

**DISCOS DELGADOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS  
INMERSOS EN HALOS ESFEROIDALES DE MATERIA  
EN RELATIVIDAD GENERAL**

Oscar Mauricio Pimentel Díaz

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
Maestría en Física  
Bucaramanga  
2015

**DISCOS DELGADOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS  
INMERSOS EN HALOS ESFEROIDALES DE MATERIA  
EN RELATIVIDAD GENERAL**

Oscar Mauricio Pimentel Díaz

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE  
MAGISTER EN FÍSICA**

**DIRECTOR:**

Guillermo A. González V.  
Físico, M.Sc., Ph.D.

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
Maestría en Física  
Bucaramanga  
2015

# AGRADECIMIENTOS

El proceso de alcanzar nuestras metas y objetivos no tendría sentido si lo hacemos sin las personas que amamos, por eso es más que necesario agradecer a todos aquellos que participan directa e indirectamente en nuestras vidas, a aquellos que una palabra, o inclusive con su sola presencia, nos pueden levantar el animo. En particular quiero agradecer a aquellas personas de quien Dios se valió para permitirme alcanzar este logro:

- En primer lugar a Dios porque sin Él no hubiera podido tener a las personas que nombraré a continuación. Por tantos dones, favores y hasta milagros que he recibido de parte suya. Por haber sido mi compañía tiempo completo en toda mi vida y por ayudarme a escalar hasta donde estoy el día de hoy.
- A mi papá Carlos Alberto, a mi mamá María del Carmen y a mi hermano Carlos Daniel, por acompañarme en todo mi proceso y mostrarme, con su ejemplo de vida, que ningun sueño es demasiado grande para ser alcanzado.
- A Paola, mi novia, por todo el animo y los momentos de felicidad que me ha dado en estos 7 años que llevamos juntos. Porque en el amor y desde el amor todo es posible.
- A mis amigos del barrio, en especial a los muchachos del grupo juvenil Juventud Activa Salvatoriana "JAS" por su amistad.
- Al profesor Guillermo González por ser más que mi director de trabajo de grado, por brindarme su amistad y por ser, para mi, un excelente ejemplo a nivel personal y profesional.
- A todos los profesores, especialmente a los del GIRG, por brindarme todos los conocimientos necesarios para el desarrollo de este trabajo.
- A todos mis amigos del grupo de investigación en relatividad y gravitación, en especial a Carlos, Jose y Anamaría por tanto tiempo de amistad sincera al rededor del mundo.

# Índice general

	Pag.
<b>Introducción</b>	<b>10</b>
<b>1 Discos Delgados Axialmente Simétricos Inmersos en Halos</b>	<b>14</b>
1.1 Soluciones Axialmente Simétricas de las Ecuaciones de Einstein . . . . .	14
1.2 Tensor de Momento-Enería del Disco . . . . .	18
1.3 Masa del Sistema y Geodésicas Circulares . . . . .	21
<b>2 Discos Relativistas de Kuzmin-Toomre con Halo</b>	<b>23</b>
2.1 Densidad de Energía del Disco . . . . .	24
2.2 Densidad de Energía del Halo . . . . .	25
2.3 Masa del Disco y del Halo . . . . .	29
2.4 Curvas de Rotación . . . . .	32
<b>3 Discos Relativistas de Morgan-Morgan con Halo</b>	<b>35</b>
3.1 Densidad de Energía del Disco . . . . .	38
3.2 Densidad de Energía del Halo . . . . .	39
3.3 Masa del Halo y del Disco . . . . .	40
3.4 Curvas de Rotación . . . . .	43
<b>4 Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>

# Índice de figuras

	Pag.
<b>Figura 1.1</b> División del espacio-tiempo a partir de la inclusión de una hipersuperficie. . . . .	18
<b>Figura 2.1</b> Densidad superficial de energía del disco $\tilde{\sigma}_n$ como función de $\tilde{r}$ para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones. . . . .	26
<b>Figura 2.2</b> Curvas de contorno de la densidad de energía del halo, $\tilde{\rho}_n$ , en función de $\tilde{r}$ (eje horizontal) y $\tilde{z}$ (eje vertical) para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones. . . . .	28
<b>Figura 2.3</b> Velocidad circular $v_{c_n}$ en función de $\tilde{r}$ para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones. . . . .	34
<b>Figura 3.1</b> Densidad superficial de energía del disco $\tilde{\sigma}_m$ en función de $\tilde{r}$ para los tres primeros modelos de la familia de soluciones. . . . .	37
<b>Figura 3.2</b> Curvas de contorno de la densidad de energía del halo, $\tilde{\rho}_m$ , en función de $\tilde{r}$ (eje horizontal) y $\tilde{z}$ (eje vertical) para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones. . . . .	41
<b>Figura 3.3</b> Velocidad circular $v_{c_m}$ en función de $\tilde{r}$ para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones. . . . .	44

---

# RESUMEN

---

**TITULO:** DISCOS DELGADOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS INMERSOS EN HALOS ESFEROIDALES DE MATERIA EN RELATIVIDAD GENERAL<sup>1</sup>

**AUTOR:** Oscar Mauricio Pimentel Diaz.<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVE:** Relatividad General, Discos Relativistas, Halo, Ecuaciones de Einstein, Espacio-tiempo Conformestático, Tensor Momento-Energía, Modelo de Kuzmin-Toomre, Coordenadas Esferoidales Oblatas, Curvas de Rotación

## DESCRIPCIÓN:

Se presentan dos familias infinitas de discos delgados de polvo, axialmente simétricos, inmersos en halos esferoidales de materia en relatividad general. Los discos son obtenidos a partir de soluciones de las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo conformestático y axialmente simétrico, en el cual el tensor métrico se caracteriza únicamente por una función métrica. Introduciendo una discontinuidad finita en la primera derivada del tensor métrico, se obtienen soluciones con una singularidad del tipo función delta de manera que describan discos delgados. Las componentes diferentes de cero del tensor de momento-energía, tanto para el disco como para el halo, se obtienen de las ecuaciones de Einstein. De esta manera, se determinan las densidades de energía y presiones de las fuentes. Exigiendo que se cumplan las condiciones de energía, obtenemos una restricción sobre las soluciones, de manera que la función métrica se pueda expresar apropiadamente en términos de la solución a la ecuación de Laplace. Usando la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas se encuentran discos infinitos y usando la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas, se encuentran discos finitos. En ambos casos se obtienen soluciones particulares con densidades de energía y presiones bien comportadas. También se demuestra que aunque las fuentes son de extensión infinita, las masas del disco y del halo son finitas. Finalmente, se resuelve la ecuación geodésica para orbitas circulares en el plano del disco para obtener las curvas de rotación.

---

<sup>1</sup>Trabajo de Grado

<sup>2</sup>Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D.

---

# ABSTRACT

---

**TITLE:** AXIALLY SYMMETRIC THIN DISKS IMMERSSED IN SPHEROIDAL MATTER HALOES IN GENERAL RELATIVITY <sup>1</sup>

**AUTHOR:** Oscar Mauricio Pimentel Diaz.<sup>2</sup>

**KEY WORDS:** General Relativity, Relativistic Disk, Halo, Einstein Equations, Conformastatic Spacetime, Energy-Momentum Tensor, Kuzmin-Toomre model, Oblate Spheroidal Coordinates, Rotational Curves.

**DESCRIPTION:**

Two infinite families of axially symmetric relativistic thin disks of dust immersed in spheroidal matter haloes are presented. The disks are obtained from solutions to the Einstein equations for an axially symmetric conformastatic spacetime in which the metric tensor is characterized by only one metric function. By introducing a finite discontinuity on the first derivatives of the metric tensor, solutions with a singularity of the delta function type are obtained, so describing thin disks. The nonzero components of the energy-momentum tensor, both for the disk and the halo, are obtained from the Einstein equations. In this way, the energy densities and pressures of the sources are determined. By imposing the fulfillment of all the energy conditions we obtain a constraint over the solutions, in such a way that the metric function can be properly expressed in terms of a solution of the Laplace equation. By using the solution to Laplace equation in spherical coordinates we find infinite disks, and by using the solution to Laplace equation in oblate spheroidal coordinates we find finite disks. In both cases we obtain particular solutions with energy densities and pressures well behaved everywhere. We also show that the masses of de disks and the haloes are finite even when the sources are of infinite extension. Finally we solve the geodesic equation for circular orbits in the plane of the disk to get the rotational curves.

---

<sup>1</sup>Degree work

<sup>2</sup>Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D.

# Introducción

---

El estudio del campo gravitacional producido por una fuente de materia y los efectos de este campo sobre la dinámica de las partículas ha sido un problema que ha fascinado a muchos físicos teóricos a través de los años. En sus inicios, los estudios sobre la gravedad y sus aplicaciones en la astrofísica fueron puramente newtonianos; sin embargo, debido a la imposibilidad de la gravitación newtoniana para explicar algunas observaciones, como el caso de la precesión anómala del perihelio de la órbita de Mercurio, o la deflexión de la luz por una distribución de masa [36], fue necesario usar la teoría general de la relatividad para describir apropiadamente las fuentes de campo gravitacional, en especial aquellas con densidades de energía muy grandes.

Una propiedad importante de algunos sistemas astrofísicos es la simetría axial; algunos ejemplos de estos sistemas son las estrellas, planetas, galaxias, agujeros negros, cúmulos de estrellas, discos de acreción alrededor de agujeros negros, etc. Por esta razón, es necesario disponer de un buen número de soluciones a las ecuaciones de Einstein que tengan simetría axial y que puedan describir configuraciones con estas características. Soluciones a estas ecuaciones para espacio-tiempos estáticos y estacionarios son de vital importancia para la astrofísica y para la teoría en sí misma. En el caso de las soluciones estacionarias, éstas pueden modelar galaxias o estrellas en equilibrio termodinámico, mientras que las soluciones estáticas, por su parte, se usan para describir estrellas o agujeros negros inactivos, o para modelar discos con fluidos contrarrotantes, para los cuales ya hay evidencia observacional [41].

Ahora bien, un área de la relatividad general que despierta mucho interés es la obtención de soluciones axialmente simétricas a las ecuaciones de Einstein que se puedan interpretar como discos delgados. Ésto se debe a que dichas soluciones pueden ser usadas para describir los discos galácticos, permitiendo así estudiar, tanto las propiedades físicas asociadas a la fuente discoidal de materia, como el movimiento de partículas en el plano del disco. En astrofísica, estas soluciones se usan para dar una descripción aproximada de discos de fluido perfecto, discos con esfuerzos anisótropos y discos de materia sin presión o de polvo. Por otro lado, es evidente que un sistema galáctico no está formado solo por un disco, sino que también posee otras componentes como el bulbo, el halo, un agujero negro central, etc. Sin embargo, la componente más grande de una galaxia es el halo, que es un fluido que se encuentra autogravitando alrededor

del disco. Se cree que el halo aporta, en algunos casos, más del 90 % de la masa total de la galaxia [40, 24]; por ésto, es importante construir modelos relativistas de discos inmersos en halos. Adicionalmente, una propiedad relevante de las soluciones es que describan sistemas de masa finita, o mejor aún, que describan fuentes de extensión finita.

Por otro lado, la velocidad circular de una partícula en el plano del disco es una cantidad física importante asociada a la dinámica de una galaxia, ya que en la literatura existen datos observacionales que muestran el comportamiento de la velocidad tangencial de las estrellas a diferentes distancias al centro del disco galáctico [46]. Las gráficas obtenidas a partir de estos datos se conocen como curvas de rotación y son de interés en astrofísica pues brindan un método indirecto para medir algunas propiedades físicas de la galaxia como por ejemplo su masa. Ya que la relatividad general es la teoría más aceptada para describir sistemas gravitacionales, es interesante poder calcular, a partir de las soluciones exactas, las curvas de rotación para su posterior análisis cualitativo.

A partir de las ecuaciones de Einstein se pueden obtener soluciones numéricas o soluciones exactas. Estas últimas no son sencillas de obtener e interpretar debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones de campo de Einstein. A pesar de ésto, se ha invertido gran cantidad de esfuerzo en la obtención de soluciones exactas ya que éstas permiten diferenciar un comportamiento físico de uno patológico, facilitan la intuición sobre situaciones más generales, y son útiles para estudiar la interacción del campo gravitacional con otros campos [4].

El problema de resolver las ecuaciones de Einstein y después interpretar las soluciones como discos delgados estáticos y estacionarios ha sido abordado por muchos investigadores ya que este problema presenta un gran interés, no solo en el marco de la teoría de la relatividad general y la comprensión de sus fundamentos, sino también en la interpretación y aplicación de las soluciones obtenidas a sistemas astrofísicos como por ejemplo las estrellas y las galaxias en equilibrio termodinámico. Sin embargo, este problema es relativamente joven y aún queda mucho camino que recorrer.

Los primeros modelos de discos relativistas fueron obtenidos por Bonnor y Sackfield [8] en 1968 y correspondían a discos estáticos sin presión. Un año después, Morgan y Morgan obtuvieron discos estáticos con presión radial [37]. Con ésto, el interés por este tipo de modelos aumentó y muchas soluciones diferentes fueron encontradas, tanto para discos estáticos [49, 34, 10, 32, 29, 7, 5, 16, 15], como para discos estacionarios [35, 6, 39]. La estabilidad de este tipo de modelos se ha investigado usando perturbaciones de primer orden en el tensor de momento-energía [45]. Discos relativistas como fuentes de la métrica de Kerr-Newman se presentan en [28]. Discos de fluido perfecto cargados fueron estudiados en [48, 14, 13]. También se ha estudiado la superposición de un disco delgado con un agujero negro central en varias referencias [21, 30, 31]. Discos de polvo estacionarios contrarrotantes han sido estudiados en [38, 26, 27].

En la literatura, las soluciones exactas de discos delgados en relatividad general se obtienen resolviendo simultáneamente el problema externo, cuya solución determina el campo exterior, y es básicamente un problema de contorno para las ecuaciones de Einstein, y el problema interno, que para discos delgados se reduce a imponer condiciones de frontera apropiadas a la solución exterior. Adicionalmente, para que las soluciones sean físicamente bien comportadas deben cumplir las condiciones de energía. La necesidad de que todas estas condiciones se cumplan dificulta la obtención de soluciones capaces de describir sistemas físicos. Para el caso de un sistema compuesto únicamente por un disco delgado y un halo esferoidal hay muy pocas referencias en la literatura. De nuestro conocimiento, existen dos trabajos realizados sobre discos con halos. El primer trabajo fue desarrollado por Vogt y Lettelier en 2003 [47]. En él, los autores toman soluciones exactas (soluciones exteriores) ya conocidas en la literatura y aplican a cada una el bien conocido método de desplazamiento, corte y reflexión, el cual garantiza las condiciones (de frontera) necesarias para definir una fuente discoidal. De esta manera obtienen discos delgados infinitos inmersos en halos. El segundo trabajo fue publicado por González, Gutierrez y Quevedo en 2013. En él se describen discos delgados infinitos con halo en el contexto de la gravedad de Einstein-Maxwell para un espacio-tiempo conformestático [20]. En este trabajo se usa nuevamente el método de desplazamiento, corte y reflexión para obtener los discos con halo.

Ahora bien, para definir discos finitos en relatividad general se usan las coordenadas esferoidales oblatas, puesto que éstas se adaptan muy bien a la simetría de las fuentes y definen de manera natural un radio de corte para el disco. Adicionalmente, estas coordenadas introducen las condiciones necesarias para la existencia de la distribución discoidal de materia y por tanto han sido utilizadas en diversos trabajos [49, 8]. A pesar de lo dicho anteriormente, no existe en la literatura soluciones exactas que describan discos delgados finitos inmersos en halos esferoidales.

