

**ESTUDIO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE LA VALIDEZ DE LA
APROXIMACIÓN DE FRESNEL A NIVEL DE CONTEO DE
FOTONES.**

FERNEY CASTRO SIMANCA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2017**

**ESTUDIO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE LA VALIDEZ DE LA
APROXIMACIÓN DE FRESNEL A NIVEL DE CONTEO DE
FOTONES.**

Trabajo de grado
para optar al título de físico.

FERNEY CASTRO SIMANCA

Director
RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS, DR.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2017

Dedico este trabajo a Dios, a mi familia y a mis amigos.

A mi madre.

AGRADECIMIENTOS

- A Dios porque siempre está a mi lado ayudándome en cada situación de mi vida.
- A mi madre por su incondicional apoyo y confianza en cada decisión que he tomado en la vida. Por darme ánimos en cada momento que se presentaron problemas en este trabajo de tesis. Por ser el motor de mi vida. A mi hermano por todos los buenos momentos que hemos pasado y porque siempre me apoyo en mis estudios.
- A mi padre por su apoyo a lo largo de mi carrera y por lo que me ha enseñado sobre la vida. A la señora Doris por sus consejos y amistad.
- Al Dr. Rafael Torres director de mi tesis por todas las discusiones de física y por todo su apoyo en este trabajo.
- A Leonardo y Karol porque con todo su apoyo, consejos y discusiones de física me hicieron sentir como en familia.
- A mis calificadores de tesis, el Dr. Jaime Enrique Meneses y el Dr. Arturo Plata por todos sus comentarios y sugerencias sobre este trabajo. A todos los profesores de la escuela de física que ayudaron en mi formación.
- A Paty, Angélica, Humbert, Waltersillo, Jonathan, Darly, Valentina, al profe y toda la familia Quintero Florez porque no les podré pagar todo lo que han hecho por mí. Ustedes me ayudaron en momentos difíciles de la vida y me acogieron como parte de su familia.
- A mis amigos de sala de cómputo y centro de estudios de física por todas las experiencias vividas y todas las discusiones de física que me han ayudado en mi formación como físico.
- A mis tías porque me han enseñado con sus actos lo valiosa que es la humildad y el trabajo duro. A mi tía Betty y Liz por todo su apoyo cuando me vine a vivir a Bucaramanga. A mi abuela, mi tía mamila, Ana y Fabián por su confianza en mí.
- A la profesora Karina Garay Palmett por permitirme trabajar durante dos meses en su laboratorio y por hacerme sentir como en familia en México.
- A mis amigos de México con los cuales viví muy buenas experiencias.
- A la División de información cuántica de la sociedad Mexicana de Física por otorgarme una beca para una estancia de investigación en el Laboratorio de interacciones No Lineales y Óptica cuántica, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada(CICESE), Ensenada, Baja California, México.

Pido disculpas a las personas que se me escapan en estos agradecimientos, con seguridad de todos aprendí algo.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	15
1. FENÓMENO ONDULATORIO ELECTROMAGNÉTICO COMO EL LÍMITE CLÁSICO DE LA PROPAGACIÓN DE FOTONES	19
1.1. CUANTIZACIÓN DE UN SOLO MODO DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO	19
1.2. PROPAGACIÓN DE FOTONES CON LAS INTEGRALES DE CAMINO DE FEYNMAN	21
1.3. POSICIÓN TRANSVERSAL EN LA PROPAGACIÓN DE FOTONES	24
1.4. PROPAGADOR COMO UNA INTEGRAL DE FRESNEL	25
2. TEORÍA ESCALAR DE LA DIFRACCIÓN	27
2.1. ECUACIÓN DE ONDA ESCALAR Y ECUACIÓN DE HELMHOLTZ	27
2.2. TEOREMA INTEGRAL DE HELMHOLTZ-KIRCHHOFF	28
2.3. FORMULACIÓN DE RAYLEIGH-SOMMERFELD DE LA DIFRACCIÓN	30
2.4. NUEVA FORMULACIÓN DE LA TEORÍA DE LA DIFRACCIÓN	31
2.5. PRINCIPIO DE HUYGENS-FRESNEL	33
2.5.1. Principio de Huygens-Fresnel en coordenadas rectangulares.	34
2.6. APROXIMACIÓN DE FRESNEL	35

2.7. APROXIMACIÓN DE FRAUNHOFER	36
2.8. PRINCIPIO DE HUYGENS-FRESNEL Y APROXIMACIÓN DE FRESNEL EN DOS DIMENSIONES	37
3. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PRINCIPIO DE HUYGENS-FRESNEL Y LA APROXIMACIÓN DE FRESNEL	39
3.1. DIFRACCIÓN POR UNA RENDIJA RECTANGULAR	39
3.1.1. Consideraciones generales de los cálculos numéricos en $2D$	39
3.1.2. Solución por el método de Simpson adaptativo.	41
3.1.3. Solución por el método de expansión asintótica libre de momentos.	44
3.1.4. Solución de la aproximación de Fresnel en $3D$ por el método de las integrales de Fresnel.	49
3.1.5. Comparación de los resultados numéricos obtenidos por los tres métodos.	52
3.1.6. Análisis de los resultados numéricos de la primera difracción.	52
3.2. DIFRACCIÓN POR DOS RENDIJAS RECTANGULARES	55
3.2.1. Consideraciones generales de los cálculos numéricos.	55
4. MONTAJE EXPERIMENTAL, RESULTADOS Y DISCUSIÓN	59
4.1. MONTAJE EXPERIMENTAL	59
4.2. PRIMERA DIFRACCIÓN	61
4.2.1. Montaje experimental de la primera difracción.	61
4.2.2. Proceso de detección y reconstrucción del primer patrón de difracción.	62
4.2.3. Resultados experimentales de la primera difracción.	63
4.3. SEGUNDA DIFRACCIÓN	65
4.3.1. Montaje experimental de la segunda difracción.	65

ÍNDICE GENERAL	9
4.3.2. Proceso de detección y reconstrucción del segundo patrón de difracción.	65
4.3.3. Resultados experimentales de la segunda difracción.	66
5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	70
A. MÉTODO DE EXPANSIÓN ASINTÓTICA: DISMINUCIÓN DEL ERROR CON INCREMENTOS DE LA FRECUENCIA	72
B. APROXIMACIÓN DE FRESNEL PARA UNA RENDIJA RECTANGU- LAR EN TÉRMINOS DE LAS INTEGRALES DE FRESNEL	74
C. TEOREMA DE GREEN	77
D. FUNCIONAMIENTO DEL CONTADOR DE FOTONES INDIVIDUA- LES	78
D.1. CONTADOR DE FOTONES INDIVIDUALES	78
D.1.1. Principio operacional.	78
D.1.2. Elemento Peltier.	80
D.1.3. Eficiencia de la fotodetección.	81
D.1.4. Tasa de conteos oscuros.	81
D.1.5. Circuito de extinción.	82
D.1.6. Afterpulsing probability.	83
D.1.7. Modos de operación.	84

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Reconstrucción de máximos y mínimos en un experimento de interferencia de fotones para diferentes tiempos de exposición. Imagen tomada de [1].	16
Figura 2. Campo encerrado en una cavidad de paredes perfectamente conductoras. Imagen tomada de [2].	20
Figura 3. Caminos posibles que puede tomar una partícula desde su posición y tiempo inicial (x', t') hasta su posición y tiempo final (x, t) .	22
Figura 4. Difracción de Fresnel entre la superficie esférica A y la superficie esférica B.	23
Figura 5. Interpretación de la posición canónica \hat{q} como una dirección perpendicular a la dirección de propagación del campo electromagnético. Imagen tomada de [3].	24
Figura 6. Superficies de integración para solucionar el problema de la difracción.	29
Figura 7. Esquema que muestra la formulación de Rayleigh-Sommerfeld para la difracción utilizando ondas esféricas.	30
Figura 8. Esquema que muestra la nueva forma de ver el problema de la difracción en donde se utilizan ondas parabólicas en vez de esféricas.	32
Figura 9. Principio de Huygens.	34
Figura 10. Geometría de la difracción.	35
Figura 11. Comportamiento del patrón de difracción cuando varía el número de Fresnel. Imagen tomada de [4].	38
Figura 12. Esquema de la primera difracción.	40

Figura 13. a) Paso variable de la malla en el método de Simpson adaptativo. b) Método de Simpson compuesto 1/3.	41
Figura 14. Patrón de intensidad normalizado obtenido con el principio de Huygens-Fresnel(curva roja) y la aproximación de Fresnel(curva azul) por el método de Simpson adaptativo para diferentes números de Fresnel.	42
Figura 15. Patrón de intensidad normalizado obtenido con el principio de Huygens-Fresnel(curva roja) y la aproximación de Fresnel(curva azul) por el método de Simpson adaptativo y su ampliación en las zonas más oscilatorias. a)-b) $NF = 39.4945$, se comienzan a observar diferencias entre los dos patrones de intensidad. c)-d) $NF = 39.4945$, las diferencias se vuelven más notorias.	43
Figura 16. Patrón de intensidad para diferentes números de Fresnel obtenidos por el método de expansión asintótica.	48
Figura 17. Patrón de intensidad para diferentes números de Fresnel obtenidos por el método de expansión asintótica y sus respectivas ampliaciones en las zonas más oscilatorias.	49
Figura 18. Patrón de intensidad de una rendija cuadrada de $0.2cm$ por $0.2cm$ a una distancia de observación $100cm$. a) Patrón de intensidad en escala de colores. b) Patrón de intensidad en $3D$. c) Corte hecho en la gráfica $3D$ para un valor constante $y = 0$	51
Figura 19. Patrón de intensidad de una rendija rectangular de $0.05cm$ por $0.5cm$ a una distancia de observación $100cm$. a) Patrón de intensidad en escala de colores. b) Patrón de intensidad en $3D$. c) Corte hecho en la gráfica $3D$ para un valor constante $y = 0$	51
Figura 20. Patrón de intensidad de una rendija rectangular de $0.01cm$ por $0.05cm$ a una distancia de observación $150cm$. a) Patrón de intensidad en escala de colores. b) Patrón de intensidad en $3D$. c) Corte hecho en la gráfica $3D$ para un valor constante $y = 0$	52
Figura 21. Solución de la aproximación de Fresnel para diferentes números de Fresnel por los tres métodos.	53
Figura 22. Solución de la aproximación de Fresnel para diferentes números de Fresnel por los tres métodos.	54
Figura 23. Esquema de la segunda difracción.	55

Figura 24. Patrón de intensidad obtenido de la primera difracción a una distancia 4.1[cm] y con un tamaño de la rendija de 0.4445[cm]. a) Patrón de intensidad. b) Región ampliada del patrón de intensidad en donde se observan diferencias entre las dos curvas.	56
Figura 25. Patrón de intensidad obtenido de la segunda difracción a una distancia 146.4[cm] y con un tamaño de la rendija 0.0127[cm]. a) Patrón de intensidad cerca del máximo central. b) Ampliación de las diferencias.	57
Figura 26. Corrimiento lateral entre las dos rendijas rectangulares.	57
Figura 27. Patrón de intensidad obtenido de la primera difracción a una distancia 2.28[cm] y con un tamaño de la rendija de 0.508[cm]. a) Patrón de intensidad. b) Ampliación de las diferencias entre las dos curvas.	58
Figura 28. Patrón de intensidad obtenido de la segunda difracción a una distancia de 96.84[cm], con un tamaño de la rendija 0.03175[cm] y un corrimiento lateral entre rendijas de 0.0015[cm]. a) Patrón de intensidad cerca del máximo central. b) Ampliación de las diferencias.	58
Figura 29. Instrumentos principales utilizados en los experimentos de la primera y segunda difracción por conteo de fotones. a) Obturador de diafragma con controlador SHB1T. b) Plataforma de traslación motorizada MTS50-Z8. c) Expansor de haz de magnificación fija: Acromático GBE20-A. d) Rendija mecánica ajustable VA100. e) Contador de fotones individuales SPCM50A.	61
Figura 30. Esquema de la primera difracción.	62
Figura 31. Montaje experimental para la primera difracción.	62
Figura 32. Número de fotones en función de la posición x . a) Tamaño de la rendija 0.056[cm], distancia de observación $z = 126.95[cm]$ y número de Fresnel $NF = 0.098$. b) Tamaño de la rendija 0.056[cm], distancia de observación $z = 41.97[cm]$ y número de Fresnel $NF = 0.2951$	64
Figura 33. Número de fotones en función de la posición x para un tamaño de la rendija 0.1905[cm], distancia de observación $z = 96.84[cm]$ y número de Fresnel $NF = 1.4800$	64
Figura 34. Esquema de la segunda difracción.	65
Figura 35. Montaje experimental para la segunda difracción.	66

Figura 36. Densidad de probabilidad de detectar un fotón obtenido de la primera difracción a una distancia $2.28[cm]$ y con un tamaño de la rendija de $0.508[cm]$. a) Densidad de probabilidad. b) Ampliación de las diferencias entre las dos curvas. 66

Figura 37. Curvas teóricas y puntos experimentales de la segunda difracción. a) Segunda difracción alrededor del máximo central. b) Segunda difracción en la zona justo antes de que comiencen las diferencias. 67

Figura 38. Curvas teóricas y puntos experimentales de la segunda difracción. a) Segunda difracción alrededor del máximo central. b) Segunda difracción en las zonas en donde se diferencia el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel. 68

Figura 39. Curvas teóricas y puntos experimentales de la segunda difracción. a) Aproximación de Fresnel comparada con los datos experimentales. b) Principio de Huygens-Fresnel comparado con los datos experimentales. 68

Figura 40. a) Disminución del error con aumentos de la frecuencia de oscilación. b) Ampliación de la gráfica del error en función de la frecuencia. 73

Figura 41. Proceso interno del contador de fotones. 79

Figura 42. Ciclo del contador de fotones. 80

Figura 43. Curva de eficiencia del SPCM utilizado en este trabajo. Imagen tomada de [5]. 82

Figura 44. Avalancha producida por energía térmica. 82

Figura 45. Electrón atrapado entre la banda de conducción y la banda de valencia. Imagen tomada de [6]. 83

Figura 46. Free running timed counter. Imagen tomada de [5]. 84

Figura 47. Externally triggered timed counter. Imagen tomada de [5]. 85

Figura 48. Externally triggered counter. Imagen tomada de [5]. 86

Figura 49. External gating. Imagen tomada de [5]. 87

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Principales características de la Plataforma de traslación motorizada MTS50-Z8.	60
Tabla 2. Principales características de la rendija mecánica ajustable VA100. . . .	60
Tabla 3. Principales características del expansor de haz de magnificación fija: Acromático GBE20-A.	60
Tabla 4. Principales características del obturador de diafragma con controlador SHB1T.	60
Tabla 5. Principales características del contador de fotones individuales SPCM50A.	60

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE LA VALIDEZ DE LA APROXIMACIÓN DE FRESNEL A NIVEL DE CONTEO DE FOTONES.*

AUTOR: FERNEY CASTRO SIMANCA†

PALABRAS CLAVES: Propagación de fotones, aproximación de Fresnel, método de Simpson adaptativo, método de expansión asintótica, método de las integrales de Fresnel, conteo de fotones.

En este trabajo se estudia de forma teórica y experimental la posible existencia de una relación fundamental entre la aproximación de Fresnel y la propagación de fotones. En la parte teórica del trabajo se estudian las condiciones bajo las cuales la difracción de un campo constante a través de una rendija rectangular muestra diferencias entre el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel. Para esto, se soluciona numéricamente el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel por tres métodos diferentes. Se observó, que las diferencias aparecían cuando las soluciones numéricas eran altamente oscilatorias, por lo que diseñar un experimento de difracción que detecte estas diferencias es complicado. Para solucionar este problema, se lleva a cabo una doble difracción con una segunda rendija rectangular. Se encontraron condiciones para diseñar un experimento de doble difracción por conteo de fotones que pueda discernir entre el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel, de hecho, se observó que un corrimiento lateral entre los ejes de las dos rendijas incrementa las diferencias.

En la parte experimental del trabajo se elaboran experimentos de la primera y segunda difracción por conteo de fotones, los cuales utilizan un láser de Helio-Neón de $633[nm]$ cuyo haz ha sido previamente atenuado, para iluminar las rendijas rectangulares. El proceso de medición se hace con un contador de fotones individuales desplazado con un microdesplazamiento electrónico. En la primera difracción se encontró una buena relación entre las simulaciones y los datos experimentales, lo cual comprueba la validez de los métodos numéricos utilizados. En la doble difracción se observó una posible relación entre la aproximación de Fresnel y los datos experimentales, no obstante, se tiene cuidado en afirmar algo con certeza ya que el experimento se puede ver afectado por muchos factores externos.

* Trabajo de Grado.

† Grupo de Óptica y Tratamiento de Seales, Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Rafael Ángel Torres Amarís, Dr.

ABSTRACT

TITLE: THEORETICAL-EXPERIMENTAL STUDY OF THE VALIDITY OF THE FRESNEL APPROXIMATION AT THE LEVEL OF PHOTON COUNTING.

AUTHOR: FERNEY CASTRO SIMANCA[†]

KEYWORDS: Photon propagation, Fresnel approximation, Simpson's adaptive method, asymptotic expansion method, Fresnel integrals method, photon counting.

In this work, the possible existence of a fundamental relation between the Fresnel approach and the propagation of photons is studied theoretically and experimentally. In the theoretical part of the work, the conditions under which the diffraction of a constant field through a rectangular gap shows differences between the Huygens-Fresnel principle and the Fresnel approximation are studied. For this, the Huygens-Fresnel principle and the Fresnel approach are solved numerically by three different methods. It was observed that the differences appeared when the numerical solutions were highly oscillatory, so designing a diffraction experiment that detects these differences is complicated. To solve this problem, a double diffraction is carried out with a second rectangular slit. Conditions were found to design a double diffraction experiment by photon counting that could discern between the Huygens-Fresnel principle and the Fresnel approach, in fact, it was observed that a lateral shift between the axes of the two slits increases the differences.

In the experimental part of the work, first and second photon diffraction counting experiments are performed, which use a 633[nm] Helium-Neon laser whose beam has been previously attenuated to illuminate the rectangular slits. The measurement process is done with a counter of individual photons displaced with an electronic microdisplacement. In the first diffraction, a good relationship between the simulations and the experimental data was found, which verifies the validity of the numerical methods used. In the double diffraction a possible relationship between the Fresnel approximation and the experimental data was observed, nevertheless, care is taken to affirm something with certainty since the experiment can be affected by many external factors.

[†]Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales, Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Rafael Ángel Torres Amaris, Dr

INTRODUCCIÓN

Es indudable que la luz ha sido desde la antigüedad un fenómeno intrigante para el hombre, siendo desde la época de los antiguos griegos hasta la actualidad un tema que ha generado gran controversia y profundos debates entre grandes pensadores. Un punto de referencia en la historia de este tema se dio en el siglo XVIII, cuando Newton argumentó que la luz estaba compuesta por pequeñas partículas a las cuales llamó corpúsculos, mientras que Huygens le asignó un comportamiento ondulatorio. Estas interpretaciones de la naturaleza de la luz fueron adecuadas para dar una explicación a los fenómenos de reflexión y refracción, sin embargo, fueron incapaces de explicar el fenómeno de difracción observado por Grimaldi en el siglo XVII. El físico Augustin Fresnel fue el primero en brindar una explicación matemática de la difracción, él unió el principio de Huygens y el término interferencia (introducido por Young para explicar su experimento de la doble rendija) para formular el principio de Huygens-Fresnel. De hecho, tiempo después, Rayleigh y Sommerfeld demostraron que este principio se puede obtener a partir de la ecuación de onda para un campo escalar y con esto respaldaron por muchos años la naturaleza ondulatoria de la luz.

El principio de Huygens-Fresnel ha representado desde el siglo XVIII un importante y poderoso método para explicar la forma de propagación de la luz y en general la propagación de un campo escalar. Obtener una solución analítica de este principio es una tarea difícil considerando la naturaleza altamente oscilatoria de las integrales implicadas. No obstante, se puede simplificar la situación efectuando dos aproximaciones las cuales funcionan para diferentes puntos del espacio y se convirtieron en herramientas muy útiles para el problema en cuestión; la aproximación de Fresnel y la aproximación de Fraunhofer, válidas para distancias de observación medianas y lejanas respectivamente.

Una situación de mucho interés en la que se utiliza el principio de Huygens-Fresnel se presenta cuando se desea conocer el comportamiento de la luz después de atravesar una rendija hecha en una pantalla opaca. Si se quiere analizar el campo a distancias muy lejanas de dicha rendija, la aproximación de Fraunhofer se convierte en una herramienta óptima para solucionar este problema, simplificando el trabajo matemático hasta el punto de obtener soluciones analíticas con la ayuda de la transformación de Fourier. Más aún, soluciones numéricas se pueden calcular de forma muy eficiente con la ayuda del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés). Ahora bien, si se analiza el campo cada vez más cerca de la rendija, a partir de una cierta distancia pierde validez la aproximación de Fraunhofer y se hace necesario utilizar la aproximación de Fresnel. Obtener soluciones analíticas de la aproximación de Fresnel

es un problema difícil, por lo que es necesario utilizar algoritmos que brinden soluciones numéricas [7–15], trabajo que aún sigue siendo complicado.

En cuanto al régimen de validez de la aproximación de Fresnel, a lo largo de los años diferentes trabajos [4, 16–20] han elaborado criterios que permiten identificar hasta qué punto la aproximación de Fresnel es válida. En uno de estos trabajos [17] se comparan soluciones numéricas del principio de Huygens-Fresnel y de la aproximación de Fresnel cuando se hace pasar una onda plana uniforme a través de un rendija plana, obteniendo como resultado principal que la aproximación de Fresnel es válida incluso para distancias muy cercanas a la rendija. Así mismo, en [16] se encuentra la forma que tienen las zonas de Fresnel (zonas en donde la aproximación de Fresnel es válida) y se afirma que en el eje óptico, la aproximación de Fresnel funciona incluso a distancias de observación equivalentes a unas cuantas longitudes de onda, más allá de las cuales comienza a regir la óptica geométrica. La conclusión central de estos trabajos se puede resumir en la frase declarada por Goodman en su libro [4]: "The general conclusions of all of these analyses are similar; namely, the accuracy of the Fresnel approximation is extremely good to distances that are very close to the aperture".

Por otra parte, desde que Einstein dio a conocer su trabajo sobre el efecto fotoeléctrico [21] el cual le valió el premio nobel de física en 1921, los científicos han diseñado experimentos para evidenciar la naturaleza cuántica de la luz. Se comenzaron a implementar experimentos de difracción e interferencia con luz muy atenuada, de tal forma que se tuvieran muy pocos fotones a la vez en el sistema óptico [22–27] (ver figura 1). Taylor en 1909, fue el primero en hacer un experimento de difracción con luz muy atenuada [22], registrando fotografías del patrón de difracción reconstruido para diferentes tiempos de exposición. Atenuó tanto la luz, que estimó la existencia de un solo fotón a la vez en el sistema óptico y necesitó un tiempo de exposición de tres meses para reconstruir el patrón de difracción.

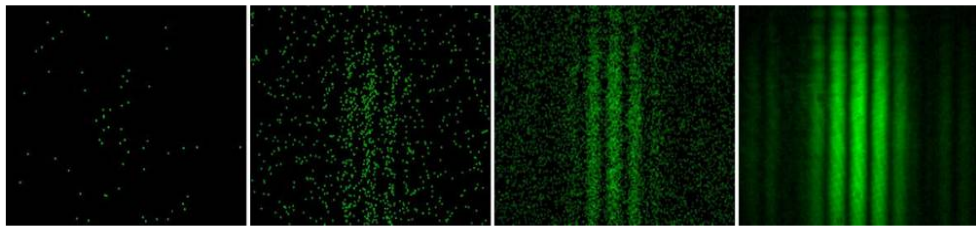


Figura 1: Reconstrucción de máximos y mínimos en un experimento de interferencia de fotones para diferentes tiempos de exposición. Imagen tomada de [1].

Actualmente, experimentos de difracción con pocos fotones utilizan detectores especiales para construir gráficas del número de fotones en función de la posición. En estos experimentos es crucial contar con detectores de fotones que posean características apropiadas para llevar a cabo un eficiente proceso de detección. Desde los años 30 se han venido desarrollando diferentes dispositivos que puedan medir luz a muy bajas intensidades, a tal punto que puedan ser capaces de medir fotones individuales. El desarrollo de nuevas tecnologías para detectar fotones individuales se ha posicionado como una de las ramas de investigación científica más estudiadas. Los avances en esta dirección pueden brindar aportes en campos como la computación

cuántica, criptografía cuántica y pruebas para demostrar conocimientos fundamentales.

Los detectores de fotones que se desarrollan hoy en día están basados en fotomultiplicadores, semiconductores y superconductores [6]. Los primeros dispositivos hechos con este fin fueron los fotomultiplicadores (PMT por sus siglas en inglés), los cuales utilizan el efecto fotoeléctrico para generar una corriente proporcional al número de fotones incidentes. Después, se utilizaron las propiedades de los semiconductores para crear detectores con buenas características, estos se conocen como diodos de avalancha de fotones individuales (SPAD por sus siglas en inglés). Los detectores hechos con superconductores tienen buenas propiedades pero funcionan a temperaturas muy bajas en la escala de Kelvin. Todas las investigaciones hechas sobre los tipos de detectores están encaminadas en obtener un solo fin, poseer las propiedades de un detector ideal, es decir, 100% de eficiencia cuántica, resolución en el número de fotones, resolución en el tiempo, no saturación y cero cuentas oscuras.

Por otro lado, recientemente en el grupo de óptica y tratamiento de señales, se discutió el papel que juega la aproximación de Fresnel en la forma de propagación de un estado del campo electromagnético (fotón). En este trabajo, al utilizar las integrales de camino de Feynman para estudiar la evolución temporal de un fotón, se encontró que la propagación del fotón está relacionada con una transformación de Fourier Fraccionaria (TFFr por sus siglas en inglés) [3], esta última siendo la transformación asociada a la aproximación de Fresnel así como la transformación de Fourier está asociada a la aproximación de Fraunhofer [28]. Con estos resultados, es inevitable que surjan las siguientes preguntas:

- ¿Un estudio del patrón de difracción de una abertura por conteo de fotones podría mostrar una relación fundamental entre la aproximación de Fresnel y la propagación de fotones?
- ¿Es posible diseñar un experimento de difracción de fotones que discrimine entre el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel en una zona en donde teóricamente el principio de Huygens-Fresnel debería ser válido?

Con estas preguntas en mente, en este trabajo se hace un estudio teórico y experimental de la validez de la aproximación de Fresnel para encontrar indicios de su carácter fundamental. En el estudio teórico se soluciona el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel por diferentes métodos numéricos, mientras que el estudio experimental utiliza una fuente coherente altamente atenuada para reconstruir el patrón de difracción por conteo de fotones y con esto, buscar resultados que posiblemente apoyen la teoría de propagación de fotones del grupo de óptica y tratamiento de señales.

Para estudiar este problema, este trabajo de tesis se estructura de la siguiente manera: En el capítulo 2 se muestra la cuantización del campo electromagnético y se presentan los resultados principales del trabajo de propagación de fotones del grupo de óptica y tratamiento de señales. En el capítulo 3 se presenta la teoría escalar de la difracción, el principio de Huygens-Fresnel y se analizan las consideraciones necesarias para obtener a partir de este la aproximación de Fresnel y la aproximación de Fraunhofer; además, se obtienen estas mismas aproximaciones

en dos dimensiones. Por último se define el número de Fresnel, parámetro que brinda una idea de la aproximación que se debe utilizar dependiendo de la situación que se esté estudiando.

En el capítulo 4 se soluciona numéricamente el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel para un campo constante que incide sobre una rendija rectangular. Se solucionan en dos dimensiones por medio de dos métodos diferentes; el método de Simpson adaptativo y el método de expansión asintótica y se soluciona sólo la aproximación de Fresnel en tres dimensiones con la ayuda del método de las integrales de Fresnel(método con bajo error numérico). Se hace una breve discusión de la configuración de parámetros bajos los cuales el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel se diferencian, y se muestran las dificultades que surgen cuando se quieren notar estas diferencias experimentalmente. Con el propósito de hacer más evidentes dichas diferencias, se realiza numéricamente una segunda difracción utilizando como campo incidente el campo resultante de la primera difracción. Para lograr esto, el método de Simpson adaptativo se emplea para la primera difracción y la FFT para la segunda difracción. El capítulo finaliza escogiendo una configuración de parámetros que haga notables las diferencias.

