PROPIEDADES DINÁMICAS DE UNA FAMILIA DE FUNCIONES EN EL INTERVALO $[0, 1]$

NERY JANNETH BARAJAS CARRILLO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2005

PROPIEDADES DINÁMICAS DE UNA FAMILIA DE FUNCIONES EN EL INTERVALO $[0, 1]$

NERY JANNETH BARAJAS CARRILLO

Monografía presentada como requisito para optar al
Título de Licenciada en Matemáticas

Director
JAVIER ENRIQUE CAMARGO
Magister en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2005

TITULO: PROPIEDADES DINÁMICAS DE UNA FAMILIA DE FUNCIONES EN EL INTERVALO $[0,1]$ *

Autor: Nery Janneth Barajas Carrillo **

Palabras Claves: Iteraciones, caos, órbita, punto periódicos, punto fijo, atractor, repulsor.

En esta monografía se estudia la dinámica de una familia de funciones continuas sobreyectivas F_{ab} dado $0 < a < 1$ y $0 \leq b \leq 1$ en el intervalo $[0,1]$. De acuerdo con " *The Dynamics of a Family of One-Dimensional Maps* " de Susan Bassein realizamos una clasificación de esta familia en funciones caóticas y no caóticas, (según la definición de caos dada por Devaney). Para ello tomamos diferentes subfamilias de funciones de F_{ab} que tienen dinámicas similares y pueden ser analizadas por medio de la misma estrategia general.

Este trabajo esta divido en cinco capítulos. En el primero se hace una introducción general; en el segundo se inducen conceptos, definiciones, teoremas y ejemplos necesarios para el desarrollo de este escrito; en el tercer capítulo se presenta la familia de funciones F_{ab} y algunas de sus propiedades generales; y finalmente en los capítulos cuarto y quinto se estudia la dinámica de las subfamilias de F_{ab}

Dado que los sistemas dinámicos, el caos, y los conjuntos fractales despiertan gran interés, éstos se constituyen en temas de análisis para muchos estudiantes. Sin embargo, la literatura relacionada con dichos temas generalmente se hace pensando en los últimos semestres de Licenciatura o en Maestría por lo tanto presenta complejidad. Este trabajo por el contrario, contiene un material asequible a estudiantes de los primeros niveles de la universidad para motivarlos al estudio de los sistemas dinámicos.

*Trabajo de Grado

**Facultad de Ciencias, Licenciatura en Matemáticas, Dirigido por: Magister Javier Enrique Camargo

TITLE: DYNAMIC PROPERTIES OF A FAMILY OF MAPS IN THE INTERVAL $[0, 1]$ *

Author:Nery Janneth Barajas Carrillo **

Key words: Iterations, chaos, orbit, fixed point, repelling, attracting, periodic point.

This monograph studies a family of continuos maps in the interval $[0, 1]$. According to " *The Dynamics of a Family of one-dimensional Maps* " by Susan Bassein we classify this family into chaotic and no-chaotic maps based on Devaney's chaos definition. To do this, we take different map subfamilies of $\digamma_{ab}$ that have similar dynamics and can be analyzed through the same general strategy.

This paper is divided into five chapter. In the first one there is a general introduction, in the second one some necessary concepts, definitions, theorems and examples which are important for the development of this paper are presented. The third chapter presents the family of maps $\digamma_{ab}$. It also includes some its general properties and classification of the family into subfamilies. The finally, the fourth and fifth chapter studies the dynamics of the mentioned families.

Given that dynamics systems, chaos and fractals are topics of a big interest they become themes of analysis for several students. However, literature related to these topics is generally made for students in the last semesters of university of the ones who are in magister degrees. For this reason it is complex. By contrast, this paper contains available material for first level university students to encourage them to study the dynamics systems.

*Trabajo de Grado
**Facultad de Ciencias, Licenciatura en Matemáticas, Dirigido por: Magister Javier Enrique Camargo

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

La historia de los sistemas dinámicos ha tenido un desarrollo muy importante en los últimos años. El caos, turbulencia, y conjuntos fractales por su notable belleza e impresionante similitud con la naturaleza a despertado de un publico muy amplio.

En esta monografía tomando como base la familia F de funciones continuas sobreyectivas $f_a b$ en el intervalo $[0, 1]$; donde para cada a, b en $[0, 1]$ tenemos:

$$f_{ab}(x) = \begin{cases} b + \dfrac{(1-b)x}{a}, & \text{si} \quad 0 \leq x < a; \\ \\ \dfrac{1-x}{1-a}, & \text{si} \quad a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

estudiaremos propiedades dinámicas de las funciones f_{ab} con diferentes variaciones de los puntos a y b ; de acuerdo a [1] realizaremos una clasificación de esta familia en funciones caóticas y no caóticas.

Escogimos esta familia de funciones porque a pesar de su sencillez aparente, es de gran interés en la Teoría de Continuos, pues con construcciones adecuadas es posible generar continuos con propiedades topológicas muy interesantes (continuos indescomponibles) que han sido de interés en la última época.

Además, presentaremos un materia asequible a estudiantes de los primeros semestres de Licenciatura en Matemáticas para motivarlos al estudio de los sistemas dinámicos discretos pues, como menciona Méndez en [2] " desgraciadamente la mayoría de la literatura recomendable esté en inglés. Otro problema es que mucho de los textos presentan material pensando que en los últimos niveles de Licenciatura o en Maestría ".

Capítulo 2

Preliminares

Pensemos en todos aquellos objetos que cambian su posición cuando el tiempo transcurre: los autos, los aviones, las personas, los animales, etc. Cada uno de estos sucesos corresponde a un sistema dinámico, por esta razón, es incuestionable la importancia de éstos. En los sistemas que estudiaremos en este trabajo, los datos que obtenemos están ordenados, sabemos cuál es el primero, cuál es el segundo, etc. y de cada uno de ellos al siguiente transcurre una unidad fija de tiempo. Esta característica le agrega a nuestros *sistemas dinámicos* el nombre de *discretos.*

El punto de vista que asumiremos para estudiar el movimiento, tiene como elemento central una función y sus iteraciones, definida sobre un espacio, o conjunto, la cual a través de sus reglas de correspondencia nos muestra como es el movimiento. Desde esta perspectiva cada función, cuyo dominio y contradominio sea el conjunto J, induce un sistema dinámico; es decir, un modelo del movimiento.

En resumen describimos los *sistemas dinámicos discretos* como una función $f : J \to J$ que determina el comportamiento o evolución de cada elemento del conjunto J al avanzar el tiempo.

A continuación daremos algunas definiciones de los conceptos más importantes, necesarios para el desarrollo de este escrito.

Observación 2.1. Estudiaremos funciones continuas $f : J \to J$ donde J es un intervalo de $\mathbb{R}$. Además, la longitud de un intervalo J la denotaremos por $|J|$.

Definición 2.1. Sea f una función definida sobre J. Las iteraciones de f son las funciones que obtenemos al componer f consigo misma:

$$f^0 = id, \quad f = f^1, \quad f^2 = fof, \quad f^3 = fof^2 \quad ...$$

En general para toda $\quad n \geq 2, \quad f^n = fof^{n-1}$

El objetivo de estudio de los sistemas dinámicos discretos es el comportamiento de los puntos al pasar el tiempo, para esto es necesario formalizar este concepto.

Definición 2.2. Sea x un elemento de J, *la órbita* de x bajo f es la sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ definida mediante la regla

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad x_0 = x \tag{2.0.1}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0) = f(x) \\
x_2 &= f(x_1) = f(f(x)) = f^2(x) \\
x_3 &= f(x_2) = f(f^2(x)) = f^3(x) \\
&\vdots \\
x_n &= \underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{n \quad veces} = f^n(x)
\end{aligned}$$

El comportamiento de las órbitas puede ser muy variado dependiendo de la dinámica del sistema. La dinámica, aparece cuando consideramos cada órbita como las distintas posiciones que va recorriendo un objeto al paso del tiempo. En $t = 0$, tenemos la posición inicial x, para $t = 1$ la ubicación de x al paso de una unidad de tiempo es $f(x)$, y así sucesivamente. Cada x en J da lugar a una órbita, es decir, a una secuencia de movimientos. Bajo este punto de vista, estudiar las *propiedades dinámicas* inducidas por f *es estudiar el comportamiento de todas las órbitas posibles.*

Comencemos a analizar una familia de funciones muy simples, de la forma $f(x) = \alpha x$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.0.1. Tomemos un caso particular $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ y calculemos algunas órbitas.

- La órbita de $x = 0$ es: $0, 0, 0, 0, \ldots$
- La órbita de $x = 1$ es: $1, 2, 4, 8, \ldots$
- La órbita de $x = 2.5$ es: $2.5, 5, 10, 20, \ldots$
- La órbita de $x = 0.3$ es: $0.3,\ 0.6,\ 1.2,\ 2.4 \ldots$
- La órbita de $x = -1.4$ es: $-1.4, -2.8, -5.6,\ -11.2, \ldots$

Podemos ver el comportamiento de las órbitas por medio de *Diagramas* o *Retrat*

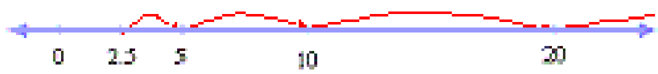

Figura 2.1: Retrato de fase

En $f(x) = 2x$ el comportamiento es fácil de explicar, lo que ocurre es que se duplica el valor de cada término de la sucesión. Con este análisis podemos concluir que si $x \neq 0$, tenemos que la órbita es infinita y no acotada. Además si $x = 0$ su órbita es constante. Con lo que describimos totalmente la dinámica del sistema.

De una manera general consideremos la función de la forma $f(x) = \alpha x$ y construir la sucesión $x_0 = x$, $x_{n+1} = f(x_n)$, se puede probar por inducción que

$$x_n = f^n(x_0) = \alpha^n x_0,$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \alpha^n x_0 = x_0 \lim_{n\to\infty} \alpha^n.$$

Pero el $\lim_{n\to\infty} \alpha^n$ es el límite de una progresión geométrica, y sabemos que si $|\alpha| < 1$, el límite será cero. De este modo, si $|\alpha| < 1$ tendremos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \lim_{n\to\infty} \alpha^n = x_0 \cdot 0.$$

Además si $\alpha > 1$ cualquier valor inicial (diferente de cero) tiene una órbita que se aleja de cero, y el comportamiento es bastante simple. Formalmente podemos escribir:

$$\begin{array}{rclcl} lim_{n\to\infty} f^n(x) & = & +\infty & si & x > 0 \\ lim_{n\to\infty} f^n(x) & = & -\infty & si & x < 0 \end{array}$$

Si $\alpha < -1$ cualquier valor inicial (diferente de cero) tiene tiene una órbita que se aleja de cero pero "dando saltos " cada vez más grandes a izquierda y derecha. Por ejemplo con $\alpha = -2$ así $f(x) = -2x$, la órbita de x=1 es: $1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots.$

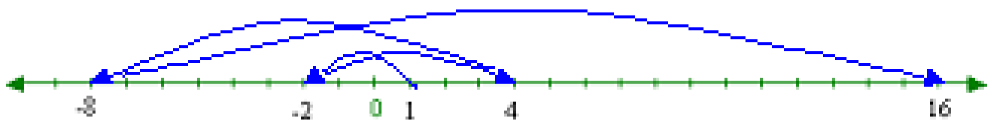

Figura 2.2: Órbita de x=1

Así, podemos concluir que a pesar que, en general, el conjunto de órbitas es infinito, el sistema dinámico puede ser muy simple dependiendo de las características de la función, como veremos más adelante.

A partir del ejemplo anterior mostraremos una manera geométrica de observar el comportamiento de una órbita de un sistema unidimensional (donde la función está definida sobre un subconjunto de $\mathbb{R}$) a partir de la gráfica de f. Para ello:

1. Empezamos en un punto p en el eje X
2. Nos movemos verticalmente hasta intersecar la gráfica de f.

3. Nos movemos horizontalmente hasta intersecar la diagonal $y = x$.
4. Nos movemos verticalmente - hacia arriba o hacia abajo - hasta intersecar la gráfica de f.
5. Se repiten los pasos 3 y 4 para generar nuevos puntos.

