

Estudio computacional de la aceleración wakefield en guías de
onda llenas de plasma

Jesús Eduardo López Durán

Trabajo de investigación para optar al título de:

Doctor en Física

Director:

Eduardo Alberto Orozco Ospino

Ph.D. en Física

Universidad Industrial de Santander

Escuela de Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2026

*A mis padres,
Luz Yanneth y Pedro Jesús.*

A mi hermano, Jhon.

*A mis profesores,
Annie J. Delgado, Ana Dolores Araque,
Francelina Hoyos y José Domingo Jaimes.*

*Al amor de mi vida, mi esposa,
Keren C. Vanegas Perez.*

*A Colombia.
A cada ciudadano cuyo esfuerzo ha financiado mi educación, y a quienes no han tenido la
oportunidad de recorrerlo. Mi vida académica y profesional estará siempre al servicio de
nuestra gente.*

Agradecimientos

Agradezco profundamente a la Universidad Industrial de Santander, mi alma mater, y en especial a la Escuela de Física, por haber sido el escenario de mi crecimiento intelectual y humano. En sus aulas y laboratorios recibí una formación integral que abarca desde mis inicios en el pregrado hasta la culminación de mis estudios de posgrado.

Expreso mi más sincero agradecimiento a mi director, Eduardo Alberto Orozco. Gracias por su confianza depositada, su constante soporte académico y, sobre todo, por aquellos valiosos consejos y apoyo que han trascendido lo profesional, dejando una huella profunda en mi formación personal.

A mis compañeros de laboratorio y colegas. Gracias por los grandes momentos compartidos, las celebraciones, las preocupaciones mutuas y las enseñanzas que hicieron del día a día una experiencia enriquecedora.

A mi familia, cuyo apoyo ha sido el cimiento de cada uno de mis logros. Su presencia y respaldo en cada etapa de mi vida han sido fundamentales para llegar hasta aquí.

Finalmente, agradezco al amor de mi vida, mi esposa Keren. Gracias por tu paciencia, tus consejos y tu apoyo absoluto durante todo este proceso. Caminar a tu lado ha hecho que este tiempo sea verdaderamente maravilloso y especial.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Introducción | 16 |
| 1. Aceleración basada en plasma | 19 |
| 1.1. Fuerza ponderomotriz | 20 |
| 1.2. Wakefields generados por pulsos láser | 22 |
| 1.3. Wakefields generados por partículas | 24 |
| 2. Wakefields en guías de microondas | 27 |
| 2.1. Trabajos analíticos | 28 |
| 2.2. Avances experimentales | 32 |
| 2.3. Motivación y propósito de este trabajo | 38 |
| 3. Resultados | 40 |
| 3.1. Estudio paramétrico en la excitación del wake en una guía de ondas rectangular | 43 |
| 3.1.1. Influencia de las dimensiones de la guía de onda sobre la generación del wakefield | 45 |
| 3.1.2. Influencia de la frecuencia del pulso de microondas sobre la eficiencia de la excitación del wakefield | 48 |
| 3.1.3. Influencia de la duración del pulso sobre la excitación del wakefield | 50 |
| 3.1.4. Influencia de la potencia del pulso de microondas sobre la generación del wakefield | 51 |
| 3.1.5. Influencia de la densidad del plasma sobre la generación del wakefield | 52 |
| 3.2. Captura y aceleración de electrones | 53 |
| 3.2.1. Determinación de condiciones iniciales y energía esperada | 54 |
| 3.2.2. Dinámica de los electrones acelerados en aproximación de partícula simple | 57 |
| 3.2.3. Dinámica autoconsistente del proceso de aceleración | 61 |
| 3.2.4. Influencia de la posición de inyección sobre la aceleración | 65 |
| 3.3. Incremento del gradiente de aceleración a través del aumento de la densidad del plasma | 68 |

| | |
|--|-----------|
| ACELERACIÓN WAKEFIELD EN GUÍAS DE MICROONDAS | 5 |
| 4. Conclusiones | 73 |
| Referencias | 75 |
| Apéndices | |

Índice de figuras

1. *Aceleración wakefield*: Un agente externo, denominado como forzador, induce una redistribución de carga en el plasma que da lugar a la formación de un tren de pozos de potencial electrostático responsable de acelerar partículas cargadas. 20
2. *Desplazamiento de carga inducido por la fuerza ponderomotriz*: Representación esquemática del efecto de un pulso electromagnético sobre un plasma. Las partículas cargadas, independientemente de su signo, son expulsadas hacia las regiones de menor intensidad del campo, siendo los electrones los más afectados debido a su baja masa. Este desplazamiento genera una redistribución de carga que contribuye a la formación del *wakefield*. 21
3. Evolución temporal de la energía máxima alcanzada en experimentos de aceleración mediante LWFA. El tamaño de los círculos representa el ángulo de divergencia del láser. Adaptada de [1]. 24
4. Evolución temporal de la energía máxima alcanzada en experimentos de aceleración mediante PWFA. Adaptada de [1]. 26
5. Perfiles espaciales de los pulsos de microondas empleados para la resolución de la ecuación del *wake*: (a) Gaussiano, (b) Senoidal y (c) Rectangular-triangular. 30
6. Resultados numéricos del modelo de Aria y Malik (2008) para los parámetros: $f_o = 8$ GHz, $\tau = 0.8$ ns, $I_o = 0.25$ GW/m², $b = 0.03$ m y $\omega_p = 2\pi/\tau$, con $n_o = 1.9 \times 10^{16}$ m⁻³. (a) Potencial eléctrico del *wake*, (b) campo eléctrico asociado (*wakefield*) y (c) perturbación en la densidad electrónica. 30

7. Evolución temporal de la densidad electrónica normalizada $n_e(r, t)/n_o$ obtenida a partir del modelo analítico propuesto por Bliokh y colaboradores (2017), considerando un plasma con densidad uniforme $n_o = 3 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ e impulsado por un pulso de microondas con perfil gaussiano de 400 MW de potencia y 0.35 ns de duración. El instante $t=0$ corresponde al centro del pulso gaussiano, indicado por la región sombreada. 32
8. Montaje experimental empleado para la generación de un pulso intenso de microondas de corta duración. (a) Fotografía del oscilador de onda retardada en régimen de super-radiancia (SR-BWO) acoplado al convertidor de modo y a la antena de bocina. (b) Representación esquemática del sistema experimental completo, que incluye el SR-BWO, el convertidor de modo, la lente dieléctrica y el tubo de Pyrex, el cual, en esta configuración se mantiene vacío (sin plasma). 33
9. Fotografía de la guía cilíndrica formada por un arreglo de hilos metálicos utilizada en el experimento. La estructura está compuesta por 24 hilos uniformemente distribuidos a lo largo del perímetro, con un diámetro interno de 14 mm y una transparencia aproximada del 60%. Este diseño híbrido mantiene una impedancia cercana a la de una guía cilíndrica convencional, asegurando el confinamiento del pulso de microondas y permitiendo el ingreso homogéneo del plasma generado mediante *flashboards*. 35
10. Esquema del montaje experimental utilizada para la medición del *wakefield* mediante la técnica EFISH (*Electric Field Induced Second Harmonic*). Se observa la guía cilíndrica de hilos metálicos conectada al generador SR-BWO, el conjunto de *flashboards* empleados para la producción del plasma, y el tubo de tubo de vidrio transversal lleno de aire a presión que permite el paso del láser Ti:safiro (30 fs, 3.3 mJ, 800 nm). 37
11. Evolución temporal del campo eléctrico longitudinal E_z obtenida mediante simulaciones tridimensionales PIC con el código LSP. La línea negra representa el campo propagándose en la guía llena de plasma, mientras que la línea roja corresponde al caso de propagación en vacío (sin plasma). Se observan oscilaciones amortiguadas posteriores al paso del pulso, con frecuencia de aproximadamente 1.2 GHz, asociadas al *wakefield*. 38
12. (a) Representación esquemática de la guía rectangular llena de plasma. El pulso de microondas en modo TE_{10} se propaga en la dirección z . Distribución del campo eléctrico asociado al modo TE_{10} en los planos transversales: (b) $z \equiv \text{cte}$ y (c) $y \equiv \text{cte}$ 40

13. Caracterización temporal y espectral del pulso de microondas inyectado. (a) Componente $E_y(t)$ del campo eléctrico en el punto $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{L_z}{3})$ en función del tiempo. Se aprecian oscilaciones sinusoidales moduladas por una envolvente Gaussiana, en concordancia con la estructura temporal prevista. (b) Perfil instantáneo de potencia, proporcional a $E_y^2(t)$, a partir del cual se calcula la duración del pulso. (c) Espectro en frecuencia, $\text{FFT}\{E_y(t)\}$, que confirma un perfil de tipo Gaussiano centrado en 8 GHz. Estos resultados validan la correcta inicialización del pulso tanto en el dominio temporal como en el espectral. 44
14. Estructura espacial del *wakefield* generado detrás del pulso de microondas. El mapa de colores muestra la densidad electrónica perturbada n_e en el plano medio $y = b/2$, mientras que la curva marrón representa el campo eléctrico longitudinal $E_z(z)$ sobre el eje $(x = a/2, y = b/2)$. La aparición de un E_z distinto de cero, debido a la naturaleza transversal del modo TE_{10} , confirma la excitación de un modo electrostático tipo Langmuir. El primer pico negativo de E_z , con amplitud superior a 1 kV/m, define una región comprendida entre $54 \text{ cm} \lesssim z \lesssim 63 \text{ cm}$, apta para la aceleración electrónica. 45
15. Estructura espacial del *wakefield* para dos relaciones de aspecto distintas de la guía: (a) $b/a = 0.5$ y (b) $b/a = 0.7$. Cada panel incluye el perfil del campo eléctrico longitudinal $E_z(z)$ sobre el eje central $(x = a/2, y = b/2)$ y un mapa de la densidad electrónica perturbada $n_e(x, z)$ en el plano medio longitudinal $y = b/2$ 48
16. (a) Amplitud del campo eléctrico del pulso E_0 (curva azul) y del *wakefield* E_z (curva roja) en función de la frecuencia central f_0 . Se observa un máximo de E_z en 6 GHz. (b) Espectros del pulso inyectado en $z = 0$ (azul) y del campo propagado a $z \sim 21 \text{ cm}$ (rojo), correspondientes al caso $f_0 = 6 \text{ GHz}$. La línea vertical discontinua indica la frecuencia de corte del modo TE_{10} , f_c . Se observa una atenuación significativa de las componentes por debajo de f_c , lo que evidencia el filtrado inducido por la frecuencia de corte y explica la limitación en la eficiencia de excitación del *wakefield*. 49
17. Amplitud del *wakefield* E_z en función de la duración del pulso Δt (FWHM). Se observa un máximo en $\Delta t \cong 0.6 \text{ ns}$, lo que indica un comportamiento resonante en la eficiencia de acoplamiento. Parámetros: $P = 0.25 \text{ GW}$, $f_0 = 8 \text{ GHz}$, $a = 3 \text{ cm}$, $b/a = 0.7$ 51

18. (a) Amplitud pico del *wakefield* E_z en función de la potencia del pulso de microondas, P . Se observa un crecimiento rápido para potencias bajas, seguido de una disminución abrupta a potencias elevadas, indicando la existencia de una potencia óptima de excitación cercana a $P = 0.375$ GW. Perfiles del campo eléctrico longitudinal $E_z(z)$ a lo largo del eje de la guía ($x = a/2$, $y = b/2$) y perfiles de concentración electrónica en el plano $y = b/2$ para potencias seleccionadas de (b) 0.375 GW y (c) 0.625 GW. 52
19. (a) Amplitud del *wakefield* E_z en función de la densidad electrónica del plasma n_e , variada como múltiplos de un valor de referencia $n_0 = 1.8 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$. La tendencia observada es casi lineal, en contraste con el escalamiento raíz cuadrada predicho por la teoría lineal. (b) Distribución espacial de la densidad electrónica perturbada $n_e(x, z)$ en el plano medio longitudinal ($y = b/2$) para el caso $n_e = 3n_0$ 53
20. Esquema unidimensional del campo eléctrico longitudinal E_z del *wake* generado por el pulso de microondas. El electrón testigo puede ser inyectado en la posición ξ dentro de la primera zona de aceleración $E_z < 0$. (b) Resultados de simulación: Ganancia de energía del electrón testigo en función de la velocidad inicial v_{z_0} , para cinco posiciones iniciales ξ 55
21. Condiciones iniciales del *bunch* de 1 nC. (a) Distribución transversal en el plano x - y , que muestra la sección circular con radio de 2 mm. (b) Distribución de posiciones longitudinales z , con $\sigma_z = 2$ mm. (c) Distribución de velocidades longitudinales v_z , con un *spread* del 0.1%. En ambos casos, las distribuciones se generaron siguiendo perfiles gaussianos. 58
22. (a) Ganancia de energía promedio (línea negra) y respectiva dispersión ΔK (sombreado azul) de la nube de electrones de 1 nC, mostrando un máximo cercano a 90 keV. Componente longitudinal E_z (azul) y pulso E_y (negro) en (b) el instante de inyección y (c) al final de la simulación. Las línea punteada roja representa la media de las posiciones longitudinales de la nube electrónica y la región de aceleración está sombreada en color verde. 59
23. (a) Distribución transversal de la nube de electrones en la posición longitudinal $z \sim 118$ cm durante el proceso de aceleración. (b)-(d) Evolución de las posiciones centrales (x_c , y_c) de la nube a lo largo de la guía de ondas. Las zonas sombreadas representan las desviaciones estándar (σ_x , σ_y , σ_z) en cada dirección, indicando la evolución de la dispersión espacial del haz durante la interacción con el *wakefield* y el pulso de microondas. 60

24. (a) Evolución de la energía promedio de la nube de electrones (línea negra) y de su dispersión (región sombreada en azul) bajo simulaciones autoconsistentes. Distribución espacial del *wakefield* en (b) un instante posterior a la inyección, mostrando su deformación inicial y (c) al final de la simulación durante el proceso de aceleración. Las líneas punteadas rojas representan la posición central z_c del *bunch* en dichos instantes, y la región sombreada en negro su extensión longitudinal final. 62

25. Evolución de las posiciones centrales transversales del *bunch*: (a) x_c y (b) y_c , así como de sus respectivas dispersiones, σ_x y σ_y , durante la aceleración. (c) Evolución de la extensión longitudinal σ_z , que muestra el fuerte ensanchamiento de la nube electrónica. 63

26. Deformación del *wakefield* durante la inyección del *bunch* de electrones. La curva azul corresponde a la componente longitudinal E_z inmediatamente después de la inyección. La curva negra punteada muestra el *wakefield* en un instante posterior, evidenciando la recuperación de la estructura. Las líneas verticales señalan la posición central del *bunch* en cada caso. 64

27. (a) Evolución de la ganancia energética promedio de la nube de electrones acelerada; la región sombreada indica la dispersión energética correspondiente. (b)-(d) Evolución del tamaño del *bunch* (región sombreada) y de sus posiciones centrales, x_c, y_c (líneas continuas), a lo largo del eje x , eje y , eje z durante la propagación en la guía de ondas. . . 65

28. Evolución de la energía promedio de la nube de electrones inyectada para las posiciones iniciales (a) $\xi = \lambda_p/4$ y (b) $\xi = 3\lambda_p/8$. Las regiones sombreadas representan la dispersión energética en cada caso. 66

29. Evolución de la posición central de la nube de electrones respecto al *wakefield* para dos posiciones de inyección: (a) $\xi = \lambda_p/4$ y (b) $\xi = 3\lambda_p/8$. La curva azul corresponde a la componente longitudinal inmediatamente después de la inyección, mientras que la curva negra punteada muestra el *wakefield* en un instante posterior, durante la evolución del sistema. La línea vertical y el óvalo rojo indican la posición central y extensión aproximada de la nube de electrones en cada instante. Las regiones sombreadas en verde corresponden a la zona de aceleración ($E_z < 0$) y las sombreadas en púrpura a la zona de frenado ($E_z > 0$). 67

- 30. Distribución espacial de la densidad electrónica del plasma y del campo eléctrico longitudinal en el nuevo régimen de alta densidad. El mapa de colores representa la densidad electrónica $n_e(x, z)$ sobre el plano medio transversal ($y = b/2$). La línea marrón corresponde al campo eléctrico longitudinal E_z a lo largo del eje central de la guía ($x = a/2, y = b/2$). La reducción de las pérdidas electrónicas en las paredes favorece una excitación más eficiente y un mayor gradiente de campo. 70
- 31. Evolución de la ganancia energética promedio de la nube de electrones inyectada en (a) el primer *wake* y (b) el segundo *wake*. Se observan ganancias del orden de los MeV en distancias de 15–25 cm, con dispersión relativa inferior al 3%. 71
- 32. Evolución de las posiciones centrales (x_c, y_c) y dispersiones espaciales $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ del bunch acelerado. A la izquierda: resultados para la inyección en el primer *wake*; a la derecha: resultados para la inyección en el segundo *wake*. Se aprecia una mayor estabilidad y menor dispersión transversal en el segundo escenario. 72

Índice de tablas

| | | |
|----|--|----|
| 1. | Evolución de los principales resultados experimentales en aceleración de electrones mediante LWFA entre 2004 y 2019. Adaptada de [1]. | 23 |
| 2. | Resultados experimentales representativos en aceleración <i>wakefield</i> impulsada por haces de partículas (PWFA), entre 2003 y 2018. Adaptada de [1]. | 25 |
| 3. | Amplitud del <i>wakefield</i> E_z en función del ancho de la guía a y del área transversal correspondiente $A_T = ab$ obtenida en las simulaciones computacionales. La densidad del plasma, la frecuencia, duración y potencia del pulso se mantienen constantes. | 46 |
| 4. | Amplitud del <i>wakefield</i> E_z en función de la relación de aspecto b/a , manteniendo fijo el ancho de la guía en $a = 3.0$ cm. | 47 |
| 5. | Valores óptimos de velocidad inicial v_{z0} , ganancia energética máxima, razón entre energía final e inicial K_f/K_0 y distancia de la interacción d_z para cinco posiciones iniciales ξ dentro de la primera región de aceleración. Los resultados muestran que el acoplamiento más eficiente ocurre en $\xi = 0.125 \lambda_p$, con una energía final cercana a 400 keV. | 56 |
| 6. | Parámetros iniciales del <i>bunch</i> inyectado en las simulaciones de aceleración bajo la aproximación de partícula simple. | 58 |
| 7. | Parámetros iniciales del <i>bunch</i> inyectado en las simulaciones autoconsistentes de aceleración destinadas a mitigar el efecto de <i>beam loading</i> | 63 |
| 8. | Parámetros iniciales del <i>bunch</i> inyectado en las simulaciones autoconsistentes de aceleración en el régimen de alta densidad. | 70 |

Índice de apéndices

| | |
|--|-----|
| A. Simulaciones Particle in cell | 89 |
| A.1. Descripción general del método | 90 |
| A.2. Ciclo computacional | 95 |
| B. Técnicas numéricas | 96 |
| B.1. Discretización de las ecuaciones de Maxwell | 96 |
| B.1.1. Discretización temporal | 97 |
| B.1.2. Discretización espacial | 98 |
| B.1.3. Condición de estabilidad de Courant–Friedrichs–Lewy | 102 |
| B.2. Integración de las ecuaciones de movimiento | 103 |
| B.3. Interpolación y unificación de campos | 106 |
| B.3.1. Ponderación de campos sobre cada superpartícula | 106 |
| B.3.2. Proyección de campos sobre la malla común | 108 |
| B.4. Asignación de carga y corriente | 111 |
| B.4.1. Esquema Zigzag | 111 |
| B.4.2. Asignación de carga | 114 |
| B.4.3. Algoritmo de suavizado - Filtro de tres puntos | 115 |
| B.5. Esquema físico y condiciones de frontera | 116 |
| B.5.1. Condiciones de frontera para los campos | 117 |
| B.5.2. Condición de frontera para las partículas | 120 |
| B.5.3. Ventana móvil de simulación | 120 |
| C. Validación numérica | 122 |
| C.1. Validación del esquema de Boris | 122 |
| C.2. Validación del método de Yee | 125 |
| C.3. Validación de las simulaciones PIC | 128 |

Resumen

Título: Estudio computacional de la aceleración wakefield en guías de onda llenas de plasma¹

Autor: Jesús Eduardo López Durán, Eduardo Alberto Orozco Ospino ²

Palabras claves: Plasma, fuerza ponderomotriz, aceleración wakefield, pulso de microondas, simulación computacional, método particle-in-cell.

Descripción: La aceleración de partículas cargadas basada en plasma constituye una alternativa prometedora frente a los aceleradores convencionales, ya que permite alcanzar gradientes de aceleración mucho mayores y reducir significativamente las dimensiones del sistema físico. Sin embargo, su implementación experimental suele requerir fuentes láser intensas y ultracortas, además de instrumentación especializada para la detección de procesos ultrarrápidos, lo que limita su accesibilidad y complejidad técnica. Como una opción más práctica, la excitación de ondas plásmicas mediante pulsos de microondas propagándose en guías llenas de plasma surge como una estrategia viable para simplificar la infraestructura experimental y ampliar el estudio de estos mecanismos. En esta tesis se presentan, mediante simulaciones computacionales tridimensionales, la caracterización de la onda plásmica (*wake*) generada por pulsos cortos de microondas en plasmas de baja densidad y el análisis de la aceleración de electrones bajo su influencia. Este trabajo ofrece un estudio sistemático que contribuye a consolidar las bases teóricas de este mecanismo de aceleración impulsado por pulsos de microondas. Los resultados obtenidos permiten avanzar en el estudio de la viabilidad de este esquema y de sus potenciales aplicaciones, entre ellas el desarrollo de fuentes compactas y eficientes de rayos X.

¹Trabajo de investigación para optar al título de Doctor en Física.

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director, Ph.D. Física.

Abstract

Title: Computational study of wakefield acceleration in plasma-filled waveguides³

Authors: Jesús Eduardo López Durán, Eduardo Alberto Orozco Ospino ⁴

Key Words: Plasma, ponderomotive force, wakefield acceleration, microwave pulse, computational simulation, particle-in-cell method.

Description: Plasma-based acceleration of charged particles represents a promising alternative to conventional accelerators, as it enables much higher accelerating gradients while significantly reducing the physical dimensions of the system. However, its experimental implementation typically requires high-intensity, ultrashort laser pulses and specialized instrumentation for the detection of ultrafast processes, which limits its accessibility and increases technical complexity. As a more practical approach, the excitation of plasma waves by microwave pulses propagating in plasma-filled waveguides emerges as a viable strategy to simplify the experimental setup and broaden the study of such mechanisms. In this thesis, three-dimensional computational simulations are used to characterize the plasma wave (*wake*) generated by short microwave pulses in low-density plasmas and to analyze the resulting electron acceleration. This work provides a systematic computational study that helps to consolidate the theoretical foundations of microwave-driven plasma acceleration. The results obtained advance the understanding of the feasibility of this scheme and its potential applications, including the development of compact and efficient X-ray sources.

³Research work submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Ph.D. in Physics.

⁴School of Physics, Faculty of Sciences, Universidad Industrial de Santander. Advisor: Ph.D. in Physics.

Introducción

La aceleración de partículas cargadas se ha convertido en una herramienta fundamental para el entendimiento y desarrollo de múltiples disciplinas, desde la física de partículas hasta aplicaciones prácticas en la industria, la medicina y la biología. Históricamente, el descubrimiento de los rayos X por Röntgen en 1895 y del electrón por J. J. Thomson en 1896, surgió del intenso estudio de los rayos catódicos [2, 3]. Estos rayos se generaban en tubos de Geissler, dispositivos utilizados para producir descargas eléctricas en gases a baja presión mediante la aplicación de una diferencia de potencial del orden de 10 keV entre dos electrodos contenidos en un tubo de vidrio casi al vacío. Estos dispositivos producían emisiones de fluorescencia y son considerados como los primeros aceleradores de partículas cargadas [4–6]. Aunque la energía de aceleración está limitada por el potencial aplicado, el principio de operación se sigue empleando actualmente en procesos como la implantación iónica, la generación de rayos X y como etapa inicial en aceleradores más complejos.

Para superar las limitaciones de los aceleradores electrostáticos, en 1924 se desarrollaron los aceleradores lineales (LINACs, por sus siglas en inglés), los cuales utilizan campos de radiofrecuencia para inducir la aceleración de partículas. Estos aceleradores han sido ampliamente adoptados en la industria de semiconductores, en dispositivos de terapias médicas como la radioterapia, y en la producción de radiación para el análisis estructural de materiales [7–13]. Sin embargo, alcanzar energías elevadas requiere dispositivos de gran longitud, como es el caso del acelerador lineal SLAC en California, que alcanza los 3.2 km de extensión. Por su parte, Ernest O. Lawrence en 1929 desarrolló el ciclotrón, el primer acelerador circular, en el que las partículas son aceleradas mediante campos eléctricos alternos e influenciadas por la presencia de un campo magnético constante. Este diseño permitió alcanzar mayores energías en espacios más compactos; sin embargo, su límite de energía está restringido por la radiación sincrotrón emitida por las partículas en trayectorias curvas [14–17]. Posteriormente, surgieron los sincrotrones, que permiten superar estas limitaciones, aunque suelen ser dispositivos de gran tamaño que requieren configuraciones de

campo magnético más complejas y presentan desafíos tecnológicos adicionales, como sistemas de alto vacío, criogenia para imanes superconductores y control computacional avanzado [18–20].

A lo largo de los años, se han propuesto diversos esquemas de aceleración, como el mecanismo GYRAC (*Gyro-Resonant Accelerator*), que acelera electrones manteniendo la condición de resonancia ciclotrónica electrónica (ECR) mediante un campo magnético homogéneo que varía lentamente en el tiempo [21, 22]. Esta idea motivó el desarrollo del esquema SARA (*Spatial Auto-Resonance Acceleration*) en el grupo FITEK de la Universidad Industrial de Santander, donde se aceleran electrones mediante ondas electromagnéticas confinadas en cavidades resonantes excitadas en un modo transversal eléctrico, TE_{11p} ($p = 1, 2, \dots$), y afectadas por un campo magnetostático no homogéneo [23–29]. Ambos esquemas son prometedores para el desarrollo de fuentes compactas de rayos X, con longitudes de aceleración del orden de pocos centímetros.

Actualmente, el enfoque predominante en física de aceleradores se basa en el mecanismo propuesto por T. Tajima y J. M. Dawson en 1979, conocido como *Laser Wakefield Acceleration* (LWFA) [30]. En este esquema, un pulso láser ultracorto e intenso que se propaga a través de un plasma, provoca un desplazamiento local de los electrones debido a la presión del campo electromagnético. Esta perturbación en la densidad electrónica genera una onda plásmica (*wake*), caracterizada por una serie de pozos de potencial eléctrico que se excitan detrás del pulso láser. Si un haz de electrones es inyectado adecuadamente, estos pueden ser capturados y acelerados por la onda plásmica hasta alcanzar energías relativistas en distancias considerablemente menores que las requeridas por los aceleradores convencionales. Gracias a los intensos campos eléctricos soportados por el plasma, el esquema LWFA ha sido ampliamente explorado como base para el desarrollo de aceleradores compactos de alta energía. Adicionalmente, otros esquemas de generación del *wake* han sido propuestos, como el PWFA (*Plasma Wakefield Acceleration*), inducido por un haz de partículas cargadas, o el LBWA (*Laser Beat-Wave Acceleration*), basado en la interferencia de dos pulsos láser cuya diferencia de frecuencia coincide con la frecuencia del plasma. Incluso, se ha demostrado que un pulso láser de mayor duración al interactuar con el plasma, puede automodularse y generar también una onda plásmica eficiente [30–36].