En el capítulo 5 se describen los montajes experimentales utilizados para la primera y segunda difracción, se hacen comparaciones entre las curvas obtenidas numéricamente y las obtenidas experimentalmente y se hace una discusión de los resultados obtenidos. Por último, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones principales de este trabajo.

CAPÍTULO 1

FENÓMENO ONDULATORIO ELECTROMAGNÉTICO COMO EL LÍMITE CLÁSICO DE LA PROPAGACIÓN DE FOTONES

En este capítulo se muestra la forma de cuantizar un solo modo del campo electromagnético. Además, se hace un repaso de la teoría de propagación de fotones desarrollada en el grupo de óptica y tratamiento de señales, en la cual al propagar el Hamiltoniano de un fotón con ayuda de las integrales de camino de Feynman, se obtiene un propagador para fotones que se puede escribir sin necesidad de aproximaciones como una integral de difracción de Fresnel.

1.1 CUANTIZACIÓN DE UN SOLO MODO DEL CAMPO ELECTRO- MAGNÉTICO

Una forma de cuantizar un solo modo del campo electromagnético es encerrándolo en una cavidad de longitud L [2]. Esta cavidad tiene en $z = 0$ y $z = L$ paredes perfectamente conductoras, por lo que en estos puntos el campo se anula (ver figura 2). El hecho de imponer estas condiciones ocasiona que el campo sea ahora una onda estacionaria que puede vibrar únicamente con unas frecuencias permitidas. Si en el interior de la cavidad no hay corrientes o cargas, se utilizan las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

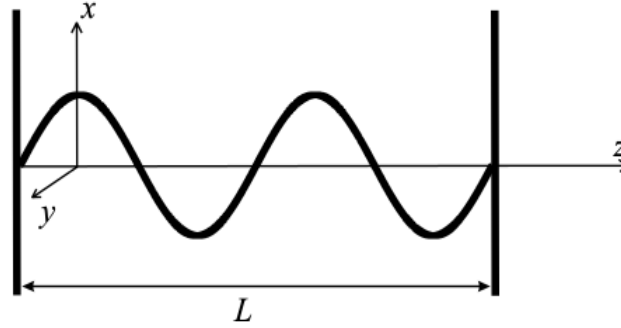


Figura 2: Campo encerrado en una cavidad de paredes perfectamente conductoras. Imagen tomada de [2].

La solución para el campo eléctrico bajo estas condiciones viene dada por la expresión [2]

$$E_x(z, t) = \mathcal{E}_0 q(t) \sin(kz), \quad (1.5)$$

en donde q es un factor dependiente del tiempo, k es el número de onda, \mathcal{E}_0 es el campo eléctrico por fotón y z es la dirección de propagación del campo. Adicionalmente, el campo magnético se escribe como

$$B_y(z, t) = \mathcal{B}_0 p(t) \sin(kz), \quad (1.6)$$

con $p(t) = \dot{q}(t)$ y \mathcal{B}_0 es el campo magnético por fotón. Como se observa, el campo eléctrico es proporcional a $q(t)$ y está polarizado en la dirección x mientras que el campo magnético es proporcional a $p(t)$ y está polarizado en la dirección y .

La energía del campo, es el Hamiltoniano el cual se puede calcular como

$$H = \frac{1}{2} \int \left[\epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] dV, \quad (1.7)$$

que se puede escribir como

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2), \quad (1.8)$$

en donde ω es la frecuencia del modo. Para cuantizar el campo, se deben cambiar las variables p y q por sus respectivos operadores \hat{q} y \hat{p} , los cuales deben cumplir la relación de conmutación

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \hat{1}. \quad (1.9)$$

Los operadores campo eléctrico y magnético se pueden escribir como

$$\hat{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_0 \hat{q}(t) \sin(kz), \quad (1.10)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \mathcal{B}_0 \hat{p}(t) \sin(kz), \quad (1.11)$$

y el Hamiltoniano se convierte en un operador

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2). \quad (1.12)$$

El operador \hat{H} es hermítico y por lo tanto sus observables son reales. Para calcular los eigenvalores de energía y las eigenfunciones, se utilizan los operadores auxiliares

$$\hat{a} = (2\hbar\omega)^{1/2}(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad (1.13)$$

$$\hat{a}^\dagger = (2\hbar\omega)^{1/2}(\omega\hat{q} - i\hat{p}), \quad (1.14)$$

conocidos como operador aniquilación y operador creación respectivamente. Estos operadores cumplen la relación de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (1.15)$$

El operador Hamiltoniano se puede escribir en términos de estos operadores como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.16)$$

Si n representa el número de fotones y $|n\rangle$ son las eigenfunciones del operador Hamiltoniano, se cumple que

$$\hat{H} |n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle. \quad (1.17)$$

Esta ecuación muestra que los niveles de energía están dados por la expresión

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.18)$$

y de aquí se obtiene un resultado importante; la energía en el modo ω es diferente de cero incluso si el número de fotones en este modo es cero

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega. \quad (1.19)$$

Esto se conoce como fluctuaciones cuánticas del vacío y son un resultado en la electrodinámica cuántica. Se puede leer [2] para más información sobre la cuantización de un solo modo del campo y sobre la cuantización multimodal.

1.2 PROPAGACIÓN DE FOTONES CON LAS INTEGRALES DE CAMINO DE FEYNMAN

Feynman demostró que la amplitud de probabilidad $\psi(x, t)$ de una partícula que se propaga de un punto a otro, se ve afectada por todos los posibles caminos que pueda seguir la partícula desde su posición y tiempo inicial (x', t') con amplitud de probabilidad $\psi(x', t')$ hasta su posición y tiempo final en (x, t) [29](ver figura 3). Todos los posibles caminos aportan de forma diferente al estado de la partícula, lo cual se puede interpretar como una suma infinita

de la amplitud de probabilidad en el estado inicial, pesado con el aporte de cada camino a la construcción del estado final. Lo anterior se escribe matemáticamente como

$$\psi(x, t) = \int K(x, t; x', t') \psi(x', t') d^3 x', \quad (1.20)$$

siendo $K(x, t; x', t')$ el propagador de Feynman. Si se conoce el propagador de Feynman de una partícula, utilizando la ecuación (1.20) se puede determinar la amplitud de probabilidad de que la partícula este en cualquier tiempo y punto en el espacio.

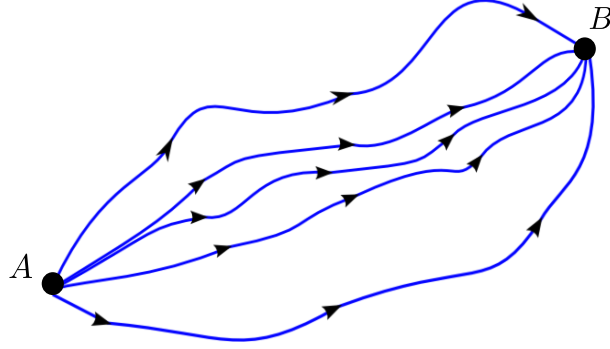


Figura 3: Caminos posibles que puede tomar una partícula desde su posición y tiempo inicial (x', t') hasta su posición y tiempo final (x, t) .

Para calcular el propagador de Feynman de una partícula, se deben utilizar propiedades específicas de la partícula, por ejemplo su Hamiltoniano. Como ya se mencionó, para un fotón el Hamiltoniano viene dado por la expresión [2]

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + w^2 \hat{q}^2), \quad (1.21)$$

Este Hamiltoniano para un fotón tiene una forma familiar, de hecho, es el Hamiltoniano de un oscilador armónico con una masa de la cual más adelante se hablará.

Si se utiliza el Hamiltoniano de la ecuación (1.21), el propagador de Feynman viene dado por [30]

$$K(q_F, t; q_I, t') = \langle q_F | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | q_I \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega t}} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \omega \left([q_I^2 + q_F^2] \cot \omega t - \frac{2q_I q_F}{\sin \omega t} \right) \right]. \quad (1.22)$$

Con esto, la amplitud de probabilidad de que un fotón esté en la posición canónica y tiempo (q_f, t) , cuando se encuentra inicialmente en la posición canónica y tiempo (q_I, t) está dada

por

$$\begin{aligned}\psi(q_F, t) &= \int_R \langle q_F | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | q_I \rangle \psi(q_I, 0) dq_I \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i\hbar \sin \omega t}} \int_R \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \omega \left([q_I^2 + q_F^2] \cot \omega t - \frac{2q_I q_F}{\sin \omega t} \right) \right] \psi(q_I, 0) dq_I.\end{aligned}\quad (1.23)$$

Para ver de forma más clara la relación que hay entre la ecuación (1.41) y la integral de difracción de Fresnel se puede escribir la integral de difracción de Fresnel en el marco de la óptica metaxial de Bonnet como

$$U(x, z) = \left(\frac{i}{\lambda z} \right)^{1/2} e^{ikz} \left[\frac{ik}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{R_B} \right) x^2 \right] \int_{\Sigma} \exp \left[\frac{ik}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R_A} \right) x'^2 \right] \exp \left[-\frac{ik}{z} x x' \right] U(x', 0) dx'. \quad (1.24)$$

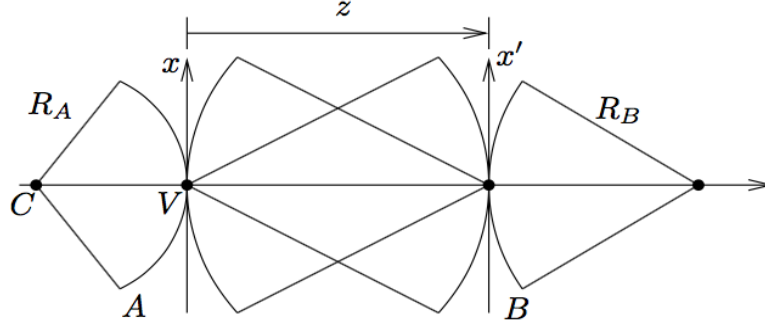


Figura 4: Difracción de Fresnel entre la superficie esférica A y la superficie esférica B.

Usando esta expresión, Pellat-Finet [31, 32] estableció una relación entre la difracción de Fresnel y la transformación de Fourier Fraccional [33](ver figura 4). Definiendo

$$\cot \alpha = \epsilon \frac{1 - \mu}{\mu}, \quad \text{con} \quad \mu = \frac{z}{R_A} \quad (1.25)$$

luego

$$\sin^2 \alpha = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \epsilon^2(1 - \mu)^2}, \quad (1.26)$$

en donde el valor de ϵ es solución de

$$\frac{1}{R_B} + \frac{1}{z} = \frac{\epsilon^2(1 - \mu)}{\mu R_A [\mu^2 + \epsilon^2(1 - \mu)^2]}. \quad (1.27)$$

Así, con la siguiente elección de variables reducidas

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\lambda\epsilon R_A}} x', \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{\lambda\epsilon R_A}} (\cos \alpha + \epsilon \sin \alpha) x, \quad (1.28)$$

y las amplitudes reducidas

$$V_A(\rho) = U_A(\sqrt{\lambda\epsilon R_A}\rho), \quad V_B(\sigma) = U_B\left(\frac{\sqrt{\lambda\epsilon R_A}\sigma}{\cos \alpha + \epsilon \sin \alpha}\right), \quad (1.29)$$

se puede escribir

$$V_B(\sigma) = \frac{i}{\sin \alpha} (\cos \alpha + \epsilon \sin \alpha) \exp(i\pi\sigma^2 \cot \alpha) \int_R V_A(\rho) \exp(i\pi\rho^2 \cot \alpha) \exp\left(\frac{-i2\pi\sigma\rho}{\sin \alpha}\right) d\rho. \quad (1.30)$$

Esta ecuación muestra una relación más clara entre el propagador de fotones (1.41) y la integral de difracción de Fresnel.

1.3 POSICIÓN TRANSVERSAL EN LA PROPAGACIÓN DE FOTONES

La amplitud de probabilidad para los fotones viene dada por la ecuación (1.41). Esta amplitud de probabilidad depende de la posición canónica q y por lo tanto resulta indispensable dar una explicación de esta dependencia. La posición canónica q está relacionada con el campo eléctrico por la expresión (1.10) la cual representa una onda estacionaria que tiene para cada posición z , una oscilación armónica en la dirección perpendicular a la dirección de propagación del campo (ver figura 5). Esta oscilación viene dada por

$$q(t) = A \sin(\omega t + \phi). \quad (1.31)$$

Con esto en mente, se puede interpretar la posición \hat{q} como una dirección perpendicular a la dirección de propagación del campo electromagnético y paralelo a la polarización del campo eléctrico. [3].

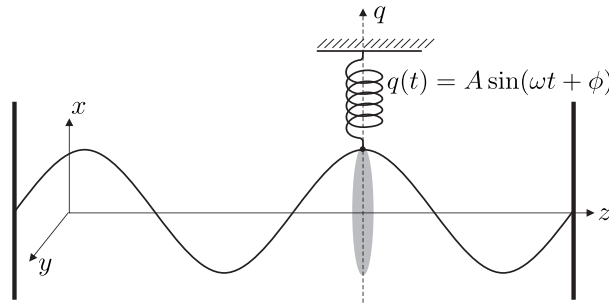


Figura 5: Interpretación de la posición canónica \hat{q} como una dirección perpendicular a la dirección de propagación del campo electromagnético. Imagen tomada de [3].

Sin embargo, aún falta dar una interpretación de la amplitud de probabilidad $\psi(q, t)$ que está en términos de la posición canónica \hat{q} . Esta función de onda se puede interpretar como la probabilidad de detección de un fotón en una posición transversal a la dirección de propagación [3]. Esta interpretación se debe tomar con cuidado porque la posición canónica \hat{q} no es estrictamente una posición usual del espacio [34].

1.4 PROPAGADOR COMO UNA INTEGRAL DE FRESNEL

Siguiendo un proceso similar al de [31, 32], se puede establecer una relación entre el propagador de fotones (1.41) y la transformación de Fourier Fraccional. Tomando el siguiente cambio de variables

$$\rho^2 = \frac{\omega}{2\pi\hbar} q_I^2, \quad \sigma^2 = \frac{\omega}{2\pi\hbar} q_F^2. \quad (1.32)$$

luego

$$\rho^2 = \frac{c\alpha}{\lambda\epsilon R_A \hbar k} q_I^2, \quad \sigma^2 = \frac{c\alpha}{\lambda\epsilon R_A \hbar k} q_F^2, \quad (1.33)$$

en donde se utilizó $\alpha = \omega t$, $k = 2\pi/\lambda$ y $ct = \epsilon R_A > 0$, donde ϵ es un número real diferente de cero. De acuerdo a esta expresión, se puede asociar un término de masa $m_\lambda = \hbar k/c$, el cual está relacionado al Hamiltoniano, es decir, el campo electromagnético cuantizado puede ser entendido como un oscilador armónico con masa $m_\lambda = \hbar k/c$. Con esto se tiene

$$\rho^2 = \frac{1}{\lambda\epsilon R_A} \frac{\alpha}{m_\lambda} q_I^2, \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda\epsilon R_A} \frac{\alpha}{m_\lambda} q_F^2. \quad (1.34)$$

Si además se utiliza el escalamiento entre el observable q y una posición real x

$$x_I^2 = \frac{\alpha}{m_\lambda} q_I^2, \quad x_F^2 = \frac{\alpha}{m_\lambda} q_F^2, \quad (1.35)$$

la ecuación (1.41) se puede escribir de la forma

$$\psi(x_F, t) = \left(\frac{\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega t} \right)^{1/2} \int_R \psi(x_I, 0) \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda\epsilon R_A} \left([x_I^2 + x_q^2] \cot \alpha - \frac{2x_I x_F}{\sin \alpha} \right) \right] dx_I, \quad (1.36)$$

en donde $\cos \alpha + \epsilon \sin \alpha = 1$. Usando la ecuación (1.25) se obtiene

$$\sin \alpha = \frac{\mu}{\epsilon}, \quad (1.37)$$

luego, de las ecuaciones (1.37) y (1.26) se obtiene

$$\mu^2 + \epsilon^2(1 - \mu)^2 = \epsilon^2 \quad (1.38)$$

con $\epsilon = \frac{\mu}{2-\mu}$. Entonces, la ecuación (1.27) toma la forma

$$\frac{1}{R_B} + \frac{1}{z} = \frac{1 - \mu}{\mu R_A}. \quad (1.39)$$

Finalmente, usando la ecuación (1.25) y la expresión (1.41) se tiene

$$\phi(\sigma, t) = \left(\frac{1}{i \sin \alpha} \right)^{1/2} \int_R \exp \left[i\pi \left([\rho^2 + \sigma^2] \cot \alpha - \frac{2\rho\sigma}{\sin \alpha} \right) \right] \phi(\rho, 0) d\rho. \quad (1.40)$$

Así, la propagación de fotones se puede escribir como una transformación de Fourier Fraccional.

Además, con las ecuaciones anteriores se puede escribir

$$\Psi(x_F, z) = \left(\frac{i}{\lambda z} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{ik}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{R_B} \right) x^2 \right] \times \int_{\Sigma} \exp \left[-\frac{ik}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R_A} \right) x_F^2 \right] \exp \left[\frac{ik}{z} x_I x_F \right] \Psi(x_I, 0) dx_I. \quad (1.41)$$

En esta ecuación se observa que el propagador de Feynman para fotones se puede escribir como una integral de difracción de Fresnel. Como se observó en este capítulo, ya que el propagador para fotones se puede escribir como una integral de difracción de Fresnel en donde los osciladores armónicos del campo electromagnético tienen asociada una masa $m_\lambda = \hbar k/c$, es inevitable que aparezca la siguiente pregunta: ¿se podría encontrar alguna evidencia experimental de la relación fundamental entre la propagación de fotones y la integral de difracción de Fresnel? Esta pregunta es la base de este trabajo de tesis y se intentará responder en los siguientes capítulos.

CAPÍTULO 2

TEORÍA ESCALAR DE LA DIFRACCIÓN

En este capítulo se hará un breve repaso de la teoría escalar de la difracción, revisando los diferentes aportes hechos por Kirchhoff, Sommerfeld, Fresnel, Huygens y Fraunhofer. Se mostrará la forma de resolver el problema de la difracción con la formulación de Rayleigh-Sommerfeld imponiendo condiciones de frontera adecuadas al teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff. Además, se presentan consideraciones generales del principio de Huygens-Fresnel, de la aproximación de Fresnel y de la aproximación de Fraunhofer en tres dimensiones y se obtienen sus respectivas ecuaciones bidimensionales. Por último, se define el número de Fresnel y se establece un criterio para el límite a partir del cual deja de funcionar la aproximación de Fraunhofer y sea necesario el uso de la aproximación de Fresnel.

2.1 ECUACIÓN DE ONDA ESCALAR Y ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

La teoría de la difracción que se presenta en este capítulo es solo aplicable para casos en donde los efectos generados por el carácter vectorial de la luz sean despreciables. Si este es el caso, un campo escalar general $\Psi(\mathbf{r}, t)$ representa el comportamiento de cualquiera de las seis componentes de los campos eléctrico y magnético. La ecuación de onda para un campo escalar se puede escribir como [4, 35]

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

en donde μ y ϵ son respectivamente la permeabilidad y permitividad del medio por donde viaja la luz. Una onda monocromática es una solución de la ecuación (2.1) y se puede escribir como el producto de una función dependiente de la posición y una función dependiente del tiempo

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})}e^{-i\omega t}, \quad (2.2)$$

siendo $u(\mathbf{r})$ la amplitud real del campo, $\phi(\mathbf{r})$ la parte de la fase que depende de la posición y ω la frecuencia de la onda. Si se utiliza la amplitud compleja del campo $U(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})}$, la ecuación (2.2) se puede escribir de forma compacta

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (2.3)$$

En general, si el campo es policromático, una solución de (2.1) se puede escribir como una suma infinita de ondas monocromáticas cada una con diferente frecuencia y amplitud

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_{R^+} U(\mathbf{r}, \nu)e^{-i2\pi\nu t} d\nu, \quad (2.4)$$

en donde $\nu = \omega/2\pi$. Introduciendo la solución general(campo policromático) en la ecuación de onda (2.1), se obtiene una ecuación diferencial independiente del tiempo

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}, \nu) = 0, \quad (2.5)$$

conocida como la ecuación de Helmholtz, en donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda. Se puede decir entonces, que un campo de la forma (2.4) cumple la ecuación de onda y su amplitud compleja cumple la ecuación de Helmholtz.

2.2 TEOREMA INTEGRAL DE HELMHOLTZ-KIRCHHOFF

Pensando en el problema de la difracción, se debe solucionar la ecuación de Helmholtz imponiendo condiciones de frontera adecuadas para encontrar la forma de propagación del campo complejo $U(\mathbf{r}, \nu)$. Para encontrar una solución de la ecuación (2.5), se utiliza el teorema de Green cuyo desarrollo matemático se puede ver en el anexo C. Para utilizar este teorema, se debe escoger una función auxiliar apropiada G conocida como función de Green que simplifique la solución de las ecuaciones. Una onda esférica de frecuencia ω que diverge desde un punto r es una función de Green apropiada para este problema [4, 35]

$$G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \frac{e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}. \quad (2.6)$$

Reemplazando esta función en la ecuación (C.5) que aparece en el anexo C se obtiene

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma(V)} \left[G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial U(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - U(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma' \\ = \int_V [G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \nabla^2 U(\mathbf{r}', \nu) - U(\mathbf{r}', \nu) \nabla^2 G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})] dV. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sumando y restando k^2GU a la parte derecha de (2.7) y recordando que $U(\mathbf{r}, \nu)$ cumple la ecuación de Helmholtz, se tiene

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma(V)} \left[G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial U(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - U(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma' &= \int_V [G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}', \nu) dV \\ &\quad - \int_V U(\mathbf{r}', \nu)(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})] dV \\ &= - \int_V U(\mathbf{r}', \nu)(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})] dV. \end{aligned}$$

Se observa que $(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma(V)} \left[G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial U(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - U(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma' &= 4\pi \int_V U(\mathbf{r}', \nu)\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})dV \\ &= 4\pi U(\mathbf{r}, \nu). \end{aligned}$$

Despejando la ecuación anterior para el campo escalar

$$U(\mathbf{r}, \nu) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma(V)} \left[G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial U(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - U(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma'. \quad (2.8)$$

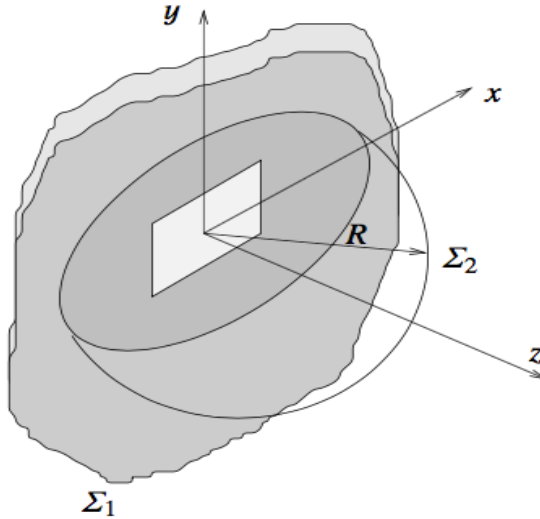


Figura 6: Superficies de integración para solucionar el problema de la difracción.

De acuerdo a la figura 6, si R se hace tender a infinito la integral sobre Σ_2 tiende a cero y el teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff se puede escribir como [4, 35]

$$U(\mathbf{r}, \nu) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma_1} \left[G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial U(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - U(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma'. \quad (2.9)$$

2.3 FORMULACIÓN DE RAYLEIGH-SOMMERFELD DE LA DIFRACCIÓN

Según el teorema de Helmholtz-Kirchhoff se puede conocer el valor del campo escalar en un punto del espacio \mathbf{r} cuando se conoce el campo y su derivada normal en la dirección saliente de la superficie Σ en los límites de una superficie que encierre dicho punto.

2.3 FORMULACIÓN DE RAYLEIGH-SOMMERFELD DE LA DIFRACCIÓN

Kirchhoff utilizó la ecuación (2.9) para determinar el campo en un punto del espacio después de haber pasado por una abertura hecha en una pantalla opaca. Él solucionó el problema considerando que el campo U y su derivada $\partial U/\partial n$ se anulan en todas partes del plano σ_1 excepto en la abertura. Pero esta consideración presenta una inconsistencia basada en un teorema el cual establece que si un campo y su derivada normal se anulan sobre un elemento de superficie, el campo se debe anular en todo el espacio. Para solucionar esta inconsistencia, Rayleigh y Sommerfeld utilizaron como funciones auxiliares las funciones [4, 35]

$$G_1 = \frac{e^{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} - \frac{e^{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}^*|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}^*|}, \quad (2.10)$$

$$G_2 = \frac{e^{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} + \frac{e^{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}^*|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}^*|}, \quad (2.11)$$

conocidas como condiciones de Dirichlet y de Neumann respectivamente. Con estas condiciones se puede eliminar una de las dos integrales de la ecuación (2.9), por ejemplo, en la condición de Dirichlet el campo se anula sobre toda la superficie σ_1 pero la derivada normal no, mientras que en la condición de Neumann sucede lo contrario. En la figura 7 se observa la representación de la condición de Dirichlet; dos ondas esféricas emitiendo de forma divergente desde puntos igualmente espaciados a cada lado del plano Σ_1 .

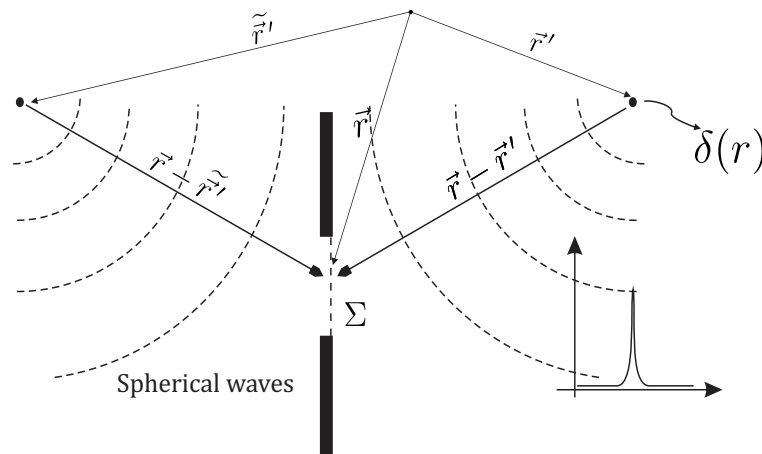


Figura 7: Esquema que muestra la formulación de Rayleigh-Sommerfeld para la difracción utilizando ondas esféricas.

Si se utiliza la condición de Dirichlet, esta cumple

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = -4\pi[\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}^*) - \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})] \quad (2.12)$$

y el teorema de Helmholtz-Kirchhoff se reduce a la expresión

$$U(\mathbf{r}, \nu) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x', y', z' = 0, \nu) \frac{\partial G_1}{\partial z'} \Big|_{z'=0} dx' dy'. \quad (2.13)$$

Sustituyendo G_1 en esta ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}, \nu) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x', y', \nu) \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}^*|}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}^*|} - \frac{e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right]_{z'=0} dx' dy' \\ &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x', y', \nu) \frac{\partial}{\partial z'} \frac{e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \Big|_{z'=0} dx' dy' \end{aligned}$$

Si se calcula la variación del término $e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}/|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ con respecto a la dirección z' y se hace la aproximación de $\lambda \ll |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ se puede escribir

$$\frac{\partial}{\partial z'} \frac{e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \hat{z}' \cdot \nabla \frac{e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r}) \left(ik - \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right) \frac{e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad (2.14)$$

$$= ik \cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad (2.15)$$

Con estas condiciones, se obtiene la formulación de Rayleigh-Sommerfeld de la difracción [4,35]

$$U(\mathbf{r}, \nu) = \frac{k}{2i\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x', y', \nu) \frac{e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r}) dx' dy' \quad (2.16)$$

Esta ecuación es una suma infinita de ondas esféricas $e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}/|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ cuya amplitud viene dada por el campo sobre la superficie de integración \sum . Además se observa que estas ondas esféricas van multiplicadas por el factor $\cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r})$ conocido como el factor de oblicuidad el cual es el responsable de los efectos de interferencia que se presentan en la difracción. Antes de que se hiciera esta deducción matemática de la difracción, Fresnel había llegado a la misma ecuación (2.16) combinando el principio de Huygens con los efectos de interferencia observados por Young en su experimento de la doble rendija. Es por eso que la ecuación (2.16) también se conoce como principio de Huygens-Fresnel.