El objetivo que se persigue con este trabajo de investigación es obtener nuevas soluciones a las ecuaciones de Einstein interpretables como discos delgados finitos e infinitos que estén inmersos en halos esferoidales de materia y que presenten densidades de energía y presiones físicamente bien comportadas. Con ambas familias se espera obtener y analizar, tanto las propiedades físicas de la fuente material, como también las expresiones para la velocidad tangencial de partículas que se mueven en órbitas circulares en el plano del disco.

Para cumplir este objetivo, se presenta en el capítulo 2 las soluciones a las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo estático y axialmente simétrico descrito por una métrica conformestática. Para interpretar físicamente el tensor de momento-energía obtenido se escriben sus componentes en un marco de referencia comovil cuyos ejes espaciales son paralelos a los esfuerzos principales. De esta manera se pueden obtener, tanto la densidad de energía, como la presión del fluido. Posteriormente, se exige que las soluciones cumplan con las condiciones de energía, de manera que las propiedades

del fluido sean físicamente bien comportadas. A partir de las condiciones de energía se obtiene una ecuación de estado para el halo, y a demás, una ecuación que permite escribir las soluciones en términos de la bien conocida solución a la ecuación de Laplace. Posteriormente, se usa la aproximación distribucional y el formalismo de cascarones delgados para definir apropiadamente una fuente discoidal delgada de materia. Finalmente, se introducen las expresiones para calcular la masa del sistema y se obtiene, a partir de la ecuación geodésica, la expresión para la velocidad circular de las partículas que se mueven en órbitas circulares en el plano del disco.

En el capítulo 3 se elige la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas y se aplica sobre ella el método de desplazamiento, corte y reflexión, de manera que se cumplan las condiciones necesarias para garantizar la existencia de una fuente discoidal de materia. Con estas soluciones se calculan, para los tres primeros modelos de la familia de soluciones, las expresiones analíticas que describen la densidad de energía del halo y del disco, la presión del fluido presente en el halo, las masas de ambas regiones (disco y halo) y la velocidad circular o velocidad de rotación de partículas de prueba tipo tiempo que se mueven bajo la acción gravitacional del disco y del halo; además, se grafican estas cantidades y se analizan los diferentes comportamientos. En conclusión, se obtiene una familia de discos delgados bien comportados que se extienden hasta el infinito y que están inmersos en un fluido o halo esferoidal de materia que cumple con las condiciones de energía.

En el capítulo 4, se elige la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas ya que estas coordenadas se adaptan muy bien a la geometría de las fuentes, introducen de manera natural un radio de corte para el disco y garantizan las condiciones necesarias para la existencia de esta fuente discoidal. Como en el capítulo anterior, se obtienen, para los tres primeros modelos de la familia de soluciones, las expresiones analíticas para las densidades de energía del disco y del halo, para la presión del halo, para la masa del sistema (nuevamente finita) y para la velocidad circular. Todas estas cantidades se grafican y se analizan para estudiar su comportamiento. De esta manera, se obtiene una familia infinita de soluciones a las ecuaciones de Einstein que cumplen las condiciones de energía y que se pueden interpretar como discos delgados finitos inmersos en halos esferoidales. Adicionalmente, se analiza la velocidad circular de partículas de prueba tipo tiempo que se mueven en órbitas circulares alrededor del centro del disco y en el plano del mismo, para de esta manera conocer cómo son las curvas de rotación asociadas a nuestras soluciones. En el capítulo final, se presentan las principales conclusiones de este trabajo.

# Discos Delgados Axialmente Simétricos Inmersos en Halos

---

## 1.1. Soluciones Axialmente Simétricas de las Ecuaciones de Einstein

Muchos objetos astrofísicos poseen simetría axial en una primera aproximación, algunos ejemplos de estos objetos son las galaxias, las estrellas, los planetas, algunos cúmulos de estrellas entre otros. Como el sistema disco-halo que queremos describir posee simetría axial, partimos de la métrica conformestática [25] en coordenadas cilíndricas,  $x^\alpha = (t, r, z, \varphi)$ ,

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2), \quad (1.1)$$

donde  $\psi$  es una función continua de las coordenadas  $r$  y  $z$ , pues el espacio tiempo debe ser axialmente simétrico. Adicionalmente, exigimos que  $\psi(r, -z) = \psi(r, z)$  de manera que el sistema posea simetría de reflexión al rededor del plano  $z = 0$ .

A pesar de que el tensor métrico,  $g_{\alpha\beta}$ , es un concepto fundamentalmente matemático que describe la geometría de un espacio topológico, éste a su vez adquiere, en relatividad general, una interpretación física análoga al potencial gravitacional en la teoría newtoniana; por esta razón, conociendo ya el tensor métrico (1.1) o campo gravitacional, podemos conocer la fuente física que produce dicho campo a través de las ecuaciones de Einstein, las cuales se escriben en unidades geometrizadas ( $c = 8\pi G = 1$ ) como

$$T_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R, \quad (1.2)$$

donde  $R_{\alpha\beta}$  es el tensor de Ricci,  $R$  es el escalar de Ricci y  $T_{\alpha\beta}$  es el tensor de momento-energía, el cual contiene toda información sobre las fuentes de campo gravitacional presentes en el halo (notese que, hasta el momento, no hemos introducido la fuente discoidal; ésto se hará más adelante).

Al calcular el tensor  $T_{\alpha\beta}$ , encontramos que las únicas componenetas no nulas son

$$T_{tt} = e^{4\psi} \left\{ 2\psi_{,rr} + 2\frac{\psi_{,r}}{r} + 2\psi_{,zz} - \psi_{,r}^2 - \psi_{,z}^2 \right\}, \quad (1.3)$$

$$T_{rr} = \psi_{,z}^2 - \psi_{,r}^2, \quad (1.4)$$

$$T_{\varphi\varphi} = r^2\{\psi_{,r}^2 + \psi_{,z}^2\}, \quad (1.5)$$

$$T_{zz} = \psi_{,r}^2 - \psi_{,z}^2, \quad (1.6)$$

$$T_{rz} = T_{zr} = -2\psi_{,r}\psi_{,z}. \quad (1.7)$$

La primera solución que consideramos, por su simplicidad, es la solución de vacío, la cual se obtiene haciendo  $T_{\alpha\beta} = 0$ . Ésto conduce al sistema de ecuaciones

$$\psi_{,rr} + \frac{\psi_{,r}}{r} + \psi_{,zz} = 0, \quad (1.8)$$

$$\psi_{,z}^2 - \psi_{,r}^2 = 0, \quad (1.9)$$

$$\psi_{,r}^2 + \psi_{,z}^2 = 0, \quad (1.10)$$

$$\psi_{,r}\psi_{,z} = 0, \quad (1.11)$$

cuya única solución es  $\psi(r, z)$  constante. Tal resultado implica que las funciones métricas,  $e^{\pm 2\psi}$ , son constantes y por lo tanto que el espacio-tiempo es minkowskiano; es decir, que en el espacio no existen fuentes de campo gravitacional. Sin embargo, como queremos que la fuente de materia posea una componente discoidal con una densidad de energía diferente de cero, la solución  $\psi$  constante no puede ser válida para nuestro caso. Con base en ésto, podemos afirmar que para un sistema disco-halo descrito por la métrica (1.1), la solución de vacío no existe. En este caso, por lo tanto, se introduce de manera natural el halo esferoidal de materia.

Ahora, para interpretar físicamente las componentes del tensor de momento-energía del halo, debemos transformarlas a un sistema de referencia comovil, el cual está definido por los vectores base

$$e_{(0)}^\alpha = e^{-\psi}\delta_0^a, \quad (1.12)$$

$$e_{(1)}^\alpha = e^\psi\delta_1^a, \quad (1.13)$$

$$e_{(2)}^\alpha = \frac{e^\psi}{r}\delta_2^a, \quad (1.14)$$

$$e_{(3)}^\alpha = e^\psi\delta_3^a, \quad (1.15)$$

donde el vector  $e_{(0)}^\alpha$  es la quadri-velocidad del sistema de referencia. Usando la fórmula de transformación

$$T_{(\mu)(\nu)} = T_{\alpha\beta}e_{(\mu)}^\alpha e_{(\nu)}^\beta, \quad (1.16)$$

obtenemos las componentes no nulas del tensor de momento-energía en la base comovil  $T_{(\mu)(\nu)}$ , las cuales son

$$T_{(t)(t)} = e^{2\psi}\{2\psi_{,rr} + 2\frac{\psi_{,r}}{r} + 2\psi_{,zz} - \psi_{,r}^2 - \psi_{,z}^2\}, \quad (1.17)$$

$$T_{(r)(r)} = e^{2\psi}\{\psi_{,z}^2 - \psi_{,r}^2\}, \quad (1.18)$$

$$T_{(\varphi)(\varphi)} = e^{2\psi} \{ \psi_{,r}^2 + \psi_{,z}^2 \}, \quad (1.19)$$

$$T_{(z)(z)} = e^{2\psi} \{ \psi_{,r}^2 - \psi_{,z}^2 \}, \quad (1.20)$$

$$T_{(r)(z)} = T_{(z)(r)} = -2e^{2\psi} \psi_{,r} \psi_{,z}. \quad (1.21)$$

A pesar de que el tensor  $T_{(\mu)(\nu)}$  no es diagonal, podemos encontrar un sistema de referencia en el cual los ejes espaciales estén orientados en dirección de los esfuerzos principales, de manera que el tensor quede en su forma diagonal. Para esto debemos resolver el problema de autovalores y autovectores definido por la ecuación

$$T_{(\mu)(\nu)} \zeta_{\hat{\alpha}}^{(\nu)} = \lambda \eta_{(\mu)(\nu)} \zeta_{\hat{\alpha}}^{(\nu)}, \quad (1.22)$$

donde  $\lambda$  es el autovalor asociado a cada autovector  $\zeta_{\hat{\alpha}}^{(\nu)}$ . Haciendo ésto, llegamos a la tétrada de autovectores

$$\zeta_{\hat{0}}^{(a)} = \left( e^{-\psi}, 0, 0, 0 \right), \quad (1.23)$$

$$\zeta_{\hat{1}}^{(a)} = \left( 0, 0, \frac{1}{r} e^{\psi}, 0 \right), \quad (1.24)$$

$$\zeta_{\hat{2}}^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \left( 0, e^{\psi}, 0, -\Omega e^{\psi} \right), \quad (1.25)$$

$$\zeta_{\hat{2}}^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \left( 0, \Omega e^{\psi}, 0, e^{\psi} \right), \quad (1.26)$$

donde  $\Omega = \psi_{,r} / \psi_{,z}$ .

Con la base de autovectores y la ecuación de transformación,

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = T_{(\alpha)(\beta)} \zeta_{\hat{\mu}}^{(\alpha)} \zeta_{\hat{\nu}}^{(\beta)}, \quad (1.27)$$

calculamos las componentes no nulas del tensor diagonal de momento-energía,

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = e^{2\psi} (2\nabla^2 \psi - \nabla \psi \cdot \nabla \psi), \quad (1.28)$$

$$T_{\hat{r}\hat{r}} = e^{2\psi} \nabla \psi \cdot \nabla \psi, \quad (1.29)$$

$$T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = e^{2\psi} \nabla \psi \cdot \nabla \psi, \quad (1.30)$$

$$T_{\hat{z}\hat{z}} = -e^{2\psi} \nabla \psi \cdot \nabla \psi, \quad (1.31)$$

donde  $T_{\hat{t}\hat{t}}$  es la densidad de energía,  $\rho$ , del halo y  $T_{\hat{r}\hat{r}}, T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}$  y  $T_{\hat{z}\hat{z}}$  son los esfuerzos principales  $p_1, p_2$  y  $p_3$  respectivamente. En resumen, se obtuvo para el halo la densidad de energía,

$$\rho = e^{2\psi} (2\nabla^2 \psi - \nabla \psi \cdot \nabla \psi), \quad (1.32)$$

y la presión promedio,

$$p = \frac{1}{3} (p_1 + p_2 + p_3) = \frac{1}{3} e^{2\psi} \nabla \psi \cdot \nabla \psi, \quad (1.33)$$

Ahora, para que las soluciones que hemos obtenido representen una fuente gravitacional físicamente bien comportada, es importante que cumplan con las condiciones de energía. Si el tensor de momento-energía es diagonal, estas condiciones se escriben como

$$\rho \geq 0, \quad (1.34)$$

$$|\rho| \geq |p_i|; \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.35)$$

$$\rho + p_i \geq 0; \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.36)$$

$$\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0. \quad (1.37)$$

Las desigualdades (1.34) y (1.36) corresponden a la condición de energía debil, la cual garantiza la positividad de la densidad de energía del halo; la desigualdad (1.35) corresponde a la condición de energía dominante, la cual garantiza que la materia fluya en líneas de mundo tipo tiempo o nulas; finalmente, (1.37) corresponde a la condición de energía fuerte, la cual garantiza que el campo gravitacional sea atractivo. Ahora, para las soluciones (1.28-1.31), las condiciones de energía se reducen a la desigualdad

$$\nabla^2\psi \geq \nabla\psi \cdot \nabla\psi. \quad (1.38)$$

Una forma de satisfacer (1.38) es encontrar funciones  $\psi$  que satisfagan la ecuación

$$\nabla^2\psi = k\nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (1.39)$$

con  $k \geq 1$ ; así se garantiza que  $\rho$  y  $p$  tengan un buen comportamiento físico. Esta forma particular de satisfacer las condiciones de energía conduce a la ecuación de estado para el fluido en el halo

$$p = \frac{\rho}{3(2k - 1)}. \quad (1.40)$$

Un fluido cuya ecuación de estado tiene la forma lineal  $p = \gamma\rho$  se conoce como fluido tipo gamma [9]. En nuestro caso  $\gamma = 1/[3(2k - 1)]$  y, dependiendo del valor de  $k$ , podemos tener diferentes tipos de fluidos: para el menor valor posible de  $k$  ( $k = 1$ ), tenemos que  $\gamma = 1/3$ , lo cual implica que en el halo hay un fluido de radiación (fotones); para el mayor valor posible de  $k$  ( $k = \infty$ ), tenemos que  $\gamma = 0$ , por lo tanto  $p = 0$ , es decir, el fluido del halo será de polvo. A medida que se incrementa  $k$  el fluido es, microscópicamente hablando, menos interactuante, ya que la presión tiende a disminuir.

La ecuación (1.39) se puede reescribir como  $\nabla^2(e^{-k\psi}) = 0$ , donde  $e^{-k\psi}$  se toma como solución a la ecuación de Laplace  $\nabla^2 U = 0$ ; sin embargo, para garantizar que el espacio tiempo sea asintóticamente plano, tomamos la relación entre la función  $\psi$  y la función  $U$  como

$$e^{-k\psi} = 1 - U, \quad (1.41)$$

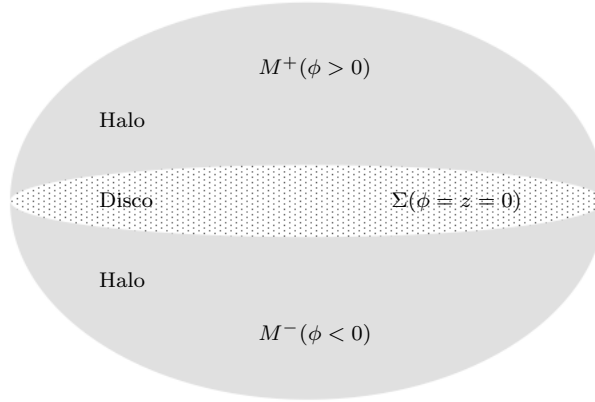


Figura 1.1: División del espacio-tiempo a partir de la inclusión de una hipersuperficie.

de manera que, como en el infinito  $U$  se hace cero, la métrica (1.1) se convierte en Minkowsky y por lo tanto el espacio-tiempo se hace plano. Con la ecuación anterior y tomando  $U$  como solución a la ecuación de Laplace podemos calcular  $\psi$ . De esta manera queda completamente determinada la densidad de energía y presión del fluido en el halo.