No obstante, el uso de láseres de alta intensidad implica complejos requerimientos tecnológicos, tanto en su generación como en el diagnóstico experimental del *wake*, lo cual limita su implementación a gran escala. En

consecuencia, han surgido propuestas alternativas, como el uso de pulsos de microondas intensos en guías de ondas llenas de plasma, que podrían ofrecer una vía más accesible para la generación de la onda plásmica [37–41]. En esta dirección, resulta fundamental explorar este esquema de aceleración, ya que las microondas han recobrado interés como una alternativa económicamente viable para la excitación del *wake*, gracias al desarrollo de nuevas fuentes capaces de emitir pulsos de corta duración (subnanosegundos), con potencias del orden de 0.5 GW y frecuencias cercanas a 10 GHz [42–47].

En este trabajo se presenta un estudio computacional del proceso de aceleración de electrones mediante el campo eléctrico de la onda plásmica generada por un pulso de microondas en una guía de ondas rectangular llena de plasma. Para abordar este problema, se ha desarrollado un código computacional tridimensional basado en el método *Particle-In-Cell* (PIC) electromagnético, capaz de simular de manera autoconsistente la evolución de los campos y la dinámica de las partículas. Este enfoque permite analizar la formación del *wake* y caracterizar el proceso de aceleración electrónica, evaluando su eficiencia en función de parámetros importantes como la intensidad y duración del pulso, la densidad del plasma y la geometría de la guía. Los resultados obtenidos permiten valorar la viabilidad de este esquema como base para el diseño de aceleradores compactos y su eventual aplicación tecnológica.

El presente documento está organizado de la siguiente manera: el Capítulo 1 describe los fundamentos físicos y el estado del arte de la aceleración basada en plasma. El Capítulo 2 presenta las investigaciones centradas en la aceleración *wakefield* con microondas en guías de onda llenas de plasma, así como la motivación de la realización de la presente investigación. Posteriormente, se presentan los resultados obtenidos y su análisis, considerando distintos escenarios de propagación y aceleración. Finalmente, se presentan las conclusiones y las perspectivas de trabajo futuro. La metodología computacional empleada, incluyendo el modelo numérico y el diseño del código PIC se discuten en los anexos.

1. Aceleración basada en plasma

La aceleración basada en plasma es un mecanismo en el cual se emplea el campo eléctrico longitudinal de una onda plásmica (onda de Langmuir) de gran amplitud para acelerar partículas cargadas. Bajo este esquema se han diseñado sistemas altamente eficientes, capaces de acelerar partículas a energías ultrarelativistas. La idea central consiste en que un agente externo, conocido como forzador, induce una separación de carga al incidir sobre un plasma inicialmente en equilibrio, afectando principalmente a los electrones debido a su baja masa en comparación con la masa iónica.

A medida que el forzador se propaga a través del plasma, los electrones inicialmente desplazados tienden a restaurar el equilibrio, guiados por la atracción electrostática del fondo iónico y la repulsión asociada al exceso local de carga negativa. Este proceso da lugar a un tren de oscilaciones plásmicas que viajan detrás del forzador y a su misma velocidad de grupo [30, 48]. Como se muestra en la Figura 1, la redistribución de carga electrónica genera regiones alternas de polaridad positiva y negativa, formando un tren de pozos de potencial electrostático denominado *wake*. El campo eléctrico longitudinal asociado, conocido como *wakefield*, es responsable de la aceleración de una nube de partículas externas que deben ser inyectadas con una fase adecuada para garantizar un proceso de aceleración eficiente [35, 36].

El forzador que desencadena la generación del *wake* puede ser tanto un pulso láser como un haz de partículas cargadas. En general, el gran interés por los esquemas de aceleración basados en plasma radica en su capacidad para sostener campos eléctricos mucho más intensos que los alcanzables en aceleradores convencionales, como los aceleradores lineales de radiofrecuencia (LINAC), los cuales están típicamente limitados a valores del orden de 100 MV/m. En contraste, el campo eléctrico que puede soportar una onda plásmica está dado por,

$$E \sim \frac{m_e c}{e} \omega_p, \quad (1.1)$$

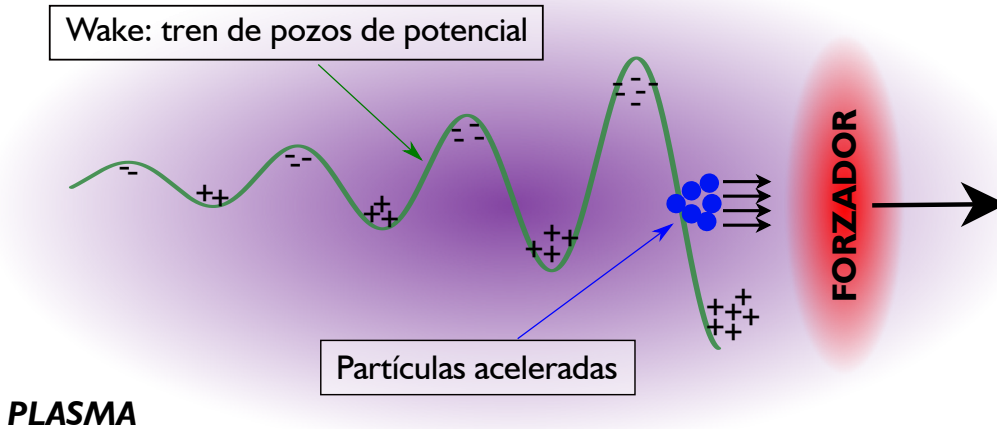
donde m_e y e representan la masa y carga del electrón, respectivamente, y ω_p es la

frecuencia de plasma,

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}, \quad (1.2)$$

con n_e la densidad electrónica y ε_0 la permitividad del vacío. A partir de estas expresiones, se puede estimar que para un plasma con $n_e = 1 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, el campo eléctrico de aceleración alcanza aproximadamente 96 GV/m, es decir, tres órdenes de magnitud por encima del campo máximo alcanzado en un LINAC convencional [1, 35, 36]. Esta notable diferencia permite reducir significativamente la longitud necesaria para acelerar partículas a altas energías, lo que posiciona a la aceleración basada en plasma como una alternativa atractiva para el desarrollo de futuros aceleradores compactos.

Figura 1: *Aceleración wakefield: Un agente externo, denominado como forzador, induce una redistribución de carga en el plasma que da lugar a la formación de un tren de pozos de potencial responsable de acelerar partículas cargadas.*



En este contexto, uno de los elementos clave para comprender cómo un pulso electromagnético puede inducir la separación de carga en el plasma que da origen al *wake*, es la fuerza ponderomotriz. Esta fuerza efectiva, de naturaleza no lineal, desempeña un papel fundamental en la dinámica de los electrones sometidos a campos electromagnéticos intensos.

1.1 Fuerza ponderomotriz

Las variaciones espaciales de un campo electromagnético que oscila armónicamente inducen en las partículas cargadas una fuerza efectiva de naturaleza no lineal, conocida como fuerza ponderomotriz. Esta fuerza tiende a expulsar las cargas eléctricas hacia las regiones de menor intensidad del campo,

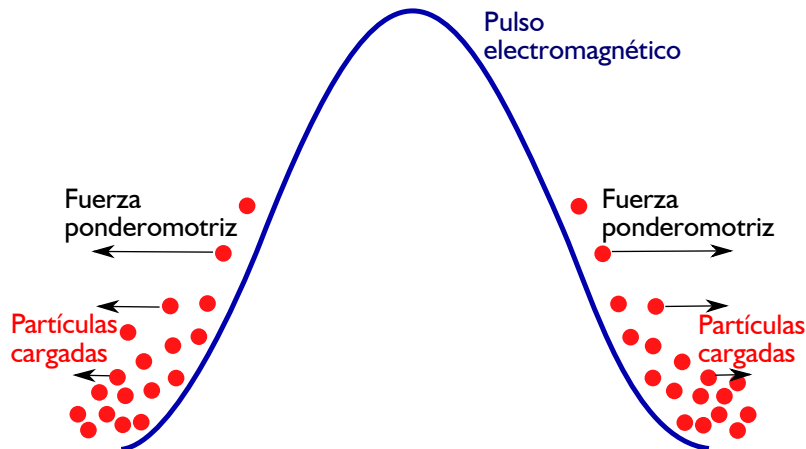
independientemente del signo de la carga. En consecuencia, tanto protones como electrones experimentan la fuerza en la misma dirección y sentido; sin embargo, su efecto resulta significativamente más notable en la dinámica electrónica, debido a la gran diferencia de masas entre electrones e iones.

La expresión relativista para la fuerza ponderomotriz ejercida sobre una partícula cargada por un campo electromagnético no homogéneo que oscila armónicamente está dada por [49],

$$\mathbf{F}_{pond} = -\frac{q^2}{4\gamma m^2 \omega^2} \nabla [E^2(\mathbf{r})], \quad (1.3)$$

donde q y m representan la carga y la masa de la partícula, respectivamente; $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ es el factor de Lorentz, E es la amplitud de la componente eléctrica del campo electromagnético, y ω su frecuencia de oscilación. Esta fuerza es proporcional al gradiente del cuadrado de la amplitud del campo eléctrico, lo que evidencia su sensibilidad a las variaciones espaciales de la intensidad del pulso. La Figura 2 ilustra este fenómeno, mostrando cómo las partículas cargadas son desplazadas hacia zonas de menor intensidad del campo electromagnético. La magnitud de la fuerza es mayor en regiones donde el gradiente de intensidad es más pronunciado. De esta manera, la fuerza ponderomotriz desempeña un papel clave en la formación del *wakefield*, ya que permite explicar la redistribución de carga electrónica generada por pulsos electromagnéticos intensos y de corta duración que se propagan a través de un plasma.

Figura 2: *Desplazamiento de carga inducido por la fuerza ponderomotriz: Representación esquemática del efecto de un pulso electromagnético sobre un plasma. Las partículas cargadas, independientemente de su signo, son expulsadas hacia las regiones de menor intensidad del campo, siendo los electrones los más afectados debido a su baja masa. Este desplazamiento genera una redistribución de carga que contribuye a la formación del wakefield.*



1.2 Wakefields generados por pulsos láser

En 1979, Tajima y Dawson propusieron utilizar el campo electrostático de una onda plásmica generada por la propagación de un pulso láser de alta intensidad y corta duración en un plasma como mecanismo para la aceleración de partículas cargadas [30]. En este esquema, la fuerza ponderomotriz asociada al pulso es la responsable de inducir una redistribución de carga, originando un *wake* que se desplaza con velocidad de fase v_{ph} igual a la velocidad de grupo del pulso láser, dada por

$$v_g = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}, \quad (1.4)$$

lo que implica que solo se propagan pulsos con frecuencia ω mayor que la frecuencia plásmica ω_p . Este mecanismo se conoce como *Laser Wakefield Acceleration* (LWFA). Se ha demostrado que, si la longitud del pulso láser L es del mismo orden que la longitud de onda plásmica $\lambda_p = 2\pi v_{ph}/\omega_p$, el *wake* se genera con mayor eficiencia, permitiendo una aceleración con baja dispersión energética, es decir, una aceleración cuasi monoenergética [50–57].

Alternativamente, la onda plásmica puede ser excitada de forma resonante mediante la inyección simultánea de dos pulsos láser de mayor duración y frecuencias distintas, de modo que la frecuencia del batido $\omega_1 - \omega_2$ coincida con ω_p . Este método, conocido como *Laser Beat-Wave Acceleration* (LBWA), fue también propuesto por Tajima y Dawson en su trabajo original [30, 35, 36]. Otro esquema resonante es el *Self-Modulated Laser Wakefield Acceleration* (SM-LWFA), donde un pulso láser de larga duración se modula espontáneamente a la frecuencia del plasma debido a una inestabilidad inducida por su interacción con un plasma de mayor densidad. Este fenómeno permite la formación del *wake* sin necesidad de ajustar inicialmente la resonancia [32, 33].

En el momento de su propuesta, el esquema LWFA no pudo implementarse experimentalmente por limitaciones tecnológicas en la generación de pulsos láser adecuados. En consecuencia, la alternativa LBWA fue explorada y observada por primera vez en 1985 en la Universidad de California, Los Ángeles (UCLA) [58], siendo luego corroborada por otros grupos [59–61]. Por su parte, el SM-LWFA fue estudiado teóricamente y observado experimentalmente hacia mediados de los años noventa, demostrando su capacidad para generar *wakefields* y acelerar electrones [62–66].

Un avance crucial en esta área fue el desarrollo de la técnica de *chirped pulse amplification* (CPA) por Strickland y Mourou en 1985, galardonados con el Premio

Nobel de Física en 2018. Esta técnica permitió la construcción de fuentes láser compactas capaces de generar pulsos ultracortos y de alta potencia, esenciales para excitar ondas plásmicas de gran amplitud y viabilizar experimentalmente el esquema LWFA [67, 68]. A partir de este desarrollo, el interés en LWFA creció rápidamente, y en 2004 se obtuvieron las primeras observaciones experimentales exitosas del *wakefield* generado por pulsos láser ultracortos para acelerar electrones, reportadas por tres grupos independientes [69–71].

En la actualidad, el LWFA es el esquema más empleado por dos razones principales:

(i) las técnicas resonantes, como LBWA y SM-LWFA, se ven afectadas por la pérdida de resonancia a medida que los electrones acelerados incrementan su velocidad, lo cual limita la amplitud del *wakefield* [72]; y

(ii) los pulsos láser de corta duración favorecen la aceleración monoenergética. Sin embargo, una de las principales limitaciones del LWFA es la divergencia del haz láser, ya que el aumento del área de enfoque durante la propagación reduce la distancia efectiva de aceleración.

Actualmente, múltiples laboratorios han logrado acelerar electrones a energías del orden de los GeV mediante LWFA. El récord actual corresponde al experimento realizado en el Laboratorio BELLA (Berkeley Lab Laser Accelerator) en 2019, donde se alcanzaron 7.8 GeV utilizando un pulso láser con una potencia pico de 0.85 PW y una divergencia del haz de 0.2 mrad, en un plasma con densidad del orden de 10^{18} cm⁻³ [73, 74]. El éxito de este experimento radicó en la mejora de las técnicas de guiado, que permitieron reducir la divergencia y maximizar la eficiencia de aceleración.

La Tabla 1, adaptada de [1], resume los principales avances experimentales en aceleración mediante LWFA desde 2004.

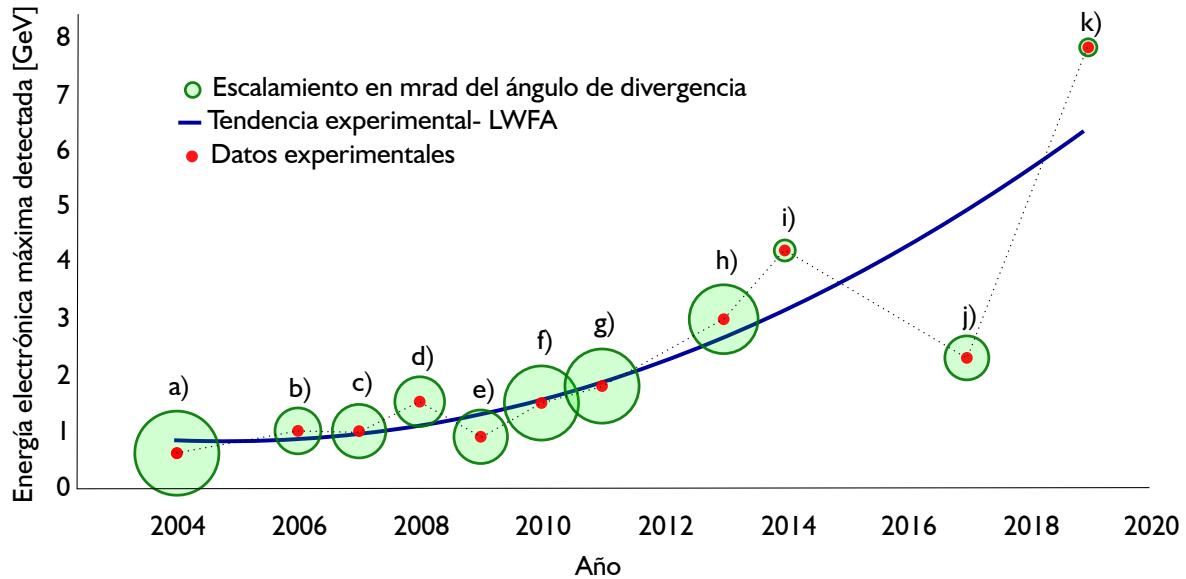
Tabla 1: Evolución de los principales resultados experimentales en aceleración de electrones mediante LWFA entre 2004 y 2019. Adaptada de [1].

| Experimento | Año | Energía alcanzada [GeV] | Gradiente de aceleración [GeV/m] | Ángulo de divergencia [mrad] |
|----------------------------|------|-------------------------|----------------------------------|------------------------------|
| Faure, J. et al. [70] | 2004 | 0.17 | 57 | 10 |
| Leemans, W. P. et al. [75] | 2006 | 1 | 30 | 1.6 |
| Karsch, et al. [76] | 2007 | 1 | 66 | 2 |
| Hafz, N. A. M. et al. [77] | 2008 | 1.5 | 300 | 1.8 |
| Froula, D. H. et al. [78] | 2009 | 0.72 | 90 | 2.85 |
| Clayton, C. E. et al. [79] | 2010 | 1.45 | 111 | 4.4 |
| Lu, H. et al. [80] | 2011 | 1.8 | 45 | 4.5 |
| Kim, H. T. et al. [81] | 2013 | 3 | 300 | 4 |
| BELLA (2014) [74] | 2014 | 4.2 | 46 | 0.3 |
| Kim, H. T. et al. [82] | 2017 | 2.3 | 230 | 1.4 |
| BELLA (2019) [73] | 2019 | 7.8 | 86 | 0.2 |

La Figura 3 ilustra estos datos de forma gráfica, donde el tamaño de los

círculos verdes representa el ángulo de divergencia en cada experimento. Se observa una tendencia general en la cual una menor divergencia se asocia con una mayor energía alcanzada, salvo en ciertos casos específicos, como los reportados por Kim et al., donde esta correlación no se mantuvo [81, 82]. Además, en 2020 el centro de investigación alemán DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron) demostró la estabilidad operacional del LWFA al mantener una operación continua durante 30 horas, acelerando un haz electrónico por segundo con una energía promedio de 368 MeV [83].

Figura 3: Evolución temporal de la energía máxima alcanzada en experimentos de aceleración mediante LWFA. El tamaño de los círculos representa el ángulo de divergencia del láser. Adaptada de [1].



1.3 Wakefields generados por partículas

La aceleración *wakefield* también puede ser impulsada mediante haces de partículas cargadas relativistas. En este esquema, denominado *Plasma Wakefield Acceleration* (PWFA), se inyecta un haz de partículas de alta energía y corta duración en un plasma inicialmente en equilibrio. Debido a las fuerzas coulombianas de atracción y repulsión, este haz induce una redistribución de carga, dando lugar a la formación de la onda plásmica (*wake*) que se propaga con la misma velocidad que el haz impulsor [31, 84]. Una vez generado el *wakefield*, un segundo haz de partículas, denominado haz testigo, debe ser inyectado con la fase adecuada para que sus componentes sean aceleradas por el campo eléctrico longitudinal de la onda plásmica.

Los primeros resultados experimentales que demostraron la viabilidad de este mecanismo se obtuvieron en 1988 en el acelerador avanzado del Laboratorio Nacional de Argonne [85–87]. Si bien tanto electrones como protones pueden ser empleados como haces impulsores, los electrones se utilizan con mayor frecuencia debido a su menor masa, lo que facilita su preaceleración y control experimental. No obstante, los protones poseen la ventaja de una mayor capacidad de penetración en el plasma, lo cual puede ser beneficioso en configuraciones específicas.

Un parámetro fundamental en este mecanismo es la relación N/σ^2 , donde N representa el número de partículas en el haz impulsor y σ su longitud; esta relación determina el gradiente de aceleración alcanzable [88].

El récord actual en aceleración mediante PWFA se alcanzó en 2007 en las instalaciones del SLAC National Accelerator Laboratory, donde se logró una ganancia energética cercana a los 84 GeV. En dicho experimento, un haz de electrones de 42 GeV generó el *wakefield* en un plasma con densidad $n \approx 2.7 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, acelerando un haz testigo hasta 84 GeV [89]. En la Tabla 2 se recopilan los resultados experimentales más relevantes en PWFA, incluyendo casos en los que se han utilizado positrones y protones como partículas impulsoras.

Tabla 2: Resultados experimentales representativos en aceleración wakefield impulsada por haces de partículas (PWFA), entre 2003 y 2018. Adaptada de [1].

| Experimento | Año | Energía ganada [GeV] | Gradiente de acel. [GeV/m] | Partícula impulsora | Energía haz impulsor [GeV] |
|-------------------------------|------|----------------------|----------------------------|---------------------|----------------------------|
| a) Blue, B. E. et al. [90] | 2003 | 0.08 | 0.056 | Positrón | 28.5 |
| b) Muggli, P. et al. [91] | 2004 | 0.28 | 0.2 | Electrón | 28.5 |
| c) Hogan, M. J. et al. [92] | 2005 | 2.7 | 27 | Electrón | 28.5 |
| d) Blumenfeld, I. et al. [89] | 2007 | 42 | 52 | Electrón | 42 |
| e) Muggli, P. et al. [93] | 2010 | 14 | 36 | Electrón | 28.5 |
| f) Litos, M. et al. [94] | 2014 | 1.6 | 4.4 | Electrón | 28.5 |
| g) Corde, S. et al. [95] | 2015 | 5 | 1.3 | Positrón | 20.35 |
| h) Corde, S. et al. [96] | 2016 | 27 | 150 | Electrón | 20.35 |
| i) Adli, E. et al. [97] | 2018 | 2 | 0.2 | Protón | 400 |

Como puede observarse, en los esquemas PWFA se han alcanzado energías superiores a las obtenidas mediante LWFA; sin embargo, existen dos aspectos críticos a considerar:

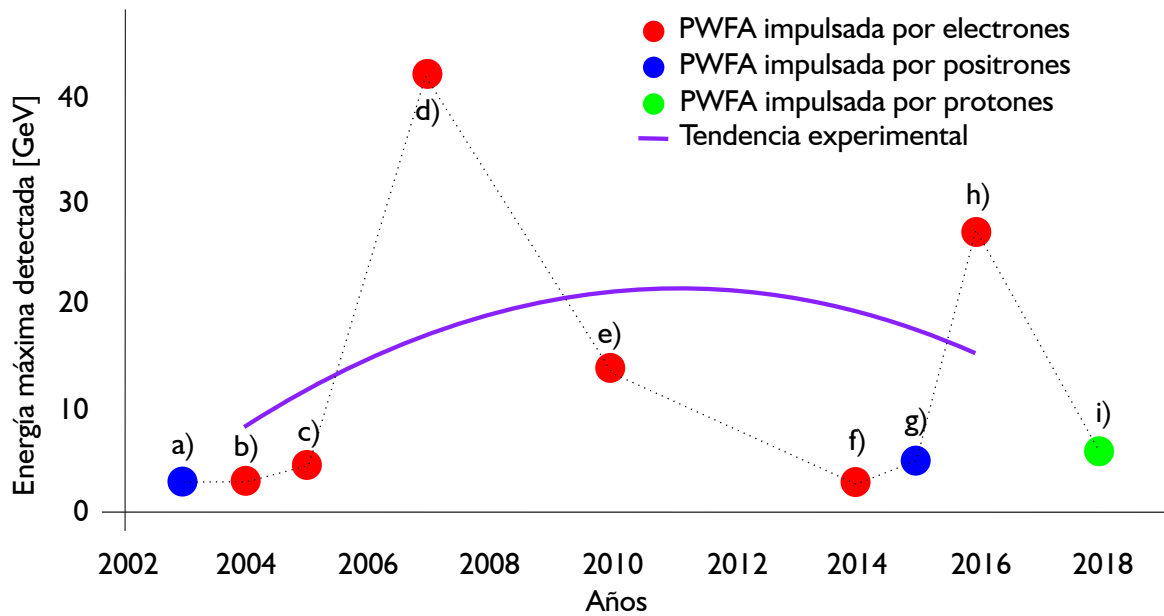
(i) la energía del haz impulsor es del mismo orden de magnitud que la del haz acelerado (del orden de decenas de GeV), lo que impone restricciones técnicas importantes; y

(ii) los gradientes de aceleración obtenidos son en general menores que los logrados mediante pulsos láser intensos, lo que hace al esquema LWFA más atractivo desde el punto de vista de compacidad y eficiencia.

En la Figura 4 se presenta una visualización de la evolución temporal de los experimentos PWFA. Se observa que, si bien en 2007 se alcanzó un pico energético,

los resultados posteriores no han mostrado una tendencia clara de incremento sostenido. Este comportamiento refleja la complejidad inherente del sistema y sugiere que aún existen múltiples parámetros que deben ser comprendidos y optimizados. No obstante, la aceleración impulsada por protones representa una de las líneas más prometedoras, dada la posibilidad de generar gradientes de aceleración elevados. En esta dirección, se enmarca el proyecto AWAKE (*Advanced Wakefield Acceleration Experiment*), actualmente en desarrollo en el CERN [98].

Figura 4: Evolución temporal de la energía máxima alcanzada en experimentos de aceleración mediante PWFA. Adaptada de [1].



Desde una perspectiva computacional, la aceleración basada en plasma, tanto en esquemas LWFA como PWFA, ha sido ampliamente respaldada por simulaciones *Particle-In-Cell* (PIC), las cuales se han consolidado como una herramienta fundamental para caracterizar la dinámica del plasma y de las partículas aceleradas, con el fin de optimizar la calidad de los haces generados, en particular en la obtención de haces cuasi monoenergéticos [99–102]. Sin embargo, estas simulaciones enfrentan desafíos técnicos, como la evaluación precisa de la emitancia en presencia de inestabilidades numéricas, no físicas, lo que ha impulsado el desarrollo de técnicas computacionales específicas para mitigar estos efectos [103, 104].

2. Wakefields en guías de microondas

En el capítulo anterior se presentaron los conceptos fundamentales, las generalidades y el estado del arte de los esquemas de aceleración basada en plasma, incluyendo tanto los impulsados por pulsos láser, entre los cuales destaca el esquema *Laser Wakefield Acceleration* (LWFA), como aquellos que utilizan haces de partículas relativistas, denominados *Plasma Wakefield Acceleration* (PWFA). Estos mecanismos han demostrado un potencial extraordinario para alcanzar gradientes de aceleración muy superiores a los obtenidos en aceleradores convencionales, como los de radiofrecuencia. No obstante, su implementación experimental sigue siendo altamente compleja, pues requiere fuentes láser de potencia extremadamente elevada o haces de partículas relativistas de gran energía, además de instrumentación sofisticada para diagnosticar fenómenos que ocurren en escalas espacio-temporales ultrarrápidas. Esto, en la práctica, limita su accesibilidad elevando los costos asociados a su desarrollo.