2.4 NUEVA FORMULACIÓN DE LA TEORÍA DE LA DIFRACCIÓN

En el capítulo 1 se estableció que la propagación de fotones se da por una integral de difracción de Fresnel. De acuerdo a este resultado, surge la siguiente pregunta: ¿Permite la teoría escalar de la difracción soluciones diferentes a las fuentes puntuales?

Para responder esta pregunta se propone la siguiente premisa: el campo electromagnético no puede estar confinado en una región del espacio más pequeña que la longitud de onda λ asociada a dicho campo. De esta premisa se desprenden dos consecuencias relevantes. En primer lugar, las fuentes que generan campo electromagnético no pueden ser fuentes puntuales. En segundo lugar, cualquier fuente de campo electromagnético debe tener una amplitud constante en una vecindad al menos del orden de la longitud de onda, de hecho, ya que la amplitud debe ser constante en una vecindad $v(\mathbf{r}) \subseteq V$ de un punto definido por \mathbf{r} , se debe cumplir que $U(v(\mathbf{r})) = U(\mathbf{r})$ y por lo tanto las funciones delta de Dirac que aparecen en la ecuación (2.12) se deben reemplazar por una nueva distribución que cumpla

$$(\nabla^2 + k^2)\mathcal{G}_{\pm}(\mathbf{r}, \nu) = \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \pm \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}^*), \tag{2.17}$$

en donde el campo ahora es solución de la ecuación

$$\int_V U(\mathbf{r}')(\nabla^2 + k^2)\mathcal{G}_{\pm}(\mathbf{r}, \nu) = U(v(\mathbf{r})) = U(\mathbf{r}). \tag{2.18}$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones se puede preguntar si las condiciones de Dirichlet y de Neumann se siguen cumpliendo si la distribución de Dirac δ se cambia por una distribución ρ . Se puede demostrar, que si se colocan fuentes puntuales en pares (una en la región en donde el campo es medido y otra en la imagen espejo) (ver figura 8), se puede escribir ρ en una base de distribuciones de Dirac de tal forma que se siga cumpliendo ya sea la condición de Dirichlet o la de Neumann

$$\mathcal{G}(\Sigma) = 0, \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n}(\Sigma) = 0. \tag{2.20}$$

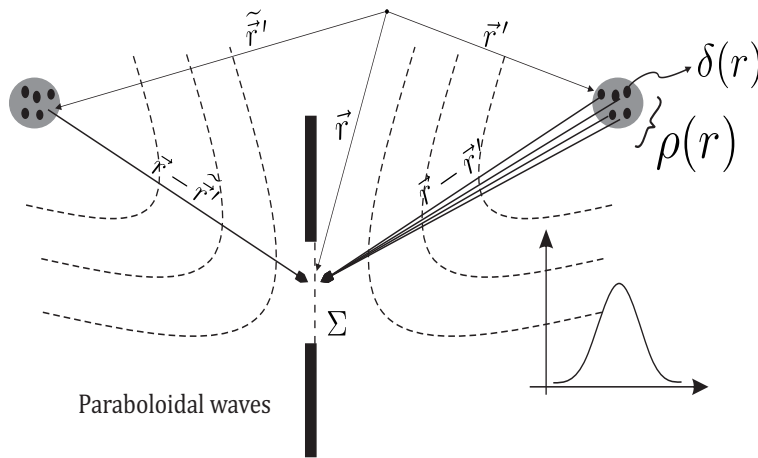


Figura 8: Esquema que muestra la nueva forma de ver el problema de la difracción en donde se utilizan ondas parabólicas en vez de esféricas.

Se debe notar que la función auxiliar \mathcal{G}_{\pm} debe ser solución de la ecuación (2.17) y por consi-

guiente ya no es una onda esférica. \mathcal{G}_\pm se puede escribir como

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_V \rho(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') G_\pm(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') d\mathbf{r}'' \quad (2.21)$$

$$(\nabla^2 + k^2)' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_V \rho(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') (\nabla^2 + k^2) G_\pm(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') d\mathbf{r}'' \quad (2.22)$$

Finalmente se puede escribir

$$(\nabla^2 + k^2)' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_V \rho(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') (\delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') \pm \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')) d\mathbf{r}'' \quad (2.23)$$

Este resultado muestra que \mathcal{G}_\pm está compuesta por funciones puntuales a lo largo de la vecindad v , esto es, un volumen de distribuciones de Dirac. Se debe agregar que la fórmula integral de difracción de Fresnel obtenida para el propagador de fotones está relacionada con ondas secundarias parabólicas y no con ondas esféricas y por lo tanto, tiene sentido asociarle una distribución ρ que no sea una distribución delta de Dirac. Como consecuencia, las fuentes deben tener cierta dimensión y el principio de Huygens se convierte en una aproximación para fuentes puntuales, la cual trabaja bien cuando en la vecindad v el campo electromagnético puede ser aproximado en la teoría clásica por una fuente puntual.

2.5 PRINCIPIO DE HUYGENS-FRESNEL

El principio de Huygens-Fresnel es la herramienta con la cual se estudia la difracción y para sentar sus bases se dieron dos pasos importantes; el primer paso fue la formulación del principio de Huygens el cual establece que “*cada punto de un frente de onda puede ser considerado como un emisor de ondas esféricas secundarias cuya envolvente es la forma del frente de onda en un tiempo posterior* [4, 36]” (ver figura 9). Ahora bien, con solo este principio no se pudo explicar el fenómeno de difracción ya que este solo tiene en cuenta las partes de las ondas secundarias que forman la envolvente despreciando así el resto de dichas ondas [36]. El segundo paso importante fue dado por Fresnel, él incluyó la noción de interferencia, es decir, las ondas secundarias del principio de Huygens pueden interferir tal y como interfieren las ondas en el experimento de la doble rendija de Young.

Con estos dos pasos quedó establecido el principio de Huygens-Fresnel de la siguiente forma: “*Cada punto inobstruido de un frente de ondas, en un instante dado, sirve como una fuente de ondas esféricas secundarias (con la misma frecuencias de la onda primaria). La amplitud del campo óptico en cualquier punto más allá es la superposición de todas estas ondas secundarias (considerando sus amplitudes y fases relativas)*” [36]. Matemáticamente el principio de Huygens-Fresnel se puede escribir como

$$U(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda} \int_\Sigma U(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}-\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.24)$$

en donde \mathbf{r} representa un vector que va desde el origen del sistema de referencia hasta un

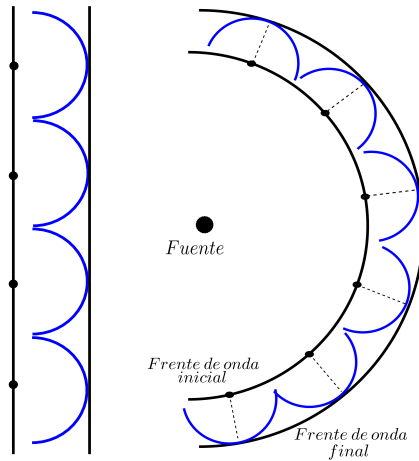


Figura 9: Principio de Huygens.

punto del plano de observación(plano Ω), \mathbf{r}' es un vector que va desde el origen del sistema de referencia hasta un punto del plano de difracción(plano Σ), $U(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ representa una onda esférica de radio $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ y cuyo centro está en el punto \mathbf{r}' , $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}-\mathbf{r}')$ es un término de oblicuidad donde \mathbf{n} es un vector normal al plano Σ y $U(\mathbf{r})$ es el campo en el punto \mathbf{r} del plano Ω . Los planos Ω y Σ son paralelos y están separados una distancia z cuando el plano Σ se ubica en $z' = 0$ (ver figura 10). Cabe destacar que (2.24) es válida cuando se trata la luz como un campo escalar ya que sus efectos vectoriales se pueden despreciar si se tienen en cuenta las dos siguientes consideraciones [4]:

- Las dimensiones de la rendija deben ser grandes comparadas a la longitud de onda.
- El campo difractado no debe ser observado tan cerca a la rendija.

En la práctica, lo que se puede medir es la intensidad la cual es proporcional a la magnitud del campo al cuadrado $I = c\epsilon_0 |E|^2$. Con esto, la intensidad para un punto del plano de observación se puede escribir como

$$I(\mathbf{r}) = \frac{c\epsilon_0}{\lambda^2} \left| \int_{\Sigma} U(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}-\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right|^2, \quad (2.25)$$

en donde c , ϵ_0 y λ son la velocidad de la luz, la permitividad eléctrica del vacío y la longitud de onda de la luz incidente respectivamente.

2.5.1 Principio de Huygens-Fresnel en coordenadas rectangulares.

Si se difracta la luz por una rendija rectangular, es conveniente escribir el principio de Huygens-Fresnel en coordenadas rectangulares. Para esto, el término de oblicuidad en estas coordenadas se convierte en

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{z}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (2.26)$$

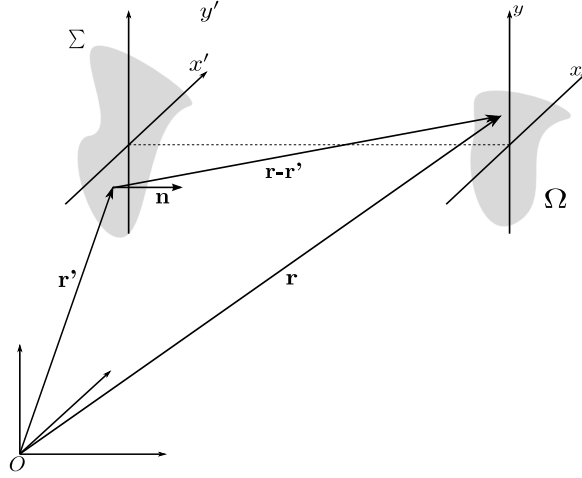


Figura 10: Geometría de la difracción.

que al reemplazarlo en (2.24), da como resultado el principio de Huygens-Fresnel en coordenadas rectangulares:

$$U(x, y) = \frac{i}{\lambda} \int_{\Sigma} U(x', y') \frac{ze^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} d\mathbf{r}', \quad (2.27)$$

en donde la distancia $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ viene dada por

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{z^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2}. \quad (2.28)$$

Además, la intensidad para cualquier punto (x, y) del plano de observación es

$$I(x, y) = \frac{cc_0}{\lambda^2} \left| \int_{\Sigma} U(x', y') \frac{ze^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} d\mathbf{r}' \right|^2. \quad (2.29)$$

2.6 APROXIMACIÓN DE FRESNEL

Para simplificar el principio de Huygens-Fresnel y llevarlo a una formulación matemática más fácil de trabajar, se hace una aproximación en la fase y amplitud de las ondas secundarias que se superponen en (2.27). Una forma de hacerlo es escribiendo (2.28) como [4]

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = z \sqrt{1 + \left(\frac{x-x'}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-y'}{z}\right)^2}, \quad (2.30)$$

y utilizando una expansión binomial de la forma

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots, \quad (2.31)$$

en donde se observa que b viene dado por la expresión

$$b = \left(\frac{x - x'}{z} \right)^2 + \left(\frac{y - y'}{z} \right)^2. \quad (2.32)$$

Con esto, (2.28) se escribe en serie de potencias como

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x - x'}{z} \right)^2 + \left(\frac{y - y'}{z} \right)^2 \right] - \frac{1}{8} \left[\left(\frac{x - x'}{z} \right)^2 + \left(\frac{y - y'}{z} \right)^2 \right]^2 + \dots \quad (2.33)$$

Si se asume que las dimensiones transversales $x - x'$ y $y - y'$ son mucho menores de la distancia de propagación, esto es, $(x - x') \ll z$ y $(y - y') \ll z$, se puede hacer una aproximación en (2.33) eliminando términos de la expansión. No obstante, se debe tener cuidado al momento de hacer dicha aproximación en la fase de (2.27), ya que la distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ va multiplicada por el número de onda cuyo valor es del orden de $k \approx 10^7$ en el rango visible y con esto, la fase puede cambiar abruptamente entre 0 y 2π con un pequeño cambio en la distancia [4]. A pesar de lo que se dijo anteriormente, basta con hacer una aproximación en la fase hasta el término de potencia cuadrática

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - x'}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - y'}{z} \right)^2 \right], \quad (2.34)$$

mientras que, para la amplitud, una buena aproximación resulta de mantener solo el primer término de (2.33)

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx z. \quad (2.35)$$

La aproximación de Fresnel en coordenadas rectangulares se escribe como

$$U(x, y) = \frac{ie^{ikz}}{\lambda z} \int \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{\frac{ik}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy'. \quad (2.36)$$

En esta ecuación se observa una suma de ondas parabólicas a diferencia de la suma de ondas esféricas que se presenta en el principio de Huygens-Fresnel [4]. La intensidad en la aproximación de Fresnel se escribe como

$$I(x, y) = \frac{c\epsilon_0}{(z\lambda)^2} \left| \int \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{\frac{ik}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy' \right|^2. \quad (2.37)$$

2.7 APROXIMACIÓN DE FRAUNHOFER

Para simplificar aún más el principio de Huygens-Fresnel, se puede trabajar en el régimen de Fraunhofer en el cual se cumple que las distancias de observación son mucho más grandes que las dimensiones del objeto difractor o rendija, esto es:

$$z \gg \frac{k(x'^2 + y'^2)_{max}}{2} \quad (2.38)$$

Imponiendo esta condición en (2.36), se obtiene la difracción de Fraunhofer:

$$U(x, y) = \frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \int \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{\frac{-ik}{z}(xx'+yy')} dx' dy'. \quad (2.39)$$

La intensidad en el régimen de Fraunhofer viene dada por la expresión:

$$I(x, y) = \frac{c\epsilon_0}{(\lambda z)^2} \left| \int \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{\frac{-ik}{z}(xx'+yy')} dx' dy' \right|^2. \quad (2.40)$$

En esta aproximación, es común encontrar soluciones exactas de (2.39) para diversos problemas; ya que la aproximación de Fraunhofer se puede escribir como una transformación de Fourier.

2.8 PRINCIPIO DE HUYGENS-FRESNEL Y APROXIMACIÓN DE FRESNEL EN DOS DIMENSIONES

Las formas en dos dimensiones del principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel vienen dadas respectivamente por

$$U_{HF}(x) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^{1/2} \int_{-w}^w U(x') \frac{e^{-ikr}}{r^{1/2}} \frac{z}{r} dx', \quad (2.41)$$

$$U_F(x) = \left(\frac{i}{\lambda z}\right)^{1/2} e^{-ikr} \int_{-w}^w U(x') e^{\frac{-ik(x-x')^2}{2z}} dx', \quad (2.42)$$

en donde ahora r viene dada por la expresión

$$r = \sqrt{z^2 + (x - x')^2}. \quad (2.43)$$

Un parámetro que da una idea del régimen en el cual se está trabajando se conoce como el número de Fresnel, que se define como

$$NF = \frac{a^2}{\lambda z}, \quad (2.44)$$

En donde a representa la mitad del tamaño de la rendija utilizada. Cuando $NF \gtrsim 1$ se considera en el régimen de Fresnel, mientras que si $NF \ll 1$, se considera en el régimen de Fraunhofer. Además, si el número de Fresnel es muy grande, es de esperarse que el principio de Huygens-Fresnel comience a gobernar. En la figura 11 se observa el comportamiento del patrón de difracción de una rendija rectangular cuando varía el número de Fresnel. Hay dos características que se aprecian en esta figura [4]: 1) El número de picos en el patrón de difracción concuerda con el número de Fresnel. 2) Mientras el número de Fresnel incrementa, el ancho del patrón de difracción tiende al ancho de la rendija.

De acuerdo a lo visto en este capítulo, la teoría escalar de la difracción permite soluciones

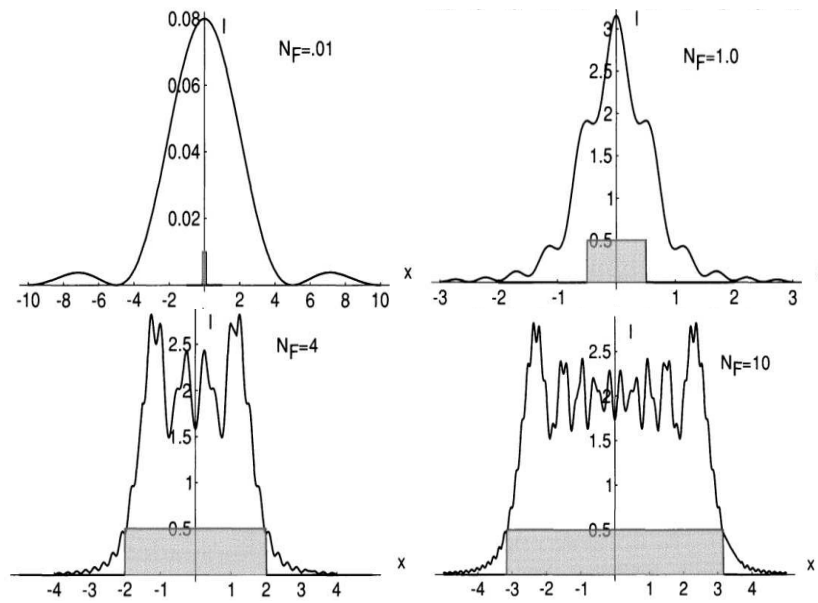


Figura 11: Comportamiento del patrón de difracción cuando varía el número de Fresnel. Imagen tomada de [4].

diferentes a las ondas puntuales, lo cual puede apoyar la teoría de propagación de fotones por medio de una integral de difracción de Fresnel.

SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PRINCIPIO DE HUYGENS-FRESNEL Y LA APROXIMACIÓN DE FRESNEL

En este capítulo se estudia numéricamente la difracción de un campo constante que incide sobre una rendija rectangular. Para esto, se soluciona el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel en dos dimensiones(2D) por los métodos de Simpson adaptativo y expansión asintótica, sin embargo, únicamente se soluciona el último en tres dimensiones(3D) con un método con bajo error numérico conocido como método de las integrales de Fresnel. Se utilizan estas simulaciones para encontrar condiciones bajo las cuales el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel se diferencian, y se discute la necesidad de una segunda difracción para resaltar las diferencias de tal forma que sean medibles experimentalmente. En esta doble difracción se coloca una segunda rendija rectangular atrás y corrida lateralmente con respecto a la primera rendija. Se utiliza la FFT para obtener resultados numéricos de la segunda difracción y se configuran parámetros que puedan permitir la medida de las diferencias experimentalmente.

3.1 DIFRACCIÓN POR UNA RENDIJA RECTANGULAR

3.1.1 Consideraciones generales de los cálculos numéricos en $2D$.

Con respecto a la primera difracción, se soluciona el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel $2D$ por los métodos de Simpson adaptativo y expansión asintótica libre de momentos(ecuaciones (2.41) y (2.42)). En estos cálculos, se utiliza como objeto difractor una rendija rectangular por dos razones: 1) Es más sencillo determinar soluciones numéricas de este tipo de rendijas que otros tipos, como por ejemplo una rendija circular. 2) Para hacer el experimento se cuenta con rendijas rectangulares de ancho variable pero no se dispone de un tipo diferente de rendija con esta característica. La fuente de luz que se utiliza como campo

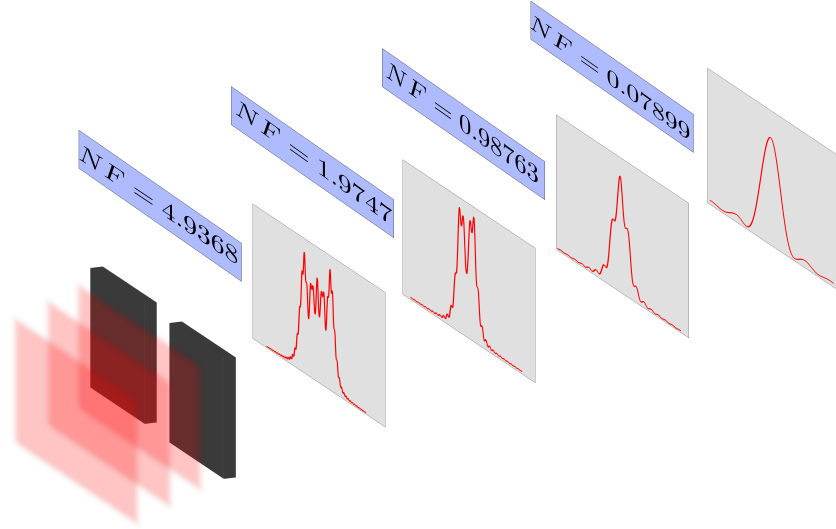


Figura 12: Esquema de la primera difracción.

incidente sobre la rendija es un campo constante con longitud de onda $\lambda = 633[nm]$ el cual es una buena aproximación para la fuente utilizada experimentalmente, es decir, un láser de Helio-Neón de $633[nm]$. El esquema de la primera difracción con las condiciones establecidas se observa en la figura 12.

Sin pérdida de generalidad, al campo incidente sobre la rendija se le asigna un valor de

$$U(x') = \begin{cases} 1 & \text{adentro de la rendija,} \\ 0 & \text{afuera de la rendija.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Así, las ecuaciones (2.41) y (2.42) se pueden escribir como

$$U_{HF}(x) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^{1/2} \int_{-a}^a \frac{e^{-ik\sqrt{z^2+(x-x')^2}}}{(\sqrt{z^2+(x-x')^2})^{1/2}} \frac{z}{\sqrt{z^2+(x-x')^2}} dx', \quad (3.2)$$

$$U_F(x) = \left(\frac{i}{\lambda z}\right)^{1/2} e^{-ikr} \int_{-a}^a e^{\frac{-ik(x-x')^2}{2z}} dx', \quad (3.3)$$

en donde $2a$ es el ancho de la rendija. Además, las respectivas intensidades se expresan de la siguiente forma

$$I_{HF}(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left| \int_{-a}^a \frac{e^{-ik\sqrt{z^2+(x-x')^2}}}{(\sqrt{z^2+(x-x')^2})^{1/2}} \frac{z}{\sqrt{z^2+(x-x')^2}} dx' \right|^2, \quad (3.4)$$

$$I_F(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \left| \int_{-a}^a e^{\frac{-ik(x-x')^2}{2z}} dx' \right|^2. \quad (3.5)$$

El ancho de la rendija y la distancia de observación se toman apropiadamente para garantizar que la teoría escalar de la difracción sea válida. Como se observa en (3.2) y (3.3) el problema

numérico se reduce a solucionar las integrales presentes y multiplicar la respuesta por las respectivas constantes. Sin embargo, dado que el número de onda que aparece en el exponente tiene un valor grande, aproximadamente de $k \approx 99260.43[\text{rad}/\text{cm}]$, las funciones que se desean integrar oscilan muy rápido y esto dificulta su solución. Lo anterior impide que se utilicen los métodos numéricos convencionales como las cuadraturas de Gauss o los métodos de trapecio y Simpson de forma eficiente para solucionar el problema. En vista de esto, es necesario emplear métodos numéricos como el de Simpson adaptativo y el de expansión asintótica libre de momentos, especiales para solucionar integrales muy oscilatorias. Se debe enfatizar que todos los códigos numéricos de este trabajo de tesis están hechos en MATLAB [37].

3.1.2 Solución por el método de Simpson adaptativo.

Simpson adaptativo es un método para solucionar integrales de forma numérica que tiene como característica principal la utilización de una malla de paso variable. Es adaptativo precisamente porque el paso de la malla depende de la tolerancia que se le imponga a la solución de la integral, es decir, donde la función a integrar sea suave, la tolerancia establecida se alcanza rápidamente y el paso de la malla es más grande. En las partes donde la función presenta cambios bruscos (por ejemplo rápidas oscilaciones), el paso de la malla se debe reducir hasta que cumpla con la tolerancia impuesta. Dicho de otra manera, la malla es más densa en lugares donde la función oscila con más rapidez (ver figura 13a).

Por otro lado, el método está basado en una cuadratura de Simpson compuesto 1/3, es decir, para cada par de puntos en la malla interpola la función a integrar con la ayuda de una función cuadrática (ver figura 13b). Los métodos de cuadraturas como este tienen la desventaja de incrementar el tiempo de computo si se quiere conocer con bajo error numérico la solución de una integral altamente oscilatoria. Para saber más acerca del método de Simpson adaptativo, se puede consultar [38, 39].

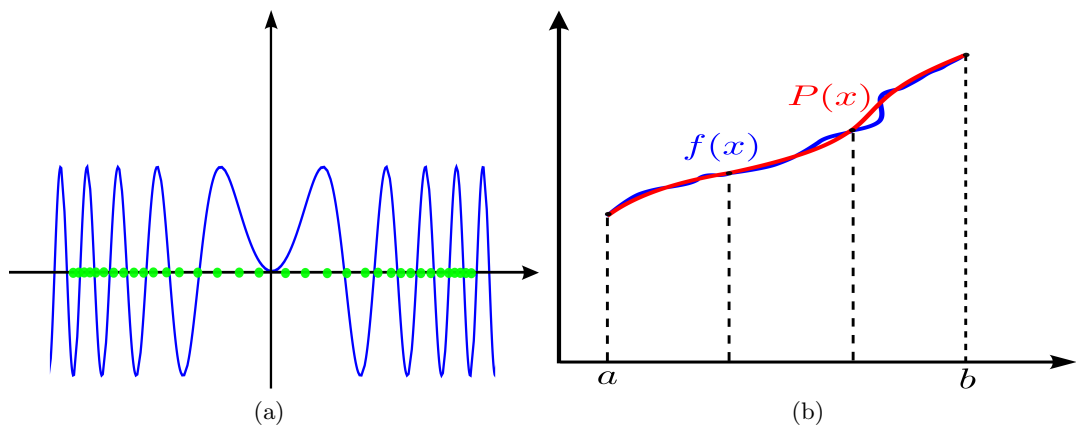


Figura 13: a) Paso variable de la malla en el método de Simpson adaptativo. b) Método de Simpson compuesto 1/3.

En la figura 14 se presenta la solución numérica de las ecuaciones (3.2) y (3.3) para diferentes distancias de observación z , un ancho de la rendija $2a = 0.1[cm]$ y una tolerancia $tol = 1e-10$. La curva roja corresponde al patrón de intensidad obtenido con el principio de Huygens-Fresnel, mientras que la curva azul es el patrón de intensidad obtenido de la aproximación de Fresnel.

La figura 14a corresponde a un número de Fresnel $NF = 0.07899$, por lo tanto se encuentra en el régimen de Fraunhofer y tiene la forma de un seno cardinal. En la figura 14b se considera un número de Fresnel $NF = 0.98763$, por lo que se visualiza el nacimiento de otros máximos principales. Por otro lado, en las figuras 14c y 14d con número de Fresnel $NF = 1.9747$ y $NF = 4.9368$ respectivamente, se observan varios picos principales, lo que demuestra que estas gráficas se encuentran en el régimen de Fresnel.

