EVIDENCIAS DEL TRÁNSITO ENTRE LOS MODOS DE PENSAMIENTO GEOMÉTRICO, ARITMÉTICO Y ESTRUCTURAL EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA Y PRIMER AÑO DE UNIVERSIDAD: EL CASO DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

ÁLVARO ARDILA CORZO
CLAUDIA MONTAÑEZ VILLAMIZAR

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

EVIDENCIAS DEL TRÁNSITO ENTRE LOS MODOS DE PENSAMIENTO GEOMÉTRICO, ARITMÉTICO Y ESTRUCTURAL EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA Y PRIMER AÑO DE UNIVERSIDAD: EL CASO DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

ÁLVARO ARDILA CORZO
CLAUDIA MONTAÑEZ VILLAMIZAR

Trabajo para optar al título de
Especialistas en Educación Matemática

Director:
DR. JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA

Codirectora:
M. en C. SOLANGE ROA FUENTES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

Dedicatoria

"A Dios, que me permitió la luz para prepararme y cumplir la misión que me encomendó.
A mis padres Álvaro y Dulcelina, por su amor y apoyo incondicional, me han dado lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi perseverancia, ¡los amo!
A mi esposa, Ismelda, por su amor y cariño, por su lealtad y serenidad que me alientan a la vida.
A mis queridos hermanos, Clemencia, Yaqueline, Luzmila, Milena y Edwin, y todos mis sobrinos que con su apoyo siempre estuvieron dándome ánimo para continuar luchando sin dejarme vencer. Sin ustedes no hubiese podido hacer realidad este anhelo.
A mi tía Celinda (QEPD) quien siempre me motivó a seguir adelante y a quien prometí que terminaría mis estudios. Promesa cumplida.
A mis compañeros y amigos, por su compañía en mi afán por alcanzar mi sueño."

Álvaro Ardila Corzo.

"Agradezco a Dios por la esperanza que me mueve y el amor que me da felicidad.
A mis padres, Edilio (†) y Patricia por su amor, comprensión y paciencia.
A mi esposo, Luis Francisco, tu amor me fortalece y me da la esperanza de continuar
A mis hijos, Jesús Daniel y María Juliana, por ser la estrella polar del norte, en mi horizonte.
A mis hermanos, Javier, Fernando y Urbano, por sus ánimos.
A las personas cercanas en mi familia, su compañía alimenta la sed de mejorar cada día."

Claudia Montañez Villamizar

Agradecimientos

Damos gracias, en primer lugar a Dios, Padre de la Vida, por darnos la fortaleza para continuar y la perseverancia para seguir a pesar de las circunstancias.

A nuestros estudiantes por regalarnos una parte de su valioso tiempo y energía necesaria para la aplicación de las actividades.

A Solange, quien nos oriento con sus mejores aportes académicos, su dedicación, apoyo y aprecio, logrando despertar en nosotros la motivación para trabajar y la capacidad para concluir.

A la Escuela de Matemáticas, por ofrecernos a través de sus maestros, la oportunidad de crecer en el proceso de formación, de nuestro ser de educadores, dimensión trascendente en nuestras vidas

A todas las personas que nos rodean, con su cariño, su compañía y apoyo, gracias a ellas, encontramos mil motivos para empezar cada nuevo día.

Contenido

RESUMEN

TITULO: **EVIDENCIAS DEL TRÁNSITO ENTRE LOS MODOS DE PENSAMIENTO GEOMÉTRICO, ARITMÉTICO Y ESTRUCTURAL EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA Y PRIMER AÑO DE UNIVERSIDAD: EL CASO DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS** *

AUTORES: ARDILA CORZO, Álvaro. MONTAÑEZ VILLAMIZAR, Claudia **

PALABRAS CLAVES:

Pensamiento, geométrico, aritmético, estructural, tránsito.

El presente trabajo pretende responder a la pregunta *¿Qué dificultades se presentan en estudiantes del grado noveno y los estudiantes de Algebra Lineal II, al transitar entre los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural al resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas e interpretar su solución?* Por tanto el interés se encuentra centrado en determinar evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento.

Para el desarrollo del trabajo se interactuó con un grupo de estudiantes de noveno grado de básica secundaria y segundo semestre de programas presenciales de pregrado. Se aplicó una prueba diagnóstica a partir de la cual, se diseñaron actividades para realizar una entrevista didáctica con seis de los estudiantes antes mencionados, tres de cada grupo. La lectura y análisis de las respuestas de los estudiantes, bajo la óptica de los modos de pensamiento en Álgebra lineal, expuestos por Sierpinska (2000): pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, permitieron detectar fortalezas y debilidades que se presentan, cuando los estudiantes se enfrentan a la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. La búsqueda de evidencias del tránsito entre los diversos procesos típicos de cada modo de pensamiento, que deben darse durante la solución de los sistemas de ecuaciones, aportó el espacio para explicar las falencias encontradas.

Finalmente se plantean algunas observaciones de tipo metodológico, con el propósito de mejorar el proceso de acompañamiento que deben orientar los maestros, para la construcción pertinente de conocimiento matemático en los estudiantes.

---

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias – Escuela de Matemáticas – Especialización en Educación Matemática – Director CAMARGO GARCÍA, Javier Enrique. – Codirectora: ROA FUENTES, Solange.

ABSTRACT

TITLE: **EVIDENCE OF THE SHIFT BETWEEN THE GEOMETRIC, ANALITIC AND STRUCTURAL THINKING MODES IN HIGHSCHOOL AND FIRST COLLEGE YEAR STUDENTS: THE INSTANCE OF LINEAR EQUATION SYSTEMS WITH TWO UNKNOWN QUANTITIES. ***

PROPONENTS: ARDILA CORZO, Álvaro. MONTAÑEZ VILLAMIZAR, Claudia **

KEY WORDS:

Thinking, geometric, arithmetic, structural, shift.

This paper work attempts to establish what kind of difficulties emerge for ninth grade students and Linear Algebra II students while they shift between different synthetic-geometric, analytic-arithmetic and analytic-structural thinking modes when they solve and interpret two equations-two unknown quantities systems. Therefore we intended to establish evidences from the shift between the thinking modes.

The set forth of the present research basically was to work with a group of ninth grade students and a group of second semester students of different on-site degree programs. There was enforced a diagnostic test from wich there were designed a series of activities for a didactic interview that was carried out with six of the students mentioned above, three of each group.

With the reading and analysis of the results obtained from the standpoint of the thinking modes in Linear Algebra exposed by Sierpinska (2000): synthetic-geometric thinking, analytic-arithmetic, and analytic-structural, we were able to perceive strengths and weaknesses that students have when they analyze a solution from a lineal equation system with two unknown quantities. The search for evidences from the shift between the different typical processes of each thinking mode, which needs to be made within the settling of the lineal equation systems, granted a context where to make an explanation for the weaknesses found.

Finally there was submitted some remarks regarding to the type of methodology that is being applied, in order to improve the escort process that teachers have to carry out so that there will be a pertinent construction of mathematic knowledge in the students.

* Thesis

** Science Faculty – Mathematics School – Specialization in Mathematical Education – Director CAMARGO GARCÍA, Javier Enrique. – Codirector: ROA FUENTES, Solange.

INTRODUCCIÓN

El avance científico y tecnológico de los últimos años ha generado cambios en nuestra concepción sobre lo que es enseñar y aprender matemáticas. La implementación de la calculadora y el computador en el aula de matemáticas, por ejemplo, ha señalado la importancia de desarrollar en nuestros estudiantes procesos de pensamiento matemático que van más allá de la memorización y repetición de algoritmos.

En este trabajo particularmente, nos interesa identificar si los estudiantes, después de “aprender”, mediante las herramientas tradicionales cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales, están en capacidad de transitar entre los distintos modos de pensamiento, tal como los postula Sierpinska (2000). Que se considera como evidencia de un aprendizaje exitoso y efectivo, o si por el contrario encontramos dificultades y vacios que pueden evidenciarse al detectar fallos en dicho tránsito.

En pocas palabras, es necesaria una actitud activa por parte del estudiante y la generación de diferentes canales de comunicación que le permitan no sólo escuchar las ideas del profesor, sino discutir, justificar y analizar sus propias ideas matemáticas y las de sus compañeros (Santos, 2002). En este sentido, buscamos analizar la manera como los estudiantes, del grado noveno del Instituto Guillermo León Valencia, sede Santa rosa de Lima, Corregimiento Loma de Corredor, de Aguachica (Cesar) y los estudiantes de Algebra Lineal II de la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Santander), logran interpretar un sistema de ecuaciones lineales con dos variables y su solución en un contexto geométrico, aritmético y analítico , postulados por Sierpinska (2000), que corresponden a tres modos diferentes de pensamiento, entre los cuales un individuo puede transitar, para construir los conceptos propios del álgebra lineal. Estos modos de pensamiento que le permiten a un individuo construir conceptos algebraicos, están relacionados con los tipos de representación mediante los cuales pueden representarse los objetos propios de esta área.

Nos vemos avocados a la tarea de considerar cómo los estudiantes hacen el tránsito entre un modo de pensamiento y otro. Para lo cual aplicamos una prueba diagnóstica a un grupo de estudiantes de Algebra Lineal. Mediante el análisis de los resultados de la prueba y, nuestros criterios personales escogimos seis estudiantes (tres de noveno grado y tres de Algebra Lineal) para los cuales diseñamos entrevistas didácticas. En el diseño de las entrevistas las preguntas y actividades forman una parte muy importante del proceso que nos permitirá evidenciar el tránsito entre los diferentes modos de pensamiento (para los estudiantes de noveno: geométrico y aritmético y para los de Algebra Lineal los anteriores agregando el analítico). No es nuestra intención propiciar mejoramiento, sino únicamente tratar de comprender el estado en el que se encuentran los estudiantes, donde se pretende explicar las concepciones, estrategias y dificultades que presentan para transitar entre los diferentes modos de pensamiento. Además establecer si es posible percibir mejores resultados cuando los estudiantes ya han pasado por dos momentos distintos (curso de matemáticas de noveno grado y curso de álgebra lineal I) de aproximación al concepto de solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Nuestro trabajo está organizado en cinco capítulos de la siguiente manera, capítulo 1, Antecedentes, donde hacemos un breve recorrido por algunas de las investigaciones realizadas anteriormente, que de alguna manera tienen relación con nuestro trabajo, ya sea porque han desarrollado la teoría que nos sustenta los modos de pensamiento en Algebra Lineal Sierpinska (2000), o porque directamente han hecho avances en el análisis de las dificultades presentadas por los estudiantes para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Un segundo capítulo, Marco Teórico, donde concretamos la base sobre la cual nos apoyamos para realizar nuestro trabajo: los modos de pensamiento en Algebra Lineal expuestos por Sierpinska (2000), y la conveniencia de lograr el tránsito entre ellos. En el tercer capítulo, Planteamiento del problema, describimos y justificamos particularmente la pregunta que nos propusimos y los objetivos que planeamos cumplir. Luego en el capítulo 4, Análisis metodológico, exponemos el proceso que desarrollamos, describimos los grupos de estudiantes con los cuales trabajamos, los instrumentos que aplicamos, prueba diagnóstica, y entrevistas, así como el análisis a priori y a posteriori de cada uno de ellos. Y por último en el capítulo 5, Conclusiones y Recomendaciones, en este apartado exponemos nuestros resultados generales encontrados en el análisis de resultados, la forma como respondimos nuestra pregunta y planteamos las recomendaciones que estimamos convenientes para futuros trabajos en esta misma línea.

Capítulo 1. ANTECEDENTES

El estudio de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal a través de los últimos años, ha determinado una serie de problemas, los cuales han motivado que se establezcan grupos de investigación que estudian la naturaleza propia de esta área de las matemáticas, la abstracción. Estos grupos han planteado nuevas preguntas, problemas y dificultades, que continúan siendo investigados; así como modelos, y métodos que buscan superar las dificultades encontradas.

Para comprender un poco mejor los problemas que se presentan al abordar el álgebra lineal podemos leer en Roa (2008) una recopilación general sobre los avances de algunos de los investigadores que se han dado a la tarea de trabajar en este campo. Por ejemplo Dorier y Sierpinska (2001) determinan dos fuentes que dan origen a las dificultades que tienen los estudiantes: conceptuales (respecto de la naturaleza misma del álgebra lineal) y cognitivas (respecto de las clases de pensamiento que se requieren para entender el álgebra lineal); además reconocen que en las investigaciones realizadas en matemática educativa, es muy complicado encontrar trabajos que se refieran a sólo a una de las fuentes mencionadas. Una de las grandes dificultades encontradas en los estudiantes para abordar los conceptos del álgebra lineal, es la relación que existe entre los objetos matemáticos y su representación, puesto que hay múltiples formas de lenguaje con las cuales se pueden abordar los conceptos. Al respecto Hillel (2000) menciona la existencia de variados lenguajes, describe principalmente tres modos de representación de los objetos del álgebra lineal que generalmente se incluyen en un curso básico y que de alguna manera coexisten y son intercambiables pero no equivalentes. Esta clasificación de modos de representación los describe como:

> _ *El modo abstracto:* uso del lenguaje de la teoría formal de los espacios vectoriales, que incluye: espacios vectoriales, subespacios, dimensión y operadores entre otros.

_ *El modo algebraico:* uso del lenguaje y conceptos específicamente sobre el espacio R*n*, que incluye: énuplas, matrices, rango, solución de sistemas de ecuaciones lineales, entre otros.

_ *El modo geométrico:* uso del lenguaje y conceptos sobre los espacios de dimensión dos y tres, que incluye: segmentos de recta dirigidos, puntos, líneas, planos y transformaciones geométricas.

(Hillel, 2000)

A su vez Sierpinska (2000) propone tres modos de pensamiento en el álgebra lineal, aritmético, geométrico y analítico, y cómo el tránsito entre ellos permite comprender sus conceptos básicos, objetos de estudio de ésta. Ella realiza su trabajo bajo el supuesto que los objetos matemáticos adquieren diferentes significados y por lo tanto, es necesario poseer un tipo de pensamiento para interpretarlos. Roa (2008)

Nuestra mirada se centró alrededor de uno de estos conceptos: sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. En la actualidad es posible encontrar diferentes investigaciones relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales. A continuación haremos una breve descripción de dos trabajos recientes que nos parecieron pertinentes, dado que en ellos se hace uso del marco de referencia de los modos de pensamiento de Sierpinska, teoría que orienta nuestro trabajo.

En Ramírez (2008), se trabaja sobre las concepciones de los estudiantes de nivel superior, respecto a los sistemas de ecuaciones lineales en los modos de pensamiento geométrico y analítico. Específicamente en los sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas; teniendo como referencia los modos de pensamiento en algebra lineal desarrollados por Sierpinska. En este proyecto se realizó un estudio piloto con dos estudiantes de Montreal (Canadá), los principales resultados de este estudio se tomaron para desarrollar entrevistas con cinco estudiantes mexicanos.

Los resultados obtenidos en las entrevistas mostraron las concepciones, estrategias y dificultades que presentaron los estudiantes sobre los sistemas de ecuaciones lineales y su solución. En el trabajo encontramos por ejemplo la siguiente actividad aplicada a un estudiante de primer año de universidad en el instituto CIDE, México D.F (Las abreviaciones G# corresponde al orden las intervenciones del estudiante y las abreviaciones E# corresponden al orden en el que la entrevistadora realiza las intervenciones):

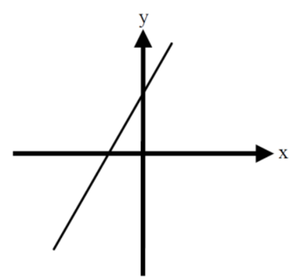
Análisis de la actividad 1

Considera la siguiente gráfica que muestra una recta en el plano.

a) Determina cuántas soluciones tiene la ecuación correspondiente.

b) ¿Cuáles son las soluciones?

c) Plantea una ecuación que pueda corresponder a la gráfica dada.



Gustavo

Al principio Gustavo señala que la solución de la ecuación es el punto de intersección de la recta con el eje x, posteriormente considera que la ecuación tiene dos soluciones relacionándola con el punto de intersección de la recta con los ejes.

G2: tiene esta solución (señala el punto de intersección de la recta con el eje x) ¿no?

E3: ¿cuántas soluciones tendría entonces?

G4: tiene dos intersectos, o sea, si lo tomo como intersecta aquí a x (señala el punto de intersección de la recta con el eje x) y aquí a y (señala el punto de intersección de la recta con el eje y)

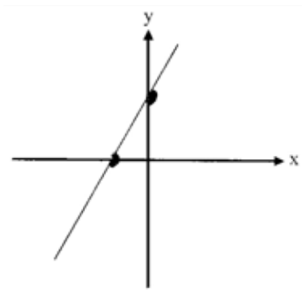
E5: ¿entonces cuántas soluciones tiene?

G6: dos.

E7: ¿por qué?

G8: porque tiene dos intersectos.

G12: (marca en la gráfica los puntos de solución)



Al parecer Gustavo relaciona la solución con la intersección. Pero como en este caso las únicas intersecciones se dan con los ejes debido a que hay sólo una recta, considera solamente dos puntos como soluciones. En el inciso c) el estudiante después de plantear una ecuación que no corresponde a la gráfica se da cuenta que tiene un error y lo corrige planteando una ecuación que sí puede corresponder a la gráfica. (Ramírez, 2008, p. 65-67).

La autora concluye que Gustavo en la representación gráfica relaciona la solución de una ecuación lineal con el punto de intersección de la recta con los ejes, indicando que tiene dos soluciones; analíticamente determina que tiene dos soluciones la ecuación lineal, proporcionándole a cada incógnita el valor de cero para obtener el valor de la otra incógnita, obteniendo dos valores diferentes para x y y, como solución de la ecuación lineal. Esta es una evidencia que sugiere las dificultades del estudiante para transitar entre los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico aritmético

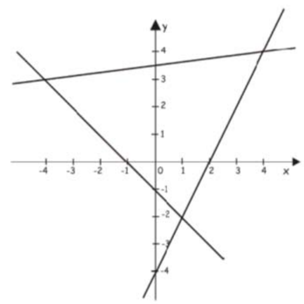
Un aspecto fundamental que consideraremos en nuestro trabajo es analizar el sentido que los estudiantes dan a la solución de un sistema de ecuaciones lineales, mediante la aplicación de un algoritmo para resolverlo; la interpretación de la representación gráfica del mismo o la identificación de propiedades generales donde puede estar inmerso y cómo transitan entre los diferentes ambientes mencionados.

Al leer el ejemplo anterior se evidencia que hay múltiples formas de abordar dicho análisis dado que en Ramírez (2008) no se refiere si el estudiante hace tránsito de un pensamiento a otro, sino que presenta dificultades en cada modo de pensamiento. Mostrando de manera concreta según cada tipo de actividad qué pensamiento presenta cada uno de los estudiantes.

Ochoviet (2009), plantea las dificultades que presentan los estudiantes en el momento de interpretar los sistemas de ecuaciones lineales y el concepto de solución de un sistema que está ligado a la interpretación del número de soluciones del mismo, en dos niveles educativos diferentes: 14-15 años y 17-18 años, en Uruguay. En primera instancia revisaron el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales que construyen los estudiantes. A partir de los datos obtenidos diseñaron una secuencia de enseñanza y de actividades, para los estudiantes de 14-15 años, sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. De acuerdo a lo encontrado sugirieron no restringir la enseñanza al ámbito de los sistemas de dos ecuaciones, para ofrecer a los estudiantes diferentes tareas, que los enfrenten a diversos tipos de situaciones, donde se involucren dos o más ecuaciones lineales y presentándolos en los modos de pensamiento, sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural. De esta manera los estudiantes construyen una visión más amplia del concepto, preparándolos para que en el futuro construyan estructuras más generales y abstractas.

Tomaremos el siguiente ejemplo de actividad con los respectivos resultados: El cuestionario consta de 18 preguntas, vamos a transcribir únicamente la primera, con el análisis a priori, y a posteriori, obtenido de los resultados de uno de los estudiantes.

A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



Carolina (14 años, alumna de la Prof. Martina) da una interesante respuesta a la pregunta 1 en la que refleja el significado de solución de un sistema que ha construido y la interpretación que realiza de este tipo de sistema que ella nunca había visto anteriormente. Contesta de la siguiente manera:

Para mí, el sistema no tiene solución. Para que el sistema tenga solución las tres rectas tendrían que cortarse en un punto; y en este caso, no hay ningún punto donde se corten las tres rectas.

Las rectas se cortan, pero de a dos rectas, eso quiere decir que hay solución para resolver dos de las ecuaciones; y de otras dos y de otras dos; pero ninguna que resuelva las tres. En la entrevista mantenida con la estudiante volvimos sobre esta pregunta manifestándole que otros compañeros habían contestado que el sistema tenía tres soluciones, queríamos observar cómo volvía a argumentar sobre el asunto: Entrevistadora: Vos sabés que en esta pregunta, la número 1, ¿te acordás lo que hicimos? Muchos compañeros opinan que este sistema tiene 3 soluciones, ¿tú que dices a ello?

Carolina: Para mí es que por ejemplo, esta recta que representa a una ecuación y esta otra recta que representa a la otra ecuación tiene esa solución y lo mismo con ésta y ésta, tienen esta solución, y ésta con ésta. Pero no que tiene 3 soluciones.

E: ¿Por qué no podría tener 3 soluciones para ti?

C: Porque no se intersectan las tres rectas en un mismo punto en común, son de a dos, o sea, dos rectas se intersectan en un punto, otras dos en otro punto y otras dos en otro punto.
Mientras que en el cuestionario utiliza un modo de pensamiento SG, en la entrevista maneja con fluidez el pasaje de este modo de pensamiento al modo AA, interpretando Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas cada recta como una ecuación y los puntos como soluciones de las ecuaciones que corresponden. (Ochoviet, 2009, p. 81-82, 131-133).

En esta actividad la autora presenta un sistema de ecuaciones fuera de lo habitual, tres ecuaciones y dos variables, su intención es determinar si a través del trabajo con sistemas 2x2, el estudiantes está en capacidad de reconocer el significado geométrico de la solución del sistema, par ordenado de reales donde se verifican todas las ecuaciones, o si sólo lo asocian con punto de intersección de dos rectas, caso en el cual los estudiantes verán a través de la gráfica tres soluciones para el sistema. Leyendo el tipo de justificación que los estudiantes dan a sus respuestas, la autora estima que puede apreciar el concepto de solución que han construido y los modos de pensamiento que ponen en juego para responder a las preguntas.

Al analizar lo escrito por Ochoviet, en el proceso de formulación de la actividad, queda claro hacia dónde estaba orientada la pregunta y que quería determinar con ella, ¿cómo el estudiante hace el tránsito entre el pensamiento geométrico y el analítico? Además al complementar con la entrevista, las preguntas realizadas por la maestra orientan el razonamiento del estudiante. Lo que permite visualizar los procesos de pensamiento que se emplea. Este ejemplo nos ayuda a tener un punto de referencia sobre la forma adecuada de elaborar actividades y de la postura de orientación que debe asumir el entrevistador, para que el estudiante pueda expresar de manera verbal y escrita los procesos que emplea para resolver dichas actividades.

