

MODELOS RELATIVISTAS DE DISCOS DE POLVO
AXIALMENTE SIMÉTRICOS CON BORDE INTERNO

VIVIANA MARCELA VIÑA CERVANTES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2009

MODELOS RELATIVISTAS DE DISCOS DE POLVO
AXIALMENTE SIMÉTRICOS CON BORDE INTERNO

VIVIANA MARCELA VIÑA CERVANTES

TRABAJO DE GRADO
PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR: GUILLERMO A. GONZÁLEZ V., PH.D.

CODIRECTOR: ANTONIO C. GUTIÉRREZ-PIÑERES, PH.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2009

*A Julio Cervantes,
Porque siempre estarás aquí.*

AGRADECIMIENTOS

A Dios por mi vida y por todo lo que me permite vivir cada día.

A mi mamá por ser mi motor y, mi mejor amiga.

A mi papá, porque a través de él, me he vuelto más fuerte.

A mi hermano por ser mi compañía toda la vida.

A Juanfe por ser mi ejemplo a seguir y por mostrarme lo que es el amor.

A mi abuelito Julio porque aunque hoy no esté, siempre estará en el corazón de mi familia.

A mi familia, por su confianza en mí.

A la familia Pedraza Avella por su apoyo incondicional y por hacerme parte de ellos cuando más lo necesitaba.

A Frank y María C. por cuidar de mi salud y por su amistad.

Al Profesor Guillermo por su paciencia, sus explicaciones y por su forma de guiarme hasta terminar este trabajo.

A Toño y David por ser como mis hermanos, por preocuparse por mí y por hacer de estos últimos semestres, los mejores.

A mis amigos del GIRG, con los que reí muchísimo en medio de todo lo que había por hacer.

A mis niñas, Ini y Ani por ser mis confidentes y alcahuetas de mis locuras.

A Cesar y Martín, porque fue maravilloso compartir clases y jornadas de estudio con ustedes.

A los profes Luis y Umberto por creer en mí y abrirme las puertas para una nueva etapa en mi vida que ya comienza.

Al profesor Pierre Pellat-Finet por su apoyo en la corrección de este texto y por compartir conmigo el Universo \LaTeX .

Nació mi poesía,
Como las madrugadas en mi pueblo
ardientes, puras, y majestuosas;
mis versos, alegres y libres como el viento,
cual astro fugaz del firmamento
en la noche hermosa.
Porque el folclore de mi Valledupar
Donde el amor nace en mil corazones
Se eternizó en el alma del Cesar
Y en la alegría de mil acordeones...

...pero el folclore perdura,
como el arhuaco en la serranía,
Como el río Cesar en lozanía,
con sus aguas puras.
Que bellas melodías
que compone el hombre sin premura
...Que hermosa y grande es la tierra mía.

Fernando Dangond Castro

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN	XI
ABSTRACT	XII
INTRODUCCIÓN	1
1. CONSTRUCCIÓN DEL DISCO	5
1.1. Ecuaciones de Einstein	5
1.2. Soluciones Discoidales	7
2. DISCOS DELGADOS CON BORDE CENTRAL	10
2.1. Condiciones de contorno para discos delgados con borde interno	10
2.2. Coordenadas esferoidales oblatas	11
2.3. Solución de las ecuaciones de Einstein	14
2.4. Comportamiento de las soluciones	18
2.5. Masa de los discos	22
CONCLUSIÓN	26

APÉNDICES	28
A.1. Ecuaciones de Einstein en el vacío en coordenadas esferoidales oblatas	28
A.2. Solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas con condiciones de frontera	30
A.3. Cálculo de la masa de los discos	33
REFERENCIAS	38

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Coordenadas esferoidales oblatas	12
2.2. Densidad superficial de energía $\tilde{\epsilon}_1$ como función de \tilde{r}	20
2.3. Densidad superficial de energía $\tilde{\epsilon}_2$ como función de \tilde{r}	21
2.4. Densidad superficial de energía $\tilde{\epsilon}_3$ como función de \tilde{r}	22

RESUMEN

TÍTULO: MODELOS RELATIVISTAS DE DISCOS DE POLVO AXIALMENTE SIMÉTRICOS CON BORDE INTERNO.*

AUTOR: VIÑA CERVANTES, Viviana Marcela.†

PALABRAS CLAVES: Ecuaciones de Einstein, Discos relativistas.

DESCRIPCIÓN:

Se presenta una familia infinita de nuevas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein en el vacío para espacio-tiempos estáticos axialmente simétricos. Con el fin de encontrar estas soluciones, se introduce el sistema de coordenadas esferoidales oblatas, el cual se adapta naturalmente a la geometría de los discos. Todas las funciones métricas de las soluciones encontradas son calculadas explícitamente y las expresiones obtenidas se escriben de forma sencilla en términos de las coordenadas esferoidales oblatas.

Las soluciones describen una familia infinita de discos de polvo delgados axialmente simétricos con un borde interno central, para los cuales la densidad de energía es positiva y bien comportada en toda la región que comprende el disco, de manera que su tensor energía-momento satisface todas las condiciones de energía. A pesar de que la masa de los discos es infinita, las soluciones son asintóticamente planas y regulares en el eje de simetría. Los respectivos tensores de Riemann son regulares en todas partes, esto se demuestra mediante el cálculo de los escalares de curvatura. Esta constituye la primera familia de soluciones explícitamente integrada que se ha obtenido para este tipo de fuentes.

La principal motivación de este trabajo es que, por la forma de las soluciones, se tiene que pueden ser fácilmente superpuestas con la solución de Schwarzschild, con el fin de solucionar el problema de la superposición de un disco con un agujero negro.

* Trabajo de Grado.

† Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D. Codirector: Antonio C. Gutiérrez-Piñeres., Ph.D.

ABSTRACT

TITLE: RELATIVISTIC STATIC THIN DUST DISKS WITH AN INNER EDGE.*

AUTHOR: VIÑA CERVANTES, Viviana Marcela.†

KEY WORDS: Einstein equations, Relativistic disks.

DESCRIPTION:

An infinite family of new exact solutions of the Einstein vacuum equations for static and axially symmetric spacetimes is presented. In order to find these solutions, we introduced the oblate spheroidal coordinate system, which fits naturally to the geometry of the sources. All the metric functions of the solutions are explicitly computed and the expressions obtained are simply written in terms of oblate spheroidal coordinates.

These solutions describe an infinite family of thin dust axially symmetric disks with a central inner edge, whose energy densities are positive and well behaved throughout the region that includes the disk, in such a way that the energy-momentum tensor is in complete agreement with all the energy conditions. Furthermore, although the total mass of the disks is infinite, the solutions are asymptotically flat and regular in the axis of symmetry. The respective Riemann tensors are regular everywhere as it is shown by computing the curvature scalars. This is the first family of explicitly integrated solutions that has been obtained for such sources.

The main motivation of this work is that, by the way of solutions, can be easily superimposed with the Schwarzschild solution, in order to solve the problem of overlap in a disc with a black hole.

* Degree work.

†Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D. Codirector: Antonio C. Gutiérrez-Piñeres., Ph.D.

INTRODUCCIÓN

El soporte experimental de la existencia de agujeros negros en los núcleos de algunas galaxias es hoy en día abundante; debido a la fuerte evidencia dinámica proveniente del centro de la Vía Láctea, no cabe duda de la relevancia del estudio de sistemas binarios compuestos por un disco delgado y un agujero negro (los últimos comentarios acerca de la evidencia observacional son presentados por Celloti, Miller y Sciamia [3] y por Begelman [2]). De acuerdo con esto, una serie de trabajos ha sido desarrollado en los últimos años, con el fin de obtener una mejor comprensión de los diferentes aspectos relacionados con la dinámica de estos sistemas.

Debido a la presencia de un agujero negro, los campos gravitacionales involucrados son tan fuertes, que el marco teórico de trabajo apropiado para estudiar analíticamente estas configuraciones, es proporcionado por la teoría general de la relatividad. Es por esto, que se ha hecho un gran esfuerzo para obtener soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein correspondientes a fuentes discoidales con un agujero negro en el centro (en las referencias [8, 23] se muestra un amplio recuento sobre el tema).

Las soluciones estacionarias axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein, son de gran importancia en astrofísica, ya que describen el exterior de las configuraciones en equilibrio de objetos en rotación. Al mismo tiempo, tales espacio-tiempos son la mejor opción para describir, de forma analítica, los campos gravitacionales de discos alrededor de un agujero negro. De manera que, a través de los años se han obtenido mediante diferentes técnicas, varios ejemplos de soluciones correspondientes a agujeros negros o a fuentes discoidales. Sin embargo, debido al comportamiento no lineal de las ecuaciones de Einstein, las soluciones correspondientes a la superposición de un agujero negro y un disco delgado, no son tan fáciles de obtener y por lo tanto, hasta ahora, se han obtenido muy pocas soluciones estacionarias exactas.

Por otra parte, si se consideran únicamente configuraciones estáticas, el elemento de línea es caracterizado solamente, por dos funciones métricas en el caso axialmente

simétrico. Así que, las ecuaciones de Einstein en el vacío, implican que una de las funciones métricas satisface la ecuación de Laplace, mientras que la otra puede ser obtenida mediante cuadraturas. Además, puesto que las fuentes son discos infinitamente delgados, la materia solo contribuye a manera de condiciones de contorno, para la ecuaciones de Einstein en el vacío. Por lo tanto, como consecuencia de la linealidad de la ecuación de Laplace, las soluciones correspondientes a la superposición de discos delgados y agujero negro pueden, en principio, ser obtenidas.

Sin embargo, si se consideran discos delgados, que se extienden hasta el horizonte de eventos del agujero negro, la materia localizada cerca de este, se moverá a velocidad superlumínica, tal como fué mostrado por Lemos y Letelier [13–15]. Así, con el fin prevenir la aparición de materia taquiónica, los discos delgados deben tener un borde interno, con un radio más grande que el radio fotónico del agujero negro. Entonces, el problema de valores de contorno para la ecuación de Laplace es, matemáticamente, más complicado y por lo tanto, se han obtenido muy pocas soluciones exactas. Este tipo de soluciones fueron estudiadas inicialmente por Lemos y Letelier [14], haciendo una transformación de Kelvin para invertir la familia de discos delgados finitos de Morgan y Morgan, la cual se muestra con detalle en [17]. Ahora, a pesar de que la segunda función métrica de esta solución no puede ser obtenida analíticamente, sus propiedades más importantes fueron analizadas detalladamente en una serie de artículos de Semerák, Žáček y Zellerin [25, 26, 28–31, 36] usando, en varios, casos métodos numéricos.

Así pues, es evidente que la obtención de soluciones exactas, que describan correctamente superficies discoidales delgadas con un borde interno, tienen una clara importancia en el estudio de sistemas binarios que involucran un agujero negro. En efecto, como muestra Semerák [27], las principales propiedades de estos discos anulares, dependen en gran medida de la forma de la densidad de energía. Por lo tanto, es importante obtener nuevas soluciones, de tal manera que sea posible un estudio a fondo de este tipo de sistemas.

Si se logra obtener soluciones explícitamente integradas es posible, en principio, estudiar analíticamente las geodésicas en estos espacio-tiempos, con el fin de lograr una comprensión clara de sus principales aspectos dinámicos. Por otro lado, obtener soluciones estáticas, puede ser considerado como el primer paso para la obtención de soluciones estacionarias más realistas, las cuales se obtienen a partir de métodos bien conocidos de generación de soluciones.