Hasta el momento solo se ha obtenido un fluido con simetría axial cuya ecuación de estado es de la forma  $p = \gamma\rho$ . En la siguiente sección se introducirá una fuente discoidal en el plano  $z = 0$ , de manera que ésta quede inmersa en el fluido. El formalismo utilizado para definir el disco introduce unas condiciones sobre la métrica que son heredadas a la función  $\psi$ , y que se satisfacen mediante una apropiada escogencia de la función  $U$ .

## 1.2. Tensor de Momento-Enería del Disco

Para introducir una fuente discoidal de materia debemos definir, en primer lugar, la hipersuperficie sobre la cual va a existir una densidad de energía diferente de cero. Esta hipersuperficie la denotamos con la letra  $\Sigma$  y la definimos mediante la función  $\phi(x^\alpha) = z$ , de manera que su vector normal es  $n_\alpha = \delta_\alpha^z$ . Por simplicidad ubicamos el origen del sistema de coordenadas en la hipersuperficie para que ésta quede en el plano  $z = 0$ . Al definir  $\Sigma$ , el espacio queda dividido en dos partes:  $M^+$ , para  $\phi > 0$ , es decir, por encima de la hipersuperficie, y  $M^-$ , para  $\phi < 0$ , es decir, por debajo de  $\Sigma$ . La figura 2.1 muestra, de manera esquemática, esta división del espacio.

Mediante el uso de la aproximación distribucional [1, 33, 43] y del formalismo de cascarones delgados [23, 11] podemos escribir el tensor métrico de la forma,

$$g_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta})^D = g_{\alpha\beta}^+ \theta(\phi) + g_{\alpha\beta}^- \{1 - \theta(\phi)\}, \quad (1.42)$$

donde  $\theta(\phi)$  es la función de distribución de Heaveside y  $g_{\alpha\beta}^{\pm}$  son los tensores métricos para las regiones definidas por  $\phi > 0$  ( $M^+$ ) y  $\phi < 0$  ( $M^-$ ) respectivamente. Los símbolos de Christoffel en forma distribucional se pueden construir a partir de (1.42) como

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{+\alpha}\theta(\phi) + \Gamma_{\beta\gamma}^{-\alpha}\{1 - \theta(\phi)\}, \quad (1.43)$$

donde  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\pm\alpha}$  son los símbolos de Christoffel en  $M^+$  y  $M^-$ . Para llegar a la ecuación (1.43) se impone la condición de continuidad del tensor métrico en  $z = 0$ . Matemáticamente, esta condición se escribe como

$$[g_{\alpha\beta}] = g_{\alpha\beta}|_{z=0^+} - g_{\alpha\beta}|_{z=0^-} = 0, \quad (1.44)$$

donde  $[g_{\alpha\beta}]$  es la función salto de  $g_{\alpha\beta}$  a través del plano  $z = 0$ . Es importante introducir esta condición para que los símbolos de Christoffel queden, distribucionalmente, bien definidos.

Con la ecuación (1.42) y (1.43) escribimos el tensor de Ricci como

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^+\theta(\phi) + R_{\alpha\beta}^-\{1 - \theta(\phi)\} + H_{\alpha\beta}\delta(\phi), \quad (1.45)$$

donde  $\delta(\phi)$  es la función delta de Dirac,  $R_{\alpha\beta}^{\pm}$  son los tensores de Ricci para  $M^+$  y  $M^-$ , y  $H_{\alpha\beta}$  es el tensor de Ricci asociado a la hipersuperficie. Este último tensor se escribe en términos del vector normal,  $n_{\alpha}$ , mediante la expresión

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\{b_{\beta}^zn_{\alpha} - b_{\gamma}^{\gamma}n_{\alpha}n_{\beta} + b_{\alpha z}n_{\beta} - b_{\alpha\beta}g^{zz}\}, \quad (1.46)$$

con

$$b_{\alpha\beta} = [g_{\alpha\beta,z}] = g_{\alpha\beta,z}|_{z=0^+} - g_{\alpha\beta,z}|_{z=0^-}. \quad (1.47)$$

Nótese que si  $g_{\alpha\beta,z}$  fuera continua en  $z = 0$ , entonces  $b_{\alpha\beta}$  se haría cero, y como consecuencia, desaparecería el término singular en el tensor de Ricci (1.45). Sin embargo, si consideramos  $H_{\alpha\beta}$  diferente de cero; es decir, si la primera  $z$ -derivada del tensor métrico es discontinua en  $z = 0$ , entonces podemos darle una interpretación física a la singularidad. Ésto se logra si, a partir de las ecuaciones de Einstein y de (1.45), construimos el tensor de momento-energía, el cual toma la forma

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^+\theta(\phi) + T_{\alpha\beta}^-\{1 - \theta(\phi)\} + Q_{\alpha\beta}\delta(\phi), \quad (1.48)$$

donde  $T_{\alpha\beta}^{\pm}$  son los tensores de momento-energía en  $M^+$  y  $M^-$  respectivamente y  $Q_{\alpha\beta}$  es el tensor de momento-energía asociado a la hipersuperficie. En pocas palabras, el término singular del tensor  $T_{\alpha\beta}$  define una capa delgada de materia en  $\Sigma$ , cuyo tensor de momento-energía se expresa en términos de  $H_{\alpha\beta}$  y del escalar de Ricci,  $H$ , asociado a  $\Sigma$  como

$$Q_{ab} = H_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}H. \quad (1.49)$$

Estas son las ecuaciones de Einstein sobre la hipersuperficie.

Ahora, para garantizar que se cumpla la condición (1.44) exigimos, además de simetría axial, simetría de reflexión alrededor del plano  $z = 0$ , la cual se cumple si

$$\psi(r, -z) = \psi(r, z), \quad (1.50)$$

Esta ecuación implica a su vez que

$$\psi_{,z}(r, -z) = -\psi_{,z}(r, z), \quad (1.51)$$

por lo tanto, (1.47) se puede reescribir como

$$b_{\alpha\beta} = 2g_{\alpha\beta,z}|_{z=0^+} \neq 0, \quad (1.52)$$

si, además, logramos garantizar que  $g_{\alpha\beta,z}|_{z=0^+} \neq 0$ . Ésta es la condición necesaria para que  $Q_{\alpha\beta}$  sea diferente de cero. La simetría de reflexión implica también que  $T_{\alpha\beta}^+ = T_{\alpha\beta}^-$ , los cuales ya hemos calculado mediante las ecuaciones (1.2). Como  $\psi$  está relacionado con la solución a la ecuación de Laplace mediante (1.41), entonces debemos escoger una función  $U$  que cumpla con las condiciones (1.50) y (1.52). Esta escogencia la veremos en los capítulos 3 y 4.

Habiendo definido ya las condiciones necesarias para que exista una fuente discoidal de materia, aplicamos las ecuaciones (1.49) a la métrica conformestática para obtener  $Q_{\alpha\beta}$ . La única componente no nula del tensor de momento-energía del disco es

$$Q_t^t = -4\psi_{,z}e^{2\psi}, \quad (1.53)$$

la cual está evaluada en  $z = 0^+$ .

Ahora, el tensor de momento-energía superficial del disco se calcula a partir de la integral

$$S_{\alpha\beta} = \int T_{\alpha\beta} ds_n = \sqrt{g_{zz}} Q_{\alpha\beta}, \quad (1.54)$$

donde  $ds_n = \sqrt{g_{zz}} dz$  y  $T_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta} \delta(\phi)$ . De esta manera, la componente no nula de  $S_{\alpha\beta}$  es

$$S_{tt} = 4\psi_{,z}e^{3\psi}. \quad (1.55)$$

Escribiendo  $S_{\alpha\beta}$  en el sistema definido por los vectores base  $\zeta_{\hat{\alpha}}^{(\beta)}$  obtenemos la densidad superficial de energía del disco

$$\sigma = 4e^\psi \psi_{,z}, \quad (1.56)$$

la cual está evaluada en  $z = 0^+$ . Ahora, para que el tensor superficial de momento-energía del disco satisfaga las condiciones de energía, es necesario que se cumpla la desigualdad

$$\psi_{,z}|_{z=0^+} > 0, \quad (1.57)$$

la cual implica que  $\sigma > 0$ . Esta desigualdad se introduce como una condición de contorno para la ecuación (1.39).

### 1.3. Masa del Sistema y Geodésicas Circulares

Dos cantidades importantes, no solo desde el punto de vista teórico sino también desde el observacional, son la masa del sistema disco-halo y la velocidad circular de una partícula que se mueve en órbitas circulares alrededor del centro del sistema y en el plano del disco. La velocidad circular tiene especial importancia en astrofísica, ya que a partir de las curvas de rotación observacionales se puede obtener, de manera indirecta, información fundamental sobre las propiedades físicas de las galaxias como la masa, la frecuencia epicyclica, la frecuencia vertical, etc [18].

Una vez obtenido el tensor de momento-energía del disco ( $S_{\alpha\beta}$ ) y del halo ( $T_{\alpha\beta}$ ) podemos calcular la masa total de cada una de las regiones que conforman el sistema. Para cumplir con este primer objetivo usamos la fórmula de Komar [11],

$$M = 2 \int \left( T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) m_\alpha \xi_{(t)}^\beta \sqrt{h} d^3 y, \quad (1.58)$$

donde  $m_\alpha$  es el vector normal a la hipersuperficie tipo tiempo,  $\xi_{(t)}^\beta$  es el vector de Killing tipo tiempo,  $h$  es el determinante de la métrica inducida y  $\sqrt{h} d^3 y$  es el elemento de volumen del espacio. En nuestro caso,  $m_\alpha = \zeta_0^\alpha$  y  $\xi_{(t)}^\beta = \delta_t^\beta$ .

Para calcular la masa del halo usamos, en la fórmula de Komar, el tensor de momento-energía cuyas componentes no nulas están dadas en (1.3-1.7). Con estas componentes la masa del halo toma la forma,

$$M_H = k \int_V (\nabla\psi \cdot \nabla\psi) dV = \int_V (\nabla^2\psi) dV, \quad (1.59)$$

donde  $V$  es el volumen que se extiende a todo el espacio y  $dV$  es el elemento de volumen usual (euclidiano) del espacio. Ahora, para el caso del disco, tomamos  $T_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta} \delta(z) = e^\psi S_{\alpha\beta} \delta(z)$ . Esto nos permite escribir su masa como

$$M_D = 8\pi \int_0^\infty \psi_{,z}|_{z=0^+} r dr. \quad (1.60)$$

Tanto la masa del disco como la del halo dependen del tipo de función  $U$  que tomemos para determinar las soluciones.

Es claro que la métrica (1.1), además de ser estacionaria, es estática, es decir, describe el campo gravitacional producido por una fuente que no se está moviendo (sistema con simetría de reflexión temporal), por lo tanto, para calcular, en relatividad general, la velocidad circular de una partícula alrededor del centro del sistema y en el plano del disco, debemos estudiar la dinámica de partículas tipo tiempo que se mueven en presencia del campo gravitacional estático producido por la fuente discoidal y por el halo de materia. Para esto, debemos resolver la ecuación de la geodésica

$$\frac{du_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} u^\mu u^\nu, \quad (1.61)$$

para una partícula cuyo cuadvivector velocidad está definido únicamente por la componente temporal y por aquella que apunta en dirección  $\varphi$ , de manera que

$$u^\alpha = u^0(1, 0, \omega, 0), \quad (1.62)$$

donde  $w = u^2/u^0$  es la velocidad angular. Como el vector velocidad de partículas reales es temporal y unitario, entonces debemos aplicar la condición de normalización  $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1$ , con la cual encontramos que

$$(u^0)^2 = \frac{e^{-2\psi}}{1 - v_c^2}, \quad (1.63)$$

donde  $v_c^2 = e^{-4\psi}r^2\omega^2$  es la velocidad circular o tangencial.

Como la velocidad en dirección radial es cero, entonces  $g_{\mu\nu,r}u^\mu u^\nu = 0$ . Esto implica que la velocidad circular en términos de  $U$  es

$$v_c^2 = \frac{rU_{,r}}{k(1 - U) - rU_{,r}}. \quad (1.64)$$

Esta expresión se evalúa en el plano del disco para obtener las curvas de rotación.

# Discos Relativistas de Kuzmin-Toomre con Halo

---

Las densidades de energía del halo y del disco, la presión del halo, la masa del sistema y las velocidades de rotación son las propiedades físicas que describen el sistema disco-halo. Estas propiedades están escritas en términos de la función  $U$ , la cual es solución a la ecuación de Laplace. Una elección de esta función permite generar, ya sea un modelo particular, o bien, una familia de soluciones.

Sin embargo, como vimos en la sección 2.2, no basta con que  $U$  sea solución de la ecuación de Laplace, también es importante que esta función sea axialmente simétrica y que, además, posea simetría de reflexión alrededor del plano del disco ( $z = 0$ ), es decir, que  $U(r, -z) = U(r, z)$ ; esto con el objetivo de satisfacer (1.50). Adicionalmente, la elección de  $U$  debe garantizar que  $g_{\alpha\beta,z}|_{z=0^+} \neq 0$ , de manera que se cumpla (1.52). Satisfaciendo estas condiciones podemos definir apropiadamente una distribución discoidal de materia en el plano  $z = 0$ .

Para cumplir las condiciones discutidas en el párrafo anterior consideramos  $U$  como solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Sin embargo, debido a que los halos galácticos en general no son esféricos, es más adecuado escribir las soluciones en coordenadas cilíndricas ya que ellas facilitan la interpretación de las soluciones. Ahora, si usamos las transformaciones usuales de coordenadas esféricas a cilíndricas:  $R^2 = r^2 + z^2$  y  $\cos\theta = z/R$ , entonces la condición (1.52) no se satisface, ya que se obtiene  $b_{\alpha\beta} = 0$ .

Para resolver este problema se hace uso del método de desplazamiento, corte y reflexión, el cual fué utilizado por Kuzmin y Toomre [44, 12] para generar discos en el marco de la gravitación newtoniana. Este método consiste en hacer la transformación sobre la coordenada  $z$ ,

$$z \rightarrow |z| + a, \tag{2.1}$$

donde  $a$  es una cantidad constante. Finalmente, con esta transformación podemos escri-

bir la función  $U$  como

$$U_n(R, \theta) = - \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta), \quad (2.2)$$

donde  $P_l(\cos\theta)$  son los polinomios de Legendre,  $A_l$  son constantes,  $R^2 = r^2 + (|z| + a)^2$  y  $\cos\theta = (|z| + a)/R$ .