En este contexto, surge la necesidad de explorar alternativas que conserven las ventajas inherentes a los *wakefields* en el plasma, pero que al mismo tiempo resulten más asequibles y permitan simplificar las condiciones experimentales. Una de estas alternativas consiste en el uso de pulsos de microondas intensos, capaces de generar ondas plásmicas bajo condiciones adecuadas. Este planteamiento se fundamenta en que la formación de una onda plásmica no es exclusiva de la interacción láser-plasma, sino que, en principio, cualquier excitación electromagnética suficientemente corta e intensa, y con una frecuencia superior a la frecuencia de plasma puede inducir el desplazamiento de electrones y, en consecuencia, la formación de un tren de pozos de potencial electrostáticos capaces de acelerar partículas cargadas.

Particularmente, la propagación de pulsos electromagnéticos en guías de onda llenas de plasma se perfila como una alternativa que podría ofrecer ventajas relevantes frente a los esquemas tradicionales. A diferencia de los pulsos láser que se propagan en el vacío o en medios no confinados, los pulsos de microondas guiados no experimentan el incremento del área de enfoque (*spot*) asociado al fenómeno de divergencia, lo que, en principio, permitiría extender la distancia de interacción efectiva. No obstante, el

sistema no está exento de otros fenómenos complejos, como la dispersión modal, las pérdidas en las paredes o los efectos no lineales derivados de la interacción pulso-plasma, lo que resalta la necesidad de profundizar en la comprensión de estos procesos.

Dado que la amplitud del *wakefield*, como se mostró previamente, depende directamente de la concentración electrónica del plasma, el esquema LWFA presenta una ventaja importante: los pulsos láser pueden propagarse en plasmas de mayor densidad, lo que permite alcanzar ondas plásmicas de mayor amplitud y, por tanto, gradientes de aceleración más altos. En contraste, la condición impuesta por la frecuencia de corte en el caso de las microondas restringe el rango de concentraciones electrónicas permitidas y conduce a una reducción significativa en la amplitud del *wakefield* generado bajo estas condiciones.

Este capítulo presenta una revisión de los avances teóricos, computacionales y experimentales reportados en la literatura sobre *wakefields* generados por pulsos de microondas en guías de onda llenas de plasma. El objetivo principal es no solo identificar las oportunidades que ofrece este esquema como una alternativa viable a los métodos tradicionales, sino también destacar los desafíos que motivan el desarrollo de estudios numéricos detallados, los cuales son abordados en los capítulos posteriores.

2.1 Trabajos analíticos

En el contexto de la búsqueda de alternativas a los esquemas tradicionales de aceleración basada en plasma impulsada por pulsos láser y haces de partículas, los estudios teóricos sobre la generación de *wakefields* mediante pulsos de microondas en guías de onda llenas de plasma representan un punto de inflexión importante. Entre los trabajos más relevantes en este ámbito, el modelo desarrollado por Aria y Malik (2008) constituye una de las primeras aproximaciones analíticas al problema del *wakefield* inducido por un pulso de microondas en una guía rectangular metálica llena de plasma [37]. Los autores partieron de las ecuaciones de Maxwell acopladas a las ecuaciones de continuidad y de movimiento de los electrones, bajo las hipótesis de plasma frío, acolisional e iones inmóviles, debido a su gran masa en comparación con la masa electrónica. Consideraron que un pulso de microondas en el modo TE_{10} actúa como *forzador* del sistema. Se trata de un modelo cuasilineal que describe la excitación del *wake* mediante la fuerza ponderomotriz asociada al pulso de microondas, la cual desplaza a los electrones de su posición de equilibrio.

Asumiendo que la envolvente del pulso varía lentamente (evolución temporal despreciable) y realizando una transformación de coordenadas a un marco de

referencia comóvil con el pulso, junto con una aproximación unidimensional, en la que las variaciones transversales no son completamente capturadas, los autores obtuvieron una ecuación diferencial para el potencial electrostático del *wake*, $\phi(z, t)$, expresada como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{e}{2m_e v_g^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\omega_p^2}{v_g^2} \phi - \frac{ec^2}{m_e v_g^2} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{b} \right) F(\xi) = 0, \quad (2.1)$$

siendo

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{v_g^2} - \frac{1}{c^2} \right) E^2(\xi) - B_z^2(\xi) \right], \quad B_z(\xi) = \frac{\pi}{bv_g} \int E(\xi) d\xi, \quad (2.2)$$

donde $\xi = z - v_g t$ es la coordenada comóvil con el pulso que viaja con velocidad de grupo v_g a lo largo de una guía rectangular de ancho b . Por su parte, $k_p = \omega_p / v_g$ representa el número de onda plásmica, ω_p la frecuencia de plasma y $E(\xi)$ la envolvente del campo eléctrico del pulso.

La ecuación (2.1), que guarda similitud con la de un oscilador forzado no lineal, relaciona la amplitud del *wake* con el gradiente de intensidad del campo forzador, resaltando el papel de la duración τ y perfil del pulso en el proceso de excitación. La resolución analítica de esta ecuación resulta inviable debido a su naturaleza no lineal, por lo que los autores emplearon métodos numéricos, como el algoritmo de Runge-Kutta, para evaluar el comportamiento del sistema. Los resultados mostraron que la amplitud del *wake* aumenta al reducir la frecuencia del pulso de microondas f_o , disminuir el ancho de la guía b y aumentar la duración del pulso τ , alcanzando valores del orden de varios MV/m bajo condiciones de potencia y dimensiones en principio viables experimentalmente [37].

Este modelo fue reconstruido en nuestro grupo de investigación en 2018, por Y. Camacho [48], quien confirmó los resultados originales e investigó la influencia de diferentes perfiles espaciales del pulso sobre la excitación de la onda plásmica. En la Figura 5 se presentan los perfiles considerados.

En todos los escenarios, tanto el campo eléctrico del pulso como el término forzador se consideraron distintos de cero únicamente en la región $0 \leq \xi \leq L$. La Figura 6 muestra el perfil del potencial electrostático del *wake*, el campo eléctrico asociado y perturbación en la densidad electrónica para un caso representativo, calculado con parámetros típicos de operación.

En la revisión crítica del modelo se identificó que, en el contexto de la aceleración *wakefield*, la fuerza ponderomotriz transversal adquiere gran relevancia siempre que la escala del gradiente de intensidad transversal del pulso es comparable

Figura 5: Perfiles espaciales de los pulsos de microondas empleados para la resolución de la ecuación del wake: (a) Gaussiano, (b) Senoidal y (c) Rectangular-triangular.

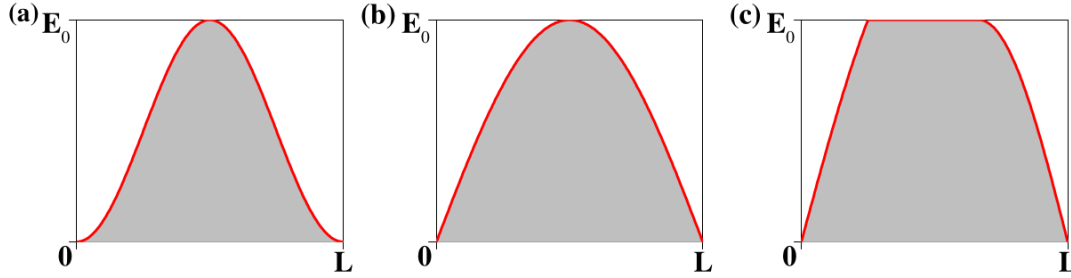
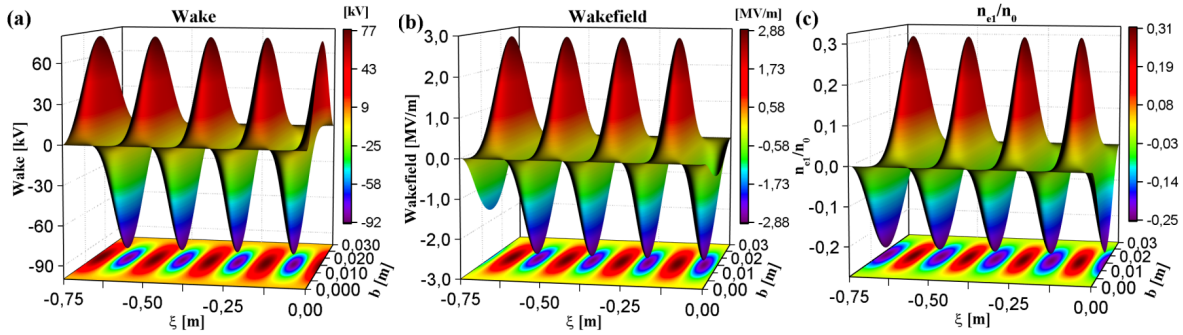


Figura 6: Resultados numéricos del modelo de Aria y Malik (2008) para los parámetros: $f_o = 8 \text{ GHz}$, $\tau = 0.8 \text{ ns}$, $I_o = 0.25 \text{ GW/m}^2$, $b = 0.03 \text{ m}$ y $\omega_p = 2\pi/\tau$, con $n_o = 1.9 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$. (a) Potencial eléctrico del wake, (b) campo eléctrico asociado (wakefield) y (c) perturbación en la densidad electrónica.



con la longitud de onda plásmica. Este efecto, omitido en el modelo original, introduce una complejidad significativa al sistema, que limita el tratamiento analítico y requiere un abordaje numérico más avanzado. Por tanto, la verificación de las amplitudes predichas y la evaluación del impacto de los efectos transversales se constituyen en pasos necesarios para avanzar hacia una descripción más completa del fenómeno.

En un trabajo complementario, Bliokh et al. (2017) abordaron el problema considerando la propagación de pulsos de microondas de alta potencia, del orden de los gigavatios (GW), y de corta duración ($\lesssim 1 \text{ ns}$), en una guía cilíndrica llena de plasma [105]. Este estudio introdujo las expresiones analíticas para el modo TM_{01} generado, por ejemplo, por osciladores de ondas retardadas (*backward wave oscillators*, BWO), incorporando tanto las componentes longitudinales como radiales de la fuerza ponderomotriz.

Un hallazgo clave fue que, debido a la estructura radial del campo eléctrico en el modo TM_{01} , la componente ponderomotriz radial domina sobre la longitudinal, desplazando los electrones hacia las paredes de la guía y generando una región cargada

positivamente en el eje, que actúa como fuente del campo del *wake*.

El campo electromagnético correspondiente al modo TM_{01} en una guía cilíndrica puede expresarse como:

$$E_z(r, z, t) = -\frac{k_{\perp}}{k_z} E_0(z, t) J_0(k_{\perp} r) \cos(\omega t - k_z z), \quad (2.3)$$

$$E_r(r, z, t) = E_0(z, t) J_1(k_{\perp} r) \sin(\omega t - k_z z), \quad (2.4)$$

$$H_{\varphi}(r, z, t) = \frac{k_0}{k_z} E_0(z, t) J_1(k_{\perp} r) \sin(\omega t - k_z z), \quad (2.5)$$

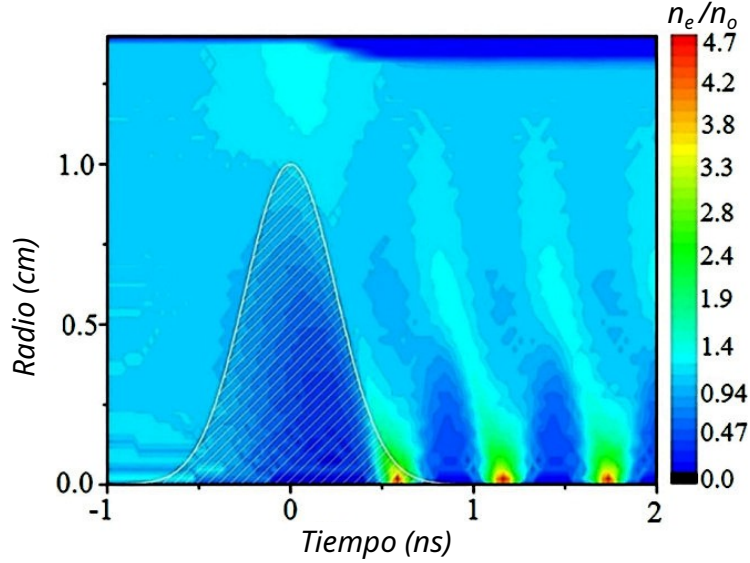
donde J_0 y J_1 son funciones de Bessel de primer tipo, k_{\perp} y k_z los números de onda transversal y longitudinal respectivamente, y $E_0(z, t)$ la envolvente del pulso que varía lentamente.

A partir de estas expresiones, los autores derivaron las ecuaciones de movimiento de los electrones en el plasma bajo la acción combinada del campo del pulso y del campo restaurador asociado a los iones, obteniendo finalmente un sistema reducido que describe la dinámica radial y axial del desplazamiento electrónico. La Figura 7 presenta la evolución de la densidad electrónica normalizada $n_e(r, t)/n_o$, correspondiente a los resultados obtenidos en su modelo. Se consideró un plasma con densidad $n_o = 3 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ y un pulso de microondas con perfil gaussiano de 400 MW y duración de 0.35 ns, propagándose en una guía de 1.4 cm de radio.

Un aspecto innovador de este estudio fue la combinación del modelo analítico con simulaciones tridimensionales Particle-In-Cell (PIC), las cuales validaron las predicciones teóricas y permitieron explorar configuraciones experimentales más realistas, como guías con paredes parcialmente transparentes. Los resultados mostraron que estos pulsos pueden inducir modulaciones de densidad de hasta un 100 %, con escalas espaciales y temporales significativamente mayores que las observadas en la aceleración por láser, lo que facilitaría el diagnóstico experimental.

Ambos trabajos destacan el potencial de los pulsos de microondas que se propagan en guías de onda como una alternativa viable para la generación de *wakefields*, ofreciendo condiciones experimentales más accesibles y escalas diagnósticas más manejables que las asociadas a los pulsos láser. Es importante señalar que ambos modelos analíticos no incorporan efectos relativistas y aunque pueden presentar limitaciones derivadas de sus aproximaciones, en conjunto, constituyen un punto de partida sólido para el desarrollo de modelos computacionales más avanzados, como los que se abordan en capítulos siguientes de este trabajo.

Figura 7: Evolución temporal de la densidad electrónica normalizada $n_e(r,t)/n_o$ obtenida a partir del modelo analítico propuesto por Bliokh y colaboradores (2017), considerando un plasma con densidad uniforme $n_o = 3 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ e impulsado por un pulso de microondas con perfil gaussiano de 400 MW de potencia y 0.35 ns de duración. El instante $t=0$ corresponde al centro del pulso gaussiano, indicado por la región sombreada.



2.2 Avances experimentales

Los avances experimentales en la generación de *wakefields* mediante pulsos de microondas en guías de onda llenas de plasma han sido liderados principalmente por el grupo del Technion–Israel Institute of Technology, en colaboración con el Institute of High Current Electronics en Rusia [42–47]. Estos trabajos han consolidado un marco experimental robusto para explorar la viabilidad de este esquema como alternativa a los mecanismos de aceleración basados en pulsos láser o haces de partículas relativistas. A continuación se presentan algunos de los estudios más destacados.

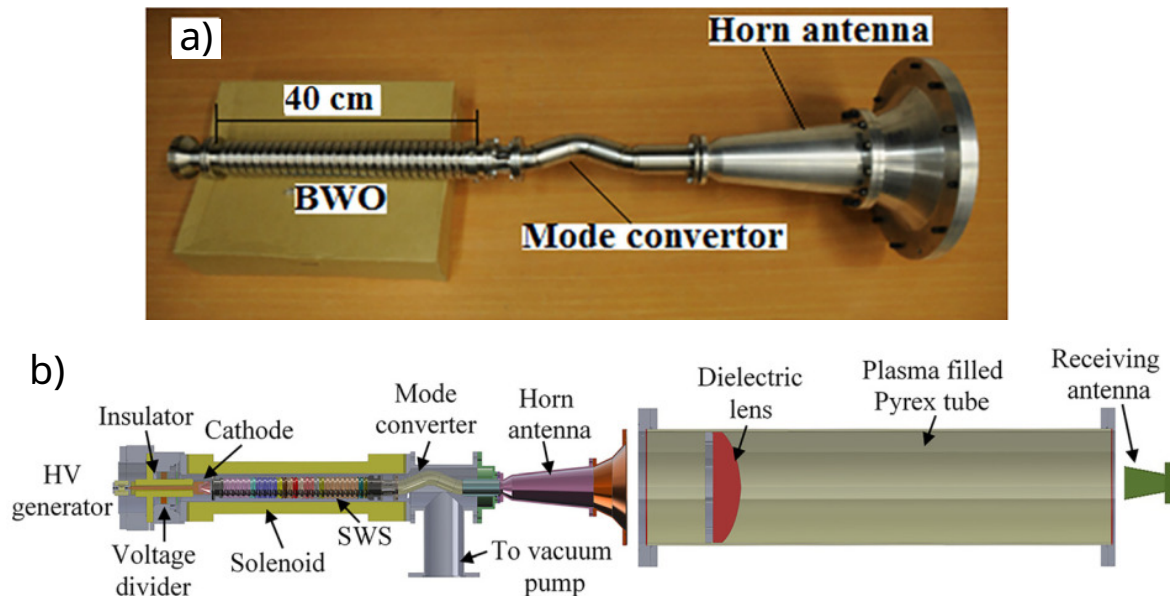
Un buen punto de partida se encuentra en el trabajo de Shafir et al. (2017) [42], quienes desarrollaron un experimento pionero enfocado en la generación de un pulso de microondas de alta potencia específicamente diseñado para inducir la formación de *wakefields* en guías de onda llenas de plasma de baja densidad. Para ello, emplearon un oscilador de onda retardada en régimen de superradiancia (*Super-Radiant Backward Wave Oscillator*, SR-BWO), impulsado por un haz de electrones de aproximadamente 250 keV de energía y 1.5 kA de corriente, generado mediante un diodo magnetoaislado acoplado a un generador modificado capaz de producir haces de 5 ns con una repetición de hasta 1 kHz. El haz fue transportado a través de una estructura de ondas lentas (*Slow Wave Structure*, SWS) en presencia de un campo magnético axial de 2.5 T, lo

que garantizó su confinamiento y estabilidad.

La interacción del haz electrónico con el SWS permitió generar un pulso de microondas de 0.5 ns de duración, 9.6 GHz de frecuencia y una potencia pico cercana a 550 MW. Este pulso fue posteriormente dirigido mediante una lente dieléctrica hacia una guía cilíndrica llena de plasma. En el SR-BWO, el pulso de microondas se excita inicialmente en el modo cilíndrico TM_{01} , el cual es transformado al modo TE_{11} mediante una guía curva, optimizando el acoplamiento hacia la región de interacción.

La Figura 8.(a) presenta una fotografía parcial del sistema experimental: el SR-BWO acoplado al convertidor de modo (guía de onda curva) y a una antena de bocina cilíndrica (*horn antenna*), mientras que la Figura 8.(b) muestra un esquema general del sistema. Cabe señalar que en este experimento el tubo de Pyrex aún no se llenó con plasma, pues el objetivo principal fue la formación y caracterización del pulso de microondas de alta potencia y corta duración.

Figura 8: Montaje experimental empleado para la generación de un pulso intenso de microondas de corta duración. (a) Fotografía del oscilador de onda retardada en régimen de super-radiancia (SR-BWO) acoplado al convertidor de modo y a la antena de bocina. (b) Representación esquemática del sistema experimental completo, que incluye el SR-BWO, el convertidor de modo, la lente dieléctrica y el tubo de Pyrex, el cual, en esta configuración se mantiene vacío (sin plasma).



Si bien en este primer trabajo el pulso no fue inyectado directamente en un plasma, se realizaron simulaciones que evaluaron su incidencia en una guía llena de plasma de baja densidad, observándose modulaciones de densidad cercanas al 100 % y campos eléctricos longitudinales y transversales del orden de varios kV/cm. Estos

resultados demostraron que el pulso generado poseía las características necesarias para excitar *wakefields* en dicho régimen. Aunque las amplitudes obtenidas fueron menores que las típicamente observadas en esquemas láser, el mayor tamaño espacial y temporal del *wake* facilitaría su diagnóstico mediante técnicas convencionales, destacando así la accesibilidad experimental de este enfoque. En síntesis, este estudio estableció la factibilidad de generar pulsos de microondas adecuados para la excitación de *wakefields*, sentando un punto de partida sólido para trabajos posteriores orientados al acoplamiento directo con plasmas.

Posteriormente, Cao et al. (2018) [44] analizaron el fenómeno de autocanalización de un pulso de microondas de alta potencia en un plasma de baja densidad previamente formado. Para ello, emplearon el mismo mismo esquema SR-BWO del trabajo anterior (Figura 8), con un generador de alto voltaje basado en etapas de compresión magnética y conmutadores semiconductores, capaz de producir un pulso de alto voltaje de aproximadamente 6 ns y 320 kV. Este pulso fue aplicado a un diodo magnetoaislado, donde se generó y aceleró un haz electrónico hueco de alta corriente (1.5 kA, 270 keV), guiado a través de una SWS bajo un campo magnético axial de 2.5 T garantizando su confinamiento y estabilidad durante la interacción con el sistema generador de microondas. La interacción del haz con la SWS excitó un pulso TM_{01} cilíndrico de 0.6 ns, 9.6 GHz y aproximadamente 300 MW, linealmente polarizado enfocado mediante una lente dieléctrica de Ultem hacia el interior de un tubo de Pyrex de 1 m de longitud y 24 cm de diámetro interno. El plasma fue previamente generado por una descarga de radiofrecuencia de 2 MHz en helio o argón, a presiones entre los 5 y 130 Pa.

El plasma se caracterizó mediante interferometría de microondas y espectroscopía óptica, incluyendo la medición de la temperatura electrónica a partir del cociente de intensidades de las líneas H_α y H_β . Adicionalmente, se registraron imágenes de emisión del plasma antes y después de la propagación del pulso con una cámara 4QuikE, y se midieron señales de transmisión y dispersión usando antenas receptoras. Los experimentos demostraron que el pulso de microondas produce un canal de plasma autoinducido significativamente más largo que la longitud de Rayleigh correspondiente en vacío, confirmando el fenómeno de autocanalización por ionización. Se observaron canales de hasta 30 cm de longitud y diámetros de aproximadamente 5 cm, para densidades iniciales de $(2 - 3) \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ (He) y $(1.5 - 5) \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ (Ar). La formación del canal de plasma resultó ser un aspecto crucial del trabajo, ya que permitió reducir significativamente la divergencia del pulso, extendiendo su propagación muy por encima de la longitud de Rayleigh y facilitando

una interacción más eficiente entre el pulso y el plasma.

El canal de plasma, caracterizado por un perfil radial hueco con menor densidad en el eje y mayor densidad en el perímetro, actúa como una guía de onda óptica natural que confina el pulso en la región central y mantiene su intensidad máxima. Este fenómeno prolonga la distancia de propagación del pulso crea condiciones favorables para la generación de *wakefields* más fuertes y uniformes. Los resultados fueron respaldados mediante un modelo analítico simplificado tipo “fibra óptica” y simulaciones PIC 2D, confirmando que la canalización es consecuencia directa de la ionización inducida por el pulso, y no del efecto ponderomotriz, irrelevante en pulsos de duración menor a 1 ns.

En 2019, Cao et al. [47] presentaron un nuevo avance al evaluar experimentalmente la interacción entre pulsos de microondas de alta potencia y plasmas confinados en guías cilíndricas, con el objetivo de analizar la factibilidad de generar *wakefields* bajo dichas condiciones. Se empleó nuevamente el SR-BWO, modificado para producir pulsos de 0.4 ns, 28.6 GHz y una potencia pico de 1.2 GW, alimentado por un haz electrónico generado en un diodo magnetoaislado sin cátodo sólido (*foilless*) de ~ 280 keV, ~ 1.5 kA, y ~ 5 ns, guiado en una SWS bajo un campo magnético axial de 8 T.

Una de las innovaciones fue el uso de una guía cilíndrica formada por un arreglo de hilos metálicos (*cylindrical wire array waveguide*), compuesta por 24 hilos uniformemente distribuidos a lo largo del perímetro, con un diámetro interno de aproximadamente 14 mm y una transparencia de aproximadamente 60% (Figura 9). Esta configuración permitió un confinamiento eficiente del pulso manteniendo la impedancia cercana a la de una guía convencional y facilitó el ingreso del plasma hacia el interior.

Figura 9: Fotografía de la guía cilíndrica formada por un arreglo de hilos metálicos utilizada en el experimento. La estructura está compuesta por 24 hilos uniformemente distribuidos a lo largo del perímetro, con un diámetro interno de 14 mm y una transparencia aproximada del 60%. Este diseño híbrido mantiene una impedancia cercana a la de una guía cilíndrica convencional, asegurando el confinamiento del pulso de microondas y permitiendo el ingreso homogéneo del plasma generado mediante flashboards.



El plasma, con densidades entre 10^{10} y 10^{14} cm^{-3} , se generó mediante *flashboards* ubicados en la región coaxial adyacente a la guía. La separación entre los hilos fue optimizada para minimizar las pérdidas por radiación y garantizar que el modo electromagnético dominante, TM_{01} , mantuviera un perfil estable, evitando distorsiones significativas durante su propagación. El plasma se caracterizó por interferometría de microondas, espectroscopía óptica (ancho Stark) y sondas de Langmuir. Asimismo, la propagación del pulso dentro de la guía llena de plasma fue estudiada experimentalmente, incluyendo la caracterización de su transmisión y acoplamiento.

Aunque el *wakefield* no fue medido directamente, su generación fue analizada mediante un modelo analítico unidimensional y simulaciones PIC tridimensionales con el código LSP, mostrando modulaciones de densidad de hasta ocho veces la densidad inicial. Se identificó un radio crítico $r_{cr} \approx 6.9$ mm, a partir del cual el comportamiento radial de los electrones cambiaba: por debajo de este valor eran expulsados hacia las paredes; por encima, se concentraban hacia el eje.

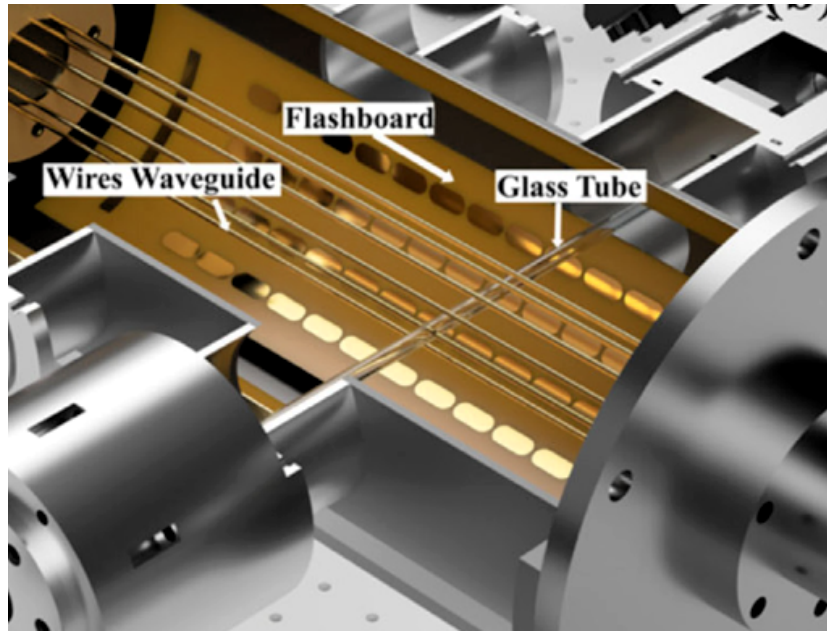
Este estudio demostró experimentalmente la generación y acoplamiento de pulsos de microondas de alta potencia en una guía cilíndrica llena de plasma y, mediante modelos y simulaciones, evidenció la viabilidad de excitar *wakefields* intensos bajo dichas condiciones, estableciendo parámetros operativos clave y se resaltó el potencial de este esquema para futuras implementaciones.