Además de los discos invertidos de Lemos y Letelier, solo se han obtenido otras dos soluciones para discos delgados estáticos con borde interno, la primera la obtuvo Klein, utilizando el método de la transformación de Kelvin [10] y la segunda, Semerák [27], en donde encuentra la densidad de energía como una potencia del radio de Weyl. Por otra parte, Zellerin y Semerák [37] obtuvieron una superposición estacionaria, usando el método de dispersión inversa de Belinskii-Zakharov, pero el análisis de sus propiedades resulta complicado, por el hecho de que las funciones métricas no son calculadas analíticamente. A manera de continuación, Semerák [24] analiza con detalle la solución anteriormente mencionada, usando como semilla la dispersión inversa del primer disco de la familia infinita de discos de Morgan y Morgan, y encuentra que existe un salto en la derivada de la métrica en el plano ecuatorial, indicando la presencia de una “capa de suspensión” que impide al sistema colapsar gravitacionalmente. Por lo tanto, la solución no representa un disco de acreción axialmente simétrico realista, alrededor de un agujero negro. Finalmente, una clase general de soluciones estacionarias fue presentada por Klein [11], usando las técnicas de superficies de Riemann, las cuales se muestran con detalle en la referencia [12].

De acuerdo con las consideraciones anteriores, en este trabajo de grado se presenta, una nueva familia de infinitas soluciones exactas para discos de polvo delgados con un borde interior. Con el fin de encontrar estas soluciones, se introduce un sistema de coordenadas que se adapta naturalmente a la geometría de la fuente, de manera que el problema de valores de contorno para la ecuación de Laplace, se plantea correctamente de forma sencilla. Estas coordenadas, permiten también calcular las funciones métricas explícitamente. Las soluciones obtenidas, describen discos para los cuales la densidad de energía es positiva y bien comportada en todas partes, de manera que su tensor energía-momento satisface todas las condiciones de energía. Ahora, aunque la masa total de los discos resulta infinita, las soluciones son asintóticamente planas y su tensor de Riemann es regular en todas partes, esto se demuestra mediante el cálculo de los escalares de curvatura.

Este trabajo de grado está organizado de la siguiente manera, en el capítulo 1 en la sección 1.1, se formulan las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo estático axialmente simétrico, y en la sección 1.2 se introduce un disco infinitamente delgado como fuente. En esta sección también se plantean las condiciones de contorno apropiadas y su relación con las cantidades más importantes de la fuente. En el capítulo 2 en la sección 2.1 se plantean las condiciones de contorno, de manera que la fuente sea un disco delgado axialmente simétrico con un borde interno. Luego, en la sección 2.2, se

introduce el sistema de coordenadas esferoidales oblatas, las cuales se adaptan naturalmente a la geometría de los discos, y se plantean todas las relaciones anteriormente encontradas ahora en función de estas nuevas coordenadas. Después, en la sección 2.3, se solucionan las ecuaciones de Einstein y se encuentra una familia infinita de discos delgados axialmente simétricos con un borde interno. Luego en la sección 2.4, se analiza el comportamiento de estas soluciones. Más adelante, en la sección 2.5, se calcula la masa de los discos y los escalares de curvatura. Finalmente, se analizan los resultados más importantes del trabajo. Los desarrollos completos de ciertos cálculos, se muestran al final del trabajo en los apéndices.

CAPÍTULO 1

CONSTRUCCIÓN DEL DISCO

1.1 Ecuaciones de Einstein

Con el fin de formular las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo estático axialmente simétrico con un disco delgado como fuente, en primer lugar, se introducen las coordenadas $x^a = (t, \varphi, r, z)$, en las que el tensor métrico g_{ab} sólo depende de r y z . Se supone que estas coordenadas son cuasicilíndricas, en el sentido que la coordenada r es cero en el eje de simetría y, para z fijo, aumenta monótonamente hasta el infinito, mientras que la coordenada z , para r fijo, aumenta monótonamente en el intervalo $(-\infty, \infty)$. El ángulo azimutal ϕ toma valores en el intervalo $[0, 2\pi]$ [18].

Se supone que existe en el espacio un disco muy delgado, de tal manera que las componentes del tensor métrico son funciones simétricas de la coordenada z y que sus primeras derivadas con respecto a z presentan una discontinuidad finita en la hipersuperficie $z = 0$. De este modo,

$$g_{ab}(r, z) = g_{ab}(r, -z), \quad (1.1)$$

de manera que, para $z \neq 0$,

$$g_{ab,z}(r, z) = -g_{ab,z}(r, -z). \quad (1.2)$$

El tensor métrico es continuo en $z = 0$,

$$[g_{ab}] = g_{ab}\Big|_{z=0^+} - g_{ab}\Big|_{z=0^-}, \quad (1.3)$$

Las discontinuidades de las derivadas del tensor métrico se escriben como

$$\gamma_{ab} = [g_{ab,z}] = 2g_{ab,z} \Big|_{z=0^+}, \quad (1.4)$$

donde se ha utilizado la antisimetría de reflexión con respecto al plano $z = 0$.

Utilizando la aproximación de distribución [16, 19, 33] o las condiciones de juntura sobre la curvatura extrínseca de cascarones delgados [6, 7, 20], la métrica se escribe

$$g_{ab} = g_{ab}^+ \theta(z) + g_{ab}^- \{1 - \theta(z)\}, \quad (1.5)$$

de tal manera que el tensor de Ricci R_{ab} se expresa

$$R_{ab} = R_{ab}^+ \theta(z) + R_{ab}^- \{1 - \theta(z)\} + H_{ab} \delta(z), \quad (1.6)$$

donde $\theta(z)$ es la función de Heaviside y $\delta(z)$ la distribución de Dirac con $z = 0$.

En las relaciones (1.5) y (1.6), g_{ab}^\pm y R_{ab}^\pm son los tensores métrico y de Ricci en las regiones $z \geq 0$ y $z \leq 0$, respectivamente, mientras que

$$H_{ab} = \frac{1}{2} \{ \gamma_a^z \delta_b^z + \gamma_b^z \delta_a^z - \gamma_c^c \delta_a^z \delta_b^z - g^{zz} \gamma_{ab} \}, \quad (1.7)$$

donde todas las cantidades se evalúan en $z = 0^+$.

De acuerdo con la relación (1.6) el tensor de energía-momento T_{ab} se expresa como

$$T_{ab} = T_{ab}^+ \theta(z) + T_{ab}^- \{1 - \theta(z)\} + Q_{ab} \delta(z), \quad (1.8)$$

donde T_{ab}^\pm son los tensores de energía-momento para las regiones $z \geq 0$ y $z \leq 0$ respectivamente, y Q_{ab} corresponde al tensor energía-momento de la fuente.

Como los discos son infinitamente delgados, es pertinente hacer uso del tensor superficial de energía-momento S_{ab} , este se puede obtener mediante la relación dada por

$$S_{ab} = \int Q_{ab} \delta(z) ds_n = \sqrt{g_{zz}} Q_{ab}, \quad (1.9)$$

donde $ds_n = \sqrt{g_{zz}} dz$ es la “medida física” de longitud en dirección normal al plano $z = 0$.

Las ecuaciones de Einstein, en unidades geometrizadas, tales que $c = 8\pi G = 1$, son equivalentes al sistema

$$R_{ab}^\pm - \frac{1}{2} g_{ab} R^\pm = T_{ab}^\pm, \quad (1.10)$$

$$H_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} H = Q_{ab}, \quad (1.11)$$

donde $R^\pm = g^{ab}R_{ab}^\pm$ y $H = g^{ab}H_{ab}$, todas las cantidades son evaluadas en $z = 0^+$. A partir de las identidades Bianchi, se obtienen las leyes de conservación

$$T_{\pm;b}^{ab} = 0, \quad (1.12)$$

$$Q^{ab}{}_{;b} + [T^{az}] = 0, \quad (1.13)$$

y la condición $Q^{az} = 0$.

1.2 Soluciones Discoidales

Dado que el disco delgado es la única fuente de campo gravitacional, para el resto del espacio se tiene que $T_{ab}^\pm = 0$, de esta forma la ecuación (1.10) se reduce a las ecuaciones de Einstein en el vacío

$$R_{ab}^\pm = 0, \quad (1.14)$$

para las regiones $z \geq 0$ y $z \leq 0$ respectivamente.

Con el fin de obtener las soluciones que correspondan a fuentes discoidales delgadas, se resuelve el sistema (1.14) utilizando la ecuación (1.11) como condiciones de contorno. Una determinada forma de Q_{ab} describe las propiedades de la materia que contiene el disco.

Para determinar la forma general de las ecuaciones de Einstein en el vacío y las condiciones de contorno, se usa el tensor métrico dado por el elemento de línea de Weyl [32]:

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{-2\Phi}[r^2d\varphi^2 + e^{2\Lambda}(dr^2 + dz^2)], \quad (1.15)$$

donde Φ y Λ son funciones continuas de r y z . Además, se asumirá que Φ y Λ son funciones pares de z ,

$$\Phi(r, -z) = \Phi(r, z), \quad (1.16a)$$

$$\Lambda(r, -z) = \Lambda(r, z), \quad (1.16b)$$

de tal forma que sus primeras derivadas con respecto a z son funciones impares,

$$\Phi_{,z}(r, -z) = -\Phi_{,z}(r, z), \quad (1.17a)$$

$$\Lambda_{,z}(r, -z) = -\Lambda_{,z}(r, z), \quad (1.17b)$$

para las cuales se requerirá que no se anulen en $z = 0$.

Las ecuaciones de Einstein en el vacío (1.14), para la métrica (1.15), en coordenadas cuasicilíndricas $x^a = (t, \varphi, r, z)$, son equivalentes al sistema

$$(r\Phi_{,r})_{,r} + (r\Phi_{,z})_{,z} = 0, \quad (1.18a)$$

$$\Lambda_{,r} = r(\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2), \quad (1.18b)$$

$$\Lambda_{,z} = 2r\Phi_{,r}\Phi_{,z}, \quad (1.18c)$$

conocido también como Ecuaciones de Weyl, en donde (1.18a) es la ecuación de Laplace usual para una fuente simétrica en coordenadas cilíndricas, mientras que la condición de integrabilidad para el sistema acoplado (1.18b)- (1.18c), es garantizada cuando Φ es una solución de (1.18a), para la cual Λ puede ser obtenida por cuadraturas.

Por otra parte, la ecuación (1.11) implica que las condiciones de frontera se reducen a

$$Q_t^t = 2e^{2(\Phi-\Lambda)}[\Lambda_{,z} - 2\Phi_{,z}], \quad (1.19a)$$

$$Q_\varphi^\varphi = 2e^{2(\Phi-\Lambda)}\Lambda_{,z}, \quad (1.19b)$$

en donde todas las cantidades se evalúan en $z = 0^+$. Como consecuencia, el tensor superficial energía-momento S_{ab} debe tener solo dos componentes diferentes de cero.

Con el fin de analizar las características de S_{ab} , es conveniente expresar éstas en términos de una tétrada ortonormal. En este caso, se usará la tétrada del “Observador Localmente estático” (LSO) [9], u observador en reposo con respecto al infinito, la cual está dada por $e_{(a)}^b = \{V^b, W^b, X^b, Y^b\}$, donde

$$V^a = e^{-\Phi}\delta_t^a, \quad (1.20a)$$

$$W^a = \frac{e^\Phi}{r}\delta_\varphi^a, \quad (1.20b)$$

$$X^a = e^{\Phi-\Lambda}\delta_r^a, \quad (1.20c)$$

$$Y^a = e^{\Phi-\Lambda}\delta_z^a, \quad (1.20d)$$

donde δ_j^i corresponde a la delta de Kronecker. En términos de la tétrada (1.20), el tensor superficial de energía-momento S_{ab} se escribe de la forma canónica

$$S_{ab} = \epsilon V_a V_b + p W_a W_b, \quad (1.21)$$

donde ϵ y p son, la densidad de energía y la presión azimutal del disco respectivamente.