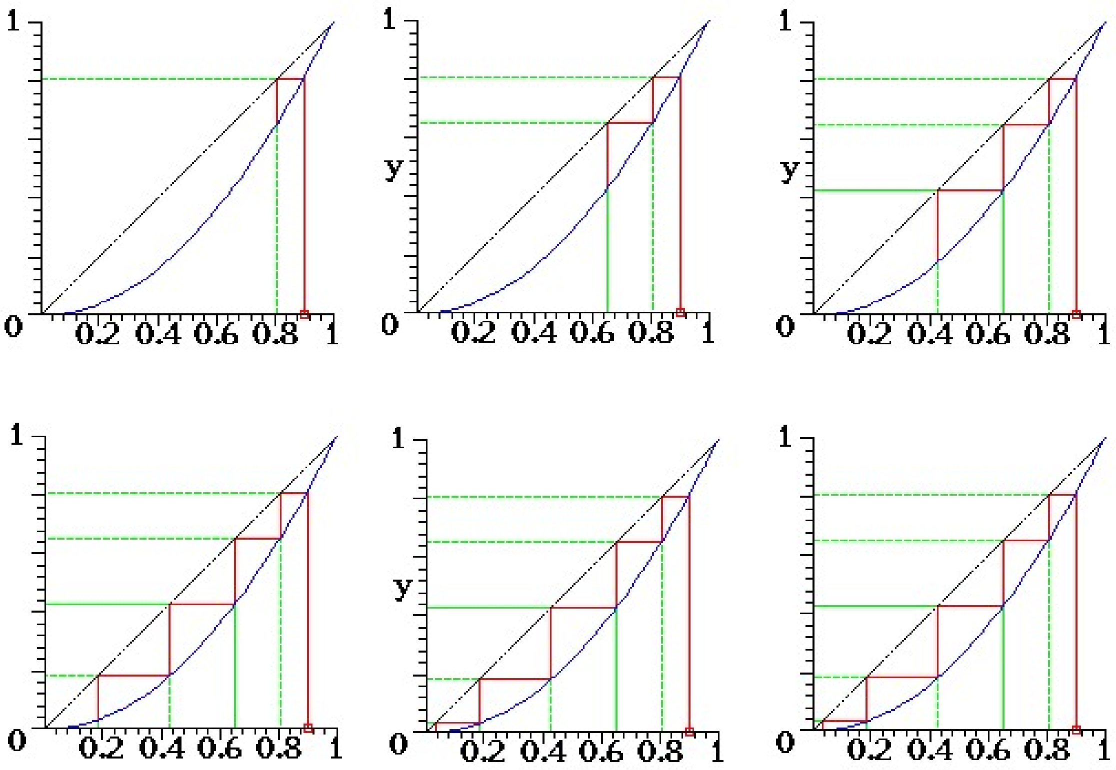

Figura 2.3: Forma geométrica de observar el comportamiento de una órbita

Las siguientes definiciones y ejemplos nos ayudarán a formalizar los diferentes comportamientos de las órbitas que podemos encontrar.

Definición 2.3. Sea f una función definida en J. Decimos que $x \in J$ es un *punto fijo* de f si $f(x) = x$.

Notemos que el único punto fijo de una función de la forma $f(x) = \alpha x$ es $x = 0$ (excepto si $\alpha = 1$). Gráficamente, los puntos fijos de una función son los puntos de corte de su gráfica con la recta $y = x$.

Ejemplo 2.0.2. Sean $J = [-1, 1]$ y $f : J \to J$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ hallemos el punto fijo de f. Entonces resolvemos $f(x) = x$, luego $\sqrt{1 - x^2} = x$, por lo tanto $x = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ es el punto fijo de f. En la siguiente figura podemos observar la órbita de $x = 1$ (color morado) y de $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ (color rojo).

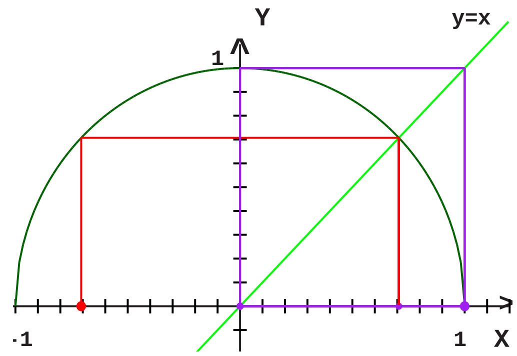

Figura 2.4: Órbita de $x = 1$ y $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ en la gráfica de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Calculemos algunas órbitas de f:

- La órbita de $x = 1$ es: $1, 0, 1, 0, \ldots$
- La órbita de $x = 0$ es: $0, 1, 0, 1, \ldots$
- La órbita de $x = -1$ es: $-1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

- La órbita de $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ es: $-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots$

En general tenemos que para todo $x \in J$ la órbita de x es:

$$x, f(x) = \sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-(1-x^2)} = |x|, \sqrt{1-|x|^2} = f(x), |x|, f(x), \ldots$$

Por otra parte, realizando una composición tenemos que, para cualquier $x \in J$ y para todo $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$,

$$f^{2n}(x) = |x|; \text{ y } f^{2n+1}(x) = f(x),$$

lo que nos da una idea clara de la dinámica del sistema.

Ejemplo 2.0.3. Consideremos la siguiente función f definida en $J = [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} + \frac{5x}{3}, & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

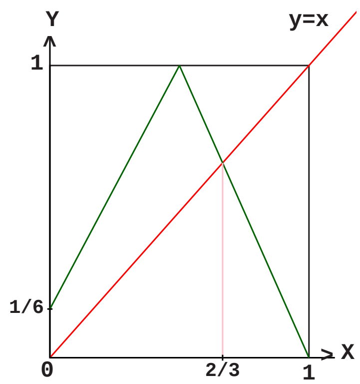

Figura 2.5: Gráfica de $f(x)$

Hallemos algunas órbitas de f:

- Algunos puntos de la órbita de $x = 0$ son: $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{20}{27}, \frac{5}{27}, \frac{77}{162}, \frac{233}{243}, \frac{20}{243}, \frac{443}{1458}, \ldots$
- Algunos puntos de la órbita de $x = \frac{1}{4}$ son: $\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{13}{18}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{29}{54}, \frac{25}{27}, \frac{4}{27} \ldots$
- La órbita de $x = \frac{4}{25}$ es: $\frac{4}{25}, \frac{3}{10}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \ldots$

Podemos comprobar que f tiene un punto fijo $x = \frac{2}{3}$. La dinámica de un sistema dinámico con esta función, no es tan simple como los ejemplos mostrados anteriormente y la estudiaremos a fondo en el siguiente capítulo.

Definición 2.4. Decimos que un punto $x \in J$, punto fijo de f, es *atractor* de f si existe $\delta > 0$, tal que para todo x_0 en $(x - \delta, x + \delta)$, $x_0 \in J$ se tiene que

$$lim_{n \to \infty} f^n(x_0) = x.$$

En otras palabras si existe una vecindad alrededor de x tal que las órbitas de los puntos en la vecindad convergen a x, entonces x es un atractor.

La definición anterior equivale a pedir la existencia de un intervalo abierto alrededor de x tal que todos los valores iniciales dentro de ese intervalo tengan órbitas convergentes a x.

Definición 2.5. Decimos que $x \in J$, punto fijo de f, es un *repulsor* para la función f, si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x_0 \in (x - \delta, x + \delta)$, $x \neq x_0$, $x_0 \in J$ existe un $n \in \mathbb{N}$ (que depende de x_0) tal que $f^n(x_0)$ no pertenece a $(x - \delta, x + \delta)$.

De la definición anterior podemos decir que $x \in J$, punto fijo de f, es un repulsor para la función f, si existe una vecindad alrededor de x tal que las órbitas eventualmente escapan de la vecindad.

Ejemplo 2.0.4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0{,}8x$

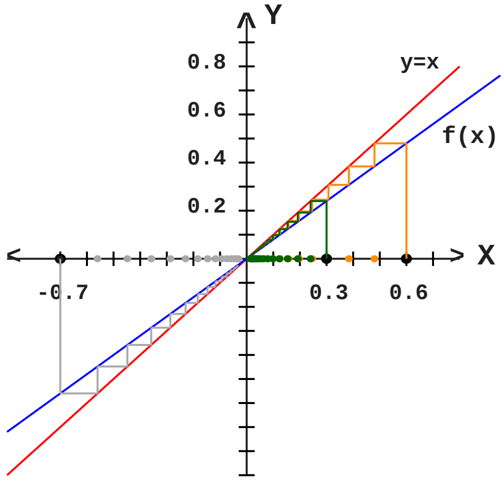

Figura 2.6: Órbita de x =0.6, x =-0.7, x =0.3

La figura 2.6 nos muestra las órbitas en $f(x)$ =0.8x de x =0.6 (de color naranja), de $x = -0.7$ (de color gris), de $x = 0.3$ (de color marrón). Notamos que estas órbitas tienden a cero. Además podemos decir que si $x = 0$ es un atractor para $f(x) = 0.8x$, ya que, si tomamos un $\delta = 0{,}1$ para todo $x \in$ (-0.1, 0.1) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x \lim_{n\to\infty} (0{,}8)^n = 0.$$

De manera similar podemos decir que $x = 0$ es un repulsor para $f(x) = 2x$.

Ejemplo 2.0.5. Tomemos $f(x) = x$ cuyo comportamiento es bastante simple, todo número es un punto fijo y por tanto todas las órbitas son constantes.

$$\text{La órbita de 3 será } 3, 3, 3, \ldots.$$

Sin embargo, en este caso no tenemos ni atractores ni repulsores. Aunque 3 es un punto fijo, no podemos encontrar un intervalo abierto alrededor de 3 cuyos elementos tengan órbitas convergentes a 3. Si tomamos x=2.8 tenemos que 2.8 $\in$ (2.5,3.5) pero su órbita no converge a 3 (ya que la órbita converge a 2.8).

Una herramienta útil para clasificar los puntos fijos es el siguiente teorema.

Teorema 2.0.1. *Sea $f : J \to J$ una función de clase C^1 en J, es decir la derivada de f, que denotaremos f', existe y es continua en todo J. Sea $x_0 \in J$ un punto fijo de f.*

- *Si* $|f'(x_0)| < 1$ *entonces* x_0 *es un punto fijo atractor.*
- *Si* $|f'(x_0)| > 1$ *entonces* x_0 *es un punto fijo repulsor.*

Demostración. Supongamos que para x_0 tenemos

$$f(x_0) = x_0 \quad \text{y} \quad |f'(x_0)| < 1.$$

Sea M tal que $|f'(x_0)| < M < 1$. Como f' es una función continua, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se tiene $|f'(x)| < M$.

Mostraremos ahora que todas las órbitas de los puntos que forman este intervalo abierto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ son atraidas a x_0. Sea x en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, por el teorema del valor medio existe c, un punto en el intervalo (x_0, x) o en el intervalo (x, x_0), tal que

$$|f(x) - f(x_0)| = |f'(c)||x - x_0|.$$

Como $c \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tenemos $|f'(c)| < M$. De aquí que

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|$$

Recordando que $f(x_0) = x_0$, tenemos

$$|f(x) - x_0| < M|x - x_0|.$$

Como $M < 1$ tenemos que la distancia de $f(x)$ a x_0 es menor que la distancia de x a x_0. Por lo tanto $f(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Esto nos permite aplicar el procedimiento que seguimos para x, ahora al punto $f(x)$, si $f(x) \neq x_0$. Al hacerlo obtenemos

$$|f(f(x))| < M|f(x) - x_0| < M^2|x - x_0|$$

es decir

$$|f^2(x) - x_0| < M^2|x - x_0|.$$

Siguiendo este camino obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente desigualdad

$$|f^n(x) - x_0| < M^n|x - x_0|.$$

Como $0 < M < 1$, sabemos que el $\lim_{n\to\infty} M^n = 0$. Esta información junto con la última desigualdad nos da el siguiente resultado:
Para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0.$$

Por lo tanto x_0 es un punto fijo atractor.

Veamos el otro caso, $|f'(x_0)| > 1$. Sea M tal que: $|f'(x_0)| > M > 1$. Procediendo de manera análoga al caso anterior existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, se tiene $|f'(x)| > M$. Sea $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, tenemos nuevamente que existe un c tal que

$$|f(x) - f(x_0)| = |f'(c)||x - x_0|,$$

con $c \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, por lo tanto

$$|f(x) - x_0| > M|x - x_0|$$

Si $f(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, podemos aplicar nuestro procedimiento otra vez obtenemos:

$$|f(f(x)) - x_0| > M|f(x) - x_0| > M^2|x - x_0|.$$

Así mientras $f^n(x)$ se mantenga en ese intervalo

$$|f^n(x) - x_0| > M^n|x - x_0|.$$

Como $M > 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \infty \quad \text{y} \quad |x - x_0| > 0$$

Esto implica la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|f^n(x) - x_0| > \delta.$$

De esta última desigualdad se sigue que para n el punto $f^n(x)$ ya no pertenece al intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, así x_0 es repulsor. Con esto finalizamos la demostración del teorema. $\square$

Del teorema anterior podemos afirmar que $x_0 \in J$, x_0 un punto fijo atractor de f, existe una vecindad en J que contiene a x_0, tal que para todo x que pertenece a la vecindad el $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$. Luego hay un intervalo (p, q) tal que $x_0 \in (p, q)$ y las órbitas de los puntos en (p, q) converge a x_0. Para $|f'(x_0)| > 1$ existe también el intervalo (c, d) tal que $x_0 \in (c, d)$, pero en este caso las órbitas se alejan de x_0.

Notemos que el teorema no dice nada acerca de $|f'(x_0)| = 1$, y en este caso puede ser atractor, repulsor o ninguno de ambos.

Ejemplo 2.0.6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \alpha x$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, sabemos que el único punto fijo de f es $x_0 = 0$. Tenemos que $f'(x) = \alpha$, ayudados del teorema anterior podemos afirmar que $x_0 = 0$ es un punto fijo repulsor cuando $|\alpha| > 1$, y que $x_0 = 0$ es un punto fijo atractor cuando $|\alpha| > 1$. Cuando $|\alpha| = 1$ entonces:

- Si $\alpha = 1$ todo punto es punto fijo que no es ni atractor ni repulsor.
- Si $\alpha = -1$ el único punto fijo es $x_0 = 0$ y no es atractor ni repulsor.

Notemos que α es la pendiente de la recta $y = \alpha x$, que es la derivada en todos sus puntos.

