subseteq B \Rightarrow Nec(A) \leq Nec(B),$$

$$(N_3) \quad \text{dado un conjunto de } \text{índices } I, \quad Nec\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \inf_{i \in I} \{Nec(A_i)\}.$$

Las medidas de posibilidad son medidas difusas normales que cumplen con la propiedad subaditiva, mientras que las medidas de necesidad son medidas difusas normales que cumplen la propiedad superaditiva (ver [7, 8]). Obsérvese que a partir de las propiedades se tiene que una medida de necesidad se puede obtener a partir de una medida de posibilidad, por medio de la ecuación

$$Nec(A) = 1 - \Pi(A^c). \quad (1.1)$$

El Ejemplo 1.3 satisface las condiciones para ser una medida difusa de posibilidad.

El siguiente resultado da algunas propiedades que cumplen las medidas de posibilidad.

**Proposición 1.16.** *Dado un espacio medible  $(X, \mathcal{A})$ , una medida de posibilidad  $\Pi : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  cumple con las siguientes propiedades:*

$$(i) \quad \text{máx}\{\Pi(A), \Pi(A^c)\} = 1.$$

$$(ii) \quad \Pi(A) + \Pi(A^c) \geq 1.$$

*Demostración.*

$$(i) \quad 1 = \Pi(X) = \Pi(A \cup A^c) = \text{máx}\{\Pi(A), \Pi(A^c)\}.$$

(ii) Se tiene que

$$\begin{aligned} 1 = \Pi(X) &= \Pi(A \cup A^c) = \text{máx}\{\Pi(A), \Pi(A^c)\} \\ &\leq \text{máx}\{\Pi(A), \Pi(A^c)\} + \text{mín}\{\Pi(A), \Pi(A^c)\} = \Pi(A) + \Pi(A^c). \quad \square \end{aligned}$$

En el caso de las medidas de necesidad se tiene el siguiente resultado análogo.

**Proposición 1.17.** *Dado un espacio medible  $(X, \mathcal{A})$ , una medida de necesidad  $Nec : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  cumple con las siguientes propiedades:*

- (i)  $\min\{Nec(A), Nec(A^c)\} = 0$ .
- (ii)  $Nec(A) + Nec(A^c) \leq 1$ .

*Demostración.*

- (i)  $0 = Nec(\emptyset) = Nec(A \cap A^c) = \min\{Nec(A), Nec(A^c)\}$ .
- (ii) Se tiene que  $\min\{Nec(A), Nec(A^c)\} = 0$  y además que  $\max\{Nec(A), Nec(A^c)\} \leq Nec(X)$  entonces

$$\min\{Nec(A), Nec(A^c)\} + \max\{Nec(A), Nec(A^c)\} \leq Nec(X),$$

de donde se concluye que  $Nec(A) + Nec(A^c) \leq 1$ . □

El siguiente resultado presenta algunas relaciones que existen entre las medidas de posibilidad y la medidas de necesidad.

**Proposición 1.18.** *Dados un espacio medible  $(X, \mathcal{A})$ , una medida de posibilidad  $\Pi : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  y una medida de necesidad  $Nec : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  se tienen las siguientes relaciones:*

- (i) Si  $Nec(A) \geq 0$  entonces  $\Pi(A) = 1$ .
- (ii) Si  $\Pi(A) \leq 1$  entonces  $Nec(A) = 0$ .

*Demostración.*

- (i) Se sabe que  $\min\{Nec(A), Nec(A^c)\} = 0$  y por hipótesis se tiene que  $Nec(A) \geq 0$ , entonces  $Nec(A^c) = 0$ , pero por la ecuación (1.1) se tiene que  $Nec(A^c) = 1 - \Pi(A)$ , de donde se concluye que  $1 - \Pi(A) = 0$ , y en consecuencia  $\Pi(A) = 1$ .
- (ii) Sabemos que  $\max\{\Pi(A), \Pi(A^c)\} = 1$  y por hipótesis se tiene que  $\Pi(A) \leq 1$ , entonces  $\Pi(A^c) = 1$ , pero por la ecuación (1.1) se tiene que  $\Pi(A^c) = 1 - Nec(A)$ , por lo tanto  $1 - Nec(A) = 1$ , de donde se concluye que  $Nec(A) = 0$ . □

### 1.2.3. Las $\lambda$ -medidas de Sugeno

En 1974, M. Sugeno introduce el concepto de  $\lambda$ -**medida** cuya característica es que es una medida normal que posee la propiedad de  $\lambda$ -aditividad (condición  $(\lambda_2)$  de la siguiente definición). Es de resaltar que las  $\lambda$ -medidas también son medidas difusas.

**Definición 1.19** ([20]). Sean  $\lambda \in (-1, \infty)$  y  $(X, \mathcal{A})$  un espacio medible. Una  $\lambda$ -medida es una función  $g_\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  que satisface:

$$(\lambda_1) \quad g_\lambda(X) = 1.$$

$$(\lambda_2) \quad \forall A, B \in \mathcal{A}, \text{ con } A \cap B = \emptyset \text{ se tiene que}$$

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B). \quad (1.2)$$

Obsérvese que la primera propiedad garantiza que  $g_\lambda$  es normal; ahora, la segunda propiedad hace, dependiendo del valor de  $\lambda$ , que se cumpla o no la propiedad de aditividad: si  $\lambda$  es negativa  $g_\lambda$  es subaditiva, si  $\lambda$  es positiva  $g_\lambda$  es superaditiva y si  $\lambda = 0$   $g_\lambda$  es aditiva. La siguiente proposición presenta algunas propiedades de una  $\lambda$ -medida.

**Proposición 1.20** ([9, 20]). Si  $g_\lambda$  es una  $\lambda$ -medida con  $\lambda > -1$ , entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(i)  $g_\lambda$  es una medida difusa.

(ii)  $\forall A, B \in \mathcal{A}$  se tiene que

$$g_\lambda(A \cup B) = \frac{g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - g_\lambda(A \cap B) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(A \cap B)}.$$

(iii)  $g_\lambda(A) + g_\lambda(A^c) = 1 - \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(A^c)$ .

*Demostración.* (i) Como  $g_\lambda$  es una  $\lambda$ -medida, entonces se tiene que  $g_\lambda(X) = 1$ . Por otra parte,  $X = X \cup \emptyset$ , luego

$$\begin{aligned} 1 &= g_\lambda(X \cup \emptyset) = g_\lambda(X) + g_\lambda(\emptyset) + \lambda \cdot g_\lambda(X) \cdot g_\lambda(\emptyset) \\ &= 1 + g_\lambda(\emptyset) + \lambda \cdot g_\lambda(\emptyset) \\ &= 1 + g_\lambda(\emptyset)(1 + \lambda), \end{aligned}$$

en consecuencia  $g_\lambda(\emptyset)(1 + \lambda) = 0$ , así  $g_\lambda(\emptyset) = 0$ . Luego se cumple  $(M_{D_1})$ .

Para la segunda propiedad ( $M_{D_2}$ ) consideremos que  $A \subseteq B$ . Entonces, existe  $C \in \mathcal{A}$  tal que  $B = A \cup C$ , luego

$$g_\lambda(B) = g_\lambda(A \cup C) = g_\lambda(A) + g_\lambda(C) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(C).$$

Pero

$$g_\lambda(C) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(C) = g_\lambda(C)(1 + \lambda \cdot g_\lambda(A)) \geq 0,$$

puesto que  $\lambda > -1$  y  $0 \leq g_\lambda(A) \leq 1$ . Así  $g_\lambda(A) \leq g_\lambda(B)$ .

Por lo anterior se concluye que una  $\lambda$ -medida es una medida difusa.

(ii) Obsérvese que  $A \cup B = (A \cap B^c) \cup B$  y  $(A \cap B^c) \cap B = \emptyset$ ,  $\forall A, B \in \mathcal{A}$ . Ahora

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A \cap B^c) + g_\lambda(B) + \lambda \cdot g_\lambda(A \cap B^c) \cdot g_\lambda(B).$$

También se tiene que  $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$  y son disjuntos para cualquier  $A, B \in \mathcal{A}$ , por lo tanto

$$g_\lambda(A \cap B^c) + g_\lambda(A \cap B) + \lambda \cdot g_\lambda(A \cap B^c) \cdot g_\lambda(A \cap B) = g_\lambda(A).$$

Esto implica que

$$g_\lambda(A \cap B^c) = \frac{g_\lambda(A) - g_\lambda(A \cap B)}{1 + \lambda g_\lambda(A \cap B)}.$$

Por lo tanto,

$$g_\lambda(A \cup B) = \frac{g_\lambda(A) - g_\lambda(A \cap B)}{1 + \lambda g_\lambda(A \cap B)} + g_\lambda(B) + \lambda \cdot \frac{g_\lambda(A) - g_\lambda(A \cap B)}{1 + \lambda g_\lambda(A \cap B)} \cdot g_\lambda(B).$$

Si sumamos la expresión del lado derecho se tiene que el numerador es

$$g_\lambda(A) - g_\lambda(A \cap B) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A \cap B) \cdot g_\lambda(B) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B) - \lambda \cdot g_\lambda(A \cap B) \cdot g_\lambda(B)$$

que al simplificarlo queda como

$$g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - g_\lambda(A \cap B) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B)$$

y en consecuencia se tiene que

$$g_\lambda(A \cup B) = \frac{g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - g_\lambda(A \cap B) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(A \cap B)}.$$

(iii) Como  $X = A \cup A^c$  y  $A \cap A^c = \emptyset$ , se tiene que

$$1 = g_\lambda(X) = g_\lambda(A \cup A^c) = g_\lambda(A) + g_\lambda(A^c) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(A^c).$$

De donde se concluye que

$$g_\lambda(A) + g_\lambda(A^c) = 1 - \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(A^c). \quad \square$$

El proceso de construir una  $\lambda$ -medida en una  $\sigma$ -álgebra tiene mucha importancia y significado práctico. Si  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es un conjunto finito,  $\mathcal{C}$  está constituido por todos los conjuntos unitarios de  $X$ , se conoce la medida de cada elemento  $x_i$  ( $g_i = g_\lambda(x_i)$ ),  $i = 1, 2, \dots, n$ , con  $0 \leq g_i < g_\lambda(X) < \infty$  y existen al menos dos puntos  $x_j$  donde  $g_j > 0$ , entonces  $g_\lambda$  define una  $\lambda$ -medida a partir de  $\mathcal{C}$  con parámetro  $\lambda$ . Si  $g_\lambda(X) = \sum_{i=1}^n g_i$ , entonces  $\lambda = 0$ ; por otro lado, si  $g_\lambda(X) \neq \sum_{i=1}^n g_i$ , entonces  $\lambda$  se puede encontrar por medio de la ecuación (ver [37])

$$1 + \lambda g_\lambda(X) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda \cdot g_i). \quad (1.3)$$

**Ejemplo 1.21.** *Un profesor de matemáticas evalúa a sus estudiantes de acuerdo con las siguientes materias: geometría, álgebra y estadística. El docente asigna los grados de importancia a las materias como sigue: geometría el 40 %, estadística el 40 % y álgebra el 50 %.*

*Si  $x_1$  representa geometría,  $x_2$  representa estadística y  $x_3$  representa álgebra, entonces se tiene que el grado de importancia de las materias satisface:*

$$g_1 = g_\lambda(\{x_1\}) = 0,4, \quad g_2 = g_\lambda(\{x_2\}) = 0,4 \quad y \quad g_3 = g_\lambda(\{x_3\}) = 0,5$$

*Para encontrar el grado de importancia entre la relación de las materias se debe encontrar el valor de  $\lambda$ , para ello se debe utilizar la ecuación (1.3) y el hecho de que la  $\lambda$ -medida debe ser normal, es decir, que  $g_\lambda(\{x_1, x_2, x_3\}) = g_\lambda(X) = 1$ :*

$$1 + \lambda g_\lambda(X) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda \cdot g_i) \implies 1 + \lambda = (0,4\lambda + 1)(0,4\lambda + 1)(0,5\lambda + 1),$$

*de donde se llega a la ecuación cúbica*

$$0,08\lambda^3 + 0,56\lambda^2 + 0,3\lambda = 0.$$

*Las raíces de la anterior ecuación son: 0,  $-0,584$  y  $-6,415$ . Dado que  $\lambda \in (-1, \infty)$  y que el valor de  $\lambda = 0$  genera una medida aditiva, entonces se debe considerar el valor de  $\lambda = -0,584$ .*

*En este caso se tiene que el grado de importancia al interrelacionar las materias es:*

$$\begin{aligned} g_\lambda(\{x_1, x_2\}) &= g_\lambda(\{x_1\}) + g_\lambda(\{x_2\}) + \lambda \cdot g_\lambda(\{x_1\}) \cdot g_\lambda(\{x_2\}) = 0,706 \\ g_\lambda(\{x_1, x_3\}) &= g_\lambda(\{x_1\}) + g_\lambda(\{x_3\}) + \lambda \cdot g_\lambda(\{x_1\}) \cdot g_\lambda(\{x_3\}) = 0,78 \\ g_\lambda(\{x_2, x_3\}) &= g_\lambda(\{x_2\}) + g_\lambda(\{x_3\}) + \lambda \cdot g_\lambda(\{x_2\}) \cdot g_\lambda(\{x_3\}) = 0,78 \\ g_\lambda(X) &= 1. \end{aligned}$$

Como puede observarse de la definición de  $g_\lambda$ , cuando  $\lambda = 0$  la medida obtenida es una medida difusa aditiva; cuando  $\lambda > 0$  la medida es superaditiva; y cuando  $\lambda < 0$  la medida difusa obtenida es subaditiva, estas relaciones entre las anteriores medidas difusas fueron estudiadas por Banon (ver [2]). Por otra parte, en las secciones anteriores se presentaron dos ejemplos importantes de medidas subaditivas: las medidas de plausibilidad y las medidas de posibilidad; dos ejemplos de medidas superaditivas: las medidas de credibilidad y las medidas de necesidad; así como un ejemplo de una medida aditiva: medida de probabilidad. La Figura 1.1 presenta un diagrama que muestra la relación entre  $\lambda$ -medidas y medidas aditivas, subaditivas y superaditivas.

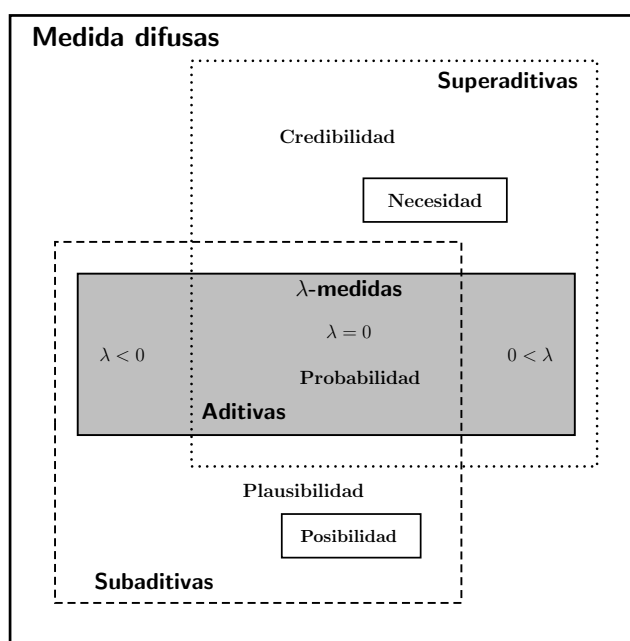


Figura 1.1: Relación entre las diferentes clases de medidas difusas.

### 1.3. Conjuntos nulos

Como ya se mencionó, en general, las medidas difusas pierden la propiedad de aditividad, y aparentemente son mucho más flexibles que las medidas clásicas. Pero debido a esto es difícil desarrollar una teoría general de las medidas difusas sin ninguna condición adicional.

En 1984, Wang en [33] introduce algunos conceptos nuevos de las características de las medidas difusas, como la nula-aditividad, autocontinuidad, autocontinuidad uniforme.