La relación (1.21) permite conocer la forma de la densidad de energía y la presión en el disco. Además, de esta misma relación, se tiene que la densidad superficial de masa del disco se reduce a

$$\mu = \epsilon + p. \quad (1.22)$$

De las anteriores expresiones, se tiene que la forma general del tensor energía-momento que es compatible con el elemento de línea (1.15) y las condiciones de frontera (1.11), corresponde a una superficie discoidal delgada que sólo tiene densidad de energía y presión azimutal.

De acuerdo con esto, en lugar de dar condiciones específicas para la densidad de energía y para la presión azimutal, las ecuaciones de Einstein se resolverán exigiendo solamente, que estas dos cantidades sean diferentes de cero en la superficie de un disco con borde interno. Y, una vez obtenida la solución, esta puede ser utilizada para obtener, a partir de las condiciones de frontera, las expresiones correspondientes para la densidad de energía y la presión azimutal. De esta forma, la solución corresponderá al disco estático con borde interno más general, que puede ser obtenido resolviendo de forma exacta las ecuaciones de Einstein.

En términos de la densidad de energía y la presión azimutal, las condiciones de frontera se escriben

$$2e^{2(\Phi-\Lambda)}[2\Phi_{,z} - \Lambda_{,z}] = \epsilon, \quad (1.23a)$$

$$2e^{2(\Phi-\Lambda)}\Lambda_{,z} = p. \quad (1.23b)$$

Y, usando la relación (1.18c) estas condiciones se expresan como

$$4e^{2(\Phi-\Lambda)}[1 - r\Phi_{,r}]\Phi_{,z} = \epsilon, \quad (1.24a)$$

$$4e^{2(\Phi-\Lambda)}r\Phi_{,r}\Phi_{,z} = p. \quad (1.24b)$$

Reemplazando el sistema (1.24) en la ecuación 1.22, se obtiene

$$4e^{\Phi-\Lambda}\Phi_{,z} = \mu, \quad (1.25)$$

donde, nuevamente, todas las cantidades son evaluadas en $z = 0^+$.

CAPÍTULO 2

DISCOS DELGADOS CON BORDE CENTRAL

2.1 Condiciones de contorno para discos delgados con borde interno

Para obtener una solución que represente un disco delgado localizado en la hipersuperficie $z = 0$ con un borde interno central de radio a es necesario imponer que

$$\Phi_{,z}(r, 0^+) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq r \leq a, \\ f(r) & ; r \geq a, \end{cases} \quad (2.1)$$

con $f(r)$ una función arbitraria. Sólo después de encontrar la solución más general, se impondrán condiciones adicionales para obtener un comportamiento físico razonable. La primera de estas condiciones consiste en que el espacio-tiempo debe ser asintóticamente plano, para esto se requiere que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Phi(r, z) = 0, \quad (2.2a)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Lambda(r, z) = 0, \quad (2.2b)$$

donde $R^2 = r^2 + z^2$. Para obtener un comportamiento regular en el eje de simetría es necesario que

$$\Phi(0, z) < \infty, \quad (2.3a)$$

$$\Lambda(0, z) = 0. \quad (2.3b)$$

Para garantizar en (1.24) que la densidad de energía y la presión azimutal sean positivas en todas partes se impone que

$$f(r) \geq 0, \quad (2.4a)$$

$$0 \leq r\Phi_{,r} \leq 1. \quad (2.4b)$$

2.2 Coordenadas esferoidales oblatas

Con el fin de resolver las ecuaciones de Einstein en el vacío, primero se debe resolver el problema de valores de contorno para Φ . Sin embargo, debido a la naturaleza de las condiciones de contorno de (1.17a) y (1.17b), es conveniente trabajar con un sistema de coordenadas que se adapte naturalmente a la geometría de la fuente deseada y de esta forma el problema se reduzca a un problema de condiciones de contorno.

De acuerdo con lo anterior se introduce el sistema de coordenadas esferoidales oblatas, definidas a través de las siguientes relaciones

$$r^2 = a^2(1+x^2)(1-y^2), \quad (2.5a)$$

$$z = axy, \quad (2.5b)$$

de manera que

$$x^2 = \frac{\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}+(r^2+z^2-a^2)}{2a^2}, \quad (2.6a)$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}-(r^2+z^2-a^2)}{2a^2}. \quad (2.6b)$$

La anterior transformación implica una correspondencia de un punto en el plano (r, z) a cuatro puntos en el plano (x, y) . Con el fin de obtener una correspondencia de uno a uno en todo el plano (r, z) , se deben restringir correctamente los rangos en las coordenadas esferoidales oblatas. Existen cuatro posibles opciones de los rangos de (x, y) que conducen a una correspondencia uno a uno. Se tomarán los intervalos como $0 \leq x < \infty$ y $-1 \leq y \leq 1$ de tal manera que $0 \leq r \leq a$ con $z = 0^+$ se encuentra dentro del intervalo $x = 0, 0 \leq y \leq 1$, mientras que $0 \leq r \leq a$ con $z = 0^-$ se encuentra dentro del intervalo $x = 0, -1 \leq y \leq 0$. Es decir, se tiene una línea de corte en el intervalo $0 \leq r \leq a$. Por consiguiente, como y cambia de signo al atravesar esta línea de corte, pero conserva su

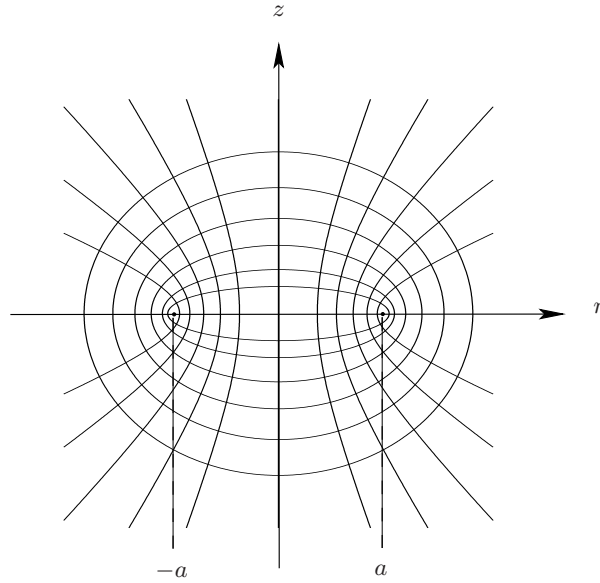


Figura 2.1: Coordenadas esferoidales oblatas. Las elipses corresponden a valores constantes de x y las hipérbolas a valores constantes de y .

valor absoluto, esta coordenada presenta una discontinuidad finita cuando $x = 0$, mientras que la coordenada x es continua en todas partes. Por lo tanto, una función par de y es una función continua en todas partes, pero tiene una derivada normal discontinua en $x = 0$. El mismo comportamiento ocurre si se toman los intervalos $-\infty < x \leq 0$ y $-1 \leq y \leq 1$. Cualquiera de estas dos opciones se puede utilizar para describir un disco delgado finito, de radio a , localizado en $z = 0$. Si se toman los intervalos $-\infty < x < \infty$ y $0 \leq y \leq 1$ se obtiene un comportamiento diferente; en este caso, $a \leq r < \infty$ con $z = 0^+$ se encuentra dentro del intervalo $y = 0$, $0 \leq x < \infty$, mientras que $a \leq r < \infty$ con $z = 0^-$ se encuentra en el intervalo $y = 0$, $-\infty < x \leq 0$. De esta forma, la línea de corte estará en el intervalo $a \leq r < \infty$. Como x cambia de signo al atravesar la línea de corte, pero no cambia su valor absoluto, esta coordenada tiene una discontinuidad finita en $y = 0$, mientras que la coordenada y es continua en todas partes. Por lo tanto, una función par de x es una función continua en todas partes pero su derivada normal es discontinua en $y = 0$. El mismo comportamiento ocurre si se toma el intervalo $-\infty < x < \infty$ y $-1 \leq y \leq 0$. Estas dos opciones para los intervalos son adecuadas para describir una fuente discoidal infinita con un borde circular interno de radio a , localizado en $z = 0$. Por consiguiente, se tomaran los intervalos de (x, y) como $-\infty < x < \infty$ y $0 \leq y \leq 1$. Así, cuando $x = 0$ se tiene que $z = 0$ y $0 \leq r \leq a$, mientras que cuando $y = 0$, $z = 0$ y $r \geq a$. La superficie $y = 0$ describe un disco delgado con un borde interno de radio a , mientras que, la superficie $x = 0$ describe un agujero vacío dentro de este borde.

Para que la función métrica $\Phi(x, y)$ sea continua en todas partes, se tomará esta como una función par de x ,

$$\Phi(-x, y) = \Phi(x, y), \quad (2.7)$$

de manera que

$$\Phi_{,x}(-x, y) = -\Phi_{,x}(x, y), \quad (2.8)$$

de esta forma las condiciones (1.16a) y (1.17a) se satisfacen trivialmente.

Para obtener la forma de las relaciones en coordenadas esferoidales oblatas es necesario determinar la forma como están relacionados los diferenciales en este sistema con los diferenciales en coordenadas cilíndricas, de manera que

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy, \quad (2.9a)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad (2.9b)$$

de las relaciones (2.5a) y (2.5b) se tiene que

$$dr = a\sqrt{\frac{1-y^2}{1+x^2}}x dx - a\sqrt{\frac{1+x^2}{1-y^2}}y dy, \quad (2.10a)$$

$$dz = ay dx + ax dy. \quad (2.10b)$$

En coordenadas esferoidales oblatas, el elemento de línea de Weyl (1.15) puede ser escrito como

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + a^2(1+x^2)(1+y^2)e^{-2\Phi} d\varphi^2 + a^2(x^2+y^2)e^{2(\Lambda-\Phi)} \left[\frac{dx^2}{1+x^2} + \frac{dy^2}{1-y^2} \right], \quad (2.11)$$

y las ecuaciones de Einstein en el vacío son ahora

$$[(1+x^2)\Phi_{,x}]_{,x} + [(1-y^2)\Phi_{,y}]_{,y} = 0, \quad (2.12)$$

la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas y el sistema acoplado

$$\Lambda_{,x} = \frac{(1-y^2)}{(x^2+y^2)} [x(1+x^2)\Phi_{,x}^2 - x(1-y^2)\Phi_{,y}^2 - 2y(1+x^2)\Phi_{,x}\Phi_{,y}], \quad (2.13)$$

$$\Lambda_{,y} = \frac{(1+x^2)}{(x^2+y^2)} [y(1+x^2)\Phi_{,x}^2 - y(1-y^2)\Phi_{,y}^2 - 2x(1-y^2)\Phi_{,x}\Phi_{,y}], \quad (2.14)$$

cuya integrabilidad es garantizada por la ecuación (2.12) (ver apéndice A.1.)

Por otra parte, usando las relaciones dadas por (2.5a) y (2.5b) se tiene que

$$\Phi_{,z}(r, 0) = \begin{cases} \Phi_{,x}(0, y)/ay & ; 0 \leq r \leq a, \\ \Phi_{,y}(x, 0)/ax & ; r \geq a. \end{cases} \quad (2.15)$$

Debido a la simetría de reflexión de las soluciones, las condiciones dadas por el sistema (2.1), son equivalentes a

$$\Phi_{,x}(0, y) = 0, \quad (2.16a)$$

$$\Phi_{,y}(x, 0) = F(x); \quad x \geq 0, \quad (2.16b)$$

con $F(x)$ como una función arbitraria par de x .

2.3 Solución de las ecuaciones de Einstein

La solución general de la ecuación (2.12) con las anteriores condiciones de frontera está dada por [1],

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_{2n}P_{2n}(y) + B_{2n}Q_{2n}(y)\}p_{2n}(x), \quad (2.17)$$

donde A_{2n} y B_{2n} son constantes, $P_{2n}(y)$ son los polinómios de Legendre, $Q_{2n}(y)$ las funciones de Legendre de segunda clase y $p_{2n}(x) = i^{-2n}P_{2n}(ix)$.