Como se ve en la ecuación (2.2), hemos obtenido un número infinito de funciones ( $0 \leq n < \infty$ ) que, junto con las propiedades físicas obtenidas en el capítulo anterior, describen fuentes discoidales inmersas en halos de materia. En este trabajo solo presentaremos algunas soluciones, y sobre ellas discutiremos el comportamiento de las fuentes de campo gravitacional y su efecto sobre la dinámica de las partículas que se mueven en el plano del disco. Para esto consideramos, únicamente, los tres primeros casos de la función  $U$ , es decir,

$$U_0 = -\frac{A_0}{R}, \quad (2.3)$$

$$U_1 = -\frac{A_0}{R} - \frac{A_1}{R^2} \cos\theta, \quad (2.4)$$

$$U_2 = -\frac{A_0}{R} - \frac{A_1}{R^2} \cos\theta - \frac{A_2}{R^3} (3\cos^2\theta - 1). \quad (2.5)$$

Como se había dicho anteriormente, tanto  $R$  como  $\cos\theta$  dependen de las coordenadas cilíndricas  $r$  y  $z$ , de manera que  $U_0, U_1$  y  $U_2$  también dependen de estas coordenadas.

## 2.1. Densidad de Energía del Disco

Ahora, con la relación entre la función  $\psi$  y la función  $U$  podemos escribir la densidad de energía del disco (1.56) en términos de  $U$  como

$$\sigma_n(r, z) = \frac{4}{k} \frac{U_{n,z}}{(1 - U_n)^{\frac{k+1}{k}}}. \quad (2.6)$$

Esta expresión se debe evaluar en  $z = 0^+$ .

Así obtenemos las expresiones analíticas para las densidades (normalizadas) de energía del disco para los tres primeros modelos de la familia infinita de soluciones, las cuales se escriben como

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{\tilde{A}_0 (\tilde{A}_0 + \sqrt{\vartheta})^{-\frac{1+k}{k}}}{(\vartheta)^{\frac{2k-1}{2k}}}, \quad (2.7)$$

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{[\tilde{A}_0 \vartheta + \tilde{A}_1 (2 - \tilde{r}^2)] \vartheta^{\frac{3-2k}{2k}}}{[\vartheta^{3/2} + \tilde{A}_0 \vartheta + \tilde{A}_1]^{\frac{1+k}{k}}}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{\sigma}_2 = \frac{[(\tilde{A}_0 - \tilde{A}_1)\vartheta^2 + 3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)\vartheta + \frac{5}{2}\tilde{A}_2(2 - \tilde{r}^2)]\vartheta^{\frac{5-2k}{k}}}{[2\vartheta^{5/2} + 2\tilde{A}_0\vartheta^2 + 2\tilde{A}_1\vartheta + \tilde{A}_2(2 - \tilde{r}^2)]^{\frac{1+k}{k}}}, \quad (2.9)$$

donde  $\vartheta = 1 + \tilde{r}^2$ ,  $\tilde{r} = r/a$ ,  $\tilde{A}_0 = A_0/a$ ,  $\tilde{A}_1 = A_1/a^2$ ,  $\tilde{A}_2 = A_2/a^3$ , y  $\tilde{\sigma}_n = (ka/4)\sigma_n$ .

Para analizar el comportamiento de esta cantidad se realizaron las gráficas que presentamos en la figura 3.1. En ellas se muestran diferentes comportamientos para diferentes valores de las constantes  $k$  y  $\tilde{A}_i$ . Cada curva está determinada por un conjunto de valores para las constantes, de manera que para el modelo  $n$ , los valores serán  $(k, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$ . Es importante aclarar que los valores que escogimos para las constantes conducen a densidades de energía positivas para que se cumplan las condiciones de energía, es decir, para que satisfagan (1.57).

Como se puede ver en la figura 3.1, la mayoría de los perfiles de densidad de energía del disco presentan un máximo en el centro del sistema, es decir en  $\tilde{r} = 0$ . La densidad comienza a decrecer a medida que se incrementa la distancia al centro del disco hasta llegar a tomar un valor de  $\tilde{\sigma} = 0$  en el infinito. Los diferentes valores que pueden tomar las constantes determinan el valor máximo de  $\tilde{\sigma}$  y qué tan concentrada se presenta esta energía en el centro; en otras palabras, determinan con qué rapidez decrece  $\tilde{\sigma}$  con la distancia  $\tilde{r}$ .

Finalmente, es importante resaltar que el modelo  $n = 0$  es más restrictivo, ya que solo tiene dos constantes libres para variar y, por lo tanto, los perfiles de densidad de energía que se obtienen son cualitativamente similares entre ellos (máximo en el centro y tiende a cero en el infinito). Por otro lado, en el modelo  $n = 1$ , y más aún, en el modelo  $n = 2$ , aparece un mayor número de constantes para elegir y así obtener varios perfiles con comportamientos diferentes. Se observa, por ejemplo, en el modelo  $n = 2$ , algunos casos en los cuales la densidad de energía presenta más de un máximo; en el modelo  $n = 1$  tenemos un caso en donde el máximo no se encuentra en el centro del sistema, lo cual es inusual.

## 2.2. Densidad de Energía del Halo

En los modelos obtenidos, el disco delgado se encuentra inmerso en un fluido o halo de materia que posee una densidad de energía,  $\rho$ , dada por la ecuación (1.32) y una presión promedio,  $p$ , dada por (1.33). Ambas cantidades físicas están relacionadas a través de una ecuación de estado de la forma  $p = \gamma\rho$ ; por lo tanto, analizar el comportamiento cualitativo de la densidad de energía es equivalente a analizar el de la presión promedio, ya que estas cantidades solo se diferencian por el factor de escala  $\gamma$ .

Con la relación entre la función  $U$  y la función  $\psi$  calculamos la densidad de energía

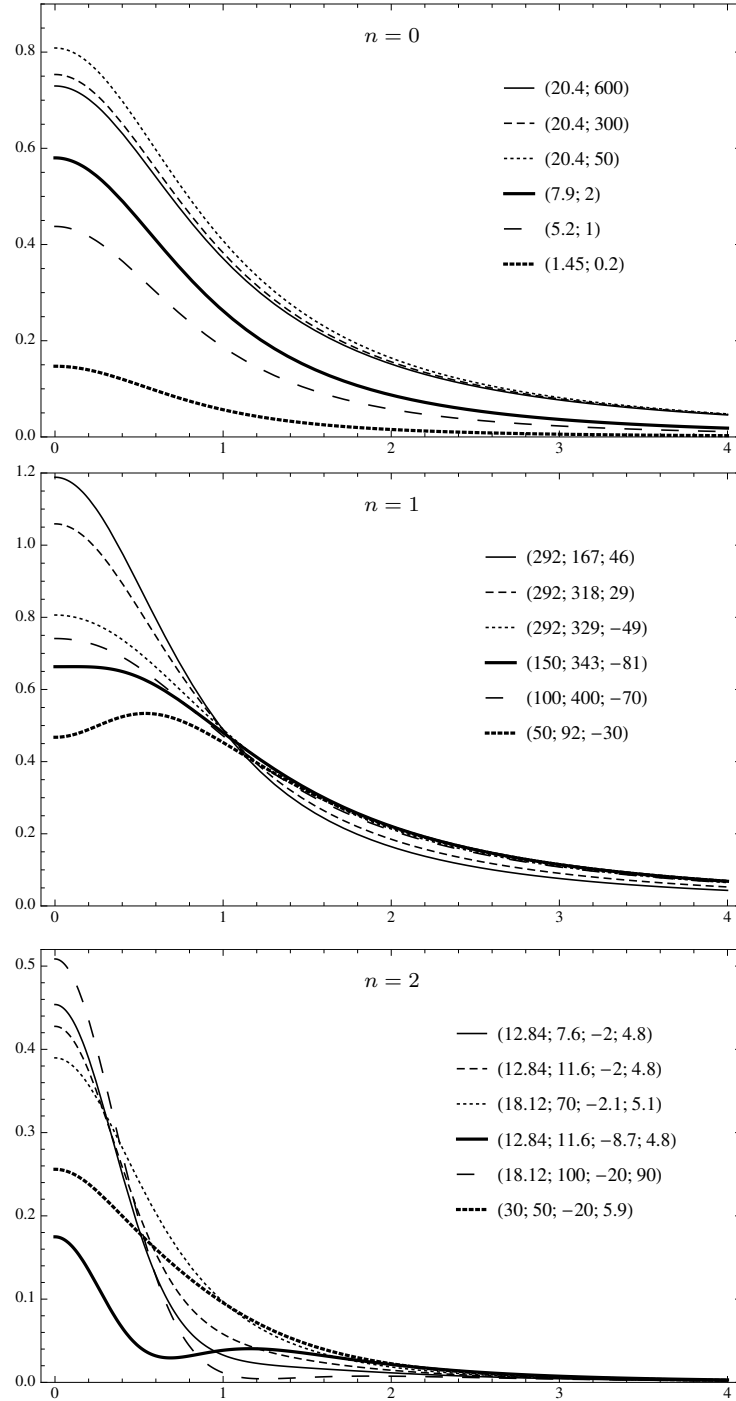


Figura 2.1: Densidad superficial de energía del disco  $\tilde{\sigma}_n$  como función de  $\tilde{r}$  para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones. Cada curva está referenciada por un conjunto de números, de manera que, para el modelo  $n$  los números son  $(k, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$ .

del halo en términos de  $U$ , de manera que se obtiene

$$\rho_n(r, z) = \frac{2k-1}{k^2} \frac{U_{n,r}^2 + U_{n,z}^2}{(1-U_n)^{2(k+1)/k}}. \quad (2.10)$$

Con esta expresión se calculan las densidades de energía del halo para los tres primeros modelos de la familia infinita de soluciones ( $n = 0, 1, 2$ ),

$$\tilde{\rho}_0 = \frac{\tilde{A}_0^2 (\tilde{A}_0 + \sqrt{\tilde{M}})^{-2(k+1)/k}}{\tilde{M}^{(k-1)/k}}, \quad (2.11)$$

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{\tilde{r}^2 [\tilde{A}_0 \tilde{M} + 3\tilde{A}_1 \tilde{Z}]^2 + [\tilde{Z}(\tilde{A}_0 \tilde{M} + 3\tilde{A}_1 \tilde{Z}) - \tilde{A}_1 \tilde{M}]^2}{\tilde{M}^{(2k-3)/k} [\tilde{M}^{3/2} + \tilde{M} \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \tilde{Z}]^{2(1+k)/k}}, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_2 = & \frac{\tilde{M}^{(5-2k)/k} \left[ \tilde{A}_0 \tilde{r} \tilde{M}^2 + (3\tilde{A}_1 \tilde{Z} + \tilde{A}_2) \tilde{r} \tilde{M} + \frac{5}{2} \tilde{A}_2 (2\tilde{Z}^2 - \tilde{r}^2) \right]^2}{\left[ \tilde{M}^{5/2} + \tilde{A}_0 \tilde{M}^2 + \tilde{A}_1 \tilde{M} \tilde{Z} + \frac{1}{2} \tilde{A}_2 (\tilde{Z}^2 - \tilde{r}^2) \right]^{2(1+k)/k}} + \\ & \frac{\tilde{M}^{(5-2k)/k} \left[ (\tilde{A}_0 \tilde{Z} - \tilde{A}_1) \tilde{M}^2 + 3\tilde{Z}(\tilde{A}_1 \tilde{Z} - \tilde{A}_2) \tilde{M} + \frac{5}{2} \tilde{A}_2 \tilde{Z} (2\tilde{Z}^2 - \tilde{r}^2) \right]^2}{\left[ \tilde{M}^{5/2} + \tilde{A}_0 \tilde{M}^2 + \tilde{A}_1 \tilde{M} \tilde{Z} + \frac{1}{2} \tilde{A}_2 (\tilde{Z}^2 - \tilde{r}^2) \right]^{2(1+k)/k}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde  $\tilde{M} = \tilde{r}^2 + \tilde{Z}^2$ ,  $\tilde{Z} = |\tilde{z}| + 1$ ,  $\tilde{z} = z/a$ ,  $\tilde{r} = r/a$ ,  $\tilde{A}_0 = A_0/a$ ,  $\tilde{A}_1 = A_1/a^2$ ,  $\tilde{A}_2 = A_2/a^3$ , y  $\tilde{\rho}_n = [(ka)^2/(2k-1)]\rho_n$ .

Para observar el comportamiento de estas funciones realizamos las gráficas de contorno que se presentan en la figura 3.2. Estas gráficas muestran la dependencia funcional de la densidad de energía del halo con las coordenadas  $\tilde{r}$  y  $\tilde{z}$  a través de líneas de isodensidad. La distribución de estas líneas en el espacio muestran cómo es la forma de los halos de materia; permiten observar en qué lugares hay una mayor densidad de energía y con qué rapidez cambia esta densidad en el espacio.

El comportamiento de la densidad de energía del halo es muy similar al de la densidad de energía del disco: la mayor concentración de masa está localizada en el centro del sistema, es decir, en  $\tilde{z} = 0$  y en  $\tilde{r} = 0$ . Este máximo de densidad decrece rápidamente hasta tomar un valor de cero en el infinito. Como se puede observar, los halos, en general, son achatados en dirección  $z$ , adquiriendo una forma aproximadamente oblata. Ésto indica que la energía tiende a aglomerarse en las proximidades del disco, el cual se encuentra en el plano  $\tilde{z} = 0$ .

De acuerdo con las curvas de contorno, el halo en el modelo  $n = 1$  es más esférico que el del modelo  $n = 0$ . Estas diferentes distribuciones se pueden obtener, ya sea considerando diferentes modelos; es decir, cambiando el valor de  $n$ , o ajustando las constantes  $k$  y  $A_l$  a la forma del halo que se desea obtener. También es posible cambiar el valor máximo de  $\tilde{\rho}$  y la velocidad de decrecimiento de esta densidad si se escogen apropiadamente las constantes anteriormente mencionadas. En la figura 3.2 se observa

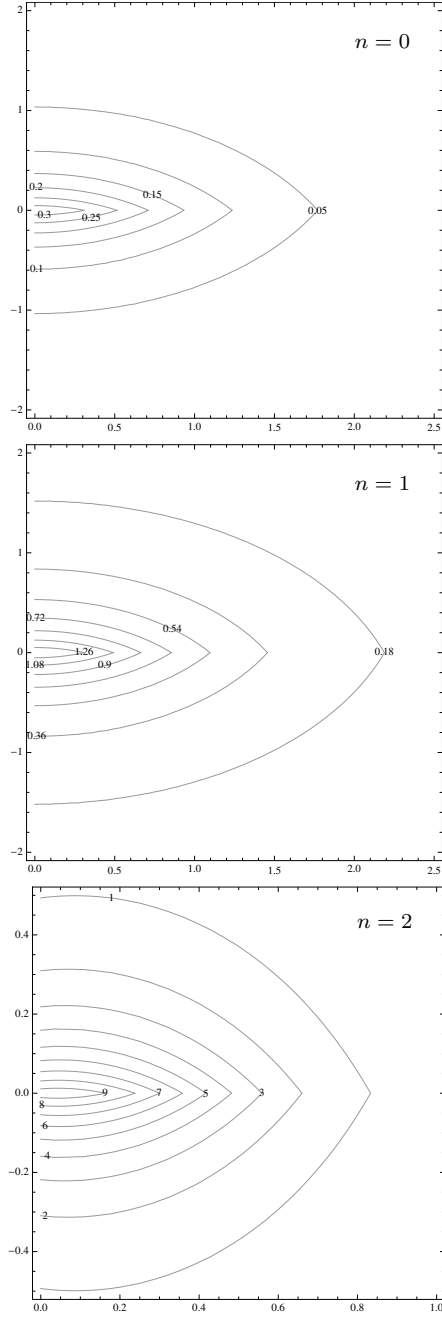


Figura 2.2: Curvas de contorno de la densidad de energía del halo,  $\tilde{\rho}_n$ , en función de  $\tilde{r}$  (eje horizontal) y  $\tilde{z}$  (eje vertical) para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones. La gráfica correspondiente al modelo  $n = 0$  se obtiene haciendo  $k = 7,9$  y  $\tilde{A}_0 = 2$ ; la del modelo  $n = 1$  se obtiene con  $k = 292$ ,  $\tilde{A}_0 = 167$ , y  $\tilde{A}_1 = 46$ ; por último, las las curvas de contorno del modelo  $n = 2$  se obtienen para los valores  $k = 18,12$ ,  $\tilde{A}_0 = 100$ ,  $\tilde{A}_1 = -20$  y  $\tilde{A}_2 = 90$ .

que los modelos particulares con  $n$  mayor tienden a presentar densidades de energía más grandes.