Después, en 1985 Wang introdujo en [34] otras características de las medidas difusas como pseudo nula-aditividad como lo contrario a la nula-aditividad, pseudo autocontinuidad como lo opuesto a la autocontinuidad. En 1992, Sun en [30] estudió los anteriores conceptos y la relación existente entre ellos.

Estos nuevos conceptos estructurales de las medidas difusas han servido para garantizar condiciones necesarias y suficientes para generalizar teoremas de la teoría clásica de la medida al contexto de las medidas difusas. La primera estructura que se estudiará en este capítulo es el concepto conjunto nulo.

La importancia de los conjuntos nulos en el contexto de las medidas difusas, es que permiten extender la noción de “*casi en todas partes*”, en el entorno de dichas medidas. Cuando se tiene una medida clásica, un conjunto nulo se define como un conjunto medible de medida cero. Pero esta definición de conjunto nulo no es apropiada para medidas difusas, dado que es posible que existan conjuntos medibles  $A$  y  $B$  tales  $\mu(A) = \mu(B) = 0$  pero  $\mu(A \cup B) \geq 0$ , como lo muestra el ejemplo:

**Ejemplo 1.22.** Sean  $X = \{0, 1\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu$  una medida difusa definida por:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \{0\}, \{1\}, \\ 1, & \text{si } A = X. \end{cases}$$

Es claro que con esta medida,  $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 0$ , pero la medida de  $\mu(\{0\} \cup \{1\}) = \mu(X) = 1$ .

Intentado responder la pregunta natural ¿como se puede extender el concepto de conjunto nulo a un espacio de medida difusa?, se introduce la siguiente definición de conjunto nulo para medidas difusas.

**Definición 1.23** ([16]). Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida difusa. Un subconjunto  $N$  de  $X$  es llamado conjunto nulo si, para cada par de conjuntos medibles  $A$  y  $B$ ,

$$A \subset B \cup N \quad \text{implica} \quad \mu(A) \leq \mu(B).$$

**Ejemplo 1.24.** Sean  $X = \{0, 1\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu$  una medida difusa definida por:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \{0\}, \{1\}, \\ 2, & \text{si } A = X. \end{cases}$$

Puesto que  $A \subset A$  entonces  $\{0\} \cup \{1\} \subset \{0\} \cup \{1\}$  aplicando la definición de conjunto nulo se obtiene que  $\mu(\{0\} \cup \{1\}) \not\leq \mu(\{1\})$ , por lo tanto  $\{0\}$  no es conjunto nulo, de manera similar se demuestra que  $\{1\}$  no es conjunto nulo; así se tiene que el único conjunto nulo es vacío.

**Ejemplo 1.25.** Sean  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu$  una medida difusa definida como:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \{a\}, \\ 2, & \text{si } A = \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, X, \end{cases}$$

Obsérvese que los conjuntos nulos son  $\emptyset$  y  $\{a\}$ , esto es debido a que:

$$\{b\} \cup \{a\} \subset \{b\} \cup \{a\} \quad \text{implica} \quad \mu(\{b\} \cup \{a\}) \leq \mu(\{b\}),$$

$$\{c\} \cup \{a\} \subset \{c\} \cup \{a\} \quad \text{implica} \quad \mu(\{c\} \cup \{a\}) \leq \mu(\{c\}),$$

$$\{b, c\} \cup \{a\} \subset \{b, c\} \cup \{a\} \quad \text{implica} \quad \mu(\{b, c\} \cup \{a\}) \leq \mu(\{b, c\}).$$

Se puede ver que todos los conjuntos nulos en el contexto clásico son conjuntos nulos en el sentido difuso. En efecto, sea  $\mu$  una medida clásica y  $A \in \mathcal{A}$  con  $\mu(A) = 0$ . Sean  $D, B \in \mathcal{A}$  con  $D \subset B \cup A$  entonces

$$\mu(D) \leq \mu(B \cup A) \leq \mu(B) + \mu(A) = \mu(B).$$

A continuación se dan algunas propiedades básicas de los conjuntos nulos.

**Proposición 1.26** ([18]). Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida difusa.

- (i) El conjunto vacío es un conjunto nulo.
- (ii) Si  $N \in \mathcal{A}$  es conjunto nulo, entonces  $\mu(N) = 0$ .
- (iii) Un subconjunto de un conjunto nulo es nulo.
- (iv) La unión de conjuntos nulos es un conjunto nulo.

La siguiente proposición permite hacer más comprensible la definición de conjunto nulo.

**Proposición 1.27** ([16]). Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida difusa y  $N \in \mathcal{A}$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $N$  es un conjunto nulo.
- (ii)  $\mu(A \cup N) = \mu(A)$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$ .

*Demostración.* La condición (i) implica la condición (ii): en efecto, puesto que  $A \cup N \subseteq A \cup N$ , por definición de conjunto nulo se tiene  $\mu(A \cup N) \leq \mu(A)$ . Debido a la monotonía de  $\mu$ , entonces  $\mu(A \cup N) = \mu(A)$ .

La condición (ii) implica la condición (i): en efecto, sean  $A, B \in \mathcal{A}$ . Si  $A \subseteq B \cup N$ , entonces  $\mu(A) \leq \mu(B \cup N) = \mu(B)$ . Por lo tanto  $N$  es un conjunto nulo.  $\square$

**Ejemplo 1.28.** Sean  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu$  una medida difusa definida por:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \{a\}, \\ 1, & \text{si } A = \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \\ 2, & \text{si } A = \{b, c\}, X. \end{cases}$$

Se tiene que:

$$\mu(\{b\} \cup \{a\}) = \mu(\{b\}), \quad \mu(\{c\} \cup \{a\}) = \mu(\{c\}) \quad \text{y} \quad \mu(\{b, c\} \cup \{a\}) = \mu(\{b, c\}).$$

En consecuencia, aplicando la proposición anterior se concluye que los conjuntos nulos son el conjunto vacío y el conjunto  $\{a\}$ .

**Proposición 1.29** ([16]). Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida difusa y  $N \in \mathcal{A}$ .  $N$  es conjunto un nulo si y solamente si, para cada par de conjuntos medibles  $A$  y  $B$ , se tiene que

$$A \cap N^c \subset B \quad \text{implica} \quad \mu(A) \leq \mu(B).$$

*Demostración.* En un sentido se tiene la implicación dado que  $A \subset B \cup N$  es equivalente a  $A \cap N^c \subset B$ . En el otro sentido la demostración se sigue de la definición de conjunto nulo. □

La siguiente proposición es dual a la Proposición 1.27.

**Proposición 1.30** ([16]). Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida difusa y  $N \in \mathcal{A}$ , entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $N$  es un conjunto nulo.
2.  $\mu(A \cap N^c) = \mu(A)$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$ .

## 1.4. Medidas difusas nula-aditivas

El concepto de medida difusa nula-aditiva fue introducido por Wang en [33]. La nula-aditividad es una estructura básica en la teoría de las medidas difusas, que ha permitido extender teoremas de la teoría clásica de la medida al contexto de las medidas difusas, como por ejemplo, el teorema de Egorov [14]. En esta sección se presenta la definición y algunas propiedades de dicha estructura.

**Definición 1.31** ([37]). Una función  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ , es llamada *nula-aditiva* si

$$\mu(A \cup B) = \mu(A),$$

siempre que  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $A \cap B = \emptyset$  y  $\mu(B) = 0$ .

**Ejemplo 1.32** ([22]). Sea  $\mu(A) \neq 0$  siempre que  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \neq \emptyset$ . Entonces  $\mu$  es *nula-aditiva*.

**Ejemplo 1.33.** Sean  $X = \{x, y\}$  y  $\mu$  una medida difusa definida de la siguiente manera:  $\mu(A) = 0$  para  $A \neq X$ . Entonces  $\mu$  no es *nula-aditiva*.

**Definición 1.34** ([41]). Una función  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ , es llamada *nula-subtractiva* si

$$\mu(A - B) = \mu(A),$$

siempre que  $A, B \in \mathcal{A}$  y  $\mu(B) = 0$ .

**Proposición 1.35** ([37]).  $\mu$  es *nula-aditiva* si y sólo si  $\mu$  es *nula-subtractiva*.

*Demostración.* Suficiencia: Supóngase que  $\mu$  es *nula-aditiva*. Sean  $A, B \in \mathcal{A}$ , con  $\mu(B) = 0$ . Por la monotonía de  $\mu$ , se tiene que  $\mu(A \cap B) = 0$ . Nótese que  $A = (A - B) \cup (A \cap B)$  y como  $\mu$  es *nula-aditiva* entonces

$$\mu(A) = \mu((A - B) \cup (A \cap B)) = \mu(A - B).$$

Lo cual implica que  $\mu$  es *nula-subtractiva*.

Necesidad: Supóngase ahora que  $\mu$  es *nula-subtractiva*. Sean  $A, B \in \mathcal{A}$ , con  $\mu(B) = 0$ . Por la monotonía de  $\mu$ , se tiene que  $\mu(B - A) = 0$ . Entonces, como

$$A = A \cup (B \cap B^c) = (A \cup B) - (B - A),$$

y  $\mu$  es *nula-subtractiva* se tiene que

$$\mu(A) = \mu((A \cup B) - (B - A)) = \mu(A \cup B).$$

Lo cual implica que  $\mu$  es *nula-aditiva*. □

Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $X$ , entonces  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ .

**Teorema 1.36** ([37]). Sea  $\mu$  una medida difusa. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(i)  $\mu$  es nula-aditiva.

(ii)  $\mu$  es nula-subtractiva.

(iii)  $\mu(A\Delta B) = \mu(A)$ , siempre que  $\mu(B) = 0$  y  $A \cap B = \emptyset$ .

*Demostración.* Obsérvese que de la proposición anterior, el enunciado (i) es equivalente al (ii).

Obsérvese que el enunciado (i) implica el enunciado (iii). En efecto, Supóngase que  $\mu$  es nula-aditiva y sean  $A, B \in \mathcal{A}$ , con  $\mu(B) = 0$ . Nótese que  $0 \leq \mu(B - A) \leq \mu(B) = 0$  y  $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ .

Como  $\mu$  es nula-aditiva se tiene que:

$$\mu(A\Delta B) = \mu((A - B) \cup (B - A)) = \mu(A - B) = \mu(A).$$

Como ser nula-subtractiva es equivalente a ser nula-aditiva se obtiene la conclusión.

La condición (iii) implica la condición (i). En efecto, como que  $A \cap B = \emptyset$  entonces  $A\Delta B = A \cup B$ , por lo tanto se tiene que

$$\mu(A) = \mu(A\Delta B) = \mu(A \cup B).$$

Lo cual implica que  $\mu$  es nula-aditiva. □

El concepto de medida difusa débilmente nula-aditiva fue introducido por Wu en [40]. La nula-aditiva es una estructura básica en la teoría de las medidas difusas, que ha permitido extender teoremas de la teoría clásica de la medida al contexto de las medidas difusas, como los es, el teorema de Lusin. En esta sección se presenta la definición y algunas propiedades de dicha estructura.

**Definición 1.37** ([1]). *Una medida  $\mu$  se llama débilmente nula-aditiva, si  $\mu(A \cup B) = 0$ , siempre que  $A, B \in \mathcal{A}$  y  $\mu(A) = \mu(B) = 0$ .*

**Ejemplo 1.38.** Sean  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu$  una medida difusa definida como:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \{a\}, \\ 0,5, & \text{si } A = \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \\ 1, & \text{si } A = \{a, b\}, X. \end{cases}$$

Debido a que los subconjuntos  $\emptyset$  y  $\{a\}$  satisfacen que  $\mu(\{a\} \cup \emptyset) = 0$  con  $\mu(\{a\}) = \mu(\emptyset) = 0$ , concluimos que  $\mu$  es una medida difusa débilmente nula-aditiva.

**Ejemplo 1.39.** Sean  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu$  una medida difusa definida como:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \{a\}, \{b\}, \\ \alpha, & \text{si } A = X, \end{cases}$$

con  $\alpha > 0$ . Obsérvese que  $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$ , pero  $\mu(\{a\} \cup \{b\}) \neq 0$  entonces  $\mu$  no es una medida difusa débilmente nula-aditiva.

**Proposición 1.40** ([1]). Si  $\mu$  es una medida nula-aditiva entonces  $\mu$  es débilmente nula-aditiva.

*Demostración.* Supóngase que  $\mu$  es nula-aditiva. Sean  $A, B \in \mathcal{A}$ , con  $\mu(B) = \mu(A) = 0$ . Se tiene que  $\mu(A) = \mu(A \cup B)$  y por transitividad se tiene que  $\mu(A \cup B) = 0$ . Luego se concluye que  $\mu$  es débilmente nula-aditiva.  $\square$

El recíproco de la anterior proposición no es cierto, por ejemplo:

**Ejemplo 1.41.** Sean  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu$  una medida difusa definida como:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \{a\}, \\ 1, & \text{si } A = \{b\}, \\ 2, & \text{si } A = X. \end{cases}$$

$\mu$  es una medida difusa débilmente nula-aditiva, pero  $\mu$  no es nula-aditiva debido a que  $\mu(\{a\}) = 0$ , pero  $\mu(\{a\} \cup \{b\}) = 2 \neq \mu(\{b\})$ .

## 1.5. Autocontinuidad

El concepto de medida difusa autocontinua fue introducido por Wang en [33]. La autocontinuidad es una estructura básica en la teoría de las medidas difusas, que ha permitido estudiar teoremas de convergencia para la integral de Choquet [24]. En esta sección se presenta la definición y algunas propiedades de dicha estructura.

**Definición 1.42** ([35]). Una función  $\mu$  es llamada autocontinua superior (resp., inferior) si satisface

$$\lim_n \mu(A \cup B_n) = \mu(A), \quad (\text{resp.}, \lim_n \mu(A - B_n) = \mu(A)),$$

siempre que  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B_n \in \mathcal{A}$  (resp.,  $B_n \subseteq A$ ) y  $\lim_n \mu(B_n) = 0$ .

$\mu$  es llamada autocontinua, si es autocontinua superior e inferior.

**Teorema 1.43** ([37]). *Si  $\mu$  es una medida difusa autocontinua superior o inferior entonces  $\mu$  es nula-aditiva.*

*Demostración.* Sean  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{A}$ ,  $A \cap B = \emptyset$  y  $\mu(B) = 0$ , tomemos  $B_n = B$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , entonces  $\lim_n \mu(B_n) = \mu(B) = 0$ .

- Supóngase que  $\mu$  es autocontinua superior, entonces

$$\mu(A \cup B) = \lim_n \mu(A \cup B_n) = \mu(A),$$

luego  $\mu$  es nula-aditiva.

- Supóngase que  $\mu$  es autocontinua inferior, entonces

$$\mu(A \cup B) = \lim_n \mu((A \cup B) - B_n) = \mu(A),$$

por lo tanto  $\mu$  es nula-aditiva. □

A continuación se presenta un ejemplo para demostrar que el recíproco del anterior teorema no se tiene.

**Ejemplo 1.44** ([24]). *Sean  $X = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu$  una medida difusa continua por arriba definida así:*

$$\mu(A) = \begin{cases} \frac{1}{6n}, & \text{si } A = \{n\} \text{ para algún } n, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } |A| > 1, \\ 1, & \text{si } A = \mathbb{N}, \\ 0, & \text{si } A = \emptyset, \end{cases}$$

donde  $|A|$  es la cardinalidad del conjunto  $A$ .  $\mu$  es nula-aditiva, porque el único conjunto para el que la medida vale cero es vacío, pero se puede demostrar que  $\mu$  no es autocontinua superior ni inferior.

En efecto, si para  $n \geq 1$  se denota  $\{n, n+1, n+2, \dots\} = [n, \infty)$ , entonces se tiene que

$$\mu(\{1\} \cup [n, \infty)) \rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{1}{6} = \mu(\{1\}) \quad \text{y} \quad \mu(\mathbb{N} \setminus [n, \infty)) = \mu([1, n-1]) \rightarrow \frac{1}{2} \neq 1 = \mu(\mathbb{N}).$$

Por lo tanto  $\mu$  no es autocontinua superior ni inferior.