Todas las soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío para espacio-tiempos estáticos con una fuente axialmente simétrica, como la que se considera en este caso, son obtenidas tomando un caso particular de la función métrica $\Phi(x, y)$ ¹ o combinaciones lineales de estas soluciones.

En términos de las coordenadas esferoidales oblatas, la condición (2.2a) se escribe como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, y) = 0, \quad (2.18)$$

mientras que la condición (2.3a) es

$$\Phi(x, 1) < \infty, \quad (2.19)$$

¹Para ver detalles del cálculo de esta expresión ir a apéndice A.2, p.30

Para los polinómios de Legendre y las funciones de Legendre de segunda clase, se tiene que

$$P_{2n,y}(0) = 0, \quad (2.20)$$

$$Q_{2n,y}(0) = 0. \quad (2.21)$$

De manera que, al derivar (2.17) con respecto a y y evaluar en $y = 0$ se obtiene

$$\Phi_{,y}(x, 0) = \sum_0^{\infty} B_{2n} Q_{2n,y}(0) p_{2n}(x), \quad (2.22)$$

de esta forma, se satisface la condición (2.16b). Los primeros términos de (2.17) son

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & A_0 + B_0 \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+y}{1-y} \right] + A_2 \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \\ & + B_2 \left[\frac{3y^2 - 1}{4} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right) - \frac{3y}{2} \right] \frac{1}{2} (3x^2 + 1) + \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

De esta serie se ve que, cuando x tiene a infinito, $\Phi(x, y)$ también lo hace; este comportamiento no es el deseado para los discos ya que no satisface las condiciones físicas (2.18) y (2.19). Sin embargo, si se hace $A_{2n} = B_{2n} = 0$ para $n \neq 0$, se tiene que la solución es finita para todo valor de $y \neq 1$. De manera que, haciendo $A_0 = 0$, se tiene,

$$\Phi_0(x, y) = B_0 Q_0(y). \quad (2.24)$$

La solución (2.24) es regular para todo $y \neq 1$. Ahora, haciendo $B_0 = \alpha$, con α una constante arbitraria, esta solución se puede escribir como

$$\Phi_0(x, y) = \frac{\alpha}{2} \ln \left[\frac{1+y}{1-y} \right]. \quad (2.25)$$

Mediante la integración de (2.13) y (2.14) se obtiene la otra función métrica

$$\Lambda_0(x, y) = \frac{\alpha^2}{2} \ln \left[\frac{1-y^2}{x^2 + y^2} \right], \quad (2.26)$$

donde una constante de integración se ha tomado como cero.

Como se puede observar, esta solución no es asintóticamente plana ni es regular en el eje de simetría. Sin embargo, utilizando (1.23a) y (1.23b) y las relaciones dadas por (2.5a) y (2.5b) se obtienen las expresiones de la densidad de energía y la presión azimutal

$$\epsilon = (4\alpha/a)x^{\alpha^2-1}, \quad (2.27)$$

$$p = 0, \quad (2.28)$$

de tal forma que, si α toma valores mayores que 0, el disco satisface todas las condiciones de energía [5]. Sin embargo, si α toma valores diferentes de 1, la densidad de energía incrementa sin límite, ya sea en el infinito o en el borde interno del disco, mientras que, para α igual a 1, la densidad de energía es en todas partes constante, entonces, en cualquier caso la masa total del disco será infinita.

A pesar de que la solución anterior no presenta un comportamiento físico aceptable, puede servir como punto de partida para generar nuevas soluciones con mejor comportamiento físico.

Con el fin de obtener soluciones bien comportadas, se consideran las coordenadas esferoidales oblatas no solo como funciones de las coordenadas cilíndricas (r, z) , sino también como dependientes de un parámetro afín a correspondiente al radio del disco,

$$x = x(r, z; a), \quad (2.29a)$$

$$y = y(r, z; a). \quad (2.29b)$$

Por consiguiente, se puede considerar también la función métrica Φ como dependiente de a ,

$$\Phi = \Phi(r, z; a). \quad (2.30)$$

Aprovechando la propiedad de que la derivada respecto a un parámetro afín de una función que es solución de la ecuación de Laplace, es también solución de esta, se puede obtener una familia de nuevas soluciones aplicando la siguiente operación lineal

$$\Phi_{n+1}(r, z; a) = \frac{\partial \Phi_n(r, z; a)}{\partial a}, \quad (2.31)$$

donde n es un entero $n \geq 0$.

Partiendo de la “solución semilla” $\Phi_0(x, y)$, la cual fue calculada anteriormente, se puede generar una familia de nuevas soluciones, las cuales pueden ser escritas de la forma

general

$$\Phi_n(r, z; a) = \Phi_n(x, y) = \frac{\alpha y F_n(x, y)}{a^n (x^2 + y^2)^{2n-1}}, \quad (2.32)$$

para $n \geq 1$, donde $F_n(x, y)$ es una función polinomial, cuyo grado mas alto es $4n - 4$. A continuación se muestran los primeros tres términos,

$$F_1 = 1, \quad (2.33a)$$

$$F_2 = x^4 + 3x^2(1 - y^2) - y^2, \quad (2.33b)$$

$$F_3 = 3x^6(3 - 5y^2) + 5x^4(6y^4 - 11y^2 + 3) - x^2y^2(3y^4 - 31y^2 + 30) - y^4(y^2 - 3), \quad (2.33c)$$

todas las funciones polinomiales $F_n(x, y)$ se pueden calcular fácilmente a partir del término general (2.31).

Calculando el límite cuando x tiende a ∞ , y por otra parte, calculando Φ cuando $y = 1$ se encuentra que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_n(x, y) = 0, \quad (2.34)$$

y que

$$\Phi_n(x, 1) < \infty, \quad (2.35)$$

en total acuerdo con las condiciones (2.2a) y (2.3a).

Con el fin de obtener las correspondientes funciones métricas $\Lambda_n(r, z; a)$, se realiza la integración

$$\Lambda_n(r, z; a) = \Lambda_n(x, y) = \int_1^y \Lambda_{,y}(x, y) dy, \quad (2.36)$$

tomando $\Lambda_n(x, 1) = 0$ para garantizar la regularidad en el eje. Reemplazando el término general para la función métrica $\Phi(x, y)$ dado por (2.32) en la relación (2.14), se obtiene que las soluciones para $\Lambda_n(r, z; a)$ se pueden escribir de la forma

$$\Lambda_n(x, y) = \frac{\alpha^2 (2n - 2)! (y^2 - 1) A_n(x, y)}{4^n a^{2n} (x^2 + y^2)^{4n}}, \quad (2.37)$$

para $n \geq 1$, donde las $A_n(x, y)$ son funciones polinomiales, en las cuales el grado más alto está dado por $8n - 2$. A continuación se muestran los primeros tres términos

$$A_1 = x^4(9y^2 - 1) + 2x^2y^2(y^2 + 3) + y^4(y^2 - 1), \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & 2x^{12}(9y^2 - 1) - 4x^{10}(51y^4 - 41y^2 + 2) \\
& + x^8(735y^6 - 1241y^4 + 419y^2 - 9) - x^6y^2(132y^6 \\
& - 1644y^4 + 1604y^2 - 252) + x^4y^4(84y^6 - 384y^4 \\
& + 1266y^2 - 630) + 4x^2y^6(6y^6 + 6y^4 - 39y^2 + 63) \\
& + 3y^8(y^6 + y^4 + y^2 - 3), \tag{2.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & 3x^{16}(1225y^6 - 1275y^4 + 315y^2 - 9) \\
& - 24x^{14}(980y^8 - 2095y^6 + 1205y^4 - 189y^2 + 3) \\
& + 2x^{12}(24255y^{10} - 89475y^8 + 98472y^6 - 36316y^4 \\
& + 3473y^2 - 25) - 12x^{10}y^2(1835y^{10} - 16665y^8 \\
& + 34716y^6 - 25292y^4 + 6001y^2 - 275) \\
& + 6x^8y^4(900y^{10} - 11946y^8 + 50563y^6 - 69397y^4 \\
& + 33365y^2 - 4125) + 8x^6y^6(125y^{10} + 926y^8 \\
& - 9079y^6 + 24639y^4 - 22290y^2 + 5775) \\
& + 6x^4y^8(55y^{10} + 29y^8 + 764y^6 - 4808y^4 + 8469y^2 \\
& - 4125) + 12x^2y^{10}(5y^{10} + 5y^8 + 80y^4 - 301y^2 \\
& + 275) + y^{12}(5y^{10} + 5y^8 + 5y^6 + y^4 + 34y^2 - 50). \tag{2.40}
\end{aligned}$$

todas las $A_n(x, y)$ se pueden calcular realizando la integral (2.36).

Calculando el límite cuando x tiende a infinito, y evaluando $\Lambda(x, y)$ cuando $y = 1$ se encuentra respectivamente que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Lambda_n(x, y) = 0, \tag{2.41a}$$

$$\Lambda_n(x, 1) = 0, \tag{2.41b}$$

en total acuerdo con las condiciones (2.2b) y (2.3b).

2.4 Comportamiento de las soluciones

Con el fin de analizar el comportamiento físico de la familia de soluciones anteriormente obtenida, se calculará la densidad de energía y la presión azimutal correspondientes a las superficies discoidales. Usando las relaciones (2.5a) y (2.5b), se obtiene que

$$\Phi_{,r}(r, 0) = \left[\frac{\sqrt{1+x^2}}{ax} \right] \Phi_{,x}(x, 0), \quad r \geq a, \tag{2.42}$$

y, usando la relación (2.32), se encuentra

$$\Phi_{n,x}(x, 0) = 0, \quad n \geq 1. \quad (2.43)$$

De acuerdo con esto, la expresión (1.24b) se reduce a

$$p_n = 0. \quad (2.44)$$

Lo que quiere decir que, todos los discos de la familia infinita no presentan presión azimutal, lo cual está en total acuerdo con el comportamiento esperado debido a que son discos de polvo.

Por otra parte, usando las relaciones (2.32) y (2.37) en la ecuación (1.24a), la densidad superficial de energía de los discos se escribe como

$$\epsilon_n(x) = \frac{4\alpha E_n(x)}{a^{n+1}x^{2n+1}} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2(2n-2)!B_n(x)}{2^{2n}a^{2n}x^{4n}} \right\}, \quad (2.45)$$

donde $x \geq 0$ y las $E_n(x)$ son polinomios definidos positivos de grado $2k$, con $k = (n-1)/2$ para n impares y $k = n/2$ para n pares, a continuación se muestran los primeros tres términos,

$$E_1(x) = 1, \quad (2.46a)$$

$$E_2(x) = x^2 + 3, \quad (2.46b)$$

$$E_3(x) = 3(x^2 + 5), \quad (2.46c)$$

todas las funciones polinomiales $E_n(x)$ pueden ser fácilmente calculadas mediante la relación dada por (2.32). A su vez, los $B_n(x)$ son polinómios definidos positivos de grado $4k$, con $k = (n-1)/2$ para n impar y $k = n/2$ para n par, los primeros tres términos se muestran a continuación

$$B_1(x) = 1, \quad (2.47a)$$

$$B_2(x) = 2x^4 + 8x^2 + 9, \quad (2.47b)$$

$$B_3(x) = 27x^4 + 72x^2 + 50, \quad (2.47c)$$

todos los $B_n(x)$ se pueden calcular fácilmente a partir de la relación (2.37).