Ejemplo 2.0.7. Consideremos el intervalo $J = [0, \infty)$ y la función $f : J \to J$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$.

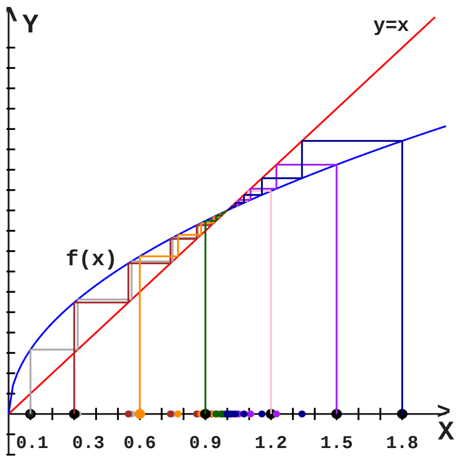

Figura 2.7: Órbitas de puntos " cercanos " al punto fijo

Para encontrar los puntos fijos resolvemos la ecuación $f(x) = x$, $\sqrt{x} = x$. Es fácil ver que las únicas soluciones son $x = 0$ y $x = 1$ así éstos son los dos únicos puntos fijos.

En la figura 2.7 observamos la órbita en f de $x = 0{,}1$ (de color gris), de $x = 0{,}3$ (de color marrón),de $x = 0{,}6$ (de color naranjado),de $x = 0{,}9$ (de color verde),de $x = 1{,}2$ (de color rosado), $x = 1{,}5$ (de color morado), $x = 1{,}8$ (de color azul oscuro).

Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, tenemos que $f'(1) = \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto $x = 1$ es un punto fijo atractor. En $x = 0$ la derivada no está definida y nuestro método enmudece. Sin embargo, este punto fijo tiene toda la apariencia de ser un repulsor.

Ejemplo 2.0.8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x$. La figura 2.8 nos muestra órbitas de diferentes puntos en f.

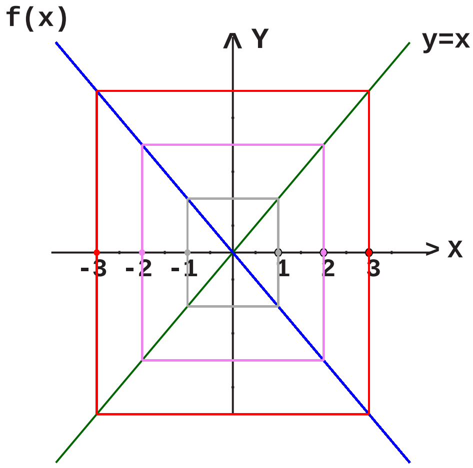

Figura 2.8: Órbita de $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$

Tenemos que la órbita de x =2 en f es 2, -2 , 2, -2, 2, ... Podemos decir que esta órbita se vuelve periódica.

Definición 2.6. Un punto x es periódico si existe un entero positivo r tal que

$$f^r(x) = x \quad \text{y} \quad f^t(x) \neq x \quad \text{para} \quad 0 < t < r$$

El entero r se conoce como el periodo de x.

Denotaremos por $Per(f)$ al conjunto de todos los puntos periódicos.Notemos que todo punto fijo es punto periódico con periodo igual a 1.

En el ejemplo anterior, x =0.6 un punto de periodo 2 ya que existe un entero $r = 2$ tal que 0.6= $f^2($ 0.6 $) = f(f(0{,}6))$ y 0.6$\neq$ $f(0.6)$. En este ejemplo todo $x \neq 0$ es periódico de periodo 2 y $x = 0$ es periódico de periodo 1 (punto fijo).

Definición 2.7. Si x es un punto periódico, diremos que x tiene un órbita periódica.

Ejemplo 2.0.9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \alpha - x$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Podemos comprobar que:

- f tiene un punto fijo $x = \dfrac{\alpha}{2}$.
- $Per(f) = \mathbb{R}$, porque $f^2(x) = f(\alpha - x) = \alpha - (\alpha - x) = x$.

En resumen la dinámica generada por f es así: sólo tiene un punto fijo $x = \dfrac{\alpha}{2}$, todos los puntos en $\mathbb{R} - \{\dfrac{\alpha}{2}\}$ son puntos periódicos de periodo 2. Esto nos da una descripción del sistema dinámico discreto a que da lugar f.

Una definición clave en el presente trabajo es el Caos. El surgimiento de la teoría de caos data del año 1,963 cuando Edward Lorenz, meteorólogo M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology) diera a conocer un curioso modelo climático que posteriormente fascinaría a muchos físicos por su extraño comportamiento. Lorenz trabajaba en la predicción del clima utilizando un sistema de 12 ecuaciones no lineales en su computadora.

En una ocasión quiso ver unos resultados que había obtenido e introdujo los datos iniciales en su computador para que éste resolviera y encontrara el resultado nuevamente, pero sólo usó tres cifras decimales en lugar de seis como eran inicialmente, pensando que la diferencia de los datos no alteraría mucho el resultado. Sin embargo, notó que estas diferencias incidían enormemente los resultados. Así, Edward estaba ante el caos y no podía predecir el tiempo a largo plazo. Con esta situación llegó a la conclusión que las mismas causas no siguen los mismos efectos pues a partir de su descubrimiento se demostraba todo lo contrario, condiciones iniciales muy parecidas entregaban a la larga resultados totalmente diferentes. Esto es lo que llamó Lorenz *Dependencias sensitivas de condiciones iniciales* y una manera atractiva de explicarlo fue con el siguiente comentario: "puede una mariposa que agita sus alas en Brasil provocar un tornado en Texas ".

Lo más sorprendente de lo descubierto fue cuando al graficar los resultados del experimento presentaban un comportamiento en general organizado, es decir, con cierto orden pero sin ser predecible. Era una superficie llena de pliegues, los pliegues a su vez con más pliegues y así hasta el infinito, una figura autosemejante (como un fractal) que fue llamada *Atractor de Lorenz*.

No obstante las raíces profundas del caos son anteriores a aquella fecha como así lo prueba el que hayan sido desenterrados del olvido trabajos matemáticos importantes como los de Poincare, Liapounov o Julia. Aunque no hay un consenso general acerca de una definición estricta de caos, una de las más aceptadas y conocidas para sistemas discretos es la de Robert Devaney, la cual enunciaremos a continuación.

Definición 2.8. Una función f desde un subconjunto infinito S de $[0,1]$ a si mismo es caótica si:

1. **Es sensible a las condiciones iniciales:** si existe $\epsilon > 0$ tal que para todo x en S y para todo $\delta > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ y un punto $y \in S$ tales que $|x - y| < \delta$ y $|f^n(x) - f^n(y)| > \epsilon$.

2. **Es topológicamente transitiva:** si U y V son intervalos abiertos, cada uno de los cuales contiene un punto en S, hay un $n > 0$ tal que $f^n(U \cap S)$ y $V \cap S$ tienen un punto en común.

3. **Los puntos periódicos son densos en S:** si U es un intervalo abierto que contiene puntos de S, entonces contiene un punto periódico en S En tal caso se dice que el sistema es dinámico es $\{S, f\}$ es caótico.

Aunque la definición tradicional de caos de Devaney incluye el criterio de la sensibilidad a las condiciones iniciales en *On Devaney´s Definition of Chaos* demuestra que el criterio de la sensibilidad a las condiciones iniciales es consecuencia de 1) y 2).

Cuando una función es sensible a las condiciones iniciales las órbitas de dos puntos que inician en posiciones muy cercanas en algún momento se separan más que ϵ.

Que f sea topológicamente transitiva significa que dados dos intervalos abiertos U y V con suficientes iteraciones de U bajo f se llegará a puntos de V, esto quiere decir que aplicando f cierto número de veces a los puntos de cualquier intervalo, se llegará a cualquier otro intervalo.

Cuando los puntos periódicos son densos dado cualquier intervalo (por pequeño que sea) se puede encontrar puntos periódicos, con cierta regularidad.

Capítulo 3

Presentación de la familia

La cantidad de sistemas dinámicos discretos posibles, aún solo para funciones definidas en intervalos de $\mathbb{R}$ es enorme. De hecho existen muchísimas funciones que todavía aguardan un estudio más profundo, algunas presentan dinámicas simples. Por ejemplo las que tienen un único punto fijo atractor y todas las demás órbitas convergen hacia él, y así podríamos seguir nuestra lista de funciones y dinámicas sencillas. Sin embargo, queremos estudiar una familia de funciones que exhibe una variedad sorprendente de dinámicas, las cuales iremos mostrando. Con base en la definición de Caos planteada por Devaney en *Introduction to Chaotic Dynamical System* realizaremos una clasificación de esta familia en funciones caóticas y no caóticas.

Nuestro objeto de estudio es la familia de funciones continuas sobreyectivas $f_{ab} : [0, 1] \to [0, 1]$, donde para cada $0 < a < 1$ y $0 \leq b \leq 1$ tenemos:

$$f_{ab}(x) = \begin{cases} b + \dfrac{(1-b)x}{a}, & \text{si} \quad 0 \leq x < a; \\ \\ \dfrac{1-x}{1-a}, & \text{si} \quad a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La gráfica consiste en dos segmentos de líneas rectas extendidas de $(0, b)$ a $(a, 1)$ y de $(a, 1)$ a $(1, 0)$ como ilustramos en la figura 3.1

Observación 3.1. A lo largo de este trabajo I representará el intervalo $[0, 1]$.

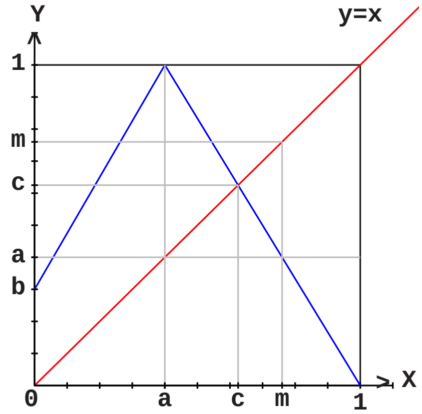

Figura 3.1: Gráfica de f con $a = 0{,}4$ y $b = 0{,}3$

Para iniciar el estudio del sistema dinámico que induce f con $0 < a < 1$ y $0 \leq b \leq 1$ encontremos los puntos fijos de f:

- En $[0, a]$ cuando $b = 0$ tenemos que $x = 0$ es un punto fijo de f.
- En $[a, 1]$ encontramos un punto fijo de f que denotaremos con c, así $c = f(c) = \dfrac{1-c}{1-a}$. Además, el valor absoluto de la pendiente de la recta a la derecha de x es $\dfrac{1}{1-a} > 1$ por lo tanto el punto fijo es un *repulsor*, lo cual significa intuitivamente que los puntos cercanos al punto fijo bajo la función a medida que iteramos con f se alejan del punto fijo c.

A continuación presentaremos aspectos básicos de f_{ab} que nos serán de gran utilidad.

Proposición 3.0.1. *Sea $f \in \mathcal{F}_{ab}$ entonces f es creciente en* $[0, a]$

Demostración. Tomemos $x_1 < x_2$ tal que x_1 y x_2 pertenecen a $[0, a]$. Entonces

$$f(x_1) = b + \frac{(1-b)}{a} x_1 \quad \text{y} \quad f(x_2) = b + \frac{(1-b)}{a} x_2.$$

Tenemos que $x_1 < x_2$ además $0 < a$ y $b \leq 1$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Por lo tanto f es creciente en $[0, a]$. $\square$

Proposición 3.0.2. *Sea $f \in \digamma_{ab}$ entonces f es decreciente en $[a,1]$*

Demostración. Sea $x_1 < x_2$ tal que x_1, x_2 pertenecen a $[a,1]$. Por consiguiente $f(x_1) = \dfrac{1-x_1}{1-a}$ y $f(x_2) = \dfrac{1-x_2}{1-a}$. De $x_1 < x_2$ y $a < 1$ tenemos que $1 - x_1 > 1 - x_2$, luego $f(x_1) > f(x_2)$. Por lo que concluimos que f es decreciente en $[a,1]$. □

Observación 3.2. En el presente trabajo, J y M representan intervalos cerrados. Como nuestra función es continua, las imágenes de J son intervalos cerrados.

Proposición 3.0.3. *Sea J un intervalo tal que $J \subset [a,1]$, entonces* $|f(J)| = \dfrac{1}{1-a}|J| > |J|$.

Demostración. Sea $J = [e,d] \subset [a,1]$ donde $e, d \in \mathbb{R}$ y $e < d$, luego:

$$f(e) = \frac{1-e}{1-a} \quad \text{y} \quad f(d) = \frac{1-d}{1-a}.$$

De la proposición 3.0.2 se tiene que f es decreciente en $[a,1]$ así $f(e) > f(d)$, por lo cual $f(J) = [f(d), f(e)]$. Como $|J| = |e-d|$ hallemos $|f(J)|$ así:

$$|f(J)| = |[f(d), f(e)]| = |f(e) - f(d)| = |\frac{1-e}{1-a} - \frac{1-d}{1-a}| = |\frac{d-e}{1-a}| = \frac{|J|}{1-a}.$$

Recordemos que $1 > a > 0$ tenemos que $1 < \dfrac{1}{1-a}$, con lo que concluimos que $|f(J)| = \dfrac{|J|}{1-a} > |J|$

□

La proposición anterior nos dice que si tomamos un intervalo abierto en $[a,1]$ y aplicamos f, la longitud de este intervalo aumenta en un factor $\dfrac{1}{1-a}$.