Finalmente, si se observan las gráficas correspondientes al modelo  $n = 3$ , y se comparan con la curva correspondiente a la densidad de energía del disco en la figura 3.2, se puede concluir que a pesar de que en el disco,  $\tilde{\sigma}$  posee más de un máximo, éste mismo no sucede para el halo, ya que en éste,  $\tilde{\rho}$  solo presenta un máximo en el centro.

### 2.3. Masa del Disco y del Halo

Otra cantidad de interés físico es la masa total del sistema,  $M_T$ , la cual se compone de dos partes:  $M_D$ , la masa del disco, y  $M_H$ , la masa del halo. Para calcular estas dos cantidades debemos resolver las integrales (1.60) y (1.59). Sin embargo, como  $\tilde{\sigma}_n$  y  $\tilde{\rho}_n$  se extienden en todo el espacio, es posible que las integrales conduzcan a valores de masa infinitos. Como en la naturaleza no existen fuentes infinitas de campo gravitacional, es importante demostrar que a pesar de que los modelos son de extensión infinita, la masa total del sistema es finita. Ésto equivale a decir que tanto  $M_D$  como  $M_H$  convergen.

Para demostrar que la masa del disco y del halo convergen, lo primero que se hace es escribir la integral (1.60) en términos de la función  $U$ , de manera que

$$M_{D_n} = \frac{8\pi}{k} \int_a^\infty \mu_n(r_0) r_0 dr_0, \quad (2.14)$$

donde  $\mu_n(r_0) = \frac{U_{n,z}}{1-U_n} \Big|_{z=0^+}$ . Nótese que en esta integral se ha aplicado el cambio de variable  $r_0^2 = r^2 + a^2$ . Ahora, para demostrar que la integral anterior converge para todo  $n$ , se hace uso del teorema de comparación del límite [2].

**Teorema 2.3.1** *Teorema de comparación del límite: Si dos integrales propias  $\int_a^b f(x)dx$  y  $\int_a^b g(x)dx$  existen para cada  $b \geq a$ , siendo  $f(x) \geq 0$  y  $g(x) \geq 0$  para todo  $x \geq a$ , y si*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c, \text{ donde } c \neq 0,$$

*entonces las integrales  $\int_a^\infty f(x)dx$  y  $\int_a^\infty g(x)dx$  o convergen ambas o divergen ambas.*

Para aplicar este teorema a la demostración de la convergencia de  $M_{D_n}$  se consideran las integrales de masa del disco para los modelos particulares  $n$  y  $n + 1$ ,

$$M_{D_n} = \frac{8\pi}{k} \int_a^\infty \mu_n(r_0) r_0 dr_0, \quad (2.15)$$

$$M_{D_{n+1}} = \frac{8\pi}{k} \int_a^\infty \mu_{n+1}(r_0) r_0 dr_0. \quad (2.16)$$

Estas integrales cumplen las condiciones presentadas en el teorema anterior, lo único que hace falta es demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = c \neq 0.$$

Para ésto usamos la función  $U_n$  que se presenta en la ecuación (2.2) y su primera derivada con respecto a  $z$ :

$$U_n|_{z=0^+} = -\sum_{l=0}^n \frac{A_l}{r_0^{l+1}} P_l(a/r_0), \quad (2.17)$$

$$U_{n,z}|_{z=0^+} = \sum_{l=0}^n \frac{A_l(l+1)}{r_0^{l+2}} P_{l+1}(a/r_0). \quad (2.18)$$

Con lo anterior podemos escribir la función  $\mu_n$  y  $\mu_{n+1}$  como

$$\mu_n(r_0) = \frac{\sum_{l=0}^n \frac{A_l(l+1)}{r_0^{l+2}} P_{l+1}(a/r_0)}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{r_0^{l+2}} P_l(a/r_0)}, \quad (2.19)$$

$$\mu_{n+1}(r_0) = \frac{\sum_{l=0}^n \frac{A_l(l+1)}{r_0^{l+2}} P_{l+1}(a/r_0) + \frac{A_{n+1}(n+2)}{r_0^{n+3}} P_{n+2}(a/r_0)}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{r_0^{l+2}} P_l(a/r_0) + \frac{A_{n+1}}{r_0^{n+2}} P_{n+1}(a/r_0)}, \quad (2.20)$$

y con ellas podemos calcular su cociente,

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \left[ 1 + \frac{\frac{A_{n+1}(n+2)}{r_0^{n+3}} P_{n+2}(a/r_0)}{\sum_{l=0}^n \frac{A_l(l+1)}{r_0^{l+2}} P_{l+1}(a/r_0)} \right] \left[ \frac{1 + \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{r_0^{l+1}} P_l(a/r_0)}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{r_0^{l+1}} P_l(a/r_0) + \frac{A_{n+1}}{r_0^{n+2}} P_{n+1}(a/r_0)} \right]. \quad (2.21)$$

Analizando la función (2.21) en el infinito; es decir, en  $r_0 \rightarrow \infty$ , se puede ver que ambos términos entre paréntesis tienden a 1, por lo tanto

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1. \quad (2.22)$$

Con este resultado se puede demostrar que si  $M_{D_n}$  converge, entonces  $M_{D_{n+1}}$  también lo hará. Ésto indica que el próximo paso a seguir es hacer el calculo de masa para el modelo  $n = 0$ , pues es el más simple y con él se puede concluir que la masa de todos los modelos particulares es finita.

Con la expresión para la función  $U_0$  dada en la ecuación (2.3), se calcula la función  $\mu_0$  y con ella se hace la integral de masa. Este procedimiento dá como resultado

$$M_{D_0} = \frac{8\pi a}{k} \ln \left( 1 + \frac{A_0}{k} \right). \quad (2.23)$$

Como  $M_{D_0}$  es un valor finito, entonces, en virtud del teorema de comparación del límite,  $M_{D_n}$  también es finito, sin importar el valor de  $n$ .

Ahora, para demostrar que la masa del halo también converge se escribe la integral (1.59) en coordenadas esféricas y en términos de la función  $U$ , de manera que

$$M_{H_n} = \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \eta_n(R, \theta) R^2 \sin(\theta) dR d\theta, \quad (2.24)$$

donde  $\eta_n(R, \theta) = \frac{U_{n,r}^2 + U_{n,z}^2}{(1-U_n)^2}$ . Para facilitar la prueba se aplica el cambio de variable:  $\tau = \cos(\theta)$ , con el cual, la integral anterior se transforma en

$$M_{H_n} = \frac{4\pi}{k} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \eta_n(R, \tau) R dR d\tau. \quad (2.25)$$

Lo que sigue, es hacer un procedimiento similar al usado para la masa del disco, la única diferencia radica en que para hallar  $M_H$  se debe resolver una integral doble. Este problema se resuelve fácilmente si se aplica el teorema de comparación del límite, únicamente, a la integral

$$F_n(\tau) = \int_0^\infty \eta_n(R, \tau) R dR, \quad (2.26)$$

con el fin de demostrar que converge para todo valor de  $n$ .

Como en el caso del disco, se debe demostrar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n} = c \neq 0. \quad (2.27)$$

Con la ecuación (2.2) y siguiendo un desarrollo similar al realizado con la masa del disco, podemos demostrar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n} = 1; \quad (2.28)$$

lo cual implica que, independientemente del valor de  $\tau$ , la integral (2.26) converge para todo  $n$  si y solo si se logra demostrar que  $F_0(\tau)$  es finito. Adicionalmente, si (2.26) no tiene divergencias, entonces la integral de  $F_n(\tau)$  en  $d\tau$  también será un número finito. Por lo tanto, se puede concluir que si se logra calcular un valor finito para  $M_{H_0}$ , entonces la masa del halo para todos los modelos también será finita. Ésto indica que el último paso a seguir es calcular la masa del halo para el modelo  $n = 0$ , lo cual se realiza fácilmente si se reemplaza  $U_0$  en la función  $\eta_0$  y ésta se integra según la ecuación (2.24). Este procedimiento conduce a

$$M_{H_0} = \frac{8\pi a}{k} \left[ \frac{A_0}{a} - \ln \left( 1 + \frac{A_0}{k} \right) \right]. \quad (2.29)$$

Con este resultado para la masa del halo y con la expresión para la masa del disco podemos calcular la masa total del sistema para el modelo  $n = 0$  como  $M_{T_0} = M_{D_0} + M_{H_0}$ , lo cual da como resultado

$$M_{T_0} = \frac{8\pi A_0}{k}. \quad (2.30)$$

Finalmente, se ha demostrado, a partir del teorema de comparación del límite, que la masa del disco y del halo para todos los modelos particulares de la familia infinita de soluciones converge a un valor finito. Esta característica de las soluciones obtenidas se da a pesar de que las densidades de energía del disco y del halo se extienden a todo el espacio.

## 2.4. Curvas de Rotación

Una herramienta importante para el estudio de las propiedades físicas de los sistemas galácticos son las curvas de rotación, ya que ellas son obtenidas a partir de datos experimentales y permiten calcular, de manera indirecta, algunas cantidades físicas, como es el caso de la masa. Estas curvas describen la dependencia de la velocidad circular de las estrellas en el plano del disco galáctico con su distancia al centro de la galaxia. Como se había mencionado en la sección 2.3 del capítulo anterior, también es posible obtener curvas de rotación teóricas a partir de soluciones exactas en relatividad general si se resuelve la ecuación de la geodésica, la cual conduce a la expresión para la velocidad circular presentada en (1.64).

Con las soluciones para la función  $U$  que se muestran en (2.3-2.5) se obtienen las velocidades circulares para los tres primeros modelos particulares. Las expresiones analíticas para estas velocidades son

$$v_{c_0}^2 = \frac{\tilde{A}_0 \tilde{r}^2}{k(\sqrt{m} + \tilde{A}_0)m - \tilde{A}_0 \tilde{r}^2}, \quad (2.31)$$

$$v_{c_1}^2 = \frac{\tilde{r}^2(\tilde{A}_0 m + 3\tilde{A}_1)}{k(m^{3/2} + \tilde{A}_0 m + \tilde{A}_1)m - \tilde{r}^2(\tilde{A}_0 m + 3\tilde{A}_1)}, \quad (2.32)$$

$$v_{c_2}^2 = \frac{\tilde{r}^2[3\tilde{A}_2 + 3\tilde{A}_1 m^2 + \tilde{A}_0 m^4 + \frac{3}{2}\tilde{A}_2(3-m)m]}{k[m^2 + m\tilde{A}_1 + m^3\tilde{A}_0 + \frac{1}{2}\tilde{A}_2(3-m)]m^3 - \tilde{r}^2[3\tilde{A}_2 + 3\tilde{A}_1 m^2 + \tilde{A}_0 m^4 + \frac{3}{2}\tilde{A}_2(3-m)m]} \quad (2.33)$$

donde  $m = 1 + \tilde{r}^2$ ,  $\tilde{r} = r/a$ ,  $\tilde{A}_0 = A_0/a$ ,  $\tilde{A}_1 = A_1/a^2$ , y  $\tilde{A}_2 = A_2/a^3$ . Recordemos que  $\tilde{r}$  es la distancia al centro del disco.

Para analizar el comportamiento de la velocidad circular se grafica  $v_c$  en función de  $\tilde{r}$  para cada modelo particular y para distintos valores de las constantes  $A_i$ ; estas curvas

se muestran en la figura 3.3. Como se puede observar, los valores de las constantes que se usaron para obtener las curvas de rotación son los mismos de la densidad de energía del disco (Figura 3.1); ésto se hizo para poder comparar la curva de rotación con su correspondiente densidad de energía del disco.

En la gráfica para el modelo  $n = 0$  se ve que la velocidad se incrementa rápidamente hasta alcanzar un valor máximo. El comportamiento de las curvas después de este valor se divide en dos tipos: En el primero, la velocidad decrece con  $\tilde{r}$ , mientras que en el segundo, la velocidad permanece aproximadamente constante. Si se compara con la gráfica correspondiente en la figura 3.1, se puede observar que el segundo tipo de comportamiento está asociado a perfiles de densidad cuyo máximo es más grande que en los casos en los cuales la velocidad decrece después de alcanzar el máximo.

En la gráfica correspondiente al modelo  $n = 1$ , todas las curvas muestran que la velocidad permanece constante después de alcanzar el máximo. Si se compara con los perfiles de densidad de energía del disco (figura 3.1) para éste mismo modelo particular, se puede afirmar que si el máximo de velocidad es mayor, entonces la densidad de energía del disco es menor en  $\tilde{r} = 0$ .

Finalmente, en la gráfica para  $v_{c_2}$  se obtienen diferentes tipos de comportamiento, pues en este modelo hay más constantes libres para elegir. Aquellos comportamientos en los cuales aparecen 2 picos (uno mayor que el otro) son de particular interés. En realidad, los datos observacionales muestran que la velocidad no es, exactamente, constante después de alcanzar el máximo, ésta presenta fluctuaciones, como se muestran en las curvas asociadas al modelo  $n = 2$ . Algunos ajustes a datos experimentales [40, 18] coinciden muy bien con las curvas de rotación teórica, especialmente, las que presentan dos máximos.