**Teorema 1.45** ([37]).  $\mu$  es una medida difusa autocontinua si y sólo si

$$\lim_n \mu(A \Delta B_n) = \mu(A),$$

siempre que  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\{B_n\} \subset \mathcal{A}$  y  $\lim_n \mu(B_n) = 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\mu$  es autocontinua,  $A \in \mathcal{A}$  y  $\{B_n\} \subset \mathcal{A}$  con  $\lim_n \mu(B_n) = 0$ . Obsérvese que

$$A - B_n \subset A \Delta B_n \subset A \cup B_n;$$

y por la monotonía de  $\mu$  se tiene que

$$\mu(A - B_n) \leq \mu(A \Delta B_n) \leq \mu(A \cup B_n).$$

Como  $\mu$  es autocontinua entonces es  $\mu$  autocontinua superior e inferior, por lo tanto

$$\lim_n \mu(A \cup B_n) = \mu(A) \quad \text{y} \quad \lim_n \mu(A - B_n) = \mu(A).$$

En consecuencia, se puede concluir que

$$\lim_n \mu(A \Delta B_n) = \mu(A).$$

Ahora se demostrará la segunda parte.

Supóngase que

$$\lim_n \mu(A \Delta B_n) = \mu(A)$$

para  $A \in \mathcal{A}$  y  $\{B_n\} \subset \mathcal{A}$  con  $\lim_n \mu(B_n) = 0$ , se tiene que  $B_n - A \in \mathcal{A}$  y  $\mu(B_n - A) \leq \mu(B_n)$  por lo tanto se tiene que

$$\lim_n \mu(B_n - A) = 0.$$

Por hipótesis, se tiene que

$$\lim_n \mu(A \cup B_n) = \lim_n \mu(A \Delta (B_n - A)) = \mu(A).$$

Por lo tanto se puede concluir que  $\mu$  es autocontinua superior. De manera análoga, se tiene que

$$\lim_n \mu(B_n \cap A) = 0,$$

y por hipótesis, se tiene que

$$\lim_n \mu(A - B_n) = \lim_n \mu(A \Delta (B_n \cap A)) = \mu(A).$$

Luego  $\mu$  es autocontinua inferior. □

**Teorema 1.46.** *Sea  $\mu$  una medida difusa acotada, esto es  $|\mu(X)| < \infty$ . Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

(i)  $\mu$  es autocontinua.

(ii)  $\mu$  es autocontinua superior.

(iii)  $\mu$  es autocontinua inferior.

La demostración de este teorema usa algunos conceptos adicionales que no hemos revisado en este trabajo, por lo cual se recomienda al lector interesado en la demostración ver [37].

### 1.5.1. Autocontinuidad uniforme

El concepto de medida difusa uniformemente autocontinua fue introducido por Wang en [33]. La autocontinuidad uniforme es una estructura básica en la teoría de las medidas difusas, que ha permitido relacionar otras estructuras difusas como las medidas subaditivas con las medidas nula-aditivas. En esta sección se presenta la definición y algunas relaciones de dicha estructura.

**Definición 1.47** ([35]). *Una función  $\mu$  es llamada uniformemente autocontinua superior (resp. uniformemente autocontinua inferior) si y sólo si para cada  $A \in \mathcal{A}$  y  $\epsilon \geq 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon, A) > 0$  tal que*

$$\mu(A) - \epsilon \leq \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \epsilon,$$

$$[\text{resp. } \mu(A) - \epsilon \leq \mu(A - B) \leq \mu(A) + \epsilon,]$$

siempre que  $B \in \mathcal{A}$  (resp.  $B \subset A$ ) y  $\mu(B) < \delta$ .

$\mu$  se dice que es uniformemente autocontinua si y sólo si es uniformemente autocontinua superior e inferior.

**Teorema 1.48** ([37]). *Sea  $\mu$  una medida difusa uniformemente autocontinua superior (o inferior), entonces  $\mu$  es autocontinua superior (o inferior, resp.). Por lo tanto la autocontinuidad uniforme implica autocontinuidad.*

**Teorema 1.49** ([37]). *Sea  $\mu$  una medida difusa. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i)  $\mu$  es uniformemente autocontinua.

(ii)  $\mu$  es uniformemente autocontinua superior.

(iii)  $\mu$  es uniformemente autocontinua inferior.

(iv) Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que

$$\mu(A) - \epsilon \leq \mu(A \Delta B) \leq \mu(A) + \epsilon,$$

siempre que  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{A}$  y  $\mu(B) < \delta$ .

*Demostración.* Observe que la primera condición implica la segunda condición, ésta se tiene de la definición de uniformemente continua.

La segunda condición implica la tercera, puesto que  $\mu(A \cap B) \leq \mu(B) \leq \delta$ , entonces se tiene

$$\mu(A) = \mu((A - B) \cup (A \cap B)) \leq \mu(A - B) + \epsilon$$

por monotonía de  $\mu$  y uniformemente autocontinua superior.

La tercera condición implica la cuarta, puesto que  $\mu(A \cap B) \leq \mu(B) \leq \delta$ , se tiene por un lado que:

$$\mu(A \Delta B) = \mu((A \cup B) - (A \cap B)) \geq \mu(A \cup B) - \epsilon \geq \mu(A) - \epsilon.$$

Por otro lado se tiene que  $\mu(B - A) \leq \mu(B) \leq \delta$ , entonces

$$\mu(A) \geq \mu(A - B) = \mu((A \Delta B) - (B - A)) \geq \mu(A \Delta B) - \epsilon.$$

La cuarta condición implica la primera dado que como  $A \cap B = \emptyset$  entonces  $A \Delta B = A \cup B$ , por lo tanto se tiene que

$$\mu(A) - \epsilon \leq \mu(A \Delta B) = \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \epsilon. \quad \square$$

**Ejemplo 1.50** ([37]). Sea  $X = X^- \cup X^+$ , donde  $X^- = \{-1, -2, \dots\}$ ,  $X^+ = \{1, 2, \dots\}$ , y sea  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ .

Sea  $\mu$  la medida difusa definida por:

$$\mu(A) = |A^*| + \sum_{i \in A - A^*} 2^i$$

para todo  $A \in \mathcal{A}$ , con

$$A^* = \{i \mid i \in A \cap X^-, |i| \leq \sup\{j \mid j \in A \cap X^-\}\} \cup \{A \cap X^+\}.$$

Nótese que  $A - A^* \subset X$  y que  $\mu$  es continua y autocontinua. Ahora se demuestra que  $\mu$  no es uniforme autocontinua. Para algún  $\delta > 0$  y  $0 < \epsilon < 1$ , existen  $i \in X$  y  $j = -i \in X^+$  tales que  $\mu(\{i\}) = 2^i < \delta$  y

$$\mu(\{j, i\}) - \mu(\{j\}) = 2 - 1 = 1 > \epsilon.$$

**Teorema 1.51** ([37]). Si  $\mu$  una medida difusa subaditiva, entonces  $\mu$  es uniformemente autocontinua.

*Demostración.* Sean  $A, B \in \mathcal{A}$  entonces se tiene que

$$\mu(A) \leq \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B),$$

haciendo  $\epsilon = \mu(B) \geq 0$ , se tiene la conclusión. □

**Corolario 1.52.** Si  $\mu$  una medida difusa aditiva, entonces  $\mu$  es uniformemente autocontinua.

*Demostración.* Como toda medida aditiva es subaditiva, entonces por el teorema anterior se tiene la conclusión.  $\square$

En la Figura 1.2 se ilustra la relación entre las diferentes características estructurales de las medidas difusas.

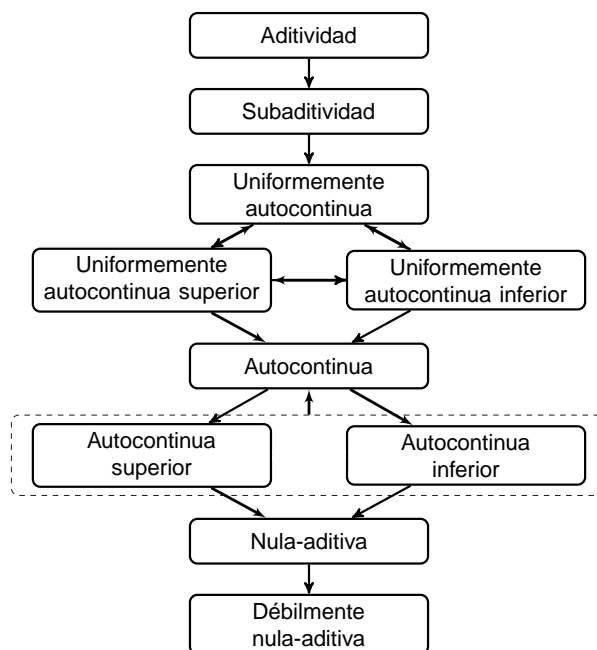


Figura 1.2: Relación entre las características de las estructuras de las medidas difusas.

El siguiente teorema es utilizado en la construcción de ejemplos de medidas difusas que poseen propiedades estructurales como la nula-aditividad, la autocontinuidad y autocontinuidad uniforme, respectivamente.

**Teorema 1.53** ([35]). Sean  $\mu_1 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  y  $\mu_2 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  dos medidas difusas nula-aditivas (resp. autocontinuas o uniformemente autocontinuas). Si se define  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  como

$$\mu(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A),$$

para todo  $A \in \mathcal{A}$ . Entonces  $\mu$  es una medida difusa nula-aditiva (resp. autocontinua o uniformemente autocontinua).

*Demostración.* Primero se demostrará que  $\mu$  es una medida difusa, para ello hay que verificar que  $\mu$  satisface sólo las propiedades  $(M_{D_1})$  y  $(M_{D_2})$  de la Definición 1.1.

La primera condición se satisface dado que  $\mu(\emptyset) = \mu_1(\emptyset) + \mu_2(\emptyset) = 0 + 0 = 0$ .

Para demostrar la segunda propiedad, considérese que  $A, B \in \mathcal{A}$  y que  $A \subseteq B$ ; como  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son medidas difusas se tiene que  $\mu_1(A) \leq \mu_1(B)$  y  $\mu_2(A) \leq \mu_2(B)$  entonces  $\mu_1(A) + \mu_2(A) \leq \mu_1(B) + \mu_2(B)$ ; luego se tiene que  $\mu(A) \leq \mu(B)$ , de donde se puede concluir que  $\mu$  cumple  $(M_{D_2})$ .

Se demostrará ahora que  $\mu$  es nula-aditiva. Las demás condiciones se demuestran análogamente.

Supóngase que  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son medidas difusas nula-aditivas. Para todo  $A, B \in \mathcal{A}$ , se tiene que  $A \cap B = \emptyset$ , si  $\mu(B) = 0$ , entonces  $\mu_1(B) + \mu_2(B) = 0$ , como  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son medidas difusas, se tiene que  $\mu_1(B) = \mu_2(B) = 0$ . Lo cual implica que

$$\mu(A \cup B) = \mu_1(A \cup B) + \mu_2(A \cup B) = \mu_1(A) + \mu_2(A) = \mu(A).$$

Concluyendo así que  $\mu$  es nula-aditiva. □

**Ejemplo 1.54.** Sean  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ ,  $\mu_1$  y  $\mu_2$  medidas difusas aditivas definidas por

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \\ 1, & \text{si } A = \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ 2, & \text{si } A = \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \\ 3, & \text{si } A = X, \end{cases} \quad \text{y} \quad \mu_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \\ 2, & \text{si } A = \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ 4, & \text{si } A = \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \\ 6, & \text{si } A = X. \end{cases}$$

Fácilmente se obtiene que

$$\mu_1(A) + \mu_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \\ 3, & \text{si } A = \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ 6, & \text{si } A = \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \\ 9, & \text{si } A = X, \end{cases}$$

que se comprueba de manera sencilla que es una medida difusa aditiva.

El siguiente ejemplo satisface que la suma de una medida difusa subaditiva con una medida difusa aditiva, es una medida difusa subaditiva.

**Ejemplo 1.55.** Sean  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ ,  $\mu_1$  una medida difusa aditiva y  $\mu_2$  una

medida difusa subaditiva definidas por

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \\ 1, & \text{si } A = \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ 2, & \text{si } A = \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \\ 3, & \text{si } A = X, \end{cases} \quad y \quad \mu_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \\ 1, & \text{si } A = \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ 3, & \text{si } A = \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \\ 6, & \text{si } A = X. \end{cases}$$

Fácilmente, se obtiene que

$$\mu_1(A) + \mu_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset, \\ 2, & \text{si } A = \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ 5, & \text{si } A = \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \\ 9, & \text{si } A = X. \end{cases}$$

Es claro que  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  es una medida difusa subaditiva. Pero como  $\mu(\{a\} \cup \{b\}) \neq \mu(\{a\}) + \mu(\{b\})$  la medida no es aditiva.

Con base en el Teorema 1.53, Wang en [35], formula la pregunta para el caso de la multiplicación de una medida difusa nula-aditiva (resp. autocontinua, uniformemente autocontinua) con otra medida difusa nula-aditiva (resp. autocontinua, uniformemente autocontinua). En la bibliografía revisada, el único autor que ha trabajado sobre esta pregunta es L. Xuecheng en [42] quien obtuvo una respuesta parcial si mutuamente las dos medidas son absolutamente continuas débilmente. Consideramos que el estudio de esta pregunta es un interesante problema para futuros trabajos.

## Capítulo 2

# Integración respecto a medidas difusas

Dada una medida difusa, lo inmediatamente natural es considerar la integral con respecto a dicha medida. Estas integrales pueden ser denominadas integrales difusas. El propósito de este capítulo es presentar dos tipos de integrales difusas: integral de Sugeno e integral de Choquet. Estos dos funcionales se pueden definir sobre cualquier medida difusa. Se presentan, además de sus definiciones, las propiedades más destacadas y conocidas, y algunos resultados análogos a los teoremas de convergencia de la teoría de la medida clásica; posteriormente, haciendo uso del concepto de funciones equiordenadas, se presenta un estudio comparativo entre dichas integrales, con el fin de señalar sus semejanzas y sus diferencias conceptuales.

### 2.1. Integral de Sugeno

A no ser que se diga lo contrario,  $(X, \mathcal{A})$  es un espacio de medida, donde  $X \in \mathcal{A}$ ,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es una medida difusa continua y  $\mathcal{G}$  es la clase de todas las funciones medibles<sup>1</sup> no negativas finitas definidas en  $(X, \mathcal{A})$ . Dada cualquier función  $f \in \mathcal{G}$ ,  $[f]^\alpha = \{x \mid f(x) \geq \alpha\}$  y  $[f]^{\alpha+} = \{x \mid f(x) > \alpha\}$ , donde  $\alpha \in (0, \infty)$ . Estos conjuntos son llamados  $\alpha$ -niveles y  $\alpha$ -niveles estrictos de  $f$ , respectivamente. El soporte de  $f$  es  $[f]^0 = \overline{\{x \mid f(x) > 0\}} = \overline{[f]^{0+}}$  (ver Figura 1.2).

Dado que el recorrido de las funciones que se considerarán es  $[0, \infty)$ , se utiliza la siguiente convención  $\inf_{x \in \emptyset} f(x) = \infty$ .

<sup>1</sup>Se dice que una aplicación  $f : (X, \mathcal{A}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_2)$  entre espacios medibles, es una función medible, si  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$  para todo  $B \in \mathcal{A}_2$ , es decir  $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$ .

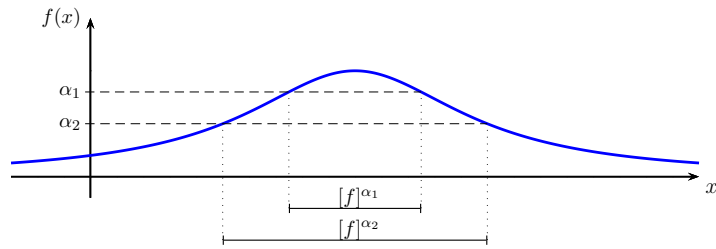


Figura 2.1: Los  $\alpha$ -niveles de  $f$ .