De la misma manera es inmediata la prueba de la siguiente proposición que será de gran utilidad más adelante.

Proposición 3.0.4. *Sea $J \subset [a,1]$ y $f(J) \subset [a,1]$, entonces* $|f^2(J)| = \dfrac{1}{(1-a)^2}|J|$

La siguiente proposición nos permiten establecer una característica del comportamiento cuando f es caótica.

Proposición 3.0.5. *Si f es caótica entonces f no tiene puntos periódicos atractores.*

Demostración. Supongamos existe $x \in J$, tal que x es atractor. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo y que pertenezca a $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} f^n(y) = x,$$

luego si tomamos $U = (x - \epsilon, x + \epsilon) - \{x\}$ éste es un abierto no vacío de J que no contiene puntos periódicos, luego $Per(f)$ no es un subconjunto denso de J y f no es caótica. Contradicción, luego si f es caótica entonces no tiene puntos periódicos atractores. $\square$

Armados con las proposiciones, definiciones y ejemplos dados en el capítulo anterior y en esta sección, y teniendo en cuenta el punto fijo $c = \dfrac{1}{2-a}$ y sea $m \in [a, 1]$ tal que $f(m) = a$ entonces $m = 1 - a + a^2$, clasificaremos la dinámica de las funciones en la familia tomando subfamilias de funciones que tienen dinámica similar y pueden ser analizadas por medio de la misma estrategia general. Estas subfamilias son (ver la figura 3.2):

1. $b > m$
2. $b = m$
3. $b < c$ además $b < 1 - a$ ó $b \geq 1 - a$ y $b > a$
4. $c \leq b < m$
5. $1 - a \leq b \leq a$

En los siguientes capítulos entraremos a formalizar cada uno de estos casos, para clasificarlos según sus dinámicas.

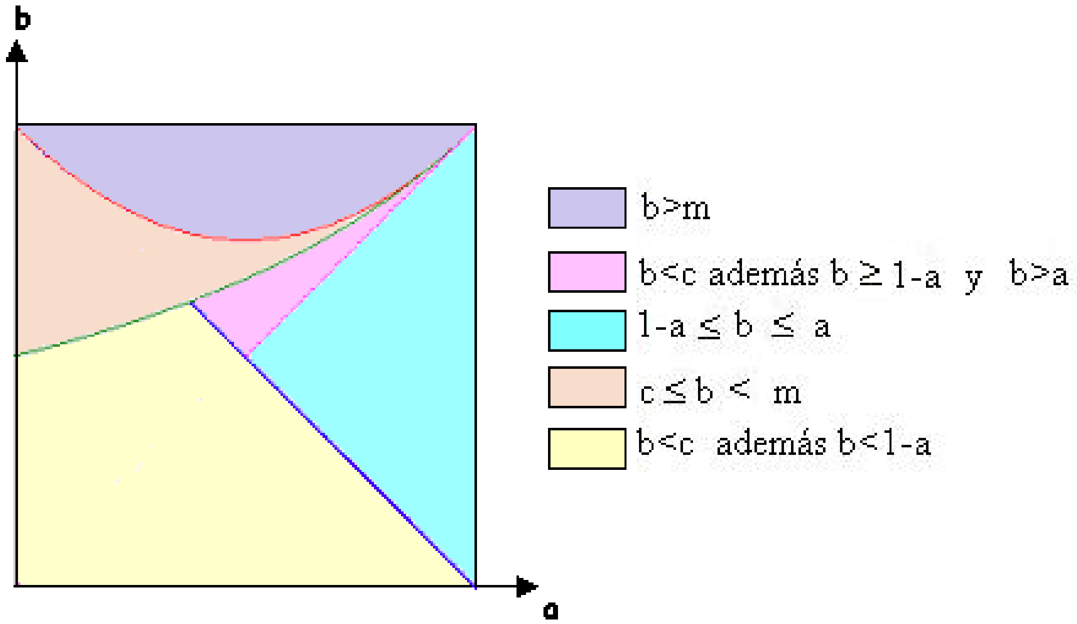

Figura 3.2: Subfamilia de funciones en el espacio (a,b)

Capítulo 4

Dinámicas no caóticas

Para iniciar con nuestro estudio sobre las propiedades dinámicas de F_{ab}, tomaremos la región dada por $b \geq c$, (lo que implica que el punto de corte con el eje Y, es decir b es mayor que el punto fijo) y analizaremos las subfamilias para las cuales:

$$b > m, \quad b = m \text{ y } c < b < m.$$

4.1. $b > m$

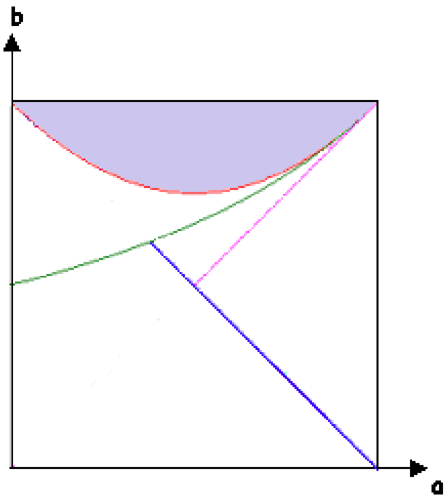

Figura 4.1: Región con $b > 1 - a + a^2$

La región definida por $b > m$ es la coloreada en la figura 4.1 . La significancia de esta desigualdad resulta de $f(m) = a$.

Con esta ilustración consideremos el siguiente caso en particular. Sea $a = \frac{1}{3}$ notamos que $m = \frac{7}{9}$, luego tomemos $b = \frac{5}{6} > \frac{7}{9} = m$. Así,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{6} + \frac{1}{2}x, & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{3}; \\ \frac{3-3x}{2}, & si \quad \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

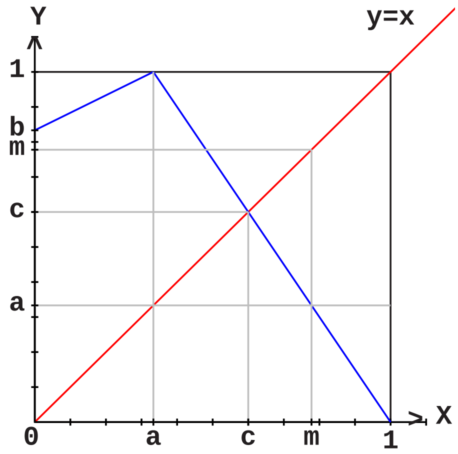

Figura 4.2: Gráfica de f_{ab} con $a = \frac{1}{3}$ y $b = \frac{5}{6}$

De la figura 4.2 podemos decir que:

- En el intervalo $[0, \frac{1}{3}]$ la gráfica de f siempre está por encima de $a = \frac{1}{3}$
- $f([\frac{1}{3}, \frac{7}{9}])$ está por encima de a porque

$$f([a, m]) = f([\frac{1}{3}, \frac{7}{9}]) = [\frac{1}{3}, 1] = [a, 1]$$

- $f([\frac{7}{9}, 1])$ está por debajo de a porque

$$f([m, 1]) = f([\frac{7}{9}, 1]) = [0, \frac{1}{3}] = [0, a]$$

De lo anterior se tiene que:

$$f^2(x) : \begin{cases} \dfrac{1}{4} - \dfrac{3x}{4}, & \text{si} \quad 0 \leq x < \dfrac{1}{3}; \\ \dfrac{-3}{4} + \dfrac{9x}{4}, & \text{si} \quad \dfrac{1}{3} \leq x < \dfrac{7}{9}; \\ \dfrac{19}{12} - \dfrac{3x}{4}, & \text{si} \quad \dfrac{7}{9} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

En la figura 4.3 observamos que f^2 tiene dos puntos periódicos de periodo dos, uno en $[0, a]$ y el otro en $[m, 1]$. Para hallarlos resolvemos $f^2(x) = x$.

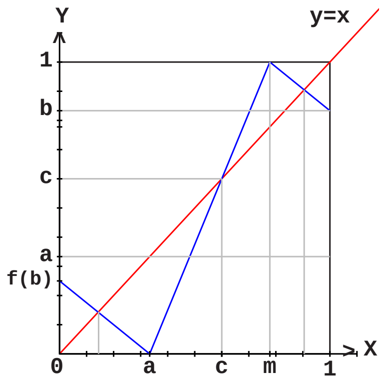

Figura 4.3: Gráfica de f^2_{ab} con $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = \dfrac{5}{6}$

Teniendo en cuenta que f^2 en $[0, a]$ es $f^2(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3x}{4}$, así $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3x}{4} = x$, por lo tanto $x = \dfrac{1}{7} \in [0, a]$ es un punto periódico de f con periodo 2. De manera similar encontramos el otro punto periódico de f de periodo dos $x = \dfrac{19}{21} \in [m, 1]$.

Las figuras 4.4, 4.5 nos muestran f^3 y f^4, donde se puede observar que no aparecen nuevos puntos periódicos. Este análisis tal vez apresurado nos lleva a conjeturar que f no tiene puntos de otros periodos, luego f en este caso no sería caótica.

A continuación enunciaremos unas proposiciones que nos llevarán a formalizar esta idea.

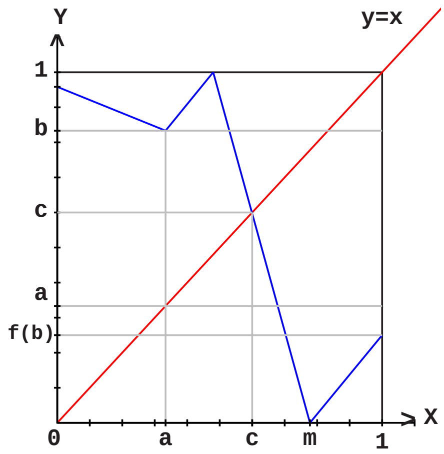

Figura 4.4: Gráfica de f^3_{ab} con $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = \dfrac{5}{6}$

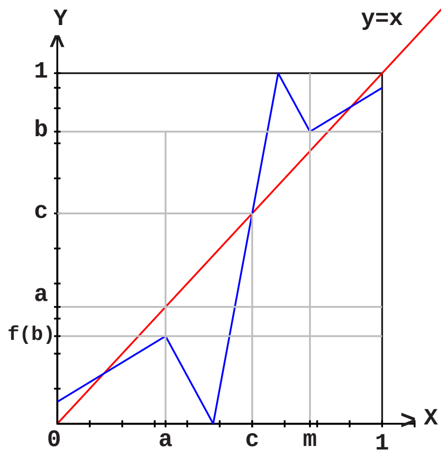

Figura 4.5: Gráfica de f^4_{ab} con $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = \dfrac{5}{6}$

Proposición 4.1.1. *Sea* $b > m$ *entonces* $f([0,a] \subset [b,1] \subsetneqq [m,1]$

Demostración. Como $m = 1 - a + a^2$ tenemos que $f(0) = b$ y $f(a) = 1$. Así, $f([0,a]) \subset [b,1]$. Además $b > m$, entonces $[b,1] \subsetneqq [m,1]$; por lo que concluimos que $f([0,a]) \subset [b,1] \subsetneqq [m,1]$. □

Proposición 4.1.2. *Sea* $b > m$. $f^2([0,a]) \subsetneqq [0,a]$

Demostración. De $b > m$ tenemos que $a > \dfrac{1-b}{1-a} = f(b)$. Ahora hallemos $f^2(0)$ y $f^2(a)$

$$\begin{aligned} f^2(0) &= f(f(0)) = f(b) > 0 \\ f^2(a) &= f(f(a)) = f(1) = 0, \end{aligned}$$

Se tiene que $f^2(0) > f^2(a)$ porque f^2 es decreciente en [0,a], por lo tanto

$$f^2([0,a]) \subseteq [f^2(a), f^2(0)] = [0, f(b)].$$

Además $f(b) < a$, luego $[0, f(b)] \subsetneqq [0,a]$, por lo cual concluimos que $f^2([0,a]) \subseteq [0, f(b)] \subsetneqq [0,a]$. □

La siguiente proposición nos muestra que f es una contracción en $[0,a]$

Proposición 4.1.3. *Sea* $b > m$. *Sea* J *un intervalo tal que* $J \subseteq [0,a]$, *entonces* $|f^2(J)| = \dfrac{f^2(0)}{a}|J| < |J|$.