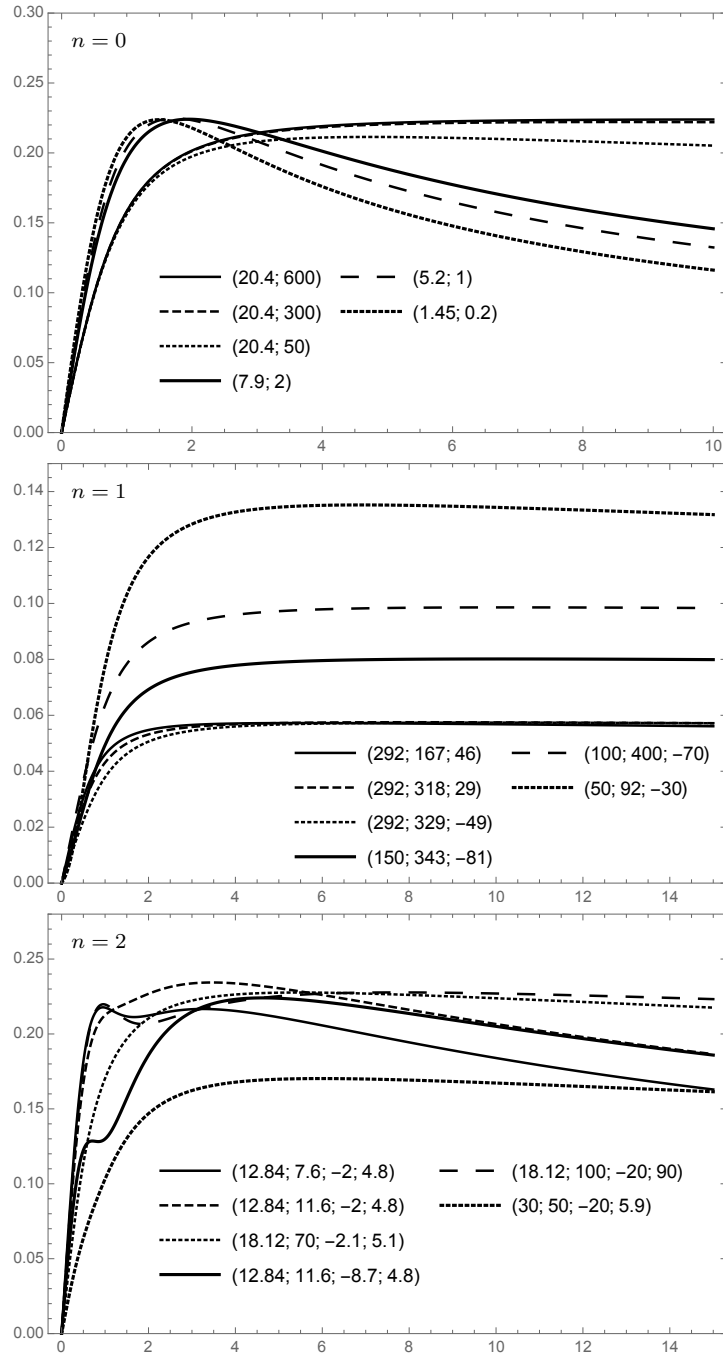


Figura 2.3: Velocidad circular  $v_{c_n}$  en función de  $\tilde{r}$  para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones. Cada curva está referenciada por un conjunto de números de manera que, para el modelo  $n$  los números son  $(k, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$ .

---

Capítulo 3

# Discos Relativistas de Morgan-Morgan con Halo

---

En el capítulo anterior se discutió una familia infinita de soluciones que se obtuvo al elegir  $U$  como solución a la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas y aplicar sobre ella el método de desplazamiento, corte y reflexión. Ésto nos permitió obtener una discontinuidad en la primera derivada del tensor métrico con respecto a  $z$ , y por consiguiente, pudimos definir una distribución discoidal infinita de materia.

Ahora, es interesante, desde el punto de vista astrofísico, buscar una manera de generar discos finitos físicamente bien comportados, es decir, que satisfagan las condiciones de energía (1.34-1.37). Para cumplir este objetivo, en primer lugar, se debe elegir una función  $U$  que satisfaga las condiciones (1.50) y (1.52); adicionalmente, para que el disco sea finito es útil trabajar en el sistema de coordenadas esferoidales oblatas,  $(\xi, \eta, \varphi)$ , ya que estas coordenadas se adaptan muy bien a la simetría del sistema e introducen de manera natural un radio de corte para el disco.

Las coordenadas esferoidales oblatas se relacionan con las coordenadas cilíndricas mediante las transformaciones

$$r^2 = d^2(1 + \xi^2)(1 - \eta^2), \quad (3.1)$$

$$z = d\xi\eta, \quad (3.2)$$

donde  $0 \leq \xi \leq \infty$  y  $-1 \leq \eta \leq 1$ . Las coordenadas del disco de radio  $d$  son  $\xi = 0$  y  $0 \leq \eta^2 < 1$  [42]. Si se pasa a través del disco, la coordenada  $\eta$  cambia de signo; por lo tanto, es necesario que  $U$  sea función de  $\eta^2$  para garantizar la simetría de reflexión alrededor del plano del disco; ésto a su vez satisface la condición (1.50).

Con base en lo anterior, se considera la función  $U$  como solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas, pero únicamente teniendo en cuenta los términos pares, es decir [3],

$$U(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (3.3)$$

donde  $C_{2n}$  son constantes,  $q_{2n} = i^{2n+1}Q_{2n}(i\xi)$ , siendo  $Q_{2n}(i\xi)$  las funciones de Legendre de segundo tipo de argumento imaginario, y  $P_{2n}(\eta)$  son los polinomios de Legendre de orden  $2n$ .

Ahora, la suma que se muestra en (3.3) la debemos restringir para poder obtener soluciones particulares, y así, poder analizar el comportamiento de las cantidades físicas. Una manera de restringir esta suma es considerando  $U$  como el potencial gravitacional de los discos finitos newtonianos obtenidos por González y Reina (2008) [19], donde las constantes  $C_{2n}$  son encontradas a partir de la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre. Estas constantes tienen la forma

$$C_{2n} = \frac{K_{2n}}{(2n+1)q_{2n+1}(0)}, \quad (3.4)$$

donde

$$K_{2n} = \frac{M}{2d} \left[ \frac{\pi^{1/2}(4n+1)(2m+1)!}{2^{2m}(m-n)!\Gamma(m+n+3/2)} \right], \quad (3.5)$$

si,  $n \leq m$ ; y  $C_{2n} = 0$  si  $n > m$ , para  $m \geq 1$ ; por lo tanto, la suma queda restringida por el valor de  $m$ . En la última ecuación  $M$  y  $d$  son la masa total y el radio del disco newtoniano.

Como en el caso de los discos de Kuzmin-Toomre, solo vamos a considerar las tres primeras soluciones particulares; es decir, solo analizaremos las propiedades físicas asociadas a las funciones  $U_m$  con  $m = 1, 2, 3$ . Estas 3 primeras funciones tienen la forma

$$U_1 = -\frac{3}{4}\tilde{M}(\xi - 3\eta^2\xi + (1 + \eta^2 + 3\xi^2\eta^2 - \xi^2)\text{arccot}(\xi)), \quad (3.6)$$

$$U_2 = -\frac{5}{64}\tilde{M}(\xi(9 - 9\xi^2 - 5\eta^4(11 + 21\xi^2) + \eta^2(6 + 90\xi^2)) + 3(3 - 2\xi^2 + 3\xi^4 - 2\eta^2(-1 + 6\xi^2 + 15\xi^4) + \eta^4(3 + 30\xi^2 + 35\xi^4))\text{arccot}(\xi)), \quad (3.7)$$

$$U_3 = \frac{7}{768}\tilde{M}(\xi(-75 + 9\eta^2(-5 - 5\eta^2 + 77\eta^4) + 10(7 + 15\eta^2 - 315\eta^4 + 357\eta^6)\xi^2 + 15(-5 + 21\eta^2(5 - 15\eta^2 + 11\eta^4))\xi^4) - 15(5 - 3\xi^2 + 3\xi^4 - 5\xi^6 + 3\eta^2(1 - 3\xi^2 + 15\xi^4 + 35\xi^6) + \eta^6(5 + 21\xi^2(5 + 15\xi^2 + 11\xi^4)) - 3\eta^4(-1 + 15(\xi^2 + 7\xi^47\xi^6)))\text{arccot}(\xi)), \quad (3.8)$$

donde  $\tilde{M} = M/d$ . Estas funciones se pueden escribir en términos de las coordenadas cilíndricas  $r$  y  $z$  mediante las transformaciones (3.1) y (3.2).

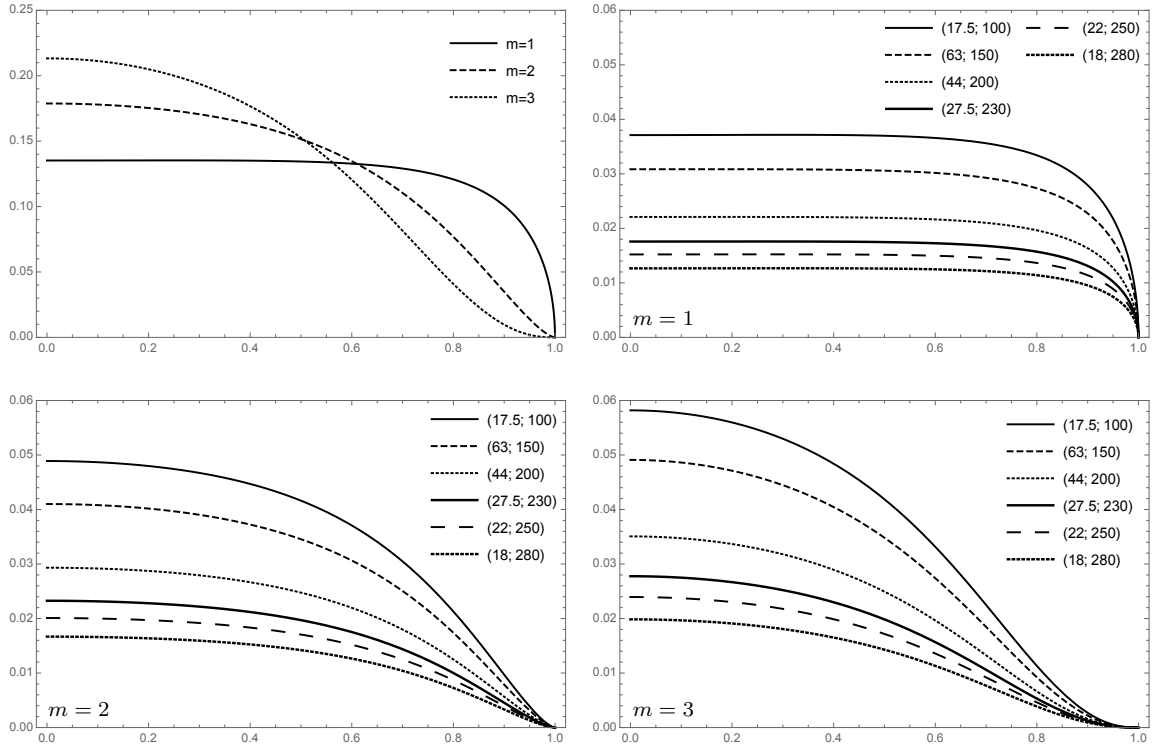


Figura 3.1: Densidad superficial de energía del disco  $\tilde{\sigma}_m$  en función de  $\tilde{r}$  para los tres primeros modelos de la familia de soluciones. La primer gráfica (arriba-izquierda) corresponde a los tres modelos con el mismo  $k = 20$  y  $\tilde{M} = 30$ . En las otras gráficas  $m$  se mantiene constante mientras que  $k$  y  $\tilde{M}$  cambian; cada curva en estas gráficas se referencia por un par de números  $(k, \tilde{M})$ .

### 3.1. Densidad de Energía del Disco

La densidad de energía del disco para estos modelos particulares se escribe en términos de la función  $U$  de una manera similar a la ecuación (2.6), solo que para esta nueva familia de soluciones el valor que determina un modelo particular es  $m$ , por ésto,

$$\sigma_m(r) = \frac{4}{k} \frac{U_{m,z}}{(1 - U_m)^{\frac{k+1}{k}}}. \quad (3.9)$$

Todas las cantidades en esta expresión están evaluadas en  $z = 0^+$ .

Con las funciones  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U_3$  obtenemos las tres primeras densidades de energía de la familia de soluciones, cuyas expresiones son:

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{12(1 - \tilde{r}^2)^{1/2}}{\left[1 + \frac{3\pi}{8}\tilde{M}(2 - \tilde{r}^2)\right]^{\frac{1+k}{k}}}, \quad (3.10)$$

$$\tilde{\sigma}_2 = \frac{20(1 - \tilde{r}^2)^{3/2}}{\left[1 + \frac{15\pi}{128}\tilde{M}(8 - 8\tilde{r}^2 + 3\tilde{r}^4)\right]^{\frac{1+k}{k}}}, \quad (3.11)$$

$$\tilde{\sigma}_3 = \frac{28(1 - \tilde{r}^2)^{5/2}}{\left[1 + \frac{35\pi}{512}\tilde{M}(16 - 24\tilde{r}^2 + 18\tilde{r}^4 - 5\tilde{r}^6)\right]^{\frac{1+k}{k}}}, \quad (3.12)$$

donde  $\tilde{\sigma}_m = (kd/\tilde{M})\sigma_m$  y  $\tilde{r} = r/d$ .

En la figura 4.1 se muestra la densidad de energía del disco  $\sigma_m$  en función de la distancia al centro del sistema:  $\tilde{r}$ , para los modelos  $m = 1, 2, 3$ . En la primera gráfica se comparan las densidades de energía para los valores de las constantes  $k = 20$  y  $\tilde{M} = 30$ , y para los diferentes valores de  $m$ . En esta gráfica se ve que  $\tilde{\sigma}$  tiene un máximo en el centro del sistema ( $\tilde{r} = 0$ ), que se hace cero en el borde ( $\tilde{r} = 1$ ). La distribución espacial de energía depende de los valores particulares que se elijan para  $m$ ; por ejemplo, para  $m = 1$ , la densidad de energía permanece casi constante hasta  $\tilde{r} \approx 0,6$ ; para después comenzar a decrecer. Sin embargo, si se incrementa el valor de  $m$ , la densidad de energía se concentrará más en el centro, y su valor máximo será mayor.

Las otras gráficas muestran cómo se puede obtener diferentes tipos de comportamiento en cada modelo particular si se cambian las constantes  $k$  y  $\tilde{M}$ . Es claro que se puede manipular el valor máximo de la densidad de energía y la velocidad con la que decrece si se varían los valores de las constantes. Sin embargo, en todos los casos, la energía está concentrada en el centro del disco y su comportamiento es muy similar.

## 3.2. Densidad de Energía del Halo

Al igual que la densidad de energía del disco, la expresión que describe el fluido o halo de materia que rodea el disco es similar a la que se usó con los modelos de Kuzmin-Toomre (Sección 3.2), solo que en este caso las funciones  $U$  están determinadas por el subíndice  $m$  y se obtienen de la ecuación (3.3). La expresión para la densidad de energía del halo se escribe como

$$\rho_m(r, z) = \frac{2k-1}{k^2} \frac{U_{m,r}^2 + U_{m,z}^2}{(1-U_m)^{2(k+1)/k}}. \quad (3.13)$$

A partir de las relaciones de transformación entre las coordenadas esferoidales oblatas y las cilíndricas se puede calcular la primera derivada con respecto a  $r$  de las funciones  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U_3$ ,

$$U_{1,r} = \frac{3\tilde{M}\tilde{r}}{2d(1+\xi^2)} \left[ -\xi + (1+\xi^2)\text{arccot}(\xi) \right], \quad (3.14)$$

$$U_{2,r} = \frac{15\tilde{M}\tilde{r}}{16d(1+\xi^2)} \left[ \xi - 13\eta^2\xi + (3-15\eta^2)\xi^3 + (1+\xi^2)(1-3\xi^2 + 3\eta^2(1+5\xi^2))\text{arccot}(\xi) \right], \quad (3.15)$$

$$U_{3,r} = \frac{35\tilde{M}\tilde{r}}{128d(1+\xi^2)} \left[ \xi(3-4\xi^2-15\xi^4+\eta^2(6+200\xi^2+210\xi^4)-\eta^4(113+420\xi^2+315\xi^4))+3(1+\xi^2)(1-2\xi^2+5\xi^4+\eta^2(2-20\xi^2-70\xi^4)+5\eta^4(1+14\xi^2+21\xi^4))\text{arccot}(\xi) \right], \quad (3.16)$$

y también las derivadas con respecto a  $z$ ,

$$U_{1,z} = -\frac{3\tilde{M}\eta}{d} \left[ -1 + \xi\text{arccot}(\xi) \right], \quad (3.17)$$

$$U_{2,z} = \frac{5\tilde{M}\eta}{4d} \left[ -9\xi^2 + \eta^2(4+15\xi^2) + 3\xi(1+3\xi^2-\eta^2(3+5\xi^2))\text{arccot}(\xi) \right], \quad (3.18)$$

$$U_{3,z} = -\frac{7\tilde{M}\eta}{64d} \left[ 50\eta^2\xi^2(11+21\xi^2) - 15(\xi^2+15\xi^4) - \eta^4(64+735\xi^2+945\xi^4) + 15\xi(-1+6\xi^2+15\xi^4-2\eta^2(3+30\xi^2+35\xi^4)+\eta^4(15+70\xi^2+63\xi^4))\text{arccot}(\xi) \right]. \quad (3.19)$$

Con estas funciones y con las ecuaciones (3.1) y (3.2) se encuentran las expresiones analíticas que describen la densidad de energía del halo. Una vez obtenidas estas densidades, se pueden representar en una gráfica para observar, de manera detallada, el comportamiento de  $\rho_m$ .