Cao et al. (2024) [46] reportaron la primera medición directa y cuantitativa del campo eléctrico del *wakefield* generado por pulsos de microondas en guías de ondas llenas de plasma. Para ello, emplearon un SR-BWO impulsado por un haz electrónico generado en un diodo magnetoaislado *foiless* de aproximadamente 300 keV, 2 kA y 5 ns, que produjo pulsos de aproximadamente 0.5 ns, 9.5 GHz y una potencia pico cercana a 0.24 GW. El pulso fue acoplado a una guía cilíndrica de 24 hilos metálicos de 1.4 cm de radio (Figura 9) con plasma, generado por *flashboards* y densidad de 3×10^{10} cm^{-3} aproximadamente.

La innovación principal radicó en el diagnóstico del *wakefield* mediante la técnica de generación de segundo armónico inducido por campo eléctrico (*Electric Field Induced Second Harmonic*, EFISH). Se utilizó un láser Ti:zafiro de 30 fs, 3.3 mJ y 800 nm, inyectado transversalmente a través del eje de la guía en un tubo de vidrio lleno de aire a presión (Figura 10). La interacción del láser con el campo eléctrico oscilante del *wake* generó un segundo armónico detectado con un sistema óptico calibrado. La calibración se realizó comparando las señales EFISH con mediciones de referencia obtenidas en

configuraciones de campo conocidas, como placas paralelas y acopladores de la guía.

Figura 10: Esquema del montaje experimental utilizada para la medición del wakefield mediante la técnica EFISH (*Electric Field Induced Second Harmonic*). Se observa la guía cilíndrica de hilos metálicos conectada al generador SR-BWO, el conjunto de flashboards empleados para la producción del plasma, y el tubo de vidrio transversal lleno de aire a presión que permite el paso del láser Ti:safiro (30 fs, 3.3 mJ, 800 nm).

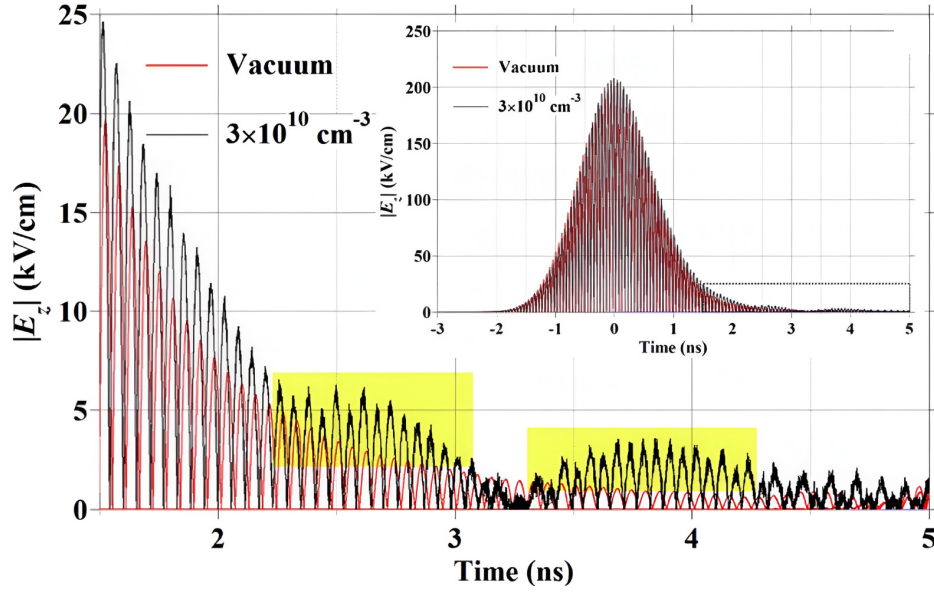


Los resultados mostraron oscilaciones amortiguadas al paso del pulso, con una frecuencia cercana a 1.2 GHz, correspondiente a la frecuencia del plasma, confirmando su naturaleza como *wakefield*. Simulaciones tridimensionales PIC con el código LSP reprodujeron la estructura temporal (Figura 11) con amplitudes ligeramente inferiores a las medidas experimentalmente. El campo máximo registrado en las simulaciones fue cercano a 25 kV/cm. Sin embargo, al comparar con el caso de propagación en vacío, es decir, sin plasma, donde el campo residual del pulso alcanza aproximadamente 20 kV/cm, se concluye que el campo neto atribuible al *wakefield* es del orden de 5 kV/cm. Las simulaciones también evidenciaron que el tubo dieléctrico utilizado para el paso del láser EFISH afecta parcialmente el perfil radial del plasma, aunque sin alterar de manera sustancial la estructura general del campo generado.

Este estudio constituye la primera medición experimental directa del *wakefield* inducido por pulsos de microondas de alta potencia en guías de onda llenas de plasma, demostrando que pulsos de duración $\lesssim 1$ ns generados en el régimen SR-BWO pueden producir *wakefields* del orden de varios kV/cm en plasmas de baja densidad. Estos resultados consolidan el potencial del esquema y marcan el inicio de una etapa orientada

a diagnósticos avanzados y a experimentos enfocados en la aceleración controlada de partículas mediante *wakefields* impulsados por microondas.

Figura 11: Evolución temporal del campo eléctrico longitudinal E_z obtenida mediante simulaciones tridimensionales PIC con el código LSP. La línea negra representa el campo propagándose en la guía llena de plasma, mientras que la línea roja corresponde al caso de propagación en vacío (sin plasma). Se observan oscilaciones amortiguadas posteriores al paso del pulso, con frecuencia de aproximadamente 1.2 GHz, asociadas al wakefield.



2.3 Motivación y propósito de este trabajo

En este punto es claro que los avances presentados en este capítulo evidencian que los pulsos de microondas de alta potencia propagándose en guías llenas de plasma representan una alternativa prometedora para la generación de *wakefields*, ofreciendo ventajas operativas frente a los esquemas tradicionales basados en láseres o haces relativistas. Sin embargo, tanto los experimentos desarrollados hasta la fecha como los modelos analíticos revisados se han enfocado principalmente en la comprensión y caracterización del *wake*, dejando aún abiertas cuestiones fundamentales sobre su evolución espacio-temporal y, de manera más relevante, sobre el proceso de captura y aceleración de partículas cargadas dentro de estos campos. Esta brecha limita la evaluación integral del potencial de estos esquemas como base para el desarrollo de aceleradores compactos.

En este contexto, el presente trabajo tiene como objetivo contribuir a disminuir esta brecha mediante un estudio computacional detallado tanto del proceso de formación

del *wake* y de la aceleración de electrones mediante el campo eléctrico de la onda plásmica generada por un pulso de microondas en una guía de ondas rectangular llena de plasma. En lo que respecta a la formación del *wake*, se identificó cómo las propiedades del pulso, tales como su potencia, duración y frecuencia influyen en la estructura y amplitud de la onda plásmica, así como el impacto de las características geométricas de la guía y de la densidad inicial n_0 . Por otra parte, en lo referente al proceso de aceleración, se exploró la capacidad de estos *wakes* para capturar y acelerar electrones, con especial énfasis en la estimación de las energías máximas alcanzables, la delimitación de las regiones efectivas de aceleración y el análisis de la calidad del haz generado, evaluando parámetros como la dispersión energética y la evolución de las propiedades espaciales de los electrones acelerados.

Dado que la interacción ocurre en escalas temporales muy cortas y en un régimen no térmico, se adopta una descripción cinética del plasma basada en la evolución del sistema de ecuaciones de Vlasov-Maxwell. De este modo, se ha desarrollado un código computacional basado en el método Particle-In-Cell electromagnético tridimensional, diseñado para resolver de manera autoconsistente la evolución de los campos electromagnéticos y la dinámica relativista de las partículas cargadas. Este desarrollo integra módulos especializados para el tratamiento de las condiciones de frontera, la inyección controlada de haces de electrones y el modelado de la interacción entre el pulso de microondas, el plasma y las partículas aceleradas.

Los resultados obtenidos a partir de estas simulaciones permiten establecer, por una parte, la viabilidad de este esquema como base para el diseño de aceleradores compactos y por otra, proporcionan una plataforma numérica flexible para explorar nuevas configuraciones experimentales y orientar el desarrollo de posibles aplicaciones.

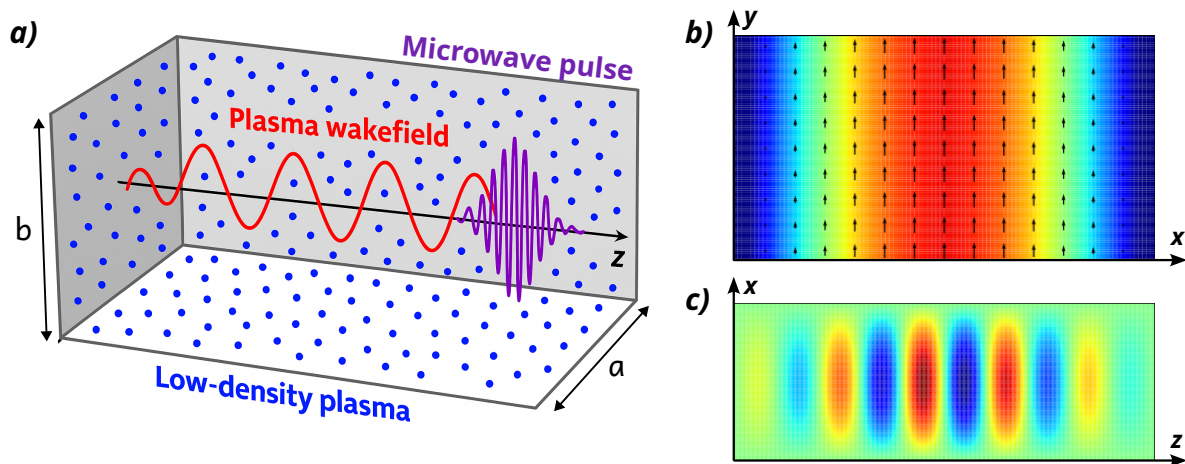
Con el fin de ofrecer una visión clara del desarrollo de este trabajo, el capítulo siguiente presenta los resultados y su respectivo análisis, donde se examinan el proceso de formación del *wakefield*, la captura y aceleración de electrones y la influencia de los parámetros físicos más relevantes sobre la eficiencia del mecanismo. Finalmente, en los anexos se exponen los fundamentos teóricos y numéricos del esquema implementado, describiendo en detalle los métodos empleados para la resolución de las ecuaciones de Maxwell y la dinámica relativista de partículas, así como las estrategias adoptadas para su implementación computacional. En este sentido, el presente trabajo no solo contribuye a la comprensión fundamental de los *wakefields* generados por pulsos de microondas en guías llenas de plasma, sino que además desarrolla y pone a disposición una herramienta computacional destinada al estudio cinético y acolisional del plasma.

3. Resultados

En este estudio, el primer objetivo es investigar la excitación de *wakefields* mediante el modo fundamental TE_{10} de un pulso de microondas que se propaga a través de una guía rectangular llena de plasma de baja densidad. El objetivo central es caracterizar la estructura del *wakefield* generado bajo estas condiciones. Posteriormente, se estudia la aceleración de un haz de electrones por el *wakefield* excitado y se analiza su viabilidad para futuras implementaciones prácticas. Cabe señalar que los resultados asociados a la formación del *wakefield* fueron publicados en una revista científica [106].

En la Figura 12(a) se muestra un esquema de la guía rectangular con plasma, donde el pulso se propaga a lo largo del eje z . La distribución espacial del campo eléctrico asociada al modo TE_{10} se presenta en la Figura 12(b), mostrando un perfil sinusoidal de media longitud de onda sobre el eje x , sin variación en el eje y [107, 108]. Se espera que la amplitud y estructura del *wakefield* dependan de forma crítica de las propiedades del pulso de microondas – su intensidad, duración y frecuencia –, de la densidad del plasma de fondo y de las dimensiones de la guía.

Figura 12: (a) Representación esquemática de la guía rectangular llena de plasma. El pulso de microondas en modo TE_{10} se propaga en la dirección z . Distribución del campo eléctrico asociado al modo TE_{10} en los planos transversales: (b) $z \equiv cte$ y (c) $y \equiv cte$.



En particular, para un plasma frío y sin colisiones, la respuesta electromagnética lineal está descrita por la permitividad relativa

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (3.1)$$

donde ω_p es la frecuencia de plasma. Cuando la guía rectangular se llena con plasma, el modo TE_{10} obedece la relación de dispersión

$$\beta_{\text{TE}_{10}}(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r(\omega) - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}, \quad (3.2)$$

la cual implica una frecuencia de corte dada por

$$\omega_c = \sqrt{\omega_p^2 + \left(\frac{\pi c}{a}\right)^2}, \quad f_c = \omega_c/2\pi. \quad (3.3)$$

A medida que $\omega \rightarrow \omega_c^+$, la constante de propagación $\beta \rightarrow 0$ y la velocidad de grupo $v_g = (d\beta/d\omega)^{-1}$ tiende a anularse, lo que produce un ensanchamiento espacial pronunciado del pulso a lo largo del eje longitudinal, reduciendo los gradientes de campo efectivos que impulsan el *wakefield*. Para una potencia pico P dada y una sección transversal ab , el campo transversal sobre el eje en el régimen lineal escala como

$$E_0 = \sqrt{\frac{2P \omega \mu_0}{ab \beta_{\text{TE}_{10}}(\omega)}}, \quad (3.4)$$

lo que indica que, al operar más lejos de la frecuencia de corte (es decir, con mayor β), el campo impulsor disminuye para una potencia fija.

Como se discutió en secciones anteriores, el *wakefield* es inducido por la fuerza ponderomotriz, en este caso asociada con los gradientes del campo eléctrico del pulso de microondas en el modo transversal eléctrico TE_{10} . Esto implica que la eficiencia en la generación del *wake* está determinada tanto por la geometría modal (por ejemplo, el perfil $\sin(\pi x/a)$ en x) como por la estructura espacio-temporal del pulso. Las variaciones en a modifican directamente el gradiente de la intensidad, mientras que los cambios en b solo escalan el área transversal sin alterar el perfil del modo.

Una medida adimensional útil para caracterizar la intensidad del pulso es el *potencial vectorial normalizado*,

$$a_0 = \frac{e E_0}{m_e c \omega}, \quad (3.5)$$

el cual permite identificar el régimen de interacción. Para $a_0 \ll 1$, la respuesta del

plasma es lineal y no relativista, con oscilaciones plásmicas armónicas. A medida que a_0 se aproxima al régimen cuasilineal ($0.5 \lesssim a_0 \lesssim 1.5$), emergen efectos de amplitud finita como cavitación leve de la densidad, deformación de onda y mayor sensibilidad a la envolvente y fase del pulso. Para $a_0 > 1.5$, la dinámica se vuelve no lineal y relativista, con oscilaciones anarmónicas y eventual ruptura de onda.

Las ecuaciones (3.1)–(3.5) proporcionan así un marco teórico compacto para interpretar los análisis paramétricos presentados en las siguientes secciones.

Ahora bien, la dinámica del sistema está determinada por la interacción entre el campo electromagnético y la respuesta del plasma. El problema es inherentemente no lineal y autoconsistente: el pulso electromagnético modifica el estado del plasma y, a su vez, la evolución de los campos es influenciada por esta respuesta. Para modelar con fidelidad física dicha interacción se adopta un enfoque de primeros principios basado en el sistema de ecuaciones de Vlasov–Maxwell, correspondiente al régimen cinético de baja densidad [109]. Para resolver numéricamente este sistema se emplea el método Particle-in-Cell-electromagnético (PIC-EM) tridimensional. Esta técnica es particularmente adecuada para estudiar la dinámica del plasma en el régimen no lineal [110], ya que permite la evolución autoconsistente de partículas y campos electromagnéticos. En este marco, el plasma se representa de forma discreta en el espacio de fases a través de macropartículas, cada una de las cuales agrupa un gran número de partículas reales próximas en dicho espacio. La dinámica de cada macropartícula está gobernada por la ecuación relativista de Newton–Lorentz [110–112] (ver anexo A).

La ecuación de movimiento de cada macropartícula se integra mediante el algoritmo de Boris [113], un esquema *leapfrog* de segundo orden que garantiza una adecuada conservación de energía y momento, incluso en presencia de campos electromagnéticos intensos. Las ecuaciones de Maxwell se resuelven utilizando el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) sobre la malla desfasada de Yee [114], lo que asegura precisión de segundo orden y preserva la condición $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Si la conservación de carga se satisface numéricamente, la ley de Gauss para el campo eléctrico permanece automáticamente preservada en todo el dominio; así que para este fin se emplea el esquema de Umeda, el cual garantiza conservación de carga exacta [115] (ver anexo B).

El dominio de simulación corresponde a una guía rectangular con paredes metálicas (PEC) en $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ y $y = b$, completamente llena con plasma homogéneo de baja densidad. Para reducir el ruido numérico, la densidad del plasma

se incrementa linealmente desde el vacío hasta su valor nominal a lo largo de una corta región de entrada sobre el eje z , lo que permite una transición suave hacia el interior homogéneo del plasma. El pulso de microondas en modo TE_{10} se excita sobre el plano $z = 0$.

Para las macropartículas, se impusieron condiciones de frontera absorbentes en las paredes metálicas. Se incorporó una capa de absorción de dos celdas adyacente a cada frontera transversal; cuando una partícula ingresa a esta capa, su trayectoria avanza hacia el punto de intersección con la pared dentro del mismo paso temporal, su carga y corriente se depositan hasta ese punto utilizando el mismo esquema de conservación de carga que en el dominio principal, y posteriormente la partícula es eliminada.

Este marco computacional permite capturar los procesos cinéticos no lineales que gobiernan la formación del *wake*, posibilitando una exploración detallada de la estructura del campo asociado bajo diferentes parámetros físicos (ver anexo C).

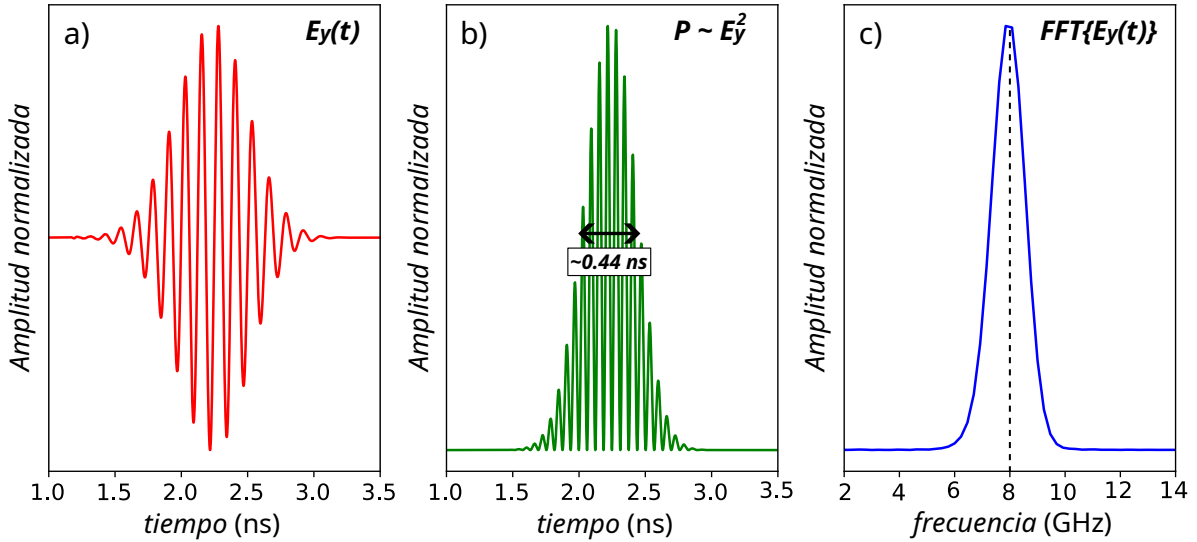
3.1 Estudio paramétrico en la excitación del wake en una guía de ondas rectangular

En esta sección se presentan y discuten los resultados obtenidos a partir de simulaciones computacionales, haciendo énfasis en la influencia de parámetros clave como la duración e intensidad del pulso, así como la geometría de la guía de onda sobre la excitación y estructura del *wakefield* en el plasma. La selección de los parámetros de simulación se fundamenta en estudios experimentales desarrollados por Cao y colaboradores [43, 46, 47, 105], quienes emplearon plasmas de baja densidad con concentraciones electrónicas del orden de $n_e \sim 10^{16} \text{ m}^{-3}$. En dichos trabajos, los pulsos de microondas presentaban envolventes Gaussianas de frecuencias centrales en el rango de GHz y duración al rededor de los 0.5 ns (FWHM).

Con el fin de mantener consistencia con condiciones realizables experimentalmente y realizar comparaciones entre teoría y observación, en las simulaciones aquí presentadas se adoptan parámetros equivalentes. Mediante una variación sistemática de los valores físicos relevantes, se analiza cómo la amplitud y la coherencia espacial del *wakefield* responden a cambios en la configuración del sistema. Se presta especial atención al papel del confinamiento transversal impuesto por la geometría de la guía de onda y a su interacción con la respuesta dieléctrica del plasma, factores que determinan de manera crítica la eficiencia y la estructura del *wakefield* excitado.

Como caso de referencia, se considera un plasma homogéneo con densidad $n_e = 1.8 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$, confinado en una guía rectangular de dimensiones $a = 3 \text{ cm}$ y $b = 2.4 \text{ cm}$, lo que corresponde a una relación de aspecto $b/a = 0.8$. El plasma es excitado por un pulso de microondas con frecuencia central de 8.0 GHz , potencia máxima de 0.25 GW y duración FWHM aproximada de 0.44 ns . La Fig. 13 muestra la correcta inicialización del pulso, evidenciando las características espectrales y temporales esperadas. El pulso mantiene su envolvente Gaussiana y la frecuencia portadora deseada a medida que se propaga dentro de la guía llena de plasma.

Figura 13: Caracterización temporal y espectral del pulso de microondas inyectado. (a) Componente $E_y(t)$ del campo eléctrico en el punto $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{L_z}{3})$ en función del tiempo. Se aprecian oscilaciones sinusoidales moduladas por una envolvente Gaussiana, en concordancia con la estructura temporal prevista. (b) Perfil instantáneo de potencia, proporcional a $E_y^2(t)$, a partir del cual se calcula la duración del pulso. (c) Espectro en frecuencia, $\text{FFT}\{E_y(t)\}$, que confirma un perfil de tipo Gaussiano centrado en 8 GHz . Estos resultados validan la correcta inicialización del pulso tanto en el dominio temporal como en el espectral.

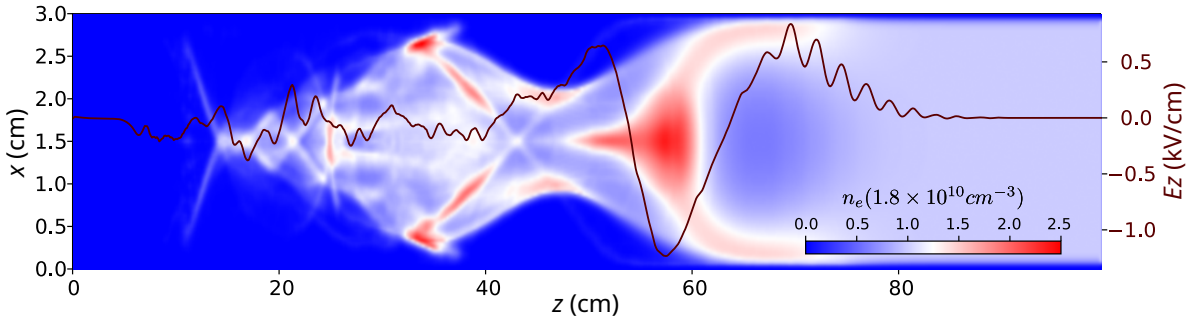


En la Fig. 14 se presenta un mapa de la densidad electrónica perturbada n_e en el plano medio transversal ($y = b/2$), junto con el campo eléctrico longitudinal $E_z(z)$ a lo largo del eje ($x = a/2, y = b/2$). Las oscilaciones longitudinales tanto en la densidad de carga como en el campo eléctrico confirman la excitación exitosa de una onda electrostática en el plasma, es decir, un *wakefield*, que se desarrolla detrás del pulso inyectado.

Es importante destacar que el modo TE_{10} cuando se propaga en una guía de onda vacía se caracteriza por poseer únicamente componente transversal del campo eléctrico. Por lo tanto, la presencia de una componente longitudinal del campo eléctrico

($E_z \neq 0$ constituye una evidencia inequívoca de la excitación del *wakefield*, asociado a una onda de Langmuir inducida por la fuerza ponderomotriz asociada al pulso de microondas. Esto hace que los modos TE resulten particularmente adecuados para el estudio de *wakefields*, ya que cualquier componente longitudinal del campo eléctrico observado pueda atribuirse directamente a la respuesta del plasma.

Figura 14: Estructura espacial del *wakefield* generado detrás del pulso de microondas. El mapa de colores muestra la densidad electrónica perturbada n_e en el plano medio $y = b/2$, mientras que la curva marrón representa el campo eléctrico longitudinal $E_z(z)$ sobre el eje ($x = a/2, y = b/2$). La aparición de un E_z distinto de cero, debido a la naturaleza transversal del modo TE_{10} , confirma la excitación de un modo electrostático tipo Langmuir. El primer pico negativo de E_z , con amplitud superior a 1 kV/m, define una región comprendida entre 54 cm $\lesssim z \lesssim$ 63 cm, apta para la aceleración electrónica.



El *wakefield* generado presenta una amplitud no uniforme a lo largo del eje de propagación. El primer pico alcanza un valor ligeramente superior a 1 kV/m, seguido de oscilaciones amortiguadas con espaciamiento cercano a $\lambda_p/2$. De forma destacable, el primer pico es negativo, lo que corresponde a un campo acelerador para electrones en la dirección de propagación del pulso.

3.1.1 Influencia de las dimensiones de la guía de onda sobre la generación del *wakefield*

Con el fin de analizar la influencia de la geometría de la guía de onda en la generación del *wakefield*, se realizaron dos conjuntos de simulaciones. En el primero, el ancho de la guía, a , se varió sistemáticamente entre 3.0 y 7.0 cm, manteniendo constante la relación de aspecto $b/a = 0.8$. Bajo esta restricción, tanto la altura de la guía, b , como el área transversal $A_T = ab$ aumentan proporcionalmente con a . La densidad del plasma se fijó en $n_e = 1.8 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$, mientras que los parámetros del pulso de microondas se mantuvieron invariantes: frecuencia central $f_0 = 8 \text{ GHz}$, potencia máxima de 0.25 GW y duración de 0.44 ns.