Demostración. Tomemos $J = [p,q] \subseteq [0,a]$ con $p < q$. Sabemos que f es creciente en $[0,a]$ entonces $f(p) < f(q)$. Además $f[p,q] \subseteq [b,1]$ ya que $[p,q] \subseteq [0,a]$. Así $f(J) = f([p,q]) = [f(p), f(q)] \subseteq [b,1]$ y $f^2(q) < f^2(p)$ por ser f^2 decreciente en $[b,1]$ luego,

$$f^2(J) = f^2([p,q]) = [f^2(q), f^2(p)] \tag{4.1.1}$$

Hallemos $f^2(q)$ y $f^2(p)$. De $[p,q] \subseteq [0,a]$ tenemos que

$$f(q) = b + \frac{(1-b)q}{a} \quad \text{y} \quad f(p) = b + \frac{(1-b)p}{a}.$$

Como $b < a$ y $f(J) \subseteq [b, 1]$ entonces

$$\begin{aligned} f^2(q) &= \frac{1 - (b + \dfrac{(1-b)q}{a})}{1-a} = \frac{a - ab - (1-b)q}{(1-a)a} = \frac{(1-b)(a-q)}{a(1-a)} \\ f^2(p) &= \frac{1 - (b + \dfrac{(1-b)p}{a})}{1-a} = \frac{a - ab - (1-b)p}{(1-a)a} = \frac{(1-b)(a-p)}{a(1-a)} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f^2(J) = [f^2(q), f^2(p)] = [\frac{a - ab - (1-b)p}{a(1-a)}, \frac{a - ab - (1-b)p}{a(1-a)}],$$

luego $|f^2(J)| = \dfrac{(1-b)(q-p)}{a(1-a)}$ (por ser $p < q$).
Por otra parte $f^2(0) = f(b) = \dfrac{1-b}{1-a}$ y $|J| = q - p$, de manera que

$$|f^2(J)| = \frac{(1-b)}{(1-a)} \frac{(q-p)}{(a)} = f^2(0)\frac{|J|}{a}.$$

Como $b > 1 - a - a^2$, se tiene que $a > f(b) = f^2(0)$. Así $\dfrac{f^2(0)}{a} < 1$.
De lo anterior concluimos que

$$|f^2(J)| = \frac{f^2(0)(|J|)}{a} < |J|.$$

□

La siguiente proposición nos mostrará la existencia de un punto periódico en este caso particular cuando $b > m$.

Proposición 4.1.4. *Sea $b > m$. Existe un $x_0 \in [0, a]$ tal que $f^2(x_0) = x_0$.*

Demostración. Como $x \in [0, a]$, entonces $f(x) \in [b, 1] \subset [a, 1]$, pues

$$\begin{aligned} f(x) &= b + \frac{(1-b)x}{a} \\ f^2(x) &= \frac{1 - (b + \dfrac{(1-b)x}{a})}{1-a} = \frac{a(1-b) - (1-b)x}{a(1-a)} \end{aligned}$$

Hallemos el punto para el cual $f^2(x_0) = x_0$.
$f^2(x_0) = \dfrac{(a - x_0)(1 - b)}{a(1 - a)} = x_0$, de modo que $x_0 = \dfrac{a(1 - b)}{a(1 - a) + (1 - b)}$.

Ahora mostremos que x_0 es mayor que cero y menor que a. Partiendo de $0 < a < 1$ y $0 \leq b \leq 1$, tenemos que $a > a^2$, $1 - b \geq 0$ y $1 - a > 0$ por lo tanto

$$x_0 = \frac{a(1 - b)}{a(1 - a) + (1 - b)} \quad \geq \quad 0$$

Además

$$\begin{aligned} a + (1 - b) &> a^2 + (1 - b) \\ a + (1 - b) - a^2 &> (1 - b) \\ a(a + (1 - b) - a^2) &> a(1 - b) \\ a &> \frac{a(1 - b)}{a(1 - a) + (1 - b)} = x_0. \end{aligned}$$

Por lo anterior concluimos que existe un $x_0 \in [0, a]$ tal que

$$x_0 = f(x_0) = \frac{a(1 - b)}{a(1 - a) + (1 - b)}.$$

$\square$

En realidad, de la proposición 4.1.2 es inmediato garantizar que existe un punto fijo x_0 para f^2 en $[0, a]$, pero queríamos mostrar exactamente el valor del punto.

Tenemos que x_0 es un punto periódico de periodo 2, y puesto que el valor absoluto de la pendiente de f^2 en $[0, a]$ es menor que 1, entonces x_0 es un punto periódico atractor, lo que significa que la órbita de cada punto cercano a x_0 por medio de f^2 se aproxima al punto periódico de periodo dos.

Proposición 4.1.5. *Si $b > m$. Sea $z \in [0, a]$ $z \neq x_0$ (x_0 : punto periódico de periodo 2) , entonces z no es periódico.*

Demostración. Sea $z \in [0,a]$, entonces $f(z) \in [b,1] \subset [m,1]$, por ser $b > m$, así:

$$\begin{array}{cc} f(z) \in [b,1], & f^2(z) \in [0,a] \\ f^3(z) \in [b,1], & f^4(z) \in [0,a] \\ \vdots & \vdots \\ f^{2n+1} \in [b,1] & f^{2n} \in [0,a] \end{array}$$

Supongamos que z es un punto periódico, luego existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^p(z) = z$.
Si $x_0 < z$, entonces $z \in [x_0, z]$. Sea J un intervalo tal que

$$J = [x_0, z] \subset [0,a],$$

por la proposición 4.1.3 tenemos que $|f^2([x_0,z])| = \dfrac{f^2(0)|J|}{a} < |J|$, tomemos $k = \dfrac{f^2(0)}{a}$ entonces $|f^2([x_0,z])| = k|J| < |J|$, luego

$$|f^4([x_0,z])| = |f^4(x_0) - f^4(z)| < k|(f^2(z) - f^2(x_0))| < k^2|(z - x_0)|.$$

En general $0 \leq |f^{2n}(x_0) - f^{2n}(z)| < k^n|z - x_0|$.
Por lo anterior $0 \leq \lim_{n\to\infty} |f^{2n}(z) - x_0| < \lim_{n\to\infty} k^n|(z - x_0)|$; como $0 < k < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} k^n|(z) - x_0| = 0$ por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} |f^{2n}(z) - x_0| = 0,$$

luego $\lim_{n\to\infty} f^{2n}(z) = x_0$, con lo que concluimos que si z es periódico $z = x_0$ lo que contradice la hipótesis. □

El siguiente lema muestra la primera conclusión importante sobre la familia $\mathcal{F}_{ab}$

Lema 4.1.1. *Si $b > m$ entonces f no es caótica.*

Demostración. De la anterior proposición tenemos que $Per(f) \cap [0,a] = \{x_0\}$, entonces $Per(f)$ no es un conjunto denso de $[0,1]$ y f_{ab} no es caótica. □

4.2. $b = m$

La condición $b = m = 1 - a + a^2$ define el límite inferior de la región que estamos considerando en esta sección.

Al igual que la sección anterior tomemos un caso particular. Sea $b = \frac{7}{9}$ y $a = \frac{1}{3}$, y $1 - a + a^2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9} = b$ hallemos f.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7}{9} + \frac{2}{3}x, & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{3}; \\ \frac{3-3x}{2}, & si \quad \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

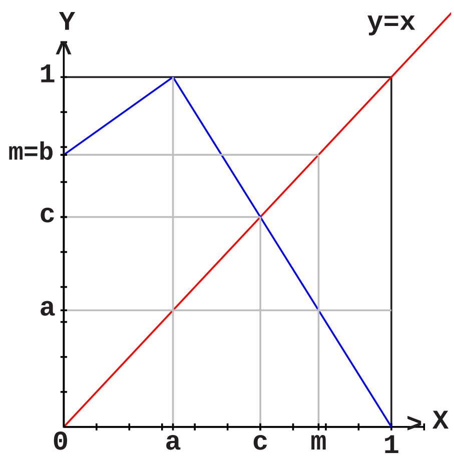

Figura 4.6: Gráfica de f_{ab} con $a = \frac{1}{3}$ y $b = \frac{7}{9}$

Calculando el punto fijo $c = \frac{1}{2-a} = \frac{3}{5}$. En la gráfica de f (ver figura 4.6) observamos que

- si $x \in [0, \frac{1}{3}]$ entonces $f(x) \in [\frac{7}{9}, 1] \subset [\frac{1}{3}, 1]$,
- si $x \in [\frac{1}{3}, \frac{7}{9}]$ entonces $f(x) \in [\frac{1}{3}, 1]$,

- si $x \in [\frac{7}{9}, 1]$ entonces $f(x) \in [0, \frac{1}{3}]$.

En general para todo $0 < a < 1$ y $0 \leq b \leq 1$ tal que $b = m$ tenemos que si $x \in [0, a]$, $f(x) \in [b, 1] \subseteq [a, 1]$, si $x \in [a, b] = [a, m]$ por lo tanto $f(x) \in [a, 1]$, si $x \in [b, 1] = [m, 1]$ entonces $f(x) \in [0, a]$. De lo anterior tenemos que :

$$f^2(x) : \begin{cases} \frac{1}{3} - x, & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{3}; \\ \frac{-3}{4} + \frac{9x}{4}, & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq x < \frac{7}{9}; \\ \frac{16}{9} - x, & \text{si} \quad \frac{7}{9} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

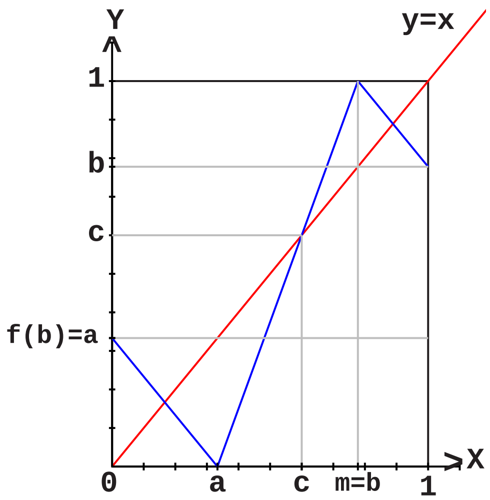

Figura 4.7: Gráfica de f^2_{ab} con $a = \frac{1}{3}$ y $b = \frac{7}{9}$

En la gráfica de f^2 (figura 4.7) observamos que $f^2([0, \frac{1}{3}]) = [0, \frac{1}{3}]$, además notamos que f^2 tiene dos puntos periódicos de periodo dos; esos puntos son: $x = \frac{1}{6}$, y $x = \frac{8}{9}$. Al graficar f^3 (ver figura 4.8)no encontramos puntos de periodo tres, además la gráfica de f^4 (ver figura 4.9) nos muestra que exceptuando los dos puntos fijos de periodo dos, todos los puntos en $[0, a]$ y en $[b, 1]$, son de periodo cuatro. Con lo que resumiríamos la dinámica de f.

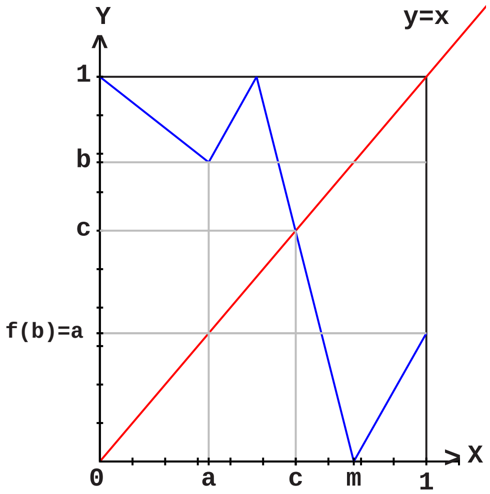

Figura 4.8: Gráfica de f_{ab}^{3} con $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = \dfrac{7}{9}$

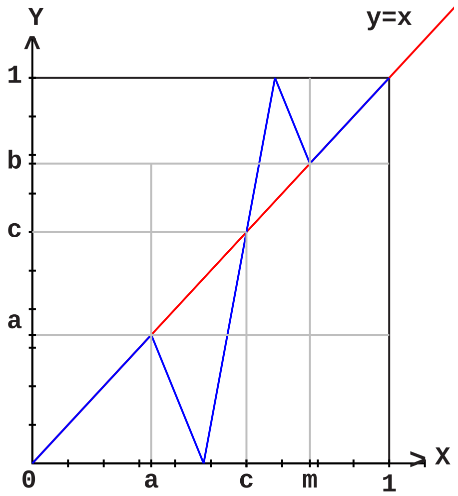

Figura 4.9: Gráfica de f_{ab}^{4} con $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = \dfrac{7}{9}$

Por otra parte tomemos $U = (0, \frac{1}{6}) \subset [0, \frac{1}{3}]$, entonces

$$\begin{aligned} f(0, \frac{1}{6}) \subset [\frac{7}{9}, 1] \quad f^2(0, \frac{1}{6}) &\subset [0, \frac{1}{3}] \\ f^3(0, \frac{1}{6}) \subset [\frac{7}{9}, 1] \quad f^4(0, \frac{1}{6}) &\subset [0, \frac{1}{3}] \end{aligned}$$

Se puede probar que

$$f^{2n}([0, \frac{1}{3}]) \subset [0, \frac{1}{3}] \quad \text{y} \quad f^{2n+1}([0, \frac{1}{3}]) \subset [\frac{7}{9}, 1].$$

Luego $U \cap [0,1] = (0, \frac{1}{6})$ a su vez $f^n(U \cap [0,1]) = [0, \frac{1}{6}]$ si n es impar y $f^n(U \cap [0,1]) = [0, \frac{1}{3}]$ si n es par. Tomando el intervalo abierto $V = (\frac{1}{3}, \frac{7}{9})$ tenemos que $V \cap [0,1] = (\frac{1}{3}, \frac{7}{9})$, con lo que podemos concluir que $f^n(U \cap [0,1])$ y $V \cap [0,1]$ no tienen punto en común, por lo tanto f no es topológicamente transitiva. En este caso particular f no es caótica porque no es transitivamente topológica.

A continuación presentaremos unas proposiciones que nos permiten analizar la subfamilia de funciones cuando $b = m$.