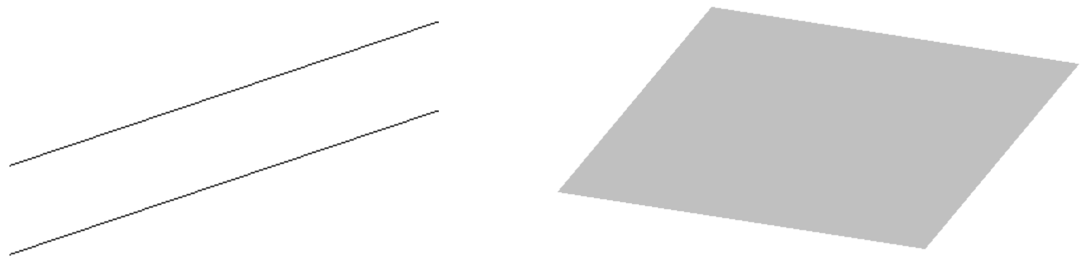
Tomando en consideración las dificultades que muestran los estudiantes con este tema, según se menciona en Ramírez (2008) y Ochoviet (2009), y con el fin de que en un futuro se puedan plantear alternativas a su enseñanza, es que proponemos el presente trabajo. Consideramos que nuestro estudio nos permitirá una visión más clara del aprendizaje de los alumnos en torno a los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Capítulo 2 .MARCO TEÓRICO

Como hemos mencionado anteriormente nuestro trabajo se enmarca en la teoría desarrollada por Sierpinska (2000), sobre los modos de pensamiento en el álgebra lineal y la necesidad que existe de realizar el tránsito entre uno y otro. Dado que según sus apreciaciones, de esta manera es que se logra realmente la comprensión de los objetos matemáticos inherentes al álgebra lineal. Lo que produce un aprendizaje sólido y permanente, que permite a los estudiantes enfrentarse con libertad a nuevas situaciones cognitivas. Haremos la particularización sobre la relación que existe entre los modos de pensamiento con las dificultades que presentan los estudiantes sobre la solución e interpretación de sistemas de ecuaciones lineales. Por lo tanto vamos a comentar a grosso modo la teoría correspondiente:

Los modos de pensamiento expuestos por Sierpinska (2000) son: *sintético-geométrico*, *analítico-aritmético* y *analítico-estructural*. Cada uno de los tres modos de pensamiento maneja un sistema específico de representaciones, es decir, cada uno hace uso de las características propias de los objetos matemáticos:

- En el modo de pensamiento *sintético- geométrico* los objetos se reconocen de manera directa mediante el uso de las figuras geométricas, un conjunto de puntos, y sus características. Las interpretaciones se dan mediante las operaciones que están definidas entre conjuntos. La visualización matemática, juega un rol fundamental en la resolución de problemas empleando este modo de pensamiento. Por ejemplo, cuando se piensa en las posibles posiciones de rectas en R^2 y R^3 las cuales representan las soluciones del sistema de ecuaciones lineales al cual están asociadas las rectas, así como sus representaciones gráficas (Sierpinska, 2000).



- En el modo de pensamiento *analítico-aritmético* los objetos son pensados a través de relaciones numéricas, los puntos del plano aparecen como pares ordenados de reales, las rectas como ecuaciones, los vectores como n-uplas, las matrices son arreglos de números en filas y columnas. Este modo de pensamiento es teórico desde el momento en que el estudiante debe interpretar los objetos a partir de ciertas relaciones numéricas y simbólicas. Cuando se reduce la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales y se determinan los posibles resultados del sistema, la persona se encuentra en este tipo de pensamiento (Sierpinska, 2000).

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

- En el modo de pensamiento *analítico-estructural* recurrimos a las propiedades de los objetos o a su caracterización a través de axiomas y sus representaciones analíticas dentro de toda una estructura, es decir, las propiedades son más importantes que la naturaleza de sus componentes numéricos. Por ejemplo, cuando la solución del sistema de ecuaciones se enfoca desde las propiedades de las matrices invertibles o no invertibles o del determinante del sistema (Sierpinska, 2000).

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 = b_n \end{gathered}$$

De acuerdo con esta investigadora, en la evolución de las matemáticas se presentaron de manera secuencial los tres modos de pensamiento, sin que la existencia de uno interfiriera o afectara al otro. Estos son tres modos de pensar y razonar en el álgebra lineal, que pueden verse como el resultado de una superación de posiciones opuestas: una, rechaza los números dentro de la geometría y la otra, rechaza que la "intuición geométrica" pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético. Sierpinska centra su interés en la naturaleza de los conceptos y el significado matemático. Trabaja sobre la construcción de los conceptos matemáticos y su comprensión por parte de un individuo.

Según Sierpinska, el desarrollo del álgebra lineal inició como un proceso de pensar analíticamente acerca del espacio geométrico. Por tanto se podrían distinguir, en este desarrollo, dos grandes pasos referidos a dos procesos. Uno fue la *aritmetización del espacio*, que tuvo lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en R^n. El otro fue la desaritmetización del espacio a su *estructuración*, con la que los vectores abandonan las coordenadas que los anclaban al dominio de los números y se convierten en elementos abstractos cuyo comportamiento está definido por un sistema de propiedades o axiomas (Sierpinska, 2000).

Al referirnos a los objetos matemáticos, necesitamos precisar la manera en que éstos se encuentran caracterizados de acuerdo a los modos de pensamiento 'sintético' y 'analítico'.

> *La principal diferencia entre los modos de pensamiento sintético y analítico con respecto a los objetos matemáticos es que, en el modo sintético, los objetos matemáticos, de alguna manera, son dados directamente a la mente la cual trata de describirlos, es decir, de manera natural, en tanto que, en el modo analítico estos objetos son dados indirectamente, de hecho, tales*

objetos solamente se construyen con las definiciones de la propiedades de sus elementos (Sierpinska, 2000).

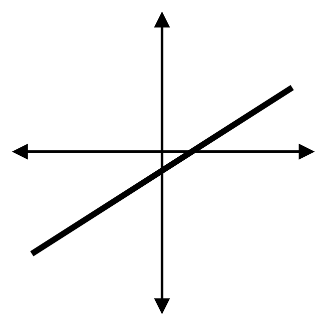
Para mostrar lo antes mencionado, se cita el siguiente ejemplo (Sierpinska, 2000):En el modo sintético, una línea recta se puede ver como un objeto preestablecido con una cierta forma y que ocupa cierta parte en el espacio. Por un lado se podrá hablar de las propiedades de la línea recta pero por otro lado, estas propiedades sólo describirán a la línea mas no la definirán. Por su parte, el modo analítico, hace que la línea recta quede definida de acuerdo a ciertas relaciones específicas entre las coordenadas de los puntos o vectores en un espacio de dimensión dada.

Según este acercamiento si se piensa en el objeto 'recta' lo primero que se viene a la mente es el objeto representado con la figura correspondiente, pero no necesariamente se tendría que pensar en un principio en la 'ecuación lineal' que la define. También si se presenta 'tres rectas encimadas' como objeto se viene a la mente una recta que se visualiza de la figura dada, pero no se pensaría en una representación de un sistema de tres ecuaciones equivalentes que la define.
Sierpinska menciona que la diferencia entre los modos de pensamiento analítico-aritmético y analítico-estructural, es la siguiente:

Cuando un estudiante resuelve algún sistema de ecuaciones lineales y en primer lugar aplica algún método para hallar la solución del sistema dado, él está en un modo de pensamiento analítico-aritmético. Pensando en la misma situación y si el estudiante primeramente observa las propiedades que componen al sistema de ecuaciones lineales y de esta manera determina qué tipo de solución tiene el sistema dado, entonces estaría en un modo de pensamiento analítico-estructural.

A continuación transcribimos un ejemplo, donde se observa una descripción de cada uno de los modos de pensamiento.

"Si uno está pensando en las posibles soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables por visualización de las posibles posiciones de tres planos en el espacio, uno está en el modo sintético-geométrico. Si uno piensa en el mismo problema en términos de los posibles resultados de una reducción por filas de una matriz de 3x3 , uno está en el modo analítico-aritmético. Pensando en términos de matrices invertibles y no invertibles, podría ser un síntoma del modo analítico-estructural" (Sierpinska, 2000).



Relacionando este marco con nuestro trabajo, respecto a los sistemas de ecuaciones lineales, presentaremos un ejemplo para ilustrar el uso de cada uno de los modos de pensamiento.

Supongamos que le presentamos a un estudiante la representación gráfica de dos rectas coincidentes en el plano, como se muestra en la siguiente figura.
Si se le pide determinar si el sistema de ecuaciones correspondiente a la figura, tiene solución, la pregunta estará planteada en el modo de pensamiento sintético-geométrico. Ahora supongamos en cambio que presentamos el sistema correspondiente a la gráfica anterior y por lo tanto se le estaría pidiendo resolver un sistema de ecuaciones equivalentes:

$$\begin{cases} 4y - 3x = -8 \\ -8y + 6x = 16 \end{cases}$$

Si el estudiante aplica algún método de resolución puede obtener la identidad 0 = 0, o cualquier otra versión de esta misma idea, para luego interpretarla en términos del conjunto solución, en este caso estaría trabajando los conceptos en el modo de pensamiento analítico-aritmético.

Si en cambio el estudiantes observa que las ecuaciones son equivalentes fijándose en la relación que guardan los coeficientes, guarda el sistema sin reducirlo a alguna identidad, para interpretar de memoria, determinando que el sistema tiene infinitas soluciones y que por lo tanto la solución son todos los puntos (x, y) que satisfacen la primera ecuación del sistema, entonces estaría procesando la información con el modo de pensamiento analítico-estructural. (Sierpinska, 2000). Como podemos observar cada modo de pensamiento lleva a significados diferentes de las nociones involucradas, pero sí es importante lograr manejar cada uno de ellos, ya que se aplican en los diferentes contextos en los cuales podemos enmarcar la situación matemática. Por lo tanto es primordial lograr un vínculo, conexión o transición entre ellos.

Según Sierpinska, aún si los estudiantes tienen acceso en cierto grado a cada uno de esos modos de pensamiento, no ven por qué tendrían que usar uno u otro, de forma clara y precisa, y prefieren trabajar con formas intermedias que les parecen más convenientes. También se tienen problemas al realizar la transición de un modo a otro. En la medida de lo posible lo mejor es utilizar los tres modos de pensamiento para que se tengan los elementos necesarios y suficientes para asumir cualquier tipo de situación.

Dado que las formas de representación de un objeto matemático son inagotables y entre más sistemas de representación tengan presente los individuos, se comprenderá mejor el concepto matemático en toda su dimensión. En esta vía, los lineamientos curriculares del área de Matemáticas (Ministerio de Educación

Nacional, 2003) señalan la importancia de desarrollar cinco procesos generales en la actividad matemática:

- *Formular y resolver problemas*: La resolución de problemas ha sido reconocida como una actividad muy importante para aprender matemáticas, dado que permite alcanzar metas significativas en el proceso de construcción del conocimiento, tales como: desarrolla habilidades para comunicarse matemáticamente; provoca procesos de investigación (manipulación, formulación de conjeturas, generalización, argumentación); investiga comprensión de conceptos y procesos (reconoce ejemplos, contraejemplos, uso de diversidad de modelos, símbolos, diagramas, traducción entre distintas formas de representación, manejo adecuado de procesos) e investiga estrategias diversas, explora caminos alternos y flexibiliza la exploración de ideas matemáticas.

- *Modelar procesos y fenómenos de la realidad:* es el proceso completo que conduce desde la situación problemática real original hasta un modelo matemático, dichos modelos estructuran y crean un pedazo de realidad, dependiendo del conocimiento, intereses e intenciones del que resuelve el problema; para lograrlo se puede: identificar las matemáticas específicas en un contexto general, esquematizar, formular y visualizar un problema en diferentes formas, y descubrir relaciones y regularidades; para ello se cuenta con diversas herramientas entre ellas representar una relación en una fórmula, probar o demostrar regularidades, refinar y ajustar modelos, utilizar diferentes modelos, combinarlos e integrarlos formulando un concepto matemático nuevo y generalizando.

- *Comunicar*: Una necesidad común que tenemos todos los seres humanos en todas las actividades, disciplinas, profesiones y sitios de trabajo es la habilidad para comunicarnos, por lo tanto es necesario ser capaces de:

expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente diferentes formas; comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual; construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas y de relaciones; hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información; producir y presentar argumentos persuasivos y convincentes. Para lograr que los estudiantes puedan comunicarse matemáticamente, debemos establecer un ambiente en nuestras clases en que la comunicación sea una práctica natural, que ocurre regularmente y en el cual la discusión sea valorada por todos; este ambiente debe permitir que los estudiantes adquieran seguridad, se motiven a hacer preguntas, lean, interpreten, escriban sobre las matemáticas, hagan informes orales y frecuentemente estén pasando del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático.

- *Razonar*: Usualmente se entiende como la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión. Razonar en matemáticas tiene que ver con dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos; justificar estrategias y procedimientos; formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones; encontrar contraejemplos, patrones y expresarlos matemáticamente; argumentar y exponer ideas. Para favorecer el desarrollo de este eje se debe, propiciar una atmósfera que estimule a los estudiantes a explorar, comprobar y aplicar ideas, así como crear un ambiente que sitúe el pensamiento crítico (toda afirmación hecha por el docente o por los estudiantes, debe estar abierta a posibles preguntas, reacciones y reelaboraciones por parte de los demás).

- *Formular comparar y ejercitar procedimientos algorítmicos*: Cuando nos referimos a los procedimientos estamos hablando de los conocimientos en cuanto a actuaciones, destrezas, estrategias, métodos, técnicas, usos y aplicaciones diversas; este proceso implica comprometer a los estudiantes en la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados “algoritmos”, y que, por lo tanto, pueden modificarse, ampliarse y adecuarse a situaciones nuevas, o aun hacerse obsoletas y ser sustituidas por otras.

Cada uno de estos procesos, que de alguna manera caracterizan la actividad matemática, deben ser generados en el aula de clase propiciando un ambiente donde los contenidos matemáticos sean el medio para potenciar pensamiento matemático como resultado de la construcción y reconstrucción de los conceptos. En nuestro trabajo nos interesa determinar si es posible hacer el tránsito entre cada modo de pensamiento de forma clara y si no lo es, identificar el tipo de dificultades que se presentan, de tal manera que es muy importante situarnos apropiadamente dentro del contexto de los modos de pensamiento y los procesos expuestos anteriormente.

Capítulo 3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS

Señalando la importancia de desarrollar en nuestros estudiantes procesos de pensamiento matemático que van más allá de la memorización y repetición de algoritmos. Y además que el aprendizaje de conceptos matemáticos sea el más adecuado posible, consideramos que es de importancia analizar en nuestro contexto particular los razonamientos de los estudiantes al transitar del modo sintético-geométrico al analítico-aritmético y al analítico-estructural, cuando se trabajan con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Hemos detectado que cuando los estudiantes tienen la representación gráfica de un sistema de ecuaciones, no logran identificar su representación algebraica y no identifican las propiedades generales en las cuales pueden enmarcar dicho sistema. Buscamos observar si los estudiantes logran analizar un sistema de ecuaciones lineales, a través de los diferentes modos de pensamiento, mediante la interpretación de la representación gráfica del mismo, la parte algorítmica y la inferencia de resultados a través del reconocimiento de las características generales que pueda tener dicho sistema; y cómo logran transitar de un modo de pensamiento a otro. De tal manera, nos planteamos la siguiente pregunta, alrededor de su respuesta gira nuestro trabajo:

> *¿Qué dificultades se presentan en estudiantes del grado noveno y los estudiantes de Algebra Lineal II, al transitar entre los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural al resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas e interpretar su solución? Por lo tanto nos interesa determinar evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento.*

3.1. Objetivos

Nuestro principal propósito en este trabajo es indagar sobre las dificultades más evidentes que presentan los estudiantes de noveno grado y de segundo semestre de universidad, al trabajar con la representación de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano y la interpretación de su solución.

Como discutimos anteriormente, el marco de referencia planteado por Sierpinska (2000) donde se consideran tres tipos de pensamiento para la comprensión del álgebra: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, permite determinar que el tránsito de un tipo de pensamiento a otro genera procesos de pensamiento matemático indispensables para construir estos conceptos exitosamente. En particular en este trabajo nos interesa determinar la manera como los estudiantes transitan de un modo de pensamiento a otro. Por tanto nos hemos planteado los siguientes objetivos que guiarán nuestro trabajo:

1. Analizar cómo estudiantes de grado noveno transitan entre los modos de pensamiento sintético geométrico y analítico aritmético y viceversa, al determinar la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

2. Analizar cómo los estudiantes universitarios de segundo semestre transitan entre los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico estructural.

3. Determinar estrategias pedagógicas que busquen generar en los estudiantes de noveno grado el tránsito entre los modos de pensamiento sintético geométrico y analítico aritmético al trabajar con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Capítulo 4. ANÁLISIS METODOLÓGICO

Nos proponemos detallar el proceso que empleamos para desarrollar nuestro trabajo, así como la descripción de los estudiantes implicados en él Consideramos pertinente esta descripción, ya que los dos grupos de trabajo tienen características marcadamente diferentes en cuanto a su ubicación espacial, a su nivel de escolaridad, sus intereses y entorno social.

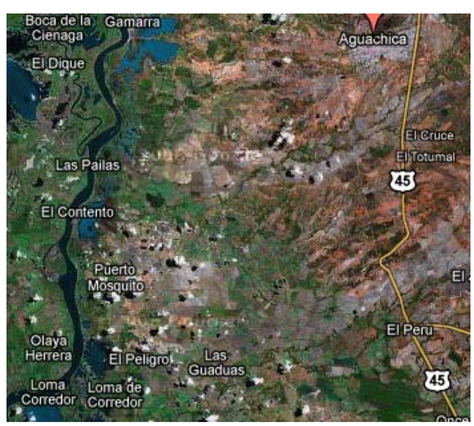
Los pasos a seguir inician con la aplicación de una prueba diagnóstica diseñada de manera tal, que se pudiera identificar inicialmente las concepciones de los estudiantes acerca del tema y su capacidad para comprender las diferentes representaciones de un sistema de ecuaciones. Una vez hecho el análisis de los resultados, se escogieron tres estudiantes en cada grupo, con los cuales se aplicaron las entrevistas didácticas. Llamamos entrevista didáctica a la situación en la cual el maestro (entrevistador) se reúne con un estudiante (entrevistado) y le aplica una serie de actividades consignadas en un material escrito. A medida que el estudiante va contestando cada una de las preguntas, el papel del maestro es orientar el trabajo, con preguntas, problemas o ejemplos adicionales si es necesario, teniendo cuidado de no modificar el proceso que lleva el estudiante, pero, si darle herramientas para expresar sus ideas con claridad. Además se pretende reflejar con la mayor objetividad posible, las ideas expuestas por el entrevistado.

El propósito de las actividades diseñadas y formuladas en la entrevista era concretar y especificar, mediante la interacción entre estudiante y maestro, las evidencias de la forma como los estudiantes poseen la capacidad de realizar el tránsito entre los modos de pensamiento o las dificultades que presentan para ello. Los hallazgos nos permitieron obtener algunas respuestas a nuestra pregunta en el propósito de cumplir los objetivos del trabajo, así como, obtener nuestras conclusiones.

4.1. Trabajo con los estudiantes de noveno grado

4.1.1. Descripción de los estudiantes:

El grupo de noveno forma parte de la Institución Guillermo León Valencia, sede Santa Rosa de Lima, ubicada en el corregimiento de Loma de Corredor, municipio de Aguachica, César. Nos parece pertinente iniciar por contar las características geográficas de manera general, dado que consideramos que el entorno tiene su incidencia sobre el desarrollo de nuestro trabajo. Esta zona se encuentra bañada por dos ríos el Magdalena y el Lebrija, la vía de acceso al centro educativo es fluvial, por lo tanto si se quiere entrar o salir de la zona es obligatorio acceder al Johnson (medio de transporte que consta de una canoa con motor). Además en temporada de lluvias son frecuentes las inundaciones que llegan hasta la institución y por lo tanto es obligatorio el cese de actividades académicas. Las características socioeconómicas, se pueden generalizar como estudiantes de bajos recursos y de que viven casas humildes de tipo rural.



Siguiendo con los pasos previstos, se inició el proceso intentando aplicar la prueba diagnóstica con todo el grupo, actividad que fue imposible de llevar a cabo, porque las dificultades académicas, derivadas de las características descritas anteriormente, no permitieron a los estudiantes responder adecuadamente la prueba por lo tanto se decidió pasar por alto esta actividad.

Entonces, teniendo en cuenta las cualidades personales, que implican facilidad de expresión y seguridad frente a la asignatura de matemáticas, se escogieron tres estudiantes, dos mujeres y un hombre, cuyas edades oscilan entre 13 y 15 años y con ellos se realizó la entrevista.

4.1.2. Descripción y aplicación de la entrevista:

La entrevista consta de tres actividades, sobre los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, con preguntas escritas de tal manera que se pueda evidenciar el tránsito entre el modo de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético y viceversa; el sitio escogido fue la sala de informática dadas sus condiciones de comodidad y tranquilidad. Se aplicó en forma individual, proporcionándole a cada estudiante hojas amarillas, para facilitar la lectura y análisis de sus respuestas. Las actividades se fueron aplicando una a una conforme las iban contestando. Se empleó una videocámara fija y orientada hacia las hojas de trabajo, con la cual quedaron grabados las imágenes y el sonido asociado a cada entrevista. Cuando los estudiantes presentaron dificultades para expresar sus ideas, el entrevistador inició una interacción verbal con ellos mediante preguntas, teniendo cuidado de no sugerirles la respuesta. Las entrevistas se realizaron una por día, durante el período comprendido entre el 15 y 17 de junio de 2010, las cuales tuvieron una duración de 90 minutos aproximadamente. Las actividades aplicadas en la entrevista aparecen en el Anexo 1.

4.1.3. Análisis a Priori de la entrevista:

A continuación presentamos lo que consideramos son las posibles respuestas que los estudiantes pueden proporcionar a cada una de las actividades propuestas. Este se realizó a la luz de evidenciar el tránsito entre los modos de pensamiento objeto de nuestra observación.

1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$

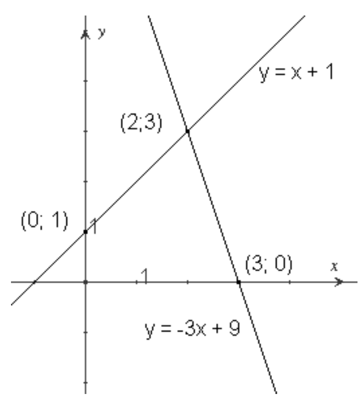
a. Dibuja la representación gráfica de cada ecuación del sistema.

b. ¿Cuántos puntos de corte hay entre las rectas?

c. ¿Qué representa para el sistema de ecuaciones los puntos de corte de las rectas?