Los operadores mínimo y máximo se denotaran por los símbolos  $\wedge$  y  $\vee$ , respectivamente.

**Definición 2.1** ([36, 37]). Sea  $A \in \mathcal{A}$  y  $f \in \mathcal{G}$ . La integral de Sugeno de  $f$  sobre  $A$ , con respecto a  $\mu$ , que se denota por  $\int_A f d\mu$ , es definida por

$$\int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0, \infty]} \{\alpha \wedge \mu(A \cap [f]^\alpha)\}.$$

Cuando  $A = X$ , la integral de Sugeno también puede ser denotada por  $\int f d\mu$ .

Cuando se utilice el símbolo  $\int_A f d\mu$  se sobreentenderá que  $A \in \mathcal{A}$  y  $f \in \mathcal{G}$ .

**Observación 2.2.** Si  $X = (-\infty, \infty)$ ,  $\mathcal{A}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}$ ,  $\mu$  es la medida de Lebesgue y  $f : X \rightarrow [0, \infty)$  es una función de una variable, entonces el significado geométrico de  $\int_A f d\mu$  es la longitud del lado del cuadrado más grande que puede inscribirse entre la curva  $f(x)$  y el eje  $x$ , esto ocurre, dado que el  $\sup_{\alpha \in [0, \infty]} \{\alpha \wedge \mu(A \cap [f]^\alpha)\}$  se obtiene cuando  $\alpha = \mu(A \cap [f]^\alpha)$  (ver Figura 2.2).

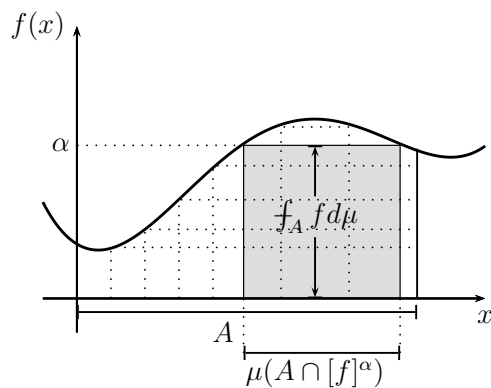


Figura 2.2: Interpretación geométrica de la integral de Sugeno.

**Ejemplo 2.3.** Sea  $X = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A}$  la clase de todos los conjuntos de Borel en  $X$  y  $\mu$  la

medida de Lebesgue. Si  $f(x) = x^2$  entonces

$$\int f d\mu = \int x^2 d\mu = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Nótese que para encontrar el lado del cuadrado de mayor área que se puede inscribir en la región acotada por  $f(x) = x^2$ , el eje  $x$  y la recta  $x = 1$ , se debe resolver la ecuación  $\alpha = 1 - \sqrt{\alpha}$ , donde  $\alpha$  es la altura del cuadrado y  $1 - \sqrt{\alpha}$  es la medida de la base del cuadrado; aunque dicha ecuación tiene dos soluciones, se ha considerado solo la que pertenece al intervalo  $[0, 1]$ .

Utilizando las definiciones de  $[f]^\alpha$ ,  $[f]^{\alpha+}$  y  $\int_A f d\mu$ , se pueden demostrar las siguientes igualdades:

**Teorema 2.4** ([36, 37]). Si  $\sigma(f)$  es la  $\sigma$ -álgebra más pequeña generada por  $f$ , se tienen que:

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{\alpha \wedge \mu(A \cap [f]^\alpha)\} = \sup_{\alpha \in [0, \infty]} \{\alpha \wedge \mu(A \cap [f]^{\alpha+})\} \\ &= \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{\alpha \wedge \mu(A \cap [f]^{\alpha+})\} = \sup_{E \in \sigma(f)} \left\{ \left( \inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right\} \\ &= \sup_{E \in \mathcal{A}} \left\{ \left( \inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right\}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Observe que cuando  $\alpha = \infty$  entonces  $[f]^\alpha = [f]^{\alpha+} = \emptyset$ , en cuyo caso, son evidentes las ecuaciones

$$\int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{\alpha \wedge \mu(A \cap [f]^\alpha)\}$$

y

$$\sup_{\alpha \in [0, \infty]} \{\alpha \wedge \mu(A \cap [f]^{\alpha+})\} = \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{\alpha \wedge \mu(A \cap [f]^{\alpha+})\}.$$

Probemos ahora que

$$\sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{\alpha \wedge \mu(A \cap [f]^\alpha)\} = \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{\alpha \wedge \mu(A \cap [f]^{\alpha+})\}.$$

Por una parte, es de mencionar que  $\mu(A \cap [f]^\alpha) \geq \mu(A \cap [f]^{\alpha+})$  para todo  $\alpha \in [0, \infty)$ .

Entonces

$$\sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{\alpha \wedge \mu(A \cap [f]^\alpha)\} \geq \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{\alpha \wedge \mu(A \cap [f]^{\alpha+})\}.$$

Por otra parte, para cualquier  $\varepsilon > 0$  y  $\alpha \in (0, \infty)$ , tomando  $\alpha' \in ((\alpha - \varepsilon) \vee 0, \alpha)$ , se tiene que

$$\alpha \wedge \mu(A \cap [f]^\alpha) \leq (\alpha' + \varepsilon) \wedge \mu(A \cap [f]^{\alpha'+});$$

por consiguiente, se tiene

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{ \alpha \wedge \mu(A \cap [f]^\alpha) \} &\leq \sup_{\alpha' \in [0, \infty)} \{ (\alpha' + \varepsilon) \wedge \mu(A \cap [f]^{\alpha'+}) \} \\ &\leq \sup_{\alpha' \in [0, \infty)} \{ \alpha' \wedge \mu(A \cap [f]^{\alpha'+}) \} + \varepsilon \\ &\leq \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{ \alpha \wedge \mu(A \cap [f]^{\alpha+}) \} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon$  puede tomarse arbitrariamente cercano a cero, entonces

$$\sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{ \alpha \wedge \mu(A \cap [f]^\alpha) \} \leq \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{ \alpha \wedge \mu(A \cap [f]^{\alpha+}) \}.$$

En consecuencia se tiene la igualdad

$$\sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{ \alpha \wedge \mu(A \cap [f]^\alpha) \} = \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \{ \alpha \wedge \mu(A \cap [f]^{\alpha+}) \}.$$

Se tiene pendiente por demostrar que

$$\int_A f d\mu = \sup_{E \in \sigma(f)} \left\{ \left( \inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right\} = \sup_{E \in \mathcal{A}} \left\{ \left( \inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right\}.$$

Obsérvese inicialmente que para cualquier  $\alpha \in [0, \infty]$ , ya que  $\inf_{x \in [f]^\alpha} f(x) \geq \alpha$ , y señalando que  $[f]^\alpha \in \sigma(f)$ , se tiene que

$$\{ \alpha \wedge \mu(A \cap [f]^\alpha) \} \leq \sup_{E \in \sigma(f)} \left\{ \left( \inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right\},$$

y en consecuencia se tiene que

$$\int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0, \infty]} \{ \alpha \wedge \mu(A \cap [f]^\alpha) \} \leq \sup_{E \in \sigma(f)} \left\{ \left( \inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right\}.$$

Seguidamente, como  $\sigma(f) \subset \mathcal{A}$ , entonces se tiene

$$\sup_{E \in \sigma(f)} \left\{ \left( \inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right\} \leq \sup_{E \in \mathcal{A}} \left\{ \left( \inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right\}.$$

Ahora, para cualquier  $E \in \mathcal{A}$ , si se toma  $\alpha' = \inf_{x \in E} f(x)$ , entonces  $E \subset [f]^{\alpha'}$ , de donde se sigue por la monotonía de  $\mu$ , que

$$\mu(A \cap E) \leq \mu(A \cap [f]^{\alpha'}).$$

En consecuencia,

$$\left\{ \left( \inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right\} \leq \alpha' \wedge \mu(A \cap E) \leq \sup_{\alpha \in [0, \infty]} \{ \alpha \wedge \mu(A \cap E) \} = \int_A f d\mu$$

para cualquier  $E \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto

$$\sup_{E \in \mathcal{A}} \left\{ \left( \inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right\} \leq \int_A f d\mu. \quad \square$$

### 2.1.1. Propiedades de la integral de Sugeno

A continuación se presentan algunas propiedades de la integral de Sugeno.

**Teorema 2.5** ([25, 37]). Sean  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $f, g \in \mathcal{G}$ ,  $\chi_A$  es la función característica de  $A$  y  $k$  cualquier constante en  $[0, \infty)$ . La  $\int_A f d\mu$  satisface las siguientes propiedades:

1. Si  $\mu(A) = 0$ , entonces  $\int_A f d\mu = 0$ .
2. Si  $\mu$  es continua por abajo y  $\int_A f d\mu = 0$ , entonces  $\mu(A \cap \{x \mid f(x) > 0\}) = 0$ .
3. Si  $f \leq g$ , entonces  $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$ .
4.  $\int_A f d\mu = \int_A f \cdot \chi_A d\mu$ .
5.  $\int_A k d\mu = k \wedge \mu(A)$ .
6.  $\int_A (f + k) d\mu \leq \int_A f d\mu + \int_A k d\mu$  ( $k \in [0, \infty)$ ).
7. Si  $A \subset B$  entonces  $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$ .
8.  $\int_A (f \vee g) d\mu \geq \int_A f d\mu \vee \int_A g d\mu$ .
9.  $\int_A (f \wedge g) d\mu \leq \int_A f d\mu \wedge \int_A g d\mu$ .
10.  $\int_{A \cup B} f d\mu \geq \int_A f d\mu \vee \int_B f d\mu$ .
11.  $\int_{A \cap B} f d\mu \leq \int_A f d\mu \wedge \int_B f d\mu$ .

Las propiedades 1, 3, 4 y 5 se siguen de la definición de integral de Sugeno; la demostración de la propiedad 2 se sigue de la continuidad por abajo; para demostrar la propiedad 6 se debe utilizar el Teorema 2.4; la propiedad 7 se sigue de las propiedades 3 y 4; las propiedades 8 y 9 se siguen de la propiedad 3; las propiedades 10 y 11 se siguen directamente de la propiedad 7.

Aunque algunas de las propiedades presentadas son similares a las de la integral de Lebesgue clásica, otras no, como es el caso de las propiedades 5 y 6 que están relacionadas con la linealidad. Esto implica, que la integral de Sugeno carece de dicha propiedad, que si satisface la integral de Lebesgue. Por ejemplo:

**Ejemplo 2.6.** Sean  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ 1 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = a, \\ 1 & \text{si } x = b, \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = b, \\ 1 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Aplicando la definición de integral de Sugeno se tiene que:

$$\int f \, d\mu = 1, \quad \int g \, d\mu = 1 \quad y \quad \int (f + g) \, d\mu = 1.$$

En conclusión,  $\int (f + g) \, d\mu \neq \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ .

**Ejemplo 2.7.** Sean  $X = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A}$  la clase de todos los conjuntos de Borel en  $X$  y  $\mu$  la medida de Lebesgue. Si  $f(x) = x^2$  y  $a = 2$ , al utilizar la Observación 2.2, se tiene que

$$\int a f \, d\mu = \int 2x^2 \, d\mu = \frac{1}{2}$$

y

$$a \int f \, d\mu = 2 \int x^2 \, d\mu = 2 \times \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 3 - \sqrt{5}.$$

Por lo tanto se puede concluir que  $\int a f \, d\mu \neq a \int f \, d\mu$ .

Las siguientes propiedades de la integral de Sugeno son bien conocidas y sus demostraciones pueden encontrarse en [18, 37].

**Lema 2.8** ([25, 18, 37]). Sean  $A \in \mathcal{A}$  y  $f, g \in \mathcal{G}$ . Entonces se tienen las siguientes propiedades.

1.  $\int_A f \, d\mu \leq \mu(A)$ .
2. Para cualquier  $\beta < \alpha$ , si  $\alpha \leq \mu(A \cap [f]^\beta)$  entonces  $\alpha \leq \int_A f \, d\mu$ .
3. Para cualquier  $\beta < \alpha$ , si  $\alpha \geq \mu(A \cap [f]^\beta)$  entonces  $\alpha \geq \int_A f \, d\mu$ .
4.  $\int_A f \, d\mu < \alpha$  si y sólo si, existe  $\beta < \alpha$  tal que  $\mu(A \cap [f]^\beta) < \alpha$ .
5.  $\int_A f \, d\mu > \alpha$  si y sólo si, existe  $\beta < \alpha$  tal que  $\mu(A \cap [f]^\beta) > \alpha$ .
6. Si  $\mu(A) < \infty$ , entonces  $\alpha \leq \int_A f \, d\mu$  si y sólo si  $\alpha \leq \mu(A \cap [f]^\alpha)$ .

Sea  $A \in \mathcal{A}$  y  $P$  una proposición con respecto a los puntos de  $A$ . Si existe  $E \in \mathcal{A}$  con  $\mu(E) = 0$  tal que  $P$  es cierto sobre  $A \setminus E$ , entonces se dice que “ $P$  es cierto en casi todas partes de  $A$ ”. Se abreviará “en casi todas partes” por “c.t.p.”. Si “ $g$  es igual a  $f$  c.t.p.”, se denotará por “ $g = f$  c.t.p.”.

Un resultado de la teoría clásica de funciones medibles es que si  $g = f$  c.t.p., entonces sus integrales son iguales; este resultado no siempre se cumple en el caso de medidas difusas. Por ejemplo, sean  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{A} = P(X)$  y

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = X, \\ 0 & \text{si } A \neq X. \end{cases}$$

Si  $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a, \\ 0 & \text{si } x = b, \end{cases}$  y  $f(x) = 1$ , entonces, claramente bajo la medida difusa  $\mu$ ,  $g = f$  c.t.p., pero observe que

$$\int g \, d\mu = 0 \quad \text{y} \quad \int f \, d\mu = 1.$$

Para que el resultado mencionado se cumpla es necesario poner una condición adicional sobre la medida difusa. La noción de dicha condición fue parte del estudio presentado en el capítulo anterior.

**Teorema 2.9** ([28, 37]).  $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$  cuando  $f = g$  c.t.p. si y sólo si  $\mu$  es una medida difusa nula-aditiva.

*Demostración. Suficiencia:* Si  $\mu$  es una medida nula-aditiva, entonces  $\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$ . Por otra parte, de la definición de nula-aditividad se sabe que  $\mu([g]^\alpha) \leq \mu([f]^\alpha \cup \{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = \mu([f]^\alpha)$ , para todo  $\alpha \in [0, \infty]$ . El recíproco de la desigualdad se obtiene de forma equivalente. Así, se puede concluir que  $\mu([g]^\alpha) = \mu([f]^\alpha)$  para todo  $\alpha \in [0, \infty]$  y, por tanto, de la definición de integral de Sugeno, se tiene que

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

*Necesidad:* Para todo  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $\mu(B) = 0$ , si  $\mu(A) = \infty$ , entonces, por la monotonía de  $\mu$ ,  $\mu(A \cup B) = \infty = \mu(A)$ . Ahora, asuma que  $\mu(A) < \infty$  y muéstrese por contradicción que  $\mu(A \cup B) = \mu(A)$ . Supóngase que estas medidas son diferentes, esto es  $\mu(A \cup B) > \mu(A)$ ; suponga que  $t_0 \in (\mu(A), \mu(A \cup B))$ , y considere las funciones, iguales en casi toda parte, definidas por

$$f(x) = \begin{cases} t_0 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A, \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} t_0 & \text{si } x \in A \cup B, \\ 0 & \text{si } x \notin A \cup B. \end{cases}$$

Debido a que  $\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = \mu(B \setminus A) \leq \mu(B) = 0$ , se tiene que  $f = g$  c.t.p.