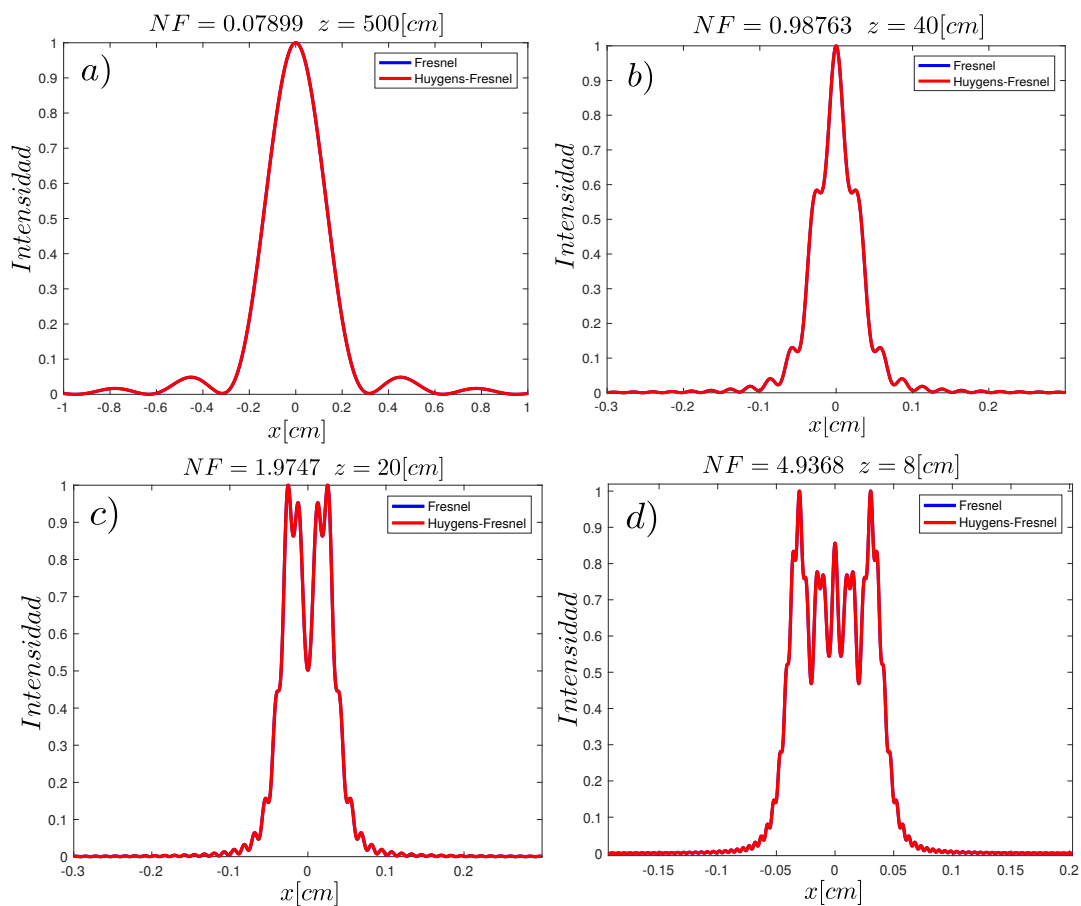


Figura 14: Patrón de intensidad normalizado obtenido con el principio de Huygens-Fresnel(curva roja) y la aproximación de Fresnel(curva azul) por el método de Simpson adaptativo para diferentes números de Fresnel.

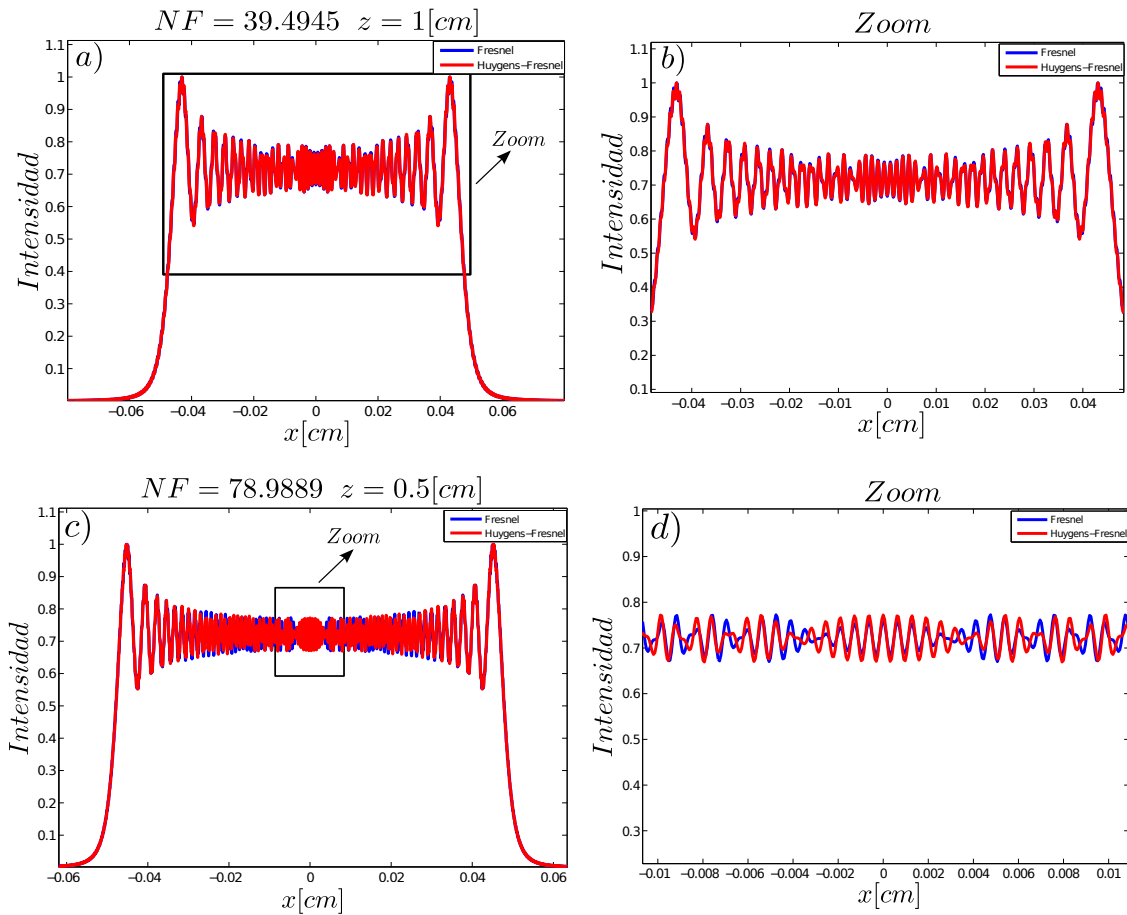


Figura 15: Patrón de intensidad normalizado obtenido con el principio de Huygens-Fresnel (curva roja) y la aproximación de Fresnel (curva azul) por el método de Simpson adaptativo y su ampliación en las zonas más oscilatorias. a)-b) $NF = 39.4945$, se comienzan a observar diferencias entre los dos patrones de intensidad. c)-d) $NF = 78.9889$, las diferencias se vuelven más notorias.

Tres características se aprecian en la figura 14:

- El número de Fresnel es igual al número de máximos presentes,
- el ancho del patrón de intensidad tiende al ancho de la rendija cuando aumenta el número de Fresnel,
- las dos soluciones son exactamente iguales para los números de Fresnel utilizados.

Las dos primeras características concuerdan con lo mencionado al final del capítulo 2, la tercera es consecuencia de trabajar con números de Fresnel para los cuales el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel son válidos.

En la figura 15 se pueden ver patrones de intensidad para igual ancho de la rendija y tolerancia que en la figura 14 pero con números de Fresnel mucho más grandes. En las figuras 15a y 15b se observa el patrón de intensidad para un número de Fresnel $NF = 39.4945$ y una ampliación del patrón en la zona oscilatoria respectivamente. Las figuras 15c y 15d corresponden al patrón de intensidad para un número de Fresnel $NF = 78.9889$ y una ampliación en la zona más oscilatoria. En esta última figura se observan diferencias entre las dos curvas, lo que indica que con números de Fresnel altos las dos integrales tienen soluciones diferentes. Se debe mencionar que el tiempo de computo del código empleado para obtener estas soluciones aumenta con aumentos del número de Fresnel. Esto se debe a que números de Fresnel grandes causan altas oscilaciones y a su vez, se debe tener una malla más densa que logre la tolerancia establecida.

3.1.3 Solución por el método de expansión asintótica libre de momentos.

Los métodos numéricos basados en cuadraturas como los métodos de Simpson y la cuadratura de Gauss necesitan crear una malla de puntos para calcular la integral de una función. Para funciones suaves, estos métodos logran muy buenos resultados con tiempos de computo cortos. Sin embargo, para funciones muy oscilatorias, estas cuadraturas necesitan crear una malla muy densa de puntos para lograr un bajo error numérico. Para solucionar este problema, existe un conjunto de métodos encargados de solucionar numéricamente la integral de funciones muy oscilatorias y adicionalmente cumplir con los dos siguientes objetivos: 1) Alcanzar una gran precisión, 2) minimizar el tiempo de computo. Dentro de estos métodos se encuentran la expansión asintótica, los métodos tipo Filon y los métodos tipo Levin [40–44]. Una característica que comparten estos tres métodos es la disminución del error con aumentos de la frecuencia de oscilación, algo totalmente contradictorio a lo que usualmente se piensa. En el anexo A se muestra un ejemplo del comportamiento del error en función de la frecuencia de oscilación.

En este trabajo se utiliza uno de estos métodos, la expansión asintótica libre de momentos. Recibe este nombre porque utiliza una expansión en series de potencias, pero a diferencia de los métodos de cuadraturas, la expansión se lleva a cabo con potencias negativas de la frecuencia. En este método se trunca la expansión infinita para obtener un valor aproximado de la integral y los términos restantes corresponden al error asociado al método. El error varía de forma inversa con la frecuencia y ocasiona una disminución en el error con incrementos en la frecuencia de oscilación. Una notable característica de este método es que, a diferencia de los métodos de cuadraturas, sólo se necesita conocer el valor de la función a integrar en los límites de integración y en ciertos puntos conocidos como puntos estacionarios, por lo tanto, el número de operaciones en la expansión asintótica no depende del incremento en la frecuencia.

Este método se centra en solucionar integrales de la forma [41]:

$$I[f] = \int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx, \quad (3.6)$$

en donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones no oscilatorias y la frecuencia ω es muy grande. Se pueden distinguir dos casos de interés para este tipo de integrales: 1) $g'(x) \neq 0$ (no hay puntos estacionarios) en el intervalo de integración y 2) $g'(x) = 0$ (hay puntos estacionarios) en

ciertos puntos dentro del intervalo de integración. Más adelante se mostrará que las funciones $g(x)$ que se utilizan en este trabajo (una para el principio de Huygens-Fresnel y otra para la aproximación de Fresnel) tienen puntos estacionarios dentro del intervalo de integración, por lo que de aquí en adelante se utiliza la segunda condición. Cuando hay puntos estacionarios presentes, en general se cumple

$$g(\xi) = g'(\xi) = \dots = g^{r-1}(\xi) = 0, \quad g^r(\xi) > 0, \quad (3.7)$$

siendo ξ los puntos estacionarios dentro del intervalo de integración. Si la condición 3.7 se cumple, la ecuación (3.6) se toma como punto de partida para solucionar la integral. Por el contrario, si la función $g(x)$ tiene puntos estacionarios pero cumple

$$g(\xi) \neq g'(\xi) = \dots = g^{r-1}(\xi) = 0, \quad g^r(\xi) > 0, \quad (3.8)$$

la expresión (3.6) se debe modificar por

$$I[f] = e^{i\omega g(\xi)} \int_a^b f(x) e^{i\omega[g(x)-g(\xi)]} dx. \quad (3.9)$$

Una vez cumplida cualquiera de las dos condiciones anteriores, se utiliza de forma repetida integración por partes para expandir (3.6) o (3.9) como [41]:

$$\begin{aligned} I[f] \sim & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-iw)^k} \left\{ \mu[\sigma_k](b) e^{i\omega g(b)} - \mu[\sigma_k](a) e^{i\omega g(a)} \right\} \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-iw)^{k+1}} \left\{ \frac{\sigma_k(b) - \mathcal{L}[\mu[\sigma_k]](b)}{g'(b)} e^{i\omega g(b)} - \frac{\sigma_k(a) - \mathcal{L}[\mu[\sigma_k]](a)}{g'(a)} e^{i\omega g(a)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde

$$\sigma_0 = f(x), \quad \sigma_{k+1}(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sigma_k(x) - \mathcal{L}[\mu[\sigma_k]](b)}{g'(x)}, \quad (3.11)$$

$$\mu[f] = \sum_{k=0}^{r-2} c_k \phi_{r,k}, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{L}[\mu[f]](\xi) = f(\xi), \dots, \mathcal{L}[\mu[f]]^{(r-2)}(\xi) = f^{(r-2)}(\xi), \quad (3.13)$$

$$\mathcal{L}[\phi_{r,k}](x) = \text{sgn}^{r+k+1} \frac{|g(x)|^{\frac{k+1}{r}-1} g'(x)}{r}, \quad (3.14)$$

$$\phi_{r,k} = D_{r,k}(\text{sgn}(x)) \frac{w^{-\frac{k+1}{r}}}{r} e^{-i\omega g(x) + \frac{1+k}{2r} i\pi} \left[\Gamma\left(\frac{1+k}{r}, -i\omega g(x)\right) - \Gamma\left(\frac{1+k}{r}, 0\right) \right], \quad (3.15)$$

y $D_{r,k}(\text{sgn}(x))$ viene dada por

$$D_{r,k}(\text{sgn}(x)) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } \text{sgn}(x) < 0 \text{ } r \text{ es par,} \\ (-1)^k e^{-\frac{1+k}{r} i\pi} & \text{si } \text{sgn}(x) < 0 \text{ } r \text{ es impar,} \\ -1 & \text{si de otra forma.} \end{cases} \quad (3.16)$$

En estas ecuaciones se utiliza el operador diferencial de Levin $\mathcal{L}[\nu] = \nu' + i\omega g'\nu$ y la función signo definida como

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Expansión asintótica libre de momentos para el caso $r = 2$.

Las dos integrales que se solucionarán en este trabajo por este método corresponden al caso $r = 2$, por lo que este caso es de particular interés y las ecuaciones (3.11) a (3.16) se reducen al siguiente conjunto de ecuaciones

$$\sigma_0 = f(x) \quad (3.18)$$

$$\mu[\sigma_0](x) = \sqrt{\frac{2}{g''(0)}} \sigma_0(0) \phi_{2,0}(x) \quad (3.19)$$

$$\mathcal{L}[\mu[\sigma_0]](x) = \sqrt{\frac{2}{g''(0)}} \sigma_0(0) \mathcal{L}[\phi_{2,0}](x) = \sqrt{\frac{2}{g''(0)}} \sigma_0(0) \text{sgn}(x)^3 \left[\frac{|g(x)|^{-1/2} g'(x)}{2} \right] \quad (3.20)$$

$$\phi_{2,0} = D_{2,0}(\text{sgn}(x)) \frac{w^{-1/2}}{2} e^{-iwx^2 + \frac{1}{4}i\pi} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}, -iwx^2\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2}, 0\right) \right] \quad (3.21)$$

donde

$$D_{2,0}(\text{sgn}(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{sgn}(x) < 0 \text{ } r \text{ es par,} \\ -1 & \text{si de otra forma.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Expansión asintótica libre de momentos aplicada al principio de Huygens-Fresnel 2D.

Para solucionar el principio de Huygens-Fresnel por este método, es conveniente escribir la ecuación (3.2) como

$$U_{HF}(x) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^{1/2} \int_{-a}^a \frac{z}{[z^2 + (x-x')^2]^{3/4}} e^{-ik\sqrt{z^2 + (x-x')^2}} dx', \quad (3.23)$$

en donde se observa que

$$f(x') = \frac{z}{[z^2 + (x-x')^2]^{3/4}}, \quad g(x') = \sqrt{z^2 + (x-x')^2}, \quad \omega = k, \quad a = -a, \quad b = a. \quad (3.24)$$

Se debe señalar que a diferencia de la ecuación (3.6), la ecuación (3.23) tiene un signo menos en el exponente del término oscilatorio. Este signo solo cambia el signo de la parte imaginaria en la solución de la integral; el problema se soluciona resolviendo la integral sin el signo negativo y al final se toma el complejo conjugado de la solución. Para esta función $g(x')$, se puede comprobar que los puntos estacionarios son los puntos del plano de observación

$$\xi = x \quad . \quad (3.25)$$

Se observa que los puntos de observación pueden tomar cualquier valor, de hecho, pueden quedar puntos estacionarios afuera del intervalo de integración (tamaño de la rendija) y esto causaría errores en el código. Por esta razón, se deben limitar los puntos de observación a aquellos que se mantengan adentro del tamaño de la rendija

$$\xi = x, \quad \text{cuando} \quad -a < x < a. \quad (3.26)$$

Además, la segunda derivada de la función $g(x')$ viene dada por

$$g''(x') = \frac{1}{\sqrt{z^2 + (x - x')^2}} - \frac{x' - x}{[z^2 + (x - x')^2]^{3/2}}, \quad (3.27)$$

en donde se observa que $g''(x') \neq 0$ para $z \neq 0$ y por lo tanto se debe utilizar el caso $r = 2$. Adicionalmente, ya que $g(\xi) \neq 0$ dentro del intervalo de integración, la condición (3.8) se cumple y se debe utilizar (3.9). El principio de Huygens-Fresnel se escribe de la forma

$$U_{HF}(x) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^{1/2} e^{-ikz} \int_{-a}^a \frac{z}{[z^2 + (x - x')^2]^{3/4}} e^{-ik[\sqrt{z^2 + (x - x')^2} - z]} dx', \quad (3.28)$$

siendo

$$g(x') = \sqrt{z^2 + (x - x')^2} - z. \quad (3.29)$$

Los puntos estacionarios y las segundas derivadas de la nueva función $g(x')$ son los mismos de la función $g(x')$ anterior, no obstante, ahora se cumple $g(\xi) = g(x) = 0$. Cuando se utilizan las ecuaciones (3.18) a (3.22), se obtiene una solución numérica para el principio de Huygens-Fresnel 2D; el patrón de intensidad relacionado con estos resultados se presentan en las figuras 16 y 17 (curva roja) para los mismos números de Fresnel utilizados en el método de Simpson adaptativo.

Expansión asintótica libre de momentos aplicada a la aproximación de Fresnel 2D.

Para solucionar la aproximación de Fresnel por este método, la ecuación (3.3) se puede escribir de acuerdo a la ecuación (3.6) como

$$U_F(x) = \left(\frac{i}{\lambda z}\right)^{1/2} e^{-ikr} \int_{-a}^a e^{\frac{-ik(x-x')^2}{2z}} dx', \quad (3.30)$$

en donde

$$f(x') = 1, \quad g(x') = (x - x')^2, \quad \omega = \frac{k}{2z}, \quad a = -a, \quad b = a \quad (3.31)$$

En este caso, $g(x')$ tiene los mismos puntos estacionarios del caso anterior, sin embargo, a diferencia del principio de Huygens-Fresnel, $g(\xi) = 0$ y se puede utilizar la ecuación (3.30). Este es un caso donde $r = 2$ ya que $g''(\xi) = g''(x) = 2 \neq 0$, por lo que al utilizar las ecuaciones (3.18) a (3.22), se obtiene una solución numérica para la aproximación de Fresnel 2D. Los patrones de intensidad relacionados con estos resultados se presentan en las figuras 16 y 17 (curva azul) para los mismos números de Fresnel empleados en el método de Simpson adaptativo.

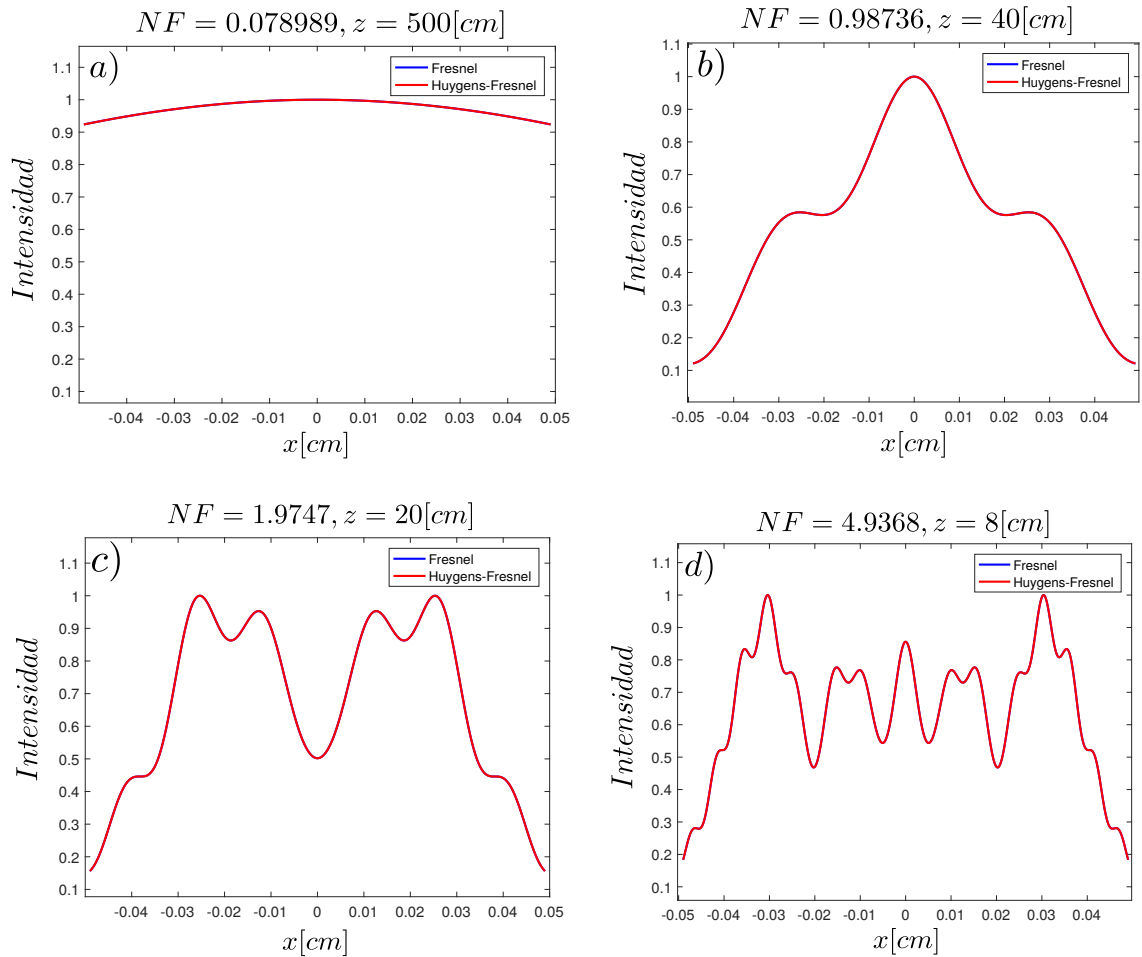


Figura 16: Patrón de intensidad para diferentes números de Fresnel obtenidos por el método de expansión asintótica.

Las figuras 16a a 16d muestran el mismo comportamiento que las figuras 14a a 14d obtenidas por el método de Simpson adaptativo. De igual forma, en las figuras 17a a 17d se observa el mismo comportamiento de las figuras 15a a 15d obtenidas por el método de Simpson adaptativo. Se debe resaltar que el tiempo de computo del último método implementado es del orden de un minuto y es independiente de la frecuencia de oscilación, lo cual es una gran ventaja con respecto al método de Simpson adaptativo.

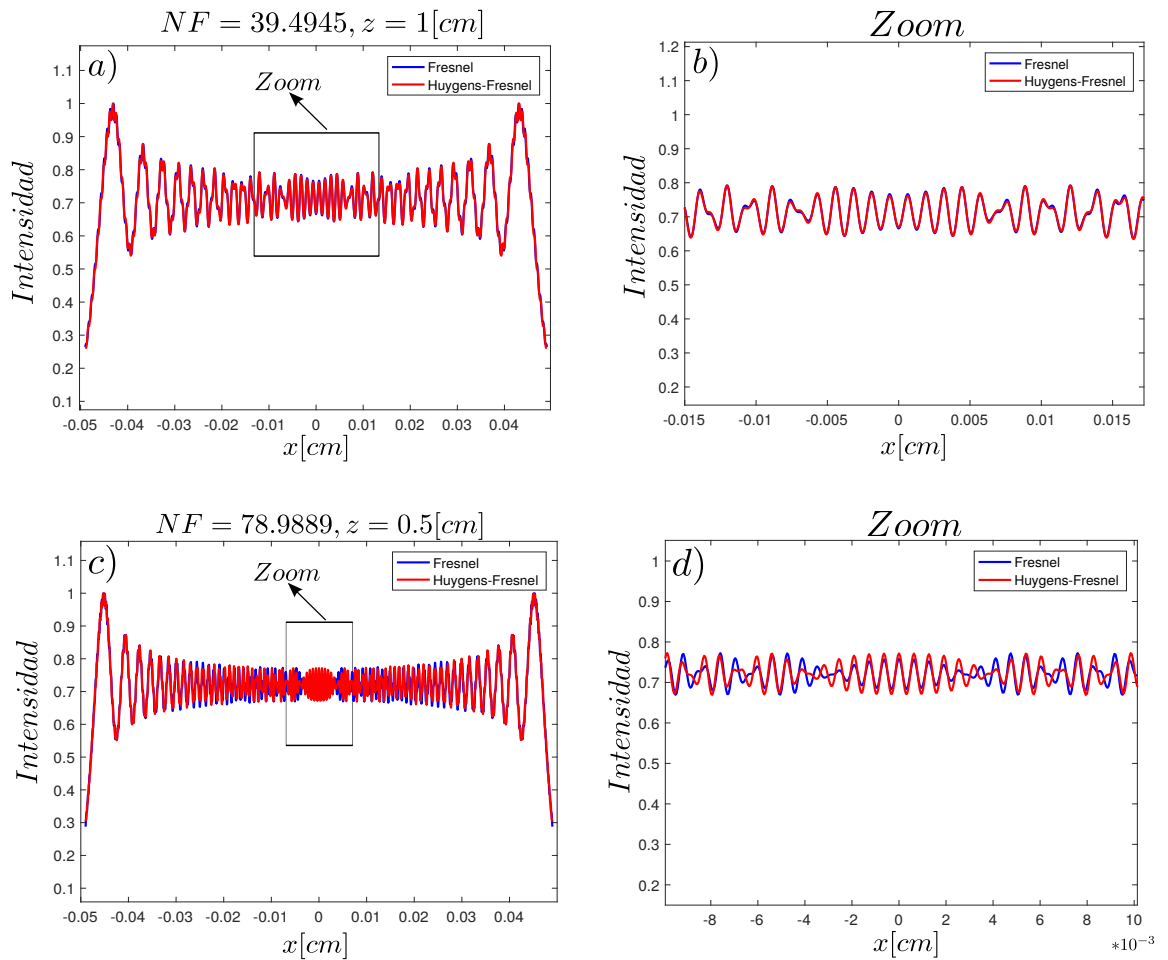


Figura 17: Patrón de intensidad para diferentes números de Fresnel obtenidos por el método de expansión asintótica y sus respectivas ampliaciones en las zonas más oscilatorias.