De las anteriores expresiones se puede observar que, cuando α es mayor que 0, la densidad superficial de energía de los discos es, en todas partes, positiva,

$$\epsilon_n(x) \geq 0, \quad (2.48)$$

y que, debido a que la presión azimutal es cero, se tiene entonces una familia infinita de discos de polvo que satisfacen las condiciones de energía. Por otra parte se tiene que, para cualquier valor de n , se cumple

$$\epsilon_n(0) = 0, \quad (2.49a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \epsilon_n(x) = 0, \quad (2.49b)$$

lo que se interpreta como que, la densidad de energía de los discos es cero en su borde interno y se anula en el infinito. Además, como la presión azimutal de los discos es cero, la densidad de masa de estos se reduce a la densidad de energía,

$$\mu_n(x) = \epsilon_n(x). \quad (2.50)$$

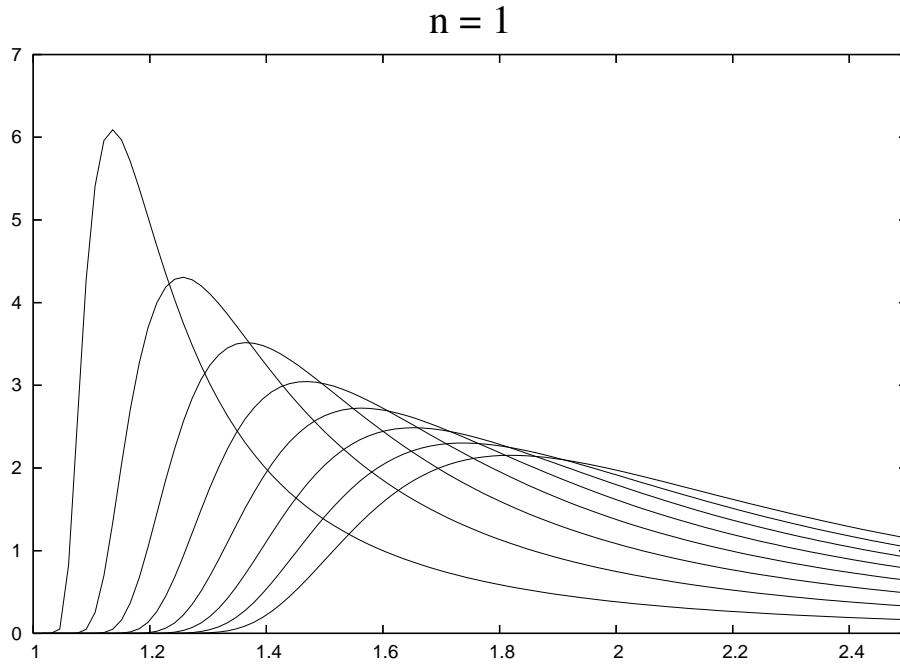


Figura 2.2: Densidad superficial de energía $\tilde{\epsilon}_1$ como función de \tilde{r} .

En las figuras 2.2, 2.3 y 2.4 se graficó las densidades de energía superficial adimensionales $\tilde{\epsilon}_n = a\epsilon_n$ como función de la coordenada adimensional $\tilde{r} = r/a$ para los primeros tres

discos de la familia, donde y con $n = 1, 2, 3$, para diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Para cada valor de n , se toma $\tilde{\alpha}_n = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4$. La primera curva desde la izquierda corresponde a $\tilde{\alpha}_n = 0.5$, mientras que la última curva a $\tilde{\alpha}_n = 4$. Como se puede ver, en todos los casos la densidad superficial de energía es positiva en todas partes, con un máximo cerca del borde interno de los discos y decrece rápidamente a medida que \tilde{r} aumenta. Se puede ver también que, para un valor fijo de n , a medida que el valor de $\tilde{\alpha}_n$ incrementa, el valor del máximo disminuye y se desplaza a un valor mayor de \tilde{r} . El mismo comportamiento se observa para un valor fijo de $\tilde{\alpha}_n$ e incremento de n .

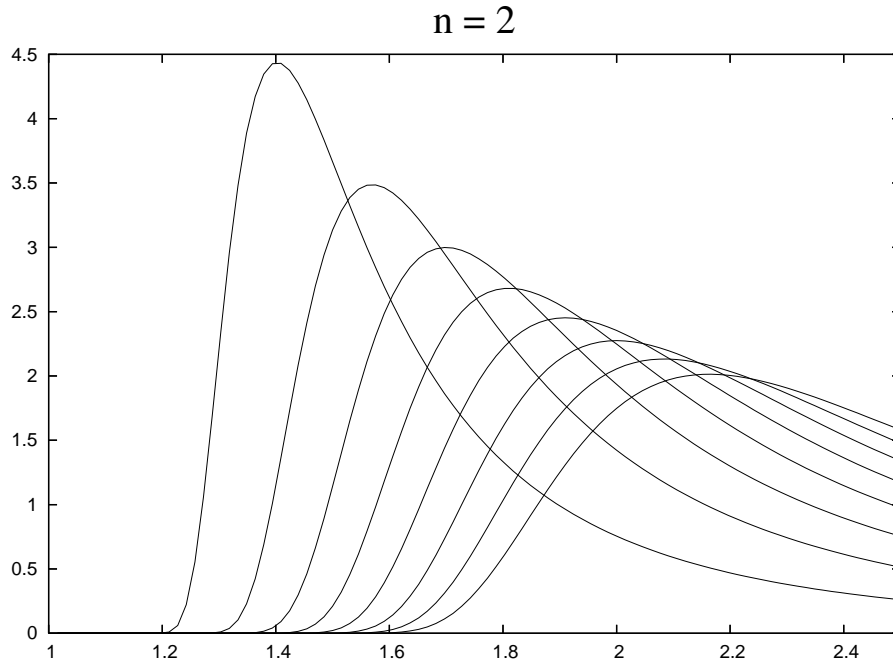


Figura 2.3: Densidad superficial de energía $\tilde{\epsilon}_2$ como función de \tilde{r} .

Como en la teoría newtoniana el potencial gravitacional está dado por la solución del problema de valores de contorno de la ecuación de Laplace, se considera $\Phi_n(r, z; a)$ como una familia de potenciales gravitacionales newtonianos de superficies discoidales delgadas con un borde interno, para los cuales la densidad de masa newtoniana está dada por

$$\sigma_n(x) = 4\Phi_{n,z} \Big|_{z=0^+} = \frac{4\alpha E_n(x)}{a^{n+1} x^{2n+1}}, \quad (2.51)$$

de la relación (2.51) se observa que la expresión diverge en el borde interno de los discos. Lo que quiere decir que, el comportamiento de las densidades superficiales de masa de

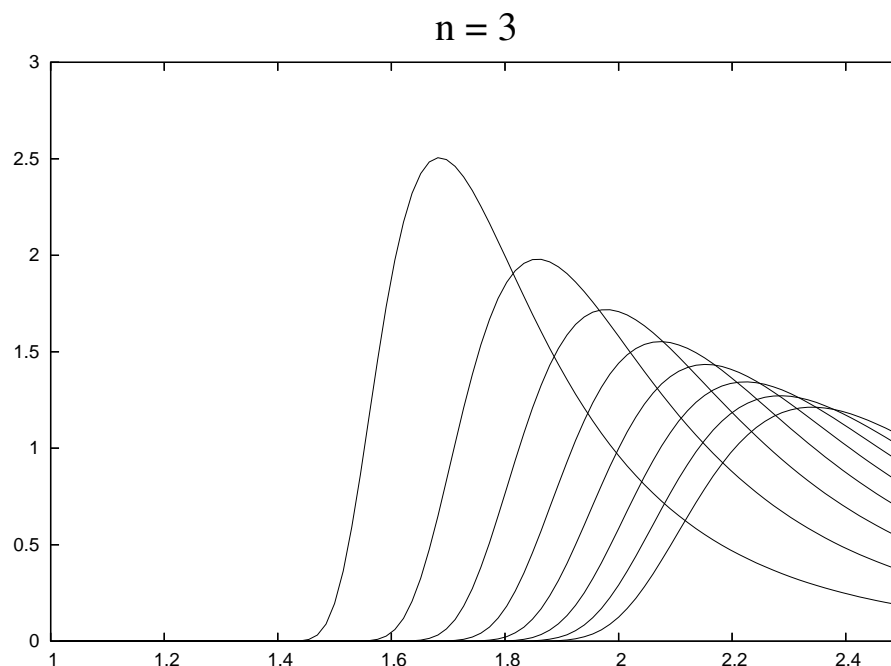


Figura 2.4: Densidad superficial de energía $\tilde{\epsilon}_3$ como función de \tilde{r} .

los modelos relativistas de discos es mejor que los correspondientes modelos newtonianos.

2.5 Masa de los discos

Con el fin de calcular la masa de los discos, se hará uso de la conocida fórmula de Komar [21],²

$$M = 2 \int_{\Sigma_t} (T_{\alpha\beta} - \frac{T}{2} g_{\alpha\beta}) n^\alpha \xi^\beta d\Sigma, \quad (2.52)$$

donde Σ es la hipersuperficie temporal dada por $\Sigma: f(x^\alpha) = t = cte$, los n^α son los vectores unitarios normales a la hipersuperficie y ξ^β es el vector de Killing temporal del espacio-tiempo.

Esta expresión se puede escribir de la forma

$$M = 2 \int_{\Sigma} (T_{\alpha\beta} - \frac{T}{2} g_{\alpha\beta}) V^\alpha V^\beta e^{2(\Lambda-\Phi)} r dr d\varphi dz, \quad (2.53)$$

²Ver los cálculos más detallados del cálculo de la masa de los discos en el apéndice A.3 p.33

donde V^α es uno de los términos constituyentes de la tétrada.

Por otra parte, de las relaciones (1.8) y (1.9) se tiene que el tensor energía momento para la parte correspondiente al disco es

$$T_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}\delta(z) = g_{zz}^{-1/2}S_{\alpha\beta}\delta(z) = e^{-(\Lambda-\Phi)}S_{\alpha\beta}\delta(z) = e^{\Phi-\Lambda}S_{\alpha\beta}\delta(z), \quad (2.54)$$

de manera que

$$M = 2 \int_{\Sigma} (S_{\alpha\beta} - \frac{S}{2}g_{\alpha\beta})V^\alpha V^\beta e^{\Lambda-\Phi}\delta(z)r \, dr \, d\varphi \, dz. \quad (2.55)$$

Usando de la tetraada anteriormente mencionada (1.20), es posible expresar la masa de los discos de la forma canónica

$$M = \int_{\Sigma} \epsilon e^{\Lambda-\Phi}\delta(z)r \, dr \, d\varphi \, dz. \quad (2.56)$$

De las relaciones (1.25) y (2.50) se tiene $\epsilon = 4e^{\Phi-\Lambda}\Phi_{,z}$ y de ahí se deduce $\epsilon e^{\Lambda-\Phi} = 4\Phi_{,z}$, de acuerdo con esto, se obtiene que

$$M = 8\pi \int_a^\infty \Phi_{,z}r \, dr, \quad (2.57)$$

donde ya se han realizado las integrales con respecto a z y φ . Usando la relación (2.15), la integral (2.57) en coordenadas esferoidales oblatas se escribe como

$$M = 8a\pi \int_0^\infty \Phi_{,y}(x, 0) \, dx. \quad (2.58)$$

Por otra parte, se puede demostrar que

$$\Phi_{n,y} = \frac{\alpha E_n}{a^n x^{2n}}, \quad (2.59)$$

de manera que la expresión general para la masa de los discos con borde interno se escribe como

$$M_n = \frac{8\pi\alpha}{a^{n-1}} \int_0^\infty \frac{E_n(x)}{x^{2n}} \, dx. \quad (2.60)$$

Realizando el cálculo para los tres primeros discos de la familia infinita, se encuentra que

$$M_1 = 8\pi\alpha \int_0^\infty \frac{dx}{x} \longrightarrow \infty, \quad (2.61)$$

$$M_2 = \frac{8\pi\alpha}{a} \int_0^\infty \frac{(x^2 + 3)}{x^4} dx = \frac{8\pi\alpha}{a} \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right) dx \longrightarrow \infty, \quad (2.62)$$

$$M_3 = \frac{8\pi\alpha}{a^2} \int_0^\infty \frac{3(x^2 + 5)}{x^6} dx = \frac{8\pi\alpha}{a^2} \int_0^\infty \left(\frac{3}{x^4} + \frac{15}{x^6} \right) dx \longrightarrow \infty. \quad (2.63)$$

Se puede generalizar que para todos los discos de la familia infinita se tendrá masa infinita ya que siempre va a sobrevivir un término en el denominador que al ser evaluado en cero llevara a infinito a todas las masas de los discos. Este resultado era esperado debido a la fuerte divergencia de las densidades newtonianas en el borde interno.