Posibles soluciones:

a.



b. ¿Cuántos puntos de corte tienen las rectas?

- ✓ Las rectas tienen un punto de corte (2,3)
- ✓ Las rectas tienen cinco puntos de corte (0,1), (-1,0), (3,0), (0,9), (2,3)
- ✓ Las rectas tienen tres puntos de corte (0,1), (0,9), (2,3)
- ✓ Las rectas tienen tres puntos de corte (-1,0), (3,0), (2,3)

c. ¿Qué representa para el sistema de ecuaciones los puntos de corte de las rectas?

- ✓ El punto de corte representa la solución única del sistema.
- ✓ Cada uno de los puntos de corte representan una posible solución del sistema de ecuaciones
- ✓ Las rectas no tienen puntos de corte, porque son paralelas

Análisis: Cuando los estudiantes dibujan la gráfica y pueden obtener datos, conclusiones y afirmaciones a partir de los datos graficados (lo que esperamos que suceda al resolver las partes a y b) están haciendo el tránsito entre el pensamiento analítico-aritmético y el pensamiento sintético-geométrico. Si luego se puede observar cómo emplean la gráfica para hacer análisis de la solución del sistema de ecuaciones lineales, en este momento se estaría visualizando el tránsito del pensamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético (desarrollo del punto c). Es pertinente aclarar que aunque en un problema específico se encuentren evidencias del tránsito, esto no implica que el estudiante tenga la capacidad ya desarrollada, así que es necesario plantear diversas situaciones que nos permitan identificar con certeza si los estudiantes adquirieron la habilidad de transitar entre un modo de pensamiento y otro.

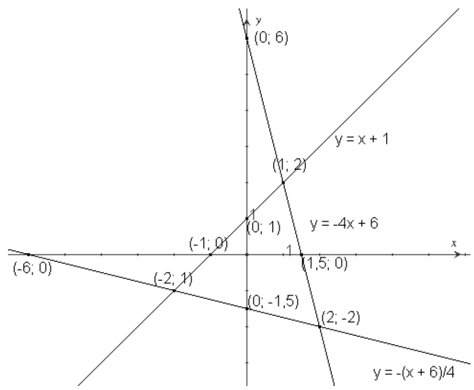
2. Realizar la representación gráfica del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x + y - 6 = 0 \\ x + 4y + 6 = 0 \end{cases}$$

a. ¿Cuál es la solución del sistema?

b. Determina los puntos de corte de las rectas. ¿Qué representan los puntos de corte?

Posibles soluciones:



a. ¿Cuál es la solución del sistema?

- ✓ El sistema no tiene solución, porque no hay un único punto de corte entre las tres rectas.
- ✓ El sistema tiene tres soluciones, que son los puntos (1,2), (-2,1) y (2,-2), porque son los cortes entre las rectas dadas.
- ✓ Los puntos de corte de las rectas son (-6,0), (-1,0), (-2,1), (0,1), (1,2), (0,6), (1.5,0), (0,-1.5), (2,-2), por lo tanto el sistema tiene nueve soluciones.
- ✓ La solución del sistema son los puntos (1,2) y (-2,1)
- ✓ La solución del sistema son los puntos (1,2) y (2,-2)
- ✓ La solución del sistema son los puntos (2,-2) y (-2,1)
- ✓ La solución del sistema es el punto (1,2)
- ✓ La solución del sistema es el punto (-2,1)
- ✓ La solución del sistema es el punto (2,-2)

b. Determina los puntos de corte de las rectas, ¿Qué representan los puntos de corte?

- ✓ son los puntos (1,2), (-2,1) y (2,-2).
- ✓ Los puntos de corte de las rectas son (-6,0), (-1,0), (-2,1), (0,1), (1,2), (0,6), (1.5,0), (0,-1.5), (2,-2).
- ✓ Son los puntos (1,2) y (-2,1)
- ✓ Son los puntos (1,2) y (2,-2)
- ✓ Son los puntos (2,-2) y (-2,1)
- ✓ es el punto (1,2)
- ✓ es el punto (-2,1)
- ✓ es el punto (2,-2)

- ☑ Los puntos de corte representan la solución del sistema de ecuaciones lineales.
- ☑ Depende, unos puntos son los cortes de las rectas con los ejes y los otros son los cortes entre las rectas, por lo tanto los primeros sirvieron para hacer la gráfica y los segundos nos permiten determinar la solución o no solución del sistema.
- ☑ Cada punto de corte entre dos de las rectas representa la solución del sistema, si sólo estuvieran las rectas involucradas
- ☑ Los puntos de corte no son solución del sistema porque no hay un punto donde se intercepten en un solo punto.

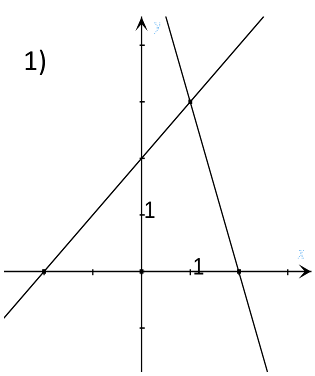
Análisis: Para que los estudiantes elaboren la gráfica y además obtengan las conclusiones y deducciones pertinentes para cada una de las preguntas formuladas, deben hacer el tránsito del pensamiento analítico-aritmético al sintético-geométrico.

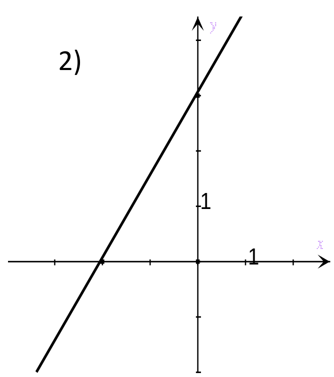
Las opciones de respuesta para la pregunta *a*., que hemos descrito, implican que los estudiantes están empleando únicamente el pensamiento sintético geométrico, dado que las respuestas suponemos que las obtienen de la observación de la gráfica obtenida.

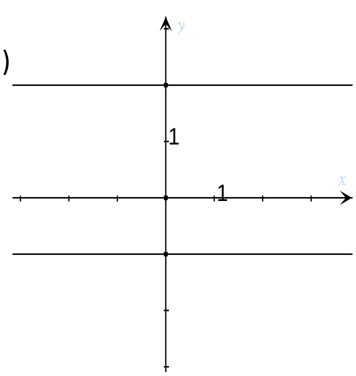
Cuando trabajan el punto *b*., y expresan que representan los puntos de corte nuevamente están pasando del pensamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético. Esperamos que identifiquen, que el sistema no tiene solución, cuando asocien de manera correcta el significado del punto de corte entre las tres rectas (inexistente en este caso), con la solución del sistema de ecuaciones. En cambio, si los estudiantes manifiestan que el sistema si tiene solución, dado que hay puntos de corte, esta respuesta nos permitiría concluir que no han incorporado el significado geométrico de la solución del sistema.

3. Las rectas que aparecen en cada plano, representan un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Para cada caso representado contesta las siguientes preguntas:

a. ¿El sistema tiene solución? ¿Por qué?
b. ¿Cuál es la solución?
c. Escribe un sistema de ecuaciones que corresponda a la representación gráfica.

1)


2)


3)


Posibles soluciones:

Análisis gráfica 1.

a. ¿El sistema tiene solución? ¿Por qué?

- ✓ El sistema tiene solución única, porque las rectas tienen un punto de corte.
- ✓ El sistema tiene tres soluciones, los tres puntos de corte que están marcados en la gráfica.
- ✓ El sistema no tiene solución, porque se obtienen rectas paralelas.

b. ¿Cuál es la solución?

- ✓ La solución es el punto (1,3)
- ✓ Los puntos de solución son los puntos (-2,0), (0,2), (2,0), (1,3)

c. Escribe un sistema de ecuaciones que corresponda a la representación gráfica.

El sistema de ecuaciones es: $\begin{cases} y = -3x + 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$

Análisis de la gráfica 2.

a. ¿El sistema tiene solución? ¿Por qué?

- ✓ El sistema tiene infinitas soluciones, porque las dos rectas coinciden en todos sus puntos, es decir son equivalentes
- ✓ El sistema no tiene solución porque no hay sino una recta
- ✓ No puede determinarse si hay solución porque la información es insuficiente.

b. ¿Cuál es la solución?

- ✓ Todos los números reales

c. Escribe un sistema de ecuaciones que corresponda a la representación gráfica.

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x + 3 \\ 2y = 3x + 6 \end{cases}$$

Este es un ejemplo de sistema de ecuaciones asociado a la gráfica, pero pueden encontrarse infinitas variantes, al escribir la segunda ecuación como múltiplo escalar de la primera.

Análisis de la gráfica 3.

a. ¿El sistema tiene solución? ¿Por qué?

- ✓ El sistema no tiene solución, porque las rectas son paralelas, lo cual implica que las pendientes de las rectas son iguales, pero pasan por puntos diferentes del plano cartesiano.
- ✓ El sistema tiene dos soluciones que son los puntos (0,-1) y (0,2), porque son los cortes de cada recta con el eje y.

b. ¿Cuál es la solución?

- ✓ No hay solución, es decir, el sistema de ecuaciones es inconsistente.
- ✓ Hay dos soluciones.

c. Escribe un sistema de ecuaciones que corresponda a la representación gráfica.

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Análisis: Al escribir las posibles respuestas de los estudiantes a esta actividad, se pone de manifiesto que queremos potenciar el tránsito del pensamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético. En algunos casos, es posible que se pueda vislumbrar un primer acercamiento al pensamiento analítico-estructural. También creemos que es la actividad donde mejor se puede evidenciar las dificultades que tengan los estudiantes, dado que la forma como están formuladas las preguntas, exige de parte de los estudiantes, dar su solución y explicar el por qué de dicha solución. La información debe ser leída de las gráficas, donde no hay datos explícitos, lo cual los obliga a aplicar sus conceptos sobre la solución de un sistema de ecuaciones. En particular el inciso *c*., donde se ven obligados a escribir ecuaciones a partir de los datos proporcionados en la gráfica, lo cual es una precisa evidencia de la forma como se puede pasar del pensamiento geométrico al aritmético, dado que deben emplear datos obtenidos de la observación de la gráfica y transformarlos en las ecuaciones correspondientes, lo cual implica que son capaces de relacionar las propiedades geométricas de una recta, con la ecuación que la modela.

4.1.4. Análisis a Posteriori de la entrevista:

Los estudiantes entrevistados los vamos a representar con la abreviación ES1, ES2 y ES3, y el profesor entrevistador con la abreviación E. A continuación presentamos los apartes de dichas entrevistas, que nos permiten evidenciar el tránsito esperado o las posibles dificultades.

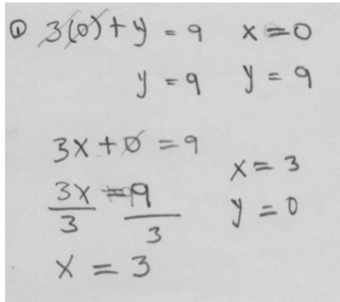
4.1.4.1. Análisis de la actividad 1

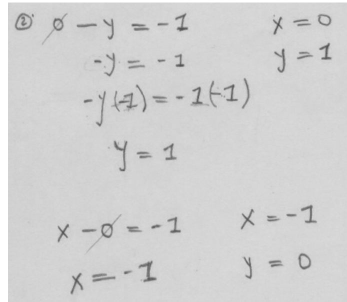
A partir de las respuestas de los tres estudiantes a la instrucción dada en la parte *a*, nos queda claro que si se proporcionan las ecuaciones del sistema, para el caso 2x2, los estudiantes ya se han apropiado de la parte aritmética que les permite producir la gráfica. Salvo en el caso de ES2 y ES3, que cometieron unos pequeños errores de cálculo, los cuales no son trascendentales, porque fácilmente, al ser orientadas por el maestro pudieron hacer la corrección. Esto es evidencia que en primera instancia el tránsito más elemental entre el pensamiento aritmético y el geométrico, efectivamente se da, y los estudiantes ya lo han interiorizado.

Encontramos diferencias en el proceso personal de trabajo, dado que el estudiante ES1, grafica las rectas empleando los puntos de corte con los ejes, mientras que los estudiantes ES2 y ES3, toman dos puntos arbitrarios para hacer una tabla de valores.

E: ¿Qué es lo primero que haces para hallar la recta?

ES1: Hallo dos puntos de cada ecuación.





ES2: Bueno primero tengo que, tengo los dos puntos. Tengo que hallar una recta y hacer primero las ecuaciones para encontrar los dos puntos de corte. O uno depende de los que me de la recta y hacer una representación entre el sistema de ecuaciones de dos puntos de corte de la recta que yo vaya, que yo voy a resolver.

E: listo haces el despeje de la primera ecuación y que procede.

ES2: Ahora voy hacer el segundo punto, el despeje del segundo punto.

E: Ahora qué haces

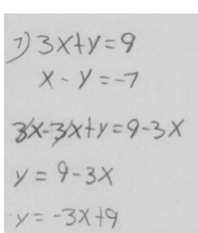
ES2: Voy a colocarle un… Buscando un número para que me dé, para hallar la x para colocar en la recta.

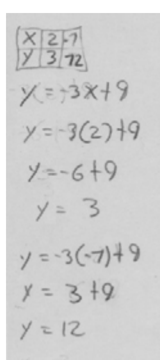
*E: A ver cuando haces el despeje de la ecuación dos: x-y=-1, tú buscas el despeje de **y** verdad, pero esa **y** es positiva o negativa, ecuación dos.*

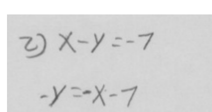
ES2: Positiva:

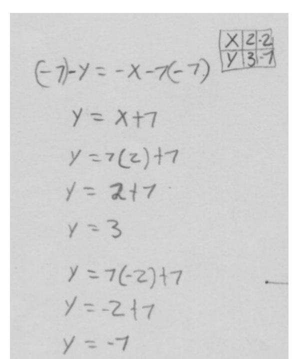
E: Mira el ejercicio.

ES2: Es negativa [Risas]









ES3: Ya, yo voy a sacar para hallar el valor de y.

ES3: Lo puedo hacer, ¿aquí?

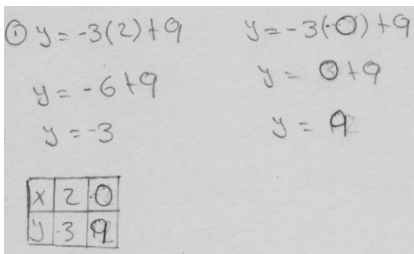
E: Sí, claro, ¿qué vas hacer ahora?

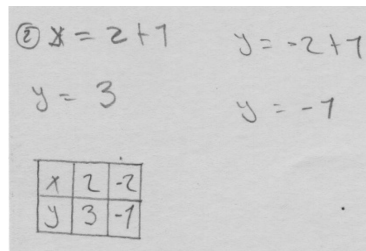
ES3: Voy hallar la tabla de valores para colocar los números para poder hallar la recta.

E: ¿Qué necesitas en esa tabla de valores?

ES3: Colocar los dos puntos que coloque acá.

ES3: Ahora voy a dibujar la representación grafica.

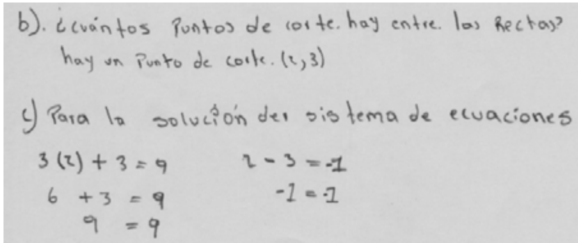


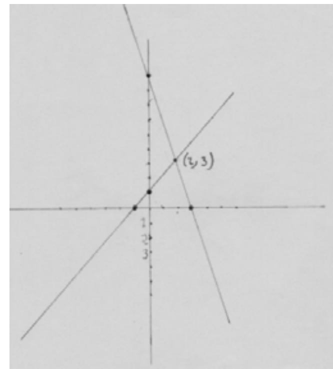


Para las preguntas *b*. y *c.* obtuvimos claramente lo que esperábamos, y es que cada estudiante pudo identificar el punto de corte de las dos rectas con la solución al sistema de ecuaciones. Esto puso de manifiesto que en una primera instancia los estudiantes tienen la capacidad de hacer el tránsito del pensamiento geométrico al aritmético, cabe aclarar de nuevo que funcionó para este caso (sistemas 2x2). Dado que para ellos es más natural, porque lo han trabajado en clase y lo reconocen con facilidad. El método que emplearon los tres estudiantes para hallar el punto de corte, fue exclusivamente mediante la observación de las coordenadas del punto que se obtuvo al dibujar las dos rectas en el plano cartesiano. A continuación presentamos los resultados obtenidos por los tres estudiantes, respecto a los numerales *b.* y *c.* de la actividad 1.

E: ¿Cuántos puntos de corte hay entre las rectas?

ES1: Eee… Uno solo que es el punto (2,3).

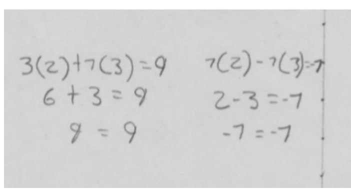

b). ¿cuántos Puntos de corte. hay entre. las Rectas?
hay un Punto de corte. (2,3)
c) Para la solución del sistema de ecuaciones
3 (2) + 3 = 9 2 − 3 = −1
6 + 3 = 9 −1 = −1
9 = 9

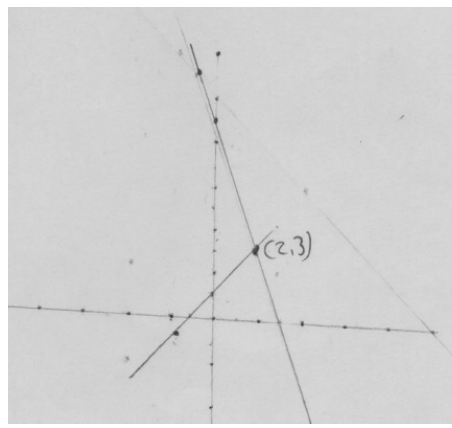


ES2: un solo punto de corte, en el dos y tres

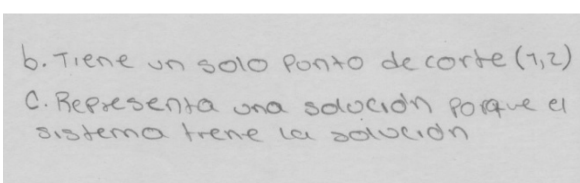
E: ¿únicamente ese es el punto?

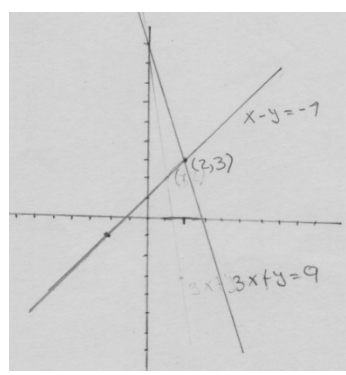
ES2: si


3(2)+1(3)=9 1(2)−1(3)=−1
6 + 3 = 9 2−3=−1
9 = 9 −1=−1



ES3: un solo punto de corte


b. Tiene un solo Punto de corte (1,2)
C. Representa una solución porque el sistema tiene la solución



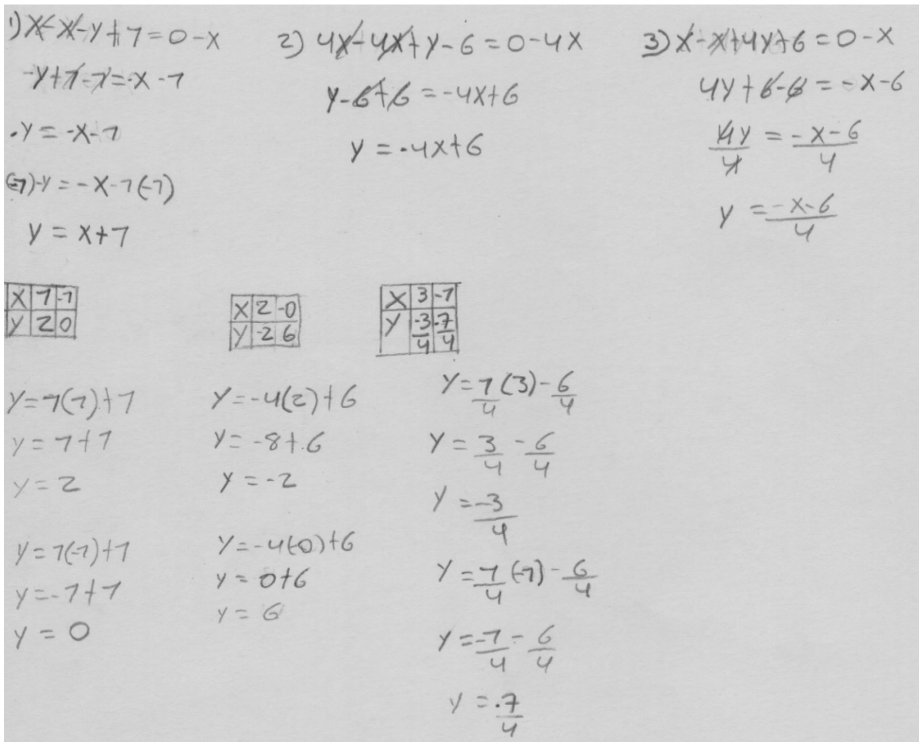
E: Pasamos a la pregunta c, que representa para el sistema los puntos de corte de las rectas,

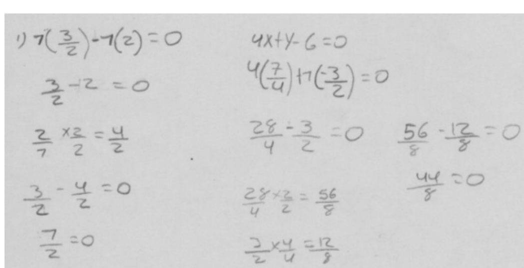
ES1: … podemos hallar una grafica, la cual tiene un punto de corte que nos va servir para una solución del sistema de ecuaciones
ES2: que tiene una sola solución
ES3: que el punto de corte, representa una solución en la ecuación

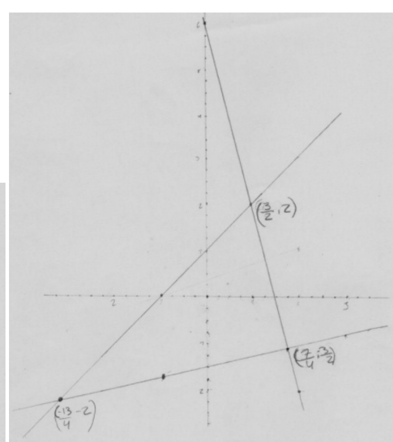
Al leer los resultados que obtuvimos con esta actividad, podemos determinar que los estudiantes manejan la parte mecánica que se requiere para elaborar la representación gráfica de un sistema de ecuaciones. Por lo tanto hacen de manera superficial el tránsito del pensamiento aritmético al geométrico. Ya que cuando analizamos si relacionan el punto de corte con su significado aritmético, todos coinciden en afirmar que es la solución del sistema, en su propio lenguaje. Esto nos permite afirmar que en primera instancia efectivamente están haciendo el tránsito del pensamiento geométrico al aritmético, en este caso no tiene influencia el hecho de que la forma como obtienen el punto de corte, sea accidental, es decir, para este ejercicio funcionó, porque las coordenadas del punto de intersección de las rectas son números enteros, pero en otro caso difícilmente son capaces de extraer datos de la gráfica, así como lo veremos más adelante.