3.1.4 Solución de la aproximación de Fresnel en 3D por el método de las integrales de Fresnel.

Los métodos para solucionar integrales oscilatorias en 3D tales como las ecuaciones (2.24) y (2.36) son mucho más complicados que los mostrados anteriormente. Sin embargo, hay un método con bajo error numérico para solucionar la aproximación de Fresnel 3D conocido como método de las integrales de Fresnel [4, 7]. Recibe este nombre porque el campo en el régimen de Fresnel bajo las condiciones impuestas (2.36) se puede escribir en función de la integral seno y coseno de Fresnel. Las integrales de Fresnel se pueden calcular con mucha precisión en MATLAB y muchos otros ambientes de programación, esto hace que el método de las integrales de Fresnel sea una buena herramienta para comparar con los dos métodos anteriores. En particular se solucionará la ecuación (2.36) para obtener el patrón de intensidad

en el régimen de Fresnel producido por una rendija rectangular cuando es iluminada por un campo constante $U = 1$. Bajo estas condiciones, el campo en la rendija se puede escribir en términos de la función rectángulo

$$U(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{2a_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{2a_y}\right), \quad (3.32)$$

en donde $2a_x$ y $2a_y$ representan el ancho de la rendija en x y en y respectivamente. Reemplazando este campo en (2.36) se obtiene una expresión para el campo a una distancia z de la rendija

$$U(x, y) = \frac{ie^{ikz}}{\lambda z} \int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]\right] dx' dy'. \quad (3.33)$$

En el anexo B se lleva a cabo el cálculo del campo y la intensidad en términos de las integrales de Fresnel y se demuestra que corresponden a las expresiones

$$U(x, y) = \frac{ie^{ikz}}{2} [[C(\alpha_2) - C(\alpha_1)] + i[S(\alpha_2) - S(\alpha_1)]] \cdot [[C(\beta_2) - C(\beta_1)] + i[S(\beta_2) - S(\beta_1)]], \quad (3.34)$$

$$I(x, y) = \frac{1}{4} [[C(\alpha_2) - C(\alpha_1)]^2 + [S(\alpha_2) - S(\alpha_1)]^2] \cdot [[C(\beta_2) - C(\beta_1)]^2 + [S(\beta_2) - S(\beta_1)]^2], \quad (3.35)$$

en donde se definen

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, \quad (3.36)$$

como la integral coseno y seno de Fresnel. De (3.35) se observa que la intensidad para un punto (x, y) a una distancia z , se puede conocer con bajo error numérico siempre y cuando se conozca bien el valor de las integrales de Fresnel. Más aún, si se define el número de Fresnel en x y en y como

$$NF_x = \frac{a_x^2}{\lambda z}, \quad NF_y = \frac{a_y^2}{\lambda z}, \quad (3.37)$$

se puede determinar el patrón de intensidad para diferentes números de Fresnel (ver figuras 18, 19 y 20).

En la parte a) de cada figura se gráfica el logaritmo natural de la intensidad en función de las coordenadas de posición x y y para hacer más visibles los máximos de intensidad. La parte b) corresponden al patrón de intensidad normalizado en tres dimensiones, mientras que en la parte c) se muestra un corte hecho en la gráfica tridimensional a lo largo del eje x para un valor constante $y = 0$.

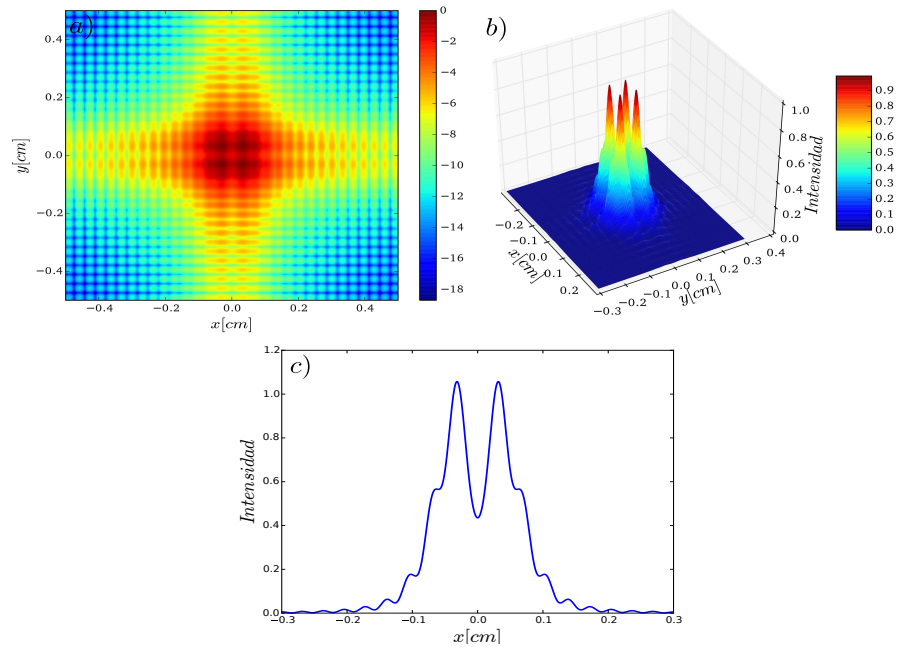


Figura 18: Patrón de intensidad de una rendija cuadrada de 0.2cm por 0.2cm a una distancia de observación 100cm . a) Patrón de intensidad en escala de colores. b) Patrón de intensidad en $3D$. c) Corte hecho en la gráfica $3D$ para un valor constante $y = 0$.

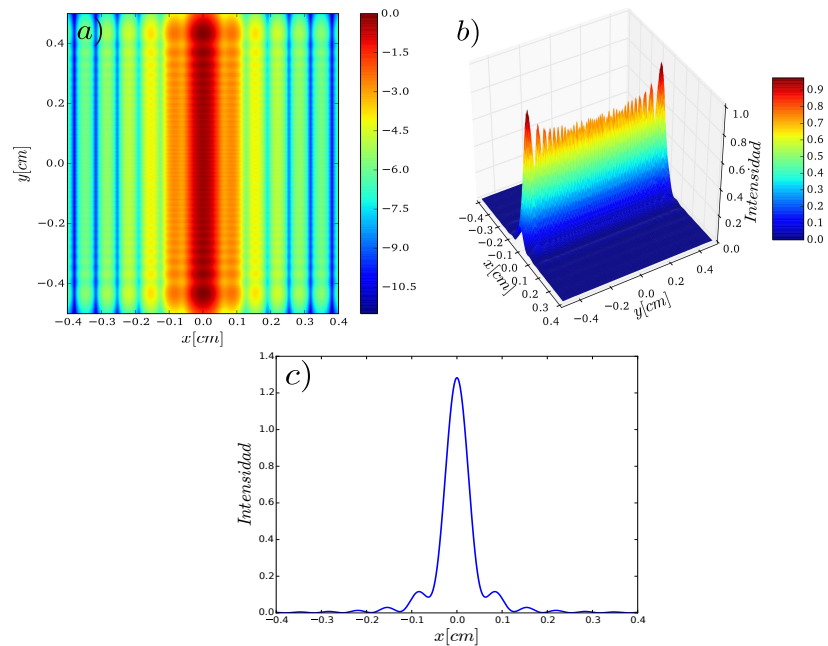


Figura 19: Patrón de intensidad de una rendija rectangular de 0.05cm por 0.5cm a una distancia de observación 100cm . a) Patrón de intensidad en escala de colores. b) Patrón de intensidad en $3D$. c) Corte hecho en la gráfica $3D$ para un valor constante $y = 0$.

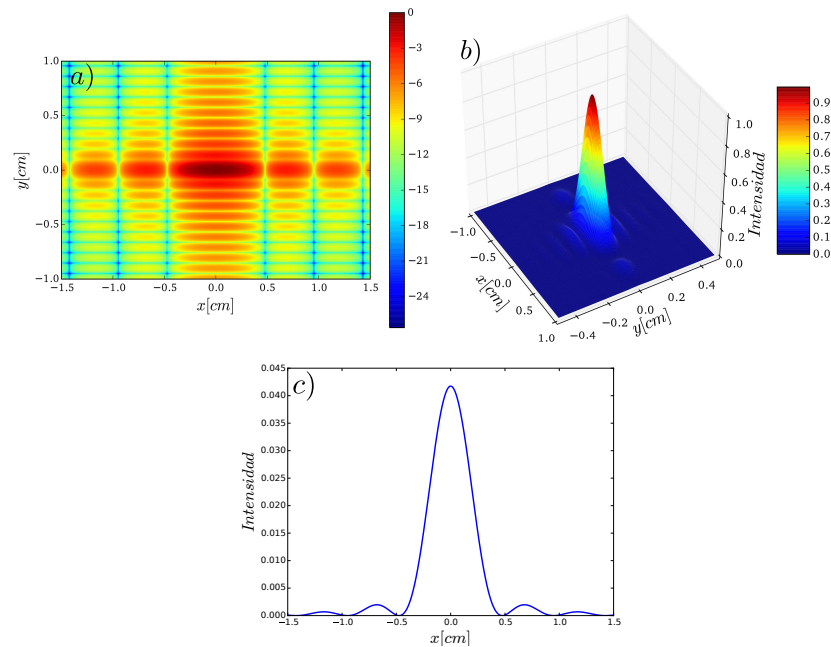


Figura 20: Patrón de intensidad de una rendija rectangular de 0.01cm por 0.05cm a una distancia de observación 150cm . a) Patrón de intensidad en escala de colores. b) Patrón de intensidad en 3D. c) Corte hecho en la gráfica 3D para un valor constante $y = 0$.

3.1.5 Comparación de los resultados numéricos obtenidos por los tres métodos.

En las figuras 21 y 22 se comparan las soluciones de la aproximación de Fresnel obtenidas por los tres métodos vistos anteriormente. En estas gráficas se observa que, un corte para un valor constante $y = 0$ en el patrón de intensidad 3D obtenido por el método de las integrales de Fresnel, se puede utilizar para garantizar el bajo error numérico de los dos métodos 2D empleados anteriormente. Para todos los números de Fresnel en estas figuras (incluso para los números de Fresnel grandes), se observa una buena correspondencia entre las tres curvas, lo que demuestra que los dos métodos 2D al igual que el método de las integrales de Fresnel son muy precisos.

3.1.6 Análisis de los resultados numéricos de la primera difracción.

Los resultados numéricos obtenidos hasta el momento corresponden a la difracción de un campo constante a través de una rendija rectangular. Estos resultados sirven como guía para intentar dar claridad al problema principal de este trabajo de tesis: ¿puede un experimento de difracción a nivel de conteo de fotones revelar un carácter fundamental de la aproximación de Fresnel?. Los cálculos numéricos desarrollados en este capítulo proporcionan una buena herramienta para diseñar un experimento de difracción por conteo de fotones; este diseño debe dar una respuesta a los dos preguntas siguientes:

- ¿Cuáles valores del ancho de la rendija y la distancia de observación hacen que las curvas

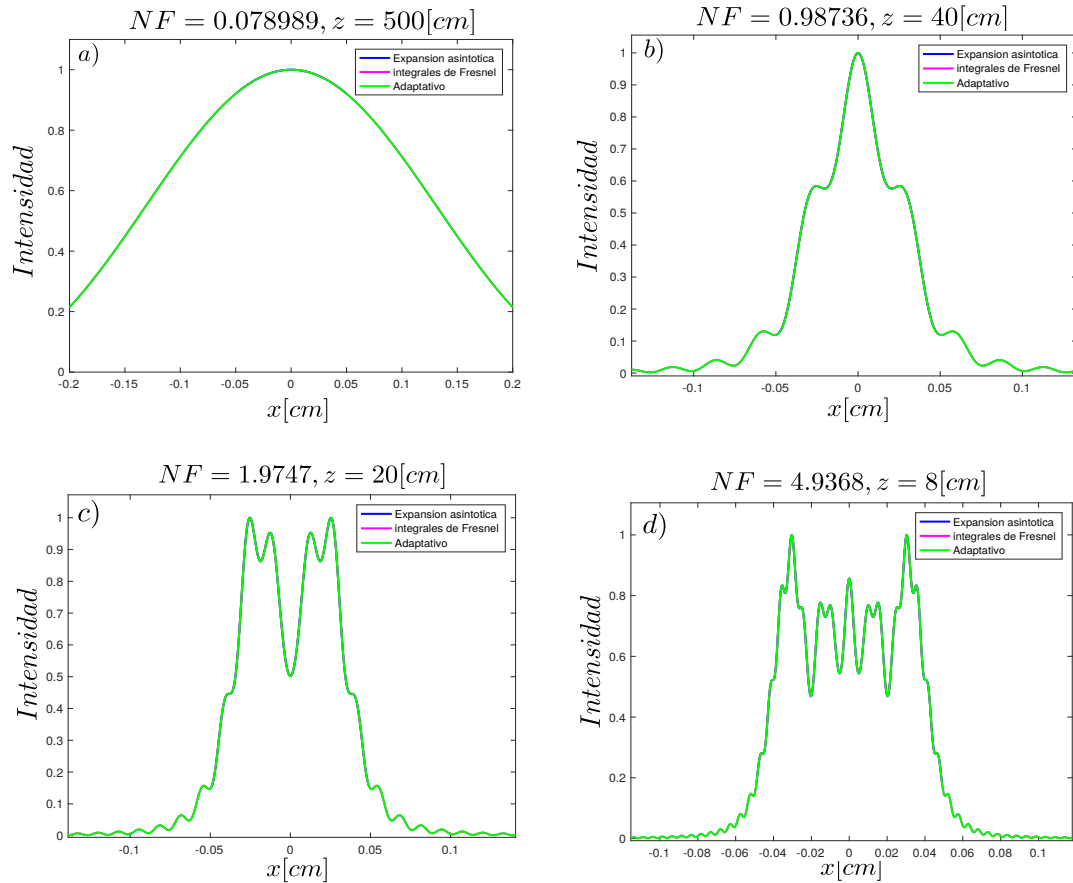


Figura 21: Solución de la aproximación de Fresnel para diferentes números de Fresnel por los tres métodos.

de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel se diferencien en gran medida?

- ¿Las diferencias obtenidas numéricamente se podrían medir experimentalmente con los instrumentos disponibles en el laboratorio?

La respuesta a la primera pregunta se puede dar, probando diferentes configuraciones de los dos parámetros, de hecho, se puede demostrar, que las diferencias entre las dos curvas incrementan cuando el número de Fresnel se hace más grande. Con respecto a la segunda pregunta, un experimento de difracción a nivel de conteo de fotones con números de Fresnel grandes no sería capaz de discernir si los datos experimentales corresponden a una propagación de los fotones por una integral de difracción de Fresnel. Esto se debe, a las altas oscilaciones presentes cuando se trabaja con números de Fresnel grandes; para reconstruir las gráficas experimentales con todos los detalles se deberían hacer medidas del número de fotones en función de la posición en el plano de observación, con un paso muy pequeño, del orden de $1[\mu m]$. Sin embargo, el detector de fotones que se posee para el experimento tiene un área efectiva de $50[\mu m]$, lo que indica que, un barrido hecho con este detector no evidenciaría bien

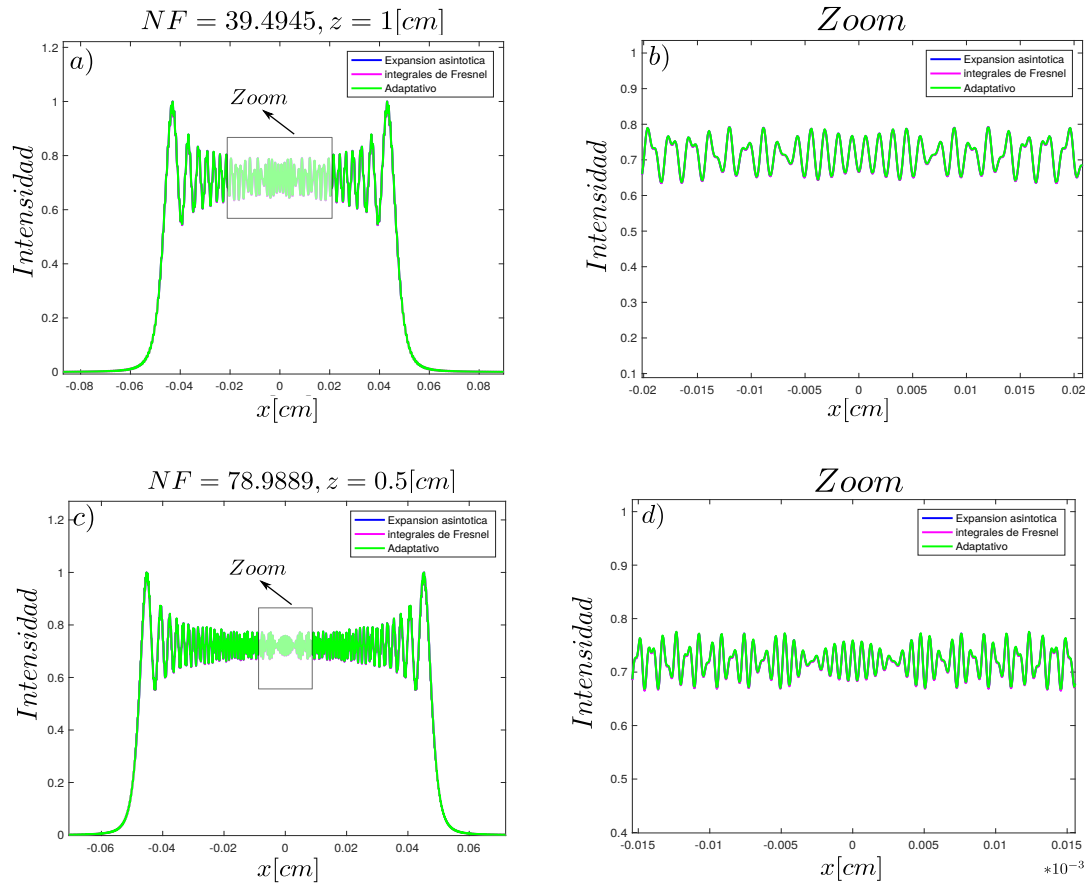


Figura 22: Solución de la aproximación de Fresnel para diferentes números de Fresnel por los tres métodos.

los detalles de la curva.

Una salida a este problema se logra haciendo una segunda difracción, en donde una segunda rendija rectangular se posiciona a una cierta distancia posterior de la primera. El campo incidente sobre la segunda rendija será el campo difractado de la primera rendija, el cual posee un número de Fresnel lo suficientemente grande como para generar diferencias entre las dos curvas. En el resultado de la segunda difracción se espera que las diferencias sean más notorias y además, que todos los detalles de la curva experimental se puedan reconstruir con el detector de fotones disponible. Teniendo en mente esto, en la siguiente sección se hace de forma numérica una segunda difracción y se estudian condiciones bajo las cuales las diferencias entre las dos curvas puedan ser detectadas experimentalmente.

3.2 DIFRACCIÓN POR DOS RENDIJAS RECTANGULARES

Como se mencionó anteriormente, una segunda difracción es necesaria para que las diferencias entre el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel sean más evidentes y se puedan medir experimentalmente. El esquema de la segunda difracción se puede ver en la figura 23. En esta figura se observa un campo constante que incide sobre la primera rendija y el campo difractado que incide sobre la segunda rendija.

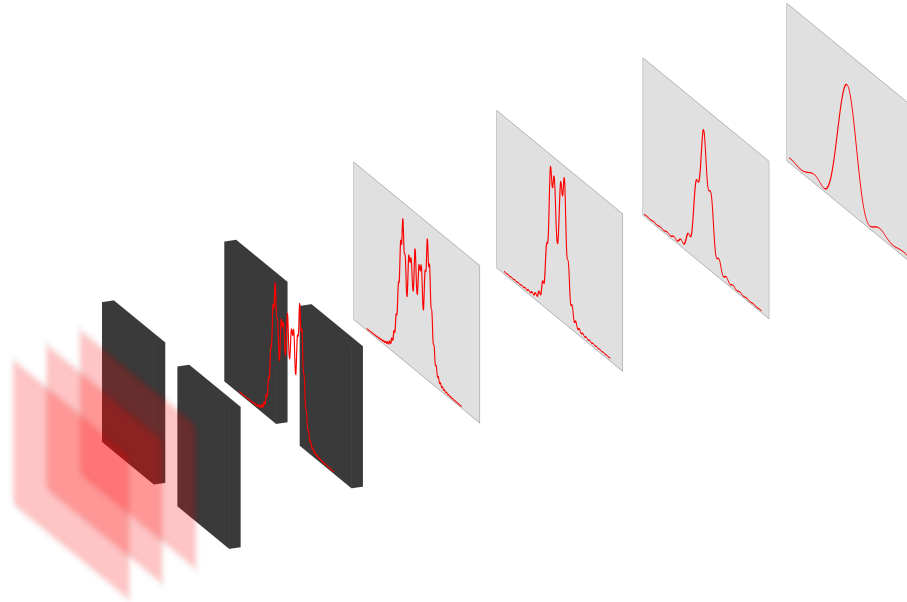


Figura 23: Esquema de la segunda difracción.

3.2.1 Consideraciones generales de los cálculos numéricos.

La segunda difracción consta de dos partes:

- En primer lugar, se hace una primera difracción con un número de Fresnel suficientemente grande para que muestre diferencias entre el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel.
- En segundo lugar, se hace una segunda difracción utilizando el campo resultante de la primera difracción como campo incidente sobre la segunda rendija.

Se debe resaltar que, aunque la primera difracción se deba hacer con un número de Fresnel alto, en la segunda difracción no es necesario. De hecho, la segunda difracción se puede hacer en el régimen de Fraunhofer y las diferencias podrían notarse en un experimento de doble difracción que se haga con mucho cuidado. Teniendo esto en cuenta y con el objetivo de hacer eficiente el proceso de computo, la segunda difracción se hace con la FFT. Varios parámetros

se deben tener en cuenta en la simulación como lo son el ancho de las dos rendijas, la distancia entre las dos rendijas y la distancia de observación (distancia entre la segunda rendija y el plano de observación).

En la figura 24a se muestra el resultado de la primera difracción con un ancho de la rendija $0.4445[cm]$ y distancia de observación $4.1[cm]$. En la figura 24b se muestran los detalles ampliados en la zona central de las curvas, en donde se observan pequeñas variaciones entre el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel. La figura 25 corresponde al resultado de la segunda difracción, en el cual la rendija posee un ancho $0.0127[cm]$ y la distancia entre la segunda rendija y el observador es $146.4[cm]$.

En la figura 25a es posible observar que, cerca del máximo central las dos curvas son exactamente iguales y tienen la forma de un seno cardinal. Por otro lado, en la figura 25a se observan diferencias entre las dos curvas en regiones alejadas y simétricamente espaciadas del máximo central, sin embargo, estas diferencias son muy pequeñas y en las mediciones experimentales es probable que no se noten. Cambiando parámetros de la simulación se observó, que las diferencias se incrementan si se introduce un corrimiento lateral entre los ejes de las dos rendijas (ver figura 26).

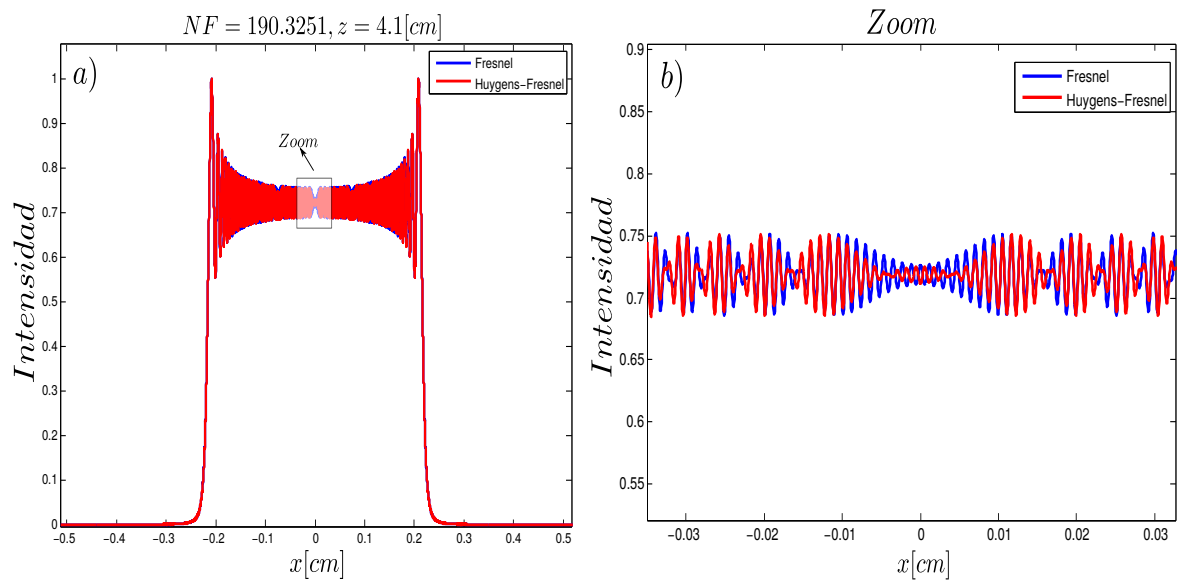


Figura 24: Patrón de intensidad obtenido de la primera difracción a una distancia $4.1[cm]$ y con un tamaño de la rendija de $0.4445[cm]$. a) Patrón de intensidad. b) Región ampliada del patrón de intensidad en donde se observan diferencias entre las dos curvas.

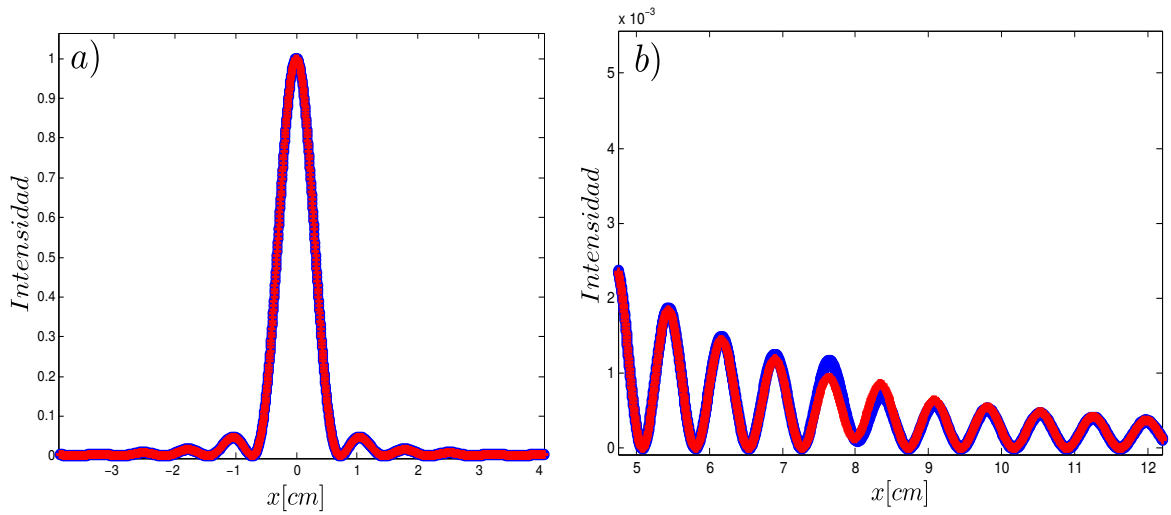


Figura 25: Patrón de intensidad obtenido de la segunda difracción a una distancia $146.4[cm]$ y con un tamaño de la rendija $0.0127[cm]$. a) Patrón de intensidad cerca del máximo central. b) Ampliación de las diferencias.

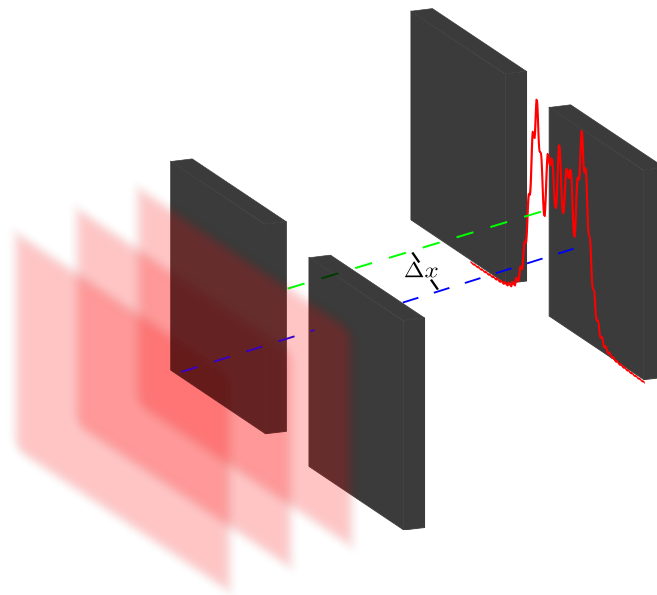


Figura 26: Corrimiento lateral entre las dos rendijas rectangulares.