Aunque las soluciones obtenidas son asintóticamente planas y regulares en el eje de simetría, el hecho de que la masa tenga un valor infinito es una indicación de la presencia de una singularidad en el borde interno del disco. Con el fin de analizar la naturaleza de esta singularidad, se calculará, para toda la familia de soluciones, los invariantes del tensor de Riemann [35],

$$\mathcal{K}_I = R^{abcd} R_{abcd}, \quad (2.64)$$

$$\mathcal{K}_{II} = R^{ab}{}_{kl} R^{klcd} R_{abcd}, \quad (2.65)$$

$$\mathcal{K}_{III} = \frac{\epsilon^{ab}{}_{kl} R^{klcd} R_{abcd}}{\sqrt{-g}}. \quad (2.66)$$

$$\mathcal{K}_{IV} = \frac{\epsilon^{ab}{}_{kl} R^{kl}{}_{mn} R^{mncd} R_{abcd}}{\sqrt{-g}}, \quad (2.67)$$

donde $g = \det g_{ab}$ y ϵ^{abcd} es el símbolo de Levi-Civita.

Para cualquier solución de Weyl los últimos dos invariantes desaparecen idénticamente, así que solo es necesario calcular \mathcal{K}_I y \mathcal{K}_{II} . De manera que usando las expresiones (2.32) y (2.37) para $\Phi_n(x, y)$ y $\Lambda_n(x, y)$, se calculan estos dos invariantes de curvatura mediante los siguientes términos generales

$$\mathcal{K}_{In} = -\frac{16\alpha^2 e^{4(\Phi_n - \Lambda_n)} N_{In}(x, y)}{a^{6n+4} (x^2 + y^2)^{12n}}, \quad (2.68a)$$

$$\mathcal{K}_{IIIn} = \frac{48\alpha^3 e^{6(\Phi_n - \Lambda_n)} N_{IIIn}(x, y)}{a^{8n+6} (x^2 + y^2)^{16n}}, \quad (2.68b)$$

donde $N_{In}(x, y)$ y $N_{IIn}(x, y)$ son funciones polinomiales de grado más alto $24n - 6$ y $32n - 9$ respectivamente, y que no se presentan aquí por ser términos demasiado largos, aunque todos estos desaparecen en el borde interno de los discos,

$$N_{In}(0, 0) = N_{IIn}(0, 0) = 0. \quad (2.69)$$

Se puede ver que, en cualquier vecindad alrededor del punto $(0, 0)$, la diferencia entre $\Phi_n(x, y)$ y $\Lambda_n(x, y)$ se comporta como

$$\Phi_n - \Lambda_n \sim -\frac{\alpha^2}{a^{2n}(x^2 + y^2)^{2n}}, \quad (2.70)$$

de manera que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{4(\Phi_n - \Lambda_n)}}{(x^2 + y^2)^{12n}} = 0, \quad (2.71a)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{6(\Phi_n - \Lambda_n)}}{(x^2 + y^2)^{16n}} = 0, \quad (2.71b)$$

y el límite existe, independientemente del camino que se elija para llegar al punto $(0, 0)$.

Como consecuencia de la anterior expresión, se tiene que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \mathcal{K}_{In}(x, y) = 0, \quad (2.72a)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \mathcal{K}_{IIn}(x, y) = 0, \quad (2.72b)$$

lo cual se interpreta como que el tensor de Riemann es regular en el borde interno de los discos. Sin embargo, es bien sabido que, hay un número infinito de invariantes superiores que son construidos a partir de derivadas del tensor de Riemann y que es casi seguro que algunos de estos no son regulares en el borde interno. Por lo tanto, el hecho de que el tensor de Riemann sea regular en el borde interno del disco no es garantía de que el espacio-tiempo será regular allí. Es más, la presencia de esta singularidad en todas las soluciones, ha sido considerada por algunos autores como una consecuencia de la infinita delgadez no física de la fuente [22].

CONCLUSIÓN

En el presente trabajo de grado se obtuvo una nueva familia de infinitas soluciones exactas, de las ecuaciones de Einstein en el vacío para un espacio-tiempo estático y axialmente simétrico. Las soluciones describen una familia infinita de discos de polvo fino con un borde interno. La densidad de energía de los discos es positiva y bien comportada, de manera que el tensor de energía-momento correspondiente, satisface todas las condiciones de energía. Aunque la masa total de los discos resultó ser infinita, las soluciones son asintóticamente planas, de manera que sus tensores de Riemann son regulares, esto se demostró mediante el cálculo de los escalares de curvatura. El hecho de que la masa de los discos sea infinita, es un indicio de la presencia de una singularidad en su borde interno, claro que esta singularidad, puede ser una consecuencia de considerar las fuentes como discos infinitamente delgados. Por otra parte, como todas las funciones métricas se calcularon explícitamente, estas, son las primeras soluciones exactas completamente integradas para este tipo de fuentes.

El método que se utilizó en este trabajo para obtener estas soluciones de forma explícita, puede servir de orientación para encontrar otras soluciones físicas en trabajos futuros. La relativa simplicidad de estas soluciones, cuando se expresan en términos de las coordenadas esferoidales oblatas, facilita el estudio de diferentes aspectos de la dinámica de este tipo de fuentes, tales como, el movimiento de una partícula dentro y fuera de los discos y la estabilidad de las órbitas, la cual proporciona información de gran importancia sobre la estructura y el comportamiento los campos gravitacionales involucrados.

Además de su importancia como nueva familia de soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío, la principal importancia de esta familia de soluciones, es que pueden ser fácilmente superpuestas con la solución de Schwarzschild para describir el sistema binario compuesto por un disco que rodea un agujero negro. De hecho, la superposición

del primer término de esta familia con un agujero negro de Schwarzschild, fue presentada previamente por G. A. González y A. C. Gutiérrez-Piñeres [4], la cual constituye la primera solución explícitamente integrada para esta superposición de fuentes. Los detalles del análisis de la superposición para la familia en general serán presentados en un próximo trabajo.

Los principales resultados obtenidos en el marco del desarrollo del presente trabajo de investigación se listan a continuación:

- G. A. González, A. C. Gutiérrez-Piñeres y V. M. Viña Cervantes *Exact Static Axially Symmetric Thin Annular Dust Disks*, Aceptado para publicación en la edición de Mayo de 2009 en *AIP Conf. Proc. 1122 Physics and mathematics of Gravitation, Proceedings of Spanish Relativity Meeting 2008, ISBN 978-0-0-7354-0658-2*.
- G. A. González, A. C. Gutiérrez-Piñeres y V. M. Viña Cervantes *Relativistic Static Thin Dust Disks with an Inner Edge: An infinite Family of New Exact Solutions*, Sometido para Publicación en *Physical Review D*, [26].
- V. M. Viña Cervantes, A. C. Gutiérrez-Piñeres y G. A. González *Electrovacuum Static Axially Symmetric Thin Annular Dust Disks*, Presentado en calidad de Poster en *II Congreso latinoamericano de Física, 20 al 24 de Octubre, Zacatecas, Zacatecas, México*.
- Reconocimiento como TRABAJO DE GRADO PROMISORIO por parte de la Vicerrectoría de Investigación y extensión de la Universidad Industrial de Santander.

APÉNDICES

A.1 Ecuaciones de Einstein en el vacío en coordenadas esferoidales oblatas

En coordenadas curvilíneas ortogonales $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ la ecuación de Laplace está dada por

$$\sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial \zeta_m} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_m^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_m} \right] = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde h_m son los coeficientes métricos y están definidos como

$$h_m = \sqrt{\left(\frac{\partial q_1}{\partial \zeta_m} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_2}{\partial \zeta_m} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_3}{\partial \zeta_m} \right)^2}. \quad (\text{A.2})$$

Para el caso particular de las coordenadas esferoidales oblatas, los coeficientes métricos son

$$h_x = a \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + 1}}, \quad (\text{A.3a})$$

$$h_y = a \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 - y^2}}, \quad (\text{A.3b})$$

$$h_\phi = a \sqrt{(x^2 + 1)(1 - y^2)}, \quad (\text{A.3c})$$

de manera que

$$h_x h_y h_\phi = a^3 (x^2 + y^2). \quad (\text{A.4})$$

Reemplazando la relación anterior en el término general (A.1), se obtiene la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas

$$\left((1 + x^2) \Phi_{,x} \right)_{,x} + \left((1 - y^2) \Phi_{,y} \right)_{,y} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Usando la regla de la cadena se tiene que las derivadas de la función métrica Λ con respecto a las coordenadas esferoidales oblatas estan dadas por

$$\Lambda_{,x} = \Lambda_{,r} \frac{\partial r}{\partial x} + \Lambda_{,z} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad (\text{A.6a})$$

$$\Lambda_{,y} = \Lambda_{,r} \frac{\partial r}{\partial y} + \Lambda_{,z} \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (\text{A.6b})$$

de la relaciones (2.10) se tiene que las derivadas de las coordenadas cilíndricas con respecto a las oblatas son

$$\frac{\partial r}{\partial x} = ax \sqrt{\frac{1-y^2}{1+x^2}}, \quad (\text{A.7a})$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = -ay \sqrt{\frac{x^2+1}{1-y^2}}, \quad (\text{A.7b})$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ay, \quad (\text{A.7c})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = ax. \quad (\text{A.7d})$$

Reemplazando las anteriores relaciones en la expresión (A.6) se obtienen las derivadas de la función métrica $\Lambda(r, z)$ con respecto a las coordenadas esferoidales oblatas

$$\Lambda_{,x} = ax \sqrt{\frac{1-y^2}{1+x^2}} \Lambda_{,r} + ay \Lambda_{,z}, \quad (\text{A.8a})$$

$$\Lambda_{,y} = -ay \sqrt{\frac{1+x^2}{1-y^2}} \Lambda_{,r} + ax \Lambda_{,z}. \quad (\text{A.8b})$$

Eliminando el término $\Lambda_{,z}$, se obtiene la expresión para $\Lambda_{,r}$, y de la misma forma, eliminando el término $\Lambda_{,r}$ se obtiene la expresión para $\Lambda_{,z}$,

$$\Lambda_{,r} = \frac{\sqrt{(x^2+1)(1-y^2)}}{a(x^2+y^2)} [x\Lambda_{,x} - y\Lambda_{,y}], \quad (\text{A.9a})$$

$$\Lambda_{,z} = \frac{1}{a(x^2+y^2)} [y(x^2+1)\Lambda_{,x} + x(1-y^2)\Lambda_{,y}]. \quad (\text{A.9b})$$

Haciendo lo mismo para la función métrica $\Phi(r, z)$ se encuentran las expresiones correspondientes a las derivadas de $\Phi(r, z)$ con respecto a las coordenadas cilíndricas

$$\Phi_{,r} = \frac{\sqrt{(x^2+1)(1-y^2)}}{a(x^2+y^2)} [x\Phi_{,x} - y\Phi_{,y}], \quad (\text{A.10a})$$

$$\Phi_{,z} = \frac{1}{a(x^2+y^2)} [y(x^2+1)\Phi_{,x} + x(1-y^2)\Phi_{,y}]. \quad (\text{A.10b})$$

Reemplazando las ecuaciones (A.9) y (A.10) en el sistema ya conocido

$$\Lambda_{,r} = r(\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2), \quad (\text{A.11a})$$

$$\Lambda_{,z} = 2r\Phi_{,r}\Phi_{,z}, \quad (\text{A.11b})$$

se obtienen las expresiones correspondientes las derivadas de $\Lambda(x, y)$ con respecto a las coordenadas esferoidales oblatas

$$\Lambda_{,x} = \frac{(1-y^2)}{(x^2+y^2)} [x(x^2+1)\Phi_{,x}^2 - x(1-y^2)\Phi_{,y}^2 - 2y(x^2+1)\Phi_{,x}\Phi_{,y}], \quad (\text{A.12a})$$

$$\Lambda_{,y} = \frac{(x^2+1)}{(x^2+y^2)} [y(x^2+1)\Phi_{,x}^2 - y(1-y^2)\Phi_{,y}^2 + 2x(1-y^2)\Phi_{,x}\Phi_{,y}]. \quad (\text{A.12b})$$

De esta forma, las ecuaciones (A.5) y (A.12), constituyen el sistema de ecuaciones de Einstein en el vacío o también conocidas como ecuaciones de Weyl en coordenadas esferoidales oblatas.