Los valores máximos del *wakefield* obtenidos en las simulaciones se resumen en

la Tabla 3. Los resultados revelan una correlación inversa clara entre el área transversal de la guía y la amplitud del *wakefield*. Un ajuste tipo ley de potencia a los datos arroja la relación $E_z = 20.30 A_T^{-1.5} + 0.03$, con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9987$ donde A_t se expresa en cm^2 y E_z en kV/cm . Esta tendencia se interpreta a partir de la disminución en la intensidad del campo electromagnético al aumentar el área transversal: a mayor área, la misma potencia se distribuye sobre un volumen mayor, reduciendo así la energía por unidad de área entregada al plasma. En consecuencia, se debilita la excitación de la onda plásmica y se obtienen menores amplitudes del *wakefield*.

Tabla 3: Amplitud del *wakefield* E_z en función del ancho de la guía a y del área transversal correspondiente $A_T = ab$ obtenida en las simulaciones computacionales. La densidad del plasma, la frecuencia, duración y potencia del pulso se mantienen constantes.

| a (cm) | A_T (cm^2) | a_0 | E_z (kV/cm) |
|----------|-------------------------|-------|---------------|
| 3.00 | 7.20 | 0.22 | 1.14 |
| 4.00 | 12.80 | 0.15 | 0.50 |
| 5.00 | 20.00 | 0.12 | 0.31 |
| 6.00 | 28.80 | 0.10 | 0.22 |
| 7.00 | 39.20 | 0.08 | 0.17 |

Este comportamiento también se refleja en la evolución del parámetro a_0 , el potencial vectorial normalizado (ver Ec. 3.5), el cual en consecuencia decrece con el área transversal. Dado que a_0 caracteriza el régimen de interacción pulso-plasma, los valores obtenidos indican que la mayoría de las simulaciones se encuentran en el régimen lineal. En particular, para una guía de ancho $a = 3$ cm, se observa el valor máximo de E_z , asociado a un a_0 cercano al umbral del régimen cuasilineal, lo que favorece una respuesta más eficiente del plasma (ver Tabla 3).

En el segundo conjunto de simulaciones se varió sistemáticamente la relación de aspecto b/a entre 0.5 y 0.9, manteniendo fijo el ancho de la guía en $a = 3.0$ cm. De este modo, cualquier cambio en el área transversal A_T provino únicamente de variaciones en la altura b , lo que permite aislar su influencia sobre la eficiencia de generación del *wakefield*. Los resultados, resumidos en la Tabla 4, muestran que la amplitud de la componente longitudinal E_z oscila en torno a 1.2 kV/cm para la mayoría de configuraciones, con un valor máximo de 1.37 kV/cm cuando $b/a = 0.60$. Una excepción notable ocurre cuando $b/a = 0.50$, donde E_z cae a 0.50 kV/cm a pesar de presentar el mayor valor del parámetro a_0 .

Este comportamiento se comprende al analizar conjuntamente la evolución del

Tabla 4: Amplitud del wakefield E_z en función de la relación de aspecto b/a , manteniendo fijo el ancho de la guía en $a = 3.0$ cm.

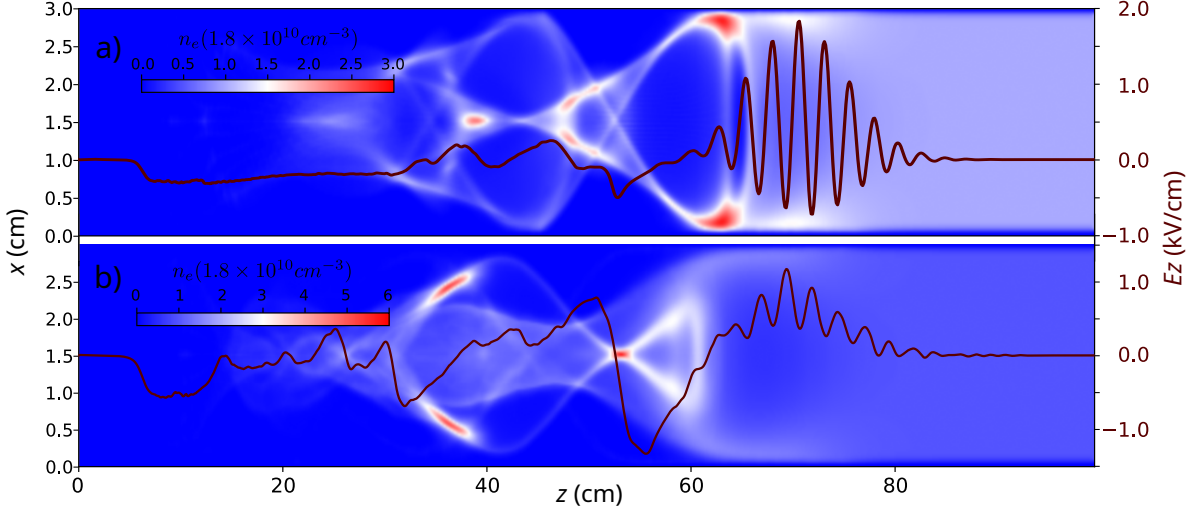
| b/a | A_T (cm ²) | a_0 | E_z (kV/cm) |
|-------|--------------------------|-------|---------------|
| 0.50 | 4.50 | 0.27 | 0.50 |
| 0.60 | 5.40 | 0.25 | 1.37 |
| 0.70 | 6.30 | 0.23 | 1.17 |
| 0.80 | 7.20 | 0.22 | 1.14 |
| 0.90 | 8.10 | 0.20 | 1.23 |

parámetro a_0 y la respuesta espacial del plasma. A medida que aumenta la relación b/a , el área transversal A_T también crece, lo que reduce la intensidad del campo eléctrico del pulso y, en consecuencia, disminuye el valor de a_0 . Los valores obtenidos indican que las simulaciones se sitúan en la zona de transición hacia el régimen cuasilineal, especialmente en la configuración $b/a = 0.5$. Sin embargo, esta mayor intensidad no se traduce en una mayor amplitud del *wakefield*, debido a que el pulso imparte un impulso transversal más fuerte a los electrones, los cuales son rápidamente dirigidos hacia las paredes metálicas, favoreciendo así la pérdida de partículas y deteriorando la formación del *wakefield*.

La Fig. 15 compara las estructuras espaciales del *wakefield* para dos configuraciones representativas: $b/a = 0.5$ y $b/a = 0.7$. En el caso $b/a = 0.7$, se observa un perfil de $E_z(z)$ más estructurado y un pico de densidad electrónica bien definido detrás del pulso, lo que refleja una excitación eficiente de la onda de Langmuir. En contraste, para $b/a = 0.5$, correspondiente al mayor valor de a_0 (ver Tabla 4), se generan campos más intensos que imparten una mayor fuerza ponderomotriz, lo que provoca que los electrones adquieran un fuerte impulso transversal y colisionen con las paredes, siendo absorbidos por estas. Esto produce una fuerte pérdida de carga en la región central, limitando la formación del *wakefield* y resultando en un perfil menos definido.

Estos resultados evidencian que, si bien el parámetro a_0 es una medida relevante de la intensidad del pulso, no resulta suficiente por sí solo para predecir la eficiencia de excitación del *wakefield*. Factores geométricos, como el confinamiento transversal y la estructura modal del campo electromagnético, también desempeñan un papel determinante. En particular, el ancho de la guía a tiene un impacto directo sobre la forma del modo TE₁₀, cuyo perfil varía sinusoidalmente en la dirección x , mientras que en la dirección y el campo se mantiene prácticamente uniforme. Por tanto, variaciones en b modifican el área transversal total y pueden conducir, en

Figura 15: Estructura espacial del wakefield para dos relaciones de aspecto distintas de la guía: (a) $b/a = 0.5$ y (b) $b/a = 0.7$. Cada panel incluye el perfil del campo eléctrico longitudinal $E_z(z)$ sobre el eje central ($x = a/2, y = b/2$) y un mapa de la densidad electrónica perturbada $n_e(x, z)$ en el plano medio longitudinal $y = b/2$.



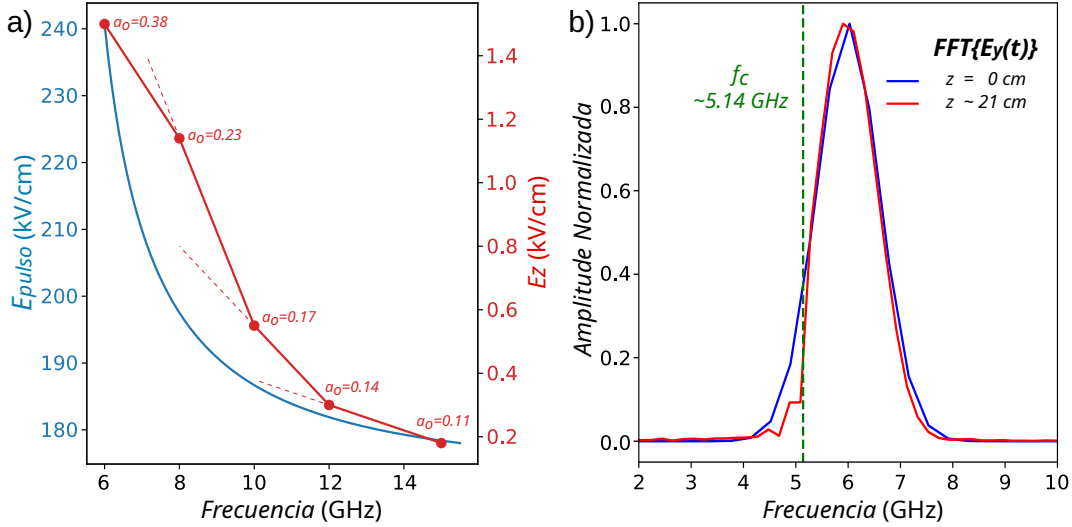
principio, a cambios moderados en la amplitud del *wakefield*. Sin embargo, al alcanzar configuraciones críticas como $b/a \sim 0.5$, predomina la pérdida de electrones por colisión con las paredes, lo que deteriora la coherencia del plasma y reduce notablemente la eficiencia de excitación. En este sentido, se resalta la existencia de un compromiso entre parámetros geométricos (dimensiones de la guía) y la eficiencia de generación de la onda plásmica.

3.1.2 Influencia de la frecuencia del pulso de microondas sobre la eficiencia de la excitación del wakefield

Para evaluar la influencia de la frecuencia del pulso de microondas en la eficiencia de generación del *wakefield*, se realizó un conjunto de simulaciones en el que la frecuencia central f_0 se varió entre 6 y 15 GHz, manteniendo fija la duración del pulso en aproximadamente 0.44 ns. La geometría de la guía se mantuvo constante, con $a = 3$ cm y $b/a = 0.7$, y la potencia pico del pulso de entrada se fijó en 0.25 GW. Como se muestra en la Fig. 16(a), la amplitud del *wakefield* E_z (curva roja) alcanza un valor máximo de 1.50 kV/cm en $f_0 = 6$ GHz, mientras que a frecuencias mayores la amplitud decrece de forma notable.

Este comportamiento se explica porque la amplitud del campo eléctrico del pulso, E_0 , depende de la frecuencia para una potencia fija, ver Ecuación (3.4); y como se aprecia en la Fig. 16(a), E_0 (curva azul) decrece al aumentar la frecuencia, debido a

Figura 16: (a) Amplitud del campo eléctrico del pulso E_0 (curva azul) y del wakefield E_z (curva roja) en función de la frecuencia central f_0 . Se observa un máximo de E_z en 6 GHz. (b) Espectros del pulso inyectado en $z = 0$ (azul) y del campo propagado a $z \sim 21$ cm (rojo), correspondientes al caso $f_0 = 6$ GHz. La línea vertical discontinua indica la frecuencia de corte del modo TE_{10} , f_c . Se observa una atenuación significativa de las componentes por debajo de f_c , lo que evidencia el filtrado inducido por la frecuencia de corte y explica la limitación en la eficiencia de excitación del wakefield.



que el crecimiento de β supera al de ω , reduciendo así la intensidad del campo excitador y la eficiencia de generación del *wakefield* en frecuencias altas.

Es importante destacar que, aunque a $f_0 = 6$ GHz se reporta la máxima amplitud del *wakefield* dentro del intervalo simulado, esta situación no representa una condición óptima de acoplamiento. Como se observa en la Fig. 16(a), la tendencia general sugiere que la pendiente $\Delta E_z / \Delta f$ debería ser mayor para frecuencias bajas que para altas; sin embargo, esta tendencia no se cumple en 6 GHz debido a la proximidad con la frecuencia de corte del modo TE_{10} , $f_c \sim 5.14$ GHz. En este régimen, el ancho espectral finito del pulso implica que las componentes cercanas o inferiores a f_c se atenúan fuertemente o no se propagan, reduciendo así la energía efectiva entregada al plasma. Además, al acercarse a la frecuencia de corte, la velocidad de grupo disminuye y la dispersión se incrementa, generando un ensanchamiento espacial del pulso que limita aún más la eficiencia de excitación del *wakefield*. Este efecto se evidencia en la Fig. 16(b), donde se observa una supresión clara de los componentes espectrales por debajo de la frecuencia de corte. Finalmente, la alta amplitud del campo del pulso ($E_{\text{pulso}} \approx 240$ kV/cm, $a_0 \sim 0.38$), provoca un impulso transversal más fuerte sobre los electrones, favoreciendo su pérdida por colisión con las paredes metálicas de la guía, tal como ya se mencionó, lo que limita el crecimiento efectivo del *wakefield*.

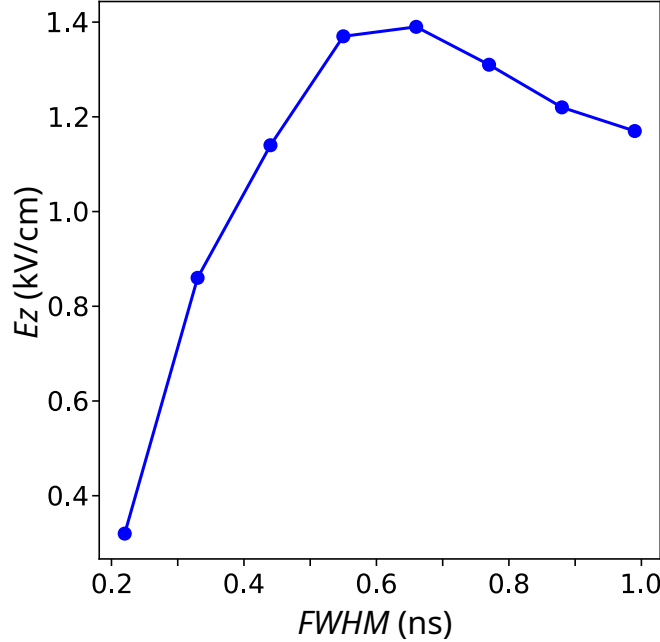
En conjunto, estos resultados sugieren la existencia de una ventana de frecuencia óptima para la generación eficiente de *wakefields* en plasmas confinados en guías rectangulares. Dicha ventana surge del equilibrio entre la eficiencia de acoplamiento energético del pulso y las limitaciones impuestas por la dispersión en las cercanías de la frecuencia de corte. En la configuración analizada, el régimen más favorable se encuentra en el entorno de $f_0 \sim 8$ GHz, donde se combina una alta amplitud del campo excitador, una propagación estable del pulso y una respuesta plásmica coherente. Si se desea excitar un *wakefield* intenso a frecuencias mayores, será necesario incrementar la potencia del pulso de microondas.

3.1.3 *Influencia de la duración del pulso sobre la excitación del wakefield*

También se investigó la influencia de la duración del pulso sobre la excitación del *wakefield*. En este conjunto de simulaciones, la duración del pulso (FWHM), denotada por Δt , se varió sistemáticamente entre 0.22 y 1.1 ns, manteniendo constante la frecuencia central $f_0 = 8$ GHz, la potencia pico en 0.25 GW y manteniendo fijas las dimensiones de la guía de onda. Como se muestra en la Fig. 17, la amplitud del *wakefield* E_z presenta una dependencia no monótona con Δt , alcanzando un máximo de aproximadamente 1.4 kV/cm en $\Delta t \sim 0.6$ ns y disminuyendo gradualmente al aumentar la duración. Este comportamiento revela un régimen resonante en la eficiencia de excitación del *wakefield*.

La resonancia observada en $\Delta t \approx 0.6$ ns puede interpretarse como el resultado de un equilibrio entre varios mecanismos físicos. Por un lado, pulsos demasiado cortos tienen espectros más amplios ($\Delta f \sim 1/\Delta t$), lo que los hace más sensibles a la dispersión y a los efectos de corte espectral. Además, su menor contenido energético y la envolvente estrecha limitan la acción sostenida de la fuerza ponderomotriz, resultando en *wakefields* de baja amplitud; por ello, la extensión temporal del pulso debe ser lo suficientemente larga para mitigar la dispersión y permitir que la fuerza ponderomotriz actúe de manera sostenida durante varias oscilaciones plásmicas, favoreciendo la formación coherente de la onda. Por otro lado, pulsos demasiado largos presentan gradientes de intensidad de campo más suaves, lo que también reduce el acoplamiento de energía al plasma. Las simulaciones computacionales bajo las condiciones presentadas indican que la excitación es óptima cuando la duración del pulso es de $\Delta t \approx 0.6$ ns, correspondiente a aproximadamente cuatro o cinco ciclos de microondas a 8 GHz.

Figura 17: Amplitud del wakefield E_z en función de la duración del pulso Δt (FWHM). Se observa un máximo en $\Delta t \cong 0.6$ ns, lo que indica un comportamiento resonante en la eficiencia de acoplamiento. Parámetros: $P = 0.25$ GW, $f_0 = 8$ GHz, $a = 3$ cm, $b/a = 0.7$.



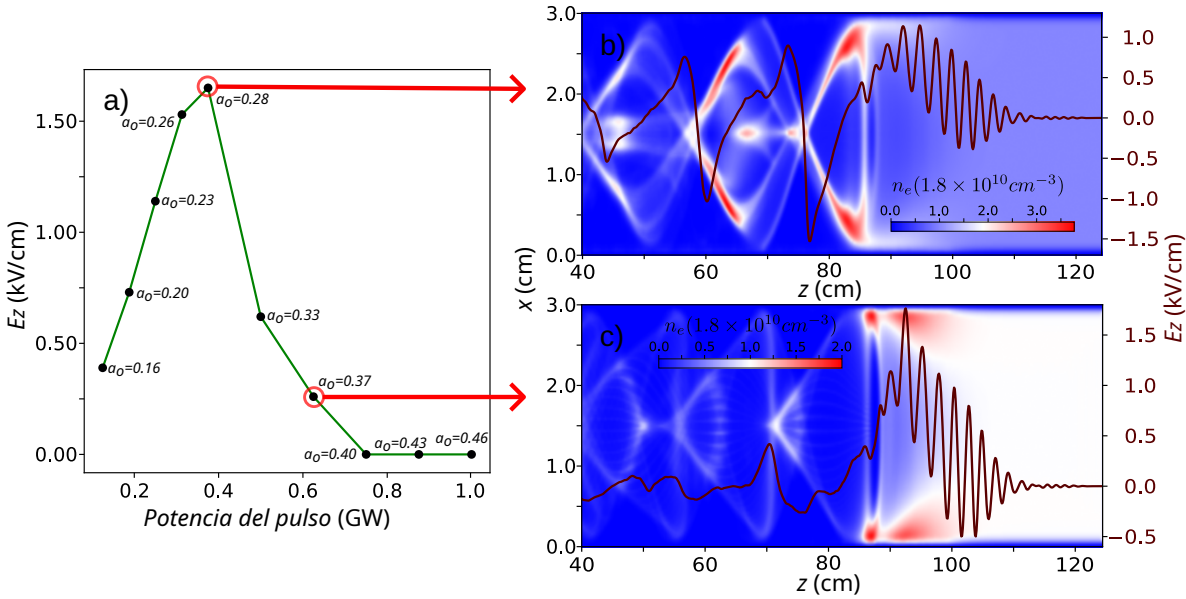
3.1.4 Influencia de la potencia del pulso de microondas sobre la generación del wakefield

Para examinar el impacto de la potencia del pulso de microondas en la generación del *wakefield*, se realizaron simulaciones en las que la potencia pico P se varió entre 0.125 y 1.0 GW, manteniéndose constantes los demás parámetros: frecuencia central $f_0 = 8$ GHz, duración del pulso $\Delta t = 0.44$ ns y dimensiones de la guía ($a = 3$ cm, $b/a = 0.7$). Los resultados, presentados en la Fig. 18, muestran que la amplitud del *wakefield* E_z crece rápidamente con la potencia del pulso en el régimen de baja a moderada intensidad, alcanzando un valor máximo alrededor de $P = 0.375$ GW. A partir de este punto, la amplitud decrece abruptamente con el incremento de potencia. De forma notable, para potencias cercanas a 1.0 GW, el *wakefield* colapsa y E_z se anula casi por completo.

Este comportamiento evidencia la existencia de una ventana óptima de potencia para la excitación eficiente de *wakefields*. A niveles moderados, el aumento de intensidad conduce a campos eléctricos más intensos, ver Ecuación (3.4), fortaleciendo la fuerza ponderomotriz que desplaza los electrones del plasma y desencadena la formación del *wake*. No obstante, por encima de un umbral crítico (~ 0.4 GW) la interacción se acerca más al régimen cuasilineal ($a_0 \sim 0.3$) y es sensible a efectos de

frontera donde los electrones son acelerados transversalmente hacia las paredes metálicas, y son absorbidos. Por tanto, un ajuste preciso de la potencia es esencial para maximizar E_z sin comprometer la estabilidad dinámica del sistema.

Figura 18: (a) Amplitud pico del wakefield E_z en función de la potencia del pulso de microondas, P . Se observa un crecimiento rápido para potencias bajas, seguido de una disminución abrupta a potencias elevadas, indicando la existencia de una potencia óptima de excitación cercana a $P = 0.375$ GW. Perfiles del campo eléctrico longitudinal $E_z(z)$ a lo largo del eje de la guía ($x = a/2$, $y = b/2$) y perfiles de concentración electrónica en el plano $y = b/2$ para potencias seleccionadas de (b) 0.375 GW y (c) 0.625 GW.



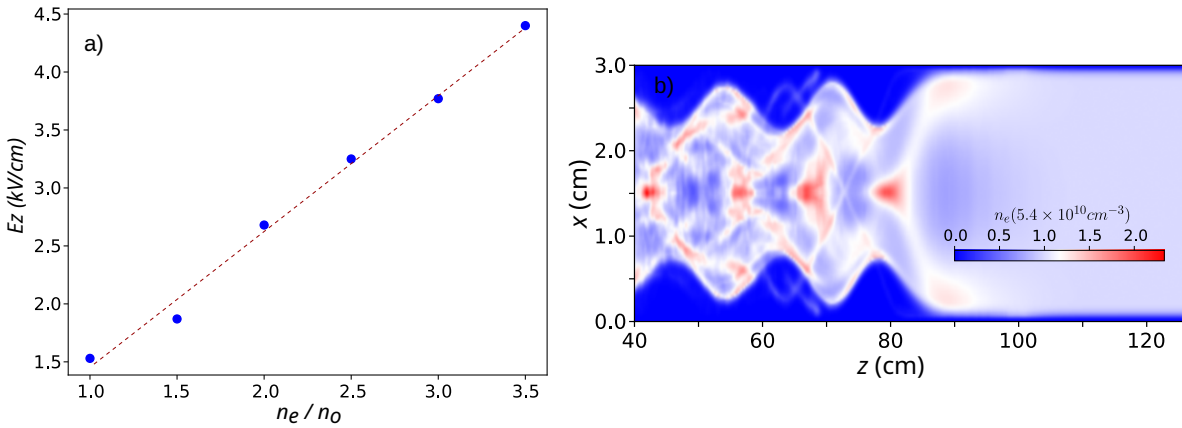
3.1.5 Influencia de la densidad del plasma sobre la generación del wakefield

Finalmente, se realizó un conjunto de simulaciones para evaluar la influencia de la densidad electrónica del plasma, n_e , en la generación del *wakefield*. La densidad fue modificada mediante factores multiplicativos aplicados a un valor de referencia $n_0 = 1.8 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, manteniéndose constantes todos los demás parámetros: potencia pico $P = 0.313$ GW, frecuencia central $f_0 = 8$ GHz, duración del pulso $\Delta t = 0.44$ ns, y dimensiones de la guía de ondas $a = 3$ cm, $b/a = 0.7$.

Los resultados, presentados en la Fig. 19.(a), muestran que la amplitud de la componente longitudinal E_z crece de forma monótona con la densidad del plasma, aumentando desde aproximadamente 1.53 kV/cm para $n_e = n_0$ hasta 4.40 kV/cm para $n_e = 3.5n_0$. Aunque teóricamente se espera una dependencia del tipo $E_{\text{wake}} \sim \sqrt{n_e}$,

según la Ecuación (1.1), los resultados obtenidos exhiben una tendencia más pronunciada, cercana al comportamiento lineal. Esta desviación sugiere la presencia de efectos físicos adicionales que refuerzan la generación del *wakefield* más allá del escalamiento idealizado.

Figura 19: (a) Amplitud del *wakefield* E_z en función de la densidad electrónica del plasma n_e , variada como múltiplos de un valor de referencia $n_0 = 1.8 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$. La tendencia observada es casi lineal, en contraste con el escalamiento raíz cuadrada predicho por la teoría lineal. (b) Distribución espacial de la densidad electrónica perturbada $n_e(x, z)$ en el plano medio longitudinal ($y = b/2$) para el caso $n_e = 3n_0$.



Una posible explicación radica en un acoplamiento más eficiente entre la longitud de onda plásmica, que se reduce al aumentar n_e , y las dimensiones transversales de la guía. A frecuencias plásmicas más elevadas, las oscilaciones electrónicas se vuelven más rápidas y localizadas, lo que reduce las pérdidas por colisión con las paredes metálicas y mejora el confinamiento electrónico. Esto se evidencia en la Fig. 19.(b), donde se observa un mayor confinamiento de los electrones en la región central a medida que aumenta la densidad. En consecuencia, incrementar n_e no solo fortalece la respuesta colectiva del plasma, sino que también mejora el confinamiento efectivo de los electrones, aumentando así la eficiencia en la excitación del *wakefield*.

3.2 Captura y aceleración de electrones

Una vez caracterizada la formación del *wakefield* inducido por el pulso de microondas en la guía de onda llena de plasma, se analizó el proceso de aceleración de electrones. Esta etapa del estudio se centró en analizar las condiciones iniciales que garantizarán la captura, la dinámica posterior y la ganancia energética de partículas testigo inyectadas en el sistema, bajo la influencia del campo eléctrico longitudinal E_z generado por el *wake*. La comprensión de este proceso resultó esencial para evaluar el

potencial de la aceleración basada en plasma impulsada por pulsos de microondas.

En las siguientes subsecciones se presenta un análisis en dos etapas. En primer lugar, se presentan los resultados de un estudio simplificado para determinar condiciones iniciales apropiadas para las partículas cargadas antes de su inyección en las simulaciones PIC. Este enfoque preliminar no solo permitió una selección práctica de parámetros, sino que también proporcionó una primera estimación teórica de la ganancia energética esperada para los electrones al interactuar con el campo del *wake*.