Proposición 4.2.1. *Sea $b = m$. Para todo $x \in [0, a]$ entonces*

$$f^2([0, a]) = [0, a]$$

Demostración. $f^2([0, a]) = [f^2(a), f^2(0)]$ porque f^2 es decreciente en [0,a], además $f^2(0) = f(f(0)) = f(b) = f(m) = a$ y $f^2(a) = f(f(a)) = f(1) = 0$, luego $f^2([0, a]) = [f^2(a), f^2(0)] = [0, a]$. □

Las siguientes proposiciones nos permiten demostrar que si $b = m$, hay un punto $x_0 \in [0, a]$ de periodo dos que no es atractor y que todo punto en $[0, a] \cup [b, 1]$ exceptuando x_0 tiene periodo 4.

Proposición 4.2.2. *Si $b = m$. Sea $x \in [0, a]$ entonces $f^2(x) = a - x$*

Demostración. Para todo $x \in [0,a]$ tenemos $f(x) = b + \frac{1-b}{a}x$, luego, $f(x) \in [f(0), f(a)]$ por ser f creciente en $[0,a]$. Además $f(0) = b$ y $f(a) = 1$, por lo tanto $f(x) \in [b,1] = [1-a+a^2,1]$, como

$$f(x) = b + \frac{1-b}{a} \in [1-a+a^2,1] \subseteq [a,1].$$

Entonces $f^2(x) = \dfrac{1-(b+\dfrac{(1-b)x}{a})}{1-a} = \dfrac{a-ab-(1-b)x}{1-a} = \dfrac{(1-b)(a-x)}{a(1-a)}$

Además $1-b = a(1-a)$, así $f^2(x) = \dfrac{(1-(1-a+a^2))(a-x)}{a(1-a)} = a-x$ □

Proposición 4.2.3. *Si $b = m$ existe un $x_0 \in [0,a]$ tal que $f^2(x_0) = x_0$*

Demostración. Hallemos x_0 tal que $f^2(x_0) = x_0$, luego $a - x_0 = x_0$, por tanto $x_0 = \frac{a}{2}$. Además $x_0 > 0$ porque $a > 0$ y $x_0 < a$ ya que $a < 2a$, de modo que podemos concluir que existe un y solo un $x_0 = \frac{a}{2} \in [0,a]$ tal que $f^2(x_0) = x_0$. □

Proposición 4.2.4. *Si $b = m$ existe un $x_0 \in [b,1]$ tal que $f^2(x_0) = x_0$*

Demostración. Calculemos x_0 tal que $f^2(x_0) = x_0$, así $x_0 = b + 1 - x_0$, entonces $x_0 = \frac{b+1}{2}$. Por otra parte como $b < 1$ luego $\frac{b+1}{2} < 1$ y $\frac{b+1}{2} > b$. De lo anterior tenemos que existe un y solo un $x_0 = \frac{b+1}{2} \in [b,1]$ tal que $f^2(x_0) = x_0$. □

Proposición 4.2.5. *Sea $b = m$, si $x \in [0,a] \bigcup [b,1]$, entonces $f^4(x) = x$*

Demostración. Si $x \in [0,a]$ de la proposición 4.2.2 tenemos que

$$f^2(x) = a - x, \text{ luego } f^4 = f^2(f^2(x)) = x.$$

Por otra parte, si $b = m$ luego $f(x) = \frac{1-x}{1-a}$, por consiguiente

$$f(x) \in [0,a] \;\; f^2(x) = b + \frac{1-b}{a}\frac{1-x}{1-a} = b + 1 - x,$$

además $f^2(x) \in [b,1]$ y $f^3(x) = \dfrac{1-(b+1-x)}{1-a}$, pues $f^3(x) \in [0,a]$ y $f^4(x) = b + \dfrac{1-b}{a}\dfrac{-b+x}{1-a} = b - b + x = x.$
De allí tenemos que para todo $x \in [b,1]$ $f^4(x) = x$ $\square$

De las proposiciones anteriores tenemos que exceptuando los dos puntos de periodo dos todo $x \in [0,a] \cup [b,1]$ es de periodo cuatro.

Proposición 4.2.6. *Sea $b = m$ y $J = [e,d] \subset [0,a]$. Para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$f^n[e,d] \cap (a,b) = \phi$$

Demostración. Sea $[e,d] \subset [0,a]$, luego $f([e,d]) \subset [b,1]$, $f^2([e,d]) \subset [0,a]$, $f^3([e,d]) \subset [b,1]$, $f^4([e,d]) \subset [0,a]$. En general si $n \in \mathbb{N}$ $f^{2n}[e,f] \subset [0,a]$ y $f^{2n+1}[e,f] \subset [b,1]$, por lo tanto para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f^n[e,d] \cap (a,b) = \phi$ $\square$

De la proposición anterior tenemos que f no es topológicamente transitiva por lo tanto f no es caótica.

4.3. $c < b < m$

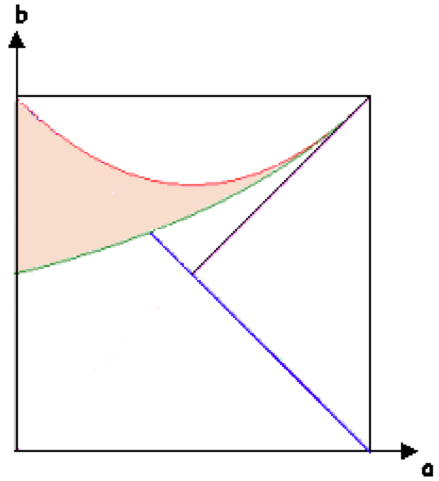

Figura 4.10: Región con $c < b < 1 - a + a^2$

Recordemos que c es punto fijo y que $m = 1 - a + a^2$ luego $f(m) = a$. Además como $a < c$ y $c < b < m$ entonces $f(b) = \dfrac{1-b}{a} > a$.

Para abordar esta región consideremos $a = \frac{1}{2}$, luego $c = \dfrac{1}{2-a} = \dfrac{2}{3}$ y $m = 1 - a + a^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, por lo tanto tomemos $b = \frac{7}{10}$, así:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7}{10} + \frac{3}{5}x, & si \;\; 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ \\ 2 - 2x, & si \;\; \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

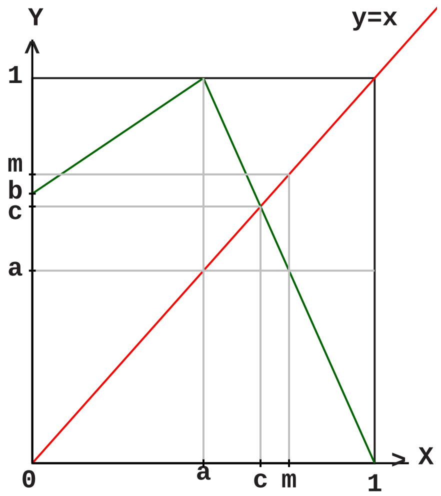

Figura 4.11: Gráfica de f_{ab} con $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{7}{10}$

En la gráfica anterior observamos que

- $f([0,a]) = f([0,\frac{1}{2}]) = [\frac{7}{10}, 1] = [b,1] \subset [a,1]$,
- $f([a,m]) = f([\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]) = ([\frac{1}{2}], 1) = ([a,1])$
- $f([m,1]) = f([\frac{3}{4}, 1]) = [0, \frac{1}{3}] = f([0,a])$

Teniendo en cuenta lo anterior hallemos f^2

$$f^2(x):\begin{cases} \dfrac{3}{5}-\dfrac{6x}{5}, & \text{si} \quad 0\le x<\dfrac{1}{2};\\[2ex] -2+4x, & \text{si} \quad \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{4};\\[2ex] \dfrac{19}{10}-\dfrac{6x}{5}, & \text{si} \quad \dfrac{3}{4}\le x\le 1. \end{cases}$$

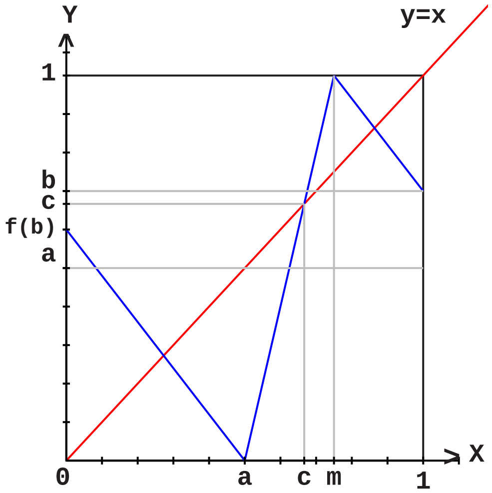

Figura 4.12: Gráfica de f^4_{ab} con $a=\dfrac{1}{2}$ y $b=\dfrac{7}{10}$

Los puntos periódicos de periodo 2 son $x=\dfrac{3}{11}$ y $x=\dfrac{19}{22}$.
Se tiene que

$$\begin{aligned} f(0,\frac{7}{10}) &\subset (\frac{7}{10},1)\\ f^2(0,\frac{7}{10}) &= (0,\frac{3}{5})\\ f^3(0,\frac{7}{10}) &= f(f^2(0,\frac{7}{10}))=f(0,\frac{7}{10})\subset[\frac{7}{10},1]\\ f^4(0,\frac{7}{10}) &= f(f^3(0,\frac{7}{10}))\subset f([\frac{7}{10},1])\subset[0,\frac{3}{5}] \end{aligned}$$

En general podemos probar que

$$f^{2n}(0, \frac{7}{10}) \subset [0, \frac{3}{5}] \qquad\qquad f^{2n+1}(0, \frac{7}{10}) \subset [\frac{7}{10}, 1].$$

Si tomamos U y V intervalos abiertos tal que $U = (0, \frac{7}{10})$ y $V = (\frac{3}{5}, \frac{7}{10})$, tenemos que $U \cap [0,1] = (0, \frac{7}{10})$ y $V \cap [0,1] = (\frac{3}{5}, \frac{7}{10})$. A su vez $f^n(U \cap [0,1]) \subset [0, \frac{3}{5}]$ si n es par y $f^n(U \cap [0,1]) \subset [\frac{7}{10}, 1]$ si n es impar a su vez $V \cap [0,1] = (\frac{3}{5}, \frac{7}{10})$, con lo que podemos concluir que $f^n(U \cap [0,1])$ y $V \cap [0,1]$ no tienen puntos en común, por lo tanto f no es topológicamente transitiva.

Las siguientes proposiciones nos ayudan a formalizar nuestro análisis.

Proposición 4.3.1. *Sea $c < b < m$ entonces $f^2(b) \geq b$.*

Demostración. Como $a < c < b < m$, se tiene que $a < f(b) = \dfrac{1-b}{1-a}$ y $f^2(b) = \dfrac{b-a}{(1-a)^2}$.

Por otra parte de $c = \dfrac{1}{2-a} \leq b$ y $0 < a < 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} b(2-a) &\geq 1, \\ b(2a-a^2) &\geq a, \\ b(1-1+2a-a^2) &\geq a \\ b - b(1-2a+a^2) &\geq a, \\ b - b(1-a)^2 &\geq a \\ b-a &\geq b(1-a)^2, \end{aligned}$$

por lo tanto $f^2(b) = \dfrac{b-a}{(1-a)^2} \geq b.$ □

Proposición 4.3.2. *Sea $c < b < m$ entonces* $f(b) < b$.

Demostración. De $b > c$ se tiene que $b \geq \dfrac{1}{2-a}$, luego $1 \leq b(2-a)$; igualmente

$$\begin{aligned}
1 - 2b + ab &\leq 0 \\
2 - 2b + ab &\leq 1 \\
2 - 2b + ab - a &\leq 1 - a \\
(2-a) - b(2-a) &\leq 1 - a \\
(1-b)(2-a) &\leq 1 - a \\
f(b) = \frac{1-b}{1-a} &\leq \frac{1}{2-a} = c
\end{aligned}$$

Como $f(b) \leq c$ y $c \leq b \leq m$ entonces $f(b) \leq b$. □

La siguiente proposición nos muestra que f^2 tiene su dinámica en $[0, f(b)]$

Proposición 4.3.3. *Sea $c < b < m$ entonces* $f^2([0, f(b)]) = [0, f(b)]$.

Demostración. De $f(b) > a$ tenemos $f^2(b) = \dfrac{b-a}{(1-a)^2}$, además $a \in [0, f(b)]$, por lo tanto $[0, f(b)] = [0, a] \cup [a, f(b)]$ y $f([0, f(b)]) = f([0, a] \cup [a, f(b)])$, como $f(0) = b$ y $f(a) = 1$, tenemos:

$$f([0, f(b)]) = [b, 1] \cup [f^2(b), 1], \tag{4.3.1}$$

de la proposición anterior tenemos que $f^2(b) > b$, así $[f^2(b), 1] \subset [b, 1]$, por lo tanto

$$f([0, f(b)]) = [b, 1]. \tag{4.3.2}$$

Además $f(f([0, f(b)])) = f([b, 1]) = [0, f(b)]$, por lo tanto

$$f^2([0, f(b)]) \subseteq [0, f(b)] \tag{4.3.3}$$

□

De la ecuaciones 4.3.2 y 4.3.3 se tiene que $f[0, f(b)] = [b, 1]$;
$f^2[0, f(b)] = [0, f(b)]$;
$f^3[0, f(b)] = f(f^2[0, f(b)]) = f([0, f(b)]) = [b, 1]$;
$f^4[0, f(b)] = f(f^3[0, f(b)]) = f([b, 1)]) = [0, f(b)]$.
En general si n es impar $f^n[0, f(b)] = [b, 1]$; si n es par $f^n[0, f(b)] = [0, f(b)]$.