4.1.4.2. Análisis de la actividad 2:

Este sistema de ecuaciones representaba una variante respecto del anterior, dado que tiene una ecuación más, en la primera parte donde debían repetir el proceso de hacer la gráfica, los estudiantes ES1 y ES3, hacen la gráfica, empleando la misma secuencia que utilizaron para la actividad 1. Desde luego, el tiempo que emplearon fue mayor y en parte la demora se debe a que el sistema aparentemente es homogéneo, y esto los confunde un poco, pero una vez subsanado el impase logran obtener la gráfica esperada. Por otro lado el estudiante ES2, mostró claras dificultades desde el principio, de tal manera que la gráfica quedó mal hecha. Además a estas alturas de la entrevista dejó de hablar y las preguntas las contestaba con monosílabos. Por tanto el análisis que realizamos se basa en lo que el estudiante se dedica a escribir. Este estudiante al determinar los puntos de corte entre las rectas y ver que no eran números enteros, se nota que no sabe cómo ubicarlos correctamente en el plano cartesiano y pareciera que los ubica acomodándolos a su parecer.







Frente a las preguntas *a.* y *b*. los tres estudiantes tuvieron diferentes posturas, ES1, habla de infinitas soluciones, no sabe cómo justificarlo, pero insiste en esa idea. A pesar de contar con la gráfica, la cual debería ser su punto de apoyo, si en realidad estuviera haciendo el tránsito del pensamiento geométrico al aritmético. ES2, en primer lugar dice que tiene dos soluciones, porque en la grafica preliminar no se veían los tres puntos de corte, luego de prolongar una de las rectas encontrando el tercer punto de corte, cambia su parecer y afirma que el sistema tiene tres soluciones. Esto nos muestra que no comprende realmente, cuál es el significado geométrico de la solución del sistema de ecuaciones lineales no hay una interpretación correcta sobre las características de la representación gráfica del sistema. ES3, comienza diciendo que hay tres soluciones y las identifica con los puntos de corte. Pero luego cambia de opinión y se decide por afirmar que el sistema no tiene solución. El argumento que emplea para justificar su apreciación es aritmética, ya que reemplaza las coordenadas de los puntos de corte, en cada una de las ecuaciones y determina que cada punto sirve para una pareja de ecuaciones, pero no para la tercera. Este estudiante puede determinar características de la representación gráfica, para mediante argumentos aritméticos determinar que los puntos de corte no son solución del sistema. Esto lo podemos considerar como un principio en el tránsito entre los modos de pensamiento sintético geométrico y analítico aritmético.

E: Observemos la pregunta b ¿cuál es la solución del sistema?.
ES1: Que es infinita soluciones.
E: ¿Por qué?
ES1: Porque tiene tres puntos solución.
ES1: o sea yo considero que no tiene solución, una sola solución, considero que de dos o más soluciones debe ser infinita.
E: ¿Cualquier punto de esos te da solución al sistema verdad?
ES1: Si señor.

E: ¿qué te puede dar como una conclusión eso?, si observamos el ejercicio anterior, el número uno, si lo observamos muy bien acá, ahí un sistema de ecuaciones lineales de cuantas ecuaciones

ES1: de dos

E: de dos y ese punto que tú hallaste en ese ejercicio, te da un punto de corte; y ese punto de corte para ti era un punto de qué?

ES1: solución de la ecuación

E: ¿Qué vas a hacer?

ES1: que en si, cuando me da varios puntos de corte, o sea varios puntos solución, ehhhh, puede estar dando solución, como también no puede estar dando solución, el punto más preciso que me puede dar solución es cuando me da un solo punto de corte

E: vuelvo y hago la misma pregunta ¿qué solución tiene ese sistema?

ES1: una solución, infinita soluciones

E: ¿infinitas soluciones?

ES1: si porque estamos hablando de más de un punto de corte y me da solución

E: o sea que para ti cada punto de esos, es un punto de corte y un punto solución?

ES1: sí, eso es lo que entiendo yo

E: ¿que observas tú en las tres rectas?

ES1: Que tiene dos puntos que me dan solución y uno que no me da

ES1: que viendo que este punto no da solución lo podemos exceptuar de ahí o sea eliminar de ahí nos quedamos con los dos puntos que tienen solución

Con estas respuestas podemos observar que el estudiante ES1 no tiene claro el significado geométrico de la solución del sistema de ecuaciones, divaga entre la postura de solución única, infinitas soluciones, y en ningún momento considera la opción de que el sistema no tenga solución. Es más, al terminar, revisa los tres puntos de corte entre las parejas de rectas y parece detectar que sólo uno de los puntos no sirve como solución del sistema, lo cual apoya nuestra apreciación, no tiene claro que significa gráficamente la solución del sistema de ecuaciones.

E: ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?
ES2: tres soluciones
E: y la pregunta b, determina los puntos de corte de las rectas, que es lo que es lo que acabaste de hacer al colocar las coordenadas, para ti que representan esos puntos de corte
ES2: tres soluciones

Esta estudiante contesta de manera precisa, que la solución del sistema son los puntos de corte de las rectas, pero no tiene en cuenta que en este sistema hay tres rectas en juego, por lo tanto el punto que representa la solución del sistema debe pertenecer a las tres, es decir, las tres rectas deben interceptarse en el mismo punto. Las conclusiones de la estudiante nos permiten afirmar que no hace el tránsito entre el pensamiento geométrico y el aritmético, pues no ha apropiado el significado geométrico de la solución del sistema de ecuaciones.

E: ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?
ES3: la solución es que todas las rectas que hallé tienen un punto de corte
E: entonces ¿cuál es la solución?
ES3: que todas las rectas tienen solución
E: porque hay tres ecuaciones, ¿qué representan los puntos de corte?
ES3: representa una solución.
E: tres ecuaciones en un plano cartesiano, ¿hay manera de probar eso? ¿qué esos tres puntos son de corte? y ¿qué son solución del sistema?
ES3: que al hacer la prueba de la primera me da la igualdad, de la segunda no y la tercera si me da la igualdad
E: entonces que puedes concluir tú de ese sistema de ecuaciones, donde dices que los tres puntos son solución del sistema
ES3: los tres no son solución del sistema

E: para que sean solución del sistema ¿qué debe pasar en las tres ecuaciones?

ES3: que en las tres ecuaciones debe ser igual la igualdad

ES3: yo creo que si tienen solución los puntos, los tres puntos en cada ecuación, porque deben dar la prueba en cada ecuación y si no pues…

E: si no ¿qué pasa?

ES3: que no tiene solución

E: ¿por qué crees que no tiene solución?

ES3: Porque el primer punto debe dar la prueba en los tres, el segundo punto también y el tercero también. Porque que el punto tiene que dar igualdad en las tres ecuaciones

E: pero, ¿por qué el sistema no tiene solución?

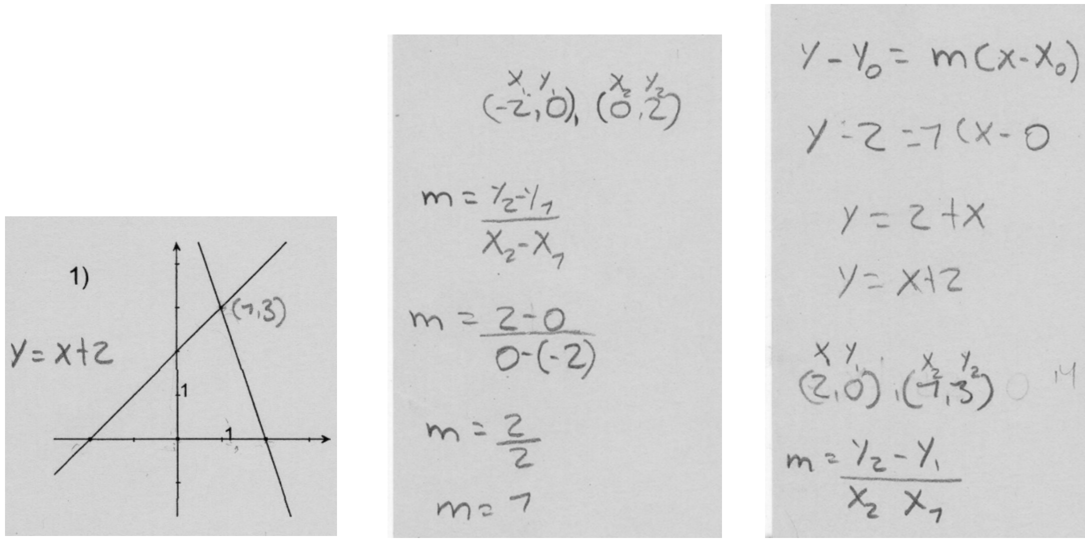
ES3: Porque los puntos no dan en la prueba de las tres

La estudiante ES3 pudo establecer que el sistema no tiene solución, hizo el proceso teniendo en cuenta el sentido geométrico de la solución del sistema y lo comprueba de manera aritmética, al reemplazar en la ecuaciones y verificar que efectivamente ninguno de los tres puntos de corte satisface las tres ecuaciones.

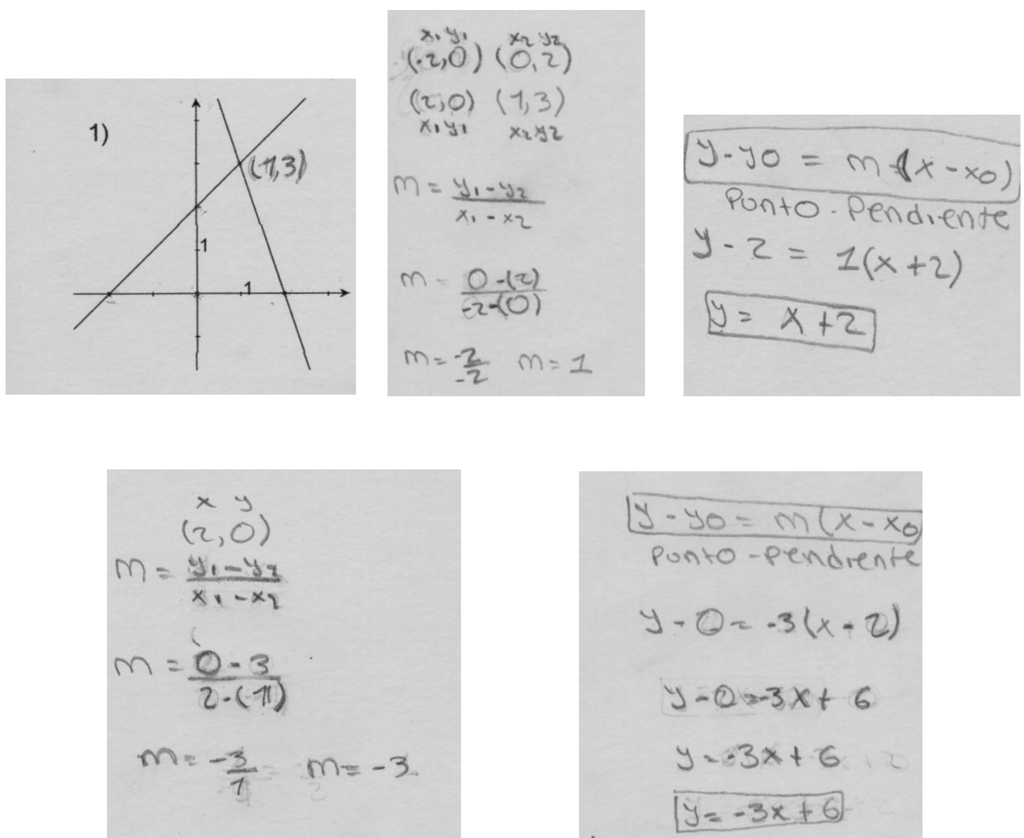
Del análisis de las respuestas dadas en esta situación, podemos concluir que los estudiantes tienen dificultades para determinar las características de la representación gráfica de un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas. Esto parece estar determinado por su experiencia previa con los sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución, dado que hasta el momento solo han trabajado sistemas 2×2 . Hay una generalización sobre “los puntos de intersección” relacionados con un par de rectas, pero sobre un sistema de dos incógnitas con más de dos ecuaciones, ya no tienen la capacidad de aplicar dicha apreciación.

4.1.4.3. Análisis de la actividad 3:

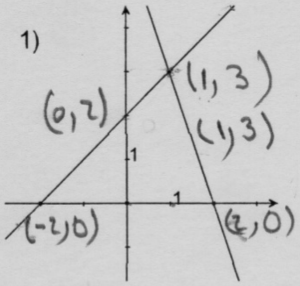
En esta parte, las estudiantes ES2 y ES3, presentaron serias dificultades para entender lo que el problema planteaba, por tanto no lograron desarrollar la situación completa. Los estudiantes sólo trabajaron el análisis de la gráfica 1, que representa el sistema 2×2 con única solución. El estudiante ES2, halló la ecuación de sólo una de las rectas y el estudiante ES3pudo hallar las ecuaciones de las dos rectas, pero hasta ahí llegó su trabajo. Expresaron que este proceso era más difícil y no aportaron mayores justificaciones en sus argumentos. Por tanto a continuación presentamos únicamente la hoja de trabajo donde se evidencia los procesos que realizaron. El estudiante ES1, culminó la actividad, pudo concluir acertadamente el tipo de solución que se obtenía en cada caso y obtuvo de manera acertada el sistema de ecuaciones asociado a cada grafica. Con este estudiante a partir de analizar sólo esta actividad podríamos decir que, aparentemente, puede hacer el tránsito entre el pensamiento geométrico y el aritmético, pero sus respuestas no son lo suficientemente claras. De tal manera que no podemos asegurar si cumple con el tránsito tal cual lo hemos planteado, pero por su análisis consideramos que cuenta con los elementos base para hacerlo. . Para esta actividad nos parece que la hoja de trabajo es clara, sobre los resultados mencionamos ya que las respuestas de los tres estudiantes son de tipo aritmético, escrito, y en la mayoría de los casos, el trabajo escrito no está sustentado por conclusiones orales. Al parecer, expresar de manera oral las cosas que van pensando no hace parte de su cotidianidad, a la hora de resolver un problema matemático.

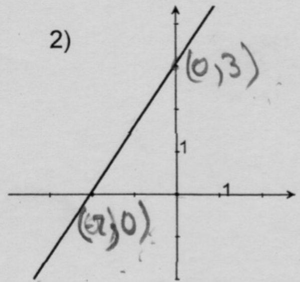


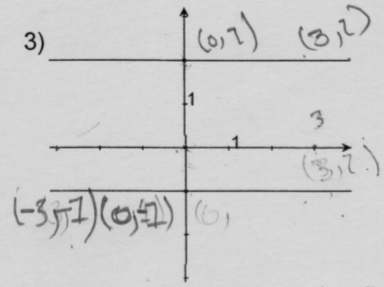
Trabajo realizado por la estudiante ES2



Trabajo realizado por la estudiante ES3







a) Si porqué. Tiene un punto de corte.

b) (1,3). una sola solución.

$$m = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} \qquad \begin{matrix} x_2 & y_2 \\ (0, & 2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_0 & y_0 \\ (-2, & 0) \end{matrix}$$

$$m = \frac{2 - 0}{0 - (-2)} = \frac{-2}{2} = 1$$

$m = 1.$

$y_2 - y_0 = m(x_2 - x_0)$

$y - 0 = 1\,(x_2 - (-2)$

$y = x_2 + 2$

$y = x_2 + 2.$

$y_2 = -3x_2 + 6.$

$$m = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$$

$$\begin{matrix} x_2 & y_2 \\ (1, & 3) \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_0 & y_0 \\ (2, & 0) \end{matrix}$$

$$m = \frac{3 - 0}{1 - 2} = \frac{3}{-1} = -3$$

$m = -3.$

$y_2 - y_0 = m.(x_2 - x_0)$

$y_2 - 0 = -3\,(x_2 - (2))$

$y_2 = -3x_2 + 6.$

2) si porque tiene infinitos puntos de corte.

b) infinitas soluciones

$\begin{matrix} x_2 & y_2 \\ (0, & 3) \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_0 & y_0 \\ (-2, & 0) \end{matrix}$

$m = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$

$m = \dfrac{3 - 0}{0 - (-2)} = \dfrac{3}{2}$

$m = \dfrac{3}{2}$

$y_2 - y_0 = m\,(x_2 - x_0)$

$y_2 - 0 = \dfrac{3}{2}\,(x_2 - (-2))$

$y_2 = \dfrac{3x_2}{2} + 6$

$\begin{matrix} x_2 & y_2 \\ (-3, & -1) \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_0 & y_0 \\ (0, & -1) \end{matrix}$

$m = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$

$m = \dfrac{-1 - (-1)}{-3 - 0} = \dfrac{0}{3} = 0$

$m = 0$

$y_2 - y_0 = m\,(x_2 - x_0)$

$y_2 - (-1) = 0\,(x_2 - 0)$

$y_2 + 1 = 0$

$y_2 + \cancel{x} - \cancel{1} = 0\,1$

$y_2 = -1$

$y_2 = -1, \; y$

$y_2 = 2)$

③ no porque es paralela

b) no tiene solución.

$m_1 = m_2$

$\begin{matrix} x_2 & y_2 \\ (0, & 2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_0 & y_0 \\ (3, & 2) \end{matrix}$

$m = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$

$m = \dfrac{2 - (2)}{0 - (3)} = \dfrac{-0}{3} = 0$

$m = 0$

$y_2 - y_0 = m\,(x_2 - x_0)$

$y_2 - (2) = 0(x_2 - (3))$

$y_2 - 2 = 0$

$y_2 - x + x = 0\,2$

$y_2 = 2$

Trabajo realizado por el estudiante ES1

4.2. Trabajo con los estudiantes de segundo semestre

4.2.1. Descripción de los estudiantes:

Seleccionamos un grupo de estudiantes de Álgebra lineal II, de la Universidad Industrial de Santander. Esta asignatura forma parte del programa académico del segundo semestre, para de las carreras de Física, Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Electrónica, Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas, por lo tanto los jóvenes que respondieron la prueba diagnóstica pueden estar inscritos en cualquiera de los programas de formación profesional mencionados. De igual manera no necesariamente son de segundo semestre, pero si tenemos la seguridad de que para estar inscritos en este curso, deben cumplir con el requisito de aprobar Álgebra lineal I, asignatura de la cual forma parte del programa el tema:solución de sistemas de ecuaciones lineales. Esto implica que los estudiantes que colaboraron para la aplicación de los instrumentos diseñados, ya han tenido contacto por lo menos en dos momentos de su vida escolar con el tema objeto de nuestra observación: solución de sistemas ecuaciones lineales con dos incógnitas. Con este grupo se llevaron a cabo los dos momentos planteados en nuestra metodología: primero la aplicación de una prueba diagnóstica y posteriormente una entrevista didáctica. A continuación detallamos las características y análisis hechos para cada una de ellas.

4.2.2. Descripción y aplicación de la prueba diagnóstica:

La prueba se realizó en el mes de junio de 2010, en el edificio Camilo Torres, a los 29 estudiantes que asistieron a clase. Cada estudiante recibió una hoja cuadriculada tipo examen y la fotocopia de la prueba; se les explicó la intencionalidad de la prueba y se les invitó a contestar con el mayor compromiso posible. Nos parece adecuado aclarar que ninguno de los dos profesores autores de este informe, somos los maestros titulares de esta asignatura, por lo tanto no conocíamos el proceso previo ni las condiciones particulares de los estudiantes. Además los estudiantes no estaban advertidos, ni tuvieron ningún tipo de preparación previa. Por lo cual contamos exclusivamente con los conocimientos y habilidades adquiridos por lo menos un semestre antes, durante el curso de Álgebra Lineal I y desde luego en el colegio, al aprobar noveno grado de básica secundaria.

Durante la aplicación de la prueba (Ver anexo) fue necesario hacer dos aclaraciones:

1. En la parte *b*. del punto 2, efectivamente hay dos rectas graficadas.
2. Si hay alguna pregunta que no puedan contestar, favor escribir los motivos.

4.2.3. Análisis a priori de la prueba diagnóstica:

A continuación relacionamos las respuestas que los estudiantes pueden proporcionar a cada una de las actividades propuestas. Esta recopilación se realizó a la luz de evidenciar el tránsito entre los modos de pensamiento objeto de nuestra observación.

1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3y + x = 7 \\ y - x = -1 \end{cases}$:

a. Dibuja la representación gráfica de cada ecuación del sistema.
b. ¿Cuántos puntos de corte tienen las rectas?
c. ¿Qué representa para el sistema de ecuaciones los puntos de corte de las rectas?
d. ¿Se puede establecer con anticipación si hay uno o más puntos de corte? Justifica tu respuesta.

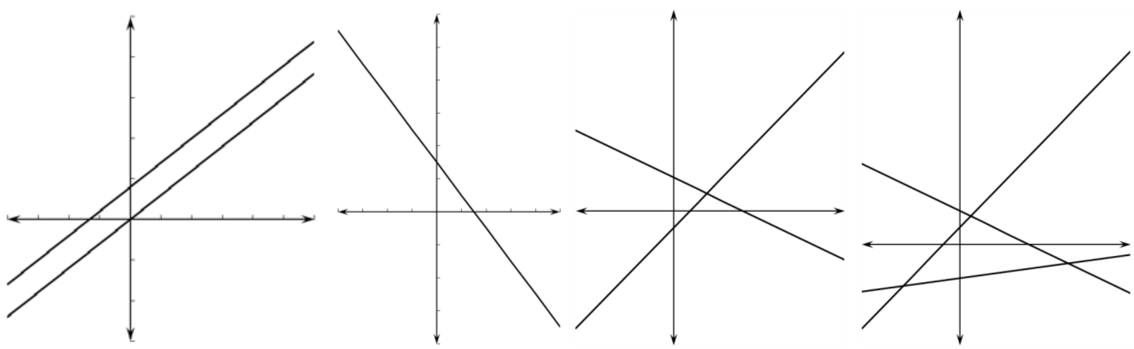
En esta primera parte nuestra intención es determinar el estado de los estudiantes, sus conocimientos y el manejo de la teoría, así como sus reacciones a las preguntas formuladas con un toque diferente a lo cotidiano del tema. Por lo tanto cada una de las preguntas formuladas nos permitirá observar en primera instancia qué puede ocurrir con el aprendizaje del concepto: solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. El formato de la prueba tal como la recibieron los estudiantes se encuentra en el anexo 1. Para la escogencia de las preguntas se tomaron como referencia los ejercicios tipo, que aparecen en el libro de Álgebra lineal de Grossman (1996), teniendo presente en todo momento nuestro objetivo: Detectar si los estudiantes logran hacer el tránsito entre los tres tipos de pensamiento.