Posteriormente, con las condiciones iniciales ya establecidas y una proyección de la energía máxima alcanzable, se modeló la dinámica de electrones testigos mediante simulaciones PIC. En este escenario, el electrón interactuó con el campo del *wake* generado por el pulso de microondas al propagarse en la guía de ondas llena de plasma, lo que permitió evaluar la viabilidad del sistema desde el punto de vista de captura y aceleración efectiva.

3.2.1 *Determinación de condiciones iniciales y energía esperada*

En los esquemas de aceleración basada en plasma, particularmente aquellos impulsados por pulsos intensos de microondas, se han desarrollado diversos mecanismos de inyección electrónica. Entre ellos destaca la autoinyección, inducida en el régimen *blowout* o de burbuja, el cual ocurre cuando el pulso electromagnético alcanza intensidades suficientemente altas ($a_0 \gtrsim 2$). En este régimen, el propio campo del pulso genera una región libre de electrones (cavidad), dentro de la cual algunos electrones del plasma pueden ser capturados y acelerados.

Una variante de este mecanismo es la inyección *density down-ramp*, que también requiere la formación de una burbuja, pero introduce una pendiente descendente en el perfil de densidad del plasma para facilitar y controlar el proceso de captura. En ambos casos, los electrones inyectados provienen del mismo plasma. No obstante, uno de los esquemas más empleados y versátiles es la *inyección externa*, en la que un haz de electrones previamente acelerado se introduce al sistema por detrás del pulso excitador. Si este haz presenta las condiciones adecuadas de energía y sincronización, puede ser capturado por el *wakefield* generado y posteriormente acelerado.

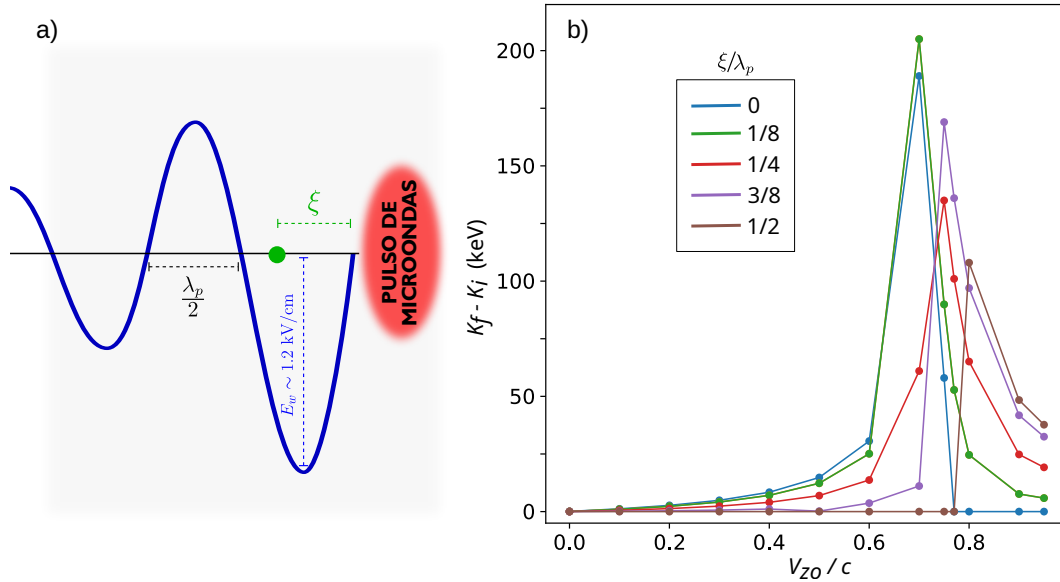
El objetivo del estudio presentado en esta sección no fue modelar ni analizar en detalle el proceso de inyección y captura de electrones, sino estudiar las condiciones iniciales – posición y velocidad – bajo las cuales un electrón externo puede ser capturado y posteriormente acelerado por el *wakefield*, siendo esta última etapa el verdadero foco

de la investigación. Con base en los resultados presentados en la sección anterior, se exploraron condiciones iniciales adecuadas que garantizaran la aceleración del electrón.

Como punto de partida, y considerando que la aceleración ocurre principalmente a lo largo del eje central de la guía, se adoptó un modelo unidimensional simplificado. En este modelo, el *wakefield* se representó analíticamente por una función sinusoidal amortiguada de amplitud pico de $E_z = 1.2 \text{ kV/cm}$ y período igual a la longitud de onda plásmica λ_p , correspondiente a una densidad de referencia $n_0 = 1.8 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. El campo se consideró con una velocidad de grupo aproximada de $v_g = 0.77c$, coincidente con la velocidad de propagación del pulso excitador de 8GHz en la guía de ondas con $a = 3 \text{ cm}$ y $b = 0.7a$. Estos valores son representativos de las condiciones obtenidas en las simulaciones previas.

La Figura 20(a) ilustra el esquema conceptual adoptado, en el cual un electrón testigo puede ser inyectado en cualquier punto dentro del primer pozo del *wake*. Allí se indican las regiones donde el campo eléctrico longitudinal actúa acelerando o frenando al electrón, lo que permite identificar las zonas favorables para su captura y posterior ganancia energética.

Figura 20: Esquema unidimensional del campo eléctrico longitudinal E_z del wake generado por el pulso de microondas. El electrón testigo puede ser inyectado en la posición ξ dentro de la primera zona de aceleración $E_z < 0$. (b) Resultados de simulación: Ganancia de energía del electrón testigo en función de la velocidad inicial v_{z0} , para cinco posiciones iniciales ξ .



En este orden de ideas, un electrón fue inyectado en una posición longitudinal ξ ubicada en la región de aceleración donde $E_z < 0$. Para identificar la condición óptima

de ganancia energética se realizaron simulaciones variando sistemáticamente la posición inicial ξ medida desde el primer punto, de derecha a izquierda, donde $E_z = 0$, y para cada una de estas posiciones se exploró diferentes velocidades iniciales v_{z0} . En cada caso, se calculó la evolución de la energía cinética del electrón al interactuar con el *wake*, registrando la ganancia energética longitudinal máxima alcanzada.

La Figura 20(b) muestra la ganancia de energía en función de la velocidad inicial para cinco posiciones representativas dentro del primer pozo del *wake*. Se observa que, para cada posición ξ , existe un valor óptimo de v_{z0} que propicia una interacción más eficiente y, por tanto, una mayor aceleración. Sin embargo, no todas las posiciones iniciales permiten el mismo nivel de acoplamiento: el mejor desempeño se alcanza para $\xi = \lambda_p/8$ con $v_{z0} = 0.7c$, logrando una ganancia energética de aproximadamente 200 keV en una distancia de interacción cercana a 2 m.

Un aspecto relevante es que los valores óptimos de velocidad se concentran alrededor de la velocidad de grupo del pulso excitador ($v_g \sim 0.77c$), lo cual implica que el electrón testigo debe ser pre-acelerado antes de ingresar al sistema. En el caso óptimo reportado, el electrón requiere una energía cinética inicial de aproximadamente 205 keV para que pueda ser acelerado por la onda plásmica, y así alcanzar una energía final cercana a 400 keV. La Tabla 5 resume los valores óptimos de velocidad inicial, ganancia de energía, razón entre energía final e inicial K_f/K_0 y distancia de la interacción d_z para cada una de las cinco posiciones consideradas en la simulación.

Tabla 5: Valores óptimos de velocidad inicial v_{z0} , ganancia energética máxima, razón entre energía final e inicial K_f/K_0 y distancia de la interacción d_z para cinco posiciones iniciales ξ dentro de la primera región de aceleración. Los resultados muestran que el acoplamiento más eficiente ocurre en $\xi = 0.125 \lambda_p$, con una energía final cercana a 400 keV.

| ξ/λ_p | v_{z0}/c | ΔK (keV) | K_f/K_0 | d_z (m) |
|-----------------|------------|------------------|-----------|-----------|
| 0 | 0.70 | 189 | 1.92 | 2.06 |
| 1/8 | 0.70 | 205 | 2.00 | 2.04 |
| 1/4 | 0.75 | 135 | 1.52 | 1.41 |
| 3/8 | 0.75 | 169 | 1.65 | 2.03 |
| 1/2 | 0.80 | 108 | 1.35 | 1.53 |

Estos resultados constituyeron un análisis preliminar orientado a identificar condiciones iniciales óptimas de inyección bajo la acción exclusiva de la componente longitudinal del *wakefield*. Este estudio proporcionó una referencia sólida para estimar la energía esperada y definir las condiciones más favorables de captura. De este modo, se estableció un punto de partida para la inicialización de los electrones en

simulaciones autoconsistentes, en las cuales se consideró la dinámica completa de electrones testigos mediante la evolución autoconsistente del sistema plasma-pulso de microondas. Los resultados de dichas simulaciones, que permiten evaluar la viabilidad del sistema desde la perspectiva de la aceleración efectiva de electrones, se presentan en la siguiente subsección.

3.2.2 *Dinámica de los electrones acelerados en aproximación de partícula simple*

Una vez establecidas las condiciones iniciales que favorecen la captura y aceleración de electrones externos en el *wakefield* generado por un pulso intenso de microondas en una guía rectangular llena de plasma, se analizó la dinámica de un *bunch* de electrones bajo la acción del campo electromagnético resultante. El análisis se abordó en dos etapas complementarias. En la primera, se adoptó la aproximación de partícula simple: el *bunch* evoluciona bajo la influencia del campo electromagnético, pero sin afectar o modificar la estructura del *wakefield*. Esta aproximación permitió evaluar la capacidad de la onda plásmica no solo para acelerar, sino también para identificar los efectos transversales sobre la dinámica de los electrones, extendiendo el análisis previo que contemplaba únicamente la componente longitudinal. En la segunda etapa, se realizaron simulaciones autoconsistentes, en las que se incluyeron tanto la influencia del *wakefield* sobre el *bunch* como la retroacción del *bunch* sobre el plasma, así como los efectos colectivos de la carga espacial.

En esta primera etapa, se inyectó un *bunch* sobre el eje central de la guía, donde el *wakefield* alcanza su valor máximo, y en la posición correspondiente a la condición óptima de inyección, $\xi = \lambda_p/8$. Se consideró un *bunch* de 1 nC, sección transversal circular de radio 2 mm, y extensión longitudinal caracterizada por $\sigma_z = 2$ mm. La velocidad inicial se fijó en $v_z = 0.7c$, con una dispersión relativa del 0.1%, lo que corresponde a una dispersión energética cercana al 0.34%. Las velocidades transversales iniciales se tomaron nulas. En la Tabla 6 se presentan los parámetros de inyección del *bunch*. La Figura 21 muestra las distribuciones iniciales de posición y velocidad del *bunch*, verificadas mediante ajustes gaussianos.

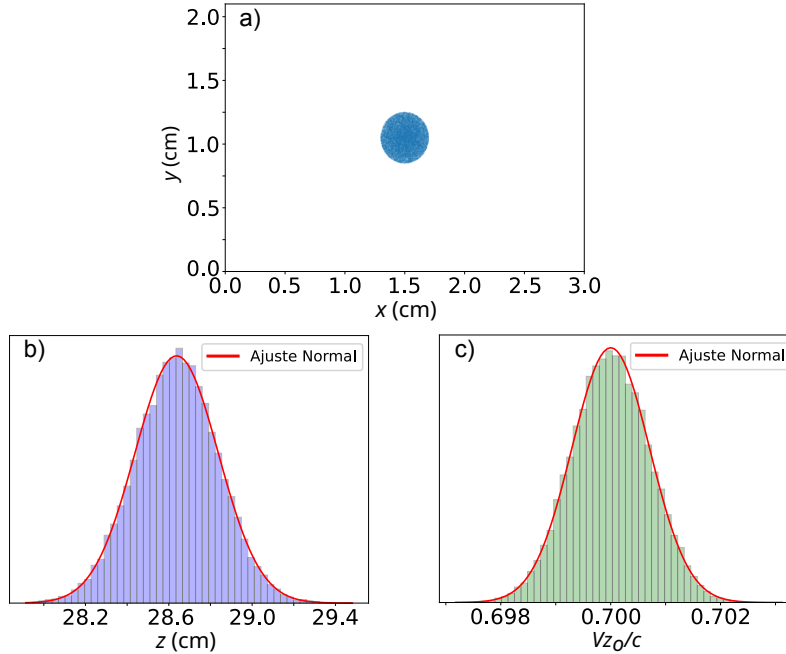
Bajo estas condiciones, el *bunch* fue acelerado por el *wakefield*; sin embargo, la energía final alcanzada fue menor que la predicha por el modelo unidimensional. La Figura 22(a) muestra la evolución de la ganancia energética promedio y su dispersión. La ganancia crece hasta un máximo cercano a 90 keV, con una dispersión relativa que aumenta hasta $\Delta K/K \sim 0.9\%$, por lo que el haz permanece prácticamente

monoenergético al finalizar la aceleración.

Tabla 6: *Parámetros iniciales del bunch inyectado en las simulaciones de aceleración bajo la aproximación de partícula simple.*

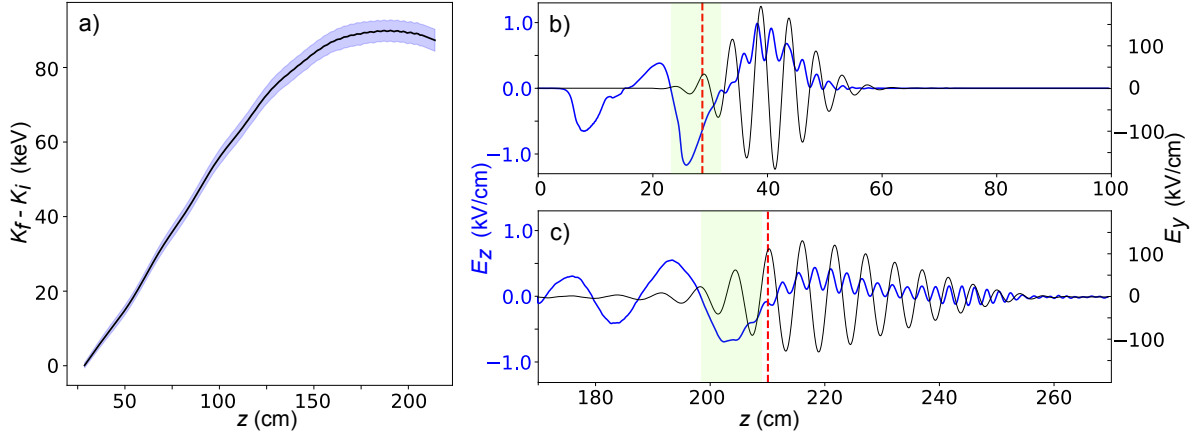
| Parámetro | Símbolo | Valor |
|-------------------------------------|------------------|---------------|
| Carga total | Q | 1 nC |
| Posición de inyección | ξ | $\lambda_p/8$ |
| Radio transversal | r_b | 2 mm |
| Extensión longitudinal | σ_z | 2 mm |
| Velocidad inicial | v_z | $0.7c$ |
| Dispersión relativa en velocidad | $\Delta v_z/v_z$ | 0.1 % |
| Dispersión energética aproximada | $\Delta K/K$ | 0.34 % |
| Velocidades transversales iniciales | v_x, v_y | 0 |

Figura 21: *Condiciones iniciales del bunch de 1 nC. (a) Distribución transversal en el plano x - y , que muestra la sección circular con radio de 2 mm. (b) Distribución de posiciones longitudinales z , con $\sigma_z = 2$ mm. (c) Distribución de velocidades longitudinales v_z , con un spread del 0.1 %. En ambos casos, las distribuciones se generaron siguiendo perfiles gaussianos.*



La limitación principal en la ganancia energética provino del tránsito de los electrones hacia regiones del *wakefield* donde el campo cambia de signo y conduce a la desaceleración, como se observa en la Figura 22(c). Allí, la posición central de la nube (línea punteada roja) se sitúa fuera de la franja de aceleración efectiva (zona verde). Adicionalmente, el *wakefield* disminuyó su amplitud conforme el pulso se dispersó durante la propagación, debido a su ancho espectral finito Δf (ver Figura 22).

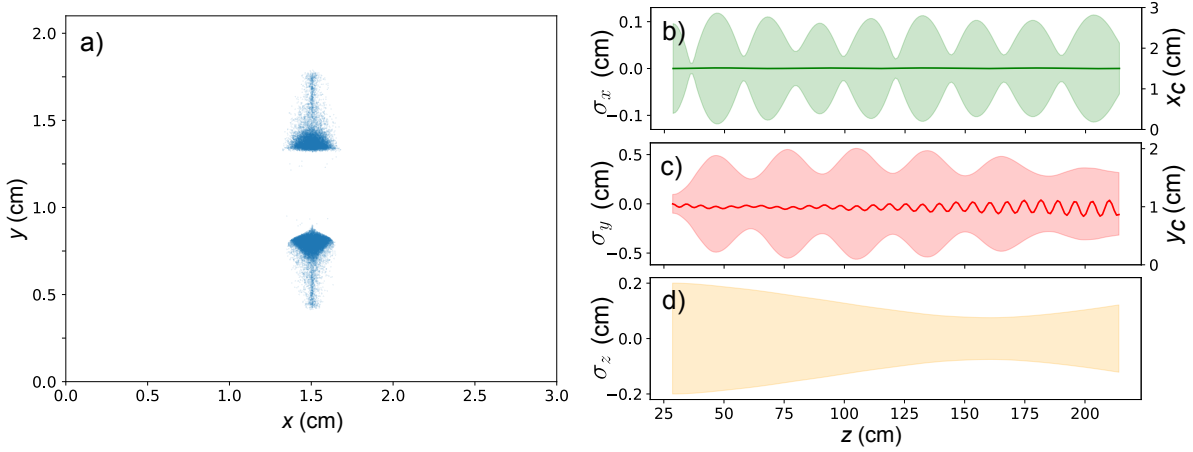
Figura 22: (a) Ganancia de energía promedio (línea negra) y respectiva dispersión ΔK (sombreado azul) de la nube de electrones de 1 nC, mostrando un máximo cercano a 90 keV. Componente longitudinal E_z (azul) y pulso E_y (negro) en (b) el instante de inyección y (c) al final de la simulación. Las línea punteada roja representa la media de las posiciones longitudinales de la nube electrónica y la región de aceleración está sombreada en color verde.



Además de la reducción en la amplitud del *wakefield* ocasionada por la dispersión del pulso de microondas, existe un segundo factor que influye de manera decisiva en la ganancia energética: la degradación de la forma espacial de la propia nube de electrones durante la aceleración. En particular, la nube experimenta una distorsión significativa a lo largo del eje- y de la guía, como se muestra en la Figura 23. En ella se representan las posiciones transversales de las superpartículas de la nube en un instante intermedio de la aceleración, correspondiente a la posición central $z_c \sim 118$ cm, junto con la evolución de las posiciones medias transversales, x_c y y_c . Las zonas sombreadas indican la evolución de las desviaciones estándar (σ_x , σ_y , σ_z) como medida de la dispersión espacial durante el proceso. Se aprecia que el aumento de la dispersión sobre el eje- y aparece desde las primeras etapas, limitando la eficiencia de aceleración.

A lo largo del eje- x , en cambio, la dinámica de la nube presenta únicamente oscilaciones moderadas en su tamaño, en las que el haz se contrae y se expande en torno al eje central de la guía con desviaciones de amplitud máxima muy cercanas de su valor inicial de $\sigma_x = 2$ mm. La diferencia fundamental entre ambos ejes se explica por la naturaleza del modo TE_{10} , cuya componente eléctrica transversal es únicamente a lo largo del eje- y : E_y . En consecuencia, la distorsión en el eje- y está directamente asociada a la acción del campo del pulso de microondas. Esto se confirma en la Figura 22(b), donde, en la posición longitudinal media del bunch, la amplitud del campo de microondas es aún unas 25 veces mayor que la del *wakefield*, influyendo de manera directa en la dinámica transversal de los electrones. Este efecto también explica el comportamiento oscilatorio observado en la posición central y_c : las oscilaciones se mantienen alrededor

Figura 23: (a) Distribución transversal de la nube de electrones en la posición longitudinal $z \sim 118$ cm durante el proceso de aceleración. (b)-(d) Evolución de las posiciones centrales (x_c, y_c) de la nube a lo largo de la guía de ondas. Las zonas sombreadas representan las desviaciones estándar ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) en cada dirección, indicando la evolución de la dispersión espacial del haz durante la interacción con el wakefield y el pulso de microondas.



del eje medio de la guía, pero con una amplitud que aumenta conforme el haz interactúa más estrechamente con el pulso. Ello ocurre por dos razones principales: (i) durante la aceleración, la nube se aproxima al pulso, y (ii) el propio pulso se ensancha espacialmente debido a la dispersión, lo que acerca su máximo al bunch y amplifica la interacción.

En este contexto, debe considerarse además la acción de la fuerza ponderomotriz asociada al pulso de microondas. En promedio, esta fuerza se opone al movimiento longitudinal de la nube, actuando en dirección contraria a la aceleración inducida por el *wakefield*. Así, mientras el *wakefield* impulsa a los electrones hacia adelante, la fuerza ponderomotriz introduce un efecto de frenado, que constituye un limitante adicional en la ganancia de energía alcanzable.

Finalmente, la Figura 23(d) muestra que la dispersión a lo largo del eje de propagación, σ_z (sombra amarilla), disminuye progresivamente hasta las proximidades del punto de máxima ganancia energética, lo que sugiere un efecto de compresión longitudinal del haz de electrones. Tras alcanzar la energía máxima, el haz comienza nuevamente a expandirse. Este fenómeno puede atribuirse a la combinación de fuerzas longitudinales: por un lado, el *wakefield* impulsa a los electrones hacia adelante, mientras que la fuerza ponderomotriz del pulso ejerce una acción contraria. El resultado neto es una compresión temporal del *bunch*, seguida de su reexpansión conforme la interacción pierde coherencia.

De este modo, esta etapa del estudio permitió identificar con claridad los mecanismos dominantes en la dinámica del *bunch*: (i) la componente longitudinal del

wakefield, responsable de la aceleración, y (ii) la acción del pulso de microondas, cuya dispersión y fuerza ponderomotriz introducen limitaciones adicionales en la ganancia de energía. Estos resultados establecen la referencia necesaria para la siguiente etapa, donde se considerarán simulaciones plenamente autoconsistentes incluyendo efectos de carga espacial y retroacción.

3.2.3 *Dinámica autoconsistente del proceso de aceleración*

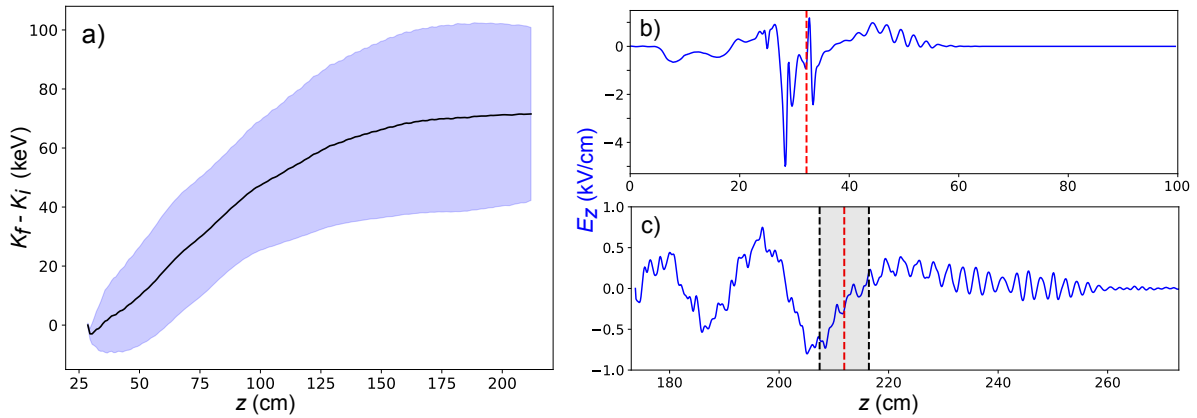
En esta subsección se presentan los resultados correspondientes a la dinámica autoconsistente del proceso de aceleración, donde se consideran simultáneamente todos los efectos relevantes de la interacción. A diferencia de la aproximación de partícula simple, aquí se incluye la acción colectiva del haz electrónico inyectado, el cual no solo experimenta la influencia del *wakefield* y el pulso de microondas, sino que también modifica el campo excitado a través de su propia carga espacial. De este modo, se obtiene una descripción más realista del proceso, que permite evaluar el impacto neto de los distintos mecanismos físicos sobre la eficiencia de aceleración y la calidad final del haz.

Como primer aspecto, es importante señalar que los parámetros adoptados en la aproximación de partícula simple no resultaron adecuados cuando se incluyó la retroacción colectiva. En particular, el *bunch* de 1 nC analizado previamente (ver Tabla 6) introdujo una perturbación significativa sobre la estructura del *wakefield*, fenómeno conocido como *beam loading*. Este efecto ocurre cuando la carga del *bunch* es suficiente para alterar la amplitud y la fase del *wake*, reduciendo de manera sustancial la eficiencia del proceso de aceleración y deteriorando la coherencia espacial y energética del haz acelerado. En consecuencia, el *beam loading* constituye una limitación fundamental en esquemas de aceleración impulsados por ondas plásmicas: haces muy cargados pueden degradar el *wake* desde las primeras etapas de interacción, comprometiendo tanto la ganancia energética como la calidad del haz.

Para ilustrar este efecto, se presentan a continuación los resultados obtenidos al repetir la simulación previa del *bunch* de 1nC, ahora bajo un tratamiento autoconsistente. Los resultados muestran que, aunque existe ganancia energética, esta es significativamente menor, alcanzando un valor cercano a 70 keV, como se observa en la Figura 24(a). Un aspecto aún más relevante es el incremento sustancial de la dispersión energética, lo que indica una pérdida significativa de monoenergicidad, representada en la Figura 24(a) por la región sombreada en azul alrededor de la curva negra que indica la evolución promedio de la energía. Las Figuras 24(b)–(c) muestran

la deformación de la estructura del *wakefield* inmediatamente después de la inyección y al finalizar la simulación, respectivamente. Si bien la estructura logra recuperarse parcialmente durante la aceleración, persisten irregularidades y fluctuaciones que reflejan la acción de la carga espacial y la reorganización autoconsistente del sistema.

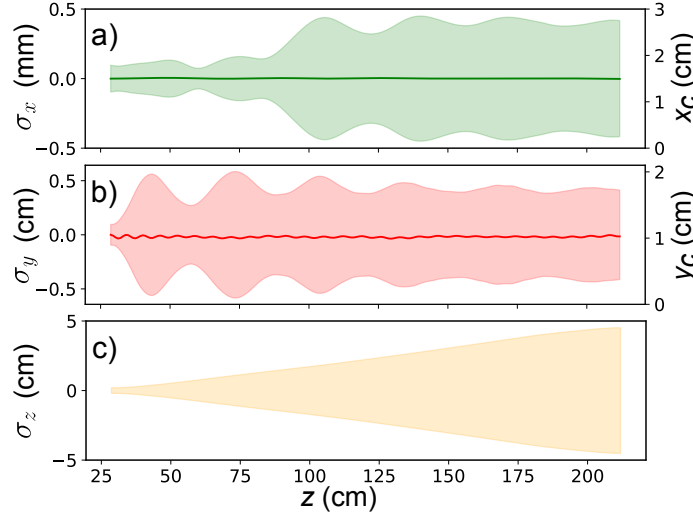
Figura 24: (a) Evolución de la energía promedio de la nube de electrones (línea negra) y de su dispersión (región sombreada en azul) bajo simulaciones autoconsistentes. Distribución espacial del wakefield en (b) un instante posterior a la inyección, mostrando su deformación inicial y (c) al final de la simulación durante el proceso de aceleración. Las líneas punteadas rojas representan la posición central z_c del bunch en dichos instantes, y la región sombreada en negro su extensión longitudinal final.