Proposición 4.3.4. *Sea $c < b < m$ entonces f no es topológicamente transitiva.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y U, V intervalos abiertos tales que $U \subset [0, f(b)]$, y $V \subset (f(b), b)$, tenemos $U \cap [0, 1] \subset [0, f(b)]$ y $V \cap [0, 1] \subset (f(b), b)$. Si n es impar $f^n(U \cap [0, 1]) \subset [b, 1]$, si n es par $f^n(U \cap [0, 1]) \subset [0, f(b)]$. Además como $f(b) < b$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ $f^n(U \cap [0, 1]) \cap (V \cap [0, 1]) = \phi$, con lo que concluimos que f no es topológicamente transitiva $\square$

Como f no es topológicamente transitiva entonces f no es caótica.

Lema 4.3.1. *Si $c < b < 1 - a + a^2$, entonces f no es caótica.*

Capítulo 5

Regiones para las cuales $b < c$

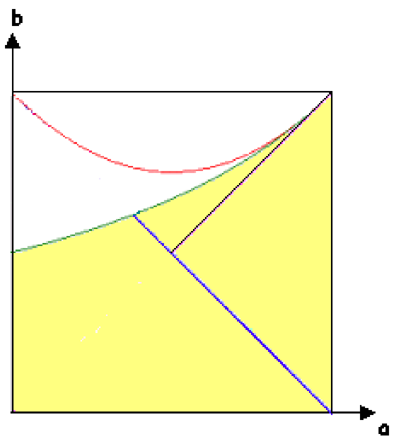

Figura 5.1: Región con $b < c$

Es útil determinar algunas consecuencias generales de la condición sobre b. En particular en cada una de esas regiones hay algunos conjuntos en los cuales f actúa caóticamente.

A continuación enunciaremos algunas proposiciones necesarias para determinar el comportamiento de las funciones en esta región.

Proposición 5.0.5. *Si* $b < c \quad y \quad c \in J$ *entonces existe un* $m \geq 0$ *tal que*

$[c, 1] \subset f^m(J)$

Demostración. Tomemos $J \subseteq [0,1]$ y $J = [e,d]$ con $e < d$ y $e \leq c < d$, tenemos que J no puede estar contenido en $[0,a]$ porque $c \in J$ y $c > a$. Luego ya sea que:

`i)` $1 \in f^m(J)$;

`ii)` $1 \in J$;

`iii)` $a \in J$;

`iv)` $J \subset [a,1]$.

`i)` Si $1 \in f^m(J)$. Como $c \in J$ y c es un punto fijo tal que $f^m(c) = c$, entonces $c \in f^m(J)$. Además tenemos que $1 \in f^m(J)$ y $c \in f^m(J)$, por lo tanto $[c,1] \subset f^m(J)$.

`ii)` Si $1 \in J$. Tomando $d = 1$ luego $J = [e,1]$, como $c \in J$ ya que $J = [e,c] \cup [c,1]$, por lo cual $f^0(J) = [e,c] \cup [c,1]$, por lo tanto si $m = 0$ $f^m(J) \supset [c,1]$

iii) Si $a \in J$, entonces $J = [e,a] \cup [a,c] \cup [c,d]$ así,
$f(J) = f([e,a]) \cup f([a,c]) \cup f([c,d])$. De $f([a,c]) = [c,1]$ tenemos que
$f(J) = f([e,a]) \cup [c,1] \cup f([c,d])$, luego para $m = 1$ $f^m(J) \supset [c,1]$

`iv)` $J \subset [a,1]$, por la proposición 3.0.3 tenemos que

$$|f(J)| = \frac{1}{1-a}|J| > |J|,$$

como $\dfrac{1}{1-a} > 1$ las imágenes se expanden exponencialmente hasta que para algún k ya sea que $1 \in f^k(J)$ o $a \in f^k(J)$ lo cual completa la prueba.

$\square$

Proposición 5.0.6. *Asumamos $b < c$. Si $c \in J$ entonces hay un n tal que $f^n(J) = [0, 1]$.*

Demostración. De la proposición anterior tenemos que existe un $m > 0$ tal que

$$[c, 1] \subset f^m(J)$$
$$[0, c] \subset f^{m+1}(J)$$
$$[b, 1] \subset f^{m+2}(J)$$

Tenemos $b < c$, luego $b \leq a$ o $b > a$.

1. Si $b \leq a$ entonces de $[a, 1] \subset [b, 1] \subset f^{m+2}(J)$, así $[0, 1] \subset f^{m+3}(J)$ porque $f([a, 1]) = [0, 1]$, luego si $n = m + 3$, $f^n(J) = [0, 1]$.

2. Si $b > a$. Podemos escribir $[b, 1] = [b, c] \cup [c, 1]$ por $c \in J$. De $[b, c] \subset [a, c]$, por ser $a < b$ obtenemos $f([b, c]) \subset f([a, c]) = [c, 1]$, por consiguiente $f([b, c]) = [c, 1]$ y $|f([b, c])| = \dfrac{1}{1-a}|b - c|$ por la proposición 3.0.3, entonces $a \in f^2([b, c])$, ó $|f^2[b, c]| = \dfrac{|b - c|}{(1-a)^2}$ por la proposición 3.0.4.

De lo anterior las imágenes $[b, c]$ se expanden exponencialmente bajo repetidas aplicaciones de f^2 hasta que contiene a $[a, c]$. De $[c, 1] \subset f^2([c, 1])$, tenemos que $[a, 1] \subset f^p(J)$ para algún p. Luego $[0, 1] \subset f^{p+1}(J)$. $\square$

Proposición 5.0.7. *Si para todo intervalo $J \subset [0,1]$ existe un n tal que $f^n(J) = [0,1]$ entonces f es caótica.*

Demostración. Demostremos que f es caótica

i) Demostremos que f es topológicamente transitiva

Sean U y V intervalos abiertos en [0,1], tales que $U \cap [0,1] \neq \phi$ y $V \cap [0,1] \neq \phi$. Tenemos que $U \cap [0,1] \subset [0,1]$, por la proposición anterior existe un $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $f^{n_1}(U \cap J) = [0,1]$ y $V \cap J \subset [0,1]$. por lo tanto f es topológicamente transitiva.

ii) Demostremos la densidad de los puntos periódicos.

Sea U un intervalo abierto tal que $U \cap [0,1] \neq \phi$, entonces $U \cap [0,1] \subset [0,1]$, por hipótesis existe un n_1 tal que $f^{n_1}(U \cap [0,1]) = [0,1]$. La continuidad de f^{n_1} y el teorema del valor intermedio implican que para algún $x \in U \cap [0,1]$ $f^{n_1}(x) = x$, luego x es un punto periódico. Además $x \in U \cap [0,1]$ por lo tanto $x \in U$. De lo anterior tenemos que el conjunto de puntos periódicos es denso. □

Proposición 5.0.8. *Asumamos $b < c$.*

Definimos

$$S_0 = \{x \in S| \ \exists n > 0, \quad f^n(x) = c\}$$

tomemos $S = \overline{S_0}$. *Entonces f es caótica en S.*

Demostración. Tenemos que $f(S) \subset S$ porque $f(S_0) \subset S_0$ y f es continua. Tomando $c_0 = c$, construyamos $c_1, c_2, c_3, ...$ satisfaciendo que $f(c_{k+1}) = c_k$.

Sea $d \in [0,a]$ tal que $f(d) = c$ y $c_1 = d$. Ahora hallemos $c_3 \in [0,a]$ tal que $f(c_3) = c_2$. Como el valor absoluto de la pendiente de f en $[0,a]$ es mayor que 1, repitiendo este proceso producimos una secuencia infinita de puntos que se acercan en espiral a (c,c) y nunca es cíclico.

Probemos que f es topológicamente transitiva en S. Tomemos U y V intervalos abiertos. Supongamos que $x \in U \cap S$ y $y \in V \cap S$. Como S es la clausura de S_0 hay un $x_0 \in U \cap S_0$ y $y_0 \in V \cap S_0$.
Demostremos que hay un $p > 0$ tal que $y_0 \in f^p(U \cap S)$. Tomemos $k > 0$ y $m > 0$ tal que $f^k(x_0) = c$ y $f^m(y_0) = c$. Sea J un intervalo tal que $x_0 \in J \subset U$ por lo tanto $c \in f^k(J)$ y por la proposición 5.0.6 existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k+n}(J) = [0,1]$, entonces hay un $z \in J$ tal que $f^{k+n}(z) = y_0$ y $f^{k+n+m}(z) = c$ por lo tanto $z \in S$. Esto prueba que $y_0 \in f^{k+n}(J \cap S) \subset f^{k+n}(U \cap S)$, como es requerido. En consecuencia f es topológicamente transitiva en S.

Ahora probemos que los puntos periódicos son densos en S.
Sea U un intervalo abierto, tal que $U \cap S \neq \phi$, entonces $x_0 \in S_0$. Por la proposición 5.0.6 hay un $n > 0$ tal que $f^n(J) = [0,1]$. Sea $J_1 \subset J$, tal que $x_1 \in S_0$, de la misma manera hay un $J_2 \subset J$ tal que $f^n(J_2) = J_1$ y $x_2 \in J_2 \cap S_0$, tal que $f^n(x_2) = x_1$ y así sucesivamente. Sea J_∞ la intercepción de todos los J_k, entonces $f^n(J_\infty) \subset J_\infty$ porque si x está en cada J_{k+1}, luego $f^n(x)$ está en todo J_k. Ya que $\{x_k\} \subset J \cap S$ este tiene un punto de acumulación $x_\infty \in J \cap S$. Pero x_∞ también debe estar en cada $J_k \cap S$ luego $x_\infty \in J_\infty \cap S$. Si J_∞ contie-

ne más puntos que x_∞, también contiene un punto en S_0 y finalmente como consecuencia a toda la función $[0,1]$, lo cual contradice $f^n(J_\infty) \subset J_\infty \subsetneqq J$. Así $f^n(x_\infty) = x_\infty$. Y de $x_k \to x_\infty$ tenemos que $x_\infty \in J \cap S$

$\square$

5.1. $b < c$ y además $b < 1 - a$ ó $b \geq 1 - a$ y $b > a$

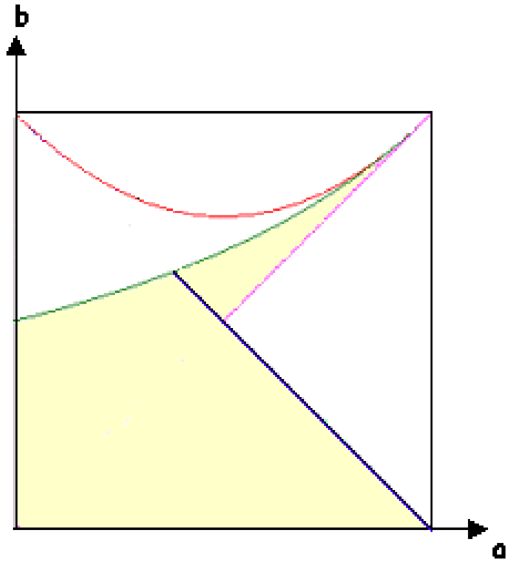

Figura 5.2: Región con $b < c$ y además $b < 1 - a$ ó $b \geq 1 - a$ y $b > a$

La región que ahora analizaremos es la definida por $b < c$ y además $b < 1 - a$ ó $b \geq 1 - a$ y $b > a$. La condición $b < 1 - a$ garantiza que $\dfrac{1-b}{a}$, (la pendiente del lado izquierdo del gráfico de f), es mayor que 1. Además la condición $b > a$ y $b \geq 1 - a$ implica que si $x < a$, entonces $f(x) > a$.

Una función conocida que cumple con las condiciones de esta sección es la función Tienda $T(x) : I \to I$

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & si \;\; 0 \le x < \dfrac{1}{2}; \\ \\ 2-2x, & si \;\; \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Ésta es la gráfica:

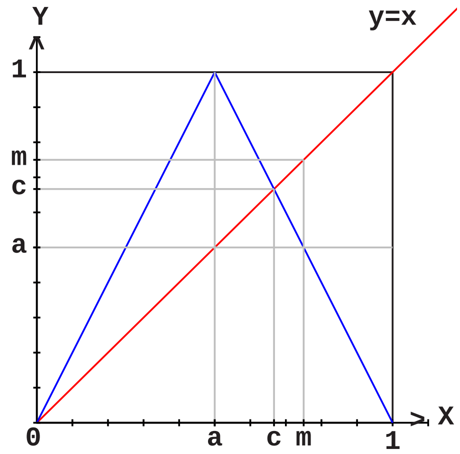

Figura 5.3: Gráfica de $T(x)$

Tomemos el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, al aplicar T obtenemos todo el intervalo I, así:

$$T^2([0, \frac{1}{2}]) = T([0, 1])$$

Por lo tanto la gráfica de T^2 tiene un pico similar a la gráfica de T, la diferencia es que T^2 lo tiene más comprimido en la base. Esto sucede también en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, de aquí que la gráfica de T^2 (ver figura 5.4) tiene dos picos de altura 1.