A.2 Solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas con condiciones de frontera

De las relaciones (2.7) y (2.16) se tiene que las condiciones de contorno que debe satisfacer la solución de la ecuación de Laplace de manera que represente discos delgados con un borde interno central son

$$\Phi(x, y) = \Phi(-x, y), \quad (\text{A.13a})$$

$$\Phi_{,x}(0, y) = 0, \quad (\text{A.13b})$$

$$\Phi_{,y}(x, 0) = F(x); \quad x \geq 0. \quad (\text{A.13c})$$

Usando las relaciones (A.1) y (A.3) se tiene que el laplaciano en coordenadas esferoidales oblatas que está dado por la expresión (A.5), es equivalente a

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial}{\partial x} \left[(1+x^2) \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1-y^2) \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right] = 0. \quad (\text{A.14})$$

Aplicando el método de separación de variables para la función métrica $\Phi(x, y)$, es decir, considerando que $\Phi(x, y)$ es una función que está formada por el producto de dos funciones independientes, cada una dependiente de una sola coordenada, tal que

$$\Phi(x, y) = M(x)N(y), \quad (\text{A.15})$$

la expresión (A.14) ahora se puede expresar como

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial}{\partial x} \left[(1+x^2) \frac{\partial M(x)N(y)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1-y^2) \frac{\partial M(x)N(y)}{\partial y} \right] = 0. \quad (\text{A.16})$$

derivando estos productos resulta que

$$N(y) \frac{d}{dx} \left[(1+x^2) \frac{d}{dx} M(x) \right] + M(x) \frac{d}{dy} \left[(1-y^2) \frac{d}{dy} N(y) \right] = 0. \quad (\text{A.17})$$

Ahora, si se divide la anterior expresión entre el término $M(x)N(y)$ se obtiene la relación dada por

$$\frac{1}{M(x)} \frac{d}{dx} \left[(1+x^2) \frac{d}{dx} M(x) \right] + \frac{1}{N(y)} \frac{d}{dy} \left[(1-y^2) \frac{d}{dy} N(y) \right] = 0, \quad (\text{A.18})$$

lo cual permite escribir las siguientes igualdades,

$$\frac{1}{M(x)} \frac{d}{dx} \left[(1+x^2) \frac{d}{dx} M(x) \right] = j, \quad (\text{A.19a})$$

$$\frac{1}{N(y)} \frac{d}{dy} \left[(1-y^2) \frac{d}{dy} N(y) \right] = -j. \quad (\text{A.19b})$$

donde j es un número entero. La ecuación (A.19b) se expresa también como

$$\frac{d}{dy} \left[(1-y^2) \frac{dN(y)}{dy} \right] + jN(y) = 0, \quad (\text{A.20})$$

esta ecuación corresponde a la Ecuación de Legendre para la cual ya se conoce la forma de la solución. Para que la ecuación (A.19b) se pueda expresar también de la misma forma, se hace la sustitución de x por $i\varepsilon$, de esta forma se tiene que

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[(1-\varepsilon^2) \frac{dM(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right] + jM(\varepsilon) = 0. \quad (\text{A.21})$$

La ecuación diferencial de Legendre puede resolverse usando el método de series de potencias de la forma,

$$M(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon^{k+n}, \quad (\text{A.22a})$$

$$N(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{k+n}, \quad (\text{A.22b})$$

de manera que sus derivadas se expresan como

$$\frac{dM(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (k+n) \varepsilon^{k+n-1}, \quad (\text{A.23a})$$

$$\frac{dN(y)}{dy} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k+n) y^{k+n-1}. \quad (\text{A.23b})$$

Reemplazando las relaciones (A.22b) y (A.23b) en la expresión (A.20) se tiene que

$$\frac{d}{dy} \left[(1 - y^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k + n) y^{k+n-1} \right] + j \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{k+n} = 0, \quad (\text{A.24})$$

derivando el producto resulta la suma dada por

$$\begin{aligned} & -2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k + n) y^{k+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k + n) (k + n - 1) y^{k+n-2} \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k + n) (k + n - 1) y^{k+n} + j \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{k+n} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

se ve claramente que estas soluciones divergen cuando y tiende a infinito. Para resolver el problema de la divergencia, las series deben cortarse escogiendo apropiadamente la constante de separación j , a fin de que los coeficientes de las series a_n y b_n sean cero despues de un determinado valor, de modo que las series infinitas se reduzcan a polinómios finitos. En general, la serie de potencias obtenida converge cuando $y < 1$, y en el caso particular en que n sea un número entero no negativo ($0, 1, 2, \dots$) las soluciones forman una familia de polinómios ortogonales llamados Polinómios de Legendre. De acuerdo con esto, escogiendo $j = n(n + 1)$ donde $n = 1, 2, 3, \dots$, las expresiones (A.20) y (A.21) resultan ahora

$$\frac{d}{dy} \left[(1 - y^2) \frac{dN(y)}{dy} \right] + n(n + 1)N(y) = 0, \quad (\text{A.26a})$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[(1 - \varepsilon^2) \frac{dM(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right] + n(n + 1)M(\varepsilon) = 0, \quad (\text{A.26b})$$

cuyas respectivas soluciones son respectivamente

$$N(y) = A_n P_n(y) + B_n Q_n(y), \quad (\text{A.27a})$$

$$M(x) = D_n P_n(x) + E_n Q_n(x), \quad (\text{A.27b})$$

donde P_n son los polinómios de Legendre, Q_n las funciones de Legendre de segunda clase y A_n, B_n, D_n, E_n constantes arbitrarias. Ahora, la expresión (A.27b) está dada en términos de x , por la sustitución que se realizó unos pasos atrás de x por $i\varepsilon$, es conveniente ahora hacer las siguientes sustituciones,

$$p_n(x) = i^{-n} P_n(ix), \quad (\text{A.28a})$$

$$q_n(x) = i^{n+1} Q_n(ix), \quad (\text{A.28b})$$

con las anteriores sustituciones la relación (A.27b) se escribe

$$M(x) = H_n p_n(x) + K_n q_n(x). \quad (\text{A.29})$$

Reemplazando las relaciones (A.27b) y (A.29) en la expresión (A.15), resulta que el término general para la solución de la ecuación de Laplace está dado por

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [H_n p_n(x) + K_n q_n(x)] [A_n P_n(y) + B_n Q_n(y)], \quad (\text{A.30})$$

esta expresión es equivalente a

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n p_n(x) [A_n P_n(y) + B_n Q_n(y)] + \sum_{n=0}^{\infty} K_n q_n(x) [A_n P_n(y) + B_n Q_n(y)]. \quad (\text{A.31})$$

El siguiente paso consiste en aplicar las condiciones de contorno dadas por el sistema (A.13) a la solución general obtenida. Por otra parte, la paridad de los polinómios de Legendre está dada por

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(-x), \quad (\text{A.32})$$

de acuerdo con esto, para garantizar la paridad en x se deben considerar solo $P_{2n}(x)$ ya que son los únicos que la satisfacen. Si $P_{2n}(x)$ es par, se puede demostrar fácilmente que $p_{2n}(x)$ también es par. De la misma forma se llega a que solo los polinómios $q_{2n+1}(x)$ satisfacen la condición de paridad para x . Aplicando estas restricciones, la expresión (A.31) resulta

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}(x) [A_{2n} P_{2n}(y) + B_{2n} Q_{2n}(y)] \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} q_{2n+1}(x) [A_{2n+1} P_{2n+1}(y) + B_{2n+1} Q_{2n+1}(y)], \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

al aplicar a la anterior expresión las condiciones $\Phi_{,x}(0, y) = 0$ y $\Phi_{,y}(x, 0) = F(x)$ se llega a la expresión final, la cual corresponde a la solución de la ecuación de Laplace para un disco delgado con un borde interno.

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}(x) [A_{2n} P_{2n}(y) + B_{2n} Q_{2n}(y)]. \quad (\text{A.34})$$

A.3 Cálculo de la masa de los discos

Con el fin de calcular la masa de los discos, se hará uso de la conocida fórmula de Komar [21],

$$M = 2 \int_{\Sigma_t} (T_{\alpha\beta} - \frac{T}{2} g_{\alpha\beta}) n^{\alpha} \xi^{\beta} d\Sigma, \quad (\text{A.35})$$

donde Σ es la hipersuperficie temporal dada por $\Sigma: f(x^\alpha) = t = cte$, de manera que

$$f_{,\alpha} = t_{,\alpha} = \delta_\alpha^0, \quad (\text{A.36})$$

aquí $f_{,\alpha}$ son los vectores normales a la hipersuperficie. Para calcular los vectores unitarios normales a la hipersuperficie n_α , que en este caso, según la relación (A.36) es solo uno, se utiliza la relación dada por

$$n_\alpha = \frac{\varepsilon f_{,\alpha}}{|g^{\alpha\beta} f_{,\alpha} f_{,\beta}|^{1/2}}, \quad (\text{A.37})$$

donde ε puede tener los valores $-1, 0, 1$ lo cual determina si el vector es temporal, nulo o espacial respectivamente, y se calcula a través de la norma del vector $f_{,\alpha}$. En este caso

$$g^{\alpha\beta} f_{,\alpha} f_{,\beta} = g^{00} = -e^{-2\Phi} < 0, \quad (\text{A.38})$$

luego

$$\varepsilon = -1, \quad (\text{A.39})$$

de acuerdo con esto

$$n_\alpha = \frac{-\delta_\alpha^0}{|g^{\alpha\beta} \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0|^{1/2}} = \frac{-\delta_\alpha^0}{|g^{00}|^{1/2}} = \frac{-\delta_\alpha^0}{|-e^{-2\Phi}|^{1/2}} = \frac{-\delta_\alpha^0}{e^{-\Phi}}, \quad (\text{A.40})$$

de manera que

$$n_\alpha = -e^\Phi \delta_\alpha^0. \quad (\text{A.41})$$

Por otra parte

$$g^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = n^\alpha n_\alpha = e^{2\Phi} g^{00} = -1, \quad (\text{A.42})$$

luego

$$n^\alpha n_\alpha = -1, \quad (\text{A.43})$$

este valor corresponde a la norma del vector unitario normal a la hipersuperficie Σ . Dado que el valor es -1 , este vector es, efectivamente, temporal. Como en la expresión (2.52) aparece n^α , usando la relación (A.41) se tiene que

$$n^\alpha = g^{\alpha\beta} n_\beta = -e^\Phi g^{\alpha 0} = -e^\Phi \delta_0^\alpha g^{00} = e^{-\Phi} \delta_0^\alpha, \quad (\text{A.44})$$

y de la tétrada establecida en el primer capítulo (1.20) se obtiene la igualdad dada por

$$n^\alpha = V^\alpha = e^{-\Phi} \delta_0^\alpha. \quad (\text{A.45})$$

Por otra parte, la métrica inducida sobre la hipersuperficie

$$ds_{\Sigma}^2 = e^{-2\Phi} [r^2 d\varphi^2 + e^{2\Lambda}(dr^2 + dz^2)] , \quad (\text{A.46})$$

donde $y^a = (r, \varphi, z)$, está definida como

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} \delta_a^\alpha \delta_b^\beta = g_{ab} . \quad (\text{A.47})$$