Además, el haz experimentó un notable ensanchamiento longitudinal, alcanzando una extensión efectiva cercana a 10cm, en contraste con su longitud inicial de aproximadamente 2mm. La Figura 24(c) incluye la banda sombreada en negro que indica la extensión longitudinal final del *bunch*. Este resultado constituye evidencia directa de la dispersión inducida por las fuerzas internas de carga espacial. Respecto a la dinámica transversal, se encontró que sobre el eje- y el comportamiento es similar al observado en la aproximación de partícula simple, lo que confirma que en esta dirección la dinámica está dominada por el campo del pulso de microondas. La diferencia principal radica en que la posición central del bunch, y_c , resulta más estable y muestra oscilaciones menos pronunciadas a lo largo del eje central de la guía. La Figura 25 ilustra este comportamiento, que muestra la evolución de las posiciones y_c y x_c , así como de las respectivas dispersiones espaciales σ_x , σ_y , σ_z .

Estos resultados confirman que, para garantizar un proceso de aceleración efectivo y estable, es indispensable emplear haces con cargas y dimensiones moderadas, de modo que no introduzcan una perturbación excesiva sobre la onda plásmica desde las primeras etapas de la interacción. En este sentido, se simuló el proceso de aceleración de un *bunch* de carga considerablemente menor (50 pC),

Figura 25: Evolución de las posiciones centrales transversales del bunch: (a) x_c y (b) y_c , así como de sus respectivas dispersiones, σ_x y σ_y , durante la aceleración. (c) Evolución de la extensión longitudinal σ_z , que muestra el fuerte ensanchamiento de la nube electrónica.



manteniendo la dispersión longitudinal previa ($\sigma_z \sim 2$ mm), pero con un radio transversal reducido a 0.3 mm. La velocidad inicial longitudinal fue $v_{z_0} = 0.7c$, con una dispersión relativa del 0.1%, y se asignaron velocidades nulas sobre las componentes transversales (ver Tabla 7).

Tabla 7: Parámetros iniciales del bunch inyectado en las simulaciones autoconsistentes de aceleración destinadas a mitigar el efecto de beam loading.

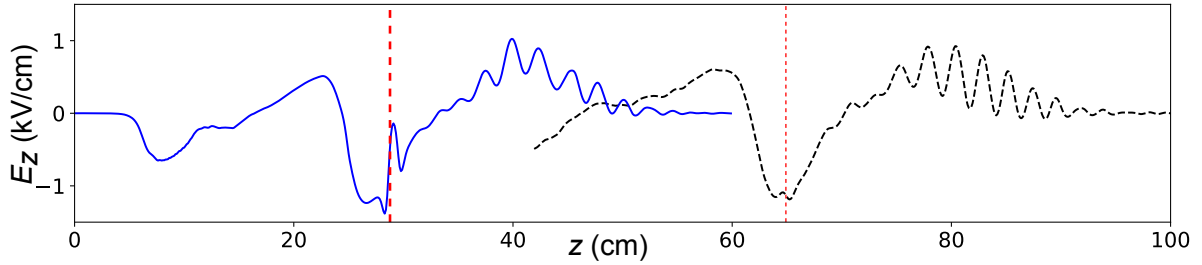
| Parámetro | Símbolo | Valor |
|-------------------------------------|------------------|---------------|
| Carga total | Q | 50 pC |
| Posición de inyección | ξ | $\lambda_p/8$ |
| Radio transversal | r_b | 0.3 mm |
| Extensión longitudinal | σ_z | 2 mm |
| Velocidad inicial | v_z | $0.7c$ |
| Dispersión relativa en velocidad | $\Delta v_z/v_z$ | 0.1 % |
| Dispersión energética aproximada | $\Delta K/K$ | 0.34 % |
| Velocidades transversales iniciales | v_x, v_y | 0 |

Bajo estas condiciones, el proceso de inyección no genera una destrucción completa de la estructura del *wakefield*, como se observa en la Figura 26, donde se aprecia una perturbación localizada del campo, curva azul, coincidente con la posición de la nube inyectada, pero que no altera de manera significativa la dinámica global de la aceleración ya que esta perturbación inicial se va atenuando a lo largo de la propagación gracias al mismo efecto colectivo del sistema, curva negra puntuada.

Los resultados presentados en la Figura 27(a) evidencian una ganancia energética

promedio cercana a 90keV, coherente con la estimación previa basada en la aproximación de partícula simple, además de una dispersión relativa en energía inferior al 1% en el punto de máxima ganancia energética, conservando así el carácter monoenergético.

Figura 26: Deformación del wakefield durante la inyección del bunch de electrones. La curva azul corresponde a la componente longitudinal E_z inmediatamente después de la inyección. La curva negra punteada muestra el wakefield en un instante posterior, evidenciando la recuperación de la estructura. Las líneas verticales señalan la posición central del bunch en cada caso.

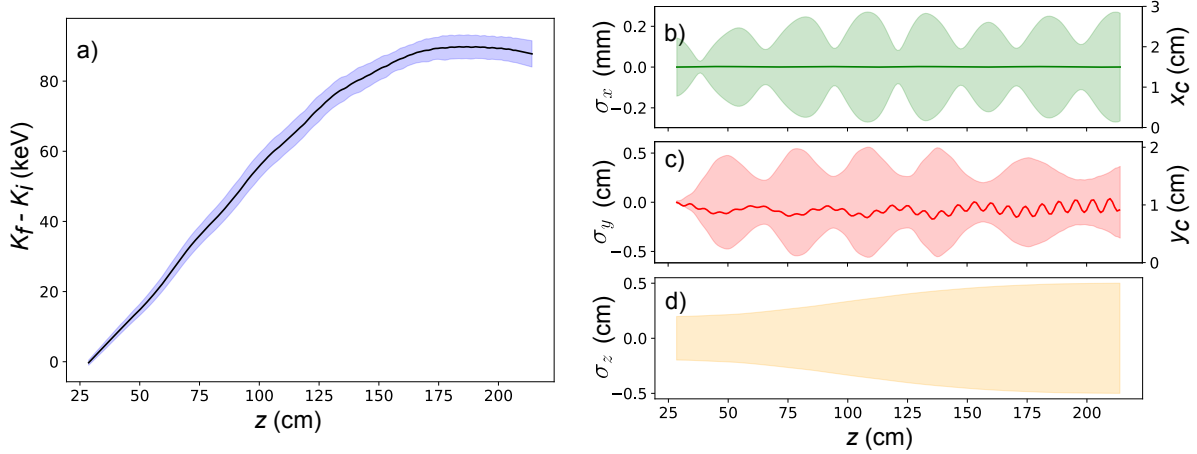


En las Figuras 27(b)-(c) las regiones sombreadas representan el ancho medio de la nube de electrones sobre cada eje obtenidos a partir de las dispersiones σ_x , σ_y , σ_z . Se aprecia que la dispersión sobre el eje- x , aunque se incrementa hasta duplicar su valor inicial, permanece en el orden de décimas de milímetro, conservando en general el ancho transversal sobre este eje. En contraste, a lo largo del eje- y el *bunch* sufre una deformación más marcada: su ancho efectivo pasa de unas pocas décimas de milímetro en el momento de inyección a aproximadamente 1 cm en etapas posteriores. Este ensanchamiento se atribuye a la interacción del *bunch* con la cola del pulso de microondas, cuya componente E_y es considerablemente más intensa que la amplitud del *wakefield*, dominando así la dinámica transversal.

En cuanto a la posición transversal (x_c , y_c) del *bunch*, se observa que x_c no exhibe una desviación o perturbación apreciable respecto al eje central de la guía. Por el contrario, las oscilaciones de y_c son más pronunciadas, consistentes con la fuerte influencia del campo del pulso sobre este eje, conduciendo a una leve desviación del eje central.

Finalmente, a diferencia de lo observado en la sección anterior (sin efectos de carga espacial), en esta simulación el haz de electrones no presenta compresión longitudinal, sino un ensanchamiento progresivo. La longitud del *bunch* aumenta aproximadamente en un factor de dos, atribuible a las fuerzas de repulsión internas asociadas a la carga espacial, aunque sin alcanzar los niveles de degradación observados en el caso del *bunch* de 1 nC (ver Figura 25(c)).

Figura 27: (a) Evolución de la ganancia energética promedio de la nube de electrones acelerada; la región sombreada indica la dispersión energética correspondiente. (b)-(d) Evolución del tamaño del bunch (región sombreada) y de sus posiciones centrales, x_c, y_c (líneas continuas), a lo largo del eje x , eje y , eje z durante la propagación en la guía de ondas.



En conjunto, estos resultados establecen que la aceleración eficiente y estable en esquemas de *wakefields* impulsados por pulsos de microondas requiere la utilización de haces de carga moderada y dimensiones adecuadas, de modo que no perturben de manera significativa la estructura del *wakefield* desde la etapa inicial de interacción. El uso de haces más compactos y con cargas del orden de las decenas de pC permite preservar la forma del *wakefield*, favoreciendo una aceleración eficiente y manteniendo una dispersión energética reducida.

3.2.4 Influencia de la posición de inyección sobre la aceleración

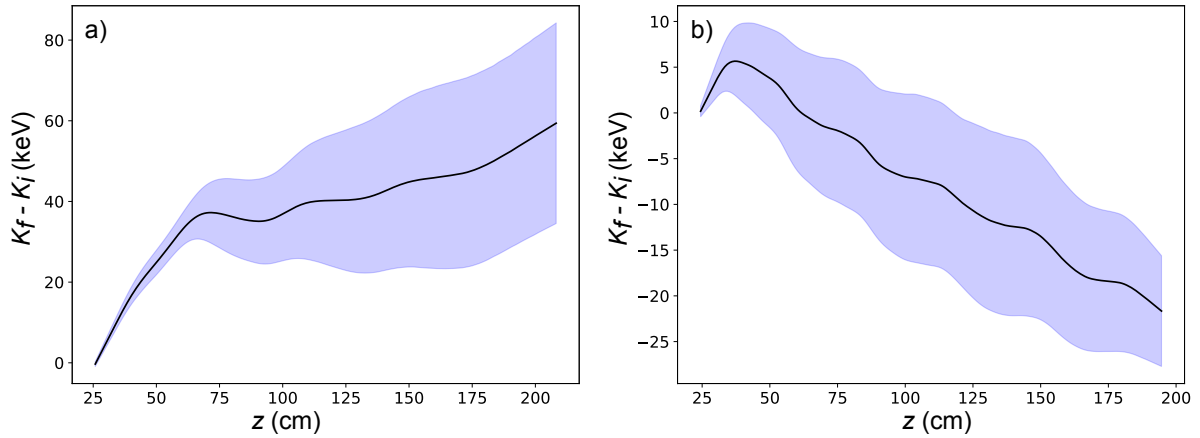
Como último aspecto de esta sección, se analiza la influencia de la posición de inyección en el proceso de aceleración de la nube electrónica. Las propiedades del bunch se mantuvieron idénticas a la del caso previo (carga, duración, sección transversal, velocidad inicial y dispersión), variando únicamente la posición inicial de inyección. Se consideraron dos escenarios adicionales: en el primero, el haz de electrones se inyectó en la posición de máximo campo acelerador del *wake*, $\xi = \lambda_p/4$; en el segundo, en una posición intermedia, $\xi = 3\lambda_p/8$. De acuerdo con las predicciones del modelo unidimensional discutido anteriormente, en estas configuraciones se espera una menor ganancia energética. No obstante, resulta relevante evaluar su efecto desde un enfoque autoconsistente, con el fin de caracterizar la dinámica de aceleración y la calidad final del haz.

Los resultados de simulación muestran dos aspectos clave. En primer lugar, se

confirma lo anticipado: una sincronización inadecuada entre la nube y el *wakefield* reduce de manera significativa la ganancia energética. En el caso $\xi = \lambda_p/4$, Figura 28(a), la energía adquirida fue de apenas 60 keV, mientras que en el caso $\xi = 3\lambda_p/8$ la situación fue aún más desfavorable, tal como se muestra en la Figura 28(b). Allí, la nube experimentó una corta fase de aceleración, con un incremento máximo de apenas 5 keV, seguida de una fase de frenado en la que perdió más de 20 keV con respecto a su energía inicial.

El segundo aspecto relevante aparece en el escenario de $\xi = \lambda_p/4$, donde sí se observa ganancia neta de energía: la dispersión energética es considerablemente mayor que en el caso $\xi = 3\lambda_p/8$ analizado previamente. En este escenario, el haz deja de ser cuasi-monoenergético, lo que compromete su calidad.

Figura 28: Evolución de la energía promedio de la nube de electrones inyectada para las posiciones iniciales (a) $\xi = \lambda_p/4$ y (b) $\xi = 3\lambda_p/8$. Las regiones sombreadas representan la dispersión energética en cada caso.

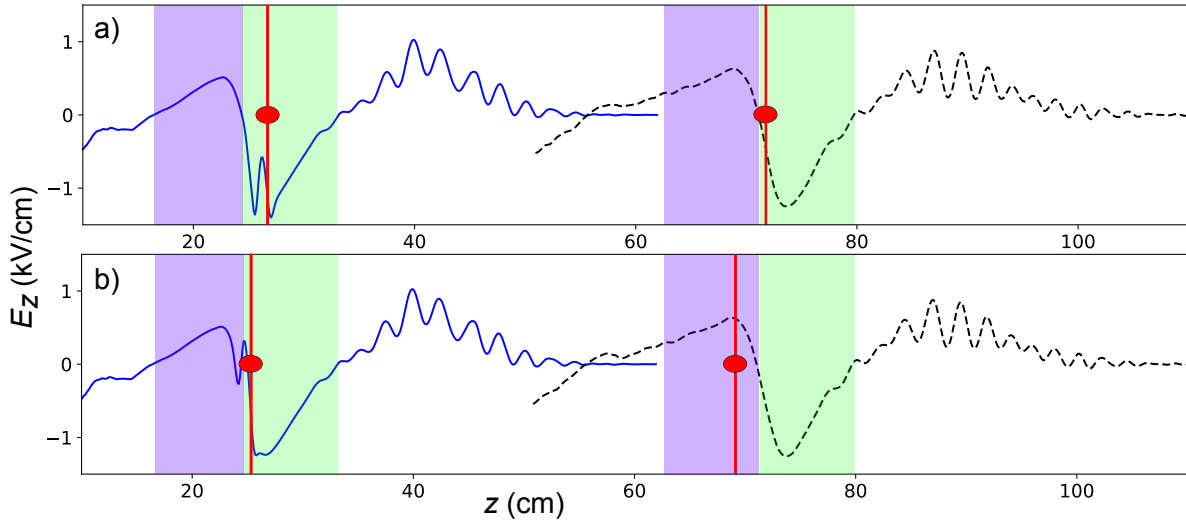


Esta diferencia se interpreta al considerar la ubicación de la nube dentro de la región de aceleración. En el escenario menos favorable, $\xi = 3\lambda_p/8$, la posición central de la nube se encuentra próxima al borde de la región aceleradora, es decir, en la cola del pozo del *wake*. Como la velocidad inicial de inyección es $v_{z_0} = 0.7c$, menor que la velocidad de fase del *wake* ($\sim 0.77c$), la nube es rápidamente alcanzada por la región de frenado (Figura 29(b)), sin disponer del tiempo suficiente para ganar energía y permanecer dentro de la zona de aceleración.

En el caso $\xi = \lambda_p/4$, la nube se inyecta en el centro del pozo; sin embargo, conforme avanza la onda plásmica, el *bunch* empieza a situarse cerca del límite entre aceleración y frenado, y la dispersión longitudinal y en velocidades hace que una fracción de electrones cruce la frontera hacia la región de frenado. Esto limita la ganancia neta de energía y el incremento sustancial en la dispersión energética. En este orden de

ideas, los resultados muestran que, aunque existe una ganancia neta de energía, esta se debe a que es mayor la fracción de electrones que logran permanecer dentro de la región aceleradora. Estas dinámicas se ilustran en la Figura 29, donde se comparan las posiciones centrales de las nubes inyectadas respecto a la estructura del *wake* en distintos instantes.

Figura 29: Evolución de la posición central de la nube de electrones respecto al *wakefield* para dos posiciones de inyección: (a) $\xi = \lambda_p/4$ y (b) $\xi = 3\lambda_p/8$. La curva azul corresponde a la componente longitudinal inmediatamente después de la inyección, mientras que la curva negra punteada muestra el *wakefield* en un instante posterior, durante la evolución del sistema. La línea vertical y el óvalo rojo indican la posición central y extensión aproximada de la nube de electrones en cada instante. Las regiones sombreadas en verde corresponden a la zona de aceleración ($E_z < 0$) y las sombreadas en púrpura a la zona de frenado ($E_z > 0$).



Los resultados de esta sección ponen de manifiesto la capacidad del esquema considerado para acelerar electrones mediante *wakefields* excitados por pulsos de microondas en guías de onda llenas de plasma. Se obtuvieron ganancias de energía cercanas a los 100 keV en distancias de aproximadamente 150 cm, lo que confirma la viabilidad del mecanismo bajo las condiciones simuladas.

Un resultado clave es la fuerte dependencia del proceso con las condiciones iniciales del haz. Se determinó que, para las configuraciones estudiadas, la energía mínima de inyección requerida para lograr la captura efectiva es de aproximadamente 204 keV ($v_{z0} \approx 0.7c$). Bunches con cargas demasiado altas o con dimensiones transversales amplias generan deformaciones significativas en el *wakefield* (*beam loading*), reduciendo la eficiencia del mecanismo de aceleración e incrementado la dispersión energética. Por el contrario, haces con cargas moderadas y compactos

permiten mantener una aceleración estable y con dispersión energética reducida, cercana al 1%.

Asimismo, la dinámica transversal es anisótropa: mientras que en los ejes x y z el bunch conserva valores cercanos a los de inyección, sobre el eje y se observa un ensanchamiento notable, resultado predominantemente de la componente E_y del pulso de microondas. Este efecto constituye una limitación adicional para la estabilidad del haz acelerado.

Aunque los gradientes alcanzados son considerablemente menores que los típicos de los aceleradores RF de alta energía (20–50 MV/m), se sitúan en un rango comparable al de aceleradores de baja energía empleados en aplicaciones médicas e industriales, que suelen operar con electrones de 0.5–25 MeV bajo gradientes de 3–6 MV/m.

Finalmente, más allá de este marco de referencia, resulta pertinente ampliar la exploración hacia configuraciones que trascienden las posibilidades experimentales actuales pero que pueden evaluarse mediante simulaciones numéricas. Este enfoque permite indagar en regímenes con parámetros ajustados para potenciar la amplitud del *wakefield*, como densidades plásmicas más elevadas o pulsos de microondas con características extremas, identificando así condiciones con capacidad de alcanzar gradientes de aceleración sustancialmente mayores a los aquí reportados. Tales estudios no solo contribuyen a establecer los límites físicos y prácticos del esquema propuesto, sino que también ofrecen una visión prospectiva sobre su potencial como alternativa para futuros sistemas de aceleración compactos basados en plasmas.

3.3 Incremento del gradiente de aceleración a través del aumento de la densidad del plasma

A partir de los resultados discutidos en la Sección 3.1.5, donde se evidenció que un aumento en la densidad electrónica del plasma conduce a una mayor amplitud del *wakefield*, se planteó la posibilidad de explorar configuraciones de mayor densidad con el propósito de identificar las condiciones que favorezcan una mejora sustancial en el proceso de aceleración.

Con esta motivación, se consideró un escenario alternativo en el cual la longitud de onda plásmica sea comparable con el ancho de la guía ($a = 3$ cm). Para lograr esta condición, la densidad del plasma se incrementó en un factor de 100 respecto a la densidad empleada en las simulaciones anteriores, donde $\lambda_p \approx 25$ cm; así que la nueva densidad de $n_0 = 1.8 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ conduce a una nueva longitud de onda plásmica de

$\lambda_p \approx 2.5$ cm. Este aumento de densidad exige, a su vez, elevar la frecuencia del pulso de microondas para garantizar la propagación del modo TE_{10} en la guía: $f_c \approx 13$ GHz (ver ecuación (3.3)); por ello se seleccionó una frecuencia central de $f_0 = 80$ GHz, diez veces mayor que la empleada previamente, junto con una duración (FWHM) de aproximadamente 30 ps.

La amplitud pico del campo eléctrico del pulso se fijó en $E_0 = 1$ GV/m, de manera que el parámetro a_0 resultara ligeramente mayor que la unidad, manteniendo la interacción en el régimen cuasilineal. Este régimen resulta adecuado, dado que, como se demostró en secciones anteriores, la operación en el régimen no lineal conduce a mayores pérdidas de electrones y a una degradación significativa del *wakefield*. El valor elegido se encuentra dentro del límite máximo soportable de una estructura metálica para estos pulsos de corta duración. Las dimensiones de la guía de onda se conservaron iguales a las empleadas previamente: $a = 3$ cm y $b = 0.7a = 2.1$ cm.

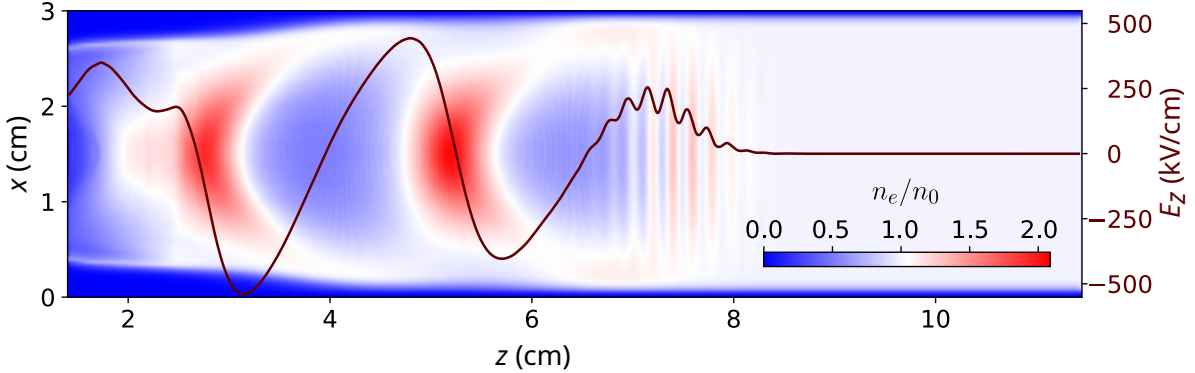
En guías de onda metálicas reales, la conductividad finita introduce pérdidas óhmicas asociadas a las corrientes superficiales. Dado que la profundidad de penetración, propia del *efecto skin*, decrece como $\delta \sim 1/\sqrt{f}$, la resistencia superficial aumenta $R_s \sim \sqrt{f}$, elevando las pérdidas a medida que se incrementa la frecuencia. Por ello, operar en el régimen de 80 GHz implica tolerancias mecánicas estrictas y superficies de alta calidad como recubrimientos de oro o plata, típicamente asociadas a tecnologías de tipo sub-THz. Así, los resultados de esta sección deben entenderse como una exploración numérica de regímenes físicamente posibles pero tecnológicamente avanzadas.

Bajo estas condiciones, las simulaciones permitieron predecir la generación de una onda plásmica, cuyas características se muestran en la Figura 30. En ella se presenta el perfil de la densidad electrónica perturbada sobre el plano medio transversal ($y = b/2$), junto con el campo eléctrico longitudinal E_z , el *wakefield*, calculado sobre el eje central de la guía ($x = a/2, y = b/2$). Se observa una estructura oscilatoria bien definida, con una primera oscilación aceleradora ($E_z < 0$) cuya amplitud es ligeramente menor que la segunda; a diferencia de los regímenes de baja densidad, en los cuales el segundo máximo era considerablemente más débil debido a la pérdida significativa de electrones hacia las paredes metálicas.

En el presente escenario, el *wakefield* alcanza una amplitud máxima de aproximadamente 500 kV/cm. Este valor supera en más de dos órdenes de magnitud los obtenidos en las simulaciones base (~ 1 kV/cm) y evidencia el potencial del régimen de alta densidad para reducir la longitud de aceleración requerida.

Dado que en el régimen de alta densidad se obtiene una onda plásmica con dos

Figura 30: Distribución espacial de la densidad electrónica del plasma y del campo eléctrico longitudinal en el nuevo régimen de alta densidad. El mapa de colores representa la densidad electrónica $n_e(x, z)$ sobre el plano medio transversal ($y = b/2$). La línea marrón corresponde al campo eléctrico longitudinal E_z a lo largo del eje central de la guía ($x = a/2, y = b/2$). La reducción de las pérdidas electrónicas en las paredes favorece una excitación más eficiente y un mayor gradiente de campo.



pozos de potencial bien definidos, se realizaron dos simulaciones independientes para evaluar la aceleración electrónica en cada uno de ellos. En la primera simulación, el haz se inyectó en el primer pozo inmediatamente detrás del pulso de microondas; en la segunda, el haz se ubicó sobre el segundo pozo situado a mayor distancia de la cola del pulso. El segundo pozo presenta una amplitud de campo eléctrico ligeramente mayor, lo que podría favorecer una mayor ganancia energética.

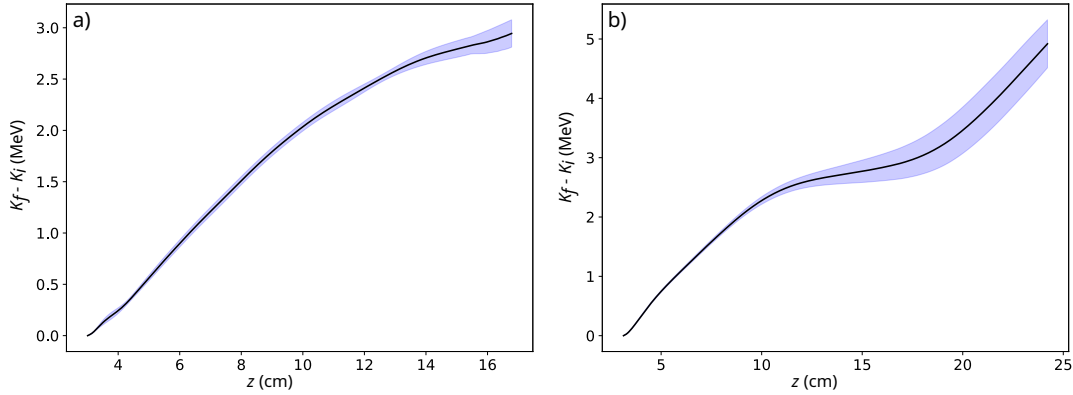
Las condiciones iniciales del *bunch* fueron idénticas en los dos casos (ver Tabla 8): carga total de 1 nC, velocidad inicial longitudinal $v_{z0} = 0.75c$ y dispersión relativa en velocidad de 0.1%. La inyección se realizó en la fase $\xi = \lambda_p/8$ de cada pozo, con extensión longitudinal $\sigma_z = 0.50$ mm y una sección transversal aproximadamente circular de radio de 0.25 mm.