El sistema de ecuaciones de esta primera actividad, es un sistema 2x2 con solución única. ¿Qué pretendemos? En la parte *a.*, ver si se da el tránsito entre el pensamiento aritmético y el geométrico en su nivel más elemental, que es elaborar la gráfica correspondiente al par de rectas. Con las preguntas *b.* y *c.*, se manifiesta si hacen el proceso reversible, es decir, una vez hecha la gráfica, pueden obtener características del sistema de ecuaciones. Es decir, determinar si identifican el punto de corte entre las dos rectas y asocian las coordenadas de este punto de corte con la solución del sistema que serían las evidencias del tránsito del pensamiento geométrico al aritmético. En la pregunta *d*. hacemos nuestro primer intento de observar si hay pensamiento estructural, dado que para responder, consideramos que deberían emplear alguna propiedad general. Esta propiedad conocida de los sistemas de ecuaciones plantea que si dos rectas en R^2, tienen pendientes distintas, obligatoriamente se cortan en un punto, por lo tanto el sistema de ecuaciones tiene solución única.

2. Las rectas que aparecen en cada plano, representan un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Para cada caso representado contesta las siguientes preguntas:

a. ¿El sistema tiene solución? ¿Por qué?
b. ¿Cuál es la solución?
c. Escribe un sistema de ecuaciones que corresponda a la representación gráfica. ¿Qué características tiene este sistema?

a) b) c) d)



Esta actividad en los tres incisos, tiene como objetivo especificar si hay tránsito desde el pensamiento geométrico, hacia el aritmético, dado que se pretende, que a partir de la observación de las graficas los estudiantes determinen si hay un punto de corte único (gráfica *c.*) entre las rectas, quien representa la solución del sistema. O que identifiquen que rectas paralelas representan un sistema de ecuaciones que no tiene solución (gráfica *a.*); una sola recta en la grafica *b.,* significa que tenemos dos rectas que ocupan el mismo lugar geométrico, es decir, el sistema de ecuaciones que las modela tiene infinitas soluciones; o el caso inusual, el de tres rectas (gráfica *d.*), donde debe ser más claro que los estudiantes identifiquen si hay un punto de corte entre las tres (solución única) o que a pesar de que se intersecan dos a dos, no hay un punto que cumpla con la ecuación de las tres rectas, por lo tanto el sistema no tiene solución. La pregunta *c.*, es la que más aportes brinda para detectar el tránsito entre el pensamiento geométrico y el aritmético, dado que escribir el sistema de ecuaciones a partir de la gráfica, es la muestra más evidente de esto. Además al preguntar por características del sistema esperamos que los estudiantes hagan algunas generalizaciones que nos permitan determinar un modo de pensamiento analítico.

> 3. Resuelve el siguiente problema: Una profesora de matemáticas para estimular a un alumno de su clase le dice: “por cada ejercicio que resuelvas bien te daré $7000 y por cada uno que hagas mal me darás $5000”. Después de hacer 25 ejercicios, el muchacho recibe $55000. ¿Cuántos ejercicios ha resuelto bien?
> a. Escribe el sistema de ecuaciones asociado al problema.
> b. Determina si el sistema tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución. ¿Por qué?
> c. Podrías hacer una gráfica que represente la solución del problema? ¿Qué significado tendría para ti dicha gráfica? ¿Qué información podría leerse en la grafica?

Con esta actividad esperamos ver otra manifestación del pensamiento aritmético: el proceso mediante el cual un estudiante puede interpretar el lenguaje escrito y lo asocia correctamente con la representación algebraica correspondiente. La correcta solución de problemas ha sido una dificultad latente en los estudiantes que se enfrentan con cualquier conocimiento matemático. Aparte de resolver el problema, las preguntas apuntan una vez más, a comprobar si los modos de pensamiento del Algebra Lineal están presentes en los estudiantes. Cuando contestan que tipo de solución tiene el sistema probamos la presencia del pensamiento aritmético; cuando elaboran la grafica del sistema de ecuaciones generado por ellos, el pensamiento geométrico caracteriza la situación y cuando responden a las preguntas del inciso *c*., se concreta el tránsito entre el pensamiento geométrico y el aritmético.

4. Teniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

¿Qué información necesitas saber para determinar si el sistema tiene solución única? Justifica ampliamente tus

Esta actividad representa nuestra intención de detectar la presencia del pensamiento analítico y la generación del tránsito entre los otros modos de pensamiento como una manera de comprender la situación a partir del análisis de casos particulares. Consideramos que los estudiantes conocen y aplican propiedades generales de un sistema de ecuaciones lineales, saben qué implicaciones tienen estas propiedades y son capaces de asociar distintos ambientes, (determinantes, matrices inversas, Método de Gauss, Método de Gauss-Jordan por mencionar algunos) con la solución de un sistema.

Por ejemplo, fijar que si la matriz asociada al sistema es cuadrada, entonces basta con garantizar que:

1. Si el determinante es diferente de cero, entonces el sistema tiene solución única.

2. Si es invertible, el sistema tiene solución única.

3. Si es equivalente por renglones a la matriz identidad, el sistema tiene solución única.

4. Si el determinante es cero, el sistema tiene infinitas soluciones o no tiene solución.

Por otra parte si la matriz asociada al sistema no es cuadrada, se puede analizar:

1. Si el sistema de ecuaciones es homogéneo, siempre tiene solución, por lo menos la trivial.

2. Si el sistema tiene más variables que ecuaciones, no puede tener solución única.

Ahora en esta representación de ***n*** variables, ya perdemos de vista el pensamiento geométrico, porque por obvias razones, nos quedamos sin la opción de representar el sistema de ecuaciones.

4.2.4. Análisis a posteriori de la prueba diagnóstica:

Como se mencionó en la descripción de los estudiantes, el grupo presenta características muy heterogéneas. El curso está a cargo de un profesor diferente a los dos autores del presente trabajo, por lo tanto son estudiantes con los cuales no había relación directa ni contacto frecuente, esta situación originó el hecho de que dos personas prácticamente no hicieron el intento de responder la prueba y entregaron el cuestionario a la mayor brevedad posible. Nos parece pertinente mencionar una circunstancia adicional, al día siguiente tenían parcial de la asignatura a las 6.00 a.m., así que quienes contestaron a cabalidad el cuestionario, realmente nos merecen nuestro agradecimiento.

4.2.4.1. Análisis de la actividad 1:

En general todos los estudiantes hicieron correctamente la gráfica, pero es llamativo encontrarse con el hecho de que nueve estudiantes hicieran cada gráfica en un plano cartesiano diferente. Y aún más, una buena cantidad (15 estudiantes) empleó tablas de valores con más de dos puntos para elaborar las graficas. Parece que no tienen claro que una recta en el plano queda determinada sólo por dos puntos. De los estudiantes restantes, muy pocos usaron los puntos de corte con los ejes, y menos aún la transformación de la ecuación en su forma canónica, para identificar la pendiente y el corte con el eje y. Estos estudiantes dibujaron dos puntos arbitrarios, aunque esto sea correcto, esperábamos que por lo menos alguno de los estudiantes empleara estas ideas.

Nos llama la atención que cuando se pregunta sobre los puntos de corte, la mayoría de los estudiantes contestan que las rectas tienen dos, tres, cuatro puntos de corte. Es decir, la interpretación de la pregunta no apunta hacia el punto de corte entre las rectas, sino a los cortes de las rectas con los ejes. Por lo tanto sólo unos pocos asocian este corte con la solución del sistema. A la pregunta *d.*, la gran mayoría (24 estudiantes), no interpretaron correctamente la pregunta, o no supieron asociarla con los conocimientos previos; porque algunos contestan que no se puede predecir si hay puntos de corte. Es decir, no recuerdan ninguna propiedad del sistema que de manera general les permita determinar si el sistema tiene o no solución única. Por otra parte los que contestan que sí es posible a continuación explican el método aritmético que aplicarían para asegurarse, es decir, tampoco tienen clara ninguna propiedad que generalice esta situación. Sólo tres estudiantes pusieron en evidencia algo de su pensamiento analítico, a continuación transcribo su respuesta:

ES1: "Depende de si el sistema tiene solución, si las dos ecuaciones son idénticas hay infinitos puntos de corte, si los coeficientes de las variables son iguales o múltiplos y la constante diferente no tendrá solución"

ES2: "Sí, se puede establecer de antemano, porque al ver las ecuaciones nos damos cuenta que son líneas con dirección diferente y las dos con dominio infinito, esto nos hace ver que habrá uno o ningún punto de corte entre ambas"

ES3: "Si se puede establecer, cuando se transformaron las ecuaciones en funciones lineales. Ya se observaba que las pendientes eran diferentes y por lo tanto se interceptaban. También si descubríamos los valores de "x" e "y" por sustitución o de otra forma hallaríamos las coordenadas del punto de corte.

> *Otra forma sería montar la matriz asociada y por método de Gauss-Jordan encontrar dichos valores”*

La trascripción de las respuestas anteriores no quiere decir que sean correctas, sino que son los únicos que intentan de alguna manera contestar este interrogante desde el punto de vista general. Aunque es patente, que de manera irremediable terminan basándose en sus ideas netamente algorítmicas, a pesar de que en el curso de Algebra Lineal I, se supone que ya desarrollaron los teoremas relacionados con esta temática. Al leer con detenimiento sus argumentos, puede observarse, que están manifestando ideas de tipo geométrico, porque sus conclusiones se basan en las características lineales de la gráfica.

4.2.4.2. Análisis de la actividad 2:

Los hallazgos aquí son de dos tipos: geométrico, relacionado con la representación de los sistemas y su solución, es decir, la parte donde asocian las características de la gráfica (existencia o no de puntos de corte entre las rectas correspondientes, según el caso) y aritmético, la representación de los sistemas de ecuaciones asociados a cada una de las gráficas. La gran mayoría, por no decir que todos, contesta adecuadamente, es decir, dicen que en el primer caso no hay solución, porque las rectas son paralelas, para la segunda gráfica, concluyen que las soluciones son infinitas, porque las dos rectas se superponen, luego la solución única claramente expuesta en la tercera gráfica donde las dos rectas se cortan en un punto y por último reconocen que el sistema de la cuarta gráfica es inconsistente porque las tres rectas no se cortan en un solo punto. Pero en el siguiente paso, muy pocos escriben las ecuaciones de las rectas graficadas, la mayoría explica que se debe a que las coordenadas no se distinguen y por lo tanto no se puede escribir una ecuación. Sólo una de las estudiantes trata de hacer un análisis, transcribo la respuesta de esta estudiante y una de las más comunes de los demás estudiantes.

ES1: “a) Dos rectas paralelas, tienen la misma pendiente. $y = x + b$, $y = x + c$ *y es positiva ésta pendiente.*
b) $y = -x + b$ *,* $y = -x + b$ *, dos rectas iguales con pendientes negativas*
c) Dos rectas que se cortan en un punto $y = -x + b$ *,* $y = x + c$ *“*

ES2: “Decidí no contestarla porque para que escribo cosas que están mal, pues no sé como hallar las ecuaciones de esas rectas, ya que no tengo sino el plano y líneas.”

De las respuestas de ES1, se puede ver en parte que está haciendo el tránsito entre el pensamiento geométrico y el aritmético, además está trabajando con características generales estimadas a partir de la gráfica.

4.2.4.3. Análisis de la actividad 3:

La mayor parte de los estudiantes hacen el intento de resolver el problema, pero no lo logran porque les quedan mal armadas las ecuaciones, y de ahí en adelante las conclusiones que obtienen son erróneas, y no completan el proceso. Cinco estudiantes resuelven correctamente el problema, -el muchacho del problema resuelve 15 ejercicios bien- emplean diferentes procedimientos, inclusive uno hace una tabla de posibles valores para determinar cuál opción verifica la situación planteada en el problema. Dentro de este grupo de estudiantes sólo dos completan las instrucciones, que incluían hacer la gráfica del sistema y responder las inquietudes. Transcribo la respuesta a los dos requerimientos sobre la gráfica:

ES1: “La gráfica me indicaría en dónde están intersectadas las rectas y esta sería la solución”
ES2: “De la gráfica puedo decir la solución”

El análisis de los resultados nos muestra que no se está evidenciando realmente el tránsito entre el pensamiento geométrico y el aritmético; porque a pesar de que en la pregunta *2.*, parece que si se logra, cuando se requiere la misma experiencia en otro contexto ya no se identifica con claridad. Esto se debe a que los argumentos escritos no permiten asegurar si realmente los estudiantes logran identificar el punto de corte de las rectas como la solución única del sistema de ecuaciones lineales. Esta circunstancia, donde la parte escrita por sí sola no nos aporta claridad para dar evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento, es la que nos animó inicialmente a trabajar con el siguiente instrumento: La entrevista didáctica, donde además que se trabajan las actividades por escrito, la interacción verbal con el entrevistador, permite obtener pruebas del proceso de pensamiento, que en el escrito están muy limitadas.

4.2.4.4. Análisis de la actividad 4:

Los resultados generales apuntan a que la mayoría de los estudiantes recuerda vagamente características relacionadas con el sistema de ecuaciones como el determinante, el número de ecuaciones y de variables, pero no escriben respuestas coordinadas que evidencien que poseen pensamiento analítico entendido como: el manejo de propiedades generales y las consecuencias de cada propiedad. A este nivel seis estudiantes pueden hacer un acercamiento coordinado, vamos a transcribir primero las respuestas de estos estudiantes y luego haremos el análisis derivado de ellas.

> *ES1: "Necesito saber qué relación hay entre m y n, es decir el número de incógnitas y el número de ecuaciones. Si el número de incógnitas es igual que el número de ecuaciones entonces tiene infinitas soluciones, si es menos, tiene única solución. Además si el determinante es diferente de cero"*
>
> *ES2: "Si el determinante es diferente de 0"*
>
> *ES3: "Necesitamos saber: Si m = n, o, n < m, o, n>m, esto con el fin de saber si tenemos más ecuaciones que incógnitas, en cuyo caso tendríamos infinitas*

soluciones. O si hay más incógnitas que ecuaciones, en cuyo caso no habría solución a falta de ecuaciones. O si las ecuaciones son el mismo número de incógnitas y así se obtiene solución única. Necesitamos saber si la solución (b_1, b_2, b_3, … , b_n) es el vector nulo en cuyo caso sería un sistema homogéneo y única solución sería 0. O si es diferente al vector nulo en cuyo caso tendría solución única, de la forma $A^{-1}x$, donde A es la matriz de coeficientes y x el vector de incógnitas. Si el determinante de la matriz es cero, esta no tiene solución"

ES4: "Pues buscando una solución fija, sería buscarle el determinante. Por lo cual necesitaríamos las dimensiones totales de la matriz, sus componentes arbitrariamente se diría que mxn posibilidades de tener respuesta única o infinitas. Si la matriz fuera diagonal podría determinar el determinante su saberlo así"

ES5: "Necesitaría saber que son más ecuaciones que incógnitas. Si $m > n$, entonces sería más ecuaciones que incógnitas, sería una solución o ninguna. Si $m < n$ serían menos ecuaciones más incógnitas, serían infinitas soluciones"
ES6: "Primero, para poder saber si el sistema tiene solución debo saber que $m \geq n$, puesto que "m" son las ecuaciones del sistema y "n" el número de incógnitas. Si esta desigualdad no se cumple, el sistema podría tener infinitas soluciones o no tener"

Al analizar los resultados de los estudiantes, nos queda claro que los estudiantes en principio, tienen las ideas en su mente; que recuerdan que si el determinante de la matriz es diferente de cero, el sistema tiene solución única, pero no recuerdan que para hablar de determinante, se debe cumplir la condición $m = n$.- Aunque recuerdan las relaciones que pueden establecerse al calcular el determinante no tienen en cuenta las condiciones iniciales para aplicar dicho resultado. De igual manera al establecer relaciones que tienen que ver con la inversa de la matriz asociada al sistema. Sólo un estudiante habla de la posibilidad de sistema homogéneo, y de su solución trivial pero no lo asocia con el número de ecuaciones y de incógnitas. Estos resultados están relacionados, con la necesidad que desarrollan los estudiantes por memorizar ciertos resultados que se trabajan en álgebra lineal, sin desarrollar una verdadera construcción de los mismos y establecer de manera consciente las conexiones que deben establecerse para aplicarlos.

Nos queda la inquietud, a la cual trataremos de aportar en el capítulo de conclusiones: ¿Qué debemos hacer los maestros para que nuestros estudiantes construyan conceptos matemáticos más allá de la mecanización de algoritmos? En este caso consideramos que esto implica recordar en el momento indicado, los conceptos realmente construidos y como lo hemos expuesto desarrollar la capacidad de transitar entre los modos de pensamiento expuestos por Sierpinska, tránsito que evidencia la fortaleza del aprendizaje y determinar la comprensión de las diferentes representaciones que admite un concepto matemático.

4.2.5. Descripción y aplicación de la entrevista:

La entrevista realizada consta de siete actividades relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Las preguntas se presentaron de forma escrita a los estudiantes y buscan fundamentalmente generar el tránsito entre los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y el analítico-estructural. La entrevista se aplicó en forma individual, proporcionándole a cada estudiante un problema a la vez, de esta manera hasta que no se resolviera la situación planteada no se pasaba a la siguiente.
Las actividades se fueron aplicando una a una conforme las iban contestando. Se empleó una videocámara fija y orientada hacia las hojas de trabajo, con la cual quedaron grabados las imágenes y el sonido asociado a cada entrevista. La oficina de trabajo, fue la sala de consultas de los profesores cátedra, de la escuela de Matemáticas, en la Universidad Industrial de Santander. El papel de la maestra fue orientar las respuestas de los estudiantes, sin interferir con sus

apreciaciones, sino aportando las herramientas que les permitieran conectar sus ideas y expresarlas de manera más clara. En algunos casos dando ejemplos, que les ayudaran a recordar e identificar los distintos factores que influyen en una apreciación respecto de la temática en cuestión. Las entrevistas se realizaron una el jueves 24 de junio y las otras dos el viernes 25 de junio de 2010, contando con una duración promedio de 55 minutos. Las actividades de la entrevista se encuentran en el Anexo 2.

4.2.6. Análisis a priori de la entrevista:

Actividad 1

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones. Indica cuántas soluciones hay y cuáles son las soluciones. Si no hay solución explica por qué no existe. ¿Puedes establecer una condición general para determinar si existe o no solución y qué tipo de solución se da en un sistema de ecuaciones lineales 2×2, sin resolver el sistema?¿cuál?

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 13 \end{cases}$$

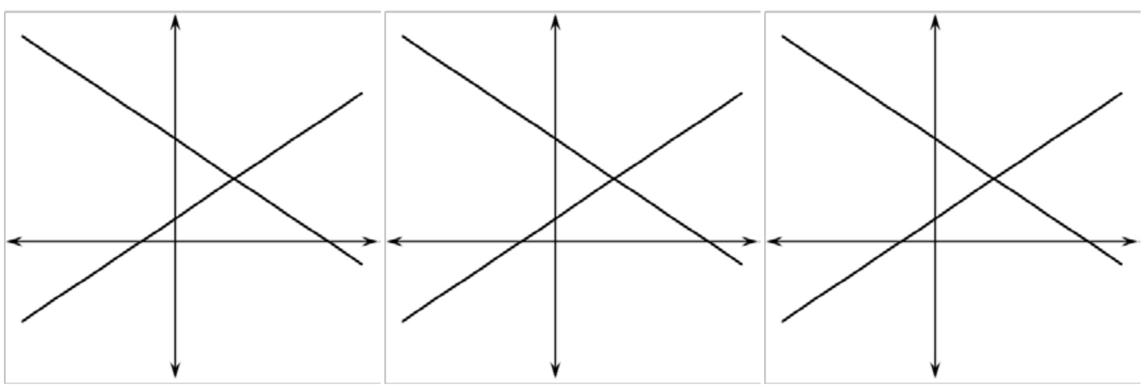
Los sistemas de ecuaciones que se presentaron a los estudiantes, son en orden de izquierda a derecha, de única solución, de infinitas soluciones y sin solución. Se espera que una vez resueltos los sistemas, sin importar el método utilizado los estudiantes recuerden de manera una propiedad general que les permita establecer de manera previa qué tipo de solución tiene un sistema 2x2. Más aún, que la parte aritmética, les permita establecer que posibilidades de solución puede tener un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Si los estudiantes trabajan conforme a lo esperado, estaríamos encontrando una primera evidencia del tránsito entre el modo de pensamiento analítico- aritmético al analítico-estructural. Es claro que esto no se logra sólo resolviendo algunos sistemas, sin embargo, esperamos que acudan a las estructuras que de manera previa han construido para lograr establecer una generalización coherente sobre la solución de un sistema. En las siguientes actividades se presentan otras opciones de detectar en primera instancia si los estudiantes emplean el modo de pensamiento estructural y si ello les permite enlazar sus ideas con los modos aritmético y geométrico.

Actividad 2

A partir de la representación gráfica de las dos líneas rectas de la figura ¿Es posible dibujar una tercera recta de modo que el sistema de ecuaciones lineales que implica, tenga:

a) Solución única
b) Más de una solución
c) Ninguna solución

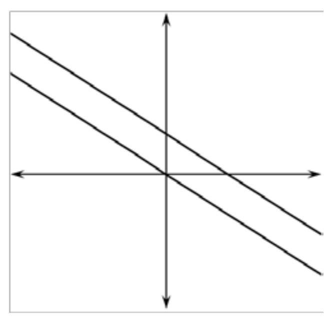
Para cada caso, si la respuesta es sí, dibuja la recta que corresponde a tu apreciación; y si la respuesta es no, explica por qué no es posible.



En esta actividad queremos potenciar el pensamiento geométrico, ver si el concepto aritmético de solución de un sistema de ecuaciones lineales está correctamente asociado con su representación geométrica (punto de corte entre las rectas). Aunque el problema aparece en un contexto diferente al tradicional dado que lo usual para estos casos es trabajar con dos ecuaciones únicamente, al incluir una tercera recta, buscamos motivar un tipo de pensamiento geométrico que le permita a los estudiantes reflexionar sobre sistemas de dos incógnitas con más de una ecuación. Según el desempeño de los estudiantes en esta actividad, podremos obtener evidencias del tránsito entre el pensamiento aritmético y el geométrico, sin necesidad de manejar ningún tipo de operación algebraica; dado que en este caso estará en juego el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (trabajando con las tres posibilidades de solución que pueden darse) para el caso donde el número de ecuaciones es mayor que el número de variables.