Así, se debe considerar que

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Ahora, el lado izquierdo es igual a

$$\int f \, d\mu = t_0 \wedge \mu(A) = \mu(A),$$

y el lado derecho es igual a

$$\int g \, d\mu = t_0 \wedge \mu(A \cup B) = t_0 \neq \mu(A).$$

Por tanto, se tiene una contradicción.  $\square$

Si  $\mu$  es nula-aditiva se puede utilizar el hecho de que si  $f = g$  c.t.p. sobre  $A$ , para concluir que  $f \cdot \chi_A = g \cdot \chi_A$  c.t.p. sobre  $A$ , esto junto con los teoremas 2.5 y 2.9 llevan al siguiente resultado.

**Corolario 2.10** ([36, 37]). *Si  $\mu$  es nula-aditiva, entonces  $\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$  siempre que  $f = g$  c.t.p. sobre  $A$ .*

Ahora, si  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $\mu(B) = 0$  y  $\mu$  es nula-aditiva, entonces se puede utilizar el hecho de que  $f \cdot \chi_{A \cup B} = f \cdot \chi_A$  c.t.p., para demostrar:

**Corolario 2.11** ([36, 37]). *Si  $\mu$  es nula-aditiva, entonces para cualquier  $f \in \mathcal{G}$ ,*

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu,$$

cuando  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $\mu(B) = 0$ .

### 2.1.2. Teoremas de convergencia para la integral de Sugeno

Dentro de los resultados más importantes de la teoría de medida clásica se encuentran los teoremas de convergencia, dichos teoremas dan condiciones sobre las cuales, si una sucesión de funciones medibles converge a alguna función medible en cierto sentido, entonces las correspondientes sucesiones de integrales también convergen a la integral de la función límite, esto es, los símbolos del límite y la integral pueden ser intercambiados.

Entre los teoremas de convergencia de la teoría de medida clásica más destacados se tienen: el teorema de convergencia monótona, el teorema de convergencia uniforme y el teorema de la convergencia dominada. La idea a continuación es presentar, para el caso de la integral de Sugeno, bajo ciertas condiciones un poco más débiles, resultados análogos a los mencionados anteriormente.

De aquí en adelante se asumirá, a no ser que se diga lo contrario, que la medida difusa  $\mu$  es continua,  $\{f_n\} \subset \mathcal{G}$ ,  $f \in \mathcal{G}$ ,  $[f]_n^\alpha = \{x \mid f_n(x) \geq \alpha\}$  y  $[f]_n^{\alpha+} = \{x \mid f_n(x) > \alpha\}$ . Adicionalmente, para sucesiones de números y sucesiones de funciones se usarán los mismos símbolos:  $\searrow$ ,  $\nearrow$  y  $\longrightarrow$ , que denotan los conceptos de convergencias por arriba, convergencia por abajo y convergencia, respectivamente. Como se mencionó antes,

“c.t.p.” es la abreviación de “en casi todas partes”. Si “ $\{f_n\}$  converja a  $f$  c.t.p.”, se denotará por “ $\{f_n\} \xrightarrow{\text{c.t.p.}} f$ ”.

Se inicia recordando el concepto de convergencia en la medida.

Una sucesión de funciones medibles  $\{f_n\}$  se dice que converge a  $f$  en la medida, en símbolos  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ , si para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$ .

Nótese que esto último es equivalente a decir, que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que cuando  $n \geq n_0$

$$\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\} < \varepsilon.$$

Se introduce ahora un concepto de convergencia para espacios de medida difusa que es análogo al concepto de convergencia en la media para medidas clásicas.

**Definición 2.12** ([36, 37]). *Sea  $\{f_n\} \subset \mathcal{G}$  y  $f \in \mathcal{G}$ . Se dice que  $\{f_n\}$  S-converge en la media a  $f$  si y sólo si*

$$\lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

Obsérvese que si  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ , entonces dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que cuando  $n \geq n_0$

$$\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\} < \varepsilon.$$

Por el Lema 2.8(5) se tiene que

$$\int |f_n - f| d\mu < \varepsilon.$$

Implicando esto que  $\{f_n\}$  S-converge en la media a  $f$ . En el sentido contrario, si no se satisface que  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ , entonces existen  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  y una sucesión  $\{n_i\}$  tales que para cualquier  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$

$$\mu\{x : |f_{n_i}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} > \delta.$$

Esto implica que

$$\int |f_{n_i} - f| d\mu \geq \varepsilon \wedge \mu\{x : |f_{n_i}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \geq \varepsilon \wedge \delta > 0.$$

Y por lo tanto, tampoco se satisface que  $\{f_n\}$  S-converja en la media a  $f$ .

Es decir, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 2.13** ([36, 37]). *En espacios de medida difusa la S-convergencia en la media es equivalente al concepto de convergencia en la medida.*

A continuación se presenta otro resultado que está relacionado con la convergencia en los  $\alpha$ -niveles.

**Lema 2.14** ([36, 37]). *Si  $f_n \searrow f$  sobre  $X$ , entonces*

$$[f]_n^\alpha \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} [f]_n^\alpha = [f]^\alpha \quad y \quad [f]^{\alpha+} \subset [f]_n^{\alpha+} \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} [f]_n^{\alpha+} \subset [f]^\alpha.$$

*Demostración.* Se demostrará la segunda parte. La primera se sigue de forma similar.

Sea  $f_n \searrow f$ , luego  $f_n \geq f$  para todo  $x \in X$ , de donde se tiene que si  $x \in [f]^{\alpha+}$ , entonces  $f(x) > \alpha$ , y esto a su vez implica que  $f_n(x) > \alpha$ , de donde  $x \in [f]_n^{\alpha+}$ . En consecuencia  $[f]^{\alpha+} \subset [f]_n^{\alpha+}$ . Por la misma razón,  $\{[f]_n^{\alpha+}\}$  es no creciente con respecto a  $n$ , así  $[f]_n^{\alpha+} \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} [f]_n^{\alpha+}$ . Ahora, si  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [f]_n^{\alpha+}$  entonces  $x \in [f]_n^{\alpha+}$  para todo  $n$ , de donde se tiene que  $f_n(x) > \alpha$  para todo  $n$ , esto implica que  $f(x) \geq \alpha$ , y por tanto  $x \in [f]^\alpha$ . De esta forma se obtiene que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [f]_n^{\alpha+} \subset [f]^\alpha$ .  $\square$

El siguiente resultado puede considerarse como el análogo del teorema de convergencia monótona, y podría llamarse “teorema de convergencia bajo la integral de Sugeno para sucesiones de funciones en medidas difusas”.

**Teorema 2.15** ([36, 37]). *Sea  $A \in \mathcal{A}$ . Si  $f_n \searrow f$  sobre  $A$  y existe  $n_0$  tal que*

$$\mu \left( \left\{ x \mid f_{n_0}(x) > \int_A f \, d\mu \right\} \cap A \right) < \infty,$$

*o si  $f_n \nearrow f$ , entonces*

$$\lim_n \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, considere  $A = X$ . Llame  $\int f \, d\mu = k$  y sea  $f_n \searrow f$  con  $n_0$  tal que  $\mu(\{x \mid f_{n_0}(x) > k\}) < \infty$ .

Si  $k = \infty$ , por la monotonicidad de la integral de Sugeno, se tiene que  $\int f_n \, d\mu \geq \int f \, d\mu = \infty$ , y se cumpliría el teorema. Ahora, si  $k < \infty$ , entonces  $\int f_n \, d\mu \geq k$  para todo  $n = 1, 2, \dots$ , y por tanto  $\lim_n \int f_n \, d\mu \geq k$ . Utilizando reducción al absurdo se demuestra que la igualdad se cumple. En efecto, si  $\lim_n \int f_n \, d\mu > k$ , entonces existe un  $k' > k$  tal que  $\lim_n \int f_n \, d\mu > k'$  y, en consecuencia  $\int f_n \, d\mu > k'$  para todo  $n$ , lo que esto a su vez implica, por el Lema 2.8(5), que  $\mu([f]_n^{k'}) > k'$  para todo  $n$ . Dado que existe  $n_0$  tal que

$$\mu([f]_{n_0}^{k'}) = \mu(\{x \mid f_{n_0}(x) \geq k'\}) \leq \mu(\{x \mid f_{n_0}(x) > k\}) < \infty,$$

se obtiene, después de aplicar la continuidad por arriba de  $\mu$  y el Lema 2.14, que  $\mu \left( [f]^{k'} \right) = \lim_n \mu \left( [f]_n^{k'} \right) \geq k'$ .

Por el Lema 2.8(6), se tendría que  $\int f d\mu \geq k' > k$ , lo que contradice  $\int f d\mu = k$ . En consecuencia, se tiene que

$$\lim_n \int f_n d\mu = k = \int f d\mu.$$

La demostración se hace de forma análoga cuando  $f_n \nearrow f$ . □

La condición de que existe  $n_0$  tal que

$$\mu \left( \left\{ x \mid f_{n_0}(x) > \int_A f d\mu \right\} \cap A \right) < \infty,$$

es necesaria en el Teorema 2.15, sin ésta condición, la conclusión del teorema no se tiene. En el siguiente ejemplo se evidencia este hecho.

**Ejemplo 2.16.** Sean  $X = [0, \infty)$ ,  $\mathcal{A}$  la clase de todos los conjuntos de Borel que están en  $X$  y  $\mu$  la medida de Lebesgue. Tomando  $f_n(x) = \frac{\sqrt{x}}{n^2}$  para todo  $x \in X$  y todo  $n = 1, 2, \dots$ ; entonces  $f_n \searrow f \equiv 0$ . Obsérvese que

$$\mu \left( \left\{ x \mid f_n(x) > \int f d\mu \right\} \right) = \mu(\{x \mid f_n(x) > 0\}) = \mu(X) = \infty$$

para todo  $n = 1, 2, \dots$ . En consecuencia,  $\int f_n d\mu = \infty$  para todo  $n = 1, 2, \dots$ , pero  $\int f d\mu = 0$ ; por lo tanto

$$\lim_n \int f_n d\mu \neq \int f d\mu.$$

Como consecuencia del Teorema 2.15 se obtienen los siguientes corolarios:

**Corolario 2.17** ([36, 37]). Sean  $A \in \mathcal{A}$  y  $\mu$  una medida difusa. Si  $f_n \searrow f$  sobre  $A$  y existen  $n_0$  y una constante  $k \leq \int_A f d\mu$  tales que

$$\mu(\{x \mid f_{n_0}(x) > k\} \cap A) < \infty,$$

entonces

$$\int_A f_n d\mu \searrow \int_A f d\mu.$$

**Corolario 2.18** ([36, 37]). Si  $f_n \searrow f$  sobre  $A \in \mathcal{A}$  y  $\mu$  es una medida difusa finita, entonces

$$\int_A f_n d\mu \searrow \int_A f d\mu.$$

**Corolario 2.19** ([36, 37]). Sea  $\mu$  una medida nula-aditiva.

1. Si  $f_n \searrow f$  c.t.p., y existen  $n_0$  y una constante  $k \leq \int f d\mu$  tales que  $\mu(\{x \mid f_{n_0}(x) > k\}) < \infty$ , entonces

$$\int f_n d\mu \searrow \int f d\mu.$$

2. Si  $f_n \nearrow f$  c.t.p., entonces

$$\int f_n d\mu \nearrow \int f d\mu.$$

A partir del Teorema 2.15 se puede llegar a un resultado similar al Lema de Fatou.

**Teorema 2.20** ([36, 37]). Sean  $A \in \mathcal{A}$  y  $\mu$  una medida difusa. Si  $f(x) = \liminf_n f_n(x)$  para todo  $x \in A$ , entonces

$$\int_A f d\mu \leq \liminf_n \int_A f_n d\mu.$$

Haciendo uso del teorema de convergencia monótona, se puede dar un teorema de convergencia de sucesiones Sugeno integrables para sucesiones de funciones medibles, que es convergente en toda parte.

**Teorema 2.21** ([36, 37]). Sean  $A \in \mathcal{A}$  y  $\mu$  una medida difusa. Si  $f_n \rightarrow f$  sobre  $A$ , y existen  $n_0$  y una constante  $k \leq \int_A f d\mu$  tales que

$$\mu\left(\left\{x \mid \sup_{n \geq n_0} f_n(x) > k\right\} \cap A\right) < \infty,$$

entonces

$$\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu.$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $A = X$ . Considere  $\theta_n = \inf_{i \geq n} f_i$  y  $\phi_n = \sup_{i \geq n} f_i$ . Estas dos funciones son medibles para todo  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\phi_n \searrow f$  y  $\theta_n \nearrow f$ , luego  $\theta_n \leq f \leq \phi_n$ , y en consecuencia

$$\int \theta_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \int \phi_n d\mu,$$

esta desigualdad implica que

$$\lim_n \int \theta_n d\mu \leq \liminf_n \int f d\mu \leq \overline{\lim}_n \int f d\mu \leq \lim_n \int \phi_n d\mu.$$

Por otra parte, dado que existen  $n_0$  y una constante  $k \leq \int f d\mu$  tales que  $\mu(\{x \mid f_{n_0}(x) > k\}) < \infty$ , se puede concluir, a partir del Teorema 2.15 y el Corolario 2.17 que

$$\lim_n \int \theta_n d\mu = \int f d\mu = \lim_n \int \phi_n d\mu,$$

y en consecuencia

$$\lim_n \int f d\mu = \overline{\lim}_n \int f d\mu = \int f d\mu. \quad \square$$

Para sucesiones de funciones medibles convergentes c.t.p. se obtiene, a partir de los teoremas 2.9 y 2.21 el siguiente resultado que podría llamarse “teorema de convergencia c.t.p. bajo la integral de Sugeno”.

**Teorema 2.22** ([36, 37]).  $\int_A f_n d\mu \longrightarrow \int_A f d\mu$  cuando  $A \in \mathcal{A}$ , si  $f_n \xrightarrow{c.t.p.} f$  sobre  $A$  y existen  $n_0$  y una constante  $k \leq \int_A f d\mu$  tales que

$$\mu(\{x \mid f_{n_0}(x) > k\} \cap A) < \infty,$$

si y sólo si  $\mu$  es nula-aditiva.

Para el caso de sucesiones convergentes c.t.p. en medidas difusas finitas y subaditivas se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 2.23** ([36, 37]). Sea  $\mu$  una medida difusa finita y subaditiva. Si  $f_n \xrightarrow{c.t.p.} f$ , entonces se cumple

$$\int f_n d\mu \longrightarrow \int f d\mu.$$

El Teorema de convergencia dominada bajo la integral de Sugeno, no siempre se tiene.

**Ejemplo 2.24.** Sea  $X = [0, \infty)$ ,  $\mathcal{B}$  la clase de todos los conjuntos de Borel,  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup X$  y  $\mu$  la medida de Lebesgue. Considere

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > n, \\ 0 & \text{if } 0 \leq x \leq n. \end{cases}$$

Claramente se tiene que  $f_n \searrow f \equiv 0$ . Por otra parte, se tiene que para todo  $x \in X$  y todo  $n = 1, 2, \dots$   $0 \leq f_n(x) \leq 1$ . También se tiene que  $\int 1 d\mu = 1 < \infty$  y que para todo  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\int f_n d\mu = 1$ . No obstante,  $\int f d\mu = 0$ . Esto implica que

$$\lim_n \int f_n d\mu \neq \int f d\mu.$$

Nuevamente, la condición del Teorema 2.15 que no se satisface es la existencia del  $n_0$  que hace que

$$\mu\left(\left\{x \mid f_{n_0}(x) > \int f d\mu\right\}\right) < \infty.$$

## 2.2. Integral de Choquet

Debido a que las medidas difusas son una generalización de las medidas de Lebesgue, la integral de Choquet, que se realiza con respecto a una medida difusa, puede considerarse como una extensión natural de la integral de Lebesgue. La integral de Choquet es utilizada con éxito en muchos problemas prácticos, como por ejemplo, la clasificación de individuos o fenómenos, reconocimiento y procesamiento de imágenes, la toma de decisiones bajo incertidumbre y modelado de datos, entre otros (ver por ejemplo [10, 11, 15, 23] y las referencias en ellas mencionadas).

A continuación se presentará la definición de integral de Choquet, sus propiedades más destacadas y algunos resultados relacionados con la convergencia de funciones bajo la integral de Choquet.