El elemento de superficie $d\Sigma$ está dado por la expresión

$$d\Sigma = \sqrt{h} d^3y = \sqrt{h} dr d\varphi dz , \quad (\text{A.48})$$

donde $h = \det[h_{ab}]$. Realizando el cálculo del determinante se llega a que $\sqrt{h} = re^{2\Lambda-3\Phi}$. De acuerdo con esto, el elemento de superficie esta dado por

$$d\Sigma = re^{2\Lambda-3\Phi} dr d\varphi dz . \quad (\text{A.49})$$

En la ecuación (2.52), ξ^β es el vector de Killing tipo tiempo del espacio-tiempo y se define como

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \delta_0^\alpha \partial_\alpha , \quad (\text{A.50})$$

por lo tanto

$$\xi^\alpha = \delta_0^\alpha . \quad (\text{A.51})$$

Nuevamente, de la tétrada (1.20) se tiene que

$$\xi^\alpha = \delta_0^\alpha = e^\Phi V^\alpha . \quad (\text{A.52})$$

Reemplazando las relaciones (A.45), (A.49) y (A.52) en la expresión (2.52) se obtiene

$$M = 2 \int_{\Sigma} (T_{\alpha\beta} - \frac{T}{2} g_{\alpha\beta}) V^\alpha V^\beta e^{2(\Lambda-\Phi)} r dr d\varphi dz . \quad (\text{A.53})$$

De las expresiones (1.8) y (1.9) se tiene que el tensor energía momento para la parte correspondiente al disco es

$$T_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta} \delta(z) = g_{zz}^{-1/2} S_{\alpha\beta} \delta(z) = e^{2(\Lambda-\Phi)-1/2} S_{\alpha\beta} \delta(z) = e^{\Phi-\Lambda} S_{\alpha\beta} \delta(z) , \quad (\text{A.54})$$

de manera que,

$$M = 2 \int_{\Sigma} (S_{\alpha\beta} - \frac{S}{2} g_{\alpha\beta}) V^\alpha V^\beta e^{\Lambda-\Phi} \delta(z) r dr d\varphi dz . \quad (\text{A.55})$$

Para un disco de polvo, es decir, un disco sin presión azimutal, se tiene que el tensor superficial de energía-momento se puede expresar en términos de la tétrada anteriormente mostrada (1.21), de la forma canónica

$$S_{\alpha\beta} = \epsilon V_\alpha V_\beta, \quad (\text{A.56})$$

de donde se tiene que

$$S = g^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = \epsilon g^{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta = \epsilon V^\alpha V_\alpha = \epsilon n^\alpha n_\alpha = -\epsilon. \quad (\text{A.57})$$

Reemplazando la anterior expresión en la ecuación (2.55) se obtiene que

$$\left(S_{\alpha\beta} - \frac{S}{2} g_{\alpha\beta} \right) V^\alpha V^\beta = \left(\epsilon V_\alpha V_\beta + \frac{\epsilon}{2} g_{\alpha\beta} \right) V^\alpha V^\beta = \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}. \quad (\text{A.58})$$

De esta forma, la relación (2.55) se puede expresar ahora como

$$M = \int_{\Sigma} \epsilon e^{\Lambda-\Phi} \delta(z) r \, dr \, d\varphi \, dz. \quad (\text{A.59})$$

Por otra parte, de las relaciones (1.25) y (2.50) se tiene que $\epsilon = 4e^{\Phi-\Lambda}\Phi_{,z}$ lo cual implica que $\epsilon e^{\Lambda-\Phi} = 4\Phi_{,z}$, haciendo uso de eso, se puede escribir la expresión para la masa como

$$M = 8\pi \int_a^\infty \Phi_{,z} r \, dr, \quad (\text{A.60})$$

aquí ya se han realizado las integrales con respecto a z y φ . Usando las relaciones ya conocidas entre los dos sistemas de coordenadas (2.15), se tiene que la integral que arroja la masa de los discos, en coordenadas esferoidales oblatas es

$$M = 8a\pi \int_0^\infty \Phi_{,y}(x, 0) \, dx, \quad (\text{A.61})$$

se puede demostrar que el término general para la derivada de $\Phi(x, y)$ con respecto a la variable y , evaluada en $y = 0$ esta dado por la expresión

$$\Phi_{n,y} = \frac{\alpha E_n}{a^n x^{2n}}, \quad (\text{A.62})$$

de manera que la expresión general para la masa de los discos con borde interno es

$$M_n = \frac{8\pi\alpha}{a^{n-1}} \int_0^\infty \frac{E_n(x)}{x^{2n}} \, dx. \quad (\text{A.63})$$

Realizando el cálculo para los tres primeros discos de la familia infinita, se encuentra que

$$M_1 = 8\pi\alpha \int_0^\infty \frac{dx}{x} \longrightarrow \infty, \quad (\text{A.64})$$

$$M_2 = \frac{8\pi\alpha}{a} \int_0^\infty \frac{(x^2 + 3)}{x^4} dx = \frac{8\pi\alpha}{a} \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right) dx \longrightarrow \infty, \quad (\text{A.65})$$

$$M_3 = \frac{8\pi\alpha}{a^2} \int_0^\infty \frac{3(x^2 + 5)}{x^6} dx = \frac{8\pi\alpha}{a^2} \int_0^\infty \left(\frac{3}{x^4} + \frac{15}{x^6} \right) dx \longrightarrow \infty. \quad (\text{A.66})$$

REFERENCIAS

- [1] Bateman H., *Partial Differential Equations*. (Dover, New York, 1944).
- [2] Begelman M. C., “Evidence for black hole”, *Science* **300**, 1898–1903 (2003).
- [3] Celotti A., Miller J. C. y Sciama D. W., “Astrophysical evidence for the existence of black hole”, *Class. Quantum Grav.* **16**, A3–A21 (1999).
- [4] González G. A. y Gutiérrez-Piñeres A. C., “Counterrotating Dust Disk Around a Schwarzschild Black-Hole: New Fully Integrated Explicit Exact Solution”, arXiv:0811.3002v1, (2008)
- [5] Hawking S. W. y Ellis G. F. R., *The Large Scale Structure of Space-Time*. (Cambridge University Press, 1973).
- [6] Israel W., “Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity”, *Nuovo Cimento* **44B**, 1–14 (1966)
- [7] Israel W., “Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity”(Errata), *Nuovo Cimento* **48B**, 463–463 (1967)
- [8] Karas V., Hure J. M. y Semerák O., “Gravitating discs around black hole”, *Class. Quantum Grav.* **21**, R1–R51 (2004).
- [9] Katz J., Bičák J. y Lynden-Bell D., “Disc sources for conformastationary metrics” *Class. Quantum Grav.* **16**, 4023–4034 (1999).
- [10] Klein C., “Counter-rotating dust rings around a static black hole”, *Class. Quantum Grav.* **14**, 2267–2280 (1997).
- [11] Klein C., “Exact relativistic treatment of stationary black-hole-disk systems”, *Phys. Rev. D.* **68**, 027501 (2003).

- [12] Klein C. y Richter O., *Ernst Equation and Riemann Surfaces: Analytical and Numerical Methods*, Lect. Notes Phys. 685 (Springer, Berlin, 2005).
- [13] Lemos J. P. S. y Letelier P. S., “Superposition of Morgan and Morgan discs with a Schwarzschild black hole”, *Class. Quantum Grav.* **10**, L75–L78 (1993).
- [14] Lemos J. P. S. y Letelier P. S., “Exact general relativistic thin disks around black hole”, *Phys. Rev. D.* **49**, 5135–5143 (1994).
- [15] Lemos J. P. S. y Letelier P. S., “Two families of exact disks with a central black hole”, *Int. J. Mod. Phys. D.* **5**, 53–63 (1995).
- [16] Lichnerowicz A., “Sur les ondes de choc gravitationnelles”, *C.R. Acad. Sci.* **273**, A528–A532 (1971).
- [17] Morgan T. y Morgan L., “The gravitational field of a disk”, *Phys. Rev.* **183**, 1097–1101 (1969).
- [18] Morgan L. y Morgan T., “Gravitational Field of Shells and Disks in General Relativity”, *Phys. Rev D.* **2**, 2756–2761 (1970).
- [19] Papapetrou A. y Hamouni A., “Surface layers of matter in general relativity”, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **9**, 179–188 (1968).
- [20] Poisson E., *A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. (Cambridge University Press, 2004)
- [21] Poisson E., *An advanced course in general relativity*, Department of Physics, University of Guelph Press, (2002).
- [22] Šácha J. y Semerák O., “Toroidal source around a static black hole”, *Czech. J. Phys.* **55**, 139–155 (2005).
- [23] Semerák O., *Gravitation: Following the Prague Inspiration (To celebrate the 60th birthday of Jiri Bičák)*, eds. O. Semerák, J. Podolský and M. Žofka, p. 111 (World Scientific, Singapore, 2002).
- [24] Semerák O., “Thin disc around a rotating black hole, but with support in-between”, *Class. Quantum Grav.* **19**, 3829–3844 (2002)
- [25] Semerák O., “Expulsion of external fields from extreme horizons: Example of an external gravitational field”, *Czech. J. Phys.* **52**, 11–18 (2002).

- [26] Semerák O., “Gravitating discs around a Schwarzschild black hole: III”, *Class. Quantum Grav.* **20**, 1613–1634 (2003).
- [27] Semerák O., “Exact power-law discs around static black holes”, *Class. Quantum Grav.* **21**, 2203–2218 (2004).
- [28] Semerák O., Žáček M. y Zellerin T., “Test-particle motion in superposed Weyl fields”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **308**, 705–717 (1999).
- [29] Semerák O. y Žáček M., “Gravitating discs around a Schwarzschild black hole: I”, *Class. Quantum Grav.* **17**, 1613–1626 (2000).
- [30] Semerák O. y Žáček M., “Oscillations of Static Discs around Schwarzschild Black Holes: Effect of Self-Gravitation”, *Publ. Astron. Soc. Japan* **52**, 1067–1074 (2000).
- [31] Semerák O., Zellerin T. y Žáček M., “Erratum: The structure of superposed Weyl fields”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **308**, 691–704 (1999); (Erratum: **322**, 207–208 (2001)).
- [32] Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C. y Herlt E., *Exact Solutions of Einstein’s Field Equations*. (Cambridge University Press, 2003).
- [33] Taub A. H., “Space-times with distribution valued curvature tensors”, *J. Math. Phys.* **21**, 1423–1431 (1980).
- [34] Wald R. M., *General Relativity*. (The University of Chicago Press, 1984).
- [35] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. (John Wiley & Sons, 1972).
- [36] Žáček M. y Semerák O., “Gravitating discs around a Schwarzschild black hole II”, *Czech. J. Phys.* **52**, 19–27 (2002).
- [37] Zellerin T. y Semerák O., “Two-soliton stationary axisymmetric sprouts from Weyl seeds”, *Quantum Grav.* **17**, 5103–5123 (2000).