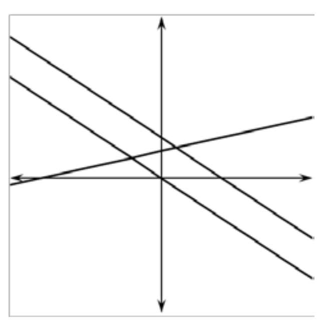
Actividad 3

Teniendo en cuenta la representación gráfica de las dos rectas paralelas en el plano, escribe el sistema de ecuaciones lineales correspondiente. ¿El sistema tiene solución única? ¿Por qué? ¿El sistema tiene infinitas soluciones? ¿Por qué? ¿El sistema no tiene solución? ¿Por qué?



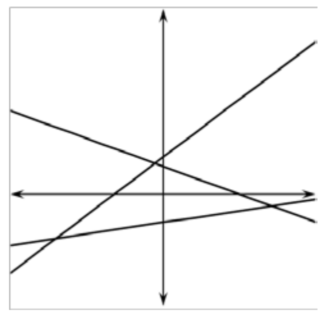
Actividad 4

Teniendo en cuenta la representación gráfica de tres rectas en el plano, escribe el sistema de ecuaciones lineales correspondiente. ¿El sistema tiene solución única? ¿Por qué? ¿El sistema tiene infinitas soluciones? ¿Por qué? ¿El sistema no tiene solución? ¿Por qué?



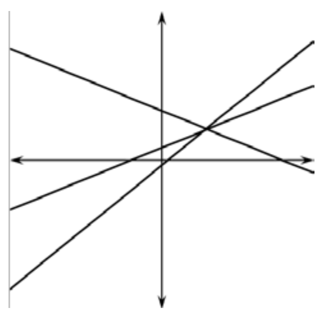
Actividad 5

Teniendo en cuenta la representación gráfica de tres rectas en el plano, escribe el sistema de ecuaciones lineales correspondiente. ¿El sistema tiene solución única? ¿Por qué? ¿El sistema tiene infinitas soluciones? ¿Por qué? ¿El sistema no tiene solución? ¿Por qué?



Actividad 6

Teniendo en cuenta la representación gráfica de tres rectas en el plano, escribe el sistema de ecuaciones lineales correspondiente. ¿El sistema tiene solución única? ¿Por qué? ¿El sistema tiene infinitas soluciones? ¿Por qué? ¿El sistema no tiene solución? ¿Por qué?



Las actividades 3, 4, 5 y 6, están pensadas bajo la misma premisa, evidenciar el tránsito entre el pensamiento geométrico y el aritmético, y si las condiciones de los estudiantes lo permiten que ese tránsito esté permeado por el pensamiento analítico. Se espera que los estudiantes escriban un sistema de ecuaciones para cada caso, empleando únicamente las características aportadas por la gráfica. Es intencional que no aparezca ningún tipo de dato numérico, para observar las reacciones de los estudiantes y detectar sus habilidades geométricas. Esperamos que de esta manera, sea posible observar las características generales que aporta la geometría y como pueden ser modeladas de manera aritmética. Nos interesa la forma como se justifican cada uno de los casos: el sistema sin solución, el sistema con solución única y clarificar que significarían las infinitas soluciones. El trabajo con tres rectas, constituye un nuevo ambiente, lo cual permite potenciar y refinar la conexión entre la solución del sistema y el punto de corte entre las rectas.

Actividad 7

Teniendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m \end{cases}$,

¿Cómo podemos determinar que el sistema no tiene solución? ¿Cuáles serían las condiciones para predecir que el sistema tiene infinitas soluciones? ¿Qué información necesitas saber para determinar si el sistema tiene solución única? En cada caso trata de establecer la información necesaria y suficiente y justifica cada opción.

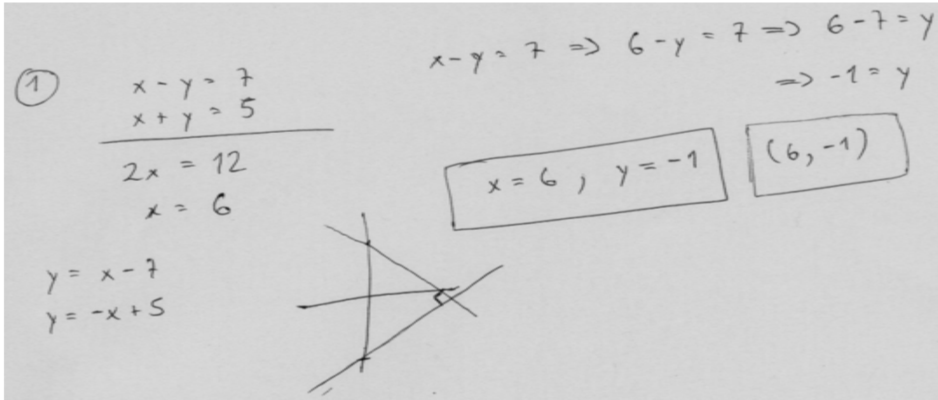
Esta actividad apunta a concretar la presencia del modo de pensamiento estructural, y cómo los estudiantes relacionan las propiedades generales de un sistema de ecuaciones lineales trabajadas en sus cursos de Álgebra de primer semestre. Sólo que en su momento dichas propiedades y teoremas se trabajan para sistemas mxn, y en este caso pretendemos, que sean capaces de aterrizar estos conceptos, para nuestros sistemas de ecuaciones con dos incógnitas lo que nos permite predecir con certeza las tres posibilidades de solución. Esperamos que con la adecuada orientación puedan establecer características específicas y precisas, de tal manera que no se dejen cabos sueltos.

4.2.7. Análisis a posteriori de la entrevista:

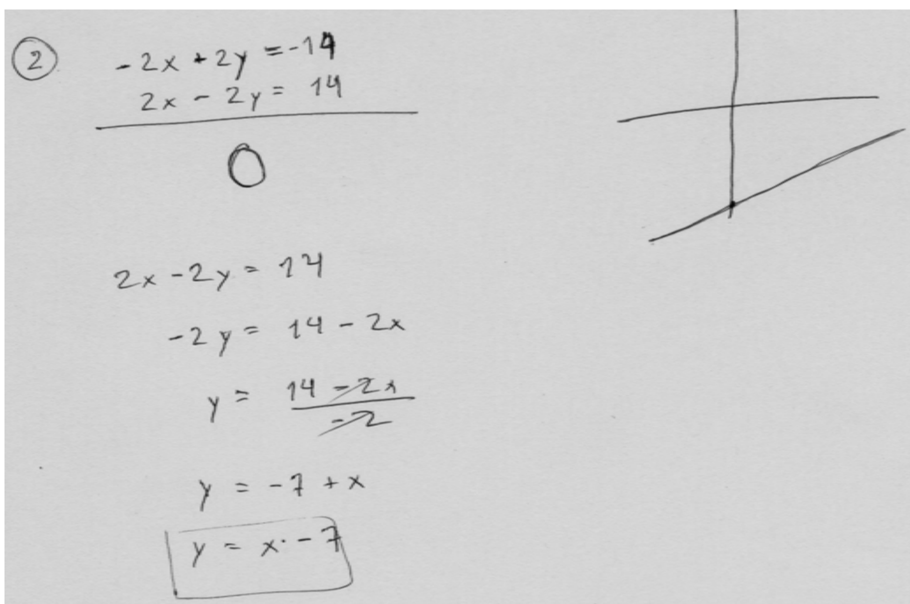
Para nuestro análisis, llamaremos a los estudiantes ES1, ES2 y ES3. El estudiante ES1 está cursando el programa de Matemáticas, La estudiante ES2, formaba parte del programa de Licenciatura en Matemáticas y el estudiante ES3, es del programa de Ingeniería Electrónica, la profesora que aplicó la entrevista la representaremos con E.

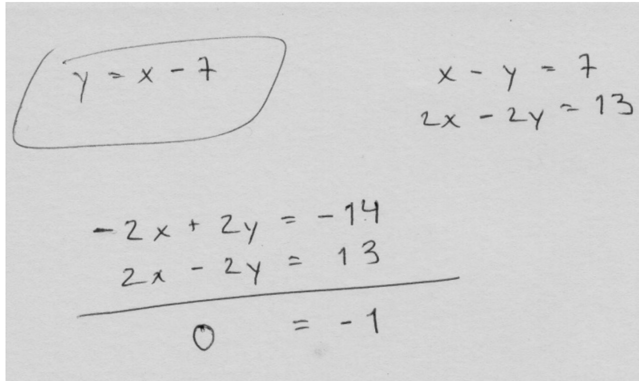
4.2.7.1. Análisis de la actividad 1:

Los tres estudiantes resolvieron los tres sistemas de ecuaciones por distintos métodos, a gusto de cada uno. Los estudiantes ES1 y ES3, emplearon el mismo método para los tres sistemas, en cambio la estudiante ES2, decidió probar con dos métodos diferentes. Además los tres presentaron una característica común, para explicar sus respuestas, la reacción natural fue elaborar la gráfica asociada a cada sistema de ecuaciones. En la representación geométrica, señalaron las condiciones que cumplía cada sistema; en el primer caso, la solución es única, en el segundo caso las soluciones son infinitas y para el tercer caso la respuesta es no hay solución. Al desarrollar los procedimientos se notan los mecanismos adquiridos: numerar las ecuaciones, graficar las rectas ubicando los puntos de corte. Además los tres estudiantes no intentaron hacer la gráfica exacta, sino una aproximación trabajando a escala o simplemente con los datos de la pendiente. A continuación aparece la imagen del proceso que cada uno desarrolló. También es importante mencionar que el tiempo empleado para desarrollar los ejercicios fue muy corto y como tenían seguridad, el diálogo fue mínimo. En general podemos decir que en principio el tránsito entre el pensamiento aritmético y el pensamiento geométrico, es claro, y los estudiantes lo manifiestan con fluidez, para ellos trabajar con sistemas 2x2, es sencillo.



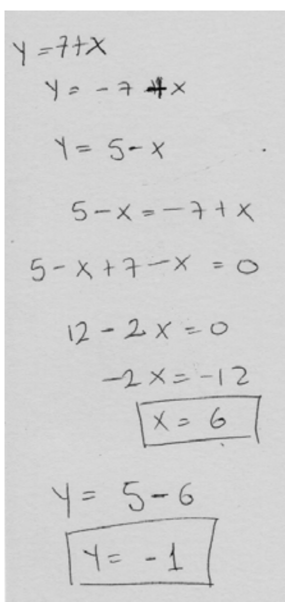
El estudiante ES1, trabaja por método de reducción, inmediatamente termina de resolver el primer sistema, elabora la gráfica, empleando la ecuación canónica de la recta, de manera tal que ubica el punto de corte de la recta con el eje *y* y luego traza la grafica haciendo una estimación de la pendiente. Este proceso lo emplea para los otros sistemas, como podemos ver a continuación.

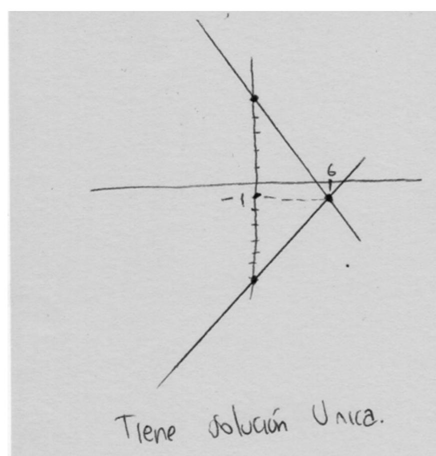




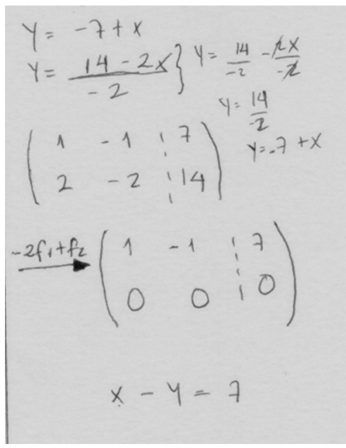
Como podemos ver para el tercer sistema el estudiante ES1, ya no dibuja gráfica, hace una corta explicación, a saber:

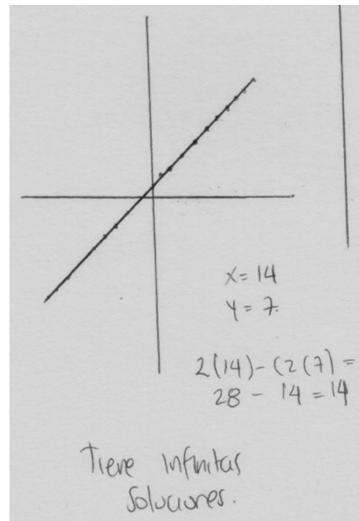
> *ES1: Son casi las mismas ecuaciones del sistema anterior, por lo que puedo usar la misma información…*
>
> *ES1: Cero igual uno. Listo, el sistema no tiene solución. Claro está, las rectas son paralelas, tienen la misma pendiente ($m = 1$) y diferente punto de corte con el eje y.*





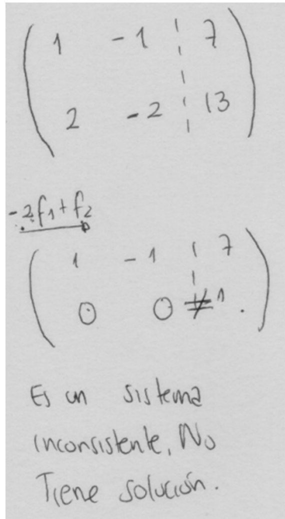
La estudiante ES2, resuelve el primer sistema por método de igualación, a continuación realiza la gráfica, ubicando los interceptos con el eje *y* y el punto de corte entre las dos rectas, luego traza la gráfica.

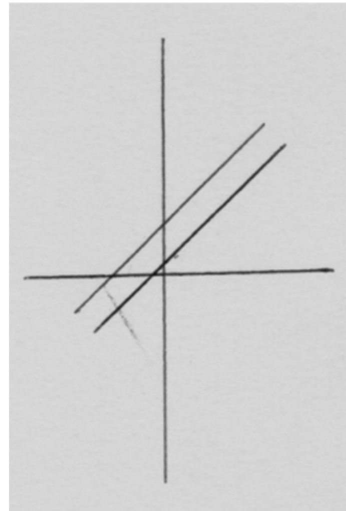




Para el segundo sistema ES2, primero intenta el método de igualación, el mismo que usó para el primer ejercicio y luego decide emplear el método de Gauss. En el trazado de la gráfica, primero traza la recta que octuvo como solución del sistema ($x - y = 7$) y luego verifica uno de los puntos de esta recta en la ecuación de la otra y hace el siguiente comentario:

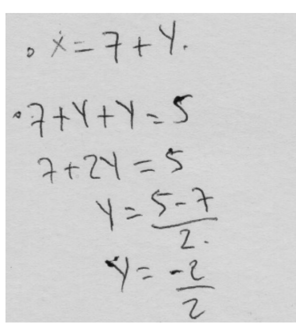
> *ES2: En este punto coinciden las dos rectas, y como el sistema tiene infinitas soluciones, también ocurre lo mismo en los demás puntos (mientras dice esto, marca varios puntos sobre la recta que a dibujó). Esto quiere decir, que las rectas coinciden en todos y cada uno de los puntos.*

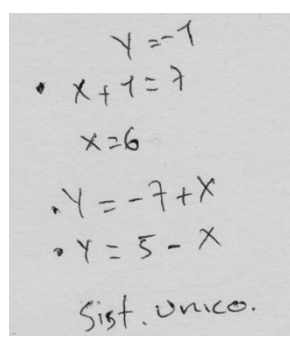




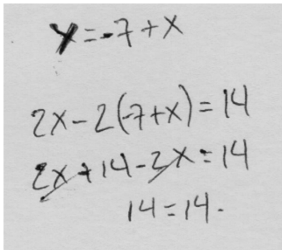
Para el tercer sistema de ecuaciones, plantea inmediatamente la matriz aumentada, usando la notación obtenida en el problema anterior. Al realizar las operaciones encuentra la forma indeterminada, que le permite concluir que el sistema no tiene solución. Elabora la grafica, tomando como referencia la que dibujó para el punto anterior, luego, sin tener en cuenta las condiciones particulares del problema traza una recta paralela. Este comportamiento nos pone de manifiesto que está realizando el tránsito entre el pensamiento aritmético y el geométrico, puesto que la gráfica la elabora con base en las carácterísticas particulares del sistema, sin emplear estrictamente los datos numéricos.

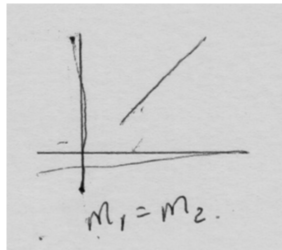
El estudiante ES3, resolvió los tres sitemas por método de sustitución, para cada uno desarrolló un proceso de análisis que se muestra a continuación:

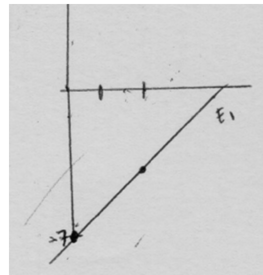


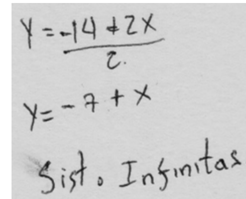


Para el primer sistema como obtuvo solución única no hizo la gráfica.







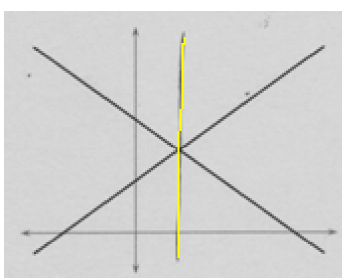
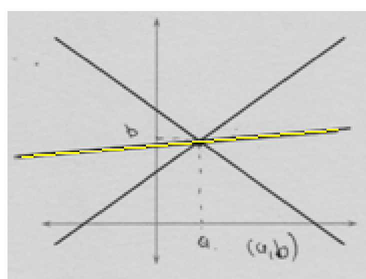


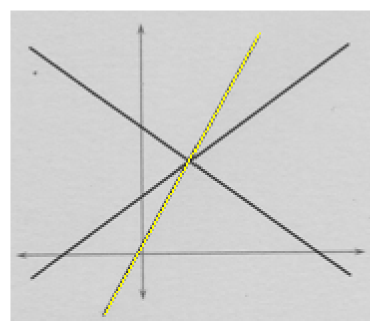
En el segundo problema, como encuentra un resultado que no corresponde a lo esperado, traza la gráfica, primero hace una recta arbitraria, analiza, las dos pendientes son iguales, luego decide hacer otro plano cartesiano donde ubica el intercepto con el eje *y,* ubica otro punto arbitrario, bosqueja la recta y dice:

> *ES3: Las pendientes son iguales, y tienen los mismos puntos, las rectas se superponen, el sistema tiene infinitas soluciones.*

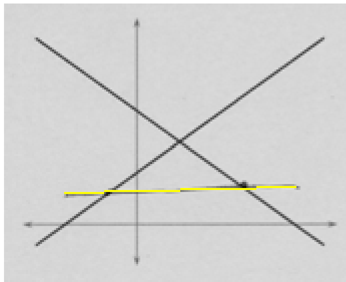
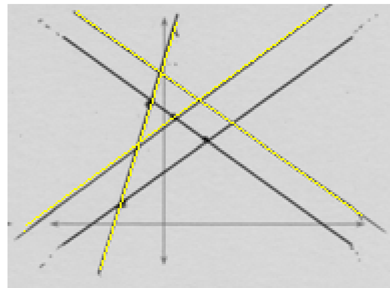
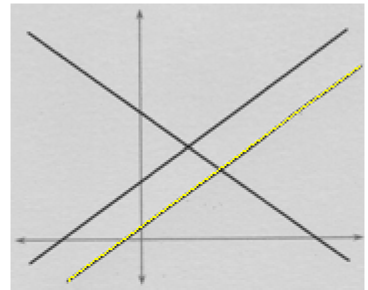
4.2.7.2. Análisis de la actividad 2:

Lo más interesante de esta actividad, fue observar, que para la primera y la tercera gráfica los tres estudiantes no dudaron para dibujar la grafica pedida.

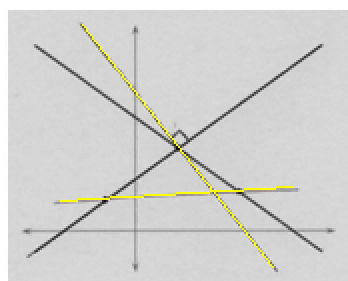


Estas son los resultados de los tres estudiantes en su orden ES1, ES2 y ES3, para la opción *a*., donde se solicitaba graficar una tercera recta para que el sistema tenga solución única. No presentaron ninguna dificultad para realizarla.

Aquí mostramos cómo resolvieron los tres estudiantes la parte *c.*, como en la primera actividad ya habían hecho análisis sobre el sentido geométrico de un sistema sin solución, tampoco presentaron dificultades para dibujar la tercera recta de modo que el sistema sea inconsistente. Podemos ver que la estudiante ES2, dibujó varias opciones que modelan esta situación. Se nota la prevalencia en la idea de que un sistema sin solución implica rectas paralelas.

Al analizar la segunda gráfica si se presentaron algunos inconvenientes. a continuación presentamos el aparte de cada entrevista sobre los razonamientos y conclusiones obtenidas por cada uno, para la segunda gráfica.



> *ES1: Al dibujar una tercera recta que corte a las otras dos obtengo tres soluciones, los dos cortes que acabo de obtener y el que ya estaba dibujado.*
>
> *E: ¿Las tres son soluciones del sistema de ecuaciones?*
>
> *ES1: Un momento, cada punto sirve pero para el par de rectas que se cortan ahí. Ah… sí, ninguno de los tres puntos valida las tres ecuaciones que generan las rectas de la gráfica. Por lo tanto esta opción no me sirve, para*

hallar varias soluciones. Bueno y si aquí dibujo una recta ortogonal, que pase por el punto de corte…

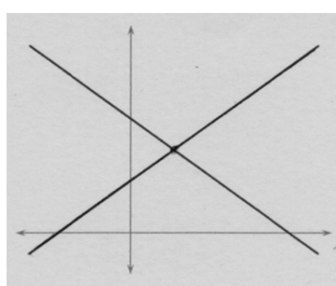
E: ¿Te aporta otra solución?

ES1: No, sigue siendo el mismo punto que ya nos dieron.