**Definición 2.25** ([6, 36]). Sean  $A \in \mathcal{A}$  y  $f \in \mathcal{G}$ . La integral de Choquet de  $f$  con respecto a una medida difusa  $\mu$  en un conjunto medible  $A$ , que se denota por  $\int_A f d\mu$ , es definida por

$$\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu([f]^\alpha \cap A) d\alpha.$$

Cuando  $A = X$ , la integral de Choquet también puede ser indicada simplemente por  $\int f d\mu$ .

Observe que  $[f]^\alpha, [f]^\alpha \cap A \in \mathcal{A}$  para todo  $\alpha \in [0, \infty)$ . Esto implica que  $\mu([f]^\alpha \cap A)$  está bien definido para todo  $\alpha \in [0, \infty)$ . El siguiente teorema establece una forma equivalente, en términos de  $[f]^{\alpha+}$ , para la definición de integral de Choquet con respecto a las medidas difusas finitas.

**Teorema 2.26** ([37]). Sean  $A \in \mathcal{A}$  y  $\mu$  una medida difusa. Si  $\mu(A)$  es finita, entonces para  $\alpha \in [0, \infty)$

$$\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu([f]^{\alpha+} \cap A) d\alpha.$$

*Demostración.* Para algún  $\varepsilon > 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_0^\infty \mu([f]^\alpha \cap A) d\alpha = \int_0^\infty \mu(\{x \mid f(x) \geq \alpha\} \cap A) d\alpha \\ &\geq \int_0^\infty \mu(\{x \mid f(x) > \alpha\} \cap A) d\alpha \geq \int_0^\infty \mu(\{x \mid f(x) \geq \alpha + \varepsilon\} \cap A) d\alpha \\ &= \int_0^\infty \mu(\{x \mid f(x) \geq \alpha + \varepsilon\} \cap A) d(\alpha + \varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty \mu(\{x \mid f(x) \geq \alpha\} \cap A) d\alpha \\ &\geq \int_0^\infty \mu(\{x \mid f(x) \geq \alpha\} \cap A) d\alpha - \varepsilon \cdot \mu(A) \end{aligned}$$

$$= \int_A f d\mu - \varepsilon \cdot \mu(A).$$

Puesto  $\mu(A) < \infty$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se tiene  $\varepsilon \cdot \mu(A) \rightarrow 0$ , y en consecuencia se obtendría que

$$\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \mid f(x) > \alpha\} \cap A) d\alpha = \int_0^\infty \mu([f]^{\alpha+} \cap A) d\alpha. \quad \square$$

Cuando  $\mu$  es una medida difusa aditiva, la integral de Choquet coincide con la integral de Lebesgue. Así, la integral de Choquet puede considerarse como la generalización de la integral de Lebesgue.

**Ejemplo 2.27.** Sea  $X = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $[0, 1]$ ,  $\mu(B) = [m(B)]^2$  para  $B \in \mathcal{A}$ , donde  $m$  es la medida de Lebesgue y  $f(x) = x^2$  para  $x \in X$ .  $\mu$  es una medida difusa en  $\mathcal{A}$  y  $f$  es una función medible en  $X$ . Aplicando la definición de la integral de Choquet de  $f$  con respecto a  $\mu$  se tiene que

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int_0^\infty \mu(\{x \mid f(x) \geq \alpha\}) d\alpha = \int_0^\infty \mu(\{x \mid x^2 \geq \alpha\}) d\alpha \\ &= \int_0^1 \mu([\sqrt{\alpha}, 1]) d\alpha = \int_0^1 [m([\sqrt{\alpha}, 1])]^2 d\alpha = \int_0^1 (1 - \sqrt{\alpha})^2 d\alpha \\ &= \int_0^1 (1 - 2\sqrt{\alpha} + \alpha) d\alpha = 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

### 2.2.1. Propiedades de la integral de Choquet

A continuación se dan algunas propiedades que satisface la integral de Choquet.

**Teorema 2.28** ([3, 6, 36, 37]). Sean  $f$  y  $g$  funciones medibles no negativas en  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , donde  $\mu$  es una medida difusa. Si  $A$  y  $B$  son conjuntos medibles, y  $a$  es una constante real no negativa, entonces

1.  $\int 1 d\mu = \mu(A)$ .
2.  $\int f d\mu = \int f \cdot \mathcal{X}_A d\mu$ .
3. Si  $f \leq g$  en  $A$ , entonces  $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ .
4. Si  $A \subset B$ , entonces  $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$ .
5.  $\int a \cdot f d\mu = a \cdot \int f d\mu$ .
6.  $\int (f \vee g) d\mu \geq \int f d\mu \vee \int g d\mu$ .

$$7. \int (f \wedge g) d\mu \leq \int f d\mu \wedge \int g d\mu$$

Las demostraciones de estas propiedades se obtienen aplicando la definición de integral de Choquet.

**Teorema 2.29** ([3, 6, 36, 37]). Sean  $A \in \mathcal{A}$  y  $\mu$  una medida difusa. Para cualquier constante  $c$  que satisfice  $f + c \geq 0$ , se tiene que

$$\int_A (f + c) d\mu = \int_A f d\mu + c \cdot \mu(A).$$

*Demostración.* De la definición de la integral de Choquet se tiene que  $f(x) + c \geq \alpha$  para cada  $x \in X$ ; así, cuando  $\alpha$  esta entre 0 y  $c$ , se tiene

$$\begin{aligned} \int_A (f + c) d\mu &= \int_0^\infty \mu(\{x \mid f(x) + c > \alpha\} \cap A) d\alpha \\ &= \int_c^\infty \mu(\{x \mid f(x) + c > \alpha\} \cap A) d\alpha + \int_0^c \mu(\{x \mid f(x) + c > \alpha\} \cap A) d\alpha \\ &= \int_c^\infty \mu(\{x \mid f(x) > \alpha - c\} \cap A) d(\alpha - c) + \int_0^c \mu(X \cap A) d\alpha \\ &= \int_0^\infty \mu(\{x \mid f(x) > \alpha\} \cap A) d\alpha + \int_0^c \mu(A) d\alpha \\ &= \int_A f d\mu + c \cdot \mu(A). \end{aligned} \quad \square$$

Al igual que para el caso de la integral de Sugeno, debido a la no aditividad de  $\mu$ , la integral de Choquet no es en general lineal con respecto a su integrando, propiedad que si satisface la integral de Lebesgue.

**Ejemplo 2.30.** Sean  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ , y  $\mu$  una función medible sobre  $X$  definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ 1 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = a, \\ 1 & \text{si } x = b, \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = b, \\ 1 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Aplicando las propiedades de la integral de Choquet se tiene que

$$\int f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \mid f(x) \geq \alpha\} \cap A) d\alpha = \int_0^1 \mu(\{b\}) d\mu = 1 \times 1 = 1,$$

$$\int g d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \mid g(x) \geq \alpha\} \cap A) d\alpha = \int_0^1 \mu(\{a\}) d\mu = 1 \times 1 = 1$$

y

$$\int (f + g) d\mu = \int d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \mid 1 \geq \alpha\}) d\alpha = \int_0^1 1 d\mu = 1.$$

De donde se puede concluir que

$$\int (f + g) d\mu \neq \int f d\mu + \int g d\mu,$$

esto es, en general, la integral de Choquet no satisface la linealidad.

Intentando resolver este inconveniente de la no linealidad de la integral de Choquet, Murofushi y Sugeno [17] introducen el concepto de funciones equiordenadas, este concepto trata de reflejar la idea de que las imágenes de las funciones  $f$  y  $g$  están ordenadas de la misma manera.

**Definición 2.31** ([3, 17, 36, 37]). *Sean  $f$  y  $g$  funciones medibles no negativas. Se dice que  $f$  y  $g$  son equiordenadas, y se denota por  $f \sim g$ , si y sólo si  $f(x_1) < f(x_2)$  implica que  $g(x_1) < g(x_2)$  para todo  $x_1, x_2 \in X$ .*

Como consecuencia de esta definición se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.32** ([3, 17, 36, 37]). *Si  $f \sim g$ , entonces*

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Más adelante se realiza una demostración de este resultado para el caso discreto (ver Proposición 2.42).

### 2.2.2. Teoremas de convergencia para la integral de Choquet

Al igual que para el caso de la integral de Sugeno, se estudiarán a continuación, bajo algunas condiciones más débiles, algunos teoremas de convergencia para la integral de Choquet.

La clase de todas las funciones medibles con valores reales para los cuales la integral de Choquet está bien definida será denotada por  $\mathcal{C}$  y al subconjunto formado por todas las funciones medibles que tienen un valor finito bajo la integral de Choquet será denotada por  $\mathcal{C}_0$ .

Se inicia con una definición análoga a la dada para S-convergencia en la media.

**Definición 2.33** ([36, 37]).  *$\{f_n\}$  converge en la media (con respecto a la integral de Choquet) a  $f$ , se denota por  $f_n \xrightarrow{m.C.} f$ , si*

$$\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

Es de observar que la convergencia uniforme implica la convergencia media, mientras que la convergencia media implica la convergencia con respecto a la medida.

De forma análoga que para la integral de Sugeno, se tiene un resultado que generaliza el Lema de Fatou y cuya demostración se sigue de manera análoga al caso de la integral de Sugeno.

**Lema 2.34** ([36, 37]). Sean  $A \in \mathcal{A}$  y  $\mu$  una medida difusa. Si existe  $g \in \mathcal{C}_0$  tal que  $f_n \geq g$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , entonces

$$\int_A \left( \liminf_n f_n \right) d\mu \leq \liminf_n \int_A f_n d\mu.$$

La demostración del siguiente resultado se sigue de forma similar a la prueba del Teorema 2.21.

**Teorema 2.35** ([12, 37]). Sean  $A \in \mathcal{A}$  y  $\mu$  una medida difusa. Si  $f_n \rightarrow f$  y existe  $g \in \mathcal{C}_0$  tales que  $|f_n| \leq g$ , para  $n = 1, 2, \dots$  en  $A$ , entonces

$$\int_A f_n d\mu \longrightarrow \int_A f d\mu.$$

A continuación se dará un ejemplo donde se observa la importancia de los conceptos estructurales de las medidas difusas dadas en la última parte del capítulo anterior. Debido a que hay funciones medibles  $f$  y  $g$  tales  $g = f$  c.t.p. en el sentido clásico de la definición de conjunto nulo, pero  $\int f d\mu \neq \int g d\mu$ , de ahí la importancia de la extensión de la definición de conjunto nulo para las medidas difusas.

**Ejemplo 2.36.** Sean  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \neq X, \\ 1 & \text{si } A = X. \end{cases}$$

Considere las funciones medibles

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = a, \\ 1 & \text{si } x = b, \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = b, \\ 2 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Claramente  $g = f$  c.t.p. en el sentido ordinario. Pero

$$\int f d\mu = 0 \quad y \quad \int g d\mu = 1.$$

El siguiente resultado da las condiciones necesarias para que se cumpla la observación realizada.

**Lema 2.37** ([12, 37]). Sean  $A \in \mathcal{A}$  y  $f, g \in \mathcal{C}$ . Si  $\mu$  es una medida difusa nula-aditiva y  $f = g$  c.t.p. Entonces

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu.$$

*Demostración.* Dado que  $[f]^\alpha \subset [g]^\alpha \cup \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$  y  $\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$ , entonces se tiene por la nula-aditividad y monotonicidad de  $\mu$ , que

$$\mu([f]^\alpha \cap A) \leq \mu([g]^\alpha \cap A) \cup \{x \mid f(x) \neq g(x)\} = \mu([g]^\alpha \cap A).$$

Aplicando la definición de integral de Choquet, se obtiene

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu.$$

La otra desigualdad se obtiene de manera análoga. □

**Ejemplo 2.38.** Sean  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}$  y

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ 0,5 & \text{si } A = \{a\}, \{b\}, \\ 1 & \text{si } A = X. \end{cases}$$

Considere las funciones medibles  $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a, \\ 0 & \text{si } x = b, \end{cases}$  y  $f(x) = 1$ . Claramente bajo la medida difusa  $\mu$ ,  $g = f$  c.t.p., además se tiene que  $\mu$  es una medida difusa nula-aditiva, entonces

$$\int f d\mu = \int g d\mu = 1.$$

Si  $\mu$  es una medida nula-aditiva, se tendría, después de aplicar directamente el Teorema 2.35 y el Lema 2.37, el siguiente resultado, que puede llamarse el teorema de la convergencia en casi todas partes bajo la integral de Choquet.

**Teorema 2.39** ([12, 37]). Sean  $\mu$  una medida difusa nula-aditiva y  $A \in \mathcal{A}$ . Si  $f_n \xrightarrow{\text{c.t.p.}} f$  y existe  $g \in \mathcal{C}_0$ , tales que  $|f_n| \leq g$  c.t.p. para  $n = 1, 2, \dots$  en  $A$ , entonces

$$\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu.$$

Denneberg en [6], Hong y Kim en [12], Murofushi, Sugeno y Suzuki en [19], Wang en [33, 34, 35], Wang y Klir en [37], entre otros, han estudiado otros tipos de convergencia, tanto para la integral de Sugeno, como para la integral de Choquet, pero para ello, han necesitado introducir nuevos conceptos, como por ejemplo: funciones equiordenadas, convergencia en la distribución, función equi-integrable, entre otros. Para el lector que este interesado en dichos temas, se le recomienda ver las referencias mencionadas al inicio de este párrafo.

### 2.3. Integrales de Sugeno y Choquet en conjuntos finitos

A continuación se presenta una caracterización de las integrales de Sugeno y Choquet cuando el conjunto  $X$  es finito.

Sea  $\mu$  una medida difusa en  $X$ . Sean  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  y  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  una función con recorrido  $\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)\}$  tal que  $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3) \leq \dots \leq f(x_n)$ .

Considere  $A_i = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n\}$ , donde

$$\begin{aligned}\mu(A_1) &= \mu(\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}), \\ \mu(A_2) &= \mu(\{x_2, x_3, \dots, x_n\}), \\ &\vdots \\ \mu(A_n) &= \mu(\{x_n\}).\end{aligned}$$

Ahora, si  $f_i$  indica el valor de  $f$  en el punto  $x_i$ , entonces la integral de Sugeno y la integral de Choquet se pueden escribir, respectivamente, como

$$\int f d\mu = \bigvee_{i=1}^n (f_i \wedge \mu(A_i)) = S_\mu(f) \quad \text{y} \quad \int f d\mu = \sum_{i=1}^n f_i \cdot (\mu(A_i) - \mu(A_{i+1})) = E_\mu(f),$$

donde  $A_{n+1} = \emptyset$ .

**Ejemplo 2.40.** Sean  $X = \{0, 1, 2\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu$  la medida difusa sobre  $\mathcal{A}$  definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \neq \{0, 1\}, \\ 3 & \text{si } A = \{0, 1\}. \end{cases}$$

Considere ahora la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 0, \\ 3 & \text{si } x = 1, \\ 2 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Entonces  $f_1 = f(2) = 2$ ,  $f_2 = f(1) = 3$  y  $f_3 = f(0) = 4$ ;  $\mu(A_1) = \mu(\{0, 1, 2\}) = 3$ ,  $\mu(A_2) = \mu(\{0, 1\}) = 3$  y  $\mu(A_3) = \mu(\{0\}) = 1$ . Luego

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \bigvee_{i=1}^n (f_i \wedge \mu(A_i)) = (f_1 \wedge \mu(A_1)) \vee (f_2 \wedge \mu(A_2)) \vee (f_3 \wedge \mu(A_3)) \\ &= \{2 \wedge 3\} \vee \{3 \wedge 3\} \vee \{4 \wedge 1\} = 1 \vee 3 \vee 2 = 3\end{aligned}$$

y

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n f_i \cdot (\mu(A_i) - \mu(A_{i+1}))$$

$$\begin{aligned}
&= f_1 \cdot (\mu(A_1) - \mu(A_2)) + f_2 \cdot (\mu(A_2) - \mu(A_3)) + f_3 \cdot (\mu(A_3) - \mu(A_4)) \\
&= 2 \cdot (3 - 3) + 3 \cdot (3 - 1) + 4 \cdot (1 - 0) = 10.
\end{aligned}$$

En la Definición 2.31 se introdujo la noción de funciones equiordenadas; como se dijo, dicha noción trata de reflejar la idea de que las imágenes de las funciones  $f$  y  $g$  están ordenadas de la misma manera. A continuación se demuestra que bajo dicha propiedad, tanto la integral de Sugeno como la integral de Choquet, satisfacen una propiedad de linealidad.