Una buena configuración de parámetros se obtiene cuando el tamaño de la primera rendija es $0.508[cm]$, el de la segunda rendija $0.0635[cm]$, la distancia entre rendijas $2.28[cm]$, la distancia de observación $96.84[cm]$ y el corrimiento lateral entre las rendijas es $0.0015[cm]$. Con estos parámetros, el resultado de la primera difracción se puede ver en la figura 27 mientras que el resultado de la segunda difracción se observa en la figura 28. La figura 28 demuestra que los parámetros escogidos son óptimos para realzar las diferencias, de hecho, en el capítulo 4 se

utilizará esta misma configuración para realizar el experimento de la segunda difracción.

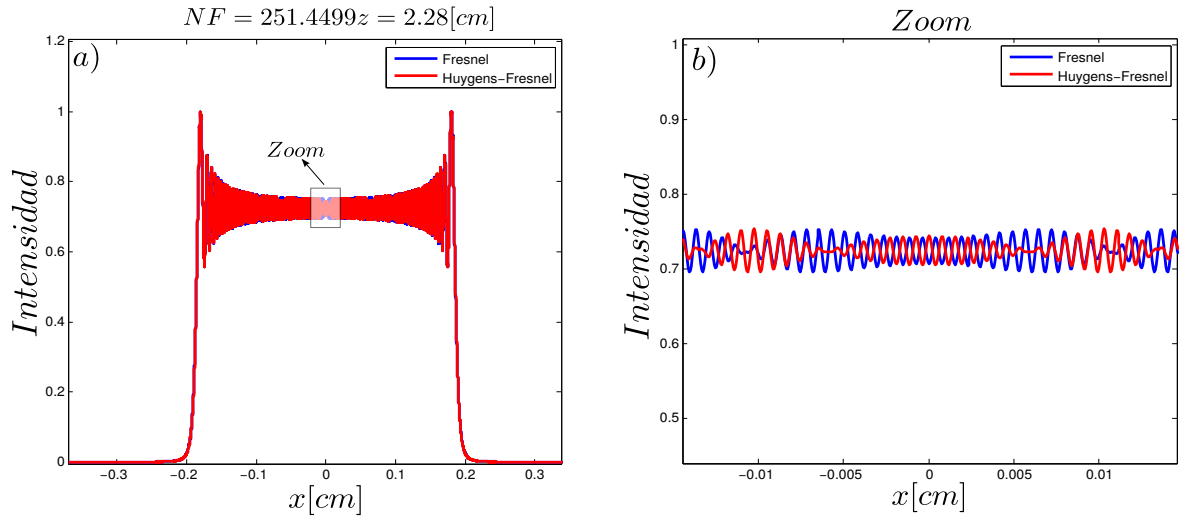


Figura 27: Patrón de intensidad obtenido de la primera difracción a una distancia $2.28[cm]$ y con un tamaño de la rendija de $0.508[cm]$. a) Patrón de intensidad. b) Ampliación de las diferencias entre las dos curvas.

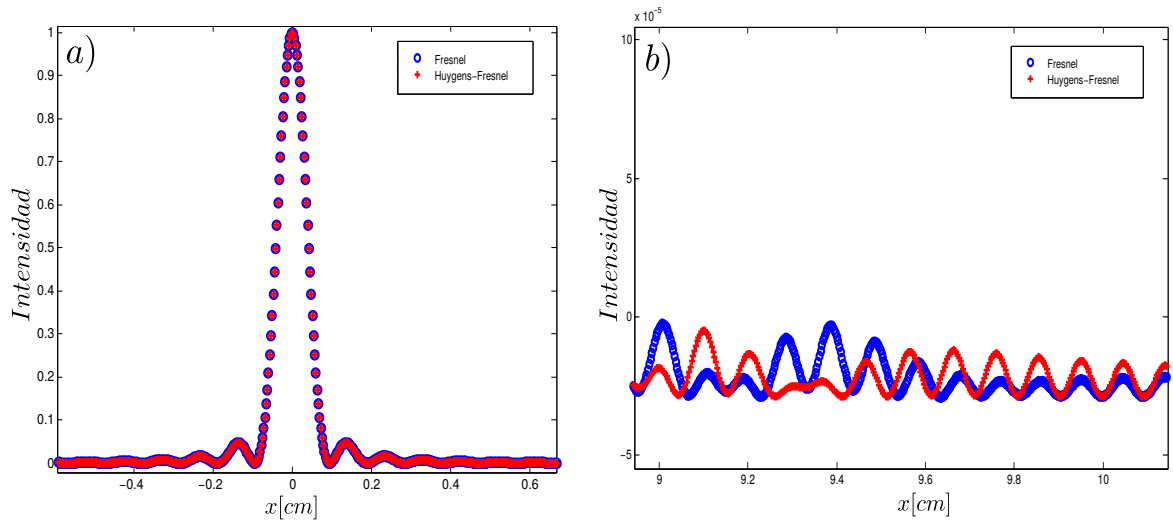


Figura 28: Patrón de intensidad obtenido de la segunda difracción a una distancia de $96.84[cm]$, con un tamaño de la rendija $0.03175[cm]$ y un corrimiento lateral entre rendijas de $0.0015[cm]$. a) Patrón de intensidad cerca del máximo central. b) Ampliación de las diferencias.

CAPÍTULO 4

MONTAJE EXPERIMENTAL, RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo se presentan los montajes experimentales utilizados para hacer la primera y segunda difracción por conteo de fotones, y se describen los cuidados especiales que se deben tener en el experimento. Se comparan los resultados experimentales con las curvas teóricas obtenidas en el capítulo anterior. Por último, se hace una discusión de los resultados obtenidos.

4.1 MONTAJE EXPERIMENTAL

Condiciones especiales son necesarias para realizar experimentos a nivel de conteo de fotones, puesto que cualquier fuente de luz no deseada (LED, filtración de luz por los orificios de las puertas, etc.) puede cambiar en gran medida los resultados experimentales. Por esta razón, los experimentos hechos en este trabajo se efectuaron bajo condiciones muy controladas en una habitación equipada para disminuir el ruido no deseado. Los LED y los orificios de la puerta se cubrieron de forma apropiada y las paredes de la habitación están pintadas de negro para evitar la reflexión de la luz. Además, en la habitación hay una mesa óptica y diferentes tipos de instrumentos como espejos, monturas, entre otros, esenciales para lograr una buena alineación del sistema óptico. Los elementos implementados en los montajes experimentales de este trabajo fueron: Un láser de He-Ne de 633[*nm*] como fuente de luz, un espejo para la alineación del sistema, un colimador para filtrar la luz, un obturador de diafragma para controlar el paso de luz a voluntad, dos filtros de densidad neutra para atenuar la luz incidente, dos rendijas rectangulares de ancho variable, un contador de fotones individuales y dos plataformas de traslación motorizadas (microdesplazamientos electrónicos) en uno de los cuales va montado el contador de fotones y en el otro una de las rendijas. En las tablas 1 a 5 se encuentran las principales características de algunos instrumentos empleados en los experimentos, mientras que en la figura 29 se muestra una imagen de dichos instrumentos.

Tabla 1: Principales características de la Plataforma de traslación motorizada MTS50-Z8.

Plataforma de traslación motorizada MTS50-Z8	
Proveedor	Thorlabs
Rango de viaje	50 mm
Incremento mínimo posible	0.05 μm
Velocidad máxima	2.4 mm/s
Controlador requerido	Motor KDC101

Tabla 2: Principales características de la rendija mecánica ajustable VA100.

Rendija mecánica ajustable VA100	
Proveedor	Thorlabs
Graduación del micrómetro	0.001" por división
Ajuste del ancho de la rendija por revolución	0.025"
Tolerancia del centrado de la rendija	± 0.003 "

Tabla 3: Principales características del expansor de haz de magnificación fija: Acromático GBE20-A.

Expansor de haz de magnificación fija: Acromático GBE20-A	
Proveedor	Thorlabs
Expansión	20X
Diámetro máximo del haz de entrada	2.2mm
Transmisión típica	$\geq 98\% @ 633\text{nm}$

Tabla 4: Principales características del obturador de diafragma con controlador SHB1T.

Obturador de diafragma con controlador SHB1T	
Proveedor	Thorlabs
Tiempo de cierre	9 ms
Tiempo de apertura	10 ms
Frecuencia típica	10 Hz

Tabla 5: Principales características del contador de fotones individuales SPCM50A.

Contador de fotones individuales SPCM50A	
Proveedor	Thorlabs
Rango de longitud de onda	350-900 nm
Diámetro activo del detector	50 μm
Respuesta típica máxima	35% @ 500 nm
Frecuencia típica de conteos oscuros	200 Hz Max (150 Hz típico)

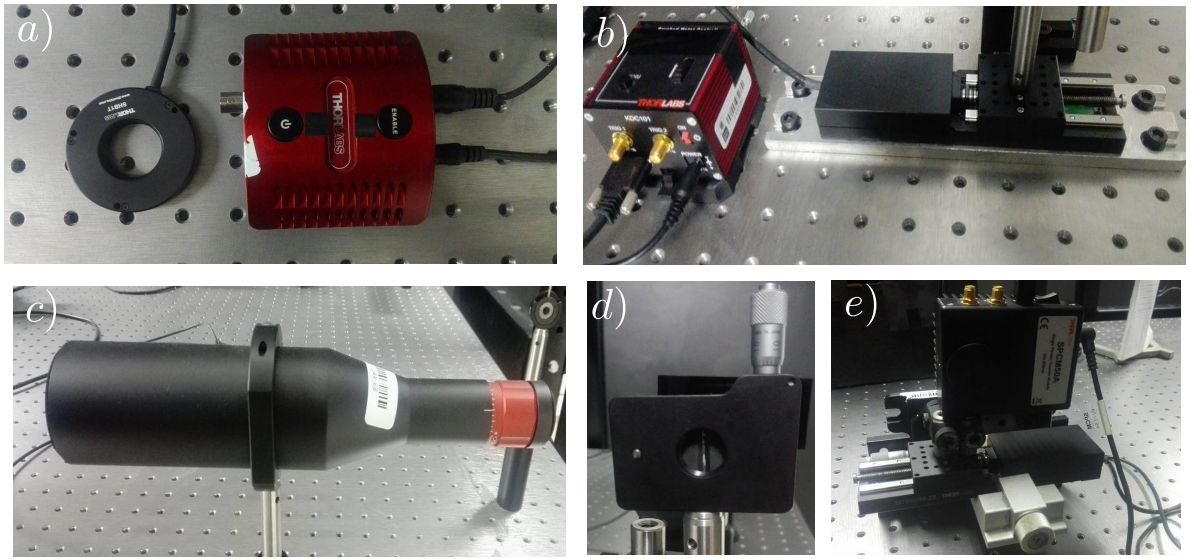


Figura 29: Instrumentos principales utilizados en los experimentos de la primera y segunda difracción por conteo de fotones. a) Obturador de diafragma con controlador SHB1T. b) Plataforma de traslación motorizada MTS50-Z8. c) Expansor de haz de magnificación fija: Acromático GBE20-A. d) Rendija mecánica ajustable VA100. e) Contador de fotones individuales SPCM50A.

4.2 PRIMERA DIFRACCIÓN

4.2.1 Montaje experimental de la primera difracción.

Para llevar a cabo la primera difracción, se alinea el sistema con mucho cuidado considerando que, cualquier pequeña desviación se ve reflejada en el patrón de difracción. Además, se filtra el haz con un colimador y se colocan dos filtros de densidad neutra en el camino del haz para atenuarlo y así, trabajar al nivel de conteo de fotones. Luego de la atenuación, los fotones llegan a una rendija rectangular cuyo ancho puede variar desde $0[mm]$ a $6[mm]$ con la ayuda de un tornillo micrométrico.

La última parte del experimento es la detección y conteo de fotones que llegan al plano de observación. Para este fin, se utiliza un detector de fotones individuales montado sobre un microdesplazamiento electrónico el cual permite hacer un barrido en el eje x a una distancia z de la rendija. El detector se cubre con una caja negra que posee un orificio por el cual pasan los fotones difractados, pero al mismo tiempo tiene la función de bloquear parte del ruido incidente. Las especificaciones del detector y su funcionamiento se muestran en el apéndice D. Otros instrumentos utilizados fueron: un computador para manejar el detector y el microdesplazamiento, una pupila que disminuye el tamaño del haz y un shutter automático que obstruye el paso del haz cuando se quiere caracterizar únicamente el ruido que llega al detector. Un esquema de la primera difracción se observa en la figura 30, mientras que en la figura 31 se aprecian imágenes del experimento hecho en el laboratorio.

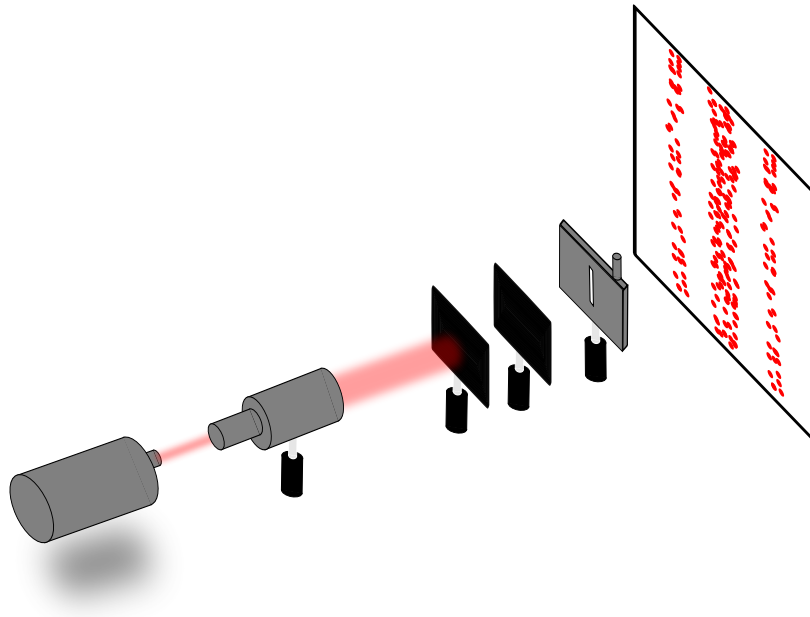


Figura 30: Esquema de la primera difracción.

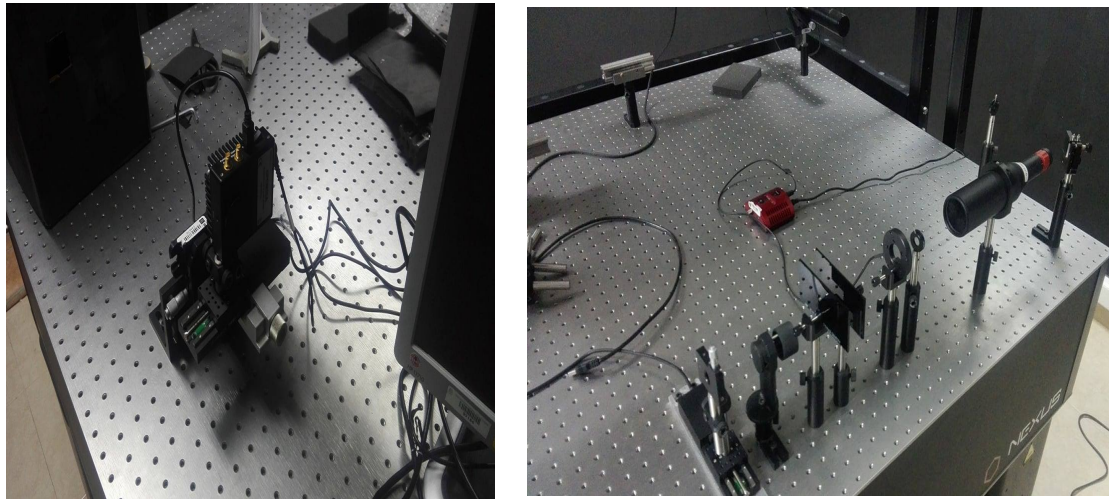


Figura 31: Montaje experimental para la primera difracción.

4.2.2 Proceso de detección y reconstrucción del primer patrón de difracción.

Para el proceso de detección, se configura el ancho de la rendija y la distancia de observación con la que se desea trabajar (las simulaciones funcionan como guía para elegir estos parámetros). Otro parámetro que se debe ajustar es el tiempo de detección, es decir, el tiempo durante el cual el detector registra fotones, el cual se configura con el software del detector y para todas las mediciones de la primera difracción tiene un valor de $10[ms]$.

Una vez ajustados los parámetros, se fija el microdesplazamiento (encargado de desplazar el contador) a la mesa óptica y a una distancia de observación z . La caja negra se coloca con cuidado sobre el detector y se comienza el proceso de medida. El microdesplazamiento hace un barrido en el plano de observación con paso no mínimo a $50[\mu m]$ (área efectiva del detector) y en cada punto detecta fotones durante $10[ms]$. En el software del detector se guardan los datos de cada punto de observación y posteriormente se analizan con un código hecho en MATLAB para reconstruir una gráfica normalizada del número de fotones en función de la posición.

4.2.3 Resultados experimentales de la primera difracción.

Que los resultados experimentales de la primera difracción concuerden con las simulaciones es crucial para proceder experimentalmente con la segunda difracción. Para hacer la comparación entre la curva teórica y el experimento se utilizó el algoritmo de Simpson adaptativo y se configuraron los mismos parámetros de la simulación con los del experimento. Para los números de Fresnel utilizados en este experimento las curvas del principio de Huygens-Fresnel y de la aproximación de Fresnel son iguales, por lo que se escogió solo la última para hacer la comparación con el experimento.

Las figuras 32 y 33 muestran la curva simulada y los puntos experimentales obtenidos para un tiempo de exposición de $10[ms]$. La gráfica mostrada en la figura 32a tiene un tamaño de la rendija $0.056[cm]$ y una distancia de observación $z = 126.95[cm]$, lo que da como resultado un número de Fresnel $NF = 0.098$ suficientemente pequeño para estar en el régimen de Fraunhofer. En la figura 32b se configuró el tamaño de la rendija $0.056[cm]$ y una distancia de observación $z = 41.97[cm]$, obteniendo así un número de Fresnel $NF = 0.2951$. En esta figura se observa un comportamiento que no corresponde a una difracción de Fraunhofer, esto es, el primer pico secundario no corta el eje x . Por último, la forma de la figura 33 indica que se está trabajando en el régimen de Fresnel, de hecho, con un tamaño de la rendija $0.1905[cm]$, una distancia de observación $z = 96.84[cm]$ y un número de Fresnel $NF = 1.4800$, se verifica esto.

En la figura 32 el número máximo de fotones registrado fue de 310 fotones en $10[ms]$, mientras que en la figura 33 se registró un número máximo de fotones de 497 fotones en $10[ms]$. En estas figuras se grafica en cada punto, el número promedio de fotones de cien medidas, cada una de $10[ms]$ de duración. En las figuras se muestra una buena concordancia de la curva teórica con los datos experimentales, lo que demuestra que el sistema óptico está bien alineado y que los métodos utilizados en las simulaciones son muy precisos.

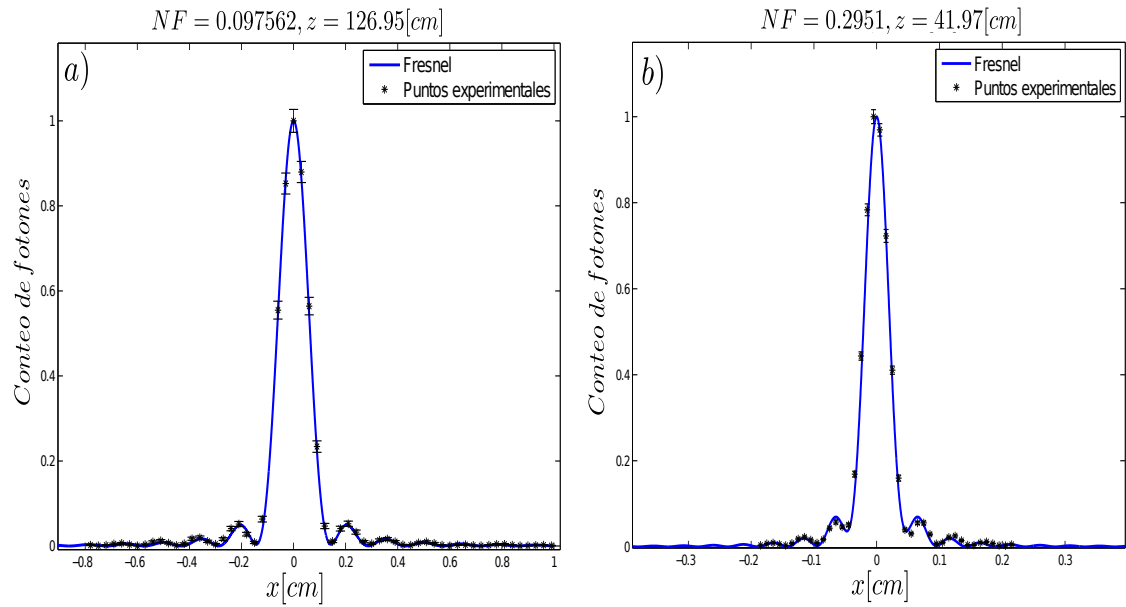


Figura 32: Número de fotones en función de la posición x . a) Tamaño de la rendija $0.056[cm]$, distancia de observación $z = 126.95[cm]$ y número de Fresnel $NF = 0.098$. b) Tamaño de la rendija $0.056[cm]$, distancia de observación $z = 41.97[cm]$ y número de Fresnel $NF = 0.2951$.

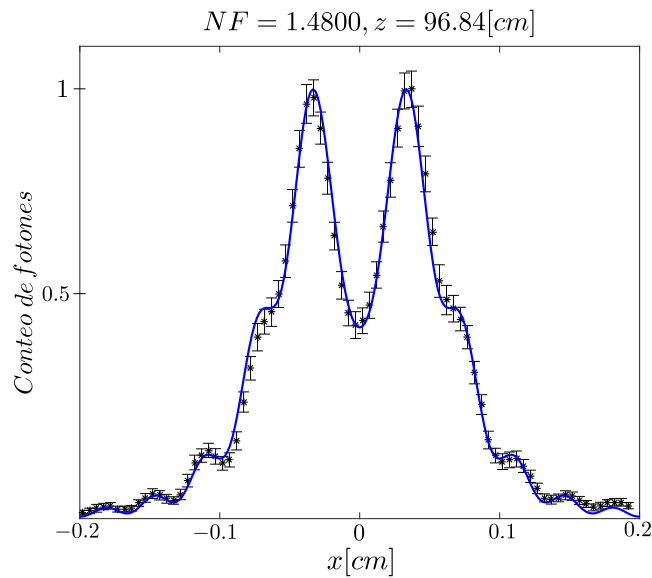


Figura 33: Número de fotones en función de la posición x para un tamaño de la rendija $0.1905[cm]$, distancia de observación $z = 96.84[cm]$ y número de Fresnel $NF = 1.4800$

4.3 SEGUNDA DIFRACCIÓN

4.3.1 Montaje experimental de la segunda difracción.

El montaje experimental para la segunda difracción es muy parecido al anterior, pero con la diferencia de que posee dos rendijas rectangulares en vez de una. Las dos rendijas son iguales, sin embargo, la segunda rendija a diferencia de la primera está montada sobre un microdesplazamiento electrónico que permite introducir un corrimiento entre las dos rendijas y con esto permite aumentar la distinción entre las dos curvas (figura 34). Las figuras 34 y 35 muestran un esquema de la segunda difracción e imágenes del experimento hecho en el laboratorio.

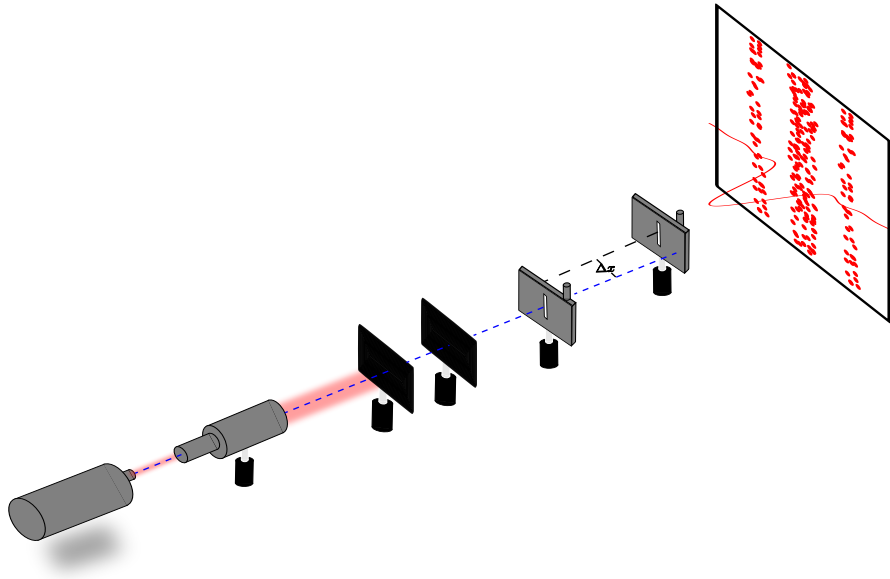


Figura 34: Esquema de la segunda difracción.

4.3.2 Proceso de detección y reconstrucción del segundo patrón de difracción.

En el proceso de detección de este experimento se deben tener en cuenta los siguientes parámetros: el tiempo de detección, el ancho de cada rendija, la distancia entre las rendijas, la distancia de observación y el corrimiento de una rendija con respecto a la otra. Inicialmente, se hace una primera difracción con cada rendija por separado, esto permite alinear las rendijas y con el corrimiento de sus respectivos picos máximos determinar el corrimiento que hay entre las dos rendijas. Después, se colocan las dos rendijas al tiempo, se toman los cuidados pertinentes y se detectan fotones de la misma forma que en la primera difracción.

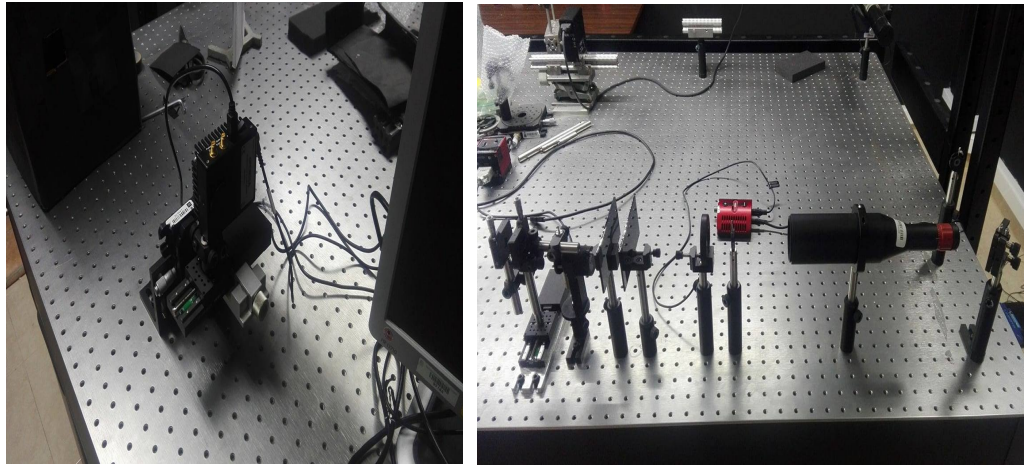


Figura 35: Montaje experimental para la segunda difracción.

4.3.3 Resultados experimentales de la segunda difracción.

Para llevar a cabo la segunda difracción experimentalmente, se escogieron los mismo parámetros de la figuras 27 y 28. Estos son: tamaño de la primera rendija $0.508[cm]$, tamaño de la segunda rendija $0.0635[cm]$, distancia entre rendijas $2.28[cm]$, distancia entre la segunda rendija y el detector de fotones $96.84[cm]$ y corrimiento entre las rendijas de $0.015[cm]$. Con estos parámetros, la primera difracción se da en la zona donde debería comenzar a actuar el principio de Huygens-Fresnel ya que $NF = 251.4499$, mientras que la segunda difracción con $NF = 0.1644$ se sitúa en el régimen de Fraunhofer. Las curvas teóricas normalizadas de la primera difracción y su respectiva ampliación se observan en la figura 36.