E: Entonces que puedes decir…

ES1: Mirando los casos del primer ejercicio (pide la hoja de la actividad anterior), Ah… No. Estamos en R^2.No se pueden obtener sino un punto de corte, o infinitos o ninguno, es más, que pena, ya me acordé. Son líneas rectas, no puedo interceptar tres líneas rectas en más de un punto. Definitivamente no se puede hallar una recta, que me de más de un punto de corte común, ose a que en el sistema de ecuaciones no se puede tener sino solución única. o no hay solución.

El estudiante inicia dibujando una recta de tal manera que se corta con las otras dos, generando tres puntos de corte, asocia cada punto de corte con una solución del sistema. Luego dibuja una tercera recta que pasa por el punto común de las dos líneas aportadas por el enunciado, agrega la característica de ser perpendicular, de modo que sigue pensando en la posibilidad de obtener más de una solución para este sistema. Este razonamiento nos permite afirmar que el estudiante inicialmente no comprende que la solución del sistema es una pareja ordenada. El caso de más de una solución, causa pensamientos indecisos, dado que no es un planteamiento usual de los libros de texto de álgebra lineal.



ES2: Bueno, veamos el punto, si debe pasar por este punto, pero ¿debo obtener más puntos?

E: ¿Cómo interpretas más de una solución?

ES2: Pues dibujo una recta encima de esta,… Pero espere, si la dibujo encima, las dos coinciden en todos los puntos (infinitas soluciones, jajajaja). Pero de todas formas con la otra sigue habiendo un solo punto de corte.

E: ¿Te ayudaría mirar la hoja de los ejercicios anteriores?

ES2: Si por favor, (toma la hoja). Bueno veamos, aquí hay solución única, aquí no hay solución, aquí son infinitas. Pero estos ejercicios son sólo con dos rectas.

E: Y ahora queremos tres…

ES2: ¡Por favor! (La expresión de su cara es muy diciente, se toma la frente), si son ***RECTAS,*** *no puedo dibujar más de un punto de corte entre tres, porque para hacerlo tendría que curvarlas, jajajaja… Definitivamente no se puede dibujar una tercera recta que produzca más de una solución.*

Nuevamente podemos observar que este planteamiento nos permite evidenciar que el tránsito entre el pensamiento geométrico y el aritmético, no se está dando, porque cuando se ha logrado, no importaría la situación que se presente, el razonamiento debiera ser claro. En cambio la duda, los rodeos, los intentos de resolver una situación, que claramente no está definida, nos muestra que se presentan dificultades para hacer el cambio entre el ambiente geométrico y el aritmético.

4.2.7.3. Análisis de las actividades 3, 4, 5 y 6:

En estas actividades el estudiante ES3, manifestó, no recordar cómo hallar la ecuación de la línea recta, si no tiene los datos para calcular la pendiente en sus argumentos manifiesta que el corte se puede estimar en la gráfica pero la pendiente sin coordenadas ni datos es muy complicado para él. Además manifestó que la materia la había visto hace mucho tiempo y por eso no recordaba claramente qué hacer.

E: ¿El sistema tiene solución?

ES3: No, porque son rectas paralelas

E:Escribe un sistema de ecuaciones que corresponda a la situación

ES3: La grafica no tiene ningún dato

E: Bueno, ¿cómo trabajas en este caso?

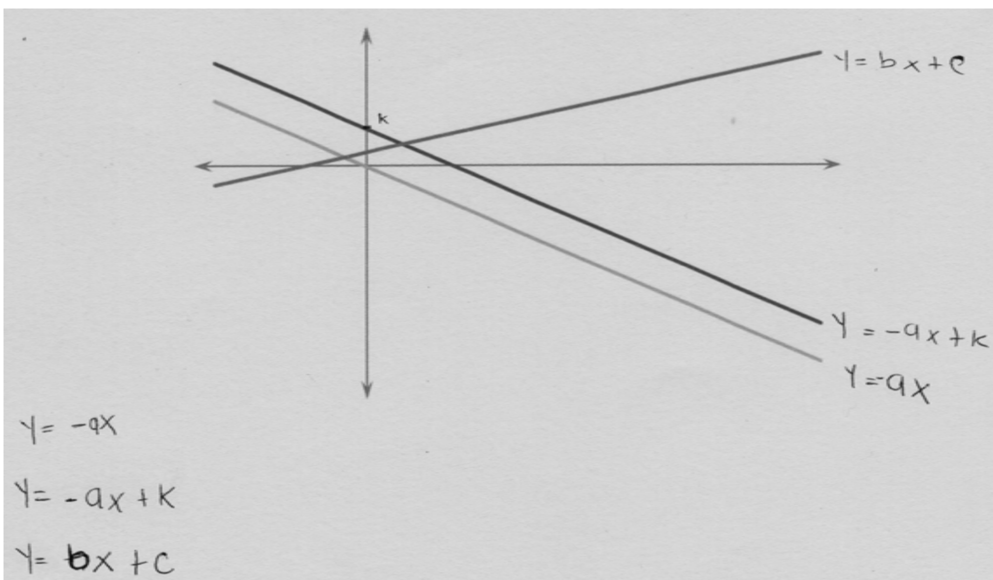
ES3: Para escribir la ecuación de una recta, necesito la pendiente y un punto, no tengo los datos

E: Entonces?

ES3: No me acuerdo de cómo se hace, es más, no creo haber hecho ejercicios así cuando vi Lineal I.

E: ¿Puedes trabajar sobre el sistema representado en la grafica de forma general?

ES3: Definitivamente no puedo, mire profe, yo vi Lineal I hace dos semestres, no me acuerdo de haber visto eso.



La estudiante ES2, trató de modelar las rectas de manera general, y luego dijo:

ES2: Voy a empezar por este

ES2: Bueno las ecuaciones las puedo escribir, la primera recta pasa por el origen y tiene pendiente negativa, luego se puede escribir como $y = -ax$. La otra es paralela, por lo tanto tiene la misma pendiente pero pasa por otro punto del eje y, así que se puede escribir $y = -ax + k$. La última tiene pendiente positiva y pasa por otro punto del eje y, mmmm, $y = bx + c$. El sistema no tiene solución.

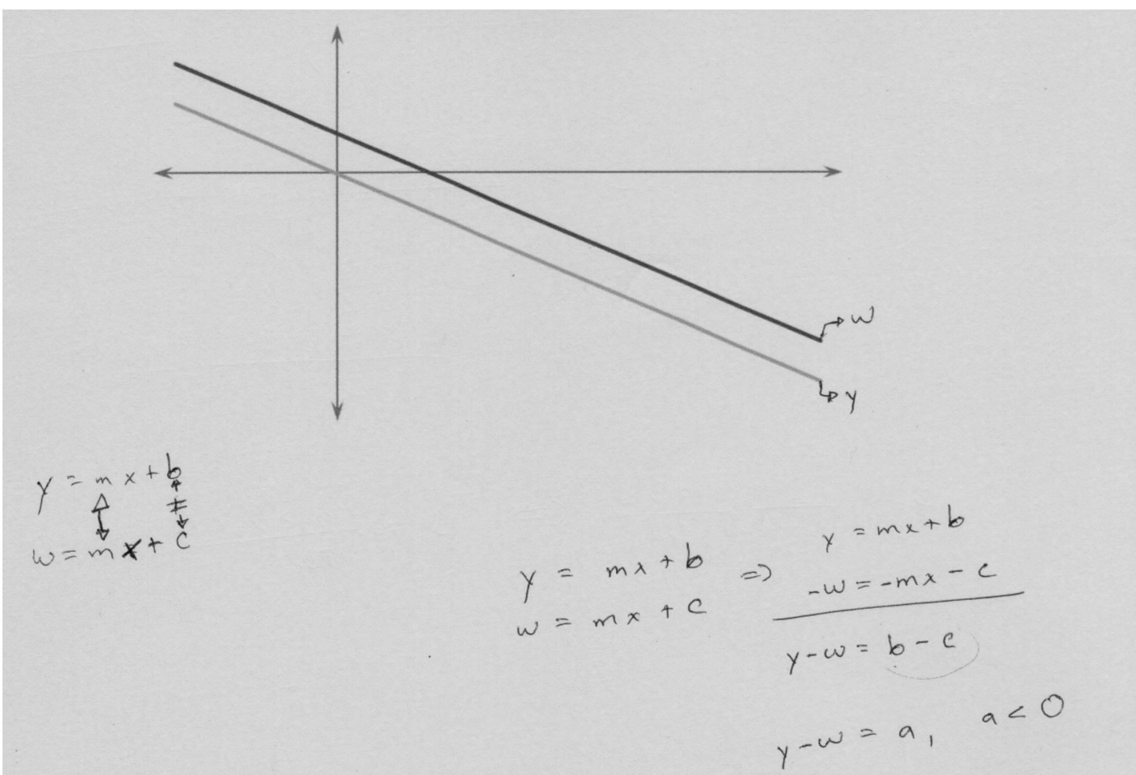
E: ¿Cómo determinas que el sistema no tiene solución?

ES2: La grafica es como la que trabajamos en el punto anterior

E: Y teniendo el sistema de ecuaciones que acabas de escribir, ¿cómo lo puedes hacer?

ES2: pero con tantas letras, no puedo determinar la solución, o para los otros casos, no sé qué se puede hacer para determinar la indeterminación.

Sólo el estudiante ES1, hizo el análisis, lo asumió como un reto y empezó a trabajar. A continuación aparece la imagen de su trabajo y la transcripción de la conversación que sostuvimos durante el proceso.



ES1: las dos rectas son paralelas, luego las pendientes deben ser iguales. Pero el intercepto con el eje y, es diferente. Además, se puede ver que b, es cero, porque pasa por el origen, y que c es un número positivo, porque corta al eje y, por encima del eje de las x. Resuelvo el sistema de ecuaciones y me encuentro que y- w, es un número negativo. Lo voy a llamar a.

E: ¿Qué estas tratando de ver?

ES1: Qué el sistema no tiene solución.

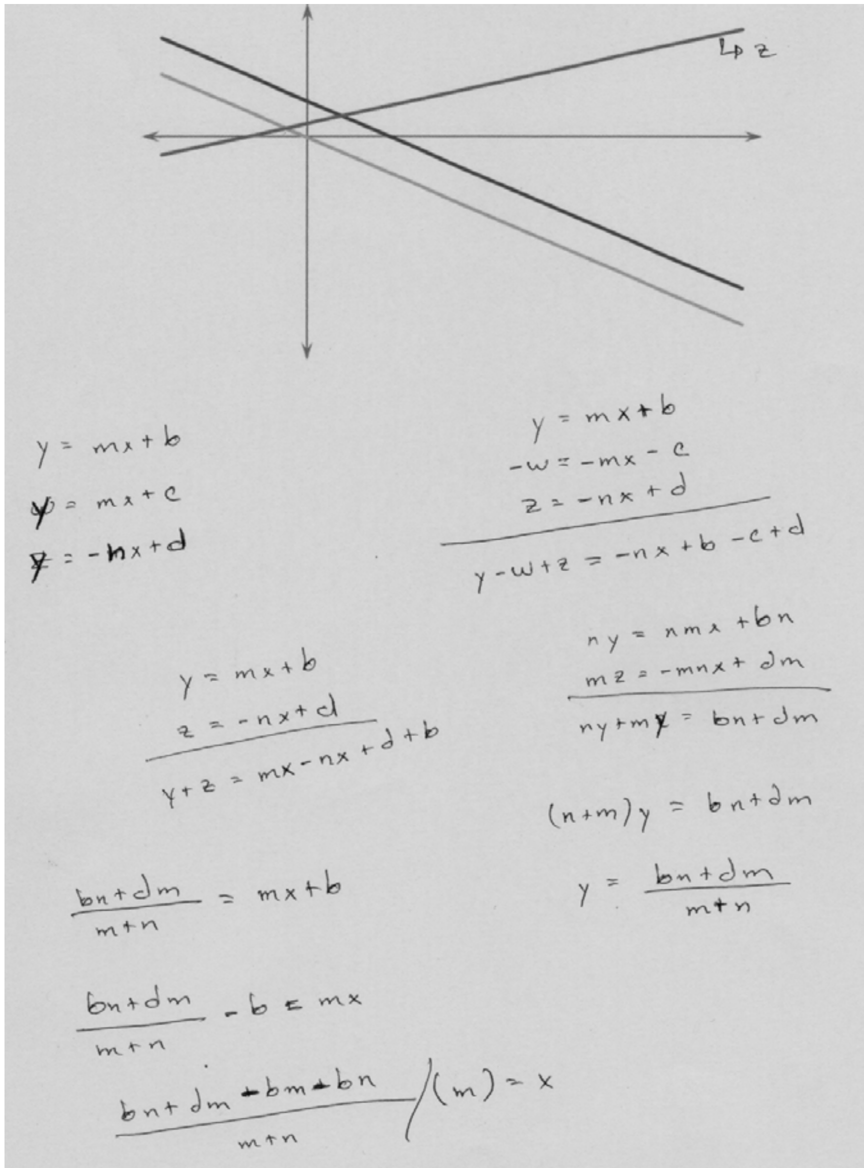
E: Lo que escribiste te aporta, o te faltará tener en cuenta alguna otra cosa.

ES1: No sé, pero con esto que escribí, debiera ser suficiente.

E: Vuelve a mirar, cómo se escriben normalmente las ecuaciones de una recta. (En este momento nuevamente le paso la hoja con la primera actividad)

El estudiante mira las dos hojas, pasea su mirada un par de veces y de pronto dice:

ES1: Claro, es que llamé la ***y*** *de una ecuación, con otro nombre, con tantas variables. No voy a terminar nunca de resolver el sistema, mejor dicho, cómo hay más variables que ecuaciones, infinitas soluciones! Entonces aquí, la* ***w*** *es igual que la* ***y****, por lo que* ***a*** *me da cero, pero contradicción, ya había especificado que* ***b*** *y* ***c*** *son diferentes, por lo tanto su diferencia no puede dar cero. Sistema inconsistente!*



ES1: Aquí, ya sé que hacer. Tengo dos paralelas, me sirven las dos anteriores, bueno y una que no es paralela, luego la pendiente es diferente.

E: Recuerda lo de no utilizar nombres innecesarios para las variables.

ES1: Ya se me había olvidado (tacha en la hoja), Bueno este proceso si es más largo.

Empieza a escribir, hace despejes, analiza datos y finalmente dice:

ES1: Aquí no me está funcionando trabajar con las tres ecuaciones, tengo demasiadas variables.

E: Recuerdas cómo se trabajan los ejercicios con tres ecuaciones y dos incógnitas, porque si vas a usar reducción, debes agruparlas…

ES1: Ah… Sí, cierto trabajo con dos, y después pruebo con la tercera.

E: Empieza a trabajar…,

ES1: Pero por aquí no logro nada. En este caso puedo emplear lo que hice en el ejercicio anterior, como hay dos paralelas, ese sistema no tiene solución, y agregarle una secante no mejora la situación, porque no hay un punto de corte donde coincidan las tres rectas. No profe, no tiene solución.

El estudiante ES1, empieza escribiendo las ecuaciones del sistema de manera general, observando las características geométricas. Este proceso nos muestra el tránsito entre el ambiente geométrico y el aritmético, dado que es capaz de modelar ecuaciones en forma general que describen cada una de las características presentadas en las gráficas. Luego intenta resolver los sistemas empleando sólo los algoritmos aritméticos, lo cual no es sencillo, hasta que llega a un punto donde nuevamente se apoya en las propiedades geométricas, que le permiten concluir sobre la solución de cada sistema. Nuevamente está presentando el tránsito entre el pensamiento aritmético y el geométrico y viceversa, permeado por el pensamiento analítico, dado que expresa condiciones generales que le permiten analizar cada tipo de solución del sistema de ecuaciones.

4.2.7.4. Análisis de la actividad 7:

En esta actividad los estudiantes ES1 y ES2 hicieron aportes interesantes. Recordaron y puntualizaron características propias de los sistemas de ecuaciones; el estudiante ES3 habló vagamente de la idea de determinante y de las inversas de una matriz, pero no pudo clarificar qué condiciones debe cumplir el sistema para poder aplicar los resultados relacionados con el determinante o la matriz inversa de la matriz asociada.

ES3: Un sistema de ecuaciones tiene solución única cuando la matriz asociada al sistema es invertible.

E: Sin importar el número de ecuaciones y de variables?

ES3: Creo que no.

E: ¿Para qué tipo de matrices se puede hablar de inversa?

ES3: Cuadradas.

E: Entonces, vuelvo a preguntar, ¿no importa el número de ecuaciones y de variables?

ES3: Esteee, si. Sólo cuando tengo igual número de ecuaciones y de variables, para este caso cuando tengo dos ecuaciones. Además si el determinante de la matriz es diferente de cero, entonces también podemos decir que el sistema tiene solución.

E: ¿Qué tipo de solución?

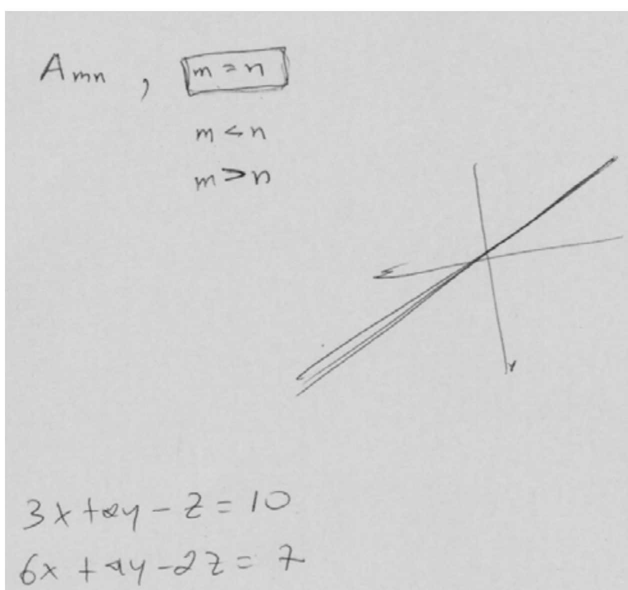
ES3: Solución única o infinitas soluciones.

E: ¿Seguro?

ES3: Bueno, si el determinante es diferente de cero, la matriz es invertible, ahh, el sistema tiene solución única. Pero no recuerdo por qué.

E. Y si el sistema no tiene solución o las soluciones son infinitas?

ES3: No me acuerdo.



ES1: Si $m=n$, y el determinante es diferente de cero, el sistema tiene solución única.

ES1: Si $m<n$, el sistema tiene infinitas soluciones.

E: Siempre?

ES1: Si.

E: ¿Para cualquier caso?

ES1: Si.

E: Y en este ejemplo: la profesora escribe $3x+2y-z=10$ *,* $x+4y-2z=7$*, recuerdas ¿qué representan este tipo de ecuaciones?*

ES1: Si, son dos planos.

E: ¿Qué tipo de planos?

ES1: A ver,… los coeficientes de las variables, son múltiplos escalares los unos de los otros, y el término independiente es diferente. Son paralelos.

E: ¿Y eso que significa?

ES1: Un ejemplo donde hay menos ecuaciones que variables, pero sin embargo las soluciones no son infinitas.

E: Para el caso que estabas mencionando, de los sistemas con dos variables, ¿cómo sería la situación particular?

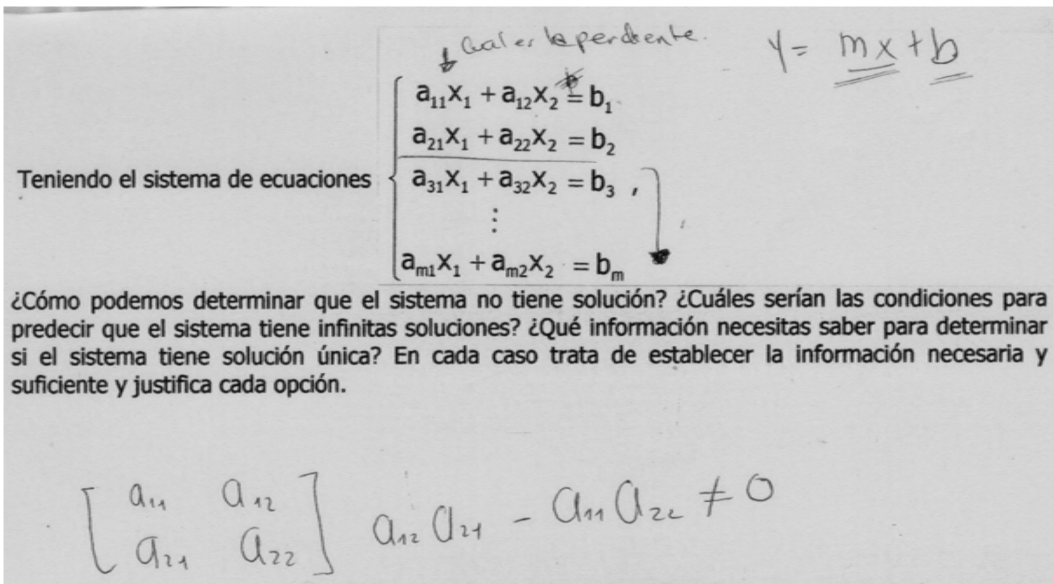
ES1: Claro, si hay sólo dos incógnitas, entonces tener menos ecuaciones que incógnitas equivale a tener una sola ecuación. Así que para esta parte, sólo dos variables, si se puede asegurar que si $m<n$, el sistema tiene infinitas soluciones. Y para el caso de $m>n$, no se puede saber, porque habría que ver si hay múltiplos escalares, si las ecuaciones, se reducen, etc, etc, etc.

Luego de esta conversación, se puede establecer que este estudiante tiene una buena apreciación de las características generales de un sistema de ecuaciones lineales, y pudo concretarlas para el caso específico de sólo dos variables.

Nos muestra que hace uso del pensamiento analítico-estructural porque conoce y asocia las características generales de un sistema de ecuaciones con su solución.

Desarrolla el tránsito entre pensamiento geométrico y analítico, cuando menciona las condiciones de rectas paralelas, o cuando reconoce la representación de una ecuación como un plano. El tránsito entre el pensamiento aritmético y el analítico se hace tangible, cuando menciona los procedimientos que puede emplear para usar las formas del teorema creciente, sobre las posibles soluciones del sistema de ecuaciones.

Ahora vamos a revisar el análisis realizado por la estudiante ES2, junto con los apuntes que hizo en la hoja de trabajo.



¿Cual es la pendiente. $y = mx + b$

Teniendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m \end{cases}$,

¿Cómo podemos determinar que el sistema no tiene solución? ¿Cuáles serían las condiciones para predecir que el sistema tiene infinitas soluciones? ¿Qué información necesitas saber para determinar si el sistema tiene solución única? En cada caso trata de establecer la información necesaria y suficiente y justifica cada opción.

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \neq 0$

ES2: No recuerdo muy bien, pero empiezo, esta es la forma general de una línea recta así (escribe y = mx + b, señalando las ecuaciones del sistema). Aquí ¿cuál es la pendiente?