Tabla 8: Parámetros iniciales del *bunch* inyectado en las simulaciones autoconsistentes de aceleración en el régimen de alta densidad.

| Parámetro | Símbolo | Valor |
|-------------------------------------|------------------|---------------|
| Carga total | Q | 1 nC |
| Posición de inyección | ξ | $\lambda_p/8$ |
| Radio transversal | r_b | 0.25 mm |
| Extensión longitudinal | σ_z | 0.50 mm |
| Velocidad inicial | v_z | $0.75c$ |
| Dispersión relativa en velocidad | $\Delta v_z/v_z$ | 0.1 % |
| Dispersión energética aproximada | $\Delta K/K$ | 0.38 % |
| Velocidades transversales iniciales | v_x, v_y | 0 |

Las Figuras 31(a) y 31(b) muestran la evolución de la ganancia media de energía del *bunch* en función de la distancia de propagación. En ambos casos, la amplitud del *wakefield* resultó suficiente para acelerar el haz hasta energías del orden de los MeV alcanzándose valores finales entre 3 y 5 MeV en distancias de apenas 15-25 cm. Esto representa un incremento de más de un orden de magnitud en el gradiente acelerador respecto a los escenarios de baja densidad examinados en secciones anteriores, donde se alcanzaron un poco menos de 100 keV tras casi 2 m de propagación.

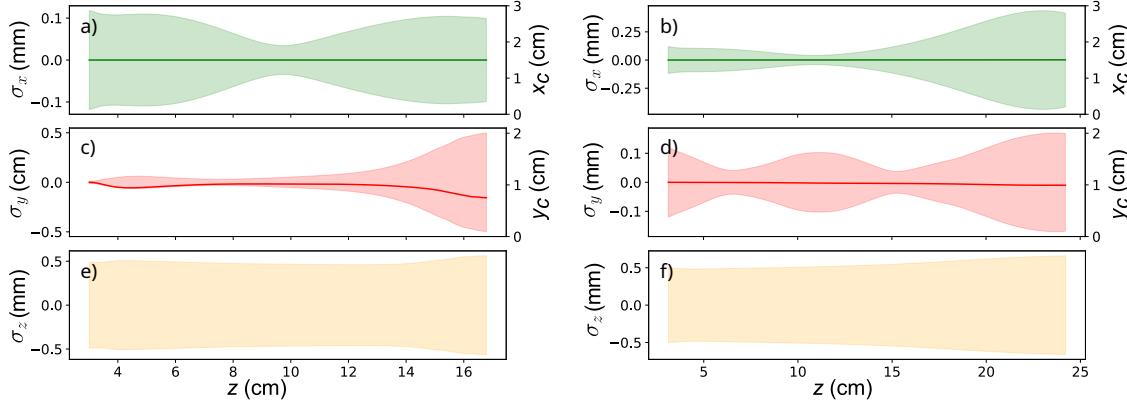
Figura 31: Evolución de la ganancia energética promedio de la nube de electrones inyectada en (a) el primer *wake* y (b) el segundo *wake*. Se observan ganancias del orden de los MeV en distancias de 15–25 cm, con dispersión relativa inferior al 3%.



Además, la Figura 31 muestra que la dispersión energética relativa se mantiene en niveles reducidos: cercana al 1% para el *bunch* acelerado en el primer *wake* y alrededor de 3% en el segundo. Si bien el caso del segundo *wake* exhibe una mayor ganancia energética total (~ 5 MeV frente a ~ 3 MeV en el primer *wake*), dicha diferencia se explica por la mayor distancia efectiva de interacción. De hecho, al comparar ambos escenarios en la posición $z \approx 16$ cm, la energía alcanzada es similar, evidenciando que la limitación del primer caso obedece principalmente a efectos de dispersión espacial y no a una menor eficiencia del campo acelerador.

La Figura 32 presenta la evolución de las posiciones centrales x_c y y_c , así como de las respectivas dispersiones σ_x , σ_y y σ_z del *bunch* en ambos escenarios. Aunque la evolución energética es comparable en los primeros 15 cm (ver Figura 31), las propiedades espaciales difieren significativamente (ver Figura 32). En particular, para el *bunch* inyectado en el primer *wake*, la dispersión transversal sobre el eje y crece de forma considerable, alcanzando un valor final de $\sigma_y \approx 0.5$ cm, mientras que en el segundo *wake* esta se mantiene cercana al valor inicial ($\sigma_y \approx 0.2$ mm). Asimismo, la posición central y_c del *bunch* presenta deflexiones notorias en el primer caso, mientras que en el segundo se conserva estable a lo largo de la guía (ver Figura 32).

Figura 32: Evolución de las posiciones centrales (x_c , y_c) y dispersiones espaciales (σ_x , σ_y , σ_z) del bunch acelerado. A la izquierda: resultados para la inyección en el primer wake; a la derecha: resultados para la inyección en el segundo wake. Se aprecia una mayor estabilidad y menor dispersión transversal en el segundo escenario.



Estos resultados son coherentes con el análisis físico subyacente. La formación del primer *wake* ocurre inmediatamente detrás del pulso de microondas, cuya cola aún posee una amplitud significativa y, por tanto, afecta la dinámica de los electrones acelerados. La estructura modal del campo del pulso, particularmente su componente E_y , induce oscilaciones y deflexiones sobre el eje transversal y , favoreciendo la dispersión del *bunch*. En contraste, al inyectar los electrones sobre el segundo *wake*, estos se encuentran suficientemente alejados del pulso, de modo que su influencia es prácticamente nula. Esto permite conservar la estructura espacial del haz y sostener una aceleración más estable y eficiente. Aunque el *bunch* inyectado en el segundo *wake* presenta una ligera expansión transversal sobre el eje x , esta apenas duplica su valor inicial y no compromete la calidad del haz. Por su parte, la extensión longitudinal σ_z se mantiene casi constante en ambos escenarios, lo que sugiere que en este régimen el efecto de carga espacial no compromete la coherencia temporal del *bunch*.

Estos resultados demuestran que: (i) El aumento de densidad plásmica, acompañado de un incremento de la frecuencia del pulso, permite incrementar el gradiente de aceleración en más de dos órdenes de magnitud. (ii) La posición de inyección respecto al pulso forzador desempeña un papel determinante en la estabilidad espacial del haz. (iii) La aceleración en *wakes* alejados del pulso, particularmente el segundo *wake*, permite obtener: mayores energías en distancias menores, menor dispersión transversal, y, mejor calidad final del haz. En este orden de ideas, este régimen representa una ruta viable hacia aceleradores compactos basados en plasmas impulsados por microondas, siempre que se controlen la sincronización de la inyección y la ingeniería de la guía de ondas en frecuencias sub-THz.

4. Conclusiones

En este trabajo se observó la formación de un campo eléctrico longitudinal E_z de origen puramente plásmico detrás del pulso, consistente con una onda de Langmuir excitada ponderomotrizmente. En el régimen base ($n_0 \sim 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, $f_0 \sim 8 \text{ GHz}$, potencias sub-GW, duraciones sub-ns y dimensiones de guía del orden de centímetros), se obtuvieron amplitudes de E_z del orden de kV/cm, capaces de producir ganancias energéticas de $\sim 10^2 \text{ keV}$ en distancias del orden del metro, confirmando la viabilidad del mecanismo dentro de una ventana operativa claramente definida.

Los estudios paramétricos mostraron que la eficiencia de excitación del *wakefield* depende simultáneamente de la geometría de la guía y de las propiedades del pulso. La amplitud del *wake* decrece al aumentar el área transversal A_T , y la relación de aspecto b/a determina el grado de confinamiento electrónico y la pérdida hacia las paredes. La variación con la frecuencia mostró una competencia entre dos efectos: alejarse de la frecuencia de corte reduce la dispersión del pulso, pero al mismo tiempo disminuye la amplitud del campo para una potencia fija. Por el contrario, acercarse excesivamente al corte aumenta la amplitud efectiva del pulso, pero intensifica la dispersión y atenúa componentes espectrales. Asimismo, se identificó una duración óptima del pulso que maximiza la acción ponderomotriz y una potencia óptima más allá de la cual el impulso transversal del pulso induce expulsión electrónica y caída abrupta del *wake*. Finalmente, el aumento de la densidad del plasma mejoró simultáneamente la amplitud del *wake* y el confinamiento electrónico.

A partir de estas condiciones se estudió la captura y aceleración de electrones mediante inyección externa. Un análisis unidimensional mostró que la sincronización de fase es determinante: la inyección entorno a $\xi = \lambda_p/8$ y con velocidades iniciales cercanas a la velocidad de grupo del pulso ($v_{z0} \sim 0.7c \approx 200 \text{ keV}$) permitió estimar ganancias de $\sim 200 \text{ keV}$ en $\sim 2 \text{ m}$. Las simulaciones tridimensionales confirmaron ganancias de $\sim 100 \text{ keV}$ en 150 cm , e identificaron dos mecanismos clave:

- (i) La componente transversal, E_y , del modo TE_{10} induce oscilaciones y

ensanchamiento preferente sobre el eje y .

(ii) El *beam loading* determina la calidad final del haz: cargas del orden del nC degradan el *wake* y amplifican la dispersión energética y espacial, mientras que cargas moderadas (~ 50 pC) permiten una aceleración estable y dispersión energética $\sim 1\%$, consolidando un régimen de operación práctico para estudios experimentales iniciales.

La exploración de un régimen de alta densidad del plasma y mayor frecuencia mostró que ajustar la longitud de onda plásmica a valores cercanos de las dimensiones transversales de la guía intensifica el acoplamiento y reduce la pérdida electrónica. En este régimen cuasilineal ($a_0 \gtrsim 1$) se obtuvieron *wakefields* de ~ 500 kV/cm, capaces de acelerar electrones hasta 3–5 MeV en apenas 15–25 cm, con dispersión energética contenida (1–3%). Se encontró que la inyección en el *segundo wake*, más alejado del pulso mejora la estabilidad transversal al minimizar la influencia de E_y , lo que constituye una referencia en el diseño de esquemas compactos de aceleración *wakefield* con pulsos de microondas.

En conjunto, este trabajo establece un marco de operación para aceleradores basados en *wakefields* inducidos por pulsos de microondas en guías llenas de plasma, articulado en seis pautas:

(i) Seleccionar a y razón de aspecto b/a , para maximizar gradientes de campo evitando fuga de partículas en las paredes.

(ii) Operar a frecuencias moderadamente alejadas del corte, sin penalizar excesivamente la amplitud E_0 .

(iii) Ajustar la duración del pulso que maximice la acción ponderomotriz.

(iv) Fijar la potencia en torno a su valor óptimo, que evite la expulsión transversal de electrones.

(v) Elegir una densidad n_0 cuya longitud de onda plásmica sea próxima a las dimensiones transversales de la guía.

(vi) Emplear haces externos moderados y sincronizados en fase, inyectados preferentemente en pozos de potencial del *wake* alejados del pulso forzador.

De este modo, este trabajo valida el concepto de aceleración por *wakefields* de microondas en guías llenas de plasma e identifica con precisión los mecanismos que limitan o potencian su desempeño, proponiendo rutas de optimización concretas. Bajo estas condiciones, el esquema se presenta como una alternativa viable para el desarrollo de aceleradores compactos capaces de entregar haces de electrones MeV con cargas moderadas y dispersión controlada, habilitando aplicaciones como fuentes compactas de Rayos X.

Referencias

- [1] Altan Cakir and Oguz Guzel. A brief review of plasma wakefield acceleration. *arXiv preprint arXiv:1908.07207*, 2019.
- [2] Joseph John Thomson. Xl. cathode rays. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 44(269):293–316, 1897.
- [3] Wilhelm Conrad Röntgen. On a new kind of rays. *Science*, 3(59):227–231, 1896.
- [4] Marcio Luis Ferreira Nascimento. Brief history of x-ray tube patents. *World Patent Information*, 37:48–53, 2014.
- [5] Adrian Dingle and Anthony Carpi. Teoría atómica i: Rayos cátodos, electrones y el núcleo. *Visionlearning Vol. CHE-1 (2)*, 2003.
- [6] Julian Tesch Picard. *High Power Microwave Generation for Advanced Particle Acceleration*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2022.
- [7] David Alesini. Linear accelerators. *Italy: INFN-LNF*, 2016.
- [8] Helmut Wiedemann, Daniel Brandt, Eugene A Perevedentsev, and Shin-Ichi Kurokawa. Physics and technology of linear accelerator systems. *Physics and Technology of Linear Accelerator Systems*, 2004.
- [9] Thomas P Wangler. *RF Linear accelerators*. John Wiley & Sons, 2008.
- [10] Sergey V Kutsaev. Electron bunchers for industrial rf linear accelerators: theory and design guide. *The European Physical Journal Plus*, 136(4):1–73, 2021.
- [11] CJ Karzmark and Neil C Pering. Electron linear accelerators for radiation therapy: history, principles and contemporary developments. *Physics in Medicine & Biology*, 18(3):321, 1973.
- [12] R Mehnert. Review of industrial applications of electron accelerators. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 113(1-4):81–87, 1996.

- [13] Luis W Alvarez, Hugh Bradner, Jack V Franck, Hayden Gordon, J Donald Gow, Lauriston C Marshall, Frank Oppenheimer, Wolfgang KH Panofsky, Chaim Richman, and John R Woodyard. Berkeley proton linear accelerator. *Review of Scientific Instruments*, 26(2):111–133, 1955.
- [14] Raymond A Serway and John W Jewett. *Principles of Physics: A Calculus-Based Text, Volume 2*, volume 2. Cengage learning, p. 753., 2012.
- [15] O Ernest, M Lawrence, and S Livingston. The production of high speed light ions without the use of high voltages ii phys, 1932.
- [16] Ernest O Lawrence. Method and apparatus for the acceleration of ions, February 20 1934. US Patent 1,948,384.
- [17] Helmut Wiedemann. Synchrotron radiation. In *Particle Accelerator Physics*, pages 647–686. Springer, 2003.
- [18] PJ Bryant. A brief history and review of accelerators. ., 1994.
- [19] Jizhou Li, Xiaobiao Huang, Piero Pianetta, and Yijin Liu. Machine-and-data intelligence for synchrotron science. *Nature Reviews Physics*, 3(12):766–768, 2021.
- [20] TK Sham and Mark L Rivers. A brief overview of synchrotron radiation. *Reviews in mineralogy and geochemistry*, 49(1):117–147, 2002.
- [21] VV Andreev and AM Umnov. Relativistic plasma and electron bunches in plasma synchrotrons of gyroc. *Plasma Sources Science and Technology*, 8(3):479, 1999.
- [22] Olivier Gal. Gyroc: a compact, cyclic electron accelerator. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 17(4):622–629, 1989.
- [23] VD Dugar-Zhabon, EA Orozco, and AM Herrera. Self-consistent simulation of an electron beam for a new autoresonant x-ray generator based on te102 rectangular mode. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 687, page 012076. IOP Publishing, 2016.
- [24] VE Vergara, JD González, JR Beltrán, and EA Orozco. Electrons acceleration in a te113 cylindrical cavity affected by a static inhomogeneous magnetic field. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 935, page 012076. IOP Publishing, 2017.

- [25] O Otero and EA Orozco. Numerical simulation of electron cyclotron resonance phenomenon using an axisymmetric transverse electric field. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1386, page 012123. IOP Publishing, 2019.
- [26] Valeriy D Dugar-Zhabon and Eduardo A Orozco. Three-dimensional particle-in-cell simulation of spatial autoresonance electron-beam motion. *IEEE transactions on plasma science*, 38(10):2980–2984, 2010.
- [27] Valeri D Dougar-Jabon, Eduardo A Orozco, and Anatoly M Umnov. Modeling of electron cyclotron resonance acceleration in a stationary inhomogeneous magnetic field. *Physical Review Special Topics—Accelerators and Beams*, 11(4):041302, 2008.
- [28] JD González, JR Beltrán, and VE Vergara. Simulation of bunched electron-beam acceleration by the cylindrical te 1 1 3 microwave field. *International Journal of Modern Physics A*, 34(36):1942030, 2019.
- [29] Eduardo Alberto Orozco Ospino Valeriy Dondokovich Dugar-Zhabon. Compact self-resonant x-ray source, May 2017.
- [30] Toshiki Tajima and John M Dawson. Laser electron accelerator. *Physical Review Letters*, 43(4):267, 1979.
- [31] Pisin Chen, JM Dawson, Robert W Huff, and Thomas Katsouleas. Acceleration of electrons by the interaction of a bunched electron beam with a plasma. *Physical review letters*, 54(7):693, 1985.
- [32] Eric Esarey, Phillip Sprangle, Jonathan Krall, Antonio Ting, and Glenn Joyce. Optically guided laser wake-field acceleration. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 5(7):2690–2697, 1993.
- [33] J Krall, A Ting, E Esarey, and P Sprangle. Self-modulated-laser wakefield acceleration. In *Proceedings of International Conference on Particle Accelerators*, pages 2629–2631. IEEE, 1993.
- [34] Bradley Scott Nicks. *Novel Avenues of Wakefield Acceleration: Fusion Plasmas and Cancer Therapy*. University of California, Irvine, 2020.
- [35] Eric Esarey, CB Schroeder, and WP Leemans. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators. *Reviews of modern physics*, 81(3):1229, 2009.

- [36] Eric Esarey, Phillip Sprangle, Jonathan Krall, and Antonio Ting. Overview of plasma-based accelerator concepts. *IEEE Transactions on plasma science*, 24(2):252–288, 1996.
- [37] Anil Kumar Aria and Hitendra Kumar Malik. Wakefield generation in a plasma filled rectangular waveguide. *The Open Plasma Physics Journal*, 1(1), 2008.
- [38] SS Baturin, IL Sheinman, AM Altmark, and AD Kanareikin. Wakefield radiation generated by an electron bunch in a rectangular dielectric waveguide. *Technical Physics*, 57(5):683–692, 2012.
- [39] Hitendra K Malik. Analytical calculations of wake field generated by microwave pulses in a plasma filled waveguide for electron acceleration. *Journal of applied physics*, 104(5):053308, 2008.
- [40] Abbas Abdoli-Arani. Acceleration and deflection of an electron inside the circular sectoral plasma waveguides. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 41(11):3109–3114, 2013.
- [41] I Onishchenko, V Kiselev, and G Sotnikov. Wakefield excitation in dielectric waveguides by a sequence of relativistic electron bunches. In *2014 IEEE 41st International Conference on Plasma Sciences (ICOPS) held with 2014 IEEE International Conference on High-Power Particle Beams (BEAMS)*, pages 1–6. IEEE, 2014.
- [42] G Shafir, A Shlapakovski, M Siman-Tov, Yu Bliokh, JG Leopold, S Gleizer, R Gad, VV Rostov, and Ya E Krasik. High power microwave source for a plasma wakefield experiment. *Journal of Applied Physics*, 121(3):033301, 2017.
- [43] Yakov E Krasik, John G Leopold, Guy Shafir, Yang Cao, Yuri P Bliokh, Vladislav V Rostov, Valery Godyak, Meytal Siman-Tov, Raanan Gad, Amnon Fisher, et al. Experiments designed to study the non-linear transition of high-power microwaves through plasmas and gases. *Plasma*, 2(1):51–64, 2019.
- [44] Y Cao, JG Leopold, YP Bliokh, and Ya E Krasik. Self-channeling of a powerful microwave beam in a preliminarily formed plasma. *Physics of Plasmas*, 25(10):103101, 2018.
- [45] Yang Cao, JG Leopold, Yury P Bliokh, Ankun Li, G Shafir, A Fisher, G Leibovitch, VV Rostov, and Yakov E Krasik. The interaction of a high-power

- sub-nanosecond microwave pulse with plasma. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 48(4):792–801, 2019.
- [46] Y Cao, V Maksimov, A Haim, JG Leopold, A Kostinskiy, YP Bliokh, Y Hadas, and Ya E Krasik. Direct measurement of the wakefield excited by a high-power microwave pulse in plasma. *Physics of Plasmas*, 31(4), 2024.
- [47] Y Cao, Y Bliokh, JG Leopold, V Rostov, Ya Slutsker, and Ya E Krasik. Wakefield excitation by a powerful sub-nanosecond 28.6 ghz microwave pulse propagating in a plasma filled waveguide. *Physics of Plasmas*, 26(2), 2019.
- [48] Ana María Herrera Yensur Camacho, Eduardo Orozco. *Estudio Teórico de la generación del wakefield por microondas en una guía de onda rectangular*. Universidad Industrial de Santander, 2018.
- [49] Brice Quesnel and Patrick Mora. Theory and simulation of the interaction of ultraintense laser pulses with electrons in vacuum. *Physical Review E*, 58(3):3719, 1998.
- [50] J Vieira, RA Fonseca, and LO Silva. Multidimensional plasma wake excitation in the non-linear blowout regime. *arXiv preprint arXiv:1607.03514*, 2016.
- [51] JP Palastro, JL Shaw, P Franke, D Ramsey, TT Simpson, and DH Froula. Dephasingless laser wakefield acceleration. *Physical review letters*, 124(13):134802, 2020.
- [52] Xi Zhang, Vladimir N Khudik, and Gennady Shvets. Synergistic laser-wakefield and direct-laser acceleration in the plasma-bubble regime. *Physical review letters*, 114(18):184801, 2015.
- [53] PE Masson-Laborde, MZ Mo, A Ali, S Fourmaux, P Lassonde, JC Kieffer, W Rozmus, D Teychenné, and R Fedosejevs. Giga-electronvolt electrons due to a transition from laser wakefield acceleration to plasma wakefield acceleration. *Physics of Plasmas*, 21(12):123113, 2014.
- [54] Serguei Y Kalmykov, A Beck, SA Yi, VN Khudik, Michael C Downer, E Lefebvre, Bradley Allan Shadwick, and DP Umstadter. Electron self-injection into an evolving plasma bubble: Quasi-monoenergetic laser-plasma acceleration in the blowout regime. *Physics of Plasmas*, 18(5):056704, 2011.

- [55] Patrick Mora and Thomas M Antonsen Jr. Electron cavitation and acceleration in the wake of an ultraintense, self-focused laser pulse. *Physical Review E*, 53(3):R2068, 1996.
- [56] JB Rosenzweig, B Breizman, T Katsouleas, and JJ Su. Acceleration and focusing of electrons in two-dimensional nonlinear plasma wake fields. *Physical Review A*, 44(10):R6189, 1991.
- [57] WB Mori, T Katsouleas, CB Darrow, CE Clayton, C Joshi, JM Dawson, CB Decker, K Marsh, and SC Wilks. Laser wakefields at ucla and llnl. In *Proceedings of the Particle Accelerator Conference. San Francisco, California*, 1991.
- [58] CE Clayton, C Joshi, C Darrow, and D Umstadter. Relativistic plasma-wave excitation by collinear optical mixing. *Physical review letters*, 54(21):2343, 1985.
- [59] CE Clayton, KA Marsh, A Dyson, M Everett, A Lal, WP Leemans, R Williams, and C Joshi. Ultrahigh-gradient acceleration of injected electrons by laser-excited relativistic electron plasma waves. *Physical Review Letters*, 70(1):37, 1993.
- [60] AE Dangor, AKL Dymoke-Bradshaw, and AE Dyson. Observation of relativistic plasma waves generated by the beat-wave with 1 μm lasers. *Physica Scripta*, 1990(T30):107, 1990.
- [61] Y Kitagawa, T Matsumoto, T Minamihata, K Sawai, K Matsuo, K Mima, K Nishihara, H Azechi, KA Tanaka, H Takabe, et al. Beat-wave excitation of plasma wave and observation of accelerated electrons. *Physical review letters*, 68(1):48, 1992.
- [62] CA Coverdale, CB Darrow, CD Decker, WB Mori, KC Tzeng, KA Marsh, CE Clayton, and C Joshi. Propagation of intense subpicosecond laser pulses through underdense plasmas. *Physical Review Letters*, 74(23):4659, 1995.
- [63] WB Mori, C Joshi, JM Dawson, DW Forslund, and JM Kindel. Evolution of self-focusing of intense electromagnetic waves in plasma. *Physical Review Letters*, 60(13):1298, 1988.
- [64] K Nakajima, D Fisher, T Kawakubo, H Nakanishi, A Ogata, Y Kato, Y Kitagawa, R Kodama, K Mima, H Shiraga, et al. Observation of ultrahigh gradient electron acceleration by a self-modulated intense short laser pulse. *Physical Review Letters*, 74(22):4428, 1995.

- [65] J Krall, A Ting, E Esarey, and P Sprangle. Enhanced acceleration in a self-modulated-laser wake-field accelerator. *Physical Review E*, 48(3):2157, 1993.
- [66] A Modena, Z Najmudin, AE Dangor, CE Clayton, KA Marsh, C Joshi, Victor Malka, CB Darrow, C Danson, D Neely, et al. Electron acceleration from the breaking of relativistic plasma waves. *nature*, 377(6550):606–608, 1995.
- [67] Donna Strickland and Gerard Mourou. Compression of amplified chirped optical pulses. *Optics communications*, 55(6):447–449, 1985.
- [68] Gérard A Mourou, CP Barty, and Michael D Perry. Ultrahigh-intensity laser: physics of the extreme on a tabletop. ., 1997.
- [69] CGR Geddes, Cs Toth, J Van Tilborg, E Esarey, CB Schroeder, D Bruhwiler, C Nieter, J Cary, and WP Leemans. High-quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding. *Nature*, 431(7008):538–541, 2004.
- [70] Jérôme Faure, Yannick Glinec, A Pukhov, S Kiselev, S Gordienko, E Lefebvre, J-P Rousseau, F Burgy, and Victor Malka. A laser–plasma accelerator producing monoenergetic electron beams. *Nature*, 431(7008):541–544, 2004.
- [71] Stuart PD Mangles, CD Murphy, Zulfikar Najmudin, Alexander George Roy Thomas, JL Collier, Aboobaker E Dangor, EJ Divall, PS Foster, JG Gallacher, CJ Hooker, et al. Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser–plasma interactions. *Nature*, 431(7008):535–538, 2004.
- [72] MN Rosenbluth and CS Liu. Excitation of plasma waves by two laser beams. *Physical Review Letters*, 29(11):701, 1972.
- [73] AJ Gonsalves, K Nakamura, J Daniels, C Benedetti, C Pieronek, TCH De Raadt, S Steinke, JH Bin, SS Bulanov, J Van Tilborg, et al. Petawatt laser guiding and electron beam acceleration to 8 gev in a laser-heated capillary discharge waveguide. *Physical review letters*, 122(8):084801, 2019.
- [74] WP Leemans, AJ Gonsalves, H-S Mao, K Nakamura, C Benedetti, CB Schroeder, Cs Tóth, J Daniels, DE Mittelberger, SS Bulanov, et al. Multi-gev electron beams from capillary-discharge-guided subpetawatt laser pulses in the self-trapping regime. *Physical review letters*, 113(24):245002, 2014.

- [75] Wim P Leemans, Bob Nagler, Anthony J Gonsalves, Cs Tóth, Kei Nakamura, Cameron GR Geddes, ESCB Esarey, CB Schