

EL RETÍCULO DE LAS PRETOPOLOGÍAS SOBRE
UN CONJUNTO ARBITRARIO S

Oscar Reynaldo Madiedo Castro

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2008

EL RETÍCULO DE LAS PRETOPOLOGÍAS SOBRE UN CONJUNTO ARBITRARIO S

Oscar Reynaldo Madiedo Castro

Trabajo de grado presentado como
requisito parcial para optar al título de

Licenciado en Matemáticas

Director

Ph.D. Marlio Paredes Gutierrez

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2008

*“El tiempo nunca fue el Amo de nuestros Sueños,
convertirlos en realidad es vivir,
y trascender a travez de ellos”.*

(Elkin Ramirez.)

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mis padres Reynaldo Madiedo & Martha Castro, por darme la vida y por todo el esfuerzo que hicieron para sacarme adelante y por tener fe en mí.

Agradezco a mis hermanos Sayda, Javier & María Carolina, y a mis Sobrinos María Fernanda & Manuel Jose Avendaño por darme mucha motivación y cariño.

Agradezco al Profesor Marlio Paredes, por todo el acompañamiento que me dio en el transcurso de mi carrera, además fue quien aceptó la no muy grata tarea de corregir mis innumerables errores, convirtiendo la lectura de este texto en algo más agradable.

Agradezco a gran amigo y compañero Félix Antonio Páez, por toda la asesoría brindada en el desarrollo de este trabajo y por sus acertados consejos.

Agradezco a mis maestros Sonia Sabogal, Edilberto Reyes, Rafael Isaac, Javier Camargo y Sterlin Castañeda, por haberme enseñado lo mejor de cada uno.

A mi círculo de colegas y amigos, Arturo Castro, Francisco Gutiérrez, Óscary Ávila, José Luis Puello, Jaiver Rodriguez, Mauricio Peña, Javier Mantilla, Juan Carlos Mejia, Cesar Loaiza, Francisco Niño, Luisa Martínez, por estar siempre ahí en los momentos buenos y malos y por haberme ayudado a salir siempre adelante.

A mi novia Norah Torres, por estar siempre a mi lado.

TITLE: THE LATTICE OF PRETOPOLOGIES ON AN ARBITRARY SET S^*

AUTHOR: Oscar Reynaldo Madiedo Castro**

KEY WORDS: Lattice, filters, pretopology, product of filters, the lattice of pretopology.

DESCRIPTION

A pretopology on a set S can be identified, in a natural way, with the product of certain filters on S . From this identification it is shown that $(\text{Pretop}(S), \leq)$, the lattice of the pretopologies on S , is complete, modular, distributive, atomic, co-atomic and compactly generated. In addition, we show that $\text{Pretop}(S)$ is infinitely distributive, co-compactly generated and complemented if and only if S is finite. We show that the co-atoms in $\text{Pretop}(S)$ are topologies on S , too.

In Chapter 1 we give a list of basic notions of lattices theory, filters and product of filters.

In Chapter 2 we define the notion of pretopology on a set S and show that, as same as the topologies, a pretopology is completely determined by specification of the collection of the filter of neighborhoods on each point of the set and by its interior operation.

Finally, in Chapter 3 we show that $(\text{Pretop}(S), \leq)$ is isomorphic to a subset of filters on S^S and from this we deduce part of the lattice structure.

*Monograph

** FACULTY OF SCIENCES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Ph.D. Marlio Paredes Gutierrez.

TITULO: EL RETÍCULO DE LAS PRETOPOLOGÍAS SOBRE UN CONJUNTO ARBITRARIO S^*

AUTOR: Oscar Reynaldo Madiedo Castro^{**}

PALABRAS CLAVES: Retículo, filtros, pretopología, Producto de filtros, el retículo de las pretopologías.

DESCRIPCIÓN

Una pretopología sobre un conjunto S puede ser identificada de manera natural con el producto de ciertos filtros sobre S . A partir de esta identificación se muestra que $(\text{Pretop}(S), \leq)$, el retículo de las pretopologías sobre el conjunto S , es siempre completo, modular, distributivo, atómico, co-atómico, y compactamente generado. Además, se muestra que $\text{Pretop}(S)$ es infinitamente distributivo, co-compactamente generado y complementado si, y sólo si, S es finito. También se muestra que los co-átomos en $\text{Pretop}(S)$ son topologías sobre S .

En el capítulo 1 se da una lista de nociones básicas sobre teoría de retículos, filtros y producto de filtros.

En el capítulo 2 se define formalmente la noción de pretopología sobre un conjunto S y mostramos que, al igual que las topologías, una pretopología está completamente determinada por especificación de la colección del filtro de vecindades de cada punto del conjunto en cuestión, al igual que por su operación de interior.

Por último, en el capítulo 3 mostramos que $(\text{Pretop}(S), \leq)$, es isomorfo a un subconjunto de filtros en S^S y de esto, deducimos gran parte de la estructura de este retículo.

*Monografía

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Ph.D. Marlio Paredes Gutierrez.

Contenido

INTRODUCCIÓN

La noción de pretopología sobre un conjunto S , se introduce como una función p del conjunto de partes de S en si mismo, que satisface ciertas propiedades. El par (S, p) es llamado un espacio pretopológico y el conjunto $p(A)$ es llamado la clausura de A en (S, p) .

Dicho concepto ha sido estudiado ampliamente por Choquet, quien en primera instancia les da el nombre de \mathcal{V}_D espacios, y posteriormente introduce estos espacios a partir de cierta colección de filtros de vecindades (ver [?]), y por Čech, quien les da el nombre de espacios de clausura (ver [?]).

Estos espacios han encontrado recientemente importantes aplicaciones en areas como; Ciencias Sociales, Teoría de Juegos y Procesamiento Matemático de Imágenes (ver [?],[?] y [?]), al igual que en Biología en el estudio de espacios de Fenotipo y Genotipo (ver [?] y [?]), y en Lógica para, a partir de su retículo, determinar la semántica proposicional de la programación lineal (ver [?]).

Son estas algunas de las razones que han despertado nuestro interés en estudiar dichos espacios y en particular, la estructura de su retículo.

En este trabajo (basados en [?]), utilizamos producto de filtros para estudiar la estructura del retículo de las pretopologías sobre un conjunto arbitrario S .

En el capítulo 1 se da una lista de nociones básicas sobre teoría de retículos, filtros y producto de filtros.

En el capítulo 2 se define formalmente la noción de pretopología sobre un conjunto S y mostramos que, al igual que las topologías, una pretopología está completamente determinada por especificación de la colección del filtro de vecindades de cada punto del conjunto en cuestión, al igual que por su operación de interior.

Por ultimo, en el capítulo 3 mostramos que $(\text{Pretop}(S), \leq)$, el retículo de las pretopologías en el conjunto S , es isomorfo a un subconjunto de filtros en S^S . De esto, deducimos que $(\text{Pretop}(S), \leq)$ es un retículo completo, atómico, co-atómico, modular, distributivo, y compactamente generado. Además, veremos que $(\text{Pretop}(S), \leq)$ es co-compactamente generado, infinitamente distributivo y complementado (en cuyo caso es únicamente complementado) sólo en el caso trivial en que S es finito. También mostramos que los co-átomos en $\text{Pretop}(S)$ son topologías sobre S .

Capítulo

1

PRELIMINARES

En esta sección damos algunas nociones básicas sobre retículos, filtros sobre un conjunto y producto de filtros, que usaremos a lo largo de este escrito.

1.1. Retículos

La terminología y notación de esta sección es tomada de [?] con excepción de los términos co-átomo, co-atómico, co-cubrimiento y co-compactamente generado que usaremos para la noción dual de átomo, atómico, cubrimiento y compactamente generado respectivamente. Por otro lado, asumimos que el lector está familiarizado con las nociones básicas de teoría del orden, sin embargo queremos recordar que un **orden parcial** sobre un conjunto no vacío S es una relación binaria \leq sobre S que es Reflexiva ($(\forall x \in S)(x \leq x)$), Antisimétrica ($(\forall x, y \in S)(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$) y Transitiva ($(\forall x, y, z \in S)(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$). Al par (S, \leq) se le da el nombre de conjunto parcialmente ordenado y se acostumbra a decir simplemente “ S es un conjunto parcialmente ordenado” siempre que no haya lugar a confusión respecto a la relación \leq . Por otra parte, recuérdese que si existe $x \in S$ tal que para cada $s \in S$ se tiene que $s \leq x$ decimos que x es el **máximo** de S . De manera dual, si existe $x \in S$ tal que para cada $s \in S$ se tiene que $x \leq s$ decimos que x es el **mínimo** de S . Si S tiene elemento mínimo lo notaremos por 0 y diremos simplemente que S tiene 0 , y si S tiene elemento máximo lo notaremos por 1 y diremos simplemente que S tiene 1 .

Recuérdese además que un elemento x de S es una **cota superior** (respectivamente **cota inferior**) de $A \subseteq S$, si para cada $a \in A$ se tiene que $a \leq x$ (resp $x \leq a$). Notaremos el conjunto de las cotas superiores de A mediante A^\uparrow y al conjunto de las cotas inferiores de

A mediante A^\downarrow . A la menor de las cotas superiores de A , en caso de existir, se le conoce como el **supremo de A** o el $\sup(A)$ y lo notaremos por $\bigvee A$. De manera dual, a la mayor de las cotas inferiores de A , en caso de existir, se le conoce como el **ínfimo de A** o el $\inf(A)$ y lo notaremos mediante $\bigwedge A$.

Además de [?], otras referencias excelentes sobre teoría del orden y retículos son [?] y [?]. En [?] se proporciona una gran variedad de ejemplos sobre estos temas que ayudan a la comprensión de estos conceptos.

Ahora si, empezaremos con nuestra lista de conceptos previos.

Definición 1.1.1. Sean S un conjunto parcialmente ordenado y $x, y \in S$. Decimos que y “**cubre**” a x y escribimos $x \prec y$ si:

1. $x < y$
2. $(\forall z \in S)(x \leq z < y \Rightarrow z = x)$.

Definición 1.1.2. Sea (S, \leq) un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que (S, \leq) es un **retículo**, si para cada par de elementos $x, y \in S$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ y $\sup\{x, y\} = x \vee y$ existen.

De igual forma que para un conjunto parcialmente ordenado, diremos simplemente que S es un retículo siempre que no haya lugar a confusión respecto a la relación \leq . Si S es un retículo con elemento máximo y elemento mínimo, diremos que S es un retículo con 0 y 1.

Definición 1.1.3. Sean (S, \leq) un retículo con 0 y 1, y $a \in S$. Decimos que a es un átomo en (S, \leq) si $0 \prec a$. De manera dual, decimos que a es un co-átomo si $a \prec 1$.

Definición 1.1.4. Si (S, \leq) un retículo con 0 y 1, decimos que (S, \leq) es atómico si dado cualquier elemento $x \in S$ distinto de 0, existe un átomo $a \in S$ tal que $a \leq x$. De manera dual, decimos que (S, \leq) es co-atómico si dado cualquier elemento $x \in S$ distinto de 1, existe un co-átomo $a \in S$ tal que $x \leq a$.

Definición 1.1.5. Sean (S, \leq) un retículo con 0 y 1, y $a \in S$. Decimos que un elemento $b \in S$ es un **complemento** de a en S , si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$. En tal caso, decimos que a y b son complementarios.

Definición 1.1.6. Un retículo (S, \leq) con 0 y 1, es **complementado** si todo elemento en S tiene un complemento, es decir; un retículo (S, \leq) con 0 y 1 es complementado si para cada $a \in S$, existe $b \in S$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$.

Si además, cada elemento tiene un único complemento, se dice que (S, \leq) es complementado de manera única o que es únicamente complementado.

Definición 1.1.7. Un retículo (S, \leq) es **modular**, si para cada $a, b, c \in S$ tales que $a \leq c$, se tiene que $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

Definición 1.1.8. Un retículo (S, \leq) es **distributivo**, si para cada $a, b, c \in S$ se satisfacen:

$$\text{i) } a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

$$\text{ii) } a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

De la definición anterior se sigue que todo retículo distributivo es modular. Nótese además, que para que un retículo sea distributivo, es suficiente con que se satisfaga alguna de las dos condiciones de la definición anterior, pues en realidad éstas son equivalentes tal y como probamos a continuación:

Proposición 1.1.1. Sea (S, \leq) un retículo. Entonces, para cada $a, b, c \in S$ se tiene que: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ si, y sólo si, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Demostración.

\Rightarrow) Para cualesquiera elementos $a, b, c \in S$ se tiene que

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= [(a \wedge b) \vee a] \wedge [(a \wedge b) \vee c] \\ &= a \wedge [(a \wedge b) \vee c] \\ &= a \wedge [(a \vee c) \wedge (b \vee c)] \\ &= a \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) \\ &= [a \wedge (a \vee c)] \wedge (b \vee c) \\ &= a \wedge (b \vee c). \end{aligned}$$

\Leftarrow) Se obtiene análogamente a la anterior intercambiando \wedge y \vee . ■

Definición 1.1.9. Sea (S, \leq) un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que (S, \leq) es un **retículo completo**, si para cada $A \subseteq S$, $\inf(A) = \bigwedge A$ y $\sup(A) = \bigvee A$ existen.

Nótese que todo retículo completo es un retículo con 0 y 1, pues de la definición se tiene que $\bigvee \emptyset$ y $\bigwedge \emptyset$ existen, ya que el conjunto de todas las cotas superiores de \emptyset , al igual que el de las cotas inferiores, es todo el conjunto S , y por tanto al existir la menor de las cotas superiores de \emptyset , la única opción es que esta sea el elemento mínimo de S . De igual forma, al existir la mayor de las cotas inferiores de \emptyset , la única opción es que esta sea el elemento máximo de S . Es decir, $\bigvee \emptyset = \bigwedge S = 0$ y $\bigwedge \emptyset = \bigvee S = 1$.

El siguiente teorema nos proporciona una forma útil de decidir si un conjunto parcialmente ordenado es un retículo completo.

Teorema 1.1. Si (S, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. S es un retículo completo
2. S tiene 1 y existe $\bigwedge A$ para todo subconjunto no vacío A de S .

Demostración.

1) \Rightarrow 2) Si S es un retículo completo, entonces para todo $A \subseteq S$ existe $\bigwedge A$ y $\bigvee A$. Así, existe $\bigwedge \emptyset = 1$ y para cada $\emptyset \neq A \subseteq S$ existe $\bigvee A$.

2) \Rightarrow 1) Sea $A \subseteq S$, veamos que $\bigwedge A$ y $\bigvee A$ existen.

Si $A = \emptyset$, como por hipótesis existe el 1 y puesto que $\bigwedge \emptyset = 1$ entonces $\bigwedge \emptyset$ existe. Además, nuevamente por la hipótesis, existe el inf de cualquier subconjunto no vacío de S , en particular existe $\bigwedge S = 0 = \bigvee \emptyset$.

Ahora, si $A \neq \emptyset$, por hipótesis se tiene que $\bigwedge A$ existe y que $A^\uparrow \neq \emptyset$, pues claramente el 1 es cota superior de A (recuérdese que A^\uparrow denota el conjunto de las cotas superiores de A), así, nuevamente por la hipótesis, se tiene que $\bigwedge A^\uparrow$ existe. Afirmamos que $\bigwedge A^\uparrow = \bigvee A$. En efecto; si $x = \bigvee A$ entonces $x \in A^\uparrow$ y además, si $y \in A^\uparrow$ entonces $x \leq y$, luego x es el menor elemento de A^\uparrow y por tanto $x = \bigwedge A^\uparrow$. Por ende, $\bigvee A$ existe.

Así, $\bigwedge A$ y $\bigvee A$ existen para cada $A \subseteq S$ y por tanto (S, \leq) es un retículo completo. ■

Definición 1.1.10. Sean (S, \leq) un retículo completo y $E \subseteq S$. Decimos que E es **sup-denso** (\vee -denso) en S , si para cada elemento $a \in S$ existe un $A \subseteq E$ tal que $a = \bigvee A$. Dualmente, E es **inf-denso** (\wedge -denso) en S , si para cada elemento $a \in S$ existe un $A \subseteq E$ tal que $a = \bigwedge A$.

La definición anterior es tomada de [?].

Definición 1.1.11. Un retículo completo (S, \leq) es **infinitamente distributivo** si para cada $a \in S$ y para cada colección $\{b_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de elementos de S se satisfacen:

$$\text{i) } a \vee \left(\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma \right) = \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} (a \vee b_\gamma),$$

$$\text{ii) } a \wedge \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma \right) = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (a \wedge b_\gamma),$$

Obsérvese que si (S, \leq) es un retículo distributivo, aplicando inducción sobre n se tiene que si $a, b_1, b_2, \dots, b_n \in S$ entonces

$$a \vee \left(\bigwedge_{i=1}^n b_i \right) = \bigwedge_{i=1}^n (a \vee b_i) \quad \text{y} \quad a \wedge \left(\bigvee_{i=1}^n b_i \right) = \bigvee_{i=1}^n (a \wedge b_i).$$

De lo anterior se sigue que todo retículo finito que sea distributivo es infinitamente distributivo.

El análogo de la proposición (??) no es valido para un retículo completo infinitamente distributivo. Al final de la sección 3.2 se muestra un ejemplo de un retículo completo que satisface la primera condición de la definición (??), pero no la segunda.

Definición 1.1.12. Sean (S, \leq) un retículo completo y $a \in S$. Una colección $\{b_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de elementos de S es un cubrimiento de a , si $a \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma$. De manera dual, una colección $\{b_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de elementos de S es un co-cubrimiento de a , si $a \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma$.

Definición 1.1.13. Sea (S, \leq) un retículo completo. Un elemento a de S es compacto, si para cada cubrimiento $\{b_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de a , existe un número finito $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que $a \leq \bigvee_{i=1}^n b_{\gamma_i}$. De manera dual, $a \in S$ es co-compacto, si para cada co-cubrimiento $\{b_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de a , existe un número finito $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que $a \geq \bigwedge_{i=1}^n b_{\gamma_i}$.

Definición 1.1.14. Un retículo completo (S, \leq) es compactamente generado, si todo elemento de S se puede expresar como el sup de una colección de elementos compactos de S , es decir; un retículo completo (S, \leq) es compactamente generado si el conjunto de los elementos compactos de S es \vee -denso en S . De manera dual, un retículo completo (S, \leq) es co-compactamente generado si el conjunto de los elementos co-compactos de S es \wedge -denso en S .

Definición 1.1.15. Sean $(S, \leq), (S', \preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados y $\phi : (S, \leq) \longrightarrow (S', \preceq)$ una función. Se dice que ϕ es **monótona** o que es un **homomorfismo de orden**, si para cada $x, y \in S$ se satisface:

$$x \leq y \Rightarrow \phi(x) \preceq \phi(y).$$

Definición 1.1.16. Sean $(S, \leq), (S', \preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados y $\phi : (S, \leq) \longrightarrow (S', \preceq)$ una función. Se dice que ϕ es una **inmersión de orden**, si para cada $x, y \in S$ se satisface:

$$x \leq y \Leftrightarrow \phi(x) \preceq \phi(y).$$

La siguiente afirmación muestra que toda inmersión de orden es inyectiva.

Lema 1.1.1. Sean (S, \leq) , (S', \preceq) conjuntos parcialmente ordenados. Si $\phi : (S, \leq) \rightarrow (S', \preceq)$ es una inmersión de orden, entonces ϕ es inyectiva.

Demostración.

Sean $x, y \in S$ con $x \neq y$. Veamos que $\phi(x) \neq \phi(y)$.

i) Si $x < y$ entonces como ϕ es monótona se tiene que $\phi(x) \preceq \phi(y)$.

Ahora, si $\phi(y) = \phi(x)$, por ser ϕ una inmersión de orden tenemos que $y \leq x$ y como por hipótesis $x \neq y$ se sigue que $y < x$, lo cual contradice que $x < y$. Así, $\phi(x) \neq \phi(y)$.

ii) Si $y < x$, el mismo razonamiento realizado en el caso anterior muestra que $\phi(x) \neq \phi(y)$.

iii) Si $x \not\leq y$, o, $y \not\leq x$, entonces por ser ϕ una inmersión de orden se tiene que $\phi(x) \not\preceq \phi(y)$, o, $\phi(y) \not\preceq \phi(x)$ y por tanto $\phi(x) \neq \phi(y)$.

Así, si $x \neq y$ de *i)*, *ii)* y *iii)* se sigue que $\phi(x) \neq \phi(y)$ y por consiguiente ϕ es inyectiva. ■

Definición 1.1.17. Sean $(S, \leq), (S', \preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados y $\phi : (S, \leq) \rightarrow (S', \preceq)$ una función. Se dice que ϕ es un **isomorfismo de orden**, si ϕ es biyectiva y para cada $x, y \in S$ se satisface:

$$x \leq y \Leftrightarrow \phi(x) \preceq \phi(y).$$

En otras palabras, es un isomorfismo de orden es una inmersión de orden sobreyectiva.

En adelante nos referiremos a una inmersión de orden o a un isomorfismo de orden, simplemente como una inmersión o un isomorfismo, es decir, omitiremos la palabra orden ya que esto se sobre entiende.

Nótese además que si $\phi : (S, \leq) \rightarrow (S', \preceq)$ un isomorfismo, entonces la función inversa ϕ^{-1} (la cual existe por ser ϕ biyectiva), es también un isomorfismo de (S', \preceq) sobre (S, \leq) , pues si $x', y' \in S'$ son tales que $x' \preceq y'$, entonces por la biyectividad de ϕ existen únicos $x, y \in S$ tales que $\phi(x) = x'$ y $\phi(y) = y'$. Luego si $\phi(x) = x' \preceq y' = \phi(y)$, por ser ϕ isomorfismo se sigue que $x \leq y$, es decir, $x = \phi^{-1}(x') \leq \phi^{-1}(y') = y$, y claro, si $\phi^{-1}(x') \leq \phi^{-1}(y')$ por ser ϕ un isomorfismo $\phi(\phi^{-1}(x')) \preceq \phi(\phi^{-1}(y'))$, es decir, $x' \preceq y'$. Así, para cada $x', y' \in S'$ se tiene que $x' \preceq y' \Leftrightarrow \phi^{-1}(x') \leq \phi^{-1}(y')$.

Proposición 1.1.2. Sean $(S, \leq), (S', \preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados, y $\phi : (S, \leq) \rightarrow (S', \preceq)$ una función monótona. Entonces: ϕ es un isomorfismo si, y sólo si, existe una función monótona $\psi : (S', \preceq) \rightarrow (S, \leq)$ tal que $\phi \circ \psi = I_S$, y $\psi \circ \phi = I_{S'}$ (I_S y $I_{S'}$ denotan la identidad en S y S' respectivamente).

La prueba de la proposición anterior se puede consultar en [?] o [?].

En la siguiente proposición mostramos que un isomorfismo preserva los sup e inf existentes.

Proposición 1.1.3. Sean $(S, \leq), (S', \preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados, $\phi : (S, \leq) \longrightarrow (S', \preceq)$ un isomorfismo, y $A \subseteq S$ tal que $\bigwedge A$ y $\bigvee A$ existen. Entonces:

1. $\phi(\bigvee A) = \bigvee \phi(A)$.
2. $\phi(\bigwedge A) = \bigwedge \phi(A)$.

Demostración.

1. Para todo $x \in A$ se tiene que $x \leq \bigvee A$, y como ϕ es monótona, se sigue que $\phi(x) \preceq \phi(\bigvee A)$ para todo $x \in A$. Así, $\phi(\bigvee A)$ es cota superior de $\phi(A)$. Por otra parte, si $z \in \phi(A)^\uparrow$, $\phi(x) \preceq z$ para todo $x \in A$ y como ϕ es un isomorfismo de orden $\phi^{-1}(z)$ existe (por ser ϕ biyección) y $x \leq \phi^{-1}(z)$, para cada $x \in A$. Así, $\phi^{-1}(z)$ es cota superior de A y por consiguiente $\bigvee A \leq \phi^{-1}(z)$ y, nuevamente por ser ϕ isomorfismo de orden $\phi(\bigvee A) \preceq z$. De lo anterior concluimos que $\phi(\bigvee A)$ es la menor de las cotas superiores de $\phi(A)$ y por tanto $\phi(\bigvee A) = \bigvee \phi(A)$.
2. Para todo $x \in A$ se tiene que $\bigwedge A \leq x$, y como ϕ es monótona, se sigue que $\phi(\bigwedge A) \preceq \phi(x)$ para todo $x \in A$. Así, $\phi(\bigwedge A)$ es cota inferior de $\phi(A)$. Por otra parte, si $z \in \phi(A)^\downarrow$, $z \preceq \phi(x)$ para todo $x \in A$ y como ϕ es un isomorfismo de orden $\phi^{-1}(z)$ existe y $\phi^{-1}(z) \leq x$, para cada $x \in A$. Así, $\phi^{-1}(z)$ es cota inferior de A y por consiguiente $\phi^{-1}(z) \leq \bigwedge A$ y, nuevamente por ser ϕ isomorfismo de orden $z \preceq \phi(\bigwedge A)$. De lo anterior concluimos que $\phi(\bigwedge A)$ es la mayor de las cotas inferiores de $\phi(A)$ y por tanto $\phi(\bigwedge A) = \bigwedge \phi(A)$. ■

Como una consecuencia de esta proposición se tiene inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 1.1.1. Sean $(S, \leq), (S', \preceq)$ retículos. Si (S, \leq) tiene 0 y 1 , y $\phi : (S, \leq) \longrightarrow (S', \preceq)$ un isomorfismo, entonces (S', \preceq) tiene 0 y 1 y además

1. $\phi(0) = 0$,
2. $\phi(1) = 1$.

Demostración.

1. Puesto que $0 = \bigvee_S \emptyset$, entonces $\phi(0) = \phi(\bigvee_S \emptyset)$ y puesto que de la proposición ?? se sigue que $\phi(\bigvee_S \emptyset) = \bigvee_{S'} \phi(\emptyset) = \bigvee_{S'} \emptyset$ entonces, $\bigvee_{S'} \emptyset$ existe, y por consiguiente S' tiene 0 (pues $\bigvee_{S'} \emptyset = \bigwedge S' = 0$). Luego se tiene que $\phi(0) = \phi(\bigvee_S \emptyset) = \bigvee_{S'} \phi(\emptyset) = \bigvee_{S'} \emptyset = 0$ y así, $\phi(0) = 0$.

2. Se obtiene análogamente a la anterior teniendo en cuenta que $1 = \bigwedge \emptyset$. ■

En la prueba anterior usamos subíndices en \bigvee para aclarar con respecto a que conjunto se estaba tomando el sup de \emptyset .

Proposición 1.1.4. Si (S, \leq) , (S', \preceq) son conjuntos parcialmente ordenados, y $\phi : (S, \leq) \rightarrow (S', \preceq)$ un isomorfismo, entonces: (S, \leq) es un retículo completo si, y sólo si, (S', \preceq) lo es.

Demostración.

Asumamos que (S, \leq) es un retículo completo y veamos que (S', \preceq) lo es. Para esto, usando la (proposición ??), probaremos que S' tiene 1 y que cada subconjunto no vacío de S' tiene inf.

Puesto que S tiene 1, del (corolario ??) se sigue que S' tiene 1.

Ahora, sea $\emptyset \neq A' \subseteq S'$. Veamos que A' tiene inf.

Puesto que ϕ es un isomorfismo, existe un único $\emptyset \neq A \subseteq S$ tal que $\phi(A) = A'$. Ahora puesto que $\bigwedge A$ existe (pues S es un retículo completo), y $\phi(\bigwedge A) = \bigwedge \phi(A)$ entonces $\bigwedge \phi(A)$ existe, y como $\phi(A) = A'$, entonces $\bigwedge \phi(A) = \bigwedge A'$ y por tanto existe el inf de A' . Así, (S', \preceq) es un retículo completo.

El recíproco se obtiene de manera análoga utilizando el isomorfismo inverso. ■

De la (proposición ??) también se desprende fácilmente que la modularidad, la distributividad y la compacidad son propiedades que se preservan bajo isomorfismos.

Si ϕ es un isomorfismo del retículo (S, \leq) en el retículo (S', \preceq) , por ser ϕ biyectiva se tiene que para cada $a', b', c' \in S'$ existen $a, b, c \in S$ únicos tales que $\phi(a) = a'$, $\phi(b) = b'$ y $\phi(c) = c'$. Luego si (S, \leq) es distributivo, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 a' \wedge (b' \vee c') &= \phi(a) \wedge (\phi(b) \vee \phi(c)) \\
 &= \phi(a) \wedge \phi(b \vee c) \\
 &= \phi(a \wedge (b \vee c)) \\
 &= \phi((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) \\
 &= \phi(a \wedge b) \vee \phi(a \wedge c) \\
 &= (\phi(a) \wedge \phi(b)) \vee (\phi(a) \wedge \phi(c)) \\
 &= (a' \wedge b') \vee (a' \wedge c')
 \end{aligned}$$

y por tanto (S', \preceq) es distributivo.

De igual manera se tiene que si (S, \leq) es modular, (S', \preceq) también lo es y que si (S', \preceq) es infinitamente distributivo, también lo es (S, \leq) .

Resumimos lo expuesto anteriormente en la siguiente proposición:

Proposición 1.1.5. Si (S, \leq) y (S', \preceq) son retículos isomorfos, entonces:

1. (S, \leq) es modular si, y sólo si, (S', \preceq) es modular.
2. (S, \leq) es distributivo si, y sólo si, (S', \preceq) es distributivo.
3. (S, \leq) es un retículo completo infinitamente distributivo si, y sólo si, (S', \preceq) es un retículo completo infinitamente distributivo.

Por otro lado si ϕ es un isomorfismo entre los retículos completos (S, \leq) y (S', \preceq) , entonces si $a \in S$ es compacto, $\phi(a)$ es compacto en S' . En efecto; si $\{b'_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es un cubrimiento de $\phi(a)$, para cada $\gamma \in \Gamma$ existe un único $b_\gamma \in S$ tal que $\phi(b_\gamma) = b'_\gamma$, luego si $\phi(a) \preceq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} b'_\gamma = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \phi(b_\gamma)$, entonces como ϕ preserva sup (proposición ??), se tiene que $\phi(a) \preceq \phi(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma)$, luego por ser ϕ isomorfismo, $a \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma$ y como a es compacto en S , existe un número finito de elementos de Γ , digamos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ tales que $a \leq \bigvee_{i=1}^n b_{\gamma_i}$, por tanto

$\phi(a) \preceq \phi(\bigvee_{i=1}^n b_{\gamma_i}) = \bigvee_{i=1}^n \phi(b_{\gamma_i}) = \bigvee_{i=1}^n b'_{\gamma_i}$. Así, $\phi(a)$ es compacto en S' .

De igual forma se tiene que si a es co-compacto en S , $\phi(a)$ es co-compacto en S' .

De estos hechos se sigue también que si (S, \leq) es compactamente (co-compactamente) generado, (S', \preceq) también lo es.

En resumen de lo anterior, tenemos que:

Proposición 1.1.6. Si (S, \leq) es retículo completo, y $\phi : (S, \leq) \longrightarrow (S', \preceq)$ es un isomorfismo, entonces:

1. a es compacto (resp co-compacto) en S si, y sólo si, $\phi(a)$ es compacto (resp co-compacto) en S' .
2. (S, \leq) es compactamente (resp co-compactamente) generado si, y sólo si, (S', \preceq) es compactamente (resp co-compactamente) generado.

Nótese además que si $(S, \leq), (S', \preceq)$ son retículos con 0 y 1 y $\phi : S \longrightarrow S'$ es un isomorfismo, entonces si a es un átomo en (S, \leq) se tiene que $\phi(a)$ es un átomo en (S', \preceq) . En efecto; claramente $0 \preceq \phi(a)$, y si $z' \in S'$ es tal que $z' \preceq \phi(a)$ entonces $\phi^{-1}(z') \leq a$ y como a es un átomo en (S, \leq) , entonces $\phi^{-1}(z') = 0$, luego del (corolario ??) se tiene que $z' = 0$ y así, $0 \prec \phi(a)$, es decir, $\phi(a)$ es un átomo en (S', \preceq) . De igual forma se tiene que si a es un co-átomo en (S, \leq) entonces $\phi(a)$ es un co-átomo en (S', \preceq) .

Ahora, claramente si (S, \leq) es atómico (resp co-atómico) entonces (S', \preceq) es atómico (resp co-atómico), pues si $0 \neq x' \in S'$, entonces $0 \neq \phi^{-1}(x') \in S$ y por tanto existe un átomo a

tal que $a \leq \phi^{-1}(x')$. luego $\phi(a)$ es un átomo en S' , y $\phi(a) \preceq x'$. El caso en que (S, \leq) es co-atómico se sigue de manera análoga.

Por ultimo, como un isomorfismo preserva sup e inf (proposición ??) y envía el 0 en el 0 y el 1 en el 1 (proposición ??), entonces si a y b en (S, \leq) son complementarios, entonces $\phi(a)$ y $\phi(b)$ son complementarios en (S', \preceq) , pues si $0 = a \wedge b$, entonces $0 = \phi(0) = \phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$, y si $1 = a \vee b$, entonces $1 = \phi(1) = \phi(a \vee b) = \phi(a) \vee \phi(b)$.

Ahora, utilizando lo expuesto anteriormente y el isomorfismo inverso, se tiene la siguiente proposición, con la cual, concluimos esta sección.

Proposición 1.1.7. Si (S, \leq) es retículo completo, y $\phi : (S, \leq) \longrightarrow (S', \preceq)$ es un isomorfismo, entonces:

1. a es un átomo en (S, \leq) (resp co-átomo) si, y sólo si, $\phi(a)$ es un átomo (resp un co-átomo) en (S', \preceq) .
2. (S, \leq) es atómico (resp co-atómico) si, y sólo si, (S', \preceq) es atómico (resp co-atómico).
3. a y b son complementarios en (S, \leq) si, y sólo si, $\phi(a)$ y $\phi(b)$ son complementarios en (S', \preceq) .
4. (S, \leq) es complementado si, y sólo si, (S', \preceq) es complementado.

1.2. Filtros y Producto de Filtros

1.2.1. Filtros

En esta subsección queremos recordar algunas propiedades básicas de filtros sobre un conjunto S . Empezamos denotando por $\mathcal{P}(S)$ al conjunto de partes de S .

Definición 1.2.1. Un filtro \mathcal{F} sobre un conjunto no vacío S es una colección no vacía de subconjuntos de S ($\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$) que satisface:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
3. Si $F \in \mathcal{F}$ y $W \subseteq S$ es tal que $F \subseteq W$, entonces $W \in \mathcal{F}$.

Denotamos por $\text{Fil}(S)$ al conjunto de todos los filtros sobre S .

Ejemplo 1.2.1. Si $\emptyset \neq A \subseteq S$, la colección $\{B \subseteq S \mid A \subseteq B\}$, la cual notaremos por $\langle A \rangle$, es un filtro sobre S . En efecto; $\emptyset \notin \langle A \rangle$ pues $A \not\subseteq \emptyset$. Por otra parte, si $B, C \in \langle A \rangle$, entonces $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$ y por tanto $A \subseteq B \cap C$, es decir, $B \cap C \in \langle A \rangle$. Por ultimo, si $B \in \langle A \rangle$ y C es un subconjunto de S tal que $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq B \subseteq C$ y por tanto $C \in \langle A \rangle$.

$\langle A \rangle$ es llamado el filtro principal generado por A . De igual forma denotaremos por $\langle x \rangle$ al filtro principal generado por el conjunto unitario $\{x\}$. Además, diremos que un filtro es principal si es de la forma $\langle A \rangle = \{B \subseteq S \mid A \subseteq B\}$ para algún $A \subseteq S$.

Nota 1.2.1. Nótese que si \mathcal{F} es un filtro sobre un conjunto S , entonces para cada $A \in \mathcal{F}$ se tiene que $\langle A \rangle \subseteq \mathcal{F}$, pues si $B \in \langle A \rangle$ entonces $A \subseteq B$, y puesto que $A \in \mathcal{F}$, de la propiedad 3 de la definición de filtro se sigue que $B \in \mathcal{F}$.

Por otra parte, obsérvese que si $A, B \subseteq S$ tales que $A \subseteq B$, entonces $\langle B \rangle \subseteq \langle A \rangle$, pues si $C \in \langle B \rangle$ entonces $B \subseteq C$, y como $A \subseteq B$ entonces $A \subseteq C$ y por tanto $C \in \langle A \rangle$.

Ejemplo 1.2.2. Si S es un conjunto infinito, entonces la colección $\mathcal{F}_{cofin} = \{A \subseteq S \mid S \setminus A \text{ es finito}\}$ es un filtro sobre S . En efecto;

- 1) Claramente $\emptyset \notin \mathcal{F}_{cofin}$ pues $S \setminus \emptyset = S$ y S no es finito.
- 2) Si $A, B \in \mathcal{F}_{cofin}$ entonces $S \setminus A$ y $S \setminus B$ son finitos, de lo cual se sigue que $(S \setminus A) \cup (S \setminus B) = S \setminus (A \cap B)$ es finito (pues es unión finita de conjuntos finitos). Por tanto, se tiene que si $A, B \in \mathcal{F}_{cofin}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_{cofin}$.
- 3) Sean $A \in \mathcal{F}_{cofin}$ y $B \subseteq S$ tal que $A \subseteq B$. Veamos que $B \in \mathcal{F}_{cofin}$.

Como $A \in \mathcal{F}_{cofin}$ entonces $S \setminus A$ es finito. Ahora, puesto que $A \subseteq B$, se tiene que $S \setminus B \subseteq S \setminus A$ y por tanto $S \setminus B$ es finito (pues es un subconjunto de un conjunto finito).

Así, de 1), 2) y 3) se tiene que \mathcal{F}_{cofin} es un filtro sobre S .

El filtro del ejemplo anterior (\mathcal{F}_{cofin}) se conoce como el filtro de los complementos finitos.

El siguiente ejemplo nos sera de gran utilidad en la sección 3,2 para discutir sobre la distributividad infinita del retículo de las pretopologías.

Ejemplo 1.2.3. Si S es un conjunto infinito y $x \in S$, entonces la colección $\mathcal{F} = \{A \subseteq S \mid x \in A \text{ y } S \setminus A \text{ es finito}\}$ es un filtro sobre S . En efecto;

- 1) Claramente $\emptyset \notin \mathcal{F}$ pues $x \notin \emptyset$.
- 2) Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $x \in A$, $x \in B$ y $S \setminus A, S \setminus B$ son finitos, de lo cual se sigue que $x \in A \cap B$ y $(S \setminus A) \cup (S \setminus B) = S \setminus (A \cap B)$ es finito. Por tanto, se tiene que si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- 3) Sean $A \in \mathcal{F}$ y $B \subseteq S$ tal que $A \subseteq B$. Veamos que $B \in \mathcal{F}$.

Como $A \in \mathcal{F}$ entonces $x \in A$ y $S \setminus A$ es finito. Ahora, puesto que $A \subseteq B$, se tiene que $x \in B$ y $S \setminus B \subseteq S \setminus A$ y por tanto $S \setminus B$ es finito.

Así, de 1), 2) y 3) se tiene que \mathcal{F} es un filtro sobre S .

Lema 1.2.1. Si $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es una colección de filtros sobre un conjunto S , entonces $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es un filtro sobre S .

Definición 1.2.2. Una colección no vacía $\beta \subseteq \mathcal{P}(S)$ es una **base** para un filtro sobre S , si satisface:

1. $\emptyset \notin \beta$,
2. Para cada $B_1, B_2 \in \beta$, existe $B_3 \in \beta$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Lema 1.2.2. Si β es una base para un filtro sobre S , entonces la colección

$$\langle \beta \rangle = \{A \subseteq S \mid \text{existe } B \in \beta \text{ tal que } B \subseteq A\}$$

es un filtro sobre S llamado el filtro generado por la base β .

Definición 1.2.3. Una colección no vacía $\beta' \subseteq \mathcal{P}(S)$ es una **subbase** para un filtro sobre S , si cada intersección finita de elementos de β' es no vacía.

Lema 1.2.3. Si $\beta' \subseteq \mathcal{P}(S)$ es una subbase para un filtro sobre S , entonces la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de β' es base para un filtro sobre S . El filtro

$$\langle \beta' \rangle = \{A \subseteq S \mid \text{existen } B_1, B_2, \dots, B_n \in \beta' \text{ tales que } \bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq A\}$$

es llamado el filtro generado por la subbase β' .

Definición 1.2.4. Sean S un conjunto no vacío y \mathcal{U} un filtro sobre S . Decimos que \mathcal{U} es un **ultrafiltro** si para cada $\mathcal{F} \in \text{Fil}(S)$ tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, se tiene que $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Teorema 1.2. Dado cualquier filtro \mathcal{F} sobre un conjunto S , existe un ultrafiltro \mathcal{U} sobre S tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Este teorema es equivalente a tener el Axioma de elección, pero además es equivalente a tener el Lema de Zorn y también es equivalente a tener el Teorema de Tychonoff.

Teorema 1.3. Todo filtro es la intersección de todos los ultrafiltros que lo contienen. Es decir; si $\mathcal{F} \in \text{Fil}(S)$, entonces

$$\mathcal{F} = \bigcap \{\mathcal{U} \in \text{Fil}(S) \mid \mathcal{U} \text{ es un ultrafiltro y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}\}$$

Las demostraciones de las afirmaciones ??, ??, ??, la proposición ?? y el teorema ?? se pueden consultar en [?] o en [?].

Nota 1.2.2. Nótese que para cada $x \in S$, $\langle x \rangle$ es un ultrafiltro sobre S . En efecto; Si $\mathcal{F} \in \text{Fil}(S)$ es tal que $\langle x \rangle \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\langle x \rangle = \mathcal{F}$, ya que si existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \notin \langle x \rangle$ entonces $x \notin A$ y por tanto $x \in S \setminus A$, lo cual implica que $S \setminus A \in \langle x \rangle$, y como $\langle x \rangle \subseteq \mathcal{F}$, entonces $S \setminus A \in \mathcal{F}$, y como $A \in \mathcal{F}$, se tendría que $(S \setminus A) \cap A = \emptyset \in \mathcal{F}$ lo cual contradice que \mathcal{F} es un filtro sobre S .

A continuación probaremos algunas proposiciones que usaremos en el capítulo 3.

Proposición 1.2.1. Sean S es un conjunto no vacío y \mathcal{F} un filtro sobre S . Si existe un subconjunto finito B de S tal que $B \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} = \langle A \rangle$ para algún $A \subseteq B$. Es decir; todo filtro conteniendo a un subconjunto finito es principal.

Demostración.

Sean $\mathcal{F} \in \text{Fil}(S)$ y $B \subseteq S$, B finito con $|B| = n$ tal que $B \in \mathcal{F}$. Veamos que existe $A \subseteq B$ tal que $\mathcal{F} = \langle A \rangle$.

Sea $\mathcal{C} = \{C \subseteq B \mid C \in \mathcal{F}\}$. La colección \mathcal{C} es no vacía pues $B \in \mathcal{C}$. Afirmamos que $\mathcal{F} = \langle \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \rangle$. En efecto; puesto que la colección \mathcal{C} tiene menos de $2^n - n$ elementos, entonces $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{F}$ (pues para cada $C \in \mathcal{C}$, $C \in \mathcal{F}$ y \mathcal{F} es cerrado para intersecciones finitas), y así $\langle \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \rangle \subseteq \mathcal{F}$. Por otro lado, si $F \in \mathcal{F}$, entonces $F \cap B \in \mathcal{C}$ y por tanto $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq F \cap B \subseteq F$, es decir; $F \in \langle \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \rangle$ y por consiguiente $\mathcal{F} \subseteq \langle \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \rangle$. Por tanto, si tomamos $A = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq B$ tenemos que $\mathcal{F} = \langle A \rangle$. ■

Lema 1.2.4. Sea S un conjunto no vacío. Entonces: S es finito si, y sólo si, todo filtro sobre S es principal.

Demostración.

Si S es finito y \mathcal{F} es un filtro sobre S , de la proposición ?? se sigue que \mathcal{F} es principal.

Recíprocamente, si S no es finito, existe el filtro de los complementos finitos $\mathcal{F}_{\text{cofin}} = \{A \subseteq S \mid S \setminus A \text{ es finito}\}$, el cual no es principal, pues si $A \in \mathcal{F}_{\text{cofin}}$ entonces para cada $a \in A$, $A \setminus \{a\} \in \mathcal{F}_{\text{cofin}}$ (pues $S \setminus A$ es finito y por consiguiente $S \setminus (A \setminus \{a\}) = (S \setminus A) \cup \{a\}$ también lo es), y es claro que $A \not\subseteq A \setminus \{a\}$, luego $A \setminus \{a\} \notin \langle A \rangle$. Por tanto, $\mathcal{F}_{\text{cofin}} \neq \langle A \rangle$ para todo $A \subseteq S$. ■

Cabe recordar que $(\text{Fil}(S), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado (\leq es el orden de la inclusión), y puesto que la intersección de filtros sobre un conjunto S , es de nuevo un filtro sobre S (afirmación (??)), dada cualquier colección $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de elementos de $\text{Fil}(S)$, se tiene que $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ siempre existe, lo cual no siempre ocurre con el sup.

Sin embargo, podemos “completar” a $\text{Fil}(S)$ uniéndole el conjunto $\{\mathcal{P}(S)\}$.

Por tanto, si admitimos a $\mathcal{P}(S)$ como filtro sobre S , de el teorema (??) se sigue que $\text{Fil}(S) \cup \{\mathcal{P}(S)\}$ es un retículo completo que tiene como elemento máximo a $\mathcal{P}(S)$.

Nota 1.2.3. $\mathcal{P}(S)$ es llamado el filtro impropio sobre S .

Por otro lado, si $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es una colección de elementos de $\text{Fil}(S)$, sabemos que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es una subbase para un filtro sobre S si, y sólo si, cada intersección finita de elementos de

$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es no vacía. Por supuesto, si tomamos $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{F}_\gamma$ para un $\gamma \in \Gamma$, es claro que $\bigcap_{i=1}^n B_i \in \mathcal{F}_\gamma$ y por tanto $\bigcap_{i=1}^n B_i \neq \emptyset$, luego para que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ sea una subbase para un filtro sobre S , es suficiente y necesario que para cada $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ y para cada $F_\gamma \in \mathcal{F}_\gamma$ y para cada $F_{\gamma'} \in \mathcal{F}_{\gamma'}$, $F_\gamma \cap F_{\gamma'} \neq \emptyset$.

Además, si esto ocurre, es decir; si $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es una subbase para un filtro sobre S , entonces en $\text{Fil}(S)$, $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ existe y es el filtro generado por la subbase $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$, tal y como probaremos a continuación.

Lema 1.2.5. Sea S un conjunto no vacío. Si $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una colección de elementos de $\text{Fil}(S)$ entonces: $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ existe si, y sólo si, $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es una subbase para un filtro sobre S . En tal caso $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es el filtro generado por la subbase $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$.

Demostración.

Si $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ no es una subbase para un filtro sobre S , entonces existen $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ tales que para algún $F_\gamma \in \mathcal{F}_\gamma$ y para algún $F_{\gamma'} \in \mathcal{F}_{\gamma'}$ se tiene que $F_\gamma \cap F_{\gamma'} = \emptyset$, y por tanto en $\text{Fil}(S)$, $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ no existe (pues ningún filtro \mathcal{G} sobre S puede contener a \mathcal{F}_γ y $\mathcal{F}_{\gamma'}$ ya que de lo contrario $\emptyset = F_\gamma \cap F_{\gamma'} \in \mathcal{G}$ lo cual contradice que \mathcal{G} es un filtro sobre S).

Recíprocamente, si $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es una subbase para un filtro sobre S , entonces $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es el filtro generado por la subbase $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$. En efecto; es claro que para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{F}_\gamma \subseteq \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle$, y por tanto $\langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle$ es cota superior del conjunto $\{\mathcal{F}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Por otra parte, si $\mathcal{G} \in \text{Fil}(S)$ es tal que para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{F}_\gamma \subseteq \mathcal{G}$, entonces si $A \in \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle$, existen $B_1, B_2, \dots, B_n \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ tales que $\bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq A$, y como para cada $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, $B_i \in \mathcal{G}$ (pues para cada $i \in I$, $B_i \in \mathcal{F}_{\gamma_i}$ para algún $\gamma_i \in \Gamma$ y $\mathcal{F}_{\gamma_i} \subseteq \mathcal{G}$ para cada $\gamma \in \Gamma$), entonces $\bigcap_{i=1}^n B_i \in \mathcal{G}$ y por tanto $A \in \mathcal{G}$, es decir; si $\mathcal{G} \in \text{Fil}(S)$ es tal que para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{F}_\gamma \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle \subseteq \mathcal{G}$ y por consiguiente $\langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle$ es la menor de las cotas superiores del conjunto $\{\mathcal{F}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Luego $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma = \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle$. ■

Claro, en $\text{Fil}(S) \cup \{\mathcal{P}(S)\}$ el sup de cualquier colección de elementos de $\text{Fil}(S)$ siempre existe, pues $\text{Fil}(S) \cup \{\mathcal{P}(S)\}$ es un retículo completo. En el caso en que la unión de los elementos de la colección dada, no sea una subbase para un filtro sobre S , entonces el sup de la colección es $\mathcal{P}(S)$.

Lema 1.2.6. El conjunto de todos los filtros principales es \vee -denso en $\text{Fil}(S)$.

Demostración.

Sea $\mathcal{F} \in \text{Fil}(S)$. Veamos que $\mathcal{F} = \bigvee \{ \langle F \rangle \mid F \in \mathcal{F} \}$.

Si $A \in \mathcal{F}$, $\langle A \rangle \in \{ \langle F \rangle \mid F \in \mathcal{F} \}$ y por tanto $\langle A \rangle \leq \bigvee \{ \langle F \rangle \mid F \in \mathcal{F} \}$, es decir; $A \in \bigvee \{ \langle F \rangle \mid F \in \mathcal{F} \}$. Luego $\mathcal{F} \leq \bigvee \{ \langle F \rangle \mid F \in \mathcal{F} \}$. Y puesto que \mathcal{F} es cota superior de $\{ \langle F \rangle \mid F \in \mathcal{F} \}$ (pues para cada $F \in \mathcal{F}$, $\langle F \rangle \subseteq \mathcal{F}$), se sigue que $\bigvee \{ \langle F \rangle \mid F \in \mathcal{F} \} \leq \mathcal{F}$. Así, $\mathcal{F} = \bigvee \{ \langle F \rangle \mid F \in \mathcal{F} \}$. ■

1.2.2. Producto de Filtros

Sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una colección no vacía de conjuntos no vacíos, y para cada $i \in I$ sea β_i una base para un filtro sobre S_i . Sea $\beta \subseteq \mathcal{P}(\prod_{i \in I} S_i)$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\prod_{i \in I} S_i$ de la forma $\prod_{i \in I} A_i$ donde $A_i = S_i$ salvo para un número finito de índices, y $A_i \in \beta_i$ para cada $i \in I$ tal que $A_i \neq S_i$.

Del hecho que β_i es una base para un filtro en S_i para cada $i \in I$, y que $\prod_{i \in I} A_i \cap \prod_{i \in I} B_i = \prod_{i \in I} (A_i \cap B_i)$ se sigue que β es base para un filtro sobre $\prod_{i \in I} S_i$.

Definición 1.2.5. Sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una colección no vacía de conjuntos no vacíos y para cada $i \in I$ sea \mathcal{F}_i un filtro sobre S_i . Definimos $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ el producto de los filtros \mathcal{F}_i , como el filtro sobre $\prod_{i \in I} S_i$ que tiene como base el conjunto de todos los subconjuntos de $\prod_{i \in I} S_i$ de la forma $\prod_{i \in I} A_i$ donde $A_i \in \mathcal{F}_i$ para cada $i \in I$, y $A_i = S_i$ salvo para un número finito de índices. Es decir $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es el filtro sobre $\prod_{i \in I} S_i$ generado por la base

$$\beta = \left\{ \prod_{i \in I} A_i \subseteq \prod_{i \in I} S_i \mid A_i \in \mathcal{F}_i \text{ para cada } i \in I, \text{ y } A_i = S_i \text{ salvo para un número finito de índices} \right\}.$$

La definición anterior es tomada de [?].

Es claro que no todo filtro sobre $\prod_{i \in I} S_i$ es un filtro producto, pues si $\emptyset \neq \prod_{i \in I} F_i \subseteq \prod_{i \in I} S_i$, entonces $\langle \prod_{i \in I} F_i \rangle = \{ \prod_{i \in I} A_i \subseteq \prod_{i \in I} S_i \mid \prod_{i \in I} F_i \subseteq \prod_{i \in I} A_i \}$ es un filtro sobre $\prod_{i \in I} S_i$ y, nótese que de la definición anterior se tiene que en general $\langle \prod_{i \in I} F_i \rangle \neq \prod_{i \in I} \langle F_i \rangle$.

Nota 1.2.4. Denotamos por $\text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$ al conjunto de todos los filtros productos sobre $\prod_{i \in I} S_i$.

Definición 1.2.6. Dados $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i, \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i \in \text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$, decimos que $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i \leq \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i$ si, y sólo si, $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i \subseteq \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i$.

Es claro que $(\text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado en el cual, dada cualquier colección $\{\mathfrak{F}_\gamma = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i}\}_{\gamma \in \Gamma}$ de elementos de $\text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$, se tiene que $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} (\prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i}) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (\prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i}) = \prod_{i \in I} (\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i}) \in \text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$ pues $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i} \in \text{Fil}(S_i)$ para cada $i \in I$.

Claro, al igual que ocurre en $\text{Fil}(S)$, en $\text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$ el sup de cualquier colección de elementos de $\text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$ no siempre existe. Sin embargo, también podemos “completar” a $\text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$ si para cada $i \in I$, admitimos a $\mathcal{P}(S_i)$ como filtro sobre S_i .

De otro lado, nótese que el orden en $\text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$ es inducido de manera natural por el orden de $\text{Fil}(S_i)$ para cada $i \in I$, tal y como probamos a continuación

Lema 1.2.7. Si $\mathfrak{F} = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i, \mathfrak{G} = \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i \in \text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$ entonces

$$\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i \leq \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i \Leftrightarrow \mathcal{F}_i \leq \mathcal{G}_i \text{ para cada } i \in I$$

Recuérdese que \leq es el orden de la inclusión.

Demostración.

Sea $A = \prod_{i \in I} A_i \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Veamos que $A = \prod_{i \in I} A_i \in \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i$.

si $A = \prod_{i \in I} A_i \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$, de la definición de filtro producto se sigue que $A_i \in \mathcal{F}_i$ para cada $i \in I$, y $A_i = S_i$ salvo para un número finito de índices. Luego si para cada $i \in I$, $\mathcal{F}_i \leq \mathcal{G}_i$, entonces $A_i \in \mathcal{G}_i$ para cada $i \in I$, y $A_i = S_i$ salvo para un número finito de índices, y por tanto $A = \prod_{i \in I} A_i \in \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i$. De lo cual tenemos que si $\mathcal{F}_i \leq \mathcal{G}_i$ para cada $i \in I$, entonces

$$\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i \leq \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i.$$

Recíprocamente, sean $j \in I$, y $A_j \in \mathcal{F}_j$. Veamos que $A_j \in \mathcal{G}_j$.

Para cada $i \in I$ con $i \neq j$, tomemos $A_i = S_i$ y consideremos $A = \prod_{i \in I} A_i$. Entonces, $A = \prod_{i \in I} A_i \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$, luego si $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i \leq \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i$, tenemos que $\prod_{i \in I} A_i \in \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i$ y por tanto $A_j \in \mathcal{G}_j$. De lo cual se sigue que si $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i \leq \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i$, entonces $\mathcal{F}_i \leq \mathcal{G}_i$ para cada $i \in I$. ■

En la siguiente afirmación probamos el análogo de la afirmación (??).

Lema 1.2.8. Sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una colección no vacía de conjuntos no vacíos. Si $\{\mathfrak{F}_\gamma = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i}\}_{\gamma \in \Gamma}$ una colección de elementos de $\text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$ entonces: $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}_\gamma$ existe si, y sólo si, para cada $i \in I$, $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i}$ es una sub-base para un filtro sobre S_i . En tal caso

$$\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}_\gamma = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \left(\prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i} \right) = \prod_{i \in I} \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i} \right).$$

Demostración.

Sea $\{\mathfrak{F}_\gamma = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i}\}_{\gamma \in \Gamma}$ una colección de elementos de $\text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$. Obsérvese que si existen $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ tales que para algún $\prod_{i \in I} F_{\gamma_i} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i}$ y para algún $\prod_{i \in I} F_{\gamma'_i} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma'_i}$, se tiene que $(\prod_{i \in I} F_{\gamma_i}) \cap (\prod_{i \in I} F_{\gamma'_i}) = \emptyset$ entonces (por el mismo argumento expuesto en la sección anterior para $\text{Fil}(S)$), se tiene que $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}_\gamma = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \left(\prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i} \right)$ en $\text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$, no existe.

Por otro lado, nótese que para cada $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ y para cada $\prod_{i \in I} F_{\gamma_i} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i}$ y para cada $\prod_{i \in I} F_{\gamma'_i} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma'_i}$, se tiene que $(\prod_{i \in I} F_{\gamma_i}) \cap (\prod_{i \in I} F_{\gamma'_i}) \neq \emptyset$ si, y sólo si, para cada $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ y para cada $F_{\gamma_i} \in \mathcal{F}_{\gamma_i}$ y para cada $F_{\gamma'_i} \in \mathcal{F}_{\gamma'_i}$, se tiene que $F_{\gamma_i} \cap F_{\gamma'_i} \neq \emptyset$ para todo $i \in I$. es decir; para cada $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ y para todo $\prod_{i \in I} F_{\gamma_i} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i}$ y para cada $\prod_{i \in I} F_{\gamma'_i} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma'_i}$, se tiene que $(\prod_{i \in I} F_{\gamma_i}) \cap (\prod_{i \in I} F_{\gamma'_i}) \neq \emptyset$ si, y sólo si, para cada $i \in I$, $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i}$ es una sub-base para un filtro sobre $\text{Fil}(S_i)$. En tal caso, $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}_\gamma = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \left(\prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i} \right)$ en $\text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$, existe y es el producto de los filtros $\langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i} \rangle = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i}$. En efecto; para cada $i \in I$ y para cada $\gamma \in \Gamma$ se tiene que $\mathcal{F}_{\gamma_i} \subseteq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i}$ y por tanto para cada $\gamma \in \Gamma$, $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i} \subseteq \prod_{i \in I} \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i} \right)$, luego $\prod_{i \in I} \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i} \right)$ es cota superior del conjunto $\{\mathfrak{F}_\gamma = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i} \mid \gamma \in \Gamma\}$. Ahora si $\mathfrak{G} = \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i \in \text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$ es tal que para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathfrak{F}_\gamma \subseteq \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i$, entonces para cada $i \in I$ y para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{F}_{\gamma_i} \subseteq \mathcal{G}_i$ y por tanto cada $i \in I$, $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i} \subseteq \mathcal{G}_i$ y por consiguiente $\prod_{i \in I} \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i} \right) \subseteq \prod_{i \in I} \mathcal{G}_i = \mathfrak{G}$. Así, $\prod_{i \in I} \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i} \right)$ es la menor de las cotas superiores del conjunto $\{\mathfrak{F}_\gamma = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i} \mid \gamma \in \Gamma\}$ y por tanto $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}_\gamma = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \left(\prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i} \right)$ existe y además

$$\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}_\gamma = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \left(\prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_i} \right) = \prod_{i \in I} \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_i} \right).$$

■

Lema 1.2.9. Sea $\mathfrak{F} = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i \in \text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$. Si $F = \prod_{i \in I} F_i \in \mathfrak{F}$ entonces

$$\langle \prod_{i \in I} F_i \rangle = \prod_{i \in I} \langle F_i \rangle.$$

Demostración.

Si $A = \prod_{i \in I} A_i \in \langle \prod_{i \in I} F_i \rangle$, entonces $\prod_{i \in I} F_i \subseteq \prod_{i \in I} A_i$, luego $F_i \subseteq A_i$ para cada $i \in I$ y por tanto $A_i \in \langle F_i \rangle$ para cada $i \in I$. Por otra parte, como $\prod_{i \in I} F_i \in \mathfrak{F}$, entonces $F_i = S_i$ salvo para un número finito de índices, luego del hecho que $F_i \subseteq A_i$ para cada $i \in I$, se sigue que $A_i = S_i$ salvo para un número finito de índices, y $A_i \in \langle F_i \rangle$ para cada $i \in I$. Así, $A = \prod_{i \in I} A_i \in \prod_{i \in I} \langle F_i \rangle$.

La otra inclusión es inmediata, pues si $A = \prod_{i \in I} A_i \in \prod_{i \in I} \langle F_i \rangle$, entonces $A_i \in \langle F_i \rangle$ para cada $i \in I$, y por consiguiente $F_i \subseteq A_i$ para cada $i \in I$. Luego $\prod_{i \in I} F_i \subseteq \prod_{i \in I} A_i = A$ y por consiguiente $A \in \langle \prod_{i \in I} F_i \rangle$. ■

De la (afirmación ??) se ve fácilmente (en realidad es exactamente la misma prueba) que si $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i \in \text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$, entonces

$$\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i = \bigvee \{ \langle \prod_{i \in I} F_i \rangle \mid \prod_{i \in I} F_i \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i \}.$$

Es decir; El conjunto de los filtros producto principales es \vee - denso en $\text{Fil}^*(\prod_{i \in I} S_i)$.

En el capítulo 3 usaremos lo expuesto en esta sección para estudiar la estructura de un subconjunto de filtros en $S^S = \prod_S S$.

Capítulo

2

PRETOPOLOGÍAS

La noción de pretopología sobre un conjunto S se introduce como una función $p : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ que satisface ciertas propiedades. Al par (S, p) se le da el nombre de espacio pretopológico.

Dicho concepto ha sido estudiado ampliamente por Choquet, quien en primera instancia les da el nombre de \mathcal{V}_D espacios, y posteriormente introduce estos espacios a partir de cierta colección de filtros de vecindades (ver [?]), y por Čech, quien a las pretopologías sobre un conjunto S , les dan el nombre de operación de clausura para S , y a los espacios pretopológicos les dan el nombre de espacios clausura(ver [?]).

En este capítulo damos de manera formal el concepto de pretopología sobre un conjunto S , y mostramos que, al igual que las topologías, una pretopología está completamente determinada por especificación de la colección del filtro de vecindades de cada punto del conjunto en cuestión, al igual que por su operación de interior.

Gran parte de la terminología y notación de este capítulo es tomada de [?].

Definición 2.1. Una **topología** sobre un conjunto S es una colección τ de subconjuntos de S con las siguientes propiedades:

1. \emptyset y S están en τ .
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ .
3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ .

Un conjunto S para el que se ha definido una topología τ se llama **espacio topológico**

Definición 2.2. si S es un conjunto, una **base** para una topología sobre S es una colección β de subconjuntos de S (llamados **elementos básicos**) tales que:

1. Para cada $x \in S$, hay almenos un elemto básico B que contiene a x .
2. Si x pertenece a la intersección de de dos elementos básicos B_1 y B_2 entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Si β satisface estas dos condiciones, se define la **topología τ generada por β** como sigue: Un subconjunto U de S se dice que es abierto en S (esto es, un elemento de τ), si para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \beta$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$.

Nótese que cada elemento básico es así mismo un elemento de τ

Definición 2.3. Una **subbase** β' para una topología sobre S es una colección de subconjuntos de S cuya unión es igual a S . **La topología generada por la subbase β'** se define como la colección τ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de β'

Definición 2.4. Un subconjunto A de un espacio topológico S se dice que es **cerrado** si el conjunto $S \setminus A$ es abierto.

Definición 2.5. Dado un subconjunto A de un espacio topológico S , el **interior** de S se define como la unión de todos los subconjuntos abiertos contenidos en A , y la **clausura** de A se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A . El interior de A se denota $\text{Int } A$ y la clausura de A se denota mediante $\text{Cl } A$ o por \bar{A} . Obviamente, $\text{Int } A$ es un conjunto abierto y \bar{A} es un conjunto cerrado, más aún,

$$\text{Int } A \subset A \subset \bar{A}$$

Si A es abierto, $A = \text{Int } A$, mientras que, si A es cerrado, $A = \bar{A}$

Definición 2.6. Una pretopología o un operador pretopológico sobre un conjunto S es una función $p : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ que cumple las siguientes propiedades:

$$(K1) \quad p(\emptyset) = \emptyset.$$

$$(K2) \quad A \subseteq p(A) \text{ para cada } A \subseteq S.$$

$$(K3) \quad p(A \cup B) = p(A) \cup p(B) \text{ para cada } A, B \subseteq S$$

El par (S, p) es llamado un espacio pretopológico y el conjunto $p(A)$ es llamado la clausura de A en (S, p) .

Si además de las propiedades $(K1)$, $(K2)$ y $(K3)$, p satisface la propiedad

$$(K4) \quad p(p(A)) = p(A) \text{ para cada } A \subseteq S$$

entonces p es una topología sobre S o un operador topológico de clausura de Kuratowski, y el par (S, p) es llamado un espacio topológico.

La definición anterior es tomada de [?], aunque allí le piden a una pretopología (además de las tres condiciones de la definición anterior) que sea monótona, lo cual es una consecuencia de la propiedad $(K2)$ tal y como probaremos a continuación.

Lema 2.1. Sea S un conjunto no vacío. Si $p : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$ es una pretopología sobre S entonces, para cada $A, B \subseteq S$ tales que $A \subseteq B$ se tiene que $p(A) \subseteq p(B)$.

Demostración.

Sean $A, B \subseteq S$ tales que $A \subseteq B$. Veamos que $p(A) \subseteq p(B)$.

Puesto que $A \subseteq B$, $B = A \cup B$ luego $p(B) = p(A \cup B)$, pero por ser p una pretopología sobre S de la propiedad $(K3)$ tenemos que $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$ y por tanto $p(B) = p(A) \cup p(B)$ lo cual implica que $p(A) \subseteq p(B)$. ■

Nota 2.1. Si p es un operador topológico de clausura, existe una única topología τ_p para la cual la adherencia o clausura de cada $A \subseteq S$ es exactamente la imagen de A según p . esta topología esta determinada por $\tau_p := \{A \subseteq S \mid p(A^c) = A^c\}$.

Recíprocamente, dada una topología τ sobre S existe un único operador topológico de clausura p_τ , para el cual $\tau_{p_\tau} = \tau$ este operador está definido por $p_\tau(A) = adh_\tau(A)$ para cada $A \subseteq S$.

Por lo tanto, para un operador p que satisface $(K1)$, $(K2)$, $(K3)$ y $(K4)$ los términos operador topológico de clausura y topología, se pueden intercambiar sin lugar a ambigüedad. Probaremos estos hechos al final de esta sección.

De la definición anterior, podemos observar que una pretopología se obtiene reduciendo el conjunto de axiomas de un operador topológico de clausura de Kuratowski, y por tanto toda topología sobre un conjunto S , es una pretopología sobre S . A continuación, proporcionamos dos ejemplos de pretopologías sobre un conjunto S , que no son topologías sobre S .

Ejemplo 2.1. Sea (S, \leq) un conjunto bien ordenado y sea $p : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$ definido por $p(A) := A \cup \{y \in S \mid (\exists x \in A)(x \prec y)\}$ para cada $A \subseteq S$. Entonces p es una pretopología sobre S . Además, si S tiene por lo menos tres elementos p no es una topología sobre S .

En primer lugar, veamos que p es una pretopología sobre S .

De la definición de p , es claro que $p(\emptyset) = \emptyset$ y que $A \subseteq p(A)$ para cada $A \subseteq S$, con lo cual sólo falta probar que para cada $A, B \subseteq S$ se tiene que $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$: sean $A, B \subseteq S$, entonces

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= (A \cup B) \cup \{y \in S \mid (\exists x \in A \cup B)(x \prec y)\} \\ &= (A \cup B) \cup \{y \in S \mid [(\exists x \in A)(x \prec y)] \vee [(\exists x \in B)(x \prec y)]\} \\ &= (A \cup B) \cup \{y \in S \mid (\exists x \in A)(x \prec y)\} \cup \{y \in S \mid (\exists x \in B)(x \prec y)\} \\ &= (A \cup \{y \in S \mid (\exists x \in A)(x \prec y)\}) \cup (B \cup \{y \in S \mid (\exists x \in B)(x \prec y)\}) \\ &= p(A) \cup p(B). \end{aligned}$$

(nótese que la segunda igualdad se tiene puesto que el cuantificador existencial distribuye con respecto a la disyunción).

Así, p es una pretopología sobre S . Ahora veamos que si S tiene por lo menos tres elementos, p no es una topología sobre S .

Supongamos que $|S| \geq 3$. Como (S, \leq) es un conjunto bien ordenado, S tiene un primer elemento x_1 . Sea A el conjunto unitario formado por el primer elemento de S , es decir; $A = \{x_1\}$. Nuevamente, puesto que S es bien ordenado y $|S| \geq 3$, el conjunto $A_1 := \{x \in S \mid x_1 < x\}$ es no vacío y por tanto, por el principio del buen orden, tiene un primer elemento x_2 . Luego tenemos que $x_1 < x_2$ y que si $x \in S$ es tal que $x \neq x_2$ y $x_1 < x$, entonces $x \in A_1$ y además $x_2 < x$ (pues x_2 es el primer elemento de A_1), y por tanto $x_1 \prec x_2$. Así, $p(A) = \{x_1, x_2\}$. Nuevamente, por ser S un conjunto bien ordenado con más de dos elementos, el conjunto $A_2 := \{x \in S \mid x_2 < x\}$ es no vacío y por tanto tiene un primer elemento x_3 el cual cubre a x_2 . Así, $p(\{x_1, x_2\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$. Luego tenemos que

$$p(p(A)) = p(\{x_1, x_2\}) = \{x_1, x_2, x_3\} \neq \{x_1, x_2\} = p(A).$$

Por consiguiente, si $|S| \geq 3$, existe $A \subseteq S$ tal que $p(p(A)) \neq p(A)$ y por tanto p no es una topología sobre S .

El siguiente ejemplo nos será de gran utilidad en el siguiente capítulo para describir la estructura del retículo de las pretopologías.

Ejemplo 2.2. Sean S un conjunto con por lo menos dos elementos y a y s dos puntos distintos de S . Entonces, la función $p : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$ definida por:

$$p(A) := \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset, \\ S \setminus \{s\} & \text{si } A = \{a\}, \\ S & \text{si } A \neq \{a\} \text{ y } A \neq \emptyset \end{cases}$$

es una pretopología sobre S . En efecto; es claro que $p(\emptyset) = \emptyset$ y que $A \subseteq p(A)$ (pues si $A = \{a\}$ entonces $p(A) = S \setminus \{s\}$, luego $A \subseteq p(A)$ ya que $a \neq s$ y si $A \neq \{a\}$ entonces $p(A) = S$ y, claramente $A \subseteq S$), con lo cual sólo falta ver que $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$ para cada $A, B \subseteq S$.

Sean $A, B \subseteq S$. Veamos que $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$.

Podemos asumir que $A \neq \emptyset \neq B$, pues si $B = \emptyset$, entonces $A \cup B = A$ y por tanto $p(A \cup B) = p(A) = p(A) \cup \emptyset = p(A) \cup p(B)$, con lo cual $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$. El caso en que $A = \emptyset$ es análogo al anterior.

Ahora, si $A \cup B = \{a\}$ entonces $A = B = \{a\}$, por lo tanto $p(A \cup B) = S \setminus \{s\} = (S \setminus \{s\}) \cup (S \setminus \{s\}) = p(A) \cup p(B)$. Y si $A \cup B \neq \{a\}$, entonces $A \neq \{a\}$, o $B \neq \{a\}$, de lo cual se tiene que $p(A) \cup p(B) = S$. Por otro lado, $p(A \cup B) = S$ (pues $A \cup B \neq \{a\}$). Luego $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$.

Así, p es una pretopología sobre S . Por otra parte, nótese que $p(p(\{a\})) = p(S \setminus \{s\}) = S \neq S \setminus \{s\} = p(\{a\})$. Es decir; nótese que $p(p(\{a\})) \neq p(\{a\})$ y por tanto p no es una topología sobre S .

Definición 2.7. Sean S un conjunto no vacío y p una pretopología sobre S . Definimos el operador de interior (asociado a p) denotado por int_p como la función de $\mathcal{P}(S)$ en $\mathcal{P}(S)$ definida por

$$int_p(A) = S \setminus p(S \setminus A), \quad \text{para cada } A \subseteq S.$$

El conjunto $int_p(A)$ es llamado el interior de A en el espacio pretopológico (S, p) .

De la definición anterior tenemos que para cada $A \subseteq S$, $int_p(A) = (p(A^c))^c$. Además, es claro que la operación de interior (o el operador de interior) está determinado de manera única por la pretopología p .

Ejemplo 2.3. Para la pretopología p del ejemplo (??) se tiene que int_p es la función definida por:

$$int_p(A) := \begin{cases} S & \text{si } A = S, \\ \{s\} & \text{si } A = S \setminus \{a\}, \\ \emptyset & \text{si } A \neq S \text{ y } A \neq S \setminus \{a\}. \end{cases}$$

En efecto; si $A = S$ entonces $int_p(A) = S \setminus p(S \setminus A) = S \setminus p(S \setminus S) = S \setminus \emptyset = S$.

Si $A = S \setminus \{a\}$ entonces $int_p(A) = S \setminus p(S \setminus A)$, pero

$p(S \setminus A) = p(S \setminus (S \setminus \{a\})) = p(\{a\}) = S \setminus \{s\}$, luego $int_p(A) = S \setminus (S \setminus \{s\}) = \{s\}$ y por tanto $int_p(A) = \{s\}$.

Y si $A \neq S \setminus \{a\}$, entonces $S \setminus A \neq \{a\}$ y $p(S \setminus A) = S$, luego $int_p(A) = S \setminus S = \emptyset$.

Lema 2.2. Sean S un conjunto no vacío y p una pretopología sobre S . Entonces el operador de interior int_p satisface las siguientes propiedades:

- (i1) $int_p(S) = S$
- (i2) Para cada $A \subseteq S$, $int_p(A) \subseteq A$
- (i3) Para cada $A, B \subseteq S$, $int_p(A \cap B) = int_p(A) \cap int_p(B)$.

La demostración de la afirmación anterior se sigue fácilmente de la definición de interior utilizando leyes De Morgan y los axiomas de la definición de pretopología.

Observación 2.1. Obsérvese además que, al igual que las pretopologías, el operador de interior es monótono, pues si $A, B \subseteq S$ tales que $A \subseteq B$, entonces $S \setminus B \subseteq S \setminus A$ y por la afirmación (??) se tiene que $p(S \setminus B) \subseteq p(S \setminus A)$, luego $(S \setminus p(S \setminus A)) \subseteq (S \setminus p(S \setminus B))$, es decir; $int_p(A) \subseteq int_p(B)$.

De la definición de interior y la siguiente afirmación, se sigue que al igual que las topologías, una pretopología está completamente determinada por su operación de interior.

Lema 2.3. Sea S un conjunto no vacío. Si $int : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ es una función que satisface las tres propiedades de la afirmación anterior, es decir; si $int : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ es una función que satisface:

- (i1) $int(S) = S$
- (i2) Para cada $A \subseteq S$, $int(A) \subseteq A$
- (i3) Para cada $A, B \subseteq S$, $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$,

entonces, existe una única pretopología p sobre S para la cual $int_p(A) = int(A)$ para cada $A \subseteq S$.

Demostración.

Supongamos que la función int satisface las tres condiciones mencionadas y definamos $p : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ mediante

$$p(A) := S \setminus int(S \setminus A) \text{ para cada } A \subseteq S. \quad (*)$$

Veamos que p es una pretopología sobre S .

1) $p(\emptyset) = S \setminus int(S \setminus \emptyset) = S \setminus int(S) = S \setminus S = \emptyset$.

2) Sea $A \subseteq S$. Veamos que $A \subseteq p(A)$. Puesto que por hipótesis $int(S \setminus A) \subseteq (S \setminus A)$

entonces, $A \subseteq S \setminus \text{int}(S \setminus A)$, es decir; $A \subseteq p(A)$.

3) Sean $A, B \subseteq S$. Veamos que $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$. De la definición de p tenemos que $p(A \cup B) = S \setminus \text{int}(S \setminus (A \cup B)) = S \setminus \text{int}((S \setminus A) \cap (S \setminus B))$ y como por hipótesis $\text{int}((S \setminus A) \cap (S \setminus B)) = \text{int}(S \setminus A) \cap \text{int}(S \setminus B)$ entonces $S \setminus \text{int}((S \setminus A) \cap (S \setminus B)) = S \setminus (\text{int}(S \setminus A) \cap \text{int}(S \setminus B)) = (S \setminus \text{int}(S \setminus A)) \cup (S \setminus \text{int}(S \setminus B))$, luego $p(A \cup B) = (S \setminus \text{int}(S \setminus A)) \cup (S \setminus \text{int}(S \setminus B)) = p(A) \cup p(B)$.

Luego de 1), 2) y 3) se sigue que p es una pretopología sobre S .

Ahora veamos que para cada $A \subseteq S$, $\text{int}_p(A) = \text{int}(A)$.

Sea $A \subseteq S$. De la definición (??) se tiene que $\text{int}_p(A) = S \setminus p(S \setminus A)$. Ahora, como por (*) $p(S \setminus A) = S \setminus \text{int}(S \setminus (S \setminus A))$ entonces $p(S \setminus A) = S \setminus \text{int}(A)$ y por tanto $S \setminus p(S \setminus A) = \text{int}(A)$. Es decir; $\text{int}_p(A) = \text{int}(A)$.

Para ver que p es la única pretopología sobre S para la cual $\text{int}_p(A) = \text{int}(A)$ para cada $A \subseteq S$, supongamos que q es una pretopología sobre S para la cual $\text{int}_q(A)$ coincide con $\text{int}(A)$ para cada $A \subseteq S$. Veamos que $p = q$.

Sea $A \subseteq S$. Veamos que $p(A) = q(A)$. Puesto que para cada subconjunto de S los conjuntos interiores en los espacios pretopológicos (S, p) y (S, q) coinciden con su imagen según la función int , entonces $\text{int}_p(S \setminus A) = \text{int}(S \setminus A)$ y $\text{int}_q(S \setminus A) = \text{int}(S \setminus A)$, luego $\text{int}_p(S \setminus A) = \text{int}_q(S \setminus A)$, es decir; $S \setminus p(S \setminus (S \setminus A)) = S \setminus q(S \setminus (S \setminus A))$ y por tanto $p(A) = q(A)$. Así $p = q$. ■

A continuación, definimos lo que es de esperarse sean los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados en un espacio pretopológico. Dichos conceptos se definen exactamente de la misma forma que se hace para un espacio topológico.

Definición 2.8. Sean (S, p) un espacio pretopológico y $A \subseteq S$. Decimos que A es abierto en (S, p) si A coincide con su interior, es decir; si $A = \text{int}_p(A)$. Decimos que A es cerrado en (S, p) si A coincide con su clausura, es decir; si $A = p(A)$.

Nótese que también en un espacio pretopológico (S, p) , un subconjunto A de S es abierto si, y sólo si, su complemento $S \setminus A$ es cerrado. En efecto;

$$\begin{aligned} A \text{ es abierto en } (S, p) &\Leftrightarrow A = \text{int}_p(A) \\ &\Leftrightarrow A = S \setminus p(S \setminus A) \text{ (definición de } \text{int}_p(A)) \\ &\Leftrightarrow S \setminus A = p(S \setminus A) \\ &\Leftrightarrow S \setminus A \text{ es cerrado en } (S, p). \end{aligned}$$

De la definición de pretopología se sigue que la clausura de un conjunto no necesariamente es cerrada. De igual forma se tiene que el interior de un conjunto en un espacio pretopológico,

a diferencia que en un espacio topológico, no necesariamente es abierto tal y como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. Sea (S, p) el espacio pretopológico del ejemplo (??) y sea $A = S \setminus \{a\}$. Del ejemplo (??) se tiene que $int_p(A) = \{s\}$ y que $int_p(\{s\}) = \emptyset$. Por tanto $int_p(int_p(A)) = int_p(\{s\}) = \emptyset \neq \{s\} = int_p(A)$. Es decir, $int_p(int_p(A)) \neq int_p(A)$ y por tanto $int_p(A)$ no es abierto en (S, p) .

Lo expuesto anteriormente sugiere la siguiente afirmación:

Lema 2.4. Sean S un conjunto no vacío y p una pretopología sobre S . Entonces: p es una topología sobre S si, y sólo si, para cada $A \subseteq S$ $int_p(int_p(A)) = int_p(A)$. Es decir; p es una topología sobre S si, y sólo si, el operador de interior int_p es idempotente¹.

Demostración.

Sean S un conjunto no vacío y p una pretopología sobre S . De la definición (??) tenemos que p es una topología sobre S si, y sólo si, p es idempotente, es decir; p es una topología sobre S si, y sólo si, $p(p(A)) = p(A)$ para cada $A \subseteq S$. Sea $A \subseteq S$. Veamos que $int_p(int_p(A)) = int_p(A)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 int_p(int_p(A)) &= S \setminus p(S \setminus int_p(A)) && \text{(definición de } int_p) \\
 &= S \setminus p(S \setminus [S \setminus p(S \setminus A)]) && \text{(definición de } int_p) \\
 &= S \setminus p(p(S \setminus A)) \\
 &= S \setminus p(S \setminus A) && (p \text{ es idempotente}) \\
 &= int_p(A) && \text{(definición de } int_p)
 \end{aligned}$$

Por tanto, si p es una topología sobre S , para cada $A \subseteq S$, $int_p(int_p(A)) = int_p(A)$. Recíprocamente, veamos que si para cada $A \subseteq S$, $int_p(int_p(A)) = int_p(A)$, entonces p es una topología sobre S . En primer lugar nótese que $S \setminus int_p(S \setminus A) = S \setminus [S \setminus p(S \setminus (S \setminus A))] = p(A)$. Sea $A \subseteq S$ y supongamos que int_p es idempotente. Entonces:

$$\begin{aligned}
 p(p(A)) &= S \setminus int_p(S \setminus p(A)) \\
 &= S \setminus int_p(S \setminus [S \setminus int_p(S \setminus A)]) && (p(A) = S \setminus int_p(S \setminus A)) \\
 &= S \setminus int_p(int_p(S \setminus A)) \\
 &= S \setminus int_p(S \setminus A) && (int_p \text{ es idempotente}) \\
 &= p(A)
 \end{aligned}$$

¹Una función $\phi : X \rightarrow X$ es idempotente si $\phi(\phi(x)) = \phi(x)$ para cada $x \in X$.

Por tanto, si el operador de interior int_p es idempotente entonces p es una topología sobre S , es decir; si para cada $A \subseteq S$, $int_p(int_p(A)) = int_p(A)$, entonces p es una topología sobre S . ■

De los lemas ?? y ?? se tiene inmediatamente el siguiente corolario el cual es un resultado bien conocido en topología general (véase por ejemplo [?], pág. 27).

Corolario 2.1. Sea S un conjunto no vacío. Si $int : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ es una función que satisface:

- (i1) $int(S) = S$
- (i2) Para cada $A \subseteq S$, $int(A) \subseteq A$
- (i3) Para cada $A, B \subseteq S$, $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$,
- (i4) Para cada $A \subseteq S$, $int(int(A)) = int(A)$,

entonces, existe una única topología p sobre S para la cual $int_p(A) = int(A)$ para cada $A \subseteq S$.

Definición 2.9. Sean (S, p) un espacio pretopológico y $x \in S$. Una vecindad de x en el espacio pretopológico (S, p) , es un subconjunto A de S que contiene a x en su interior, es decir; un subconjunto A de S es una vecindad de x en (S, p) si, y sólo si, $x \in int_p(A)$.

Ejemplo 2.5. Del ejemplo anterior ?? se sigue que $A = S \setminus \{a\}$ es vecindad únicamente del punto s pues $int_p(A) = \{s\}$.

Nótese además que $A = S \setminus \{a\}$ no contiene ningún conjunto abierto que contenga a s , pues si B es abierto en (S, p) , es decir, si $B = int_p(B)$ y $s \in B \subseteq A$ entonces, como el operador de interior es monótono, se tendría que $int_p(B) \subseteq int_p(A) = \{s\}$, es decir, se tendría que $int_p(B) = \{s\}$ y por tanto, $B = \{s\}$ lo cual contradice que B es abierto, pues $\{s\}$ no es abierto ya que $int_p(\{s\}) = \emptyset$.

El ejemplo anterior sirve para ilustrar que las pretopologías carecen de una de las propiedades más importantes de un espacio topológico y es que, en un espacio pretopológico “las vecindades de un punto no necesariamente contienen un conjunto abierto conteniendo dicho punto”.

Lema 2.5. Sea (S, p) un espacio pretopológico y para cada $x \in S$ sea $\mathcal{V}_p(x)$ la colección de subconjuntos de S definida por:

$$\mathcal{V}_p(x) := \{A \subseteq S \mid x \notin p(S \setminus A)\}.$$

Entonces, para cada $x \in S$, la colección $\mathcal{V}_p(x)$ satisface las siguientes propiedades:

(FV1) $x \in V$ para cada $V \in \mathcal{V}_p(x)$.

(FV2) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$ entonces, $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$.

(FV3) Si $V \in \mathcal{V}_p(x)$ y $W \subseteq S$ tal que $V \subseteq W$ entonces $W \in \mathcal{V}_p(x)$.

Demostración.

1. Veamos que $\mathcal{V}_p(x)$ satisface la propiedad (FV1). Sea $V \in \mathcal{V}_p(x)$, por definición de $\mathcal{V}_p(x)$ se tiene que $x \notin p(S \setminus V)$, y como $S \setminus V \subseteq p(S \setminus V)$ (pues p es una pretopología sobre S) se sigue que $x \notin S \setminus V$ y por tanto, $x \in V$.

2. Veamos que $\mathcal{V}_p(x)$ satisface la propiedad (FV2). Sean $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$. Veamos que $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$.

Puesto que $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$, entonces $x \notin p(S \setminus V_1)$ y $x \notin p(S \setminus V_2)$, luego $x \notin (p(S \setminus V_1) \cup p(S \setminus V_2))$. Ahora, como p es una pretopología sobre S , se tiene que $p(S \setminus V_1) \cup p(S \setminus V_2) = p((S \setminus V_1) \cup (S \setminus V_2)) = p(S \setminus (V_1 \cap V_2))$. Luego el hecho que $x \notin (p(S \setminus V_1) \cup p(S \setminus V_2))$ implica que $x \notin p(S \setminus (V_1 \cap V_2))$ y por tanto $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$.

3. Veamos que $\mathcal{V}_p(x)$ satisface la propiedad (FV3). Sean $V \in \mathcal{V}_p(x)$ y $W \subseteq S$ tales que $V \subseteq W$. Veamos que $W \in \mathcal{V}_p(x)$, es decir; veamos que $x \notin p(S \setminus W)$.

Puesto que $V \subseteq W$, $S \setminus W \subseteq S \setminus V$ y como p es una pretopología sobre S se sigue que $p(S \setminus W) \subseteq p(S \setminus V)$ (afirmación (??)). Ahora, puesto que $V \in \mathcal{V}_p(x)$, $x \notin p(S \setminus V) \supseteq p(S \setminus W)$, luego $x \notin p(S \setminus W)$ y por consiguiente $W \in \mathcal{V}_p(x)$. ■

Observación 2.2. Como una consecuencia inmediata de la afirmación anterior se tiene que para cada $x \in S$, la colección $\mathcal{V}_p(x)$ es un filtro sobre S ; la propiedad (FV1) implica que $\emptyset \notin \mathcal{V}_p(x)$ y las propiedades (FV2) y (FV3) son precisamente las dos propiedades restantes que se le piden a un filtro.

Nótese además que para cada $x \in S$,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_p(x) &= \{A \subseteq S \mid x \notin p(S \setminus A)\} \\ &= \{A \subseteq S \mid x \in S \setminus p(S \setminus A)\} \\ &= \{A \subseteq S \mid x \in \text{int}_p(A)\} \\ &= \{A \subseteq S \mid A \text{ es vecindad de } x\} \end{aligned}$$

de lo cual se sigue que $A \subseteq S$ es una vecindad de x si, y sólo si, $A \in \mathcal{V}_p(x)$. Este hecho justifica la siguiente definición:

Definición 2.10. En un espacio pretopológico (S, p) para cada $x \in S$, la colección $\mathcal{V}_p(x)$ es llamada el filtro de vecindades de x .

De la definición de $\mathcal{V}_p(x)$ (dada en la afirmación (??)) se sigue que para cada $x \in S$, el filtro de vecindades de x , $\mathcal{V}_p(x)$ es determinado de manera única por la pretopología p . A continuación, veremos que este último también (al igual que el interior) determina de manera única una pretopología, pero antes probaremos la siguiente afirmación que caracteriza (al igual que en topología) la clausura de un conjunto en un espacio pretopológico a partir de los filtros de vecindades.

Proposición 2.1. Sean S un conjunto no vacío, p una pretopología sobre S , $A \subseteq S$ y $x \in S$. Entonces: $x \in p(A)$ si, y sólo si, para cada $V \in \mathcal{V}_p(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$. Es decir, en un espacio pretopológico, un punto está en la clausura de un conjunto si toda vecindad del punto interseca al conjunto.

Demostración.

Si existe $V \in \mathcal{V}_p(x)$ tal que $V \cap A = \emptyset$, entonces $V \subseteq S \setminus A$ y por (FV3) se sigue que $S \setminus A \in \mathcal{V}_p(x)$ y por tanto $x \notin p(S \setminus (S \setminus A)) = p(A)$. Luego tenemos que si $x \in p(A)$, entonces $A \cap V \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}_p(x)$.

Recíprocamente, si $x \notin p(A) = p(S \setminus (S \setminus A))$, entonces $S \setminus A \in \mathcal{V}_p(x)$, y como $(S \setminus A) \cap A = \emptyset$, entonces se tiene que existe $V \in \mathcal{V}_p(x)$ ($V = S \setminus A$) tal que $V \cap A = \emptyset$. Luego tenemos que si $A \cap V \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}_p(x)$, entonces $x \in p(A)$. ■

Proposición 2.2. Sea S un conjunto no vacío. Si para cada $x \in S$ se le asigna una colección \mathcal{F}_x de subconjuntos de S que satisface las propiedades de la (afirmación ??), es decir; si para cada $x \in S$ la colección \mathcal{F}_x satisface que:

(FV1) $x \in F$ para cada $F \in \mathcal{F}_x$.

(FV2) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_x$ entonces, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_x$.

(FV3) Si $F \in \mathcal{F}_x$ y $W \subseteq S$ tal que $F \subseteq W$ entonces $W \in \mathcal{F}_x$,

entonces existe una única pretopología p sobre S para la cual el filtro de vecindades de cada $x \in S$, $\mathcal{V}_p(x)$ coincide con la colección \mathcal{F}_x ; es decir; existe una única pretopología p sobre S para la cual $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{F}_x$ para cada $x \in S$.

Demostración.

Supongamos que para cada $x \in S$ la colección \mathcal{F}_x satisface (FV1), (FV2) y (FV3) y definamos $p : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$ mediante

$$p(A) := \{x \in S \mid \text{para cada } F \in \mathcal{F}_x, F \cap A \neq \emptyset\} \text{ para cada } A \subseteq S. \quad (**)$$

Veamos que p es una pretopología sobre S .

De la definición de p (***) se sigue que $p(\emptyset) = \emptyset$, y que $A \subseteq p(A)$ para cada $A \subseteq S$ (si $x \in A$, puesto que la colección \mathcal{F}_x satisface (FV1), para cada $F \in \mathcal{F}_x$, $x \in F$ y por tanto para cada $F \in \mathcal{F}_x$, $x \in F \cap A \neq \emptyset$, así $x \in p(A)$), con lo cual solo falta probar que para cada $A, B \subseteq S$, $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$.

Sean $A, B \subseteq S$. Veamos que $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$. Si $x \notin p(A \cup B)$, de la definición de p (***), se tiene que existe $F \in \mathcal{F}_x$ tal que $(A \cup B) \cap F = \emptyset$, luego $(A \cup B) \cap F = (A \cap F) \cup (B \cap F) = \emptyset$ y por tanto $A \cap F = \emptyset$ y $B \cap F = \emptyset$. Así, $x \notin p(A)$ y $x \notin p(B)$ y por consiguiente $x \notin p(A) \cup p(B)$. De lo cual tenemos que $p(A) \cup p(B) \subseteq p(A \cup B)$. Recíprocamente, si $x \notin p(A) \cup p(B)$, entonces $x \notin p(A)$ y $x \notin p(B)$, luego de (***) se sigue que existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_x$ tales que $F_1 \cap A = \emptyset$ y $F_2 \cap B = \emptyset$. Ahora, puesto que \mathcal{F}_x satisface (FV2) y $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_x$, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_x$ y además

$$(F_1 \cap F_2) \cap (A \cup B) = ((F_1 \cap F_2) \cap A) \cup ((F_1 \cap F_2) \cap B) = ((F_1 \cap A) \cap F_2) \cup ((F_2 \cap B) \cap F_1) = \emptyset.$$

Luego, existe $F \in \mathcal{F}_x$ ($F = F_1 \cap F_2$) tal que $F \cap (A \cup B) = \emptyset$ y por tanto $x \notin p(A \cup B)$. De lo cual tenemos que $p(A \cup B) \subseteq p(A) \cup p(B)$.

Así, p es una pretopología sobre S .

Ahora veamos que para cada $x \in S$, $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{F}_x$.

Sea $x \in S$. Si $V \in \mathcal{V}_p(x)$, entonces de la definición de $\mathcal{V}_p(x)$ (lema ??) se tiene que $x \notin p(S \setminus V)$, luego de la definición de p (***) se sigue que existe $F \in \mathcal{F}_x$ tal que $(S \setminus V) \cap F = \emptyset$, luego $F \subseteq V$, y por tanto $V \in \mathcal{F}_x$ (pues \mathcal{F}_x satisface (FV3)). Recíprocamente, si $F \in \mathcal{F}_x$, de (***) se sigue que $x \notin p(S \setminus F)$ (pues $(S \setminus F) \cap F = \emptyset$), y por la definición de $\mathcal{V}_p(x)$ se sigue que $F \in \mathcal{V}_p(x)$. Así $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{F}_x$.

Para concluir la prueba, veamos que p es la única pretopología sobre S para la cual $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{F}_x$ para cada $x \in S$.

Sea q una pretopología sobre S para la cual $\mathcal{V}_q(x) = \mathcal{F}_x$ para cada $x \in S$. Veamos que $p = q$, es decir; veamos que para cada $A \subseteq S$, $p(A) = q(A)$. Puesto que para cada $x \in S$, $\mathcal{V}_q(x) = \mathcal{F}_x = \mathcal{V}_p(x)$, entonces $\mathcal{V}_q(x) = \mathcal{V}_p(x)$ para cada $x \in S$. Ahora, si $A \subseteq S$, entonces:

$$\begin{aligned} x \in p(A) &\Leftrightarrow \text{para cada } V \in \mathcal{V}_p(x), V \cap A \neq \emptyset && \text{(lema ??)} \\ &\Leftrightarrow \text{para cada } V \in \mathcal{V}_q(x), V \cap A \neq \emptyset && (\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{V}_q(x) \text{ para cada } x \in S) \\ &\Leftrightarrow x \in q(A) && \text{(lema ??)} \end{aligned}$$

Luego $p = q$ y por tanto p es la única pretopología sobre S para la cual $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{F}_x$ para cada $x \in S$. ■

De lo expuesto anteriormente tenemos que una pretopología sobre un conjunto S está completamente determinada por especificación del filtro de vecindades de cada $x \in S$. Algunos autores (por ejemplo [?], [?] y [?]) dan la definición de pretopología a partir de la colección de los filtros (o de una base para estos) de vecindades de cada punto del conjunto en cuestión.

La siguiente proposición nos proporciona una forma útil de decidir si una pretopología es o no, una topología a partir de la colección de filtros de vecindades.

Proposición 2.3. Sean S un conjunto no vacío y p una pretopología sobre S . Entonces, p es una topología sobre S si, y sólo si, para cada $x \in S$, el filtro de vecindades de x , $\mathcal{V}_p(x)$ satisface (además de (FV1), (FV2) y (FV3)) la propiedad :

(FV4) Para cada $V \in \mathcal{V}_p(x)$, existe $V' \in \mathcal{V}_p(x)$ tal que para cada $y \in V'$ se tiene que $V \in \mathcal{V}_p(y)$.

Demostración.

Sean S un conjunto no vacío, $x, y \in S$ y supongamos que p es una topología sobre S . Veamos que para cada $V \in \mathcal{V}_p(x)$, existe $V' \in \mathcal{V}_p(x)$ tal que para cada $y \in V'$ se tiene que $V \in \mathcal{V}_p(y)$. Sea $V \in \mathcal{V}_p(x)$ y tomemos $V' = \text{int}_p(V)$. Como $V \in \mathcal{V}_p(x)$, tenemos que V es una vecindad de x (observación (??)), luego $x \in \text{int}_p(V)$ y como p es una topología sobre X , de la afirmación (??) se tiene que $\text{int}_p(\text{int}_p(V)) = \text{int}_p(V)$ y por tanto, $x \in \text{int}_p(\text{int}_p(V))$, es decir; $\text{int}_p(V)$ es una vecindad de x (definición (??)) y por consiguiente $\text{int}_p(V) \in \mathcal{V}_p(x)$ (nuevamente de la observación (??)). Ahora, si $y \in \text{int}_p(V)$ se tiene que V es una vecindad de y y por consiguiente $V \in \mathcal{V}_p(y)$.

Así, si $V \in \mathcal{V}_p(x)$, existe $V' \in \mathcal{V}_p(x)$ ($V' = \text{int}_p(V)$) tal que para cada $y \in V'$, $V \in \mathcal{V}_p(y)$.

Recíprocamente, supongamos que para cada $x \in S$, el filtro de vecindades $\mathcal{V}_p(x)$ satisface la propiedad (FV4) y veamos que p es una topología sobre S , es decir; veamos que para cada $A \subseteq S$, $p(p(A)) = p(A)$.

Sea $A \subseteq S$, puesto que, por ser p una pretopología sobre S se tiene que $p(A) \subseteq p(p(A))$, es suficiente probar que $p(p(A)) \subseteq p(A)$. Sean $x \in p(p(A))$ y $V \in \mathcal{V}_p(x)$. Veamos que $V \cap A \neq \emptyset$, lo cual, por la proposición (??), es equivalente a que $x \in p(A)$.

Puesto que $V \in \mathcal{V}_p(x)$, por hipótesis se tiene que existe $V' \in \mathcal{V}_p(x)$ tal que para cada $y \in V'$, $V \in \mathcal{V}_p(y)$. Ahora como $x \in p(p(A))$ y $V' \in \mathcal{V}_p(x)$, de la proposición (??) se sigue que $V' \cap p(A) \neq \emptyset$, luego existe $y \in S$ tal que $y \in V'$ y $y \in p(A)$. Puesto que $y \in p(A)$ (nuevamente de la proposición (??)), se tiene que para cada $W \in \mathcal{V}_p(y)$, $W \cap A \neq \emptyset$, y como $y \in V'$ y $V \in \mathcal{V}_p(y)$ para cada $y \in V'$, entonces $V \cap A \neq \emptyset$ y así, $x \in p(A)$. De lo cual concluimos que $p(p(A)) \subseteq p(A)$ y por tanto $p(p(A)) = p(A)$. ■

Usaremos este hecho al final del siguiente capítulo para probar que los co-átomos en el retículo de las pretopologías son topologías.

Como una consecuencia de las proposiciones (??) y (??) tenemos el siguiente corolario, el cual, también es un resultado bastante conocido en topología general (véase por ejemplo [?], pág. 31).

Corolario 2.2. Sea S un conjunto no vacío. Si para cada $x \in S$ se le ha asignado una colección \mathcal{F}_x de subconjuntos de S que satisface:

(FV1) $x \in F$ para cada $F \in \mathcal{F}_x$.

(FV2) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_x$ entonces, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_x$.

(FV3) Si $F \in \mathcal{F}_x$ y $W \subseteq S$ tal que $F \subseteq W$ entonces $W \in \mathcal{F}_x$,

(FV4) Para cada $F \in \mathcal{F}_x$, existe $F' \in \mathcal{F}_x$ tal que para cada $y \in F'$ se tiene que $F \in \mathcal{F}_y$,

entonces existe una única topología p sobre S para la cual el filtro de vecindades de cada $x \in S$, $\mathcal{V}_p(x)$ coincide con la colección \mathcal{F}_x ; es decir; existe una única topología p sobre S para la cual $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{F}_x$ para cada $x \in S$.

Definición 2.11. sea S un conjunto no vacío y denotemos por $\text{Pretop}(S)$ al conjunto de todas las pretopologías sobre S . Definimos en $\text{Pretop}(S)$ la relación: dadas $p, q \in \text{Pretop}(S)$, decimos que $p \leq q$ si, y sólo si, $q(A) \subseteq p(A)$ para cada $A \subseteq S$.

Es claro que $(\text{Pretop}(S), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. En el siguiente capítulo, utilizando producto de filtros, probamos que $\text{Pretop}(S)$ con este orden es un retículo completo.

La siguiente afirmación nos sera de gran utilidad para estudiar la estructura de $(\text{Pretop}(S), \leq)$.

Lema 2.6. Sean $p, q \in \text{Pretop}(S)$. Entonces: $p \leq q$ si, y sólo si, $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ para cada $x \in S$.

Demostración.

Sean $p, q \in \text{Pretop}(S)$, $x \in S$ y supongamos que $p \leq q$. Veamos que $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$.

Sea $A \in \mathcal{V}_p(x)$. Puesto que $p \leq q$, se tiene que $q(S \setminus A) \subseteq p(S \setminus A)$ y puesto que $x \notin p(S \setminus A)$ (pues $A \in \mathcal{V}_p(x)$), entonces $x \notin q(S \setminus A)$ y por tanto $A \in \mathcal{V}_q(x)$. Así, tenemos que si $p \leq q$, para cada $x \in S$ $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$.

Recíprocamente, supongamos que para cada $x \in S$, $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ y veamos que $p \leq q$, es decir; supongamos que para cada $x \in S$, $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ y veamos que $q(A) \subseteq p(A)$ para

cada $A \subseteq S$.

Sea $A \subseteq S$. Si $x \notin p(A)$ de la afirmación (??) se sigue que existe $V \in \mathcal{V}_p(x)$ tal que $V \cap A = \emptyset$, y puesto que $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ para cada $x \in S$, entonces $V \in \mathcal{V}_q(x)$ y por tanto, existe $V \in \mathcal{V}_q(x)$ tal que $V \cap A = \emptyset$ lo cual (nuevamente por la afirmación (??)) implica que $x \notin q(A)$. Luego si $x \notin p(A)$, entonces $x \notin q(A)$ y por consiguiente $q(A) \subseteq p(A)$. Así, tenemos que si para cada $x \in S$, $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ entonces $p \leq q$. ■

Para concluir esta sección, probaremos lo expuesto en la nota (??).

Sea $\mathcal{K} := \{p \in \text{Pretop}(S) \mid p(p(A)) = p(A) \text{ para cada } A \subseteq S\}$, es decir; \mathcal{K} es el conjunto de todas las topologías (en el sentido de la definición (??)) sobre S , y sea $\text{Top}(S)$ el conjunto de todas las topologías (en el sentido de la definición “conjuntista”) sobre S .

Proposición 2.4.

1. Sea $p \in \mathcal{K}$. Si τ_p es la colección dada por

$$\tau_p := \{A \subseteq S \mid p(A^c) = A^c\} = \{A \subseteq S \mid A = \text{int}_p(A)\},$$

entonces $\tau_p \in \text{Top}(S)$.

2. Sea $\tau \in \text{Top}(S)$. Si $p_\tau : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ es la función definida por $p_\tau(A) := \text{adh}_\tau(A)$ para cada $A \subseteq S$, entonces $p_\tau \in \mathcal{K}$ ($\text{adh}_\tau(A)$ denota la adherencia o clausura de A según la topología τ).

Demostración.

1. Veamos que $\tau_p = \{A \subseteq S \mid A = \text{int}_p(A)\} \in \text{Top}(S)$.

(1) De (i1) y (i2) de la afirmación (??) se sigue que $S = \text{int}_p(S)$ y que $\emptyset = \text{int}_p(\emptyset)$ respectivamente. Luego $\emptyset, S \in \tau_p$.

(2) Sean $A, B \in \tau_p$. Veamos que $A \cap B \in \tau_p$.

Como $A, B \in \tau_p$, se tiene que $A = \text{int}_p(A)$ y $B = \text{int}_p(B)$, luego por (i3) de la afirmación (??) se sigue que $\text{int}_p(A) \cap \text{int}_p(B) = \text{int}_p(A \cap B)$ y por tanto $A \cap B = \text{int}_p(A \cap B)$, es decir; $A \cap B \in \tau_p$.

(3) Sea $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una colección de elementos de τ_p . Veamos que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \tau_p$.

De (i3) de la afirmación (??) se tiene que $\text{int}_p(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. Ahora, como para cada $\gamma \in \Gamma$, $A_\gamma \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ y puesto que int_p es monótona, se tiene que para cada $\gamma \in \Gamma$, $\text{int}_p(A_\gamma) \subseteq \text{int}_p(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)$ y por consiguiente $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \text{int}_p(A_\gamma) \subseteq \text{int}_p(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)$. Por otro lado, como para cada $\gamma \in \Gamma$, $A_\gamma \in \tau_p$ entonces $A_\gamma = \text{int}_p(A_\gamma)$ para cada $\gamma \in \Gamma$, y por tanto $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \text{int}_p(A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$.

Así, tenemos que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \text{int}_p(A_\gamma) \subseteq \text{int}_p(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)$, y por consiguiente $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \text{int}_p(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)$. Es decir; $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \tau_p$.

Luego de (1), (2) y (3) se tiene que $\tau_p \in \text{Top}(S)$.

2. Si $\tau \in \text{Top}(S)$, de las propiedades de la adherencia de un conjunto en (S, τ) se sigue que p_τ satisface las condiciones (K1), (K2), (K3) y (K4) de la definición (??), es decir $p_\tau \in \mathcal{K}$. ■

Proposición 2.5. Sea $F : (\mathcal{K}, \leq) \longrightarrow (\text{Top}(S), \subseteq)$ la función definida por $F(p) := \tau_p = \{A \subseteq S \mid \text{int}_p(A) = A\}$ para cada $p \in \mathcal{K}$, y sea $G : (\text{Top}(S), \subseteq) \longrightarrow (\mathcal{K}, \leq)$ la función definida por $G(\tau) := p_\tau : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ para cada $\tau \in \text{Top}(S)$, donde $p_\tau(A) = \text{adh}_\tau(A)$ para cada $A \subseteq S$. Entonces:

1. F y G son monótonas.
2. $(F \circ G)(\tau) = \tau$ para cada $\tau \in \text{Top}(S)$ y $(G \circ F)(p) = p$ para cada $p \in \mathcal{K}$.

Demostración.

1. Sean $\tau, \tau' \in \text{Top}(S)$ tales que $\tau \subseteq \tau'$. Veamos que $p_\tau \leq p_{\tau'}$, es decir; veamos que para cada $A \subseteq S$, $p_{\tau'}(A) \subseteq p_\tau(A)$.

Si $x \notin p_\tau(A) = \text{adh}_\tau(A)$, existe un $O \in \tau$ tal que $x \in O$ y $O \cap A = \emptyset$. Ahora, como $O \in \tau \subseteq \tau'$ y $x \in O$, y $O \cap A = \emptyset$, entonces $x \notin \text{adh}_{\tau'}(A) = p_{\tau'}(A)$. Luego si $x \notin p_\tau(A)$, se tiene que $x \notin p_{\tau'}(A)$ y por tanto $p_{\tau'}(A) \subseteq p_\tau(A)$. De lo anterior concluimos que $p_\tau \leq p_{\tau'}$ y por tanto, G es monótona.

Ahora veamos que F es monótona. Sean $p, q \in \mathcal{K}$ tales que $p \leq q$. Veamos que $\tau_p \subseteq \tau_q$. Sea $A \in \tau_p$, entonces $A = \text{int}_p(A) = S \setminus p(S \setminus A)$ y como $p \leq q$, entonces $q(S \setminus A) \subseteq p(S \setminus A)$, luego $S \setminus p(S \setminus A) \subseteq S \setminus q(S \setminus A) = \text{int}_q(A)$. Así, $A = \text{int}_p(A) \subseteq \text{int}_q(A)$ y como $\text{int}_q(A) \subseteq A$ (afirmación (??)), se sigue que $A = \text{int}_q(A)$ y por tanto $A \in \tau_q$. Así, tenemos que si $p \leq q$ entonces $F(p) = \tau_p \subseteq \tau_q = F(q)$ y por consiguiente F es monótona.

2. Sea $\tau \in \text{Top}(S)$. Veamos que $F(G(\tau)) = \tau$, es decir; veamos que

$$\tau_{p_\tau} = \{A \subseteq S \mid \text{int}_{p_\tau}(A) = A\} = \tau.$$

Si $A \in \tau$, entonces $S \setminus A$ es cerrado en (S, τ) , luego $\text{adh}_\tau(S \setminus A) = S \setminus A$, es decir; $p_\tau(S \setminus A) = S \setminus A$, luego $A = S \setminus p_\tau(S \setminus A) = \text{int}_{p_\tau}(A)$ y por tanto $A \in \tau_{p_\tau}$. Por consiguiente $\tau \subseteq \tau_{p_\tau}$.

Recíprocamente, si $A \in \tau_{p_\tau}$, entonces $A = \text{int}_{p_\tau}(A) = S \setminus p_\tau(S \setminus A)$, es decir;

$S \setminus A = p_\tau(S \setminus A) = adh_\tau(S \setminus A)$ y por tanto $S \setminus A$ es cerrado en (S, τ) , o lo que es igual, $A \in \tau$. Así, $\tau_{p_\tau} \subseteq \tau$ y por consiguiente, $\tau_{p_\tau} = \tau$.

Ahora, sea $p \in \mathcal{K}$. Veamos que $G(F(p)) = p$, es decir; veamos que

$$p_{\tau_p}(A) = adh_{\tau_p}(A) = p(A) \text{ para cada } A \subseteq S.$$

Sean $A \subseteq S$, $x \in p_{\tau_p}(A) = adh_{\tau_p}(A)$ y $V \in \mathcal{V}_p(x)$. Veamos que $V \cap A \neq \emptyset$, con lo cual se tiene (proposición (??)) que $x \in p(A)$.

Como $V \in \mathcal{V}_p(x)$, entonces $x \in int_p(V)$ y puesto que p es una topología sobre S , de la afirmación (??) se tiene que $int_p(V) = int_p(int_p(V))$ y por tanto $int_p(V) \in \tau_p$. Por otro lado, como $x \in adh_{\tau_p}(A)$, entonces $int_p(V) \cap A \neq \emptyset$, y puesto que $int_p(V) \subseteq V$ se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$. Así, $x \in p(A)$. De lo anterior tenemos que $p_{\tau_p}(A) \subseteq p(A)$.

Recíprocamente, sean $A \subseteq S$, $x \in p(A)$ y $O \in \tau_p$ tal que $x \in O$. Veamos que $O \cap A \neq \emptyset$, con lo cual se tiene que $x \in adh_{\tau_p}(A) = p_{\tau_p}(A)$.

Como $O \in \tau_p$ entonces $O = int_p(O)$, y como $x \in O$ entonces $x \in int_p(O)$ y por tanto $O \in \mathcal{V}_p(x)$, luego de la proposición (??) se sigue que $A \cap O \neq \emptyset$, y así, $x \in adh_{\tau_p}(A)$, es decir; $x \in p_{\tau_p}(A)$. De lo anterior tenemos que $p(A) \subseteq p_{\tau_p}(A)$ y por consiguiente $p_{\tau_p} = p$. ■

De lo anterior y la proposición (??), tenemos que (\mathcal{K}, \leq) y $(\text{Top}(S), \subseteq)$ son isomorfos.

Capítulo

3

EL RETÍCULO DE LAS PRETOPOLOGÍAS SOBRE UN CONJUNTO ARBITRARIO S

En este Capítulo mostramos que $(\text{Pretop}(S), \leq)$, el retículo de pretopologías en el conjunto S , es isomorfo a un subconjunto de filtros en S^S . De esto, deducimos que $(\text{Pretop}(S), \leq)$ es un retículo completo, atómico, co-atómico, modular, distributivo, y compactamente generado. Además, veremos que $(\text{Pretop}(S), \leq)$ es co-compactamente generado, infinitamente distributivo y complementado (en cuyo caso es únicamente complementado) sólo en el caso trivial en que S es finito. También mostramos que los co-átomos en $\text{Pretop}(S)$ son topologías sobre S .

En lo que sigue de este escrito, asumimos que S es un conjunto no vacío dado y que $\text{Pretop}(S)$ está ordenado con la relación definida anteriormente (definición (??)).

3.1. El isomorfismo ϕ

En esta sección mostramos que $(\text{Pretop}(S), \leq)$ es isomorfo a un subconjunto de filtros en $S^S = \prod_S S$.

Tal y como probamos en la sección anterior, una pretopología p sobre un conjunto S es completamente determinado por una especificación del filtro de vecindades $\mathcal{V}_p(x)$ de cada x en S . Estos filtros de vecindades satisfacen necesariamente que $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \langle x \rangle$, donde $\langle x \rangle$ es

el ultrafiltro principal generado por $\{x\}$; pues de la propiedad (FV1) para $\mathcal{V}_p(x)$, se tiene que si $A \in \mathcal{V}_p(x)$, $x \in A$, y por tanto $A \in \langle x \rangle$.

Definición 3.1.1. Para cada x en S , sea $\underline{F}(x)$ el subconjunto de $\text{Fil}(S)$ definido por

$$\underline{F}(x) := \{\mathcal{F} \in \text{Fil}(S) \mid \mathcal{F} \subseteq \langle x \rangle\}$$

y sea \underline{F} el subconjunto de $\text{Fil}^*(\prod_S S)$ definido por

$$\underline{F} := \left\{ \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \mid \mathcal{F}_x \in \underline{F}(x) \text{ para cada } x \in S \right\}.$$

Ambos ordenados con el orden inducido de $\text{Fil}(S)$ y $\text{Fil}^*(\prod_S S)$ respectivamente, es decir; ambos ordenados por la inclusión.

recuérdese que de lo expuesto en la afirmación (??), para $\prod_{x \in S} \mathcal{F}_x, \prod_{x \in S} \mathcal{G}_x \in \underline{F}$ dados, se tiene que

$$\prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \leq \prod_{x \in S} \mathcal{G}_x \Leftrightarrow \mathcal{F}_x \leq \mathcal{G}_x \text{ para cada } x \in S.$$

Por otro lado, como \underline{F} es un subconjunto de $\text{Fil}^*(\prod_S S)$, de la definición de producto de filtros (definición ??) se sigue que $F = \prod_{x \in S} F_x \in \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x$ si, y sólo si, $F_x \in \mathcal{F}_x$ para cada $x \in S$ y $F_x = S$ salvo para un número finito de elementos de S .

Lema 3.1.1. Si $p \in \text{Pretop}(S)$, entonces $\prod_{x \in S} \mathcal{V}_p(x) \in \underline{F}$.

Demostración.

Si $p \in \text{Pretop}(S)$, entonces (tal y como ya lo habíamos mencionado) para cada $x \in S$, $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \langle x \rangle$. Luego para cada $x \in S$, $\mathcal{V}_p(x) \in \underline{F}(x)$, y por tanto de la definición de \underline{F} se tiene que $\prod_{x \in S} \mathcal{V}_p(x) \in \underline{F}$. ■

En el siguiente teorema probamos que $(\text{Pretop}(S), \leq)$ y (\underline{F}, \leq) son isomorfos.

Teorema 3.1. Si $\phi : \text{Pretop}(S) \longrightarrow \underline{F}$ es la función definida por:

$$\phi(p) := \prod_{x \in S} \mathcal{V}_p(x), \text{ para cada } p \in \text{Pretop}(S).$$

Entonces ϕ es un isomorfismo de orden de $(\text{Pretop}(S), \leq)$ en (\underline{F}, \leq) .

Demostración.

Del lema (??) se sigue que ϕ está bien definida. Ahora, el hecho que ϕ sea una inmersión de orden se sigue del lema (??) y de las definiciones de los ordenes en $\underline{F}(x)$ y \underline{F} . En efecto: sean $p, q \in \text{Pretop}(S)$. entonces

$$\begin{aligned}
p \leq q &\Leftrightarrow \mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x) \text{ para cada } x \in S && \text{(lema (??))} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{V}_p(x) \leq \mathcal{V}_q(x) \text{ en } \underline{F}(x) \text{ para cada } x \in S && \text{(definición de orden en } \underline{F}(x)\text{)} \\
&\Leftrightarrow \prod_{x \in S} \mathcal{V}_p(x) \leq \prod_{x \in S} \mathcal{V}_q(x) && \text{(definición de orden en } \underline{F}\text{)} \\
&\Leftrightarrow \phi(p) \leq \phi(q) && \text{(definición de } \phi\text{)}.
\end{aligned}$$

Luego tenemos que, dadas $p, q \in \text{Pretop}(S)$, $p \leq q \Leftrightarrow \phi(p) \leq \phi(q)$ y por consiguiente ϕ es una inmersión de orden.

Ahora, la sobreyectividad de ϕ se sigue de la proposición (??), pues si $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$, para cada $x \in S$, $\mathcal{F}_x \subseteq \langle x \rangle$ y por consiguiente para cada $x \in S$, \mathcal{F}_x es un filtro que satisface que $x \in F$ para cada $F \in \mathcal{F}_x$ (pues $\mathcal{F} \leq \langle x \rangle$ y por tanto para cada $F \in \mathcal{F}$, $F \in \langle x \rangle$) lo cual implica que $x \in F$, luego de la proposición (??) se tiene que existe una única pretopología p sobre S para la cual el filtro de vecindades $\mathcal{V}_p(x)$ de cada $x \in S$ es precisamente la colección \mathcal{F}_x , es decir; existe una única pretopología p sobre S tal que para cada $x \in S$, $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{F}_x$ y por tanto $\phi(p) = \prod_{x \in S} \mathcal{V}_p(x) = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x = \mathfrak{F}$. Luego ϕ es sobreyectiva.

Así, ϕ es un isomorfismo de orden de $(\text{Pretop}(S), \leq)$ en (\underline{F}, \leq) . ■

Del isomorfismo ϕ , y lo expuesto en la sección [1], tenemos que para conocer la estructura de $(\text{Pretop}(S), \leq)$ basta con estudiar la estructura de (\underline{F}, \leq) , la cual, es fácil ver que está completamente determinada por la estructura de $(\underline{F}(x), \leq)$.

3.2. La estructura de $(\underline{F}(x), \leq)$

Empezamos esta sección mostrando que $\underline{F}(x)$ es un retículo completo.

Proposición 3.2.1. $(\underline{F}(x), \leq)$ es un retículo completo.

Demostración.

Si $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es una colección no vacía de elementos de $\underline{F}(x)$ es claro que $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \in \text{Fil}(S)$ (afirmación (??)) y que $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \leq \langle x \rangle$ (pues $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \leq \mathcal{F}_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$ y, para cada $\gamma \in \Gamma$ $\mathcal{F}_\gamma \leq \langle x \rangle$), es decir; en $\underline{F}(x)$ el inf de cualquier subconjunto no vacío existe, y

puesto que $\underline{F}(x)$ tiene un elemento máximo ($1 = \langle x \rangle$), del teorema (??) se sigue que $\underline{F}(x)$ es un retículo completo. ■

Por otra parte, nótese que si $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$ se tiene que para cada $F \in \mathcal{F}$, $x \in F$ (pues $\mathcal{F} \subseteq \langle x \rangle$) y por tanto para cada $F \in \mathcal{F}$, $F \in \langle x \rangle$ lo cual implica que $x \in F$), por consiguiente, dada cualquier colección $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de elementos de $\underline{F}(x)$, se tiene que para cada $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ y para cada $F_\gamma \in \mathcal{F}_\gamma$ y para cada $F_{\gamma'} \in \mathcal{F}_{\gamma'}$, $F_\gamma \cap F_{\gamma'} \neq \emptyset$ (pues para cada $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ y para cada $F_\gamma \in \mathcal{F}_\gamma$ y para cada $F_{\gamma'} \in \mathcal{F}_{\gamma'}$, se tiene que $x \in F_\gamma \cap F_{\gamma'}$), y por lo tanto $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es el filtro generado por la subbase $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ lema (??), es decir; dada cualquier colección $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de elementos de $\underline{F}(x)$, se tiene que

$$\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma = \left\langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \right\rangle.$$

Además, es claro que $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \in \underline{F}(x)$ pues para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{F}_\gamma \leq \langle x \rangle$ y por tanto $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \leq \langle x \rangle$.

Nótese además que el 0 en $\underline{F}(x)$ es el filtro $\{S\}$.

El resto de las proposiciones que probaremos en esta sección describen de manera un poco más explícita la estructura de $\underline{F}(x)$.

Proposición 3.2.2. $(\underline{F}(x), \leq)$ es atómico. Sus átomos (los cuales denotaremos por \mathcal{F}_{at}) son precisamente los elementos de la forma $\langle S \setminus \{a\} \rangle = \{S, S \setminus \{a\}\}$ para un $a \neq x$.

Demostración.

Sea $a \in S$, $a \neq x$. Es claro que $x \in S \setminus \{a\}$ y por tanto $\langle S \setminus \{a\} \rangle \leq \langle x \rangle$, es decir; $\langle S \setminus \{a\} \rangle \in \underline{F}(x)$. Ahora, como $\langle S \setminus \{a\} \rangle = \{S, S \setminus \{a\}\}$, entonces si $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$ y $\mathcal{F} < \langle S \setminus \{a\} \rangle$ se tiene que $\mathcal{F} = \{S\} = \langle S \rangle = 0$. Así, $\langle S \setminus \{a\} \rangle$ es un átomo de $(\underline{F}(x), \leq)$. Veamos que $\underline{F}(x)$ es atómico, es decir; veamos que todo elemento en $\underline{F}(x)$ distinto de $0 = \{S\}$ contiene un átomo.

Sea $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$, $\mathcal{F} \neq 0 = \{S\}$. Como $\mathcal{F} \neq \{S\}$, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \neq S$, y por tanto existe $a \neq x$ en $S \setminus A$ (pues si $S \setminus A = \{x\}$, $S \setminus \{x\} = A$ y así $x \notin A$ luego $A \notin \langle x \rangle$ y por tanto $A \notin \mathcal{F}$), y $\langle S \setminus \{a\} \rangle \leq \mathcal{F}$ (pues $A \subseteq S \setminus \{a\}$ ya que $a \notin A$).

Del hecho que $\underline{F}(x)$ es atómico se sigue que todo átomo en $\underline{F}(x)$ es de la forma $\langle S \setminus \{a\} \rangle$ para algún $a \neq x$. Pues si \mathcal{F}_{at} es un átomo en $\underline{F}(x)$, $\mathcal{F}_{at} \neq 0$ y por tanto existe $a \neq x$ tal que $\langle S \setminus \{a\} \rangle \leq \mathcal{F}_{at}$. Así, $\mathcal{F}_{at} = \langle S \setminus \{a\} \rangle$. ■

Proposición 3.2.3. $(\underline{F}(x), \leq)$ es co-atómico. Sus co-átomos (los cuales denotamos por \mathcal{F}_{coat}) son precisamente los elementos de la forma $\mathcal{F} = \mathcal{U} \cap \langle x \rangle$ donde \mathcal{U} es un ultrafiltro distinto de $\langle x \rangle$.

Demostración.

Sea \mathcal{U} un ultrafiltro distinto de $\langle x \rangle$. Es claro que $\mathcal{U} \cap \langle x \rangle \in \underline{F}(x)$ pues $\mathcal{U} \cap \langle x \rangle \subseteq \langle x \rangle$. Veamos que $\mathcal{U} \cap \langle x \rangle$ es un co-átomo en $\underline{F}(x)$.

Sea $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$ tal que $\langle x \rangle \cap \mathcal{U} \leq \mathcal{F} < \langle x \rangle$. Veamos que $\langle x \rangle \cap \mathcal{U} = \mathcal{F}$. Puesto que $\mathcal{F} < \langle x \rangle$, la colección $\beta = \{F \setminus \{x\} \mid F \in \mathcal{F}\}$ es base para un filtro \mathcal{G} sobre S . En efecto; Puesto que $\mathcal{F} < \langle x \rangle$, para cada $F \in \mathcal{F}$, $F \neq \{x\}$ y así, para cada $F \in \mathcal{F}$, $F \setminus \{x\} \neq \emptyset$, Luego $\emptyset \notin \beta$. Por otra parte si $B_1 = F_1 \setminus \{x\}$ y $B_2 = F_2 \setminus \{x\}$ están en β , entonces $B_1 \cap B_2 = (F_1 \setminus \{x\}) \cap (F_2 \setminus \{x\}) = (F_1 \cap F_2) \setminus \{x\} \in \beta$. Por otro lado, puesto que si $F \in \mathcal{F}$, F contiene a $F \setminus \{x\}$ y $F \in \langle x \rangle$, entonces $\mathcal{F} \subseteq \langle x \rangle \cap \mathcal{G}$ y si $A \in \langle x \rangle \cap \mathcal{G}$, entonces $x \in A$ y existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \setminus \{x\} \subseteq A$, así $F \subseteq A \cup \{x\} = A$ y por tanto $A \in \mathcal{F}$ luego $\langle x \rangle \cap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ y por consiguiente $\langle x \rangle \cap \mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Ahora, veamos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$, con lo cual tendríamos que $\mathcal{U} = \mathcal{G}$ y por tanto $\mathcal{U} \cap \langle x \rangle = \mathcal{G} \cap \langle x \rangle = \mathcal{F}$.

Veamos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$, es decir, veamos que para cada $U \in \mathcal{U}$, existe un $B \in \beta$ tal que $B \subseteq U$. si existe $U \in \mathcal{U}$ tal que para cada $F \in \mathcal{F}$, $F \not\subseteq U$, entonces para cada $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $F \not\subseteq U \subseteq U \cup \{x\}$ y por tanto $U \cup \{x\} \notin \mathcal{F}$, lo cual contradice que $\langle x \rangle \cap \mathcal{U} \leq \mathcal{F}$ (pues $U \cup \{x\} \in \langle x \rangle \cap \mathcal{U}$ ya que $x \in U \cup \{x\}$ y además $U \subseteq U \cup \{x\}$ y por consiguiente de la propiedad 3 de la definición de filtro se sigue que $U \cup \{x\} \in \mathcal{U}$). Así, se tiene que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq U \subseteq U \cup \{x\}$ y por consiguiente, para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \setminus \{x\} \subseteq U$, es decir; $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ y como \mathcal{U} es un ultrafiltro, se tiene que $\mathcal{U} = \mathcal{G}$, luego $\langle x \rangle \cap \mathcal{U} = \langle x \rangle \cap \mathcal{G} = \mathcal{F}$ y por consiguiente $\langle x \rangle \cap \mathcal{U}$ es un co-átomo en $\underline{F}(x)$.

Además, es claro que todo co-átomo en $\underline{F}(x)$ es de esta forma, pues si $\mathcal{F} < \langle x \rangle$, \mathcal{F} no es un ultrafiltro (ya que de lo contrario $\mathcal{F} = \langle x \rangle$) y por tanto existe un ultrafiltro \mathcal{U} , $\mathcal{U} \neq \langle x \rangle$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ (pues todo filtro está contenido en un ultrafiltro (proposición ??) y además si el único ultrafiltro que contiene a \mathcal{F} es $\langle x \rangle$ entonces $\mathcal{F} = \langle x \rangle$ ya que todo filtro es la intersección de todos los ultrafiltros que lo contienen (teorema ??)). Luego como $\mathcal{F} \subseteq \langle x \rangle \cap \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{F} \leq \langle x \rangle \cap \mathcal{U} < \langle x \rangle$. Luego si \mathcal{F}_{coat} es un co-átomo en $\underline{F}(x)$, $\mathcal{F}_{coat} = \langle x \rangle \wedge \mathcal{U}$ donde \mathcal{U} es un ultrafiltro que contiene a \mathcal{F}_{coat} distinto de $\langle x \rangle$.

De lo anterior, tenemos que dado $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$, $\mathcal{F} \neq \langle x \rangle = 1$, existe un co-átomo en $\underline{F}(x)$ que contiene a \mathcal{F} , y por tanto $\underline{F}(x)$ es co-atómico. ■

Proposición 3.2.4. $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$ es compacto si, y sólo si, $\mathcal{F} = \langle A \rangle$ para algún $A \subseteq S$ tal que $x \in A$. Consecuentemente $(\underline{F}(x), \leq)$ es compactamente generado.

Demostración.

Sea $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$ y supongamos que \mathcal{F} es compacto. Puesto que de la afirmación (??) se tiene que $\mathcal{F} = \bigvee \{\langle F \rangle \mid F \in \mathcal{F}\}$, entonces $\bigvee \{\langle F \rangle \mid F \in \mathcal{F}\}$ es un cubrimiento de \mathcal{F} y puesto que \mathcal{F} es compacto, existen un número finito digamos F_1, F_2, \dots, F_n de elementos de \mathcal{F} tal que $\mathcal{F} \leq \bigvee_{i=1}^n \langle F_i \rangle$. Por otra parte, como \mathcal{F} es un filtro sobre S , la intersección finita de elementos

de \mathcal{F} es de nuevo un elemento de \mathcal{F} y así, $\langle \bigcap_{i=1}^n F_i \rangle \leq \mathcal{F}$, pero $\bigvee_{i=1}^n \langle F_i \rangle = \langle \bigcap_{i=1}^n F_i \rangle$ (pues si $B \in \langle \bigcap_{i=1}^n F_i \rangle$ entonces $\bigcap_{i=1}^n F_i \subseteq B$, y como para cada $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, $F_i \in \bigcup_{i=1}^n \langle F_i \rangle$,

entonces B contiene una intersección finita de elementos de la subbase $\bigcup_{i=1}^n \langle F_i \rangle$ y por tanto

$B \in \langle \bigcup_{i=1}^n \langle F_i \rangle \rangle = \bigvee_{i=1}^n \langle F_i \rangle$, es decir; $\langle \bigcap_{i=1}^n F_i \rangle \leq \bigvee_{i=1}^n \langle F_i \rangle$. Por otra parte, como para cada

$i \in I$, $\langle F_i \rangle \leq \langle \bigcap_{i=1}^n F_i \rangle$, $\langle \bigcap_{i=1}^n F_i \rangle$ es una cota superior de $\{\langle F_i \rangle \mid i \in I\}$ y por consiguiente

$\bigvee_{i=1}^n \langle F_i \rangle \leq \langle \bigcap_{i=1}^n F_i \rangle$ y por tanto $\mathcal{F} = \langle \bigcap_{i=1}^n F_i \rangle$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$ tal que $\mathcal{F} = \langle A \rangle$ para algún $A \subseteq S$ tal que $x \in A$, y sea $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ un cubrimiento de \mathcal{F} por elementos de $\underline{F}(x)$, es decir; $\mathcal{F}_\gamma \in \underline{F}(x)$ para cada $\gamma \in \Gamma$ y $\mathcal{F} \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma = \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle$. Veamos que existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que

$\mathcal{F} \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma_0} \mathcal{F}_\gamma$.

Puesto que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$, existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que

$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_0} \mathcal{F}_\gamma \subseteq A$ (pues $A \in \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ y $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es el filtro generado por la subbase $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$). Así $\langle A \rangle \leq \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} \mathcal{F}_\gamma \rangle = \bigvee_{\gamma \in \Gamma_0} \mathcal{F}_\gamma$. Es decir; $\mathcal{F} \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma_0} \mathcal{F}_\gamma$ y por tanto $\mathcal{F} = \langle A \rangle$ es compacto.

Ahora, para cualquier $\mathcal{G} \in \underline{F}(x)$, tenemos que $\bigvee \{\mathcal{F} \in \underline{F}(x) \mid \mathcal{F} \text{ es compacto y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\} \leq \mathcal{G}$ (pues \mathcal{G} es cota superior del conjunto $\{\mathcal{F} \in \underline{F}(x) \mid \mathcal{F} \text{ es compacto y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$), y además, es claro que

$\{\langle G \rangle \mid G \in \mathcal{G}\} \subseteq \{\mathcal{F} \in \underline{F}(x) \mid \mathcal{F} \text{ es compacto y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$ y por consiguiente $\bigvee \{\langle G \rangle \mid G \in \mathcal{G}\} \leq \bigvee \{\mathcal{F} \in \underline{F}(x) \mid \mathcal{F} \text{ es compacto y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \bigvee \{\mathcal{F} \in \underline{F}(x) \mid \mathcal{F} \text{ es compacto y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\} &\leq \mathcal{G} = \bigvee \{\langle G \rangle \mid G \in \mathcal{G}\} \\ &\leq \bigvee \{\mathcal{F} \in \underline{F}(x) \mid \mathcal{F} \text{ es compacto y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\} \end{aligned}$$

así, $\mathcal{G} = \bigvee \{\mathcal{F} \in \underline{F}(x) \mid \mathcal{F} \text{ es compacto y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$ y por tanto $(\underline{F}(x), \leq)$ es compactamente generado. ■

Proposición 3.2.5. $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$ es co-compacto si, y sólo si, $\mathcal{F} = \langle A \rangle$ donde A es algún subconjunto finito de S que contiene x . Por consiguiente $(\underline{F}(x), \leq)$ es co-compactamente generado si, y sólo si, S es finito.

Demostración.

Sea $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$ co-compacto y sea $\Gamma = S \setminus \{x\}$. Obsérvese que $\langle S \rangle = \bigwedge_{a \in \Gamma} \langle \{x, a\} \rangle$ (pues si $A \in \bigwedge_{a \in \Gamma} \langle \{x, a\} \rangle$, entonces $A \in \langle \{x, a\} \rangle$ para cada $a \in \Gamma$ y por consiguiente, para cada $a \in \Gamma = S \setminus \{x\}$, $\{x, a\} \subseteq A$, luego $S = \bigcup_{a \in \Gamma} \{x, a\} \subseteq A$). Luego $\mathcal{F} \geq \langle S \rangle = \bigwedge_{a \in \Gamma} \langle \{x, a\} \rangle$ y puesto que \mathcal{F} es co-compacto, existen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Gamma$ tales que $\mathcal{F} \geq \bigwedge_{i=1}^n \langle \{x, a_i\} \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^n \{x, a_i\} \rangle$. Así $\langle \bigcup_{i=1}^n \{x, a_i\} \rangle \subseteq \mathcal{F}$. Pero cualquier filtro conteniendo a un subconjunto finito B puede expresarse como $\langle A \rangle$ para algún $A \subseteq B$ (lema ??). Así $\mathcal{F} = \langle A \rangle$ para algún $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{x, a_i\}$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{F} = \langle A \rangle$ donde $A = \{x = a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y supongamos que $\mathcal{F} \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ donde $\mathcal{F}_\gamma \in \underline{F}(x)$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Puesto que $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \leq \mathcal{F} = \langle A \rangle$, se tiene que para cada $F \in \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$, $F \in \mathcal{F} = \langle A \rangle$, es decir; para cada $F \in \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$, $A \subseteq F$ y por consiguiente para cada $\gamma \in \Gamma$, podemos seleccionar un $F_\gamma \in \mathcal{F}_\gamma$ tal que $A \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma$. Luego para cada $a_i \in A$ podemos escoger un $\gamma_i \in \Gamma$ tal que $a_i \in F_{\gamma_i}$ y así, $\langle A \rangle = \mathcal{F} \geq \bigwedge_{i=1}^n \mathcal{F}_{\gamma_i}$. Es decir; $\langle A \rangle = \mathcal{F}$ es co-compacto.

Si S es finito, cada filtro sobre S es principal (lema ??). En particular; cada $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$ es de la forma $\langle A \rangle$ donde A es un subconjunto (finito) de S , así $(\underline{F}(x), \leq)$ consiste solamente de elementos co-compactos y por tanto es co-compactamente generado. Obsérvese sin embargo que $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \langle A_\gamma \rangle = \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \rangle$ para filtros arbitrarios (pues $B \in \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \langle A_\gamma \rangle$ si, y sólo si, $B \in \langle A_\gamma \rangle$ para cada $\gamma \in \Gamma$, lo cual sucede si, y sólo si, para cada $\gamma \in \Gamma$, $A_\gamma \subseteq B$, y esto ocurre si, y sólo si, $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \subseteq B$, es decir; esto ultimo ocurre si, y sólo si, $B \in \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \rangle$). Así, en particular, los únicos elementos de $(\underline{F}(x), \leq)$ que son co-compactamente generados son los filtros principales (pues si $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$ y $\{\mathcal{G}_\gamma = \langle A_\gamma \rangle\}_{\gamma \in \Gamma}$ es la colección de los elementos co-compacto de $\underline{F}(x)$ que contienen a \mathcal{F} , entonces si $\mathcal{F} = \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \langle A_\gamma \rangle$ se sigue que $\mathcal{F} = \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \rangle$ y por tanto \mathcal{F} es principal). Por consiguiente $(\underline{F}(x), \leq)$ no es co-compactamente generado cuando S es infinito, ya que si S es infinito, no todo filtro sobre S es principal (lema ??) y por tanto, no todo elemento de $\underline{F}(x)$ es co-compactamente generado. ■

Proposición 3.2.6. $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$ tiene un complemento \mathcal{G} (o es complementado por \mathcal{G}) si, y sólo si, $\mathcal{F} = \langle A \rangle$. En este caso \mathcal{G} es único y $\mathcal{G} = \langle (S \setminus A) \cup \{x\} \rangle$. Por consiguiente $(\underline{F}(x), \leq)$ es complementado si, y sólo si, S es finito.

Demostración.

El caso $A = \{x\}$ es trivial (pues en tal caso $\langle A \rangle = 1$, $\langle (S \setminus A) \cup \{x\} \rangle = \{S\} = 0$ y claramente $0 \vee 1 = 1$ y $0 \wedge 1 = 0$), así que asumamos que $\{x\} \subsetneq A$.

Sea $\mathcal{F} = \langle A \rangle$. Si $\mathcal{G} = \langle (S \setminus A) \cup \{x\} \rangle$, entonces si $B \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, $A \subseteq B$ y $(S \setminus A) \cup \{x\} \subseteq B$, luego $A \cup ((S \setminus A) \cup \{x\}) \subseteq B$ pero $A \cup ((S \setminus A) \cup \{x\}) = S$ y por tanto $S = B$. Por consiguiente, si $B \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, $B = S$ y así $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \langle S \rangle = 0$. Por otra parte, nótese que $\{x\} \in \langle \mathcal{F} \cup \mathcal{G} \rangle = \mathcal{F} \vee \mathcal{G}$, pues $\{x\}$ contiene a la intersección finita $A \cap ((S \setminus A) \cup \{x\}) = \{x\}$ y por consiguiente $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = \langle \mathcal{F} \cup \mathcal{G} \rangle = \langle x \rangle$. Así, $\mathcal{G} = \langle (S \setminus A) \cup \{x\} \rangle$ es un complemento de $\mathcal{F} = \langle A \rangle$.

Para ver que \mathcal{G} es único, supongamos que \mathcal{G}' es complemento de $\mathcal{F} = \langle A \rangle$. Entonces, puesto que $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}' = \langle x \rangle$, es claro que $\mathcal{G}' \neq \langle S \rangle$ ya que $\langle A \rangle \neq \langle x \rangle$, además se tiene que existe un número finito, digamos H_1, H_2, \dots, H_n de elementos de $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}'$ tales que $\{x\} = \bigcap_{i=1}^n H_i$ (esto se tiene ya que $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}'$ es el filtro generado por la subbase $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}'$), y por tanto $(S \setminus A) \cup \{x\} \in \mathcal{G}'$ (pues si para todo $G \in \mathcal{G}'$, $G \not\subseteq (S \setminus A) \cup \{x\}$ entonces, para cada $G \in \mathcal{G}'$ existe $y \in G$ tal que $y \notin (S \setminus A) \cup \{x\}$, es decir; para cada $G \in \mathcal{G}'$ existe $y \in G$ tal que $y \neq x$ y $y \in A$. Así, para cada $G \in \mathcal{G}'$ existe $y \in G$ tal que $\{y, x\} \subseteq G \cap A$ y por tanto toda intersección finita de elementos de la subbase $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}'$ contiene por lo menos dos puntos, lo cual contradice que $\{x\} \in \mathcal{F} \vee \mathcal{G}'$). Así, de la nota (??) se sigue que $\langle (S \setminus A) \cup \{x\} \rangle \subseteq \mathcal{G}'$.

Por otra parte, si $G \in \mathcal{G}'$, $A \cup G \in \langle A \rangle = \mathcal{F}$ pues $A \subseteq A \cup G$, y $A \cup G \in \mathcal{G}'$ pues $G \subseteq A \cup G$, luego $A \cup G \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}'$ y como $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}' = \langle S \rangle$, entonces $G \cup A = S$ luego $S \setminus A \subseteq G$ y por tanto $(S \setminus A) \cup \{x\} \subseteq G \cup \{x\} = G$. Así, para cada $G \in \mathcal{G}'$, $(S \setminus A) \cup \{x\} \subseteq G$ y por consiguiente $\mathcal{G}' \subseteq \langle (S \setminus A) \cup \{x\} \rangle$.

De lo anterior, concluimos que $\mathcal{G} = \langle (S \setminus A) \cup \{x\} \rangle = \mathcal{G}'$ y por tanto \mathcal{F} tiene complemento único.

Supongase por otro lado que \mathcal{F} no es principal. Sea $A = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. Entonces $A \neq \emptyset$, pues $x \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}$ y por tanto $x \in A$. Supongamos que \mathcal{G} es un complemento de \mathcal{F} . Puesto que $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} = \{S\}$, para cada $F \in \mathcal{F}$ y para cada $G \in \mathcal{G}$ se tiene que $F \cup G = S$ (pues para cada $F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}$ se tiene que $F \cup G \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} = \{S\}$). Así, si $G \in \mathcal{G}$ se tiene que para cada $F \in \mathcal{F}$, $S \setminus F \subseteq G$ y por tanto $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} (S \setminus F) \subseteq G$. Pero, $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} (S \setminus F) = S \setminus (\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F) = S \setminus A$ y así, para cada $G \in \mathcal{G}$, $(S \setminus A) \subseteq G$ y por tanto para cada $G \in \mathcal{G}$ se tiene que $B = (S \setminus A) \cup \{x\} \subseteq G$. Ahora, puesto que \mathcal{F} es no principal, para cada $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $A \subsetneq F$ (pues si para algún $F \in \mathcal{F}$, $A = F$ entonces $\mathcal{F} = \langle A \rangle$), así para cada $F \in \mathcal{F}$, existe $y \in F$ tal que $y \in S \setminus A$, y puesto que $x \in A$, entonces $y \neq x$.

Así, para cada $F \in \mathcal{F}$, existe $y \in F$ tal que $y \in B$ y $y \neq x$. Por lo tanto, puesto que $B \subseteq G$ para cada $G \in \mathcal{G}$, cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ contiene por lo menos dos puntos distintos. Lo cual contradice que $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = \langle x \rangle$.

Por consiguiente, de lo anterior tenemos que $(\underline{F}(x), \leq)$ es complementado si, y solo si, todo filtro \mathcal{F} en $\underline{F}(x)$ es principal, pero esto ocurre si, y sólo si, S es finito (lema ??). ■

Concluimos esta sección con una discusión de la distributividad infinita.

Sea $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una colección de elementos de $\underline{F}(x)$ y sea $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$. Veamos que

$$\mathcal{F} \wedge \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \right) = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}_\gamma)$$

es decir; veamos que $\mathcal{F} \cap \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle = \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\gamma) \rangle$.

Si $A \in \mathcal{F} \cap \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle$ entonces $A \in \mathcal{F}$ y existen un número finito digamos F_1, F_2, \dots, F_n

de elementos de $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ tales que $\bigcap_{i=1}^n F_i \subseteq A$, luego $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n F_i \right) \subseteq A$. Ahora, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tomemos $H_i = A \cup F_i$, entonces $H_i \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (pues $F_i \subseteq H_i$ y $F_i \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$) y $H_i \in \mathcal{F}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (pues $A \subseteq H_i$ y $A \in \mathcal{F}$), así para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $H_i \in \mathcal{F} \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\gamma)$ y además

$\bigcap_{i=1}^n H_i = \bigcap_{i=1}^n (A \cup F_i) = A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n F_i \right) \subseteq A$. Luego A contiene una intersección finita de elementos de $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\gamma)$ y por tanto $A \in \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_\gamma) \rangle = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}_\gamma)$. De esta forma tenemos que $\mathcal{F} \wedge \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \right) \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}_\gamma)$.

Por otra parte, como para cada $\gamma \in \Gamma$ $\mathcal{F}_\gamma \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$, entonces $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}_\gamma \leq \mathcal{F} \wedge \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \right)$ para cada $\gamma \in \Gamma$, luego $\mathcal{F} \wedge \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \right)$ es cota superior del conjunto $\{\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ y por tanto $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}_\gamma) \leq \mathcal{F} \wedge \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \right)$. Así

$$\mathcal{F} \wedge \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \right) = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}_\gamma). \quad (3.1)$$

En particular, de esto y la proposición (??) se sigue que $\underline{F}(x)$ es distributivo y por consiguiente, modular.

Si S es finito (y en consecuencia $\underline{F}(x)$) $(\underline{F}(x), \leq)$ es infinitamente distributivo, pues todo retículo distributivo finito es infinitamente distributivo.

Por otra parte, obsérvese que la desigualdad $\mathcal{F} \vee \left(\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \right) \leq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \vee \mathcal{F}_\gamma)$ siempre se tiene, pues como para cada $\gamma \in \Gamma$ $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \leq \mathcal{F}_\gamma$, entonces $\mathcal{F} \vee \left(\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma \right) \leq \mathcal{F} \vee \mathcal{F}_\gamma$ para cada

$\gamma \in \Gamma$, luego $\mathcal{F} \vee (\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma)$ es cota inferior del conjunto $\{\mathcal{F} \vee \mathcal{F}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ y por tanto $\mathcal{F} \vee (\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma) \leq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \vee \mathcal{F}_\gamma)$.

Sin embargo, si S es infinito, la otra desigualdad no necesariamente se cumple, y por consiguiente $(\underline{F}(x), \leq)$ no es infinitamente distributivo, tal y como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Supongamos que S es infinito. Tomemos $\Gamma = S$ y definamos para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{F}_\gamma = \{\langle \gamma, x \rangle\}$ y $\mathcal{F} = \{A \subseteq S \mid x \in A \text{ y } S \setminus A \text{ es finito}\}$.

Es claro que $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es una colección de elementos de $\underline{F}(x)$ y que $\mathcal{F} \in \underline{F}(x)$ (en el ejemplo (??) se probó que $\mathcal{F} \in \text{Fil}(S)$ y además claramente $\mathcal{F} \subseteq \langle x \rangle$). Ahora, si $\gamma = x$, $\{x\} \in \mathcal{F} \vee \mathcal{F}_x = \langle x \rangle$, y para cada $\gamma \neq x$ se tiene que $S \setminus \{\gamma\} \in \mathcal{F}$, luego para cada $\gamma \neq x$, $S \setminus \{\gamma\}, \{\gamma, x\} \in \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_\gamma$ y por tanto $\{x\} \in \mathcal{F} \vee \mathcal{F}_\gamma$ (pues $\{x\}$ contiene la intersección finita $(S \setminus \{\gamma\}) \cap \{\gamma, x\}$). En cualquier caso, $\{x\} \in \mathcal{F} \vee \mathcal{F}_\gamma$ y por tanto $\{x\} \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \vee \mathcal{F}_\gamma)$, es decir $\{x\} \in \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \vee \mathcal{F}_\gamma)$. Por otra parte, nótese que

$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma = \{S\}$ (pues si $A \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$, entonces para cada $\gamma \in \Gamma = S$, $\{\gamma, x\} \subseteq A$ y por tanto $S = \Gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{\gamma, x\} \subseteq A$, es decir $A = S$) y por consiguiente $\mathcal{F} \vee (\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma) = \mathcal{F}$, y puesto que $\{x\} \notin \mathcal{F}$ (pues su complemento no es finito), entonces se tiene que $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F} \vee \mathcal{F}_\gamma) \not\subseteq \mathcal{F} \vee (\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma)$.

Resumimos los anteriores hechos en la siguiente proposición:

Proposición 3.2.7. $(\underline{F}(x), \leq)$ siempre es distributivo y por consiguiente, modular. $(\underline{F}(x), \leq)$ es infinitamente distributivo si, y sólo si, S (y por consiguiente $\underline{F}(x)$) es finito.

Lo expuesto anteriormente sirve también para ilustrar que las condiciones de la definición ?? (a diferencia de las de la definición ??) no son equivalente, pues $\underline{F}(x)$ es un retículo completo en el cual se satisface la condición *i*) pero no la condición *ii*).

3.3. La estructura de (F, \leq) y de $(\text{Pretop}(S), \leq)$

3.3.1. La estructura de (F, \leq)

Los resultados de la sección anterior, inducen inmediatamente, los mismos resultados sobre el retículo (\underline{F}, \leq) . Recordemos nuevamente que para $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x$, $\mathfrak{G} = \prod_{x \in S} \mathcal{G}_x \in \underline{F}$, tenemos que $\mathfrak{F} \leq \mathfrak{G}$ si, y sólo si, $\mathcal{F}_x \leq \mathcal{G}_x$ en $(\underline{F}(x), \leq)$ para cada $x \in S$. Por otra parte, nótese que si $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$, entonces para cada $F = \prod_{x \in S} F_x \in \mathfrak{F}$ se tiene que $\prod_{x \in S} \{x\} \subseteq F$ (pues para

cada $x \in S$ y para cada $F_x \in \mathcal{F}_x$, $x \in F_x$), luego si $\{\mathfrak{F}_\gamma = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_{\gamma_x}\}_{\gamma \in \Gamma}$ es una colección de elementos de \underline{F} , se tiene que para cada $x \in S$ y para cada $\gamma \in \Gamma$, $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_x}$ es sub-base para un filtro sobre S (el cual, ya vimos que pertenece a $\underline{F}(x)$), luego de el lema (??) se sigue que

$$\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}_\gamma = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \left(\prod_{x \in S} \mathcal{F}_{\gamma_x} \right) = \prod_{x \in S} \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_x} \right)$$

y nuevamente, como para cada $\gamma \in \Gamma$ y para cada $x \in S$, $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_x} \in \underline{F}(x)$, entonces

$$\prod_{x \in S} \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_x} \right) \in \underline{F}.$$

Por otra parte, como para cada $\gamma \in \Gamma$ y para cada $x \in S$, $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_x} \in \underline{F}(x)$, entonces

$$\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \left(\prod_{x \in S} \mathcal{F}_{\gamma_x} \right) = \prod_{x \in S} \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_x} \right) = \prod_{x \in S} \left(\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_x} \right) \in \underline{F}.$$

También tenemos que el 0 en \underline{F} es $\prod_{x \in S} \mathcal{F}_x$ donde $\mathcal{F}_x = \{S\}$ para cada $x \in S$, es decir; $\prod_S \{S\} = 0$ en \underline{F} y el 1 en \underline{F} es $\prod_{x \in S} \langle x \rangle$.

Ahora si, estudiaremos la estructura de (\underline{F}, \leq) a partir de la estructura de $(\underline{F}(x), \leq)$ para cada $x \in S$.

Proposición 3.3.1. (\underline{F}, \leq) es completo, modular y distributivo. Y es infinitamente distributivo solo en el caso trivial en que S y en consecuencia \underline{F} son finitos.

Demostración.

1. Que (\underline{F}, \leq) sea un retículo completo, se sigue de lo expuesto previamente a la proposición y del teorema (??), pues el inf (al igual que el sup) de cualquier colección no vacía de elementos de \underline{F} existe y además, \underline{F} tiene elemento máximo $1 = \prod_{x \in S} \langle x \rangle$, y elemento mínimo $0 = \prod_S \{S\}$.
2. Sea $\{\mathfrak{F}_\gamma = \prod_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_x}\}_{\gamma \in \Gamma}$ una colección de elementos de \underline{F} y sea $\mathfrak{F} \in \underline{F}$. Entonces, puesto que para cada $x \in S$ y cada $\gamma \in \Gamma$ se tiene que (por (??) de la sección

anterior), $\mathcal{F}_x \wedge (\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_x}) = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F}_x \wedge \mathcal{F}_{\gamma_x})$, entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \wedge (\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}_\gamma) &= \mathfrak{F} \wedge \prod_{x \in S} (\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_x}) \\ &= \prod_{x \in S} (\mathcal{F}_x \wedge (\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_x})) \\ &= \prod_{x \in S} (\bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\mathcal{F}_x \wedge \mathcal{F}_{\gamma_x})) \\ &= \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\prod_{x \in S} (\mathcal{F}_x \wedge \mathcal{F}_{\gamma_x})) \\ &= \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{F}_\gamma) \end{aligned}$$

De esto concluimos que \underline{F} es distributivo, y por consiguiente, modular.

3. Puesto que \underline{F} es distributivo, si S es finito (y en consecuencia \underline{F}), \underline{F} es infinitamente distributivo.

Ahora, si S es infinito, sea $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x$ donde para cada $x \in S$, \mathcal{F}_x es como en el ejemplo de la sección anterior, es decir; $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq S \mid x \in A \text{ y } S \setminus A \text{ es finito}\}$. De igual manera, tomemos $\Gamma = S$ y para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathfrak{F}_\gamma = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_{\gamma_x}$ donde para cada $\gamma \in \Gamma$, $x \in S$, \mathcal{F}_{γ_x} es también como en el ejemplo de la sección anterior, es decir; $\mathcal{F}_{\gamma_x} = \{\{\gamma, x\}\}$ para cada $\gamma \in \Gamma$, $x \in S$. Entonces $\prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{F}_\gamma)$ (donde $F_x = S$ para cada $x \neq s$ y $F_s = \{s\}$) pero $\prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \notin \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \vee (\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}_\gamma)$. Luego si S no es finito, $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{F}_\gamma) \not\leq \mathfrak{F} \vee (\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}_\gamma)$ y por lo tanto \underline{F} no es infinitamente distributivo. ■

Proposición 3.3.2. (\underline{F}, \leq) es atómico. $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$ es un átomo (\mathfrak{F}_{at}) si, y sólo si, existe $s \in S$ tal que $\mathcal{F}_x = \{S\}$ para todo $x \neq s$ y \mathcal{F}_s es un átomo en $\underline{F}(s)$.

Demostración.

Sea $s \in S$. Veamos que $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$ donde $\mathcal{F}_x = \{S\}$ para todo $x \neq s$ y \mathcal{F}_s es un átomo en $\underline{F}(s)$, es un átomo en \underline{F} .

Si $\mathfrak{G} \in \underline{F}$ y $\mathfrak{G} < \mathfrak{F}_{at} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x$ donde $\mathcal{F}_x = \{S\}$ para todo $x \neq s$ y \mathcal{F}_s es un átomo en $\underline{F}(s)$, entonces $\mathcal{G}_x = \{S\}$ para todo $x \neq s$ (pues para cada $x \neq s$ $\mathcal{F}_x = \{S\}$) y puesto que $\mathfrak{G} < \mathfrak{F}_{at}$, entonces se debe tener que $\mathcal{G}_s < \mathcal{F}_s$ en $\underline{F}(s)$ (pues $\mathcal{G}_x = \mathcal{F}_x$ para todo $x \neq s$), pero como \mathcal{F}_s es un átomo en $\underline{F}(s)$, entonces $\mathcal{G}_s = \{S\}$. Así, $\mathfrak{G} = \prod_S \{S\} = 0$ y por tanto \mathfrak{F} es un átomo en \underline{F} .

Ahora veamos que \underline{F} es atómico, es decir; veamos que todo elemento en \underline{F} diferente de

$0 = \prod_S S$, contiene un átomo.

Sea $\mathfrak{G} = \prod_{x \in S} \mathcal{G}_x \in \underline{F}$, $\mathfrak{G} \neq 0$. Como $\mathfrak{G} \neq 0$, existe $s \in S$ tal que $\mathcal{G}_s \neq \{S\}$. Ahora, para $x \in S$, $x \neq s$, tenemos que $\{S\} \leq \mathcal{G}_x$ y para \mathcal{G}_s , puesto que $\underline{F}(s)$ es atómico, existe un átomo $\mathcal{F}_s \in \underline{F}(s)$ tal que $\mathcal{F}_s \leq \mathcal{G}_s$. Por lo tanto $\prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \leq \mathfrak{G}$ donde $\mathcal{F}_x = \{S\}$ para todo $x \neq s$ y \mathcal{F}_s es un átomo en $\underline{F}(s)$ contenido en \mathcal{G}_s .

Nótese que del hecho que \underline{F} sea atómico se sigue que todo átomo en \underline{F} es de la forma mencionada anteriormente, pues si \mathfrak{F}_{at} es un átomo en \underline{F} , $\mathfrak{F}_{at} \neq 0$, y por tanto existe $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$ donde $\mathcal{F}_x = \{S\}$ para todo $x \neq s$ y \mathcal{F}_s es un átomo en $\underline{F}(s)$, tal que $0 < \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \leq \mathfrak{F}_{at}$ y así, $\mathfrak{F}_{at} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x$. ■

Proposición 3.3.3. (\underline{F}, \leq) es co-atómico. $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$ es un co-átomo (\mathfrak{F}_{coat}) si, y sólo si, existe $s \in S$ tal que $\mathcal{F}_x = \langle x \rangle$ para todo $x \neq s$ y \mathcal{F}_s es un co-átomo en $\underline{F}(s)$

Demostración.

Sea $s \in S$, veamos que $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$ donde $\mathcal{F}_x = \langle x \rangle$ para todo $x \neq s$ y \mathcal{F}_s es un co-átomo en $\underline{F}(s)$, es un co-átomo en \underline{F} .

Si $\mathfrak{G} \in \underline{F}$ y $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x < \mathfrak{G}$, entonces $\mathcal{G}_x = \langle x \rangle$ para todo $x \neq s$ (pues para cada $x \neq s$ $\mathcal{F}_x = \langle x \rangle$) y puesto que $\mathfrak{F} < \mathfrak{G}$, entonces se debe tener que $\mathcal{F}_s < \mathcal{G}_s$ en $\underline{F}(s)$ (pues $\mathcal{G}_x = \mathcal{F}_x$ para todo $x \neq s$), pero como \mathcal{F}_s es un co-átomo en $\underline{F}(s)$, entonces $\mathcal{G}_s = \langle s \rangle$. Así, $\mathfrak{G} = \prod_{x \in S} \langle x \rangle = 1$ y por tanto \mathfrak{F} es un co-átomo en \underline{F} .

Ahora veamos \underline{F} es co-atómico.

Sea $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$, $\mathfrak{F} \neq \prod_{x \in S} \langle x \rangle = 1$. Como $\mathfrak{F} \neq 1$, existe $s \in S$ tal que $\mathcal{F}_s \neq \langle s \rangle$. Ahora, para $x \in S$, $x \neq s$, tenemos que $\mathcal{F}_x \leq \langle x \rangle$ y para \mathcal{F}_s , puesto que $\underline{F}(s)$ es co-atómico, existe un co-átomo $\mathcal{F}'_s \in \underline{F}(s)$ tal que $\mathcal{F}_s \leq \mathcal{F}'_s$. Por lo tanto $\mathfrak{F} \leq \prod_{x \in S} \mathcal{F}'_x < 1$ donde $\mathcal{F}'_x = \langle x \rangle$ para todo $x \neq s$ y \mathcal{F}'_s es un co-átomo en $\underline{F}(s)$ que contiene a \mathcal{F}_s . Ahora, tal y como probamos anteriormente, $\prod_{x \in S} \mathcal{F}'_x$ es un co-átomo en \underline{F} . Luego dado $\mathfrak{F} \in \underline{F}$, $\mathfrak{F} \neq 1$, existe un co-átomo en \underline{F} que contiene a \mathfrak{F} y por tanto \underline{F} es co-atómico.

Nótese que del hecho que \underline{F} sea co-atómico se sigue que todo co-átomo en \underline{F} es de la forma mencionada anteriormente, es decir; del hecho que \underline{F} sea co-atómico se sigue que todo co-átomo en \underline{F} es de la forma $\mathfrak{F}_{coat} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x$ donde para algún $s \in S$ se tiene que $\mathcal{F}_x = \langle x \rangle$ para todo $x \neq s$ y \mathcal{F}_s es un co-átomo en $\underline{F}(s)$, pues todo elemento de \underline{F} esta contenido en un elemento de esta forma. ■

Proposición 3.3.4. $\mathfrak{F} \in \underline{F}$ es compacto (resp co-compacto) si, y solo si, \mathcal{F}_x es compacto (resp co-compacto) para cada $x \in S$ y $\mathcal{F}_x = \{S\}$ (resp $\mathcal{F}_x = \langle x \rangle$) excepto para un numero

finito de elementos de S .

Demostración.

1. Sea $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$ y supongamos que \mathfrak{F} es compacto. Veamos que \mathcal{F}_x es compacto para cada $x \in S$ y $\mathcal{F}_x = \{S\}$ excepto para un número finito de elementos de S . Puesto que $\mathfrak{F} = \bigvee \{ \langle F \rangle \mid F \in \mathfrak{F} \} = \bigvee \{ \langle \prod_{x \in S} F_x \rangle \mid \prod_{x \in S} F_x \in \mathfrak{F} \}$, y puesto que para cada $\prod_{x \in S} F_x \in \mathfrak{F}$, se tiene que $\langle \prod_{x \in S} F_x \rangle = \prod_{x \in S} \langle F_x \rangle$, entonces $\bigvee \{ \prod_{x \in S} \langle F_x \rangle \mid F_x \in \mathcal{F}_x \forall x \in S \text{ y } F_x = S \text{ salvo para un número finito de elementos de } S \}$ es un cubrimiento de \mathfrak{F} , y como \mathfrak{F} es compacto, existe un número finito de elementos de \mathfrak{F} digamos $F_1 = \prod_{x \in S} F_{1x}, F_2 = \prod_{x \in S} F_{2x}, \dots, F_n = \prod_{x \in S} F_{nx}$ (donde $F_{ix} \in \mathcal{F}_x$ para cada $x \in S, i \in \{1, 2, \dots, n\} = I$ y $F_{ix} = S$ salvo para un número finito de elementos de S) tales que

$$\mathfrak{F} \leq \bigvee_{i=1}^n \langle F_i \rangle = \bigvee_{i=1}^n \langle \prod_{x \in S} F_{ix} \rangle = \bigvee_{i=1}^n \prod_{x \in S} \langle F_{ix} \rangle = \prod_{x \in S} \bigvee_{i=1}^n \langle F_{ix} \rangle = \prod_{x \in S} \langle \bigcap_{i=1}^n F_{ix} \rangle$$

donde $\langle \bigcap_{i=1}^n F_{ix} \rangle \in \underline{F}(x)$ para cada $x \in S$ y $\langle \bigcap_{i=1}^n F_{ix} \rangle = \{S\}$ salvo para un número finito de elementos de S (pues para cada $x \in S$, y para cada $i \in I, F_{ix} = S$ salvo para un número finito de elementos de S).

Por otra parte, como \mathfrak{F} es cerrado para intersecciones finitas, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n F_i \in \mathfrak{F}$, luego

$$\langle \bigcap_{i=1}^n F_i \rangle \leq \mathfrak{F}, \text{ pero } \langle \bigcap_{i=1}^n F_i \rangle = \langle \prod_{x \in S} (\bigcap_{i=1}^n F_{ix}) \rangle = \prod_{x \in S} \langle \bigcap_{i=1}^n F_{ix} \rangle, \text{ y así, } \mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \langle \bigcap_{i=1}^n F_{ix} \rangle.$$

Ahora, puesto que para cada $x \in S, \langle \bigcap_{i=1}^n F_{ix} \rangle$ es compacto (proposición ??) se tiene

que si $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x$ es compacto, entonces $\mathcal{F}_x = \langle \bigcap_{i=1}^n F_{ix} \rangle$ es compacto para cada $x \in S$ y $\mathcal{F}_x = \{S\}$ salvo para un número finito de elementos de S .

Recíprocamente, veamos que si $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$ es tal que \mathcal{F}_x es compacto para cada $x \in S$ y $\mathcal{F}_x = \{S\}$ salvo para un número finito de elementos de S , entonces \mathfrak{F} es compacto.

Primero denotemos por x_1, x_2, \dots, x_n a los elementos de S para los cuales $\mathcal{F}_x \neq \{S\}$, es decir; $\{\{S\}\} \not\subseteq \{\mathcal{F}_{x_1}, \mathcal{F}_{x_2}, \dots, \mathcal{F}_{x_n}\}$. Sea $\{\mathfrak{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ un cubrimiento de \mathfrak{F} por elementos de \underline{F} , es decir; $\mathfrak{F}_\gamma = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_{\gamma x} \in \underline{F}$ para cada $\gamma \in \Gamma$ y $\mathfrak{F} \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\prod_{x \in S} \mathcal{F}_{\gamma x})$.

Veamos que existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que

$$\mathfrak{F} \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma_0} \mathfrak{F}_\gamma = \bigvee_{\gamma \in \Gamma_0} (\prod_{x \in S} \mathcal{F}_{\gamma x}) = \prod_{x \in S} (\bigvee_{\gamma \in \Gamma_0} \mathcal{F}_{\gamma x}).$$

Para cada $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene que $\mathcal{F}_{x_i} \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_{x_i}}$, y puesto que para cada $i \in I$, \mathcal{F}_{x_i} es compacto, para cada $i \in I$ existen un subconjunto finito $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ tal que $\mathcal{F}_{x_i} \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma_i} \mathcal{F}_{\gamma_{x_i}}$. Sea $\Gamma_0 = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$, es claro que $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ y que Γ_0 es finito (pues es unión finita de conjuntos finitos), además para cada $x \in S$, $\mathcal{F}_x \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma_0} \mathcal{F}_{\gamma_x}$ pues para cada $i \in I$, $\mathcal{F}_{x_i} \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma_i} \mathcal{F}_{\gamma_{x_i}} \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma_0} \mathcal{F}_{\gamma_{x_i}}$ y si $\{x\} \not\subseteq \{x_i \mid i \in I\}$, $\mathcal{F}_x = \{S\} \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma_0} \mathcal{F}_{\gamma_{x_i}}$. Así $\mathfrak{F} \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma_0} \mathfrak{F}_\gamma$ y por tanto \mathfrak{F} es compacto.

2. Sea $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$, $\mathfrak{F} \neq 1$ y supongamos que \mathfrak{F} es co-compacto. Veamos que \mathcal{F}_x es co-compacto para cada $x \in S$ y $\mathcal{F}_x = \langle x \rangle$ excepto para un número finito de elementos de S .

Primero veamos que \mathcal{F}_x es co-compacto para cada $x \in S$.

Sean $s \in S$ y $\{\mathcal{F}_{\gamma_s}\}_{\gamma \in \Gamma}$ un co-cubrimiento de \mathcal{F}_s por elementos de $\underline{F}(s)$, es decir; $\mathcal{F}_{\gamma_s} \in \underline{F}(s)$ para cada $\gamma \in \Gamma$ y $\mathcal{F}_s \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_s}$. Veamos que existen $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ tal

$$\text{que } \mathcal{F}_s \geq \bigwedge_{i=1}^n \mathcal{F}_{\gamma_{i_s}}.$$

Para cada $\gamma \in \Gamma$, sea \mathcal{F}_{γ_s} el elemento correspondiente del co-cubrimiento de \mathcal{F}_s , y para cada $x \in S$ tal que $x \neq s$, sea $\mathcal{F}_{\gamma_x} = \{S\}$, y tomemos la colección $\{\mathfrak{F}_\gamma = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_{i_x}}\}_{\gamma \in \Gamma}$. Es claro que esta colección es un co-cubrimiento de \mathfrak{F} por elementos de \underline{F} ; es decir; $\mathfrak{F} \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} (\prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_{i_x}}) = \prod_{i \in I} (\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_{i_x}})$, pues para $x \neq s$, $\mathcal{F}_x \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_x} = \{S\}$ y para s , $\mathcal{F}_s \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_s}$ pues $\{\mathcal{F}_{\gamma_s}\}_{\gamma \in \Gamma}$ es un co-cubrimiento de \mathcal{F}_s . Ahora, como \mathfrak{F} es co-compacto, existen $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que $\mathfrak{F} = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_x \geq \bigwedge_{i=1}^n (\prod_{i \in I} \mathcal{F}_{\gamma_{i_x}}) = \prod_{i \in I} (\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{F}_{\gamma_{i_x}})$. Así, $\mathcal{F}_s \geq \bigwedge_{i=1}^n \mathcal{F}_{\gamma_{i_s}}$ y por tanto \mathcal{F}_s es co-compacto. De lo anterior concluimos que \mathcal{F}_x es co-compacto para cada $x \in S$.

Ahora, veamos que $\mathcal{F}_x = \langle x \rangle$ salvo para un número finito de elementos de S .

Puesto que $\mathfrak{F} = \bigwedge \{\mathfrak{F}_{coat} \in \underline{F} \mid \mathfrak{F} \leq \mathfrak{F}_{coat}\}$ y \mathfrak{F} es co-compacto, existe un número finito de co-átomos que contienen a \mathfrak{F} digamos $\mathfrak{F}_{coat}^1, \mathfrak{F}_{coat}^2, \dots, \mathfrak{F}_{coat}^n$, tales que $\mathfrak{F} \geq \bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{F}_{coat}^i$.

Por otra parte, como para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{coat}^i$, entonces $\mathfrak{F} \leq \bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{F}_{coat}^i$ y por tanto $\mathfrak{F} = \bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{F}_{coat}^i$. De lo cual se sigue que $\mathcal{F}_x = \langle x \rangle$ salvo para un número finito de elementos de S .

Recíprocamente, veamos que si $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$ es tal que \mathcal{F}_x es co-compacto para cada $x \in S$ y $\mathcal{F}_x = \langle x \rangle$ salvo para un número finito de elementos de S , entonces \mathfrak{F} es co-compacto.

Primero denotemos por x_1, x_2, \dots, x_n a los elementos de S para los cuales $\mathcal{F}_x \neq \langle x \rangle$, es decir; $\mathcal{F}_{x_1} \neq \langle x_1 \rangle, \mathcal{F}_{x_2} \neq \langle x_2 \rangle, \dots, \mathcal{F}_{x_n} \neq \langle x_n \rangle$. Sea $\{\mathfrak{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ un co-cubrimiento

de \mathfrak{F} por elementos de \underline{F} , es decir; $\mathfrak{F}_\gamma = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_{\gamma_x} \in \underline{F}$ para cada $\gamma \in \Gamma$ y $\mathfrak{F} \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} (\prod_{x \in S} \mathcal{F}_{\gamma_x})$. Veamos que existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que

$$\mathfrak{F} \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma_0} \mathfrak{F}_\gamma = \bigwedge_{\gamma \in \Gamma_0} (\prod_{x \in S} \mathcal{F}_{\gamma_x}) = \prod_{x \in S} (\bigwedge_{\gamma \in \Gamma_0} \mathcal{F}_{\gamma_x}).$$

Para cada $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene que $\mathcal{F}_{x_i} \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_{\gamma_{x_i}}$, y puesto que para cada $i \in I$, \mathcal{F}_{x_i} es co-compacto, para cada $i \in I$ existen un subconjunto finito $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ tal que $\mathcal{F}_{x_i} \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma_i} \mathcal{F}_{\gamma_{x_i}}$. Sea $\Gamma_0 = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$, es claro que $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ y que Γ_0 es finito, además para cada $x \in S$, $\mathcal{F}_x \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma_0} \mathcal{F}_{\gamma_x}$ pues para cada $i \in I$, $\mathcal{F}_{x_i} \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma_i} \mathcal{F}_{\gamma_{x_i}} \geq \bigvee_{\gamma \in \Gamma_0} \mathcal{F}_{\gamma_{x_i}}$ y si $\{x\} \not\subseteq \{x_i \mid i \in I\}$, $\mathcal{F}_x = \langle x \rangle \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma_0} \mathcal{F}_{\gamma_{x_i}}$. Así $\mathfrak{F} \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma_0} \mathfrak{F}_\gamma$ y por tanto \mathfrak{F} es co-compacto. ■

Proposición 3.3.5. (\underline{F}, \leq) es compactamente generado.

Demostración.

Sea $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$. Primero veamos que para cada $F \in \mathcal{F}$, $\langle F \rangle = \prod_{x \in S} \langle F_x \rangle$ es compacto. Para cada $x \in S$, $\langle F_x \rangle$ es compacto en $\underline{F}(x)$ (proposición ??), y como $F \in \mathfrak{F}$, $F_x = S$ salvo para un número finito de elementos de S , es decir; $\langle F_x \rangle$ es compacto para cada $x \in S$ y $\langle F_x \rangle = \{S\}$ salvo para un número finito de elementos de S y por tanto $\langle F \rangle = \prod_{x \in S} \langle F_x \rangle$ es compacto.

Ahora, $\bigvee \{\mathfrak{G} \in \underline{F} \mid \mathfrak{G} \text{ es compacto y } \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}\} \leq \mathfrak{F}$ (pues \mathfrak{F} es cota superior del conjunto $\{\mathfrak{G} \in \underline{F} \mid \mathfrak{G} \text{ es compacto y } \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}\}$), y además, es claro que $\{\langle F \rangle \mid F \subseteq \mathcal{F}\} \subseteq \{\mathfrak{G} \in \underline{F} \mid \mathfrak{G} \text{ es compacto y } \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}\}$ y por consiguiente $\bigvee \{\langle F \rangle \mid F \in \mathfrak{F}\} \leq \bigvee \{\mathfrak{G} \in \underline{F} \mid \mathfrak{G} \text{ es compacto y } \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}\}$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \bigvee \{\mathfrak{G} \in \underline{F} \mid \mathfrak{G} \text{ es compacto y } \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}\} &\leq \mathfrak{F} = \bigvee \{\langle F \rangle \mid F \in \mathfrak{F}\} \\ &\leq \bigvee \{\mathfrak{G} \in \underline{F} \mid \mathfrak{G} \text{ es compacto y } \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}\} \end{aligned}$$

luego $\mathfrak{F} = \bigvee \{\mathfrak{G} \in \underline{F} \mid \mathfrak{G} \text{ es compacto y } \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}\}$ y por tanto (\underline{F}, \leq) es compactamente generado. ■

Proposición 3.3.6. (\underline{F}, \leq) es co-compactamente generado si, y sólo si, S es finito.

Demostración.

Si S es finito, $\underline{F}(x)$ y en consecuencia \underline{F} , son finitos y por tanto, si $\mathfrak{F} \in \underline{F}$, entonces \mathfrak{F} es co-compacto, pues cualquier co-cubrimiento de \mathfrak{F} es finito. Por consiguiente, si S es finito, (\underline{F}, \leq) es co-compactamente generado.

Ahora, puesto que si S es infinito los únicos elementos de $\underline{F}(x)$ que son co-compactamente generados son los filtros principales, entonces los únicos elementos de \underline{F} que son co-compactamente generados son los productos de filtros principales en $\underline{F}(x)$ y por consiguiente, si S no es finito (\underline{F}, \leq) no es co-compactamente generado. ■

Proposición 3.3.7. $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$ tiene un complemento $\mathfrak{G} = \prod_{x \in S} \mathcal{G}_x$ en \underline{F} si, y sólo si \mathcal{F}_x y \mathcal{G}_x son complementarios en $\underline{F}(x)$ para cada $x \in S$.

Demostración.

Sea $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$, si $\mathfrak{G} = \prod_{x \in S} \mathcal{G}_x$ es un complemento de \mathfrak{F} , entonces $1 = \prod_{x \in S} \langle x \rangle = \mathfrak{F} \vee \mathfrak{G} = \prod_{x \in S} (\mathcal{F}_x \vee \mathcal{G}_x)$ y por tanto para cada $x \in S$, $\mathcal{F}_x \vee \mathcal{G}_x = \langle x \rangle$. Por otra parte, como $0 = \prod_S \{S\} = \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} = \prod_{x \in S} (\mathcal{F}_x \wedge \mathcal{G}_x)$, entonces $\mathcal{F}_x \wedge \mathcal{G}_x = \{S\}$ para cada $x \in S$. Así, \mathcal{F}_x y \mathcal{G}_x son complementarios para cada $x \in S$.

Recíprocamente, si para cada $x \in S$, \mathcal{F}_x y \mathcal{G}_x son complementos, entonces para cada $x \in S$, $\mathcal{F}_x \vee \mathcal{G}_x = \langle x \rangle$ y $\mathcal{F}_x \wedge \mathcal{G}_x = \{S\}$, luego $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G} = \prod_{x \in S} (\mathcal{F}_x \vee \mathcal{G}_x) = \prod_{x \in S} \langle x \rangle$ y $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} = \prod_{x \in S} (\mathcal{F}_x \wedge \mathcal{G}_x) = \prod_S \{S\}$, y por tanto \mathfrak{F} y \mathfrak{G} son complementarios en \underline{F} . ■

Proposición 3.3.8. (\underline{F}, \leq) es complementado si, y sólo si, S es finito. En este caso cada elemento $\mathfrak{F} \in \underline{F}$ tiene un único complemento.

Demostración.

$\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \mathcal{F}_x \in \underline{F}$ tiene un complemento $\mathfrak{G} = \prod_{x \in S} \mathcal{G}_x$ en \underline{F} si, y sólo si \mathcal{F}_x y \mathcal{G}_x son complementos en $\underline{F}(x)$ para cada $x \in S$ pero esto ocurre si, y sólo si, para cada $x \in S$, todo elemento en $\underline{F}(x)$ es principal (proposición ??), lo cual sucede si, y sólo si, S es finito (lema ??). Por tanto, \underline{F} es complementado si, y sólo si, S es finito, y esto ocurre si, y sólo si, para cada $\mathfrak{F} \in \underline{F}$, \mathfrak{F} es principal, es decir si, y sólo si, para cada $\mathfrak{F} \in \underline{F}$, $\mathfrak{F} = \prod_{x \in S} \langle A_x \rangle$. En tal caso, el complemento de \mathfrak{F} es único y es $\mathfrak{G} = \prod_{x \in S} \langle (S \setminus A_x) \cup \{x\} \rangle$ pues $\langle (S \setminus A_x) \cup \{x\} \rangle$ es el único complemento de $\langle A_x \rangle$ en $\underline{F}(x)$. ■

3.3.2. La estructura de $(\text{Pretop}(S), \leq)$

De los hechos que, un isomorfismo “envía” y “devuelve” retículos completos en retículos completos (proposición ??), atómicos (resp co-atómicos) en atómicos (resp co-atómicos), complementados en complementados (proposición ??), retículos modulares en retículos modulares, distributivos en distributivos, infinitamente distributivos en infinitamente distributivos (proposición ??) y retículos compactamente generados

(resp co-compactamente generados) en retículos compactamente generados (resp co-compactamente generados)(proposición ??) entonces, usando el isomorfismo ϕ del teorema (??), y las proposiciones de la sub-sección anterior, tenemos inmediatamente el siguiente resultado sobre $(\text{Pretop}(S), \leq)$:

Teorema 3.2. $(\text{Pretop}(S), \leq)$ es siempre un retículo completo, modular, distributivo, atómico, co-atómico y compactamente generado. Es complementado (y en cuyo caso es únicamente complementado), co-compactamente generado e infinitamente distributivo si, y sólo si, S es finito.

Demostración.

Se sigue de lo expuesto previamente al teorema. ■

En [?] hacen una breve discusión sobre el retículo de las pretopologías. Aunque no utilizan producto de filtros, allí no hacen ninguna discusión acerca de la modularidad ni de la distributividad ni la distributividad infinita, ni sobre los elementos compactos, co-compactos ni los complementados y tampoco sobre si el retículo es o no, compactamente generado o co-compactamente generado.

Para concluir veamos como es el cero ($0 = p_0$), el uno ($1 = p_1$), los átomos, los co-átomos, los elementos compactos, los elementos co-compactos y los elementos complementados en $(\text{Pretop}(S), \leq)$, al igual que el sup y el inf de cualquier colección de elementos de $\text{Pretop}(S)$. Para esto, usaremos las proposiciones de la subsección anterior, las proposiciones (??),(??) y por supuesto, el isomorfismo ϕ .

Recuérdese que para $p, q \in \text{Pretop}(S)$, tenemos que $p \leq q \Leftrightarrow q(A) \subseteq p(A)$ para cada $A \subseteq S$.

El cero (p_0) y el uno (p_1)

Del lema (??) tenemos que si $p \in \text{Pretop}(S)$, $A \subseteq S$ y $x \in S$, entonces $x \in p(A) \Leftrightarrow V \cap A \neq \emptyset$, para cada $V \in \mathcal{V}_p(x)$.

Del hecho que un isomorfismo “envía” y “devuelve” el 0 en el 0 y el 1 en el 1 (corolario ??), y del isomorfismo ϕ , se sigue que el cero “ p_0 ” es la pretopología que tiene como filtro de vecindades para cada $x \in S$, la colección $\mathcal{V}_p(x) = \{S\}$.

Luego del lema ?? tenemos que para cada

$A \subseteq S$ y para cada $x \in S$, $x \in p_0(A)$. Así, el cero es la función $p_0 : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$

definida por:

$$p_0(A) := \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset, \\ S & \text{si } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

De igual forma, tenemos que el uno “ p_1 ” es la pretopología que tiene como filtro de vecindades para cada $x \in S$, la colección $\mathcal{V}_p(x) = \langle x \rangle = \{A \subseteq S \mid x \in A\}$.

Luego si $A \subseteq S$, $x \in S$ se tiene que

$$\begin{aligned} x \in p_1(A) &\Leftrightarrow V \cap A \neq \emptyset \quad \text{para cada } V \in \langle x \rangle && \text{(lema ??)} \\ &\Leftrightarrow \{x\} \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in A. \end{aligned}$$

Así, el uno es la función $p_1 : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ definida por

$$p_1(A) := A \quad \text{para cada } A \subseteq S.$$

Los átomos y los co-átomos.

Veamos como son los átomos.

Tenemos (nuevamente del isomorfismo ϕ , la proposición (??) y del hecho que un isomorfismo “envía” y “devuelve” átomos en átomos y anti-átomos en anti-átomos (proposición ??)) que $p \in \text{Pretop}(S)$ es un átomo si y sólo si, existe $s \in S$ tal que p tiene como filtro de vecindades para cada $x \neq s$ la colección $\mathcal{V}_p(x) = \{S\}$ y para s , $\mathcal{V}_p(s) = \{S, S \setminus \{a\}\}$ donde $a \neq s$. Veamos como es esta función.

Sea $\emptyset \neq A \subseteq S$. Entonces, si $x \in S \setminus \{s\}$ se tiene que $x \in p(A)$ pues si $x \neq s$, el único elemento en $\mathcal{V}_p(x)$ es S y $S \cap A = A \neq \emptyset$. Así, $S \setminus \{s\} \subseteq p(A)$. Ahora, para s tenemos que

$$\begin{aligned} s \in p(A) &\Leftrightarrow V \cap A \neq \emptyset \quad \text{para cada } V \in \{S, S \setminus \{a\}\} && \text{(lema ??)} \\ &\Leftrightarrow (S \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow A \setminus \{a\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow A \neq \{a\} \quad \text{(pues } A \neq \emptyset). \end{aligned}$$

Luego tenemos que los átomos en $\text{Pretop}(S)$ son precisamente las funciones $p_{as} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ definidas por:

$$p_{as}(A) := \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset, \\ S \setminus \{s\} & \text{si } A = \{a\}, \\ S & \text{si } A \neq \{a\} \text{ y } A \neq \emptyset \end{cases}$$

donde s y a son dos puntos distintos en S .

Ya habíamos mostrado que estas funciones son pretopologías (ejemplo (??)).

Veamos como son los co-átomos.

Tenemos que (del isomorfismo ϕ , la proposición (??) y la proposición (??)), $p \in \text{Pretop}(S)$ es un co-átomo si y sólo si, existe $s \in S$ tal que p tiene como filtro de vecindades para cada $x \neq s$ la colección $\mathcal{V}_p(x) = \langle x \rangle = \{A \subseteq S \mid x \in A\}$ y para s , $\mathcal{V}_p(s) = \mathcal{U} \cap \langle s \rangle$ donde \mathcal{U} es un ultrafiltro distinto de $\langle s \rangle$. Notaremos a los co-átomos por $p_{s,\mathcal{U}}$ para recalcar que dependen de un punto y un ultrafiltro.

Claro, no es fácil visualizar como es esta función, pues en realidad, depende de dos ultrafiltros diferentes.

Nótese sin embargo que los co-átomos en $\text{Pretop}(S)$ son topologías sobre S , tal y como probamos a continuación.

Proposición 3.3.9. Si $p_{s,\mathcal{U}}$ es un co-átomo en $\text{Pretop}(S)$, entonces $p_{s,\mathcal{U}}$ es una topología sobre S .

Demostración.

Sea $p_{s,\mathcal{U}} \in \text{Pretop}(S)$ un co-átomo. Veamos que para cada $x \in S$, el filtro de vecindades $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x)$ satisface la propiedad (FV4) de la proposición (??).

Si $p_{s,\mathcal{U}} \in \text{Pretop}(S)$ es un co-átomo, entonces para cada $x \in S$ tal que $x \neq s$ se tiene que si $V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) = \langle x \rangle$ entonces $V' = V \setminus \{s\} \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x)$, y si $y \in V'$ entonces $y \in V$ y $y \neq s$. Luego $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(y) = \langle y \rangle$ y por tanto $V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(y)$.

Por otro lado, para s , se tiene que $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s) = \mathcal{U} \cap \langle s \rangle$ donde \mathcal{U} es un ultrafiltro distinto de $\langle s \rangle$. Luego si $V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s)$, y $y \in V$, entonces $V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(y)$ pues si $y \neq s$, $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(y) = \langle y \rangle$ y si $y = s$, claramente $V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(y) = \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s)$.

Por consiguiente, para cada $x \in S$, se satisface que:

si $V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x)$, existe $V' \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x)$ ($V' = V \setminus \{s\}$ si $x \neq s$ y $V' = V$ si $x = s$) tal que para cada $y \in V'$ se tiene que $V \in \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(y)$.

Luego de la proposición (??) se tiene que $p_{s,\mathcal{U}}$ es una topología sobre S . ■

El sup y el inf

Sea $\{p_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una colección de elementos de $\text{Pretop}(S)$. Veamos como es $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma$. Denotaremos al inf de esta colección por $p_{\wedge \Gamma}$.

Afirmamos que $p_{\wedge \Gamma} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ es la pretopología definida por $p_{\wedge \Gamma}(A) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(A)$ para cada $A \subseteq S$.

Primero veamos que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma$ es una pretopología sobre S .

Es claro que $p_{\wedge \Gamma}(\emptyset) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(\emptyset) = \emptyset$ (pues $p_\gamma(\emptyset) = \emptyset$ para cada $\gamma \in \Gamma$) y que $A \subseteq p_{\wedge \Gamma}(A) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(A)$. Sean $A, B \subseteq S$, entonces, como para cada $\gamma \in \Gamma$, $p_\gamma(A \cup B) = p_\gamma(A) \cup p_\gamma(B)$ (pues $p_\gamma \in \text{Pretop}(S)$ para cada $\gamma \in \Gamma$), se tiene que

$$\begin{aligned} p_{\wedge \Gamma}(A \cup B) &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(A \cup B) \\ &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (p_\gamma(A) \cup p_\gamma(B)) \\ &= \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(A) \right) \cup \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(B) \right) \\ &= p_{\wedge \Gamma}(A) \cup p_{\wedge \Gamma}(B). \end{aligned}$$

Por consiguiente $p_{\wedge \Gamma} \in \text{Pretop}(S)$.

Además, es claro que $p_\gamma(A) \subseteq p_{\wedge \Gamma}(A)$ para cada $A \subseteq S$, y para cada $\gamma \in \Gamma$. Luego $p_{\wedge \Gamma} \leq p_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Por otra parte, si $q \in \text{Pretop}(S)$ es tal que $q \leq p_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$, entonces para cada $\gamma \in \Gamma$ y para cada $A \subseteq S$, se tiene que $p_\gamma(A) \subseteq q(A)$ y por tanto $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(A) \subseteq q(A)$ para cada $A \subseteq S$, es decir; $p_{\wedge \Gamma}(A) \subseteq q(A)$ y por consiguiente $q \leq p_{\wedge \Gamma}$. Así

$$\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma = p_{\wedge \Gamma}.$$

Ahora veamos como es el sup, al cual denotaremos por $p_{\vee \Gamma}$.

Del isomorfismo ϕ tenemos que $p_{\vee \Gamma}$ es la pretopología que tiene como filtro de vecindades para cada $x \in S$, la colección $\mathcal{V}_{p_{\vee \Gamma}}(x) = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) = \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \rangle$ donde $\mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$ es el filtro de vecindades de cada x en p_γ .

No es sencillo visualizar esta función, aunque de la proposición (??) sabemos que esta función está definida por:

$$p_{\vee \Gamma}(A) := \{x \in S \mid A \cap V \neq \emptyset \text{ para cada } V \in \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \rangle\}.$$

Claro, puesto que para cada $\gamma \in \Gamma$ y para cada $x \in S$ se tiene que $\mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \subseteq \mathcal{V}_{p_{\wedge \Gamma}}(x) = \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \rangle$, de la proposición (??) se sigue que $p_\gamma \leq p_{\vee \Gamma}$ para cada $\gamma \in \Gamma$ y por tanto $p_{\vee \Gamma}$ es cota superior del conjunto $\{p_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Por otra parte, si $q \in \text{Pretop}(S)$ es tal que $p_\gamma \leq q$ para cada $\gamma \in \Gamma$, entonces para cada $\gamma \in \Gamma$ y para cada $x \in S$, $\mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ (nuevamente de la proposición (??)), luego para cada $x \in S$, $\langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \rangle \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ y por tanto $p_{\vee \Gamma} \leq q$. Así, $p_{\vee \Gamma}$ es la menor de las cotas

superiores del conjunto $\{p_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ y por tanto

$$\bigvee_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma = p_{\vee \Gamma}.$$

En resumen, dada cualquier colección $\{p_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de elementos de $\text{Pretop}(S)$, se tiene que el

$\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma$ es la función $p_{\wedge \Gamma} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ definida por

$$p_{\wedge \Gamma}(A) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(A) \text{ para cada } A \subseteq S.$$

y el $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma$ es la función $p_{\vee \Gamma} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ definida por

$$p_{\vee \Gamma}(A) = \{x \in S \mid V \cap A \neq \emptyset, \text{ para cada } V \in \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \rangle\} \text{ para cada } A \subseteq S.$$

Elementos compactos, co-compactos y complementados.

Sobre los elementos compactos en $\text{Pretop}(S)$ (del isomorfismo ϕ y del hecho que un isomorfismo envía y devuelve compactos en compactos y co-compactos en co-compactos (proposición (??))), podemos decir que $p \in \text{Pretop}(S)$ es compacta si, y sólo si, p tiene como filtro de vecindades para cada $x \in S$ la colección $\mathcal{V}_p(x)$ donde $\mathcal{V}_p(x) = \langle A_x \rangle$ para cada $x \in S$, y $A_x = S$ salvo para un número finito de elementos de S (A_x es un subconjunto de S que contiene a x).

De igual forma $p \in \text{Pretop}(S)$ es co-compacto si, y sólo si, p tiene como filtro de vecindades para cada $x \in S$ la colección $\mathcal{V}_p(x)$ donde $\mathcal{V}_p(x) = \langle A_x \rangle$ (donde A_x es un subconjunto finito de S que contiene a x) para cada $x \in S$, y $A_x = \langle x \rangle$ salvo para un número finito de elementos de S .

De la misma manera del isomorfismo ϕ , la proposición (??) y la proposición (??), podemos decir que $p \in \text{Pretop}(S)$ es complementada, si y sólo si, p tiene como filtro de vecindades para cada $x \in S$ la colección $\mathcal{V}_p(x) = \langle A_x \rangle$ donde para cada $x \in S$, A_x es un subconjunto de S que contiene a x . En tal caso la pretopología q que tiene como filtro de vecindades para cada $x \in S$, la colección $\mathcal{V}_q(x) = \langle (S \setminus A_x) \cup \{x\} \rangle$, es un complemento de p .

Bibliografía

- [1] ABDELKRIM M., TAHAR I., and NAZHA S., *Satellite image segmentation by mathematical pretopology and automatic classification*, Proc. SPIE Vol. 3217, p. 232-236, Image Processing, Signal Processing, and Synthetic Aperture Radar for Remote Sensing, Jacky Desachy; Shahram Tajbakhsh; Eds., 1997.
- [2] BELMANDT, Z., *Manuel de Prétopologie et ses Applications*, Hermes, 1993.
- [3] BOURBAKI, N., *General Topology*, Part 1, Elements of mathematics, Addison-Wesley, 1966.
- [4] CARSTENS, A. M., *The Laticce of Pretopologies on an Arbitrary Set S*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 29, N. 1, 1969.
- [5] CARTAN, H., *Théorie des filtres*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 205 (1937), 595-598.
- [6] ČECH, E., *Topological Spaces*, John Wiley & Sons, 1966.
- [7] CHICOURRAT, M. & HORVÁTH, C.D., *Pretopologies, Preuniformities and Probabilistic Metric Spaces*, Acta Math. Hungar, 110(1-2)(2006),91-116.
- [8] CHOQUET, G., *Convergences*, Ann. Univ. Grenoble, 23(1947-48), 57-112.
- [9] DAVEY, B. A. & PRIESTLEY, H. A., *Introduction to Laticce and Order*, Cambridge University Press, 1990.
- [10] DE CASTRO, R. & RUBIANO, G., *Esqueletos de retículos completos*, Boletín de Matemáticas Nueva Serie, Vol 10, N. 2, 2004.
- [11] MAMMASS D., DJEZERI S., and NOUBOUD F., *A Pretopological Approach for Image Segmentation and Edge Detection*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, Volume 15 , Issue 3 (November 2001), 169 - 179, 2001.

-
- [12] SAMBIN, G., *Pretopologies and Completeness Proofs*, The Journal of Symbolic Logic, Vol 60, Number 3, September 1995.
- [13] SILVA, M., *Aspectos de la Teoría de Retículos y Algunas Aplicaciones*, Monografía, Universidad Industrial de Santander, 2007.
- [14] SPINTER, C., *Set theory*, Addison wesley publishing company, 1971.
- [15] STADLER, B. M.R., STADLER, P. F., WAGNER, G. P., & FONTANA, W., *The Topology of the Possible: Formal Spaces Underlying Patterns of Evolutionary Change*, J. theor. Biol. 213(2001),241-274.
- [16] STADLER, B. M.R., STADLER, P. F., SHPAK, M. & WAGNER, G. P., *Recombination Space, Metrics, and Pretopologies*, Z. Phys. Chem. 216(2002),217-234.
- [17] SZÁSZ, G., *Introduction to Lattice Theory*, Academic Press, New York, 1963.
- [18] WILLARD, S., *General Topology*, Addison Wesley, 1968.