La gráfica T^3 (ver figura 5.5) tiene $4 = 2^2$ picos, el doble de los que tiene T^2. Podemos conjeturar que la gráfica de T^4 tiene 2^3, el doble de T^3, picos similares de altura 1 colocados sobres 8 intervalos de longitud $\frac{1}{8}$. Ahora con un pequeño salto la gráfica de T^m tiene 2^{m+1} picos de altura 1, colocados en 2^{m-1} intervalos semejantes de longitud $\frac{1}{2^{m-1}}$.

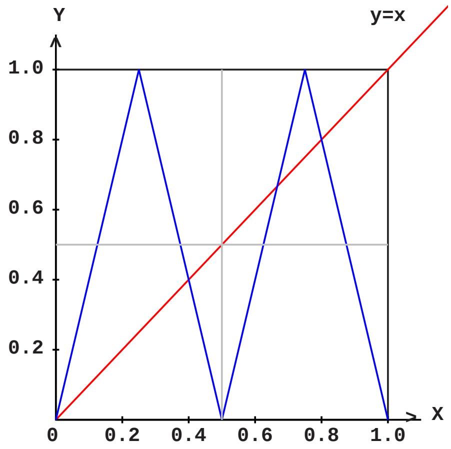

Figura 5.4: Gráfica de $T^2(x)$

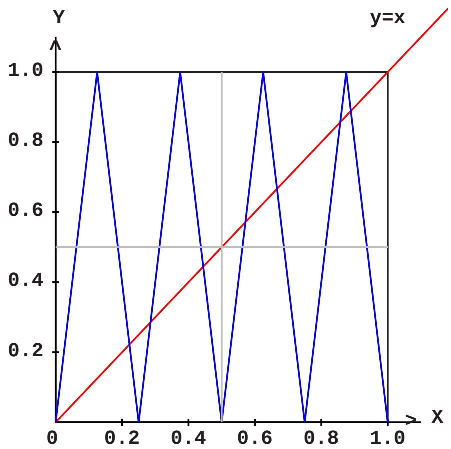

Figura 5.5: Gráfica de $T^3(x)$

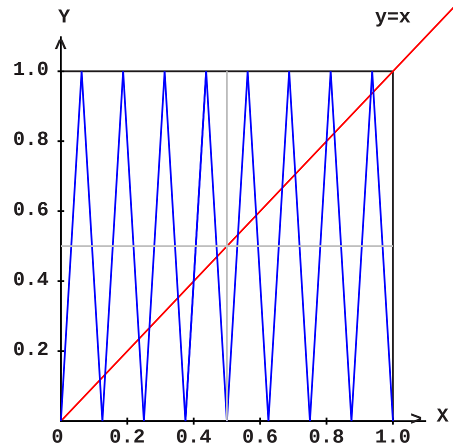

Figura 5.6: Gráfica de $T^4(x)$

Así, tomemos $m \in \mathbb{N}$. Como los puntos fijos coinciden con los puntos donde su gráfica corta a la recta identidad, T^m tendrá tantos puntos fijos como cortes. Cada pico de T^m corta dos veces la recta $y = x$, T^m tiene 2^{m+1} picos. Por lo tanto la función T^m tiene 2^m puntos fijos. Lo anterior es importante ya que todos los puntos fijos de T^m son puntos periódicos de T. Los 2^m puntos fijos que tiene T^m los tiene repartidos de la siguiente manera:

$$\text{Sea } 0 < j < 2^{m-1}. \text{ En cada intervalo de la forma } [\frac{j}{2^{m-1}}, \frac{j+1}{2^{m-1}}],$$

como la función tiene un pico, por lo tanto en cada mitad de ese intervalo,

$$[\frac{j}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m}] \text{ ó } [\frac{j}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m}, \frac{j+1}{2^{m-1}}],$$

T^m tiene al menos un punto fijo. Entonces si $0 < k < 2^{m-1}$, en cada intervalo de la forma

$$[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]$$

La función tiene al menos un punto periódico. De aquí podemos concluir que el conjunto $Per(f)$ es denso en I.

Por otra parte para todo intervalo $(a, b) \subset I$, $a < b$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(a, b) = I$. Es decir que en una cantidad finita de iteraciones de T el intervalo (a, b) se transforma en el intervalo I

Lema 5.1.1. *Si $b < c$ y dado $d \in [0, a]$, tal que $f(d) = c$. Si $a \in J \subset [d, c]$, entonces $|f^2(J)| \geq \dfrac{c}{c-d}|J|$.*

Demostración. Supongamos que $J = [d, c]$ o $J \subset [d, c]$

i) Tomemos $a \in J = [d, c]$ como $d < a$, entonces $[d, c] = [d, a] \cup [a, c]$, luego $f([d, c]) = f([d, a]) \cup f([a, c]) = [c, 1]$, así $f^2([d, c]) = f([c, 1]) = [0, c]$ en consecuencia $|f^2(J)| = \dfrac{c}{c-d}|J|$

ii) Sea $J = [p, q] \subset [d, c]$ tal que $a \in J$ por lo tanto $J = [p, q] = [p, a] \cup [a, q]$, pues $p \in [0, a]$, *y* $q \in [a, 1]$ entonces $f(p) = b + \dfrac{1-b}{a}p$ y $f(q) = \dfrac{1-q}{1-a}$.

A continuación tomaremos los siguientes casos: $f(p) = f(q)$ y $f(p) \neq f(q)$.

Sí $f(p) = f(q)$, así $f(J) = f([p, q]) = f([p, a] \cup [a, q]) = [f(q), 1] = [f(p), 1]$ y $f^2(J) = f([f(p), 1]) = [0, f^2(p)] = [0, f^2(q)]$, además $f^2(q) = \dfrac{q-a}{(1-a)^2}$, por lo tanto

$$|f^2(J)| = \frac{q-a}{(1-a)^2} \tag{5.1.1}$$

Por otra parte $\dfrac{c}{c-d} = \dfrac{1-b}{1-b-a+2ab-a^2b} = \dfrac{1-b}{(1-a)(1-b+ab)}$.

Como $f(p) = f(q)$ entonces $b + \dfrac{1-b}{a}p = \dfrac{1-q}{1-a}$, así $p = \dfrac{a(1-q-b(1-a))}{(1-b)(1-a)}$

y $|J| = q - p = \dfrac{(q-a)(1-b+ab)}{(1-b)(1-a)}$. Por consiguiente

$$\frac{c}{c-d}|J| = \frac{1-b}{(1-a)(1-b+ab)} \frac{(q-a)(1-b+ab)}{(1-b)(1-a)} = \frac{q-a}{(1-a)^2} \tag{5.1.2}$$

De las ecuaciones (5.1.1) y (5.1.2) tenemos que $f^2(J) = \dfrac{c}{c-f}|J|$

Ahora si $f(p) \neq f(q)$, J está contenido en un intervalo más grande $J \subset S$ tal que $S = [f(p_1), f(q_1)]$, tomando $f(p_1) = f(q_1)$ con $p = p_1$ $q = q_1$. Por lo tanto $f(J) = f(S)$, luego,

$$|f^2(J)| = |f^2(S)| = \frac{c}{c-d}|S| > \frac{c}{c-d}|J|.$$

□

Proposición 5.1.1. *Sea $b < c$ ya sea $b < 1-a$ o $b > a$ entonces para todo intervalo $J \subset [0,1]$ hay algún n tal que $f^n(J) = [0,1]$.*

Demostración. Dado $d \in [0,a]$ tal que $f(d) = c$ por la proposición 5.0.6 si $c \in J$ ó $d \in J$ existe un $n > 0$ tal que $f^n(J) = [0,1]$. Por otra parte ya sea que

`i)` $J \subset [d,c]$

`ii)` $J \subset [c,1]$

`iii)` $J \subset [o,d]$

En el caso `i)` tenemos que $|f(J)| = \frac{1}{1-a}|J|$ por el lema anterior.
En el caso `ii)` por la proposición 3.0.3 tenemos que $|f(J)| = \frac{1}{1-a}|J|$
Ahora consideremos el caso `iii)`.Si $b < 1-a$ entonces $|f(J)| = (\frac{1-b}{a})|J|$ y $\frac{(1-b)}{a} > 1$. Si $b > a$ como $J \subset [0,d]$, así $f(J) \subset [a,1]$. Por lo tanto $|f^2(J)| = \frac{1-b}{a}\frac{1}{1-a}|J|$. Además el factor $\frac{1-b}{a(1-a)}$ es mayor que 1 porque $b < c = \frac{1}{2-a} < 1-a+a^2$, entonces $b < 1-a+a^2$, por lo tanto $1 < \frac{1-b}{a(1-a)}$.

Así las imágenes de cualquier intervalo que satisfaga las condiciones $i)$, $ii)$, $iii)$ se expanden hasta ser suficientemente largos, hasta contener a c ó d. Por la proposición 5.0.6. si contiene a c ó d (recordemos que $d \in [0, a]$ y $f(d) = c$

existe un $n > 0$ tal que $f^n(J) = [0, 1]$ con lo que concluimos la prueba.

$\square$

La anterior proposición muestra que si se encuentra cualquiera de esas condiciones, entonces para cada intervalo J, existe n tal que $f^n(J) = [0, 1]$. Por las proposiciones 5.0.7 implica entonces que f es caótica en todos $[0, 1]$ y que no hay ninguna órbita periódica atractora.

5.2. $1 - a \leq b \leq a$

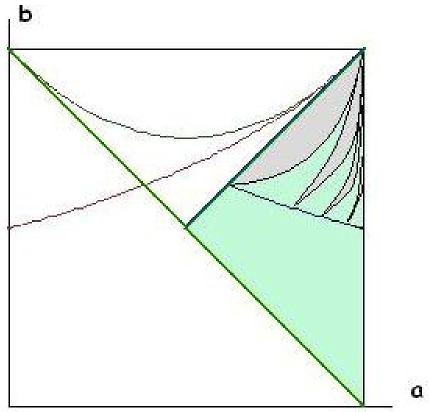

Figura 5.7: Región con $b < c$

La figura 5.7 muestra la región en la cual $1 - a \leq b < a$. Los pétalos sombreados en la figura anterior se extienden abajo desde (1,1) a la curva definida por $b > \dfrac{1}{1+a}$.

Por la proposición 5.0.8 sabemos que hay caos en un subconjunto de $[0, 1]$ siempre que(a,b) este en esta región.

Sin embargo si (a,b) está en uno de los infinitos pétalos sombreados en la figura 5.7 luego la función tiene un ciclo atractivo y no es caótica. El diagrama a la izquierda en la figura 5.8 muestra una órbita típica siendo atraída por un ciclo 4.

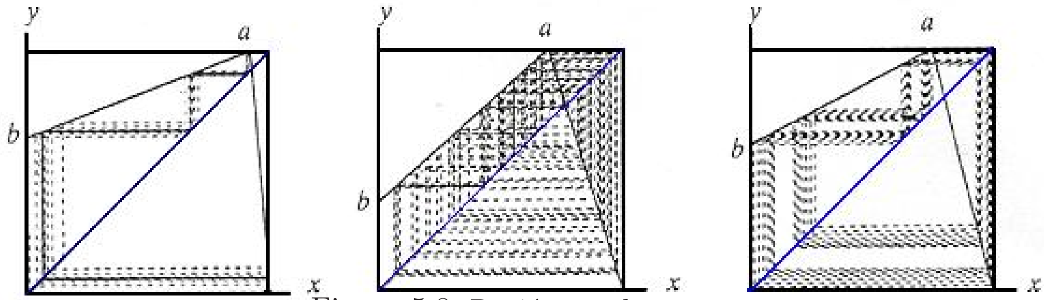

Figura 5.8: Región con $b < c$

Si (a,b) esta fuera de los pétalos no hay ciclos atractivos y f es caótica en todo [0,1], ó una potencia de f es caótica en un subintervalo como esta ilustrada en las órbitas mostradas en la mitad y en el lado derecho de la figura 5.8.

En [1], Susan Bassein demuestra que si m es el entero más pequeño para el cual $f^m(0) > a$ y $(\frac{1-b}{a})^m > (\frac{(1-b+ab)(1-a)}{a})$, entonces una vez más las imágenes de cada intervalo se expanden a todo [0,1] y f es caótica en todo $[0,1]$. De lo anterior podemos decir que esta subfamilia tiene funciones caóticas y no caóticas

Bibliografía

1. BASSEIN, Susan. *The dynamics of a family of one-dimensional maps.* The America Mathematical Monthly, volumen 105 Number 2, (1998), 119-131.

2. R. L. , Devaney, *And introduction to Chaotic Dynamical System*, Benjamin/Cummming, (1986)

3. INGRAM, William y Mahavier William. *Interesting Dynamics and Inverse Limit Family of One-Dimensional Maps.* (En prensa)

4. MÉNDEZ LANGO, Héctor. *Las Quebraditas(Propiedades dinámicas de una peculiar familia de funciones en el Intervalo).* Miscelánea matemática. Sociedad Mexicana de Matemáticas N°35, (2002), 77-98.

5. MÉNDEZ LANGO, Héctor. *Iteraciones de Funciones.* (Notas para un curso de introducción a los sistemas dinámicos discretos). Vínculos matemáticos N°4, (2002)