En la figura 4.2 se observan las gráficas de contorno, que muestran las curvas sobre las cuales la densidad de energía es la misma. Ésto nos da una idea de la forma en que se distribuye la energía del halo en el espacio, y de la rapidez con que, ésta, cambia. En todas las gráficas se presenta la densidad de energía reescalada  $\tilde{\rho} = \frac{k^2 d^2}{(2k-1)\tilde{M}^2} \rho$  como función de  $\tilde{r} = r/d$  y  $\tilde{z} = z/d$ .

Para la densidad de energía del halo se pueden observar dos tipos de comportamiento, ambos están presentes en todas las soluciones particulares discutidas en este capítulo, y se pueden obtener eligiendo, apropiadamente, los valores de las constantes  $k$  y  $\tilde{M}$ . El primer comportamiento es el que se presenta en las gráficas para los modelos  $m = 2$  y  $m = 3$ , donde la densidad de energía alcanza un máximo en el centro del halo ( $\tilde{z} \approx \tilde{r} \approx 0$ ) y se hace cero en el infinito. El segundo comportamiento es el que se muestra en la gráfica asociada al modelo  $m = 1$ . Aquí aparece una distribución de energía inusual, en la cual, el máximo de densidad está localizado en  $\tilde{z} \approx 0$  y  $\tilde{r} \approx 1$ , es decir, en el borde del disco, y se hace cero en el infinito.

### 3.3. Masa del Halo y del Disco

A diferencia de la versión relativista de los modelos de Kuzmin-Toomre presentados en el capítulo anterior, donde los discos eran de extensión infinita, los modelos relativistas de Kalnajs conducen a discos finitos; por lo tanto, el cálculo de la masa del disco debe dar un valor finito ya que la densidad superficial de energía no presenta divergencias en la región  $0 \leq \tilde{r} \leq 1$ . Sin embargo, en ambas familias de soluciones, los halos son infinitos, por consiguiente, se hace necesario buscar una forma de demostrar que los modelos presentados en este capítulo no conducen a divergencias en el cálculo de la masa total del sistema.

Tanto para el cálculo de la masa del disco como para el de la masa del halo es conveniente usar el teorema de la divergencia en la ecuación (1.59) para obtener

$$M = k \oint_s \nabla \psi \cdot d\vec{s}, \quad (3.20)$$

donde  $s$  es el área de una superficie cerrada que contiene la masa  $M$ . Esta integral se puede escribir en términos de la función  $U$  por medio de la ecuación (1.41), dando como resultado

$$M = \frac{2}{k} \oint_s \frac{\nabla U}{1-U} \cdot d\vec{s}. \quad (3.21)$$

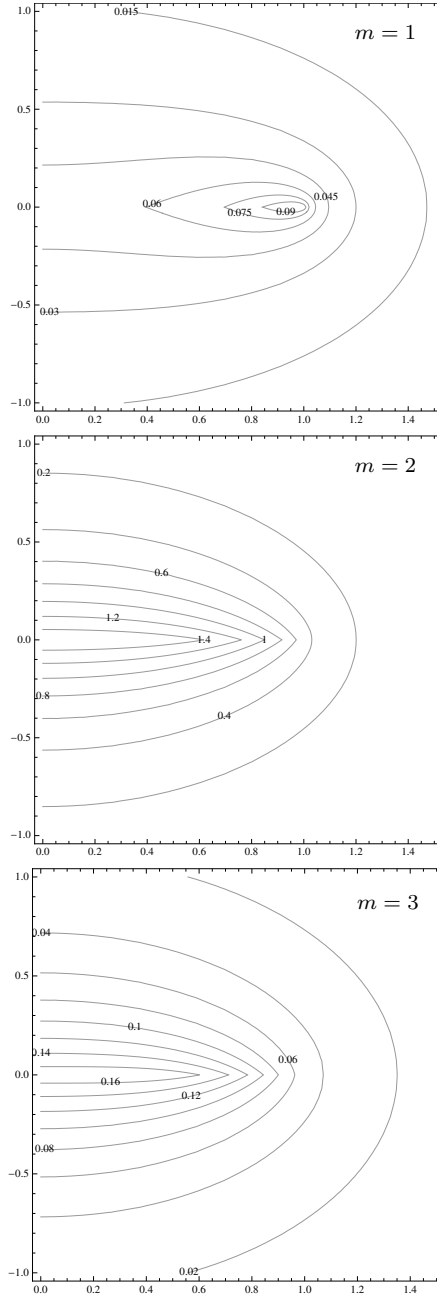


Figura 3.2: Curvas de contorno de la densidad de energía del halo,  $\tilde{\rho}_m$ , en función de  $\tilde{r}$  (eje horizontal) y  $\tilde{z}$  (eje vertical) para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones. La gráfica correspondiente al modelo  $m = 1$  se obtiene haciendo  $k = 24,5$  y  $\tilde{M} = 4,5$ ; la del modelo  $m = 2$  se obtiene con  $k = 132$  y  $\tilde{M} = 1$ ; por último, las curvas de contorno del modelo  $m = 3$  se obtienen para los valores  $k = 17,2$  y  $\tilde{M} = 39$ .

Por simplicidad se escoge  $s$  como la superficie de un elipsoide determinado por  $\xi = \text{constante}$ . De acuerdo con ésto, se puede definir la masa del disco mediante la integral

$$M_D = \frac{2d}{k} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1 + \xi^2)U_{,\xi}}{1 - U} \Big|_{\xi=0} d\eta d\varphi, \quad (3.22)$$

y la masa total del sistema como

$$M_T = \frac{2d}{k} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1 + \xi^2)U_{,\xi}}{1 - U} \Big|_{\xi=\infty} d\eta d\varphi, \quad (3.23)$$

de manera que, la masa del halo es  $M_H = M_T - M_D$ .

A pesar de que en estos modelos el halo tiene extensión infinita, es posible calcular la masa total del sistema a través de la integral dada en (3.23), y a demás, demostrar que ésta converge. Para hacer este calculo se aprovecha el hecho de que  $U$  tiende a cero en el infinito. Usando (3.3) en el integrando  $(1 + \xi^2)U_{,\xi}$  encontramos que

$$(1 + \xi^2)U_{,\xi} = C_0 - \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} (1 + \xi^2) \frac{dq_{2n}(\xi)}{d\xi} P_{2n}. \quad (3.24)$$

Ahora, con la formula de recurrencia,

$$(1 + \xi^2) \frac{dq_n(\xi)}{d\xi} = n\xi q_n(\xi) - nq_{n-1}(\xi), \quad (3.25)$$

se puede transformar (3.24) en

$$(1 + \xi^2)U_{,\xi} = C_0 - \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} (2n\xi q_{2n} - 2nq_{2n-1}) P_{2n}. \quad (3.26)$$

Como  $q_{2n-1}(\xi)$  se hace cero en el infinito y  $\xi q_{2n}(\xi)$  tiende a 0 si  $\xi \rightarrow \infty$  para todo  $n \geq 1$ , entonces  $(1 + \xi^2)U_{,\xi}|_{\xi=\infty} = C_0$ , y la masa total del sistema disco-halo se hace

$$M_T = \frac{8\pi d C_0}{k}, \quad (3.27)$$

la cual depende del radio del disco, de la primera constante,  $C_0$ , y del fluido particular en el halo (determinado por el valor de  $k$ ). Con ésto se demuestra que, aunque el halo es infinito, su masa es finita. Como esta prueba es general, entonces la masa total del halo es la misma sin importar el modelo particular que se esté considerando.

Como un caso particular se puede calcular la masa del disco para el modelo  $m = 1$  mediante la integral (3.22), la cual conduce a

$$M_{D_1} = \frac{64d}{k} \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{8}{3\pi C_0} \operatorname{arccot} \sqrt{\frac{3\pi C_0}{3\pi C_0 + 8}}} \right], \quad (3.28)$$

donde  $C_0 = M/d$ . Se puede observar que la masa del disco relativista está relacionada con la del disco newtoniano. Con este resultado y con la masa total del sistema se calcula la masa del halo

$$M_{H_1} = \frac{8\pi d C_0}{k} - \frac{64d}{k} \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{8}{3\pi C_0} \text{arccot} \sqrt{\frac{3\pi C_0}{3\pi C_0 + 8}}} \right]. \quad (3.29)$$

### 3.4. Curvas de Rotación

La expresión analítica para la velocidad circular de una partícula en el plano  $z = 0$  tiene dos partes: una parte corresponde a la partícula moviéndose en el disco ( $0 \leq \tilde{r} \leq 1$ ), para lo cual es necesario hacer  $\xi = 0$  en (1.64). La otra parte corresponde a la velocidad de una partícula moviéndose fuera del disco ( $\tilde{r} \geq 1$ ), para lo cual es necesario hacer  $\eta = 0$  en (1.64). Ambas partes de  $v_{c_m}^2$  deben coincidir en  $\tilde{r} = 1$ .

Usando las expresiones para  $U_m$  y  $U_{m,r}$  en (1.64), y evaluando apropiadamente en cada región, se obtienen las expresiones para  $v_{c_m}^2$ . Para el modelo  $m = 1$  se obtiene

$$v_{c_1}^2 = \begin{cases} \frac{6\tilde{M}\pi\tilde{r}^2}{k(8-3\tilde{M}\pi(-2+\tilde{r}^2))-6\tilde{M}\pi\tilde{r}^2} & \text{si } 0 \leq \tilde{r} \leq 1 \\ \frac{6\tilde{M}(\tilde{r}^2 \text{arccot}(J) - J)}{6\tilde{M}J + k(4+3\tilde{M}J) - 3\tilde{M}(2\tilde{r}^2 + k(-2+\tilde{r}^2)) \text{arccot}(J)} & \text{si } \tilde{r} \geq 1 \end{cases}, \quad (3.30)$$

donde  $J = \sqrt{\tilde{r}^2 - 1}$ . Para el modelo  $m = 2$  se obtiene

$$v_{c_2}^2 = \begin{cases} \frac{-60\tilde{M}\pi\tilde{r}^2 L_1}{60\tilde{M}\pi\tilde{r}^2 L_1 + k(128 + 15\tilde{M}\pi L_2)} & \text{si } 0 \leq \tilde{r} \leq 1 \\ \frac{60\tilde{M}[-JL_3 + \tilde{r}^2 L_1 \text{arccot}(J)]}{60\tilde{M}JL_3 + k[-64 + 45\tilde{M}(-2 + \tilde{r}^2)J] - 15\tilde{M}(4\tilde{r}^2 L_1 + kL_2) \text{arccot}(J)} & \text{si } \tilde{r} \geq 1 \end{cases}, \quad (3.31)$$

donde  $L_1 = -4 + 3\tilde{r}^2$ ,  $L_2 = 8 - 8\tilde{r}^2 + 3\tilde{r}^4$  y  $L_3 = -2 + 3\tilde{r}^2$ . Finalmente, para el modelo  $m = 3$  se obtiene para el cuadrado de la velocidad circular

$$v_{c_3}^2 = \begin{cases} \frac{-210\tilde{M}\pi\tilde{r}^2 N_1}{210\tilde{M}\pi\tilde{r}^2 N_1 + k(-512 + 35\tilde{M}\pi N_2)} & \text{si } 0 \leq \tilde{r} \leq 1 \\ \frac{210\tilde{M}[-JN_3 + 3\tilde{r}^2 N_1 \text{arccot}(J)]}{210\tilde{M}JN_3 + k(768 + 35\tilde{M}JN_4) - 105\tilde{M}(6\tilde{r}^2 N_1 + kN_2) \text{arccot}(J)} & \text{si } \tilde{r} \geq 1 \end{cases}, \quad (3.32)$$

donde  $N_1 = 8 - 12\tilde{r}^2 + 5\tilde{r}^4$ ,  $N_2 = -16 + 24\tilde{r}^2 - 18\tilde{r}^4 + 5\tilde{r}^6$ ,  $N_3 = 8 - 26\tilde{r}^2 + 15\tilde{r}^4$  y  $N_4 = 44 - 44\tilde{r}^2 + 15\tilde{r}^4$ .

En la figura 4.3 se muestran los perfiles de velocidad circular,  $v_{c_m}$ , en función de  $\tilde{r}$  para algunos valores de las constantes  $k$  y  $\tilde{M}$ . Todos los valores para las constantes se eligen, de forma tal, que las cantidades físicas sean bien comportadas ( $\tilde{\sigma}_m \geq 0$  and  $0 \leq v_c \leq 1$ ). En la primera gráfica de la figura 4.3 (superior-izquierda) se comparan las

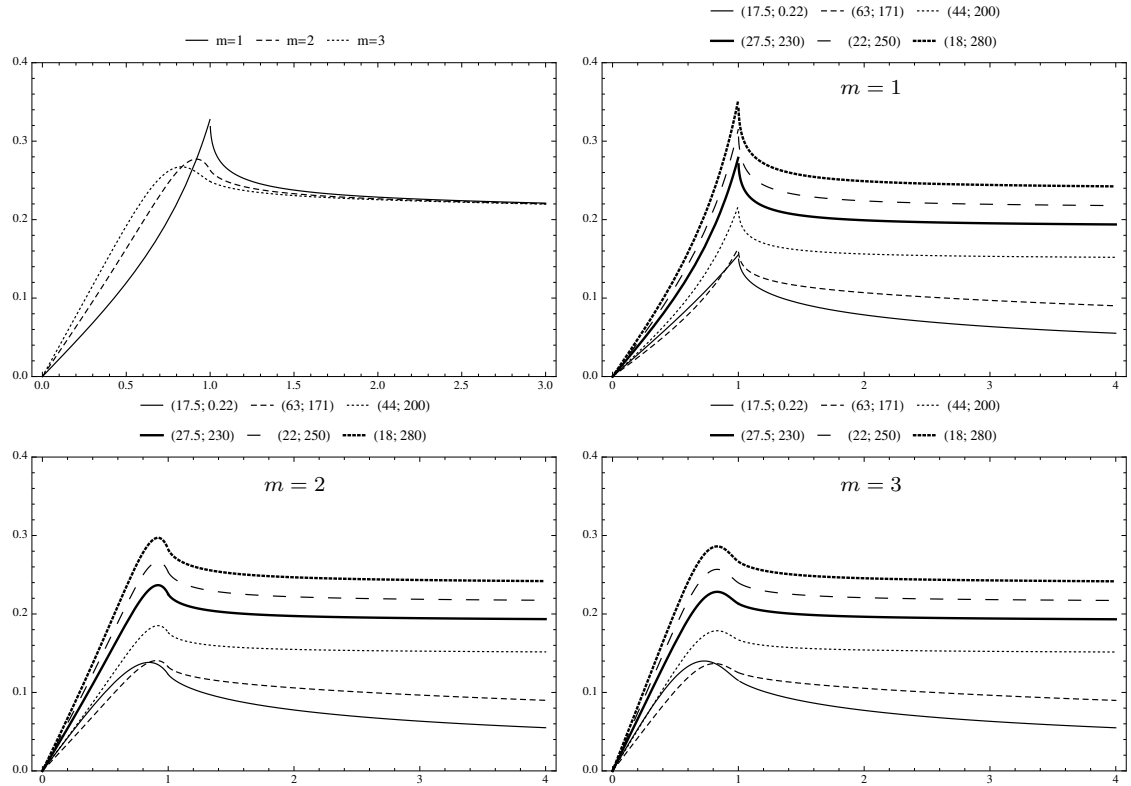


Figura 3.3: Velocidad circular  $v_{c_m}$  en función de  $\tilde{r}$  para los 3 primeros modelos de la familia de soluciones. La primer gráfica (arriba-izquierda) corresponde a los tres modelos con el mismo  $k = 20$  y  $\tilde{M} = 30$ . En las otras gráficas  $m$  se mantiene constante mientras  $k$  y  $\tilde{M}$  cambian; cada curva en estas gráficas es referenciada por una pareja de números  $(k, \tilde{M})$ .

curvas de rotación para los modelos  $m = 1, 2, 3$  con  $k$  y  $\tilde{M}$  fijos. Aquí se puede observar que si  $m$  es mayor, entonces el pico será menos pronunciado; ésto hace que la unión entre las dos partes de cada curva sea más suave y que, además, el valor máximo de  $v_{c_m}$  se localice más cerca al centro del disco.

En todas las soluciones particulares, el comportamiento de  $v_{c_m}$  es el mismo: la velocidad comienza desde cero y alcanza un máximo que depende de los valores de las constantes. Después de alcanzar el máximo, la velocidad decrece hasta un valor que permanece, aproximadamente, constante. Ésto es muy importante porque muchas curvas de rotación reales de galaxias espirales tienen el mismo comportamiento cualitativo. Un perfil específico para la curva de rotación se puede obtener si se escogen apropiadamente los valores  $m, k$  y  $\tilde{M}$ .

---

## Capítulo 4

# Conclusiones

---

En el presente trabajo se han construido, a partir de la métrica conformestática, dos familias de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein que se pueden interpretar como discos delgados inmersos en halos esferoidales de materia. Las primeras soluciones corresponden a discos delgados cuya densidad de energía se extiende hasta el infinito, mientras que la segunda familia de soluciones corresponden a discos delgados con un radio de corte finito. En ambas familias de soluciones los discos son de polvo, mientras que los halos poseen tanto densidad de energía como presión. Para el halo se ha encontrado una ecuación de estado del tipo gamma en donde la presión del fluido y su densidad de energía están relacionados linealmente mediante la ecuación de estado  $p = \gamma\rho$ , con  $\gamma = [3(2k - 1)]^{-1}$ . Como  $k \in [1, \infty)$ , entonces se pueden observar dos casos extremos: si  $k = 1$ , el fluido del halo será de radiación, mientras que si  $k \rightarrow \infty$ , el fluido será de polvo.

Las soluciones obtenidas, además de tener una interpretación clara como discos delgados en halos esferoidales, también poseen un buen comportamiento físico, ya que éstas cumplen con las condiciones de energía, y además, permiten obtener velocidades de partículas reales por debajo de la velocidad de la luz. Con estas condiciones se pueden escribir todas las propiedades del sistema disco-halo en términos de la bien conocida solución a la ecuación de Laplace, brindando así la posibilidad de considerar diferentes soluciones dependiendo del sistema de coordenadas usado para resolver la ecuación. Por ejemplo, para los modelos relativistas de Kuzmin-Toomre se usó la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas y sobre ella se aplicó el método de desplazamiento, corte y reflexión para definir apropiadamente un disco delgado infinito. Por otro lado, para los modelos relativistas de Kalnajs se usó nuevamente la solución a la ecuación de Laplace, pero esta vez en coordenadas esferoidales oblatas; esto permitió definir un disco delgado de extensión finita.

Analizando las expresiones para la densidad de energía, tanto para los discos finitos como para los discos infinitos, se observó que la mayor cantidad de energía se encuentra concentrada en el centro del sistema y tiende a decrecer a medida que se aumenta la distancia al centro. Para los modelos de discos finitos, esta densidad de energía tiende a cero en el borde del disco, mientras que para los modelos de discos infinitos, la densidad se hace cero en el infinito. Ésto mismo sucede para la densidad de energía del halo (y por

lo tanto para la presión en virtud de la ecuación de estado), en donde se observó una concentración grande de energía en la región central del sistema disco-halo, la cual se hace cero en el infinito, siendo esta última característica propia de ambas familias de soluciones. Como los modelos poseen parámetros libres, es posible manipular la concentración de energía en el centro y la forma en que ésta se distribuye en el espacio. Es importante resaltar que en los modelos de discos finitos, para algunos valores de los parámetros, se pueden obtener discos y halos en los cuales la densidad de energía y la presión poseen su máximo en el borde del disco y no en el centro.

También se obtuvieron las expresiones analíticas para la masa del disco y del halo correspondientes al primer modelo particular de cada familia infinita de soluciones. Se demostró, que a pesar de que los discos relativistas de Kuzmin-Toomre y sus respectivos halos son infinitos, la masa total del sistema converge para todos los modelos de ambas familias de soluciones. Finalmente, se obtuvieron las curvas de rotación correspondientes a una partícula que se mueve en órbitas circulares en el plano del disco. En estas curvas se pudo observar que la velocidad circular crece con la distancia al centro del sistema hasta alcanzar un máximo; luego, este valor decrece hasta uno que se mantiene aproximadamente constante. Para el caso de los discos infinitos, se obtuvieron curvas de rotación con más de un máximo. A estas curvas de rotación corresponden densidades de energía discoidales con más de un máximo también. Estos resultados son importantes ya que las curvas de rotación reales de galaxias espirales presentan este mismo comportamiento cualitativo.

Los resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo de investigación se presentaron en el *20th International Conference on General Relativity and Gravitation and 10th Amaldi Conference on Gravitational Waves* que tuvo lugar en la ciudad de Varsovia - Polonia del 7 al 13 de julio de 2013; y en el *Spanish Relativity Meeting - ERE2014* que tuvo lugar en la ciudad de Valencia - España del 1-5 de septiembre de 2014. Además, algunos resultados parciales de este trabajo fueron publicados en los proceedings del *Spanish Relativity Meeting - ERE2014* [17].

# Bibliografía

---

- [1] A. PAPAPETROU AND A. HAMOUNI. Couches simples de matière en relativité générale. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 9:179 (1968).
- [2] APOSTOL, T. M. *Calculus, volume I*. John Wiley & Sons, 2007.
- [3] BATEMAN, H. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Dec. 1932.
- [4] BICAK, J. Selected Solutions of Einstein's Field Equations: Their Role in General Relativity and Astrophysics. In *Einstein's Field Equations and Their Physical Implications* (2000), B. G. Schmidt, Ed., vol. 540 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, p. 1.
- [5] BICAK, J., BELL, D. L., AND PICHON, C. Relativistic Discs and Flat Galaxy Models. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 265 (Nov. 1993), 126.
- [6] BICAK, J., AND LEDVINKA, T. Relativistic Disks as sources of the Kerr metric. *Phys. Rev. Lett.* 71 (Sept. 1993), 1669–1672.
- [7] BICAK, J., LYNDEN-BELL, D., AND KATZ, J. Relativistic disks as sources of static vacuum spacetimes. *Phys. Rev. D* 47 (May 1993), 4334–4343.
- [8] BONNOR, W. B., AND SACKFIELD, A. The interpretation of some spheroidal metrics. *Commun. Math. Phys.* 8 (Dec. 1968), 338–344.
- [9] CARRILLO, J. A. E., LIMA, J. A. S., AND MAIA, JR, A. Spectrum of gamma fluids: A Statistical derivation. *Int. J. Theor. Phys.* 35 (1996), 2013–2018.
- [10] CHAMORRO, A., GREGORY, R., AND STEWART, J. M. Static axisymmetric discs and gravitational collapse. *Royal Society of London Proceedings Series A* 413 (Sept. 1987), 251–262.
- [11] E. POISSON. A relativist's toolkit: The mathematics of black-hole mechanics. *Cambridge University Press* (2004).
- [12] G. G. KUZMIN. Model of the stationary galaxy allowing three-axial distribution of velocities. *AZh*, 33, 27 (1956).

- [13] G. GARCÍA-REYES, AND GONZÁLEZ, G. A. Charged perfect fluid disks as sources of Taub-NUT-type spacetimes. *Phys. Rev. D*70, 10 (Nov. 2004), 104005.
- [14] G. GARCÍA-REYES, AND GONZÁLEZ, G. A. Electrovacuum static counterrotating relativistic dust disks. *Phys. Rev. D*69, 12 (June 2004), 124002.
- [15] GONZÁLEZ, G. A., AND ESPITIA, O. A. Relativistic static thin disks: The counterrotating model. *Phys. Rev. D*68, 10 (Nov. 2003), 104028.
- [16] GONZÁLEZ, G. A., AND LETELIER, P. S. Relativistic static thin discs with radial stress support. *Class. Quantum Grav.*16 (Feb. 1999), 479–494.
- [17] GONZÁLEZ, G. A., AND PIMENTEL, O. M. Axially symmetric relativistic thin disks immersed in spheroidal matter haloes. *J. Phys. Conf. Ser.* 600, 1 (Apr. 2015), 012015.
- [18] GONZÁLEZ, G. A., PLATA-PLATA, S. M., AND RAMOS-CARO, J. Finite thin disc models of four galaxies in the UrsaMajor cluster: NGC3877, NGC3917, NGC3949 and NGC4010. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*404 (May 2010), 468–474.
- [19] GONZÁLEZ, G. A., AND REINA, J. I. An infinite family of generalized Kalnajs discs. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*371 (Oct. 2006), 1873–1876.
- [20] GUTIÉRREZ-PIÑERES, A. C., GONZÁLEZ, G. A., AND QUEVEDO, H. Conformastatic disk-haloes in Einstein-Maxwell gravity. *Phys. Rev. D*87, 4 (Feb. 2013), 044010.
- [21] GUTIÉRREZ-PIÑERES, A. C., GARCÍA-REYES, G., AND GONZÁLEZ, G. A. Exact relativistic models of thin disks around static black holes in a magnetic field. *Int.J.Mod.Phys. D*23, 1 (2014), 1450010.
- [22] H. STEPHANI, D. KRAMER, M. MACCALLUM, C. HOENSELAERS Y E. HERLT. Exact solutions of einstein’s field equations. *Cambridge University Press* (2003).
- [23] ISRAEL, W. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cim.* 44 (July 1966), 1–14.
- [24] J. BINNEY Y S. TREMAINE. Galactic dynamics. *Princeton University Press* (2008).
- [25] J. L. SYNGE. Relativity, the general theory. *North- Holland, Amsterdam* (1966).
- [26] KLEIN, C. Exact relativistic treatment of stationary counter-rotating dust disks II: Axis, Disk and Limiting Cases. *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints* (Feb. 2001).
- [27] KLEIN, C., AND RICHTER, O. Exact Relativistic Gravitational Field of a Stationary Counterrotating Dust Disk. *Phys. Rev. Lett.*83 (Oct. 1999), 2884–2887.

- [28] LEDVINKA, T. Relativistic Disks as Sources of Kerr-Newman Fields. In *Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation, and Relativistic Field Theories* (1999), T. Piran and R. Ruffini, Eds., p. 339.
- [29] LEMOS, J. P. S. Self-similar relativistic disks with pressure. *Class. Quantum Grav.*6 (Sept. 1989), 1219–1230.
- [30] LEMOS, J. P. S., AND LETELIER, P. S. Superposition of Morgan and Morgan discs with a Schwarzschild black hole. *Class. Quantum Grav.*10 (June 1993), L75–L78.
- [31] LEMOS, J. P. S., AND LETELIER, P. S. Exact general relativistic thin disks around black holes. *Phys. Rev. D*49 (May 1994), 5135–5143.
- [32] LETELIER, P. S., AND OLIVEIRA, S. R. Exact self-gravitating disks and rings: A solitonic approach. *J. Math. Phys.*28 (Jan. 1987), 165–170.
- [33] LICHNEROWICZ, A. Sur les ondes de choc gravitationnelles et électromagnétiques. In *Ondes et Radiations Gravitationnelles* (1974), p. 47.
- [34] LYNDEN-BELL, D., AND PINEAULT, S. Relativistic disks - 1. Counter rotating disks. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*185 (Dec. 1978), 679–694.
- [35] LYNDEN-BELL, D., AND PINEAULT, S. Relativistic disks - II. Self-similar disks in rotation. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*185 (Dec. 1978), 695–712.
- [36] MCCREA, W. H. Einstein: Relations with the Royal Astronomical Society. *Q. J. Roy. Astron. Soc.*20 (Sept. 1979), 251.
- [37] MORGAN, T., AND MORGAN, L. The Gravitational Field of a Disk. *Phys. Rev.* 183 (July 1969), 1097–1101.
- [38] NEUGEBAUER, G., AND MEINEL, R. General Relativistic Gravitational Field of a Rigidly Rotating Disk of Dust: Solution in Terms of Ultraelliptic Functions. *Phys. Rev. Lett.*75 (Oct. 1995), 3046–3047.
- [39] PICHON, C., AND LYNDEN-BELL, D. New sources for Kerr and other metrics: rotating relativistic discs with pressure support. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*280 (June 1996), 1007–1026.
- [40] RUBIN, V. C., AND FORD, JR., W. K. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *Astrophys. J.*159 (Feb. 1970), 379.
- [41] RUBIN, V. C., GRAHAM, J. A., AND KENNEY, J. D. P. Cospatial counterrotating stellar disks in the Virgo E7/S0 galaxy NGC 4550. *Astrophys. J. Lett.* 394 (July 1992), L9–L12.
- [42] SOTO, A. S. *Física matemática*. Universidad de Antioquia, 2009.

- [43] TAUB, A. H. Space-times with distribution valued curvature tensors. *J. Math. Phys.* *21* (1980), 1423–1431.
- [44] TOOMRE, A. On the distribution of matter within highly flattened galaxies. *Astrophys. J.* *138* (Aug. 1963), 385.
- [45] UJEVIC, M., AND LETELIER, P. S. Stability of general relativistic geometric thin disks. *Phys. Rev. D* *70*, 8 (Oct. 2004), 084015.
- [46] VERHEIJEN, M. A. W. The Ursa Major Cluster of Galaxies. V. H I Rotation Curve Shapes and the Tully-Fisher Relations. *Astrophys. J.* *563* (Dec. 2001), 694–715.
- [47] VOGT, D., AND LETELIER, P. S. Exact general relativistic perfect fluid disks with halos. *Phys. Rev. D* *68*, 8 (Oct. 2003), 084010.
- [48] VOGT, D., AND LETELIER, P. S. Exact relativistic static charged perfect fluid disks. *Phys. Rev. D* *70*, 6 (Sept. 2004), 064003.
- [49] VOORHEES, B. H. Relativistic disks. I. background models. *Phys. Rev. D* *5* (1972), 2413–2418.