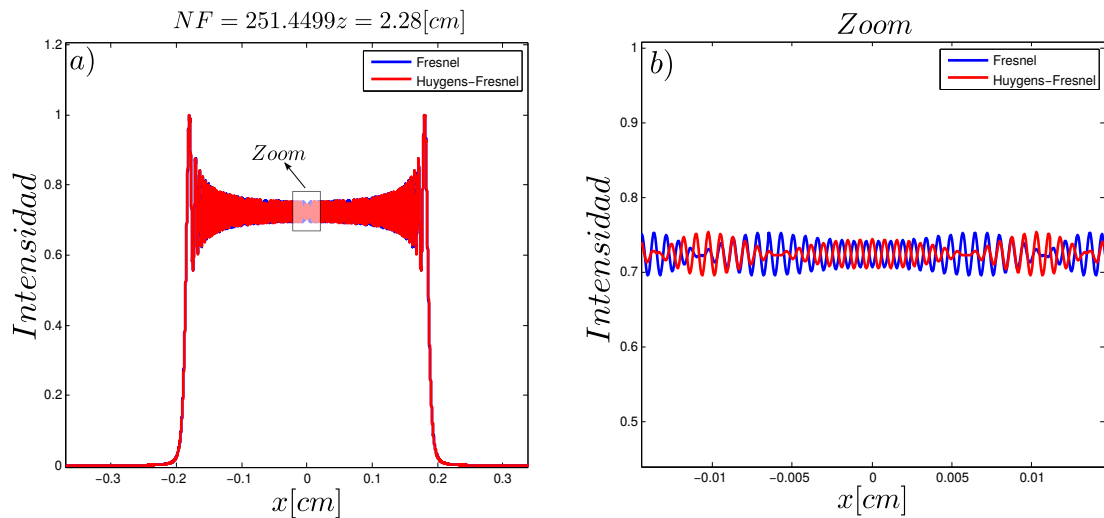


Figura 36: Densidad de probabilidad de detectar un fotón obtenido de la primera difracción a una distancia $2.28[cm]$ y con un tamaño de la rendija de $0.508[cm]$. a) Densidad de probabilidad. b) Ampliación de las diferencias entre las dos curvas.

Por otro lado, el número de fotones en función de la posición en la segunda difracción y los respectivos datos experimentales se muestran en las figuras 38 y 37. En la figura 37a se observa la región cercana al máximo central, mientras que en la figura 37b se observa la región justo antes de que comiencen las diferencias. En esta figura se observa una disminución gradual de altura de los máximos tal y como se puede apreciar en las curvas teóricas. La figura 38a muestra el número de fotones en función de la posición en la región alrededor del máximo central mientras que en la figura 38b se observa la región en donde se encuentran las diferencias. Para construir estas gráficas, el tiempo de exposición del detector en cada punto del barrido se incrementó a un valor de 1[s] ya que en las regiones donde están las diferencias la probabilidad de detección de un fotón es muy baja. En estas figuras se gráfica en cada punto, el número promedio de fotones de cinco medidas, cada una de un segundo de duración. Con este tiempo de exposición, el número máximo de fotones que se midió(máximo central) fue de 950314[fotones/s].

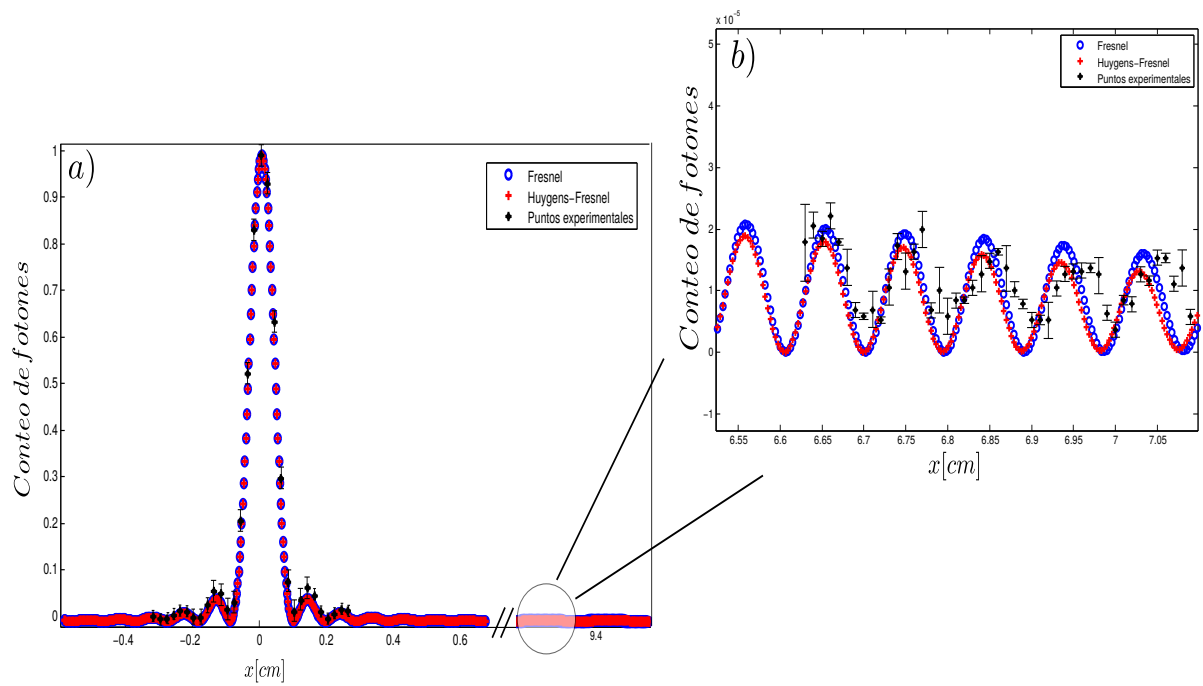


Figura 37: Curvas teóricas y puntos experimentales de la segunda difracción. a) Segunda difracción alrededor del máximo central. b) Segunda difracción en la zona justo antes de que comiencen las diferencias.

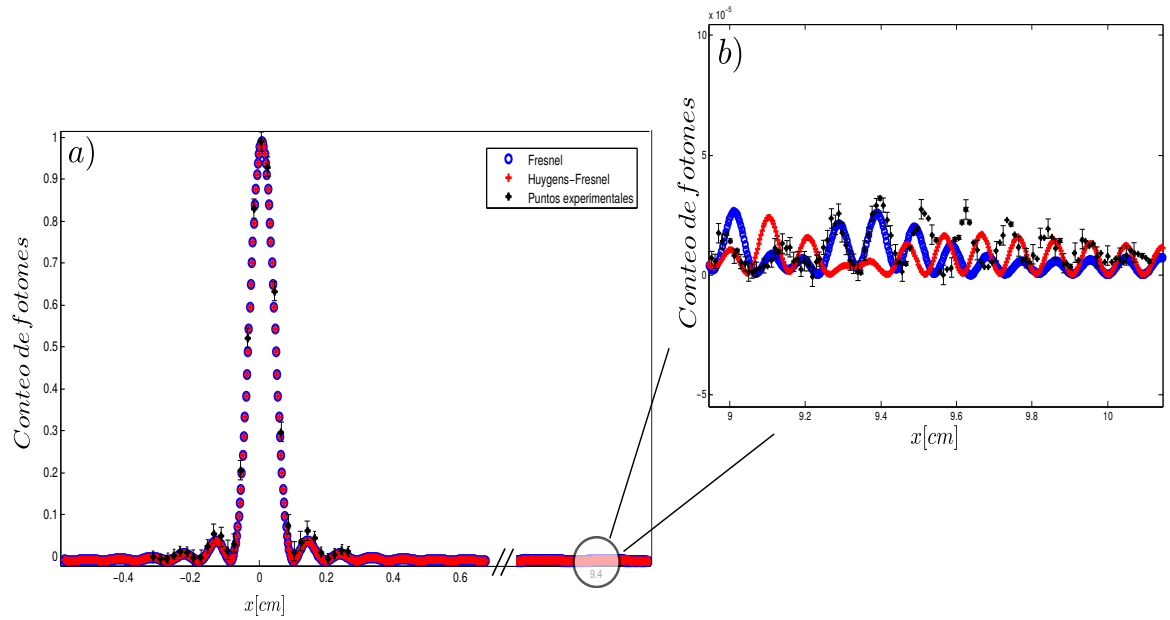


Figura 38: Curvas teóricas y puntos experimentales de la segunda difracción. a) Segunda difracción alrededor del máximo central. b) Segunda difracción en las zonas en donde se diferencia el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel.

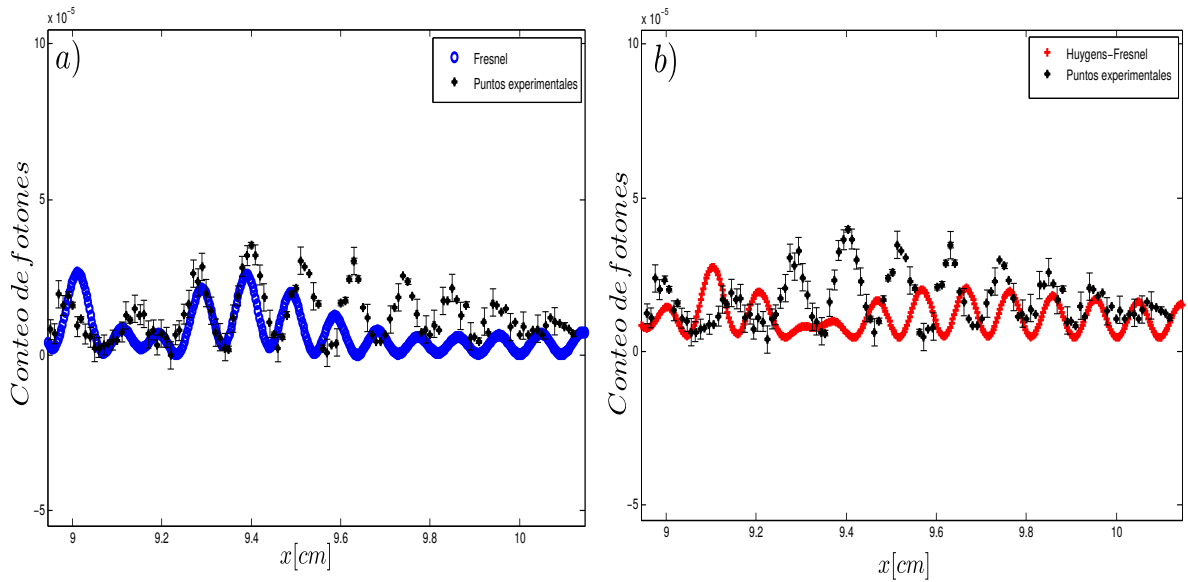


Figura 39: Curvas teóricas y puntos experimentales de la segunda difracción. a) Aproximación de Fresnel comparada con los datos experimentales. b) Principio de Huygens-Fresnel comparado con los datos experimentales.

Los datos experimentales de la figura 38 cercanos al máximo central evidencian una concordancia entre las curvas teóricas y el experimento, lo cual demuestra que en la segunda difracción la región cercana al máximo central parece un seno cardinal. No obstante, en esta región no se puede determinar si los datos experimentales concuerdan con el principio de Huygens-Fresnel o con la aproximación de Fresnel, lo cual se debe a que las curvas teóricas en esta región son exactamente iguales.

Aproximadamente a $9[cm]$ del máximo central están ubicadas las diferencias entre las dos curvas (figura 39), en donde se observa en una región una concordancia de los datos experimentales con la aproximación de Fresnel, lo cual podría dar un indicio de que la teoría de propagación de fotones por medio de una integral de Fresnel sea correcta. Sin embargo, no se puede decir algo completamente concluyente porque el experimento es muy delicado y como ya se mencionó, en las regiones en donde se encuentran las diferencias, la luz externa puede afectar en gran medida el experimento. De hecho, también se introducen errores en las medidas por las incertidumbres de los instrumentos y por los errores humanos al momento de medir. Mejores resultados se pueden obtener si se disminuye al máximo el ruido externo y además se controla con más cuidado la alineación de todos los elementos del montaje experimental.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo se demostró que la propagación de fotones por medio de las integrales de camino de Feynman se puede escribir como una integral de difracción de Fresnel. Además, se estudió la teoría escalar de la difracción y se encontró que esta permite soluciones diferentes a las fuentes puntuales. Estos dos resultados podrían dar indicios de una relación más fundamental entre la propagación de la luz y la integral de difracción de Fresnel.

Además, se llevó a cabo un experimento de difracción por conteo de fotones a través de una rendija rectangular con un haz láser de He-Ne de $633[nm]$ atenuado, para encontrar un resultado que apoye la teoría de propagación de fotones por medio de una integral de difracción de Fresnel. Antes de esto, se solucionó numéricamente el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel por diferentes métodos numéricos con el fin de tener curvas teóricas que soporten los experimentos.

Para las simulaciones, se utilizaron los métodos de Simpson adaptativo y expansión asintótica para solucionar el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel en dos dimensiones. Además, se utilizó el método de las integrales de Fresnel para solucionar la aproximación de Fresnel en tres dimensiones y así compararla con los resultados de los dos métodos anteriores. De la comparación de este último método con los dos primeros se pudo concluir que los tres métodos empleados tienen un bajo error numérico pero el método de expansión asintótica es mucho más eficiente que los otros dos.

Con la ayuda de las simulaciones, se logró determinar que una sola difracción por conteo de fotones no es suficiente para demostrar si la propagación de los fotones se ve gobernada por el principio de Huygens-Fresnel o por una integral de difracción de Fresnel. Así mismo, una segunda difracción solucionada numéricamente demostró que es viable hacer un experimento de doble difracción por conteo de fotones, ya que en el patrón de difracción se encuentran regiones en donde el principio de Huygens-Fresnel y la aproximación de Fresnel son diferentes. Con el fin de realzar las diferencias mencionadas anteriormente, se demostró que un corrimiento

entre las dos rendijas realiza esta tarea de forma óptima.

Por otro lado, se observó que los datos experimentales de la primera difracción por conteo de fotones concuerdan muy bien con las curvas teóricas obtenidas en las simulaciones. Este resultado ofrece una comprobación de las curvas teóricas y permite proseguir con el experimento de la segunda difracción. En el experimento de la segunda difracción se observó que los datos experimentales coinciden con las curvas teóricas cerca del máximo central. Adicionalmente, se demostró la existencia de regiones del segundo patrón de difracción por conteo de fotones en donde las dos curvas teóricas se diferencian. Los datos experimentales en estas regiones manifestaron un comportamiento parecido a la integral de difracción de Fresnel, sin embargo, no se puede decir algo completamente concluyente de estas medidas porque muchos factores experimentales afectan los datos experimentales.

Para futuros trabajos que se intenten seguir en esta línea se debería manejar de forma más controlada parámetros como la alineación de todos los elementos del montaje y la disminución del ruido externo. Adicionalmente, para descartar errores en las simulaciones, se debería hacer un análisis de la fase del campo con los tres métodos numéricos utilizados.

APÉNDICE A

MÉTODO DE EXPANSIÓN ASINTÓTICA: DISMINUCIÓN DEL ERROR CON INCREMENTOS DE LA FRECUENCIA

Se mostrará como disminuye el error en una integral de la forma (3.6) cuando aumenta la frecuencia de oscilación. Como valor teórico, se utiliza una solución obtenida con la ayuda de Wolfram. La integral que se soluciona es

$$\int_a^b e^x e^{i\omega x^2} dx. \quad (\text{A.1})$$

De acuerdo a Wolfram, la solución de esta integral está dada en términos de la función error imaginaria (función que se conoce con bajo error numérico en Wolfram) y viene dada por

$$\int_a^b e^x e^{i\omega x^2} dx = -\frac{(-1)^{3/4} \sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\frac{\sqrt{i}(2\omega x - i)}{2\sqrt{\omega}}\right)}{2\sqrt{\omega}} \Bigg|_a^b, \quad (\text{A.2})$$

en donde erfi es la función error imaginaria.

Por otro lado, por el método de expansión asintótica se tiene

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = x^2, \quad a = -1, \quad b = 1, \quad 0 < \omega < 10000 \quad (\text{A.3})$$

La solución obtenida por este método es

$$I[f] \sim \left(\mu[\sigma_0](b) e^{i\omega b^2} - \mu[\sigma_0](a) e^{i\omega a^2} \right) + \frac{1}{i\omega} \left\{ \frac{e^b - \mathcal{L}[\mu[\sigma_0]](b)}{2b} e^{i\omega b^2} - \frac{e^a - \mathcal{L}[\mu[\sigma_0]](a)}{2a} e^{i\omega a^2} \right\}. \quad (\text{A.4})$$

En la figura 40a se observa el error, el cual se define como la diferencia entre el resultado de los

dos método multiplicada por ω . El error se define de esta forma para que las oscilaciones sean más evidentes. En la figura 40b, se amplía la figura 40a para que se noten las oscilaciones.

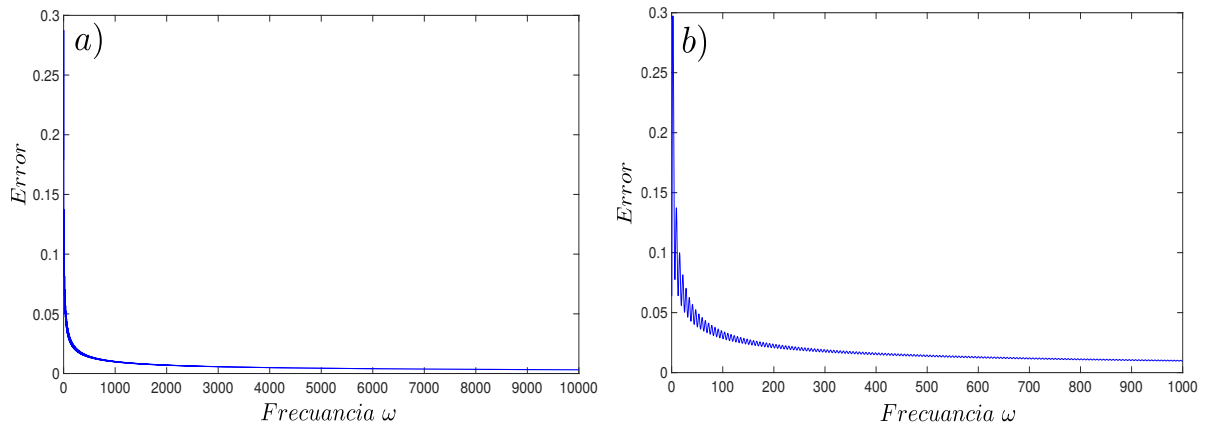


Figura 40: a) Disminución del error con aumentos de la frecuencia de oscilación. b) Ampliación de la gráfica del error en función de la frecuencia.

APÉNDICE B

APROXIMACIÓN DE FRESNEL PARA UNA RENDIJA RECTANGULAR EN TÉRMINOS DE LAS INTEGRALES DE FRESNEL

Cuando una rendija rectangular es iluminada por un campo constante $U = 1$, el campo en la rendija se puede escribir en términos de la función rectángulo como:

$$U(x', y') = \text{rect} \left(\frac{x'}{2w_x} \right) \text{rect} \left(\frac{y'}{2w_y} \right) \quad (\text{B.1})$$

Reemplazando este campo en la aproximación de Fresnel tridimensional (ecuación (2.36)), se obtiene

$$U(x, y) = \frac{ie^{ikz}}{\lambda z} \int_{-w_y}^{w_y} \int_{-w_x}^{w_x} \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} [(x - x')^2 + (y - y')^2] \right] dx' dy'. \quad (\text{B.2})$$

Se observa que esta integral se puede escribir como el producto de una integral que solo depende de la coordenada x' y otra que sola depende de la coordenada y'

$$U(x, y) = ie^{ikz} \mathcal{I}(x) \mathcal{I}(y), \quad (\text{B.3})$$

con $\mathcal{I}(x)$ e $\mathcal{I}(y)$ definidas como

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \int_{-w_x}^{w_x} \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} (x' - x)^2 \right] dx', \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{I}(y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \int_{-w_y}^{w_y} \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} (y' - y)^2 \right] dy'. \quad (\text{B.5})$$

Si se definen nuevos parámetros de la siguiente forma

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x' - x), \quad (\text{B.6})$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(y' - y), \quad (\text{B.7})$$

se puede escribir (B.4) y (B.5) de una forma más simplificada

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\alpha^2\right) d\alpha, \quad (\text{B.8})$$

$$\mathcal{I}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\beta^2\right) d\beta, \quad (\text{B.9})$$

donde

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(w_x + x) \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(w_x - x) \quad (\text{B.10})$$

$$\beta_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(w_y + y) \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(w_y - y) \quad (\text{B.11})$$

Cada una de las expresiones (B.8) y (B.9) se puede escribir como una suma de dos integrales

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\alpha^2\right) d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\alpha_2} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\alpha^2\right) d\alpha + \int_0^{\alpha_1} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\alpha^2\right) d\alpha \right], \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{I}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\beta^2\right) d\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\beta_2} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\beta^2\right) d\beta + \int_0^{\beta_1} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\beta^2\right) d\beta \right]. \quad (\text{B.13})$$

Ya que las integrales de Fresnel se definen como

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt \quad (\text{B.14})$$

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, \quad (\text{B.15})$$

Las ecuaciones (B.12) y (B.13) se pueden escribir en términos de las integrales de Fresnel

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [[C(\alpha_2) - C(\alpha_1)] + i[S(\alpha_2) - S(\alpha_1)]], \quad (\text{B.16})$$

$$\mathcal{I}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} [[C(\beta_2) - C(\beta_1)] + i[S(\beta_2) - S(\beta_1)]]. \quad (\text{B.17})$$

De lo anterior se observa que se puede escribir la ecuación (B.3) en términos de las integrales de Fresnel como

$$U(x, y) = \frac{ie^{ikz}}{2} [[C(\alpha_2) - C(\alpha_1)] + i[S(\alpha_2) - S(\alpha_1)]] \cdot [[C(\beta_2) - C(\beta_1)] + i[S(\beta_2) - S(\beta_1)]], \quad (\text{B.18})$$

y la intensidad siendo la magnitud del campo al cuadrado como

$$I(x, y) = \frac{1}{4} \left[[C(\alpha_2) - C(\alpha_1)]^2 + [S(\alpha_2) - S(\alpha_1)]^2 \right] \cdot \left[[C(\beta_2) - C(\beta_1)]^2 + [S(\beta_2) - S(\beta_1)]^2 \right]. \quad (\text{B.19})$$

APÉNDICE C

TEOREMA DE GREEN

Sean $G(\vec{r})$ y $U(\vec{r})$ dos funciones bien comportadas, con sus dos primeras derivadas con respecto a x, y y z continuas, se cumple que

$$\nabla \cdot [G(\vec{r})\nabla U(\vec{r})] = G(\vec{r})\nabla^2 U(\vec{r}) + \nabla G(\vec{r}) \cdot \nabla U(\vec{r}), \quad (\text{C.1})$$

y además se cumple

$$\nabla \cdot [U(\vec{r})\nabla G(\vec{r})] = U(\vec{r})\nabla^2 G(\vec{r}) + \nabla U(\vec{r}) \cdot \nabla G(\vec{r}). \quad (\text{C.2})$$

Restando las dos expresiones anteriores se obtiene

$$\nabla \cdot [G\nabla U - U\nabla G] = G\nabla^2 U - U\nabla^2 G. \quad (\text{C.3})$$

Si se integra (C.3) sobre un volumen V se tiene

$$\int_V \nabla \cdot [G\nabla U - U\nabla G] dV = \int_V [G\nabla^2 U - U\nabla^2 G] dV. \quad (\text{C.4})$$

Con el teorema de la divergencia de Gauss se obtiene

$$\oint_{\Sigma(V)} \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\sigma = \int_V [G\nabla^2 U - U\nabla^2 G] dV, \quad (\text{C.5})$$

donde $d\sigma$ es un elemento diferencial de superficie sobre la superficie $\Sigma(V)$ que encierra el volumen V y $\frac{\partial}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla$ denota la derivada en la dirección saliente a la superficie Σ , dada por el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$.

FUNCIONAMIENTO DEL CONTADOR DE FOTONES INDIVIDUALES

D.1 CONTADOR DE FOTONES INDIVIDUALES

D.1.1 Principio operacional.

Un fotodiodo de avalancha (APD por sus siglas en inglés) es un dispositivo que tiene como función detectar fotones con la ayuda de un material semiconductor. Este tipo de detectores se caracteriza por estar polarizado en inversa y porque su ganancia es proporcional al voltaje de polarización aplicado. Sin embargo, si se desean ganancias muy grandes, el voltaje de polarización en inversa puede configurarse por encima del voltaje de ruptura del semiconductor, desencadenando con la llegada de un fotón una corriente tan grande que debe ser reducida rápidamente para no quemar el detector. Cuando el APD funciona con un voltaje de polarización más alto que el voltaje de ruptura, se conoce como diodo de avalancha de fotones individuales (SPAD por sus siglas en inglés) y se dice que el detector está trabajando en modo Geiger (una analogía con los detectores de partícula Geiger) [6]. Los SPAD son detectores especializados en la detección de luz a muy baja intensidad por lo que son muy utilizados en experimentos de óptica cuántica.

Actualmente muchos sistemas de detección de fotones están unidos a un sistema encargado de llevar la cuenta de los fotones que detecta, de hecho en la parte experimental de este trabajo, se utiliza un módulo de conteo de fotones individuales que está constituido precisamente por un SPAD de Silicio y un sistema electrónico que se encarga del proceso de conteo de fotones [5]. Que el semiconductor del SPAD sea de Silicio se debe a la sensibilidad de este elemento en el rango visible del espectro electromagnético [6, 45], por otro lado, si se necesita detectar fotones en el rango infrarrojo, lo mejor sería que el SPAD este provisto con un semiconductor de InGaAs.

En cuanto al funcionamiento del módulo de conteo de fotones individuales utilizado en este

trabajo, el SPAD se encuentra en un estado metaestable (un estado en el que espera una perturbación externa que lo saque de su estado de débil equilibrio) hasta que llegue un fotón a la zona de detección (unión p-n del semiconductor) que le dé la suficiente energía a un electrón para pasar de la banda de valencia a la banda de conducción. El electrón es acelerado por el campo eléctrico tan grande que hay en la unión p-n y con esto se genera una avalancha que incrementa muy rápidamente con el tiempo, la cual debe ser disminuida antes de que se dañe el SPAD. Para apagar dicha avalancha, se utiliza un **circuito de extinción** que cumple dos funciones importantes; la primera es disminuir el voltaje de polarización hasta un valor más bajo que el voltaje de ruptura y la segunda, restaurar el voltaje de polarización al voltaje por encima del voltaje de ruptura, con el fin de dejar el SPAD de nuevo en un estado metaestable listo para detectar el siguiente fotón. Este ciclo que realiza el circuito de extinción dura aproximadamente $45[ns]$, tiempo conocido como **tiempo muerto** ya que en este no se puede generar ninguna avalancha. En la figura 41 se observa el proceso interno que se lleva a cabo en el detector. El ciclo completo se puede observar gráficamente en la figura 42. Las avalanchas no solo pueden ser producidas por un fotón incidente, efectos de temperatura

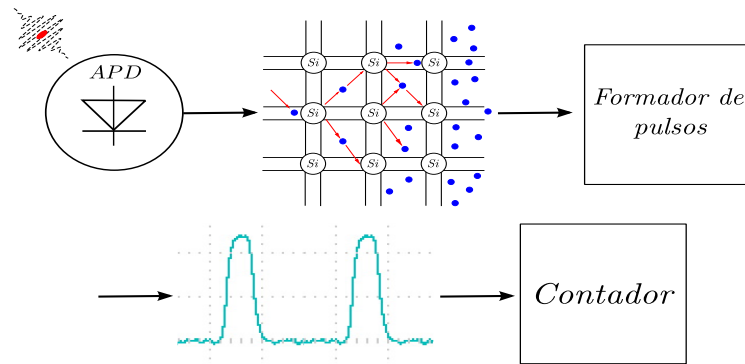


Figura 41: Proceso interno del contador de fotones.

pueden darle a un electrón la energía suficiente para que salte a la banda de conducción y produzca una avalancha. Los conteos registrados por efectos de temperatura son conocidos como **conteos oscuros** y los fabricantes dan una estimación de la cantidad de conteos oscuros producidos por segundo en la ficha técnica de cada detector. Por ejemplo, el detector utilizado en este trabajo tiene en promedio 150 conteos oscuros por segundos y un tope máximo de 200 conteos oscuros por segundo. Es intuitivo pensar que una disminución en la temperatura del detector produce una menor cantidad de conteos oscuros. Por esta razón, el módulo de conteo de fotones individuales está provisto de un **elemento Peltier** capaz de mantener la temperatura del detector por debajo de la temperatura ambiente y de un ventilador que ayuda a estabilizar dicha temperatura.