**Proposición 2.41** ([3]). Sean  $f, g : X \rightarrow [0, \infty)$  funciones no negativas y  $\mu$  una medida difusa en  $X$ . Si  $f$  y  $g$  son funciones equiordenadas, entonces

$$S_\mu(f \vee g) = S_\mu(f) \vee S_\mu(g).$$

*Demostración.* Supongamos que  $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3) \leq \dots \leq f(x_n)$ . Como  $f \sim g$  entonces  $g(x_1) \leq g(x_2) \leq g(x_3) \leq \dots \leq g(x_n)$ , también se obtiene que

$$f(x_1) \vee g(x_1) \leq f(x_2) \vee g(x_2) \leq f(x_3) \vee g(x_3) \leq \dots \leq f(x_n) \vee g(x_n).$$

Aplicando la definición de la integral de Sugeno se tiene

$$\begin{aligned}
S_\mu(f \vee g) &= \bigvee_{i=1}^n ((f_i \vee g_i) \wedge \mu(A_i)) \\
&= \bigvee_{i=1}^n ((f_i \wedge \mu(A_i)) \vee (g_i \wedge \mu(A_i))) \\
&= \bigvee_{i=1}^n (f_i \wedge \mu(A_i)) \vee \bigvee_{i=1}^n (g_i \wedge \mu(A_i)) \\
&= S_\mu(f) \vee S_\mu(g). \quad \square
\end{aligned}$$

**Proposición 2.42** ([3]). Sean  $f, g : X \rightarrow [0, \infty)$  funciones no negativas y  $\mu$  una medida difusa en  $X$ . Si  $f$  y  $g$  son funciones equiordenadas, entonces

$$E_\mu(f + g) = E_\mu(f) + E_\mu(g).$$

*Demostración.* Supongamos que  $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3) \leq \dots \leq f(x_n)$ . Como  $f \sim g$  entonces  $g(x_1) \leq g(x_2) \leq g(x_3) \leq \dots \leq g(x_n)$ , también se obtiene que

$$f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_2) + g(x_2) \leq f(x_3) + g(x_3) \leq \dots \leq f(x_n) + g(x_n).$$

Ahora, sea  $A_i = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n\}$ . Aplicando la definición de la integral de Choquet se tiene

$$\begin{aligned} E_\mu(f + g) &= \sum_{i=1}^n (f_i + g_i) (\mu(A_i) - \mu(A_{i+1})) \\ &= \sum_{i=1}^n f_i \cdot (\mu(A_i) - \mu(A_{i+1})) + \sum_{i=1}^n g_i \cdot (\mu(A_i) - \mu(A_{i+1})) \\ &= E_\mu(f) + E_\mu(g). \end{aligned} \quad \square$$

### Caracterización de las integrales de Sugeno y Choquet

A continuación se presentan dos resultados que permiten caracterizar las integrales de Sugeno y Choquet por medio del cumplimiento de ciertas propiedades.

Se inicia con un resultado relacionado con la integral de Sugeno.

**Teorema 2.43** ([3]). *Un funcional  $E$  no negativo, definido para funciones con valores en  $[0, 1]$ , satisface las siguientes condiciones:*

(a) *si  $f \sim g$  entonces  $E(f \vee g) = E(f) \vee E(g)$  ( $F$ -aditividad de orden),*

(b) *si  $f \leq g$  entonces  $E(f) = E(g)$  (monotonía),*

(c)  $E(I_x) = 1$  (normalización),

(d)  $\forall a \in (0, 1], E(a \wedge f) = a \wedge E(f)$  (homogeneidad).

*si y sólo si existe una sola medida difusa normalizada  $\mu$  tal que  $E$  es la integral de Sugeno con respecto a  $\mu$ .*

*Demostración.* La suficiencia se sigue de las propiedades de la integral de Sugeno y por la Proposición 2.41.

Necesidad: Sea la función definida por  $\mu(A) = E(I_A)$ ,  $\forall A \subseteq X$ , se mostrará que  $\mu$  es una medida difusa normalizada.

La monotonía se deduce de la propiedad (b),  $\mu(X) = 1$  se tiene de la propiedad (c).

$$\forall a \in (0, 1] \quad a = E(a) = E(a \wedge I_x) = a \wedge E(I_x) = a \wedge 1 = a,$$

por las condiciones (c) y (d); entonces por (a) se tiene que

$$\forall a \in (0, 1] \quad a = E(a) = E(a \wedge 0_x) = E(a) \wedge E(0_X) = a \wedge E(0_X).$$

Por lo tanto,  $E(0_X) \leq a \forall a \in (0, 1]$  y se obtiene que  $\mu(\emptyset) = E(0_x) = 0$ , porque  $E$  es un funcional no negativo.

Se mostrará ahora que  $E(\cdot)$  coincide con  $S_\mu(\cdot)$

Sea  $f : X \rightarrow [0, 1]$  y supóngase que  $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3) \leq \dots \leq f(x_n)$ . Entonces  $f$  se puede escribir como

$$f(x) = \bigvee_{i=1}^n t_i(x),$$

donde

$$t_i(x) = f_i \wedge I_{A_i}, \quad A_i = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se puede verificar que  $t_j \sim t_i \forall i, j = 1, 2, 3 \dots, n$ . Ahora

$$\begin{aligned} E(h) &= E\left(\bigvee_{i=1}^n t_i\right) = \bigvee_{i=1}^n E(t_i) = \bigvee_{i=1}^n E(f_i \wedge I_{A_i}) \\ &= \bigvee_{i=1}^n (f_i \wedge E(I_{A_i})) = \bigvee_{i=1}^n (f_i \wedge \mu(A_i)). \end{aligned}$$

Entonces  $E$  coincide con la integral de Sugeno con respecto a  $\mu$ . □

En conclusión, la integral de Sugeno se caracteriza por ser un funcional F-aditivo, monótono y homogéneo.

Ahora, se mostrará una caracterización análoga para la integral de Choquet.

**Teorema 2.44** ([3]). *Un funcional  $E$  definido sobre funciones no negativas satisface las siguientes condiciones:*

(a) *si  $f \sim g$  entonces  $E(f + g) = E(f) + E(g)$  (aditividad de orden),*

(b) *si  $f \leq g$  entonces  $E(f) \leq E(g)$  (monotonía),*

(c)  $E(I_x) = 1$  (normalización),

(d)  $\forall a \geq 0, E(a \cdot f) = a \cdot E(f)$  (homogeneidad),

*si y sólo si existe una sola medida difusa normalizada  $\mu$  tal que  $E$  es la integral de Choquet con respecto a la medida  $\mu$ .*

*Demostración.* Necesidad: Se define la función  $\mu(A) = E(I_A), \forall A \subseteq X$ . Se probará que  $\mu$  es una medida difusa normalizada.

1.  $\mu(X) = E(I_x) = 1$  se tiene por la condición (c).

2.  $\mu(\emptyset) = E(I_\emptyset) = E(0_x) = 0$ , se tiene por la siguiente razón:

Como  $0_x$  es una función constante  $0_x = f$  para cada función  $f$ . Por la condición (a), se tiene

$$E(f) = E(f + 0_x) = E(f) + E(0_x), \text{ entonces } E(0_x) = 0.$$

3. Si  $A \subseteq B$ , entonces  $I_A(x) \leq I_B(x)$ ,  $\forall x \in X$ , se tiene por (b),  $\mu(A) = E(I_A) \leq E(I_B) = \mu(B)$ . Luego  $\mu$  es una medida difusa normalizada.

Ahora se probará que el funcional es la integral de Choquet.

Sea  $f$  una función no negativa y que verifica  $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3) \leq \dots \leq f(x_n)$ , entonces  $f$  se puede expresar como

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x),$$

donde

$$\phi_i(x) = (f_i - f_{i-1})I_{A_i}(x), \quad i = 2, \dots, n, \quad \phi_1(x) = f_1 I_{A_1}(x),$$

y

$$A_i = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n\}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Cada par de funciones  $\phi_i$  son equiordenadas, utilizando (a) y (d) se tiene

$$\begin{aligned} E(f) &= E\left(\sum_{i=1}^n \phi_i\right) = \sum_{i=1}^n E(\phi_i(x)) \\ &= E(f_1 I_{A_1}) + \sum_{i=2}^n E((f_i - f_{i-1}) I_{A_i}) \\ &= f_1 E(I_{A_1}) + \sum_{i=2}^n ((f_i - f_{i-1})) E(I_{A_i}) \\ &= f_1 + \sum_{i=2}^n ((f_i - f_{i-1})) \mu(A_i), \\ &= f_n \mu(A_n) + \sum_{i=2}^{n-1} f_i \cdot (\mu(A_i) - \mu(A_{i+1})) \\ &= E_\mu(f). \end{aligned}$$

Suficiencia: Las condiciones (b), (c) y (d) son propiedades conocidas de  $E_g(\cdot)$  y con la condición (a) fue probada en la Proposición 2.42.  $\square$

En conclusión la integral de Choquet se caracteriza por ser un funcional equiordenado, monótono y homogéneo.

Como se ve, las propiedades son completamente paralelas entre las integrales de Choquet y Sugeno, ambas integrales se ajustan al mismo modelo formal, difieren en la utilización de operadores: suma y producto para integral de Choquet, máximo y mínimo para la integral de Sugeno. Sin embargo las propiedades matemáticas de estos operadores dan a cada funcional características particulares que los hacen útiles en diferentes contextos.

Existen otras analogías entre  $E_\mu(\cdot)$  y  $S_\mu(\cdot)$ . Por ejemplo, la medida de posibilidad con la integral de Sugeno se comporta de manera similar a la integral de Choquet para el caso de las medidas de probabilidad.

Si la medida difusa es de probabilidad ( $P$ ) entonces la integral de Choquet coincide con la esperanza matemática con respecto a  $P$  y por lo tanto se puede escribir como:

$$E_p(f) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot f_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

La siguiente proposición da una expresión análoga a la anterior, para  $S_\mu(\cdot)$  cuando  $\mu$  es una medida de posibilidad.

**Proposición 2.45** ([3]). *Sea  $\Pi$  una medida posibilidad y  $f : X \rightarrow [0, 1]$  una función. La integral de Sugeno de  $f$  con respecto a  $\Pi$  puede escribirse como:*

$$S_\Pi(f) = \bigvee_{i=1}^n (\Pi_i \wedge f_i)$$

donde  $\Pi_i = \Pi(x_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Nótese el paralelismo que existe entre la probabilidad y la posibilidad con respecto a las integrales de Choquet y Sugeno, respectivamente.

## Capítulo 3

# Aplicaciones de las integrales y las medidas difusas

La teoría clásica de la medida, basada en medidas aditivas y asociadas a la integral de Lebesgue, ha sido muy importante, no solo en el análisis matemático, sino también ha desempeñado un papel importante en diferentes campos de aplicación. Tal vez el papel más importante han sido la teoría de probabilidad y las ecuaciones diferenciales parciales.

Como ya se mencionó, se ha reconocido que la teoría clásica, a pesar de sus muchas aplicaciones, está limitada por el requisito de la aditividad de las medidas. Es por ello que han surgido las medidas difusas y, ligadas a ellas, las integrales difusas. En los últimos años, la teoría de medidas difusas e integrales difusas, se han convertido en una rama de la matemática que ha captado un gran interés de investigación.

Veamos a continuación algunos ejemplos donde se aplican las medidas difusas y las integrales difusas.

**Ejemplo 3.1.** *Considere el problema de la evaluación de calidad de un plato  $P$  de cocina. Supóngase que los factores de calidad que se consideran son: el sabor, el olor y la apariencia (incluyendo, por ejemplo, el color, la forma, etc.). Se denotan estos factores por  $S$ ,  $O$  y  $A$ , entonces  $X = \{S, O, A\}$ . Se emplea como medida de importancia:  $\mu(\{S\}) = 0,7$ ,  $\mu(\{O\}) = 0,1$ ,  $\mu(\{A\}) = 0$ ,  $\mu(\{S, O\}) = 0,9$ ,  $\mu(\{A, S\}) = 0,8$ ,  $\mu(\{O, A\}) = 0,3$ ,  $\mu(X) = 1$  y  $\mu(\emptyset) = 0$ .*

*Es claro que  $\mu$  no es aditiva. Si se invita a expertos como árbitro para juzgar el factor de calidad de un determinado plato, donde los factores de calidad son dados de la siguiente manera:  $f(S) = 0,9$ ,  $f(O) = 0,6$  y  $f(A) = 0,8$ . Entonces la evaluación de la calidad del*

plato  $P$  se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
 P = \int f \, d\mu &= \{0,6 \wedge \mu([f]^{0,6})\} \vee \{0,8 \wedge \mu([f]^{0,8})\} \vee \{0,9 \wedge \mu([f]^{0,9})\} \\
 &= \{0,6 \wedge \mu(X)\} \vee \{0,8 \wedge \mu(\{S, A\})\} \vee \{0,9 \wedge \mu(\{S\})\} \\
 &= \{0,6 \wedge 1\} \vee \{0,8 \wedge 0,8\} \vee \{0,9 \wedge 0,7\} \\
 &= 0,6 \vee 0,8 \vee 0,7 = 0,8.
 \end{aligned}$$

Entonces, con los criterios dados, la evaluación de calidad del plato de cocina  $P$  es del 80 %.

El siguiente es un ejemplo donde se utilizan las  $\lambda$ -medidas y la integral de Choquet para realizar la selección de individuos que aspiran ingresar a una universidad.

**Ejemplo 3.2.** La Universidad Industrial de Santander en su proceso de selección de estudiantes, utiliza las Pruebas de Estado como criterio de clasificación. Si un estudiante desea ingresar a la carrera de Matemáticas, la universidad le da un porcentaje a las siguientes materias:

- Matemáticas: 45 %
- Lenguaje: 45 %
- Física: 30 %

Los puntos de cada materia están entre 0-100. Según el anterior criterio ¿cuál será la clasificación de los estudiantes que tienen los puntajes dados en la tabla?

Estudiantes	Matemáticas	Lenguaje	Física
$c_1$	45	50	40
$c_2$	56	35	50
$c_3$	39	58	55
$c_4$	58	38	57

Denótese: Matemáticas con  $x_1$ , Lenguaje con  $x_2$  y Física con  $x_3$ , entonces  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ . El grado de importancia es dado por

$$g_1 = g_\lambda(\{x_1\}) = 0,45, \quad g_2 = g_\lambda(\{x_2\}) = 0,45 \quad \text{y} \quad g_3 = g_\lambda(\{x_3\}) = 0,3.$$

Se debe encontrar la  $\lambda$ -medida apropiada para este problema. Para ello se considera que  $g_\lambda(X) = 1$  y se utiliza la ecuación (1.3), de donde se obtiene que

$$\lambda + 1 = \prod_{i=1}^n (\lambda g_i + 1) = (0,45\lambda + 1)(0,45\lambda + 1)(0,3\lambda + 1).$$

Esto implica que  $0,06067\lambda^3 + 0,4725\lambda^2 + 0,2\lambda = 0$ . Las raíces aproximadas de esta ecuación son: 0,  $-7,3388$  y  $-0,44919$ .

Cuando  $\lambda = 0$  la medida es aditiva, en dicho caso la clasificación se realizaría por medio del promedio ponderado de cada aspirante.