E: Dale nombres a las variables, para que te concuerde con lo que recuerdas.

ES2: Qué boba, x_1, puede ser la x y x_2, puede ser la y, así que la cuando se pasa la b_1, para el otro lado el intercepto es $–b_1$ Y bueno la pendiente se ve cuando despejamos la y.

ES2: Bueno, limitemos el sistema, si se trabaja con las dos primeras ecuaciones (traza una línea sobre el sistema), puedo establecer la matriz asociada al sistema, y si el determinante es diferente de cero el sistema tiene solución única. No se me ocurre nada más. A sí, si la matriz esta (señala la matriz que escribió) es invertible, entonces el sistema tiene solución única.

Pero no sé cómo analizar cuando hay infinitas soluciones y cuando no hay solución.

La estudiante ES2, limita el sistema, de tal forma que trabaja con dos ecuaciones y cómo el sistema tiene dos variables, le queda el análisis para sistemas $2x2$. Para este caso particular recuerda varias propiedades, expuestas en el teorema creciente, lo cual es evidencia de la presencia del pensamiento analítico, hace el tránsito hacia el pensamiento geométrico y lo relaciona también con el pensamiento aritmético. Pero se queda sin herramientas, para casos más generales, una vez más, esta evidencia nos motiva para estructurar con más detenimiento el proceso que desarrollamos con nuestros estudiantes, cuando abordamos los conceptos propios del álgebra lineal.

Capítulo 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La presentación de las conclusiones y recomendaciones finales de nuestro trabajo, las realizamos dando respuesta a los objetivos que nos propusimos alcanzar.

5.1. Respecto del primer objetivo

Analizar cómo estudiantes de grado noveno transitan entre los modos de pensamiento sintético geométrico y analítico aritmético y viceversa, al determinar la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

A través del análisis que hemos realizado podemos establecer varias condiciones importantes que se deben cumplir, para lograr que los estudiantes desarrollen los modos de pensamiento del álgebra lineal (Sierpinska, 2000) y puedan transitar entre ellos.

Una de las dificultades que presentaron los estudiantes para desarrollar las actividades de la entrevista, fue el manejo adecuado de los procesos algebraicos inherentes a la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Por tanto para lograr no sólo que los estudiantes logren abstraer en los dos modos de pensamiento, sino también alcanzar el tránsito entre ellos es necesario que los requerimientos previos ya se hayan dado. Estamos hablando de manejo algebraico de ecuaciones, despejes de variables, elaboración de graficas en el plano cartesiano, etc. De otro modo, la insuficiencia en algunos de estos procesos o en todos, impide que el estudiante maneje la información necesaria, para resolver el sistema de ecuaciones lineales; y además asocie dicha solución con su significado geométrico, de manera tal, que esté en capacidad de transitar entre uno y otro modo de representación.

Otra de las dificultades que observamos está relacionada con enfrentar a los estudiantes con problemas no usuales para ellos. Es decir, un enunciado diferente a los trabajados en las clases tradicionales. Esto hizo que se confundieran al punto de quedarse sin herramientas de análisis, cometer diversos errores: en definitiva, sacarlos de su cotidianidad, les entorpeció el proceso, esta situación no pudo ser superada por ellos y por tanto sus procedimientos fueron erróneos. En particular podemos mencionar el caso del sistema que contaba con tres ecuaciones. Incluso al trabajar con esta actividad, fue claro que los estudiantes no logran el tránsito entre el pensamiento aritmético y el geométrico, dado que si tienen dos ecuaciones identifican que el punto de corte entre las dos rectas es la solución del sistema. Pero si hay tres ecuaciones, ya no hay claridad sobre el mismo significado geométrico, ya no asocian el proceso algebraico, con lo que ven en la gráfica lo cual los induce a conclusiones erróneas.

En cuanto al tránsito entre el pensamiento geométrico y el algebraico, los estudiantes ES2 y ES3, no dieron muestras claras de poseer este modo de pensar. Es más, se quedaron sin herramientas para el trabajo manifestando que no habían hecho ningún ejercicio de ese tipo. El estudiante ES1, hizo sus intentos, pero tampoco podemos asegurar que efectivamente haya logre el tránsito. Ya que sus repuestas no son claras, la parte escrita por sí misma no nos permite establecerlo. Por tanto teniendo en cuenta las evidencias encontradas en el desarrollo de nuestro trabajo, podemos decir que los estudiantes no dan muestras de transitar libremente entre el pensamiento geométrico y el aritmético. Al parecer su propia experiencia con el concepto estudiado no es suficiente para estimularlo.

5.2. Respecto del segundo objetivo

Analizar cómo los estudiantes universitarios de segundo semestre transitan entre los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico estructural.

Las consideraciones respecto del trabajo realizado con los tres estudiantes de la Universidad las podemos resumir de la siguiente manera:

En los tres estudiantes es evidente el buen manejo del pensamiento aritmético, tienen habilidad para aplicar los algoritmos. Esto no es sorprendente ya que, porque en la mayoría de los casos el énfasis del programa de Álgebra de Noveno grado y de Primer semestre es la eficiencia y aprendizaje en la solución de ejercicios. Ahora al plantear las mismas situaciones, en contexto diferente, cambia la efectividad y confianza de los estudiantes sobre sus procedimientos. En este tipo de situaciones planteadas en la entrevista los estudiantes debieron tomarse su tiempo para analizar, cosa que no ocurrió con la primera actividad, que desarrollaron con rapidez y sin titubeos.

En la parte gráfica, fue interesante observar que el significado geométrico de solución única es muy claro, un punto de corte entre las rectas. Cuando se trabaja con más de una solución, estando en el contexto de R^2, muy familiar para los estudiantes, hicieron el intento de hallar un modelo para más de una solución, teniendo el precedente de dos rectas cortadas. Esto es una muestra de que la idea de punto de corte como solución del sistema está interiorizada sólo para el caso $2x2$; se necesitó de la orientación de la maestra para recordar las propiedades geométricas de las rectas. Teniendo en cuenta el ambiente geométrico, pudieron asociar adecuadamente la idea de solución del sistema con la representación gráfica, lo cual les permitió fácilmente hallar una versión rápida para la tercera situación, donde se pedía mostrar un sistema inconsistente.

Respecto del tránsito entre el pensamiento geométrico y el aritmético, pudimos observar una clara diferencia entre los estudiantes ES1 y ES2, con el ES3. Dado que los dos primeros hicieron el proceso sin inconvenientes, sin importar que no hubiesen coordenadas en los planos cartesianos. Contrario a esto, el estudiante ES3 manifestó dificultades y expresó no estar acostumbrado a este modelo de pregunta. En este momento podemos recordar que ES1 y ES2, para este momento de su carrera deben haber sido estudiantes de alguna de las asignaturas de geometría que la Escuela de Matemáticas ofrece a sus estudiantes, y el manejo geométrico es evidente.

En la parte del pensamiento estructural, nuevamente encontramos diferencias entre el estudiante ES3 y los otros dos. Porque a pesar de que él recordó algunas propiedades generales de los sistemas de ecuaciones lineales, no expresó de forma precisa cómo aplicar estas propiedades para obtener conclusiones. Por otra parte el estudiantes ES1, expresa con facilidad sus ideas, hace proposiciones con modelo de inferencia y verifica hipótesis para obtener conclusiones. En suma posee un modo de pensamiento analítico estructural y lo usa para relacionar resultados geométricos y aritméticos. La estudiante ES2, manifestó sus ideas y aportó algo muy importante: *"no me acordaba de esto, hasta que no vi la gráfica y pude relacionarla con los teoremas vistos"*. Esta frase nos muestra cómo la representación geométrica adecuada, permite asociar ideas y procesos, una corroboración en la práctica de la teoría que nos orientó nuestro trabajo: La manera adecuada de aprender conceptos de Álgebra lineal, es hacer el tránsito efectivo entre los tres modos de pensamiento mediante los cuales es preciso.

5.3. Respecto del tercer objetivo

> Determinar estrategias pedagógicas que busquen generar en los estudiantes de noveno grado el tránsito entre los modos de pensamiento sintético geométrico y analítico aritmético al trabajar con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Estimamos conveniente dar algunas sugerencias de posibles procesos que se deben implementar en el aula de clase, para orientar a nuestros estudiantes en el proceso de construcción de los modos de pensamiento.

Es necesario que el profesor brinde los espacios adecuados para que los estudiantes desarrollen habilidades algebraicas al determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Con este fin es importante ayudar a que el estudiante, se vaya acostumbrando a justificar los algoritmos que emplea para resolver un sistema de ecuaciones, que haga diferentes representaciones de la solución y ojalá que explique las causas y consecuencias de los resultados obtenidos.

Por otra parte en imprescindible fomentar el ambiente geométrico, reforzándolo en la medida que se desarrollan ejercicios, desde que empiezan a ver función lineal y clarificar el manejo del plano cartesiano, donde se presenten situaciones para que asocien las características de los ejemplos, sin la necesidad de coordenadas. Para los estudiantes de la universidad, sumado con lo anterior, se debe tratar de relacionar, por ejemplo el teorema creciente, con diferentes ejemplos de aplicación, de tal manera, que cuando el sistema no sea cuadrado, se tengan otras alternativas de análisis.

5.4. Recomendaciones

Para futuros trabajos en esta línea, queda el campo abierto para elaborar propuestas didácticas, con ejemplos claros que permitan que los estudiantes construyan sus modos de pensamiento. Propuestas dirigidas inclusive a las editoriales con el ánimo de complementar los libros de texto que se manejan comercialmente. En el caso de trabajos con estudiantes de la universidad puede estudiarse la influencia que tiene su trabajo en geometría sobre el análisis que logran hacer de los sistemas de ecuaciones en este modo de pensar y al transitar a otros. Ya que los los estudiantes de ingeniería que participaron en este trabajo tienen esa falencia y por tanto se deben generar mecanismos para suplirla. También consideramos posible el diseño de propuestas, para complementar el programa tradicional de Álgebra lineal I con el ánimo de propiciar el ambiente adecuado para que los estudiantes trabajen en los tres modos de pensamiento y comprendan en la información sustancial que cada uno de ellos ofrece en particular sobre los sistemas de ecuaciones lineales y su solución.

BIBLIOGRAFÍA

Grossman, S. I. Álgebra lineal, Quinta Edición. Grupo Editorial Iberoamericana, 1996.

Hillel, J.(2000) Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J-L Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Pp. 191 - 207. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lineamientos curriculares área de Matemáticas. (1998). MEN, Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2003). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. MEN; Bogotá, Colombia.

Oaxaca, J. De la Cruz, J y Sánchez, J. (2008). Dificultades en el Tránsito del Razonamiento Sintético-Geométrico al Analítico-Aritmético en la Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales. Ponencia. Foro Matemáticas. U.N.A.M. México

Ochoviet, T. (2009) Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis de Doctorado no publicada, Instituto Politécnico Nacional. Uruguay.

Ramírez, M. (2008). Concepciones de los estudiantes de nivel superior sobre sistemas de ecuaciones lineales. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV. México.

Roa, S. (2008). Construcciones y mecanismos mentales Asociados al concepto transformación lineal***.*** Tesis de maestría no publicada, CINVESTAD. México***.***

Sierpinska, A. (2000). On some aspect of students thinking in linear algebra. In J-L. Dorier (ed.), On the teaching of linear algebra, 209 – 246. Kluwer Academic Publishers.

ANEXOS

ANEXO 1.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

Proyecto de Especialización
Escuela de Matemáticas
Claudia Montañez Villamizar

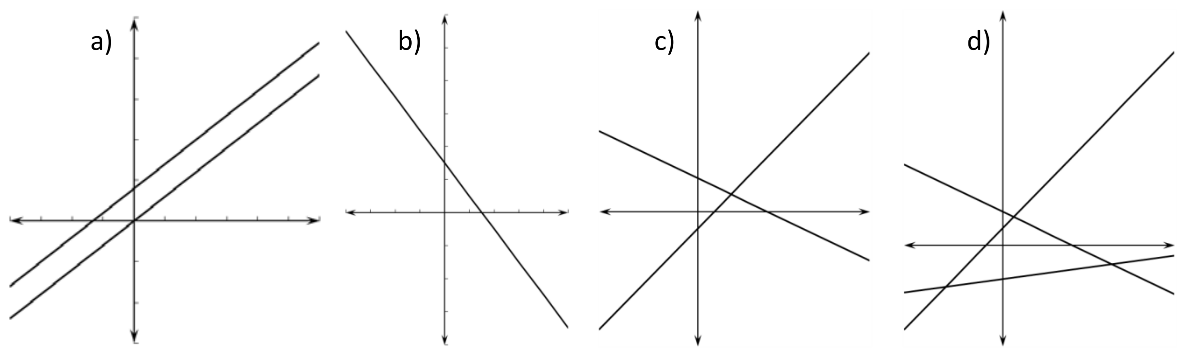
NOMBRE: ________________________________ CÓDIGO:_______________

PRUEBA DIAGNÓSTICA

1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3y + x = 7 \\ y - x = -1 \end{cases}$:

a. Dibuja la representación gráfica de cada ecuación del sistema.
b. ¿Cuántos puntos de corte tienen las rectas?
c. ¿Qué representa para el sistema de ecuaciones los puntos de corte de las rectas?
b. ¿Se puede establecer con anticipación si hay uno o más puntos de corte? Justifica tu respuesta.

2. Las rectas que aparecen en cada plano, representan un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Para cada caso representado contesta las siguientes preguntas:
a. ¿El sistema tiene solución? ¿Por qué?
b. ¿Cuál es la solución?
c. Escribe un sistema de ecuaciones que corresponda a la representación gráfica. ¿Qué características tiene este sistema?



3. Resuelve el siguiente problema: Una profesora de matemáticas para estimular a un alumno de su clase le dice: “por cada ejercicio que resuelvas bien te daré $7000 y por cada uno que hagas mal me darás $5000”. Después de hacer 25 ejercicios, el muchacho recibe $55000. ¿Cuántos ejercicios ha resuelto bien?
a. Escribe el sistema de ecuaciones asociado al problema.

b. Determina si el sistema tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución. ¿Por qué?
c. Podrías hacer una gráfica que represente la solución del problema? ¿Qué significado tendría para ti dicha gráfica? ¿Qué información podría leerse en la grafica?

4. Teniendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

¿Qué información necesitas saber para determinar si el sistema tiene solución única? Justifica ampliamente tus respuestas.

ANEXO 2.

1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$:

a. Dibuja la representación gráfica de cada ecuación del sistema.
b. ¿Cuántos puntos de corte hay entre las rectas?
c. ¿Qué representa para el sistema de ecuaciones los puntos de corte de las rectas?

2. Realizar la representación gráfica del siguiente sistema de ecuaciones

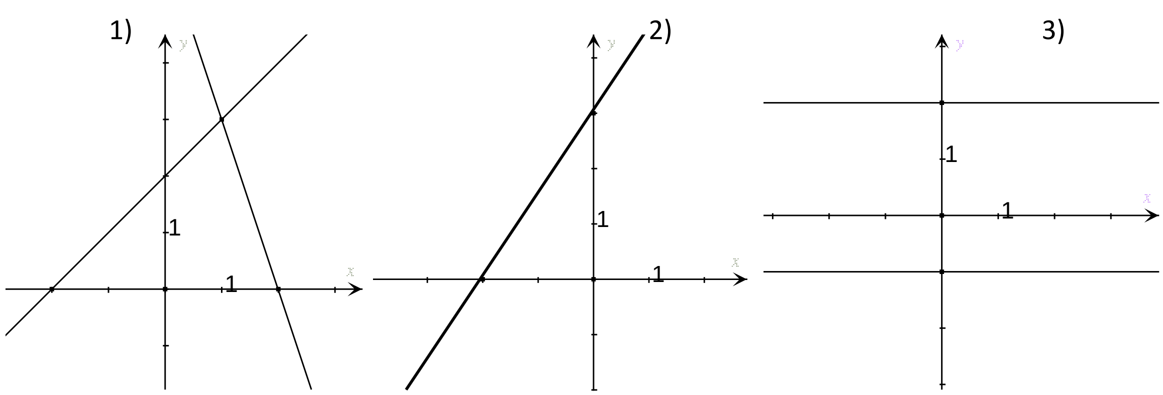
$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x + y - 6 = 0 \\ x + 4y + 6 = 0 \end{cases}$$

a. ¿Cuál es la solución del sistema?

b. Determina los puntos de corte de las rectas. ¿Qué representan los puntos de corte?

3. Las rectas que aparecen en cada plano, representan un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Para cada caso representado contesta las siguientes preguntas:

a. ¿El sistema tiene solución? ¿Por qué?
b. ¿Cuál es la solución?
c. Escribe un sistema de ecuaciones que corresponda a la representación gráfica.



ANEXO 3.

Proyecto de Especialización
Escuela de Matemáticas
Claudia Montañez Villamizar

NOMBRE: ______________________________ CÓDIGO:______________

ACTIVIDADES DE LA ENTREVISTA

Actividad 1

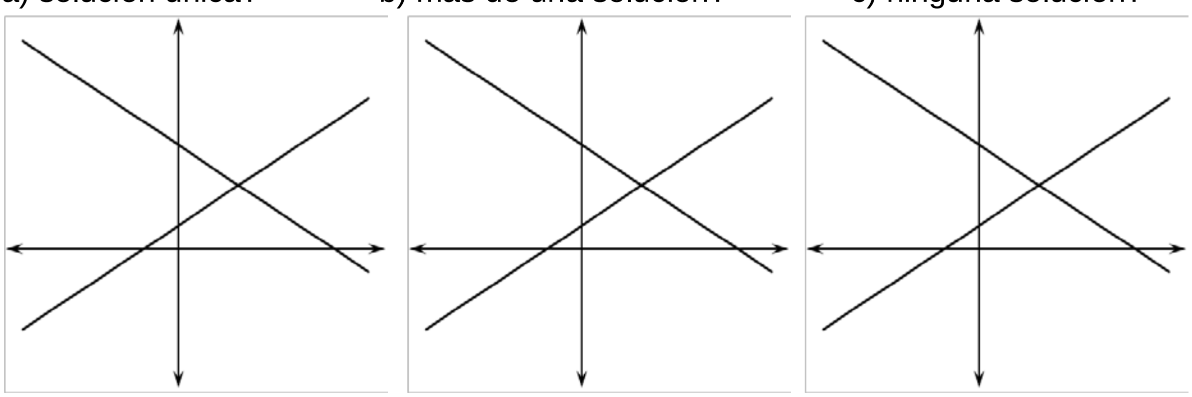
Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones. Indica cuántas soluciones hay y cuáles son las soluciones. Si no hay solución explica por qué no existe. ¿Puedes establecer una condición general para determinar si existe o no solución y qué tipo de solución se da en un sistema de ecuaciones lineales 2x2, sin resolver el sistema?¿cuál?

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 13 \end{cases}$$

Actividad 2

A partir de la representación gráfica de las dos líneas rectas de la figura ¿es posible dibujar una tercera recta de modo que el sistema de ecuaciones lineales que implica, tenga:

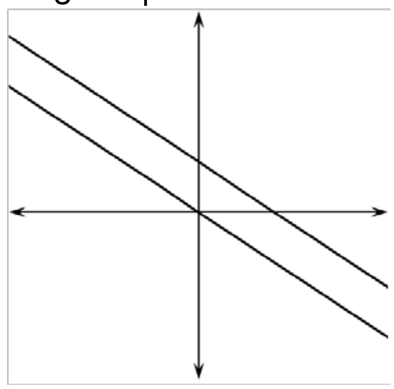
a) solución única? b) más de una solución? c) ninguna solución?



Para cada caso, si la respuesta es sí, dibuja la recta que corresponde a tu apreciación, y si la respuesta es no, explica por qué no es posible.

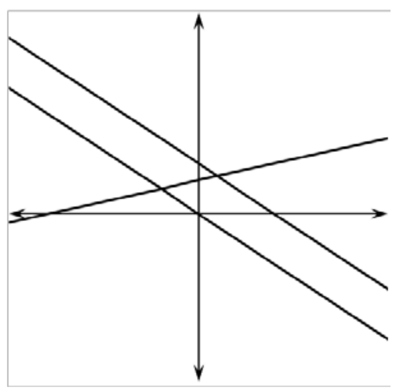
Actividad 3

Teniendo en cuenta la representación gráfica de las dos rectas paralelas en el plano, escribe el sistema de ecuaciones lineales correspondiente. ¿El sistema tiene solución única? ¿Por qué? ¿El sistema tiene infinitas soluciones? ¿Por qué? ¿El sistema no tiene solución? ¿Por qué?

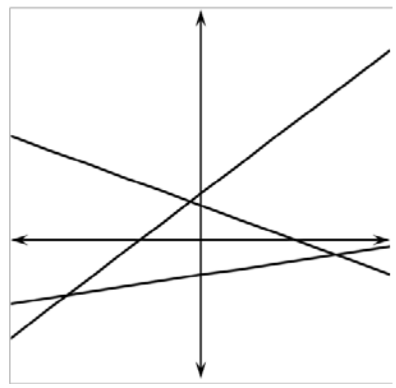


Actividad 4

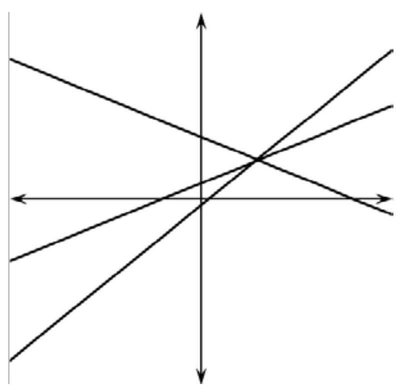
Teniendo en cuenta la representación gráfica de tres rectas en el plano, escribe el sistema de ecuaciones lineales correspondiente. ¿El sistema tiene solución única? ¿Por qué? ¿El sistema tiene infinitas soluciones? ¿Por qué? ¿El sistema no tiene solución? ¿Por qué?



Actividad 5
Teniendo en cuenta la representación gráfica de tres rectas en el plano, escribe el sistema de ecuaciones lineales correspondiente. ¿El sistema tiene solución única? ¿Por qué? ¿El sistema tiene infinitas soluciones? ¿Por qué? ¿El sistema no tiene solución? ¿Por qué?



Actividad 6
Teniendo en cuenta la representación gráfica de tres rectas en el plano, escribe el sistema de ecuaciones lineales correspondiente. ¿El sistema tiene solución única? ¿Por qué? ¿El sistema tiene infinitas soluciones? ¿Por qué? ¿El sistema no tiene solución? ¿Por qué?



Actividad 7

Teniendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m \end{cases}$,

¿Cómo podemos determinar que el sistema no tiene solución? ¿Cuáles serían las condiciones para predecir que el sistema tiene infinitas soluciones? ¿Qué información necesitas saber para determinar si el sistema tiene solución única? En cada caso trata de establecer la información necesaria y suficiente y justifica cada opción.