Hay una tercera forma de producir una avalancha debida al fenómeno conocido como (**after-pulsing**). Este fenómeno es el desencadenamiento de una avalancha que está correlacionada en el tiempo con una avalancha debida a un fotón, es decir, cuando se produce una avalancha ocasionada por un fotón, hay una cierta probabilidad de que un electrón quede atrapado en un estado entre la banda de valencia y la banda de conducción y un poco después este electrón se libere y llegue a la banda de conducción para producir una nueva avalancha. Para disminuir

este problema, el detector trae incorporado una opción conocida como **Pulse Blind Time** la cual configura un intervalo de tiempo que inicia después de una avalancha y durante este tiempo no se tendrá en cuenta ningún pulso generado.

Por último, el módulo de conteo tiene incorporado un circuito formador de pulsos encargado de darle una forma rectangular al pulso y de disminuir el ancho de la señal aproximadamente a $14[n\text{s}]$ para que dicho pulso no se solape con los pulsos siguientes o anteriores. Cuando ya los pulsos están bien definidos, estos se dirigen al circuito encargado del conteo el cual está diseñado para contar hasta 2,147,483,647 fotones; si dicha cuenta es superada, el software muestra una advertencia de desbordamiento.

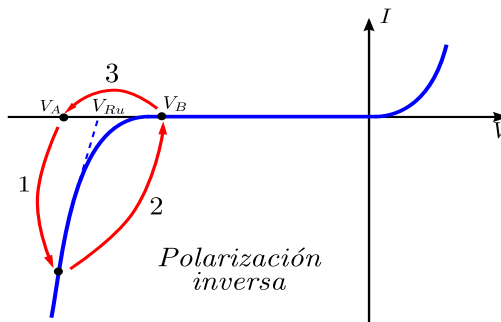


Figura 42: Ciclo del contador de fotones.

D.1.2 Elemento Peltier.

Un elemento Peltier es aquel elemento que tiene como función transportar calor desde un punto a otro como respuesta a una corriente que circula por él. Este tipo de elementos se basan en el fenómeno físico conocido como efecto Peltier que se descubrió en 1834 por Jean Peltier. Este efecto establece que al pasar una corriente por un circuito compuesto de materiales diferentes, se producirá una diferencia de temperatura en la unión de estos materiales siempre y cuando al inicio las uniones estén a la misma temperatura [46].

A nivel microscópico, el efecto Peltier se puede explicar de la siguiente forma: cuando se hacen circular electrones (corriente) por un conductor, la naturaleza de dicho conductor determina con qué facilidad se puede liberar un electrón del material. Que se necesite mucha energía para liberar un electrón implica que dicho electrón posee una energía muy pequeña dentro del material. Pero si el electrón se libera con poca energía, su energía en el material es grande. Si suponemos que un circuito está formado por dos conductores diferentes unidos en dos puntos, y por este se hace circular una corriente, justo en las dos uniones ocurre algo interesante. En una de las uniones los electrones pasarán de un material en el cual tienen menor resistencia al movimiento a otra en donde la resistencia del movimiento es mayor y con esto los electrones se mueven más despacio. Si los electrones disminuyen su velocidad en esta unión, la temperatura (que está relacionada con la energía cinética de las partículas) también disminuirá y la unión se enfriará. El proceso inverso sucede en la otra unión y esta se calentará. En otras palabras, se

generó un gradiente de temperatura al hacer pasar una corriente por dos conductores unidos.

Un elemento Peltier se puede utilizar como un sistema de refrigeración o como un sistema de calefacción. A pesar de esto, refrigeradores utilizando este principio poco eficientes y esta es la razón por la cual no se hacen neveras basadas en el efecto Peltier. Que el proceso de transferencia de calor sea más eficiente o no en un elemento Peltier, depende entre otras cosas de parámetros como la temperatura ambiente y los materiales utilizados. Este tipo de elementos tiene la ventaja de no utilizar elementos mecánicos, de no utilizar líquidos refrigerantes, y de poderse crear con pequeñas dimensiones.

Para el detector utilizado en este trabajo, el elemento Peltier incorporado cumple la función de estabilizar la temperatura y mantenerla por debajo de la temperatura ambiente.

D.1.3 Eficiencia de la fotodetección.

No todo fotón que llegue al área de detección y logre enviar un electrón a la banda de conducción puede generar una avalancha y posteriormente registrar una cuenta. Hay cierta probabilidad de que el electrón no sea lo suficientemente acelerado para iniciar una avalancha. De hecho, mientras más alto es el voltaje de polarización por encima del voltaje de ruptura, el campo eléctrico en la unión p-n es más grande y las probabilidades de que se produzca una avalancha incrementan. De acuerdo con esto, la eficiencia cuántica de un detector es la probabilidad de que un fotón sea registrado cuando golpee el área activa del detector. Diferentes trabajos han encontrado una relación lineal entre la eficiencia de un detector y el voltaje de polarización [6]. Sin embargo, esta relación solo funciona hasta un cierto voltaje a partir del cual la relación ya no es lineal. En la práctica se ha logrado obtener detectores con eficiencia del 95 % pero bajo condiciones muy extremas como por ejemplo temperaturas cercanas al cero de la escala absoluta.

En cuanto al detector utilizado en este trabajo, la eficiencia máxima es de 35 % a una longitud de onda de 500[nm]. En la figura 43 se observa la curva de la eficiencia del detector en función de la longitud de onda de la luz incidente.

D.1.4 Tasa de conteos oscuros.

En un semiconductor la banda de conducción y la banda de valencia no se solapan como en un conductor, pero tampoco están tan separadas como en un aislador. En un semiconductor, un efecto externo que le dé la suficiente energía a un electrón en la banda de valencia, puede lograr que salte a la banda de conducción y con esto se produce un par electrón-hueco que tiene una probabilidad de generar una avalancha (figura 44). Esta energía puede ser proporcionada ya sea por un fotón o por energía térmica. Las avalanchas producidas por energía térmica y que además generan una cuenta se conocen como conteos oscuros. Es evidente que estos conteos se deben reducir al máximo ya que ocasionan errores en las medidas del número de fotones que llega al detector. Con incrementos en la temperatura, incrementa la tasa de conteos oscuros y por esto mantener una temperatura baja en el detector es indispensable en experimentos de óptica cuántica. Por otro lado, si el campo eléctrico en la unión p-n incrementa, se incrementa

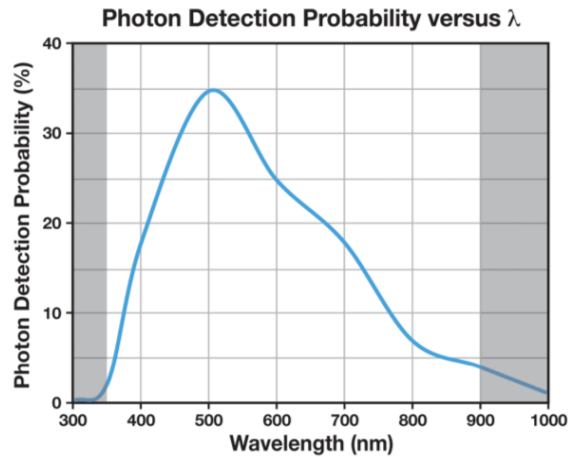


Figura 43: Curva de eficiencia del SPCM utilizado en este trabajo. Imagen tomada de [5]

la probabilidad de que un par electrón-hueco produzca una avalancha y con esto incrementa la tasa de conteos oscuros. Por esta razón, en este tipo de detectores hay una limitante entre incrementar la eficiencia cuántica o disminuir la tasa de conteos oscuros.

Respecto al detector utilizado en este trabajo, el módulo de conteo tiene incorporado un elemento Peltier que regula la temperatura, lo que hace que los conteos oscuros se mantengan aproximadamente en 150 conteos por segundo y que no superan los 200 conteos por segundo.

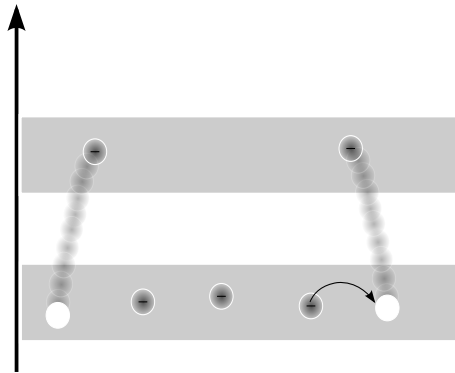


Figura 44: Avalancha producida por energía térmica.

D.1.5 Circuito de extinción.

Cuando un electrón desencadena una avalancha, esta crece rápidamente aumentando el riesgo de dañar el SPAD. El circuito de extinción es un circuito electrónico con el que vienen provistos

los APD que trabajan en modo Geiger y que tienen como función primordial apagar lo más rápido posible la avalancha producida en el SPAD.

Este circuito debe cumplir ciertas funciones importantes en el SPAD. En primer lugar, se debe disminuir el voltaje de polarización a un voltaje que esté por debajo del voltaje de ruptura y con esto disminuir la avalancha. En segundo lugar, deberá ser capaz de restaurar el voltaje de polarización al valor que tenía antes de que se desencadenara la avalancha para que quede de nuevo en un estado metaestable. Sin embargo, el circuito debe hacer todo este proceso en el menor tiempo posible porque durante este tiempo ningún otro fotón puede ser detectado (tiempo muerto). Por esta razón, los investigadores intentan mejorar los circuitos de extinción disminuyendo el tiempo muerto y con esto aumentando la frecuencia de conteo del detector. Como ya se había mencionado anteriormente, el tiempo muerto del módulo de conteo utilizado en este trabajo es de $45[ns]$, con lo cual se logra contar un número máximo de fotones por segundo de:

$$N = \frac{1[s]}{42 * 10^{-9}[s/conteo]} \approx 220 * 10^6[conteos], \quad (D.1)$$

o escrito de otra forma, la frecuencia máxima de conteo viene siendo $220[MHz]$.

D.1.6 Afterpulsing probability.

Un tercer efecto que puede causar una avalancha y al igual que los conteos oscuros incrementar el ruido en las medidas es el Afterpulsing probability. Este efecto ocurre porque existe cierta probabilidad de que algunos portadores de carga no alcancen a llegar a la banda de conducción cuando comienza la avalancha, sino que se quedan atrapados en un estado intermedio entre la banda de valencia y la banda de conducción (figura 45). Cuando son liberados de dichos estados intermedios, pueden generar una avalancha que está correlacionada en el tiempo con la avalancha producida inicialmente. Como es de esperarse, en la actualidad se apunta a disminuir este (Afterpulsing probability) y con esto disminuir el ruido en las cuentas registradas. El módulo de conteo utilizado en este trabajo tiene un 3% de probabilidad de producir un (afterpulsing), pero el módulo incluye una opción llamada (Pulse Blind Time) que al ser activada, se encarga de configurar un pequeño lapso de tiempo justo después de una avalancha, en el cual no tome como válida ninguna avalancha producida.

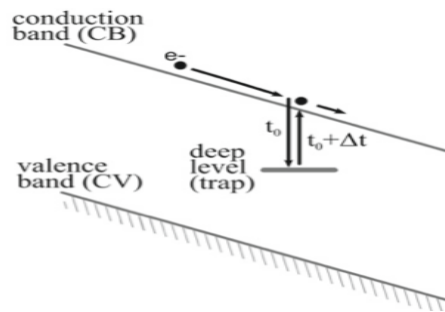


Figura 45: Electrón atrapado entre la banda de conducción y la banda de valencia. Imagen tomada de [6].

D.1.7 Modos de operación.

El módulo de conteo de fotones utilizado en este trabajo puede funcionar de diferentes formas o modos de operación de acuerdo a la forma como se quiera medir. Este módulo puede operar de cinco modos diferentes: modo manual, Free running timed counter, Externally triggered timed counter, Externally triggered counter, External gating [5].

- Modo manual.** Se conoce como modo manual, porque el módulo comienza a contar o deja de contar cuando el botón de encendido y apagado se oprime en el software, es decir, el funcionamiento del módulo se hace manualmente. Cuando se enciende el módulo, el sistema comienza a contar las avalanchas que le llegan hasta que se apague el módulo manualmente. En este modo de operación, la única función de más que se puede configurar es el Pulse Blind Time para evitar cuentas por afterpulsing.
- Free running timed counter.** Un bin es un intervalo de tiempo durante el cual se activa el módulo de conteo para registrar señales incidentes. En el modo Free running timed counter, se configura en el software el tiempo de cada bin y el tiempo entre BINS, es decir, un tiempo durante el cual no se registran cuentas. El proceso que inicia y finaliza un bin está gobernado por un reloj interno incluido en el sistema. No obstante, el comienzo y el final de los bins en conjunto se deben dar manualmente desde el respectivo botón de encendido en el software. En la figura 46 se observan tres gráficas; en la primera, se representa el botón de encendido y apagado en función del tiempo, en la segunda el comienzo y final de cada bin, y en la tercera se muestra el número de fotones por bin en función del número de cada bin. Este modo de operación es de particular interés si se quiere hacer una estadística de conteo para medidas de un tiempo determinado.

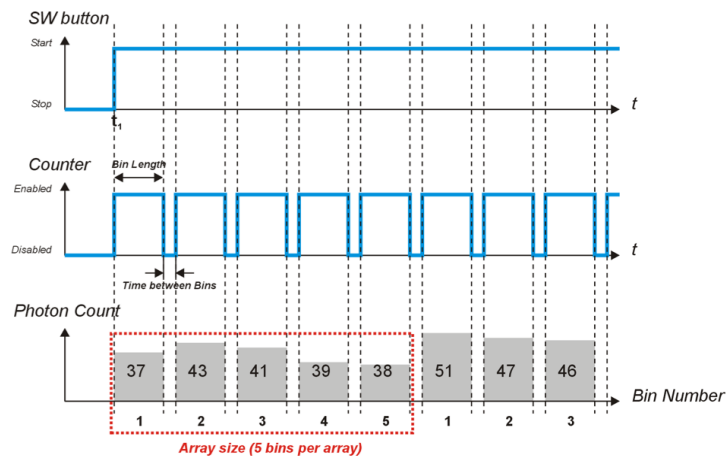


Figura 46: Free running timed counter. Imagen tomada de [5].

- Externally triggered timed counter.** En este modo de operación, una señal externa inicia el reloj interno del módulo y también el BIN. La longitud del BIN depende del tiempo que se haya configurado en el software y el comienzo de un nuevo bin viene regido por la llegada de la siguiente señal externa. Este modo de operar es muy parecido al Free Running Timed con la diferencia de que en este el bin se inicia por la llegada de

la señal externa mientras en el Free Running Timed el comienzo del BIN se da por el comienzo del reloj interno del módulo de conteo. La figura 47 muestra el funcionamiento del botón de encendido y apagado, la señal externa, el comportamiento de los bins y el número de bins en función del tiempo.

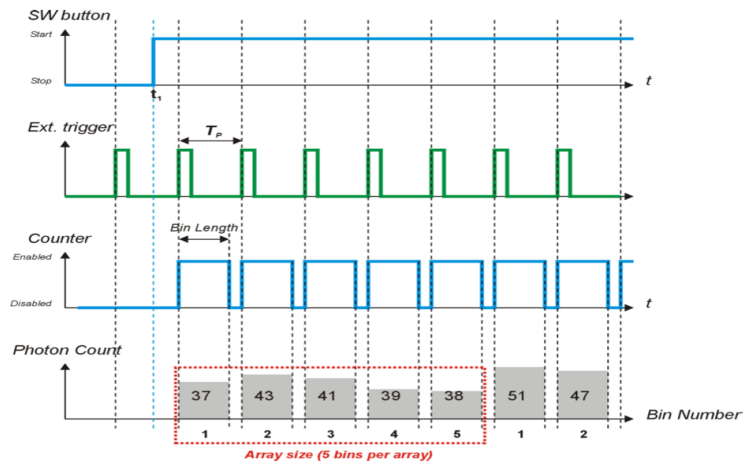


Figura 47: Externally triggered timed counter. Imagen tomada de [5].

- Externally triggered counter.** Un external trigger es una señal externa que se puede introducir al módulo de conteo de tal forma que le dé inicio y final a cada bin, en otras palabras, la longitud del bin ya no va a estar dada por el reloj interno del módulo sino por la señal externa. Cuando la primera señal externa llega, comienza el bin y cuando llega la segunda, el bin finaliza.

Por ejemplo, en la figura 48 se observan cuatro gráficas que representan el funcionamiento de este modo de operación. En la primera gráfica al igual que en el modo anterior muestra el botón de inicio en función del tiempo. En la segunda se observa la señal externa periódica en función del tiempo, la tercera muestra las longitudes de los bins y los tiempos entre bins y la cuarta el número de conteos registrados por bin. Se observa que a la llegada de una señal externa comienza un bin y a la llegada de la siguiente señal externa finaliza el bin.

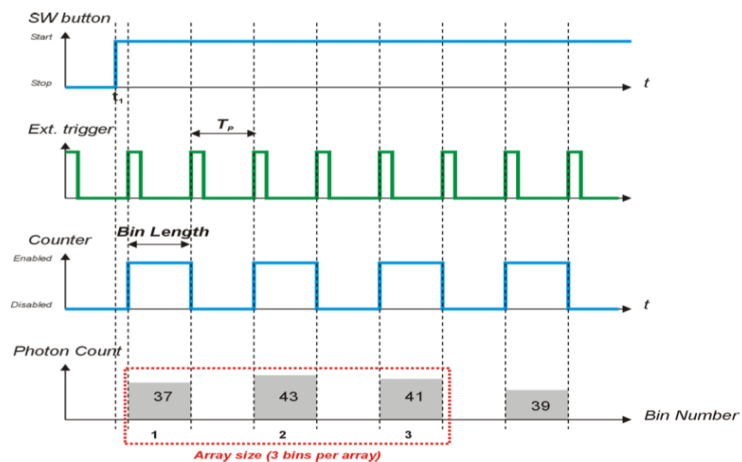


Figura 48: Externally triggered counter. Imagen tomada de [5].

- External gating.** En los anteriores modos de operación el APD estaba siempre polarizado más allá del voltaje de ruptura esperando la llegada de una perturbación que los sacara de su estado metaestable. Pero en este modo de operación conocido como External gating, el APD no siempre está polarizado más allá del voltaje de ruptura ya que la señal externa es la encargada de controlar la polarización del APD. Cuando la señal externa llega, de inmediato se polariza el APD con el voltaje más allá del voltaje de ruptura y con esto un BIN es iniciado para que registre cuentas hasta que la señal externa termine y con esto termine la polarización del APD y el BIN. En la figura 49 se puede ver el funcionamiento de este modo de operación.

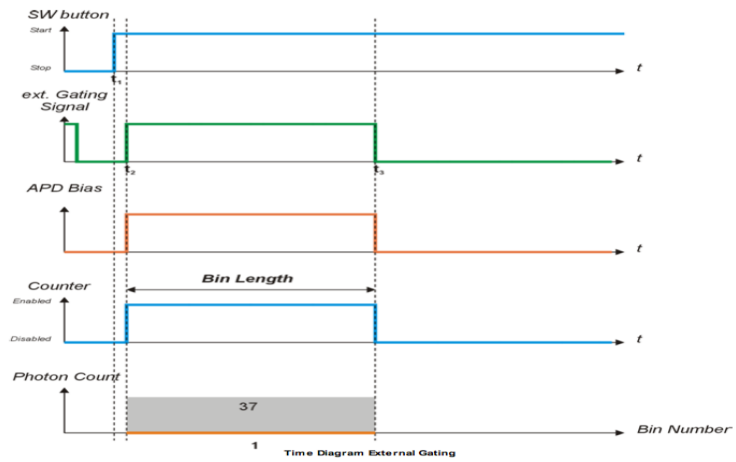


Figura 49: External gating. Imagen tomada de [5].

Referencias

- [1] T.L. Dimitrova. Swiss physical Society A. Weis. Wave-particle duality of light for the classroom. URL: <http://www.sps.ch/artikel/progresses/wave-particle-duality-of-light-for-the-classroom-13/>, 2009.
- [2] C. Gerry and P. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005.
- [3] Elkin Andrés Santos Suarez. *Estudio del fenómeno ondulatorio electromagnético como el límite clásico de la propagación de fotones*. Tesis, Universidad Industrial de Santander, 2014.
- [4] J.W. Goodman. *Introduction to Fourier optics*. McGraw-Hill physical and quantum electronics series. Robert & Company, 2 edition, 2005.
- [5] Thorlabs. *Single Photon Counting Module-Manual*. Thorlabs, 2011.
- [6] Jingyun Fan Joshua C. Bienfang Alan Migdall, Sergey V. Polyakov. *Single-photon generation and detection*. Elsevier Inc., 2013.
- [7] K.M. Abedin, M.R. Islam, and A.F.M.Y. Haider. Computer simulation of fresnel diffraction from rectangular apertures and obstacles using the fresnel integrals approach. *Optics & Laser Technology*, 39(2):237–246, 2007.
- [8] IJ Cooper, CJR Sheppard, and M Sharma. Numerical integration of diffraction integrals for a circular aperture. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 113(7):293–298, 2002.
- [9] GW Forbes. Validity of the fresnel approximation in the diffraction of collimated beams. *JOSA A*, 13(9):1816–1826, 1996.
- [10] Javier Garcia, David Mas, and Rainer G Dorsch. Fractional-fourier-transform calculation through the fast-fourier-transform algorithm. *Applied optics*, 35(35):7013–7018, 1996.
- [11] Li Junchang and Wu Yanmei. An indirect algorithm of fresnel diffraction. *Optics Communications*, 282(4):455–458, 2009.
- [12] Christophe Kopp and Patrick Meyrueis. Near-field fresnel diffraction: improvement of a numerical propagator. *Optics communications*, 158(1):7–10, 1998.

- [13] Junchang Li, Zujie Peng, and Yunchang Fu. Diffraction transfer function and its calculation of classic diffraction formula. *Optics communications*, 280(2):243–248, 2007.
- [14] David Mas, Javier Garcia, Carlos Ferreira, Luis M Bernardo, and Francisco Marinho. Fast algorithms for free-space diffraction patterns calculation. *Optics Communications*, 164(4):233–245, 1999.
- [15] Maciej Sypek. Light propagation in the fresnel region. new numerical approach. *Optics communications*, 116(1-3):43–48, 1995.
- [16] WG Rees. The validity of the fresnel approximation. *European Journal of Physics*, 8(1):44, 1987.
- [17] WH Southwell. Validity of the fresnel approximation in the near field. *JOSA*, 71(1):7–14, 1981.
- [18] YP Kathuria. Fresnel and far-field diffraction due to an elliptical aperture. *JOSA A*, 2(6):852–857, 1985.
- [19] Samir Mezouari and Andy Robert Harvey. Validity of fresnel and fraunhofer approximations in scalar diffraction. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 5(4):S86, 2003.
- [20] AM Steane and HN Rutt. Diffraction calculations in the near field and the validity of the fresnel approximation. *JOSA A*, 6(12):1809–1814, 1989.
- [21] A. B. Arons and M. B. Peppard. Einstein’s proposal of the photon concept—a translation of the annalen der physik paper of 1905. *American Journal of Physics*, 33(5):367–374, 1965.
- [22] Geoffrey Ingram Taylor. Interference fringes with feeble light. In *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 15, pages 114–115, 1909.
- [23] AJ Dempster and HF Batho. Light quanta and interference. *Physical Review*, 30(5):644, 1927.
- [24] Lo Janossy and Zs Naray. Investigation into interference phenomena at extremely low light intensities by means of a large michelson interferometer. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 9:588–598, 1958.
- [25] Yu P Dontsov and AI Baz. Interference experiments with statistically independent photons. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 25:1, 1967.
- [26] Geo T Reynolds, K Spartalian, and DB Scarl. Interference effects produced by single photons. *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, 61(2):355–364, 1969.
- [27] P Bozec. M. cagnet et g. roger, expériences d’interférence en lumière faible’. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, 269:883–85, 1969.
- [28] P. Pellat-Finet. *Lecciones de óptica de fourier*. Universidad Industrial de Santander, 2004.

-
- [29] Richard Phillips Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 20(2):367, 1948.
- [30] R.P. Feynman and A.R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals: Emended Edition*. Dover Publications, Incorporated, 2012.
- [31] Pierre Pellat-Finet. Fresnel diffraction and the fractional-order fourier transform. *Optics Letters*, 19(18):1388–1390, 1994.
- [32] Pierre Pellat-Finet. *Optique de Fourier: Théorie métaxiale et fractionnaire*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [33] Victor Namias. The fractional order fourier transform and its application to quantum mechanics. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 25(3):241–265, 1980.
- [34] K. Venkatesan Wolfgang Pauli, P. Achuthan. *General principles of quantum mechanics*. Springer.
- [35] A. B. Bhatia P. C. Clemmow D. Gabor A. R. Stokes A. M. Taylor P. A. Wayman W. L. Wilcock Max Born, Emil Wolf. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Cambridge University Press, 7th expanded ed edition, 1999.
- [36] Eugene Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, 3 edition, 2002.
- [37] MATLAB. *version 9.0.0.341360 (R2016a)*. The MathWorks Inc., 2016.
- [38] John Penny George Lindfield. *Numerical Methods, Third Edition: Using MATLAB*. Academic Press, 3 edition, 2012.
- [39] Titus A. Beu. *Introduction to numerical programming: a practical guide for scientists and engineers using Python and C/C++*. Series in computational physics. CRC Press, 2015.
- [40] A Iserles, SP Nørsett, and S Olver. Highly oscillatory quadrature: The story so far. *Numerical mathematics and advanced applications*, pages 97–118, 2006.
- [41] Daan Huybrechs and Sheehan Olver. Highly oscillatory quadrature. *Highly oscillatory problems*, (366):25–50, 2009.
- [42] Sheehan Olver. *Numerical approximation of highly oscillatory integrals*. PhD thesis, University of Cambridge, 2008.
- [43] Sheehan Olver. Moment-free numerical approximation of highly oscillatory integrals with stationary points. *European Journal of Applied Mathematics*, 18(4):435–447, 2007.
- [44] Bjorn Engquist. *Highly oscillatory problems*, volume 366. Cambridge University Press, 2009.
- [45] Hans-A.Bachor and Timothy C. Ralph. *A Guide to Experiments in Quantum optics*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004.
- [46] D.M. Rowe. *CRC Handbook of Thermoelectrics*. CRC-Press, 1 edition, 1995.

BIBLIOGRAFÍA

C. Gerry and P. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005.

Elkin Andrés Santos Suarez. *Estudio del fenómeno ondulatorio electromagnético como el límite clásico de la propagación de fotones*. Tesis, Universidad Industrial de Santander, 2014.

Eugene Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, 3 edition, 2002.

Jingyun Fan Joshua C. Bienfang Alan Migdall, Sergey V. Polyakov. *Single-photon generation and detection*. Elsevier Inc., 2013.

J.W. Goodman. *Introduction to Fourier optics. McGraw-Hill physical and quantum electronics series*. Robert & Company, 2 edition, 2005.

P. Pellat-Finet. *Lecciones de óptica de fourier*. Universidad Industrial de Santander, 2004.

Richard Phillips Feynman. *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*. Reviews of Modern Physics, 20(2):367, 1948.

R.P. Feynman and A.R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals: Emended Edition*. Dover Publications, Incorporated, 2012.

Sheehan Olver. *Numerical approximation of highly oscillatory integrals*. PhD thesis, University of Cambridge, 2008.

Thorlabs. *Single Photon Counting Module-Manual*. Thorlabs, 2011.

WH Southwell. *Validity of the fresnel approximation in the near field*. JOSA, 71(1):7–14, 1981.