Lo interesante es considerar el caso en el cual la medida no sea aditiva; eso se obtiene cuando  $\lambda = -0,44919$  (el valor  $-7,3388$  no se considera dado que no pertenece al intervalo  $(-1, \infty)$ ). En dicho caso se necesita saber la medida de cada elemento de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{P}(X)$ , para ello se utiliza la ecuación (1.2), de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} g_\lambda(\{x_1, x_2\}) &= g_\lambda(\{x_1\}) + g_\lambda(\{x_2\}) + \lambda \cdot g_\lambda(\{x_1\}) \cdot g_\lambda(\{x_2\}) = 0,8090, \\ g_\lambda(\{x_1, x_3\}) &= g_\lambda(\{x_1\}) + g_\lambda(\{x_3\}) + \lambda \cdot g_\lambda(\{x_1\}) \cdot g_\lambda(\{x_3\}) = 0,6894, \\ g_\lambda(\{x_2, x_3\}) &= g_\lambda(\{x_2\}) + g_\lambda(\{x_3\}) + \lambda \cdot g_\lambda(\{x_2\}) \cdot g_\lambda(\{x_3\}) = 0,6894, \\ g_\lambda(X) &= 1. \end{aligned}$$

Conociendo la medida de los elementos de la  $\sigma$ -álgebra y que  $f$  es el puntaje en cada asignatura para cada estudiante, se puede encontrar la integral de Choquet para cada estudiante  $c_i$  como sigue:

$$c_i = \int f dg_\lambda = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) g_\lambda(A_i),$$

Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} c_1 = \int f dg_\lambda &= f(x_3) \cdot g_\lambda(\{x_1, x_2, x_3\}) + (f(x_1) - f(x_3)) \cdot g_\lambda(\{x_1, x_2\}) \\ &\quad + (f(x_2) - f(x_1)) \cdot g_\lambda(\{x_2\}) = 46,295. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 = \int f dg_\lambda &= f(x_2) \cdot g_\lambda(\{x_1, x_2, x_3\}) + (f(x_3) - f(x_2)) \cdot g_\lambda(\{x_1, x_2\}) \\ &\quad + (f(x_1) - f(x_2)) \cdot g_\lambda(\{x_1\}) = 48,041. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 = \int f dg_\lambda &= f(x_1) \cdot g_\lambda(\{x_1, x_2, x_3\}) + (f(x_3) - f(x_1)) \cdot g_\lambda(\{x_2, x_3\}) \\ &\quad + (f(x_2) - f(x_3)) \cdot g_\lambda(\{x_2\}) = 51,3804. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_4 = \int f dg_\lambda &= f(x_2) \cdot g_\lambda(\{x_1, x_2, x_3\}) + (f(x_3) - f(x_2)) \cdot g_\lambda(\{x_3, x_2\}) \\ &\quad + (f(x_1) - f(x_2)) \cdot g_\lambda(\{x_1\}) = 51,5481. \end{aligned}$$

A partir de los resultados obtenidos para cada  $c_i$ , se puede concluir que la clasificación de los estudiantes es  $c_4 > c_3 > c_2 > c_1$ . Es decir, que el mejor clasificado para ingresar a la carrera de Matemáticas es el estudiante  $c_4$ .

Como se puede observar en los ejemplos realizados, la aplicación de las integrales difusas y las medidas difusas van de la mano. En [15], D. Liginlal y T.O. Terence realizan un estudio de las aplicaciones de las medidas e integrales difusas. Dicha investigación ayuda a discernir cinco áreas de aplicación de las medidas e integrales difusas en las ingenierías y las ciencias sociales:

- La evaluación subjetiva, la previsión y la toma de decisiones.
- La recuperación de la información.
- El modelado de datos.
- El análisis de actitudes y patrones.
- Reconocimiento y clasificación.

A continuación se describen algunas situaciones donde se aplican las medidas difusas y las integrales difusas. Para el lector interesado en estudiar a fondo las aplicaciones de las medidas e integrales difusas, se le recomienda ver [10, 11, 15, 23, 38] y las referencias en ellas mencionadas.

- Método para la detección de caras basado en integrales difusas.

En [23] se presenta un método detector de caras compuesto de un conjunto de clasificadores basados en integrales difusas. Este método presenta una mejora significativa respecto del detector de caras utilizado con otras técnicas. El clasificador basado en integrales difusas mapea el conjunto de datos de entrada en un único escalar, luego, dependiendo de un cierto umbral, el valor clasificará la cara.

- Sistemas de visión estereoscópica en entornos forestales.

En las últimas décadas se han venido utilizando de forma manual los sistemas de visión estereoscópica para captar información del entorno en diferentes aplicaciones. Las imágenes son obtenidas mediante un sistema óptico basado en los denominados lentes de ojo de pez. En [11], su interés se centra en obtener información de los troncos de los árboles a partir de imágenes estereoscópicas, con las medidas obtenidas, se realiza el estudio sobre el volumen de la madera, la densidad de árboles, la evolución o crecimiento de estos, entre otros. En este sistema utilizan las integrales de Sugeno y las integrales de Choquet en el procesamiento de imágenes.

- Teoría de la evidencia.

Esta teoría fue desarrollada inicialmente por Dempster y después extendida por Shafer. Se considera como una extensión de la medida de probabilidad para describir la incertidumbre asociada a una evidencia.

Como ya se mencionó, la teoría de la evidencia se centra en la credibilidad que se le asigna a que un evento pueda ocurrir, desde punto de vista de la experiencia de la persona que toma las decisiones, a diferencia de la medida de probabilidad, que supone la existencia de valores asociados a los eventos determinados los cuales son independientemente del observador. La teoría de Dempster-Shafer se centra en dos medidas difusas, la plausibilidad y la credibilidad.

- Estimación de la edad de la muerte de un individuo.

La estimación de la muerte de un individuo es importante para las ciencias forense y para los antropólogos. Los métodos actuales de reconocimiento son poco confiables debido a la variación del esqueleto y los factores tafonómicos. Los métodos multifactoriales son mejores que los métodos individuales cuando se determina edad de muerte de un individuo. Sin embargo, los métodos multifactoriales son difíciles de aplicar en esqueletos mal conservados, y rara vez proporcionan información fiable al investigador sobre su estudio. La integral de Sugeno se utiliza como método multifactorial para el estimar la edad de muerte del esqueleto de un individuo. La integral de Sugeno es más eficiente, dado que no necesita el uso de una población y gráficamente es fácil de interpretar.

Otras aplicaciones de las medidas difusas y las integrales difusas son dadas a continuación de una manera sucinta.

- Visión por computador: solución de una ecuación funcional para determinar el valor de  $\lambda$  para la medida  $g_\lambda$ . Aplica la integral de Sugeno.
- Evaluación del color de las imágenes: programación cuadrática y procedimiento de relajación. Primer reporte de la aplicación de la integral de Choquet.
- Análisis de la fiabilidad humana: evaluación directa de las medidas difusas a través de cuestionarios. La simplificación de los supuestos utilizados para estimación de las medidas. Aplica la integral de Sugeno.
- Clasificación: método de programación cuadrática. Aplica la integral de Choquet.

- Reconocimiento de patrones: algoritmo heurístico de aprendizaje basado en el método del gradiente de descenso. Aplica la integral de Choquet.
- Evaluación de la eficiencia de una crema cosmética: método de programación. Comparación de la programación del método de segundo grado con el método heurístico de aprendizaje. Aplica la integral de Choquet.
- Diseño de nuevos productos: algoritmos genéticos y media cuadrada. Aplica la integral de Choquet.
- Costo de software: la evaluación directa basada en la estimación de expertos. Aplica la integral de Choquet combinada con los métodos de ajuste.
- Discurso de reconocimiento: algoritmo de aprendizaje heurístico basado en el método del gradiente de descenso. Aplica la integral de Choquet.

# Conclusiones y preguntas abiertas

## Conclusiones

- En la primera parte de este trabajo se realizó una revisión de los principales resultados sobre la teoría de las medidas difusas; en particular, se realizó una clasificación de las medidas difusas según la propiedad aditiva y la  $\lambda$ -medida (ver Figura 1.1); posteriormente se definen las propiedades estructurales de las medidas difusas, se analizan las interrelaciones entre ellas y se dan algunos ejemplos.
- En el segundo capítulo se presentaron dos integrales difusas: las integrales de Sugeno y Choquet; se hace un estudio de los principales resultados sobre ellas, orientando el trabajo a la extensión de los principales teoremas de convergencia de la teoría de integración clásica. Se realiza también una comparación entre las integrales de Choquet y Sugeno usando el concepto de funciones equiordenadas.
- Por último se presentan dos ejemplos interesantes donde se aplican las medidas difusas y las integrales difusas; se describen también algunos fenómenos donde se aplican las integrales difusas y las medidas difusas.

## Preguntas abiertas

A lo largo del desarrollo de este trabajo fueron quedando algunas preguntas, las cuales pueden servir para futuros trabajos o investigaciones:

- ¿Qué da el producto de una medida difusa aditiva (resp. uniformemente autocontinua, autocontinua, nula-aditiva, débilmente nula-aditiva) con una medida difusa nula-aditiva.
- ¿Toda medida difusa se puede escribir como el producto de dos medidas difusas?  
Si tiene solución la anterior pregunta, se pasaría a cuestionar lo siguiente:

- Si tiene una medida difusa uniformemente autocontinua (resp. autocontinua, nula-aditiva, débilmente nula-aditiva) qué condiciones se necesitan para poderse escribir como el producto de dos medidas difusas uniformemente autocontinuas (resp. autocontinuas, nula-aditivas, débilmente nula-aditivas).
- ¿Qué relación existe entre la integral de Sugeno y la integral de Choquet cuando la cardinalidad de  $X$  es infinita?

# Bibliografía

- [1] S. Asahina, K. Uchino and T. Murofushi, "Relationship among continuity conditions and null-additivity conditions in non-additive measure theory", *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006), 691–698.
- [2] G. Banon, "Distinction between several subsets of fuzzy measures", *Fuzzy Sets and Systems* 5 (1981), 291–305.
- [3] L.M. Campos, "Characterization and comparison Sugeno and Choquet integrals", *Infor. and Control* 52 (1992), 61–67.
- [4] A.P. Dempster, "Upper and lower probabilities induced by multi-valued mapping", *Annals of Mathematical Statistics* 38 (1967), 325–339.
- [5] A.P. Dempster, "Upper and lower probability inferences based on a sample from a finite univariate population", *Biometrika* 54 (1967), 515–528.
- [6] D. Denneberg, *Non-Additive Measure and Integral*, Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [7] L. Garmendia, *The evolution of the concept of fuzzy measure*, Dpto. Sistemas Informáticos y Programación, Universidad Complutense de Madrid, España, 2005.
- [8] L. Garmendia, *Contribución al estudio de las medidas en la lógica borrosa: condicionalidad, especificidad y transitividad*, Tesis de Doctorado, Dpto. Sistemas Informáticos y Programación, Universidad Complutense de Madrid, España, 2001.
- [9] J. R. Geronimo, *Medidas fuzzy*, Tesis de Maestría, Universidade Estadual de Campinas, 1988.
- [10] M. Grabisch, J. Nicolas, "Classification by fuzzy integral: performance and tests", *Fuzzy Sets and Systems* 65 (1994), 225–271.
- [11] P. J. Herrera, *Correspondencia estereoscópica en imágenes obtenidas con proyección omnidireccional para entornos forestales*, Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 2010.
- [12] D.H. Hong, K.T. Kim, "Convergence of Choquet integral", *J. Appl. Math. & Computing* 18 (2005), no. 1–2, 613–619.
- [13] G.J. Klir and Bilal M. Ayyub, *Uncertainty Modeling and Analysis in Engineering and the Sciences*, Chapman and Hall, 2006.
- [14] J. Li, "On Egorov theorems on fuzzy measure spaces", *Fuzzy Sets and Systems* 135 (2003), 367–312.

- [15] D. Liginlal and T.O. Terence, "Modeling attitude to risk in human decision processes: An application of fuzzy measures", *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006), 3040–3054.
- [16] T. Murofushi, *Two approaches to fuzzy measure theory: integrals based on pseudo-addition a Choquet's integral*, Ph.D. Thesis, Tokio Institute of Techonology, 1987.
- [17] T. Murofushi and M. Sugeno, "A theory of Fuzzy measures: representations, the Choquet integral, and null sets", *J. Math. Anal. and Appl.* 159 (1991), 532–549.
- [18] T. Murofushi and M.Sugeno, *Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals*, Department of Computational Intelligence and Systems Science, Tokyo Institute of Technology, Yokohama, Japan, 2000.
- [19] T. Murofushi, M. Sugeno, M. Suzaki, "Autocontinuity, convergence in measure, and convergence in distribution", *Fuzzy Sets and Systems* 92 (1997), 197–203.
- [20] H.T. Nguyen and E.A. Walter, *A first course in fuzzy logic*, Third ed. Chapman and Hall, 2006.
- [21] E. Pap, "The Continuity of the Null-additive Fuzzy Measure", *Novi Sad Journal of Mathematics* 27 (1997), 37–47.
- [22] E. Pap, "Regular the Null-additive Monotone Set functions", *Novi Sad Journal of Mathematics* 25 (1995), 37–47.
- [23] A. Rama y F. Tarres, *Un nuevo método para la detección de caras basado en integrales difusas*, Departamento de Teoria del Senyal i Comunicacions, Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona, España.
- [24] Y. Rebillé, "Autocontinuity and convergence theorems for the Choquet integral", *Fuzzy Sets and Systems* 194 (2012), 52–65
- [25] H. Román-Flores, A. Flores-Franulic, Y. Chalco-Cano, "The fuzzy integral for monotone functions", *Appl. Math. Comput.* 185 (2007), no. 1, 492–498.
- [26] G. Shafer, *A Mathematical Theory of evidence*, Princeton University, 1976.
- [27] J. Song, *On generalization of converge theorems in non-additive measure theory*, Ph.D. Thesis, Chiba University, Chiba, Japan, 2005.
- [28] J. Song, J. Li, "Lebesgue theorems in non-additive measure theory", *Fuzzy Sets and Systems* 149 (2005), 543–548.
- [29] M. Sugeno, *Theory of fuzzy integrals and its applications*, Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan, 1974.
- [30] Q. Sun, "On the pseudo-autocontinuity of fuzzy measures", *Fuzzy Sets and Sistems* 45 (1992), 59–68.
- [31] E. Trillas, C. Alsina, "A reflection on what is a membership function", *Mathware Soft Computing* (1999), 201–215.
- [32] R. Viertl, *Probability and Bayesian Statistics*, Plenum Press, New York, 1987.
- [33] Z. Wang, "The autocontinuity of set function and fuzzy integral", *J. Math. Anal. Appl.* 99 (1984), 195–218.
- [34] Z. Wang, "Asymptotic structural characteristics of fuzzy measure and their applications", *Fuzzy Sets and Systems* 16(3) (1985), 277–290.

- [35] Z. Wang, "On the null-additivity and the autocontinuity of fuzzy measure", *Fuzzy Sets and Systems* 45 (1992), 223–226.
- [36] Z. Wang, G.J. Klir, *Fuzzy measure theory*, Plenuss Press. New York and London, 1992.
- [37] Z. Wang, G.J. Klir, *Generalized measure theory*, Springer, New York, 2009.
- [38] Z. Wang, K.S. Leung, J. Wang, "Determining nonnegative monotone set functions based on Sugeno's integral: an application of genetic algorithms", *Fuzzy Sets and Systems* 112 (2000), 155–164.
- [39] S. Weber, " $\perp$ -descomposable measures and integrals for archimedean t-conorms  $\perp$ ", *J. Math. Anal. Appl.* 101 (1984), 114–138.
- [40] J. Wu, M.J. Fang, "Structure theory of fuzzy analysis", *Guizhou Science and Technology Public House*, (1994).
- [41] J. Wu, H. Liu, "Autocontinuity of set valued fuzzy measures and applications", *Fuzzy Sets and Systems* 175 (2010) 57–64.
- [42] L. Xuecheng, *On the product of two fuzzy measures*, Département de Mathématiques et de Statistique, Université de Montréal, Québec, Canada. 1992.
- [43] L.A. Zadeh, "Fuzzy sets", *Infor. and Control* 8 (1965), 338–353.
- [44] L.A. Zadeh, "Fuzzy sets as basis for a theory of possibility", *Infor. and Control* 1 (1978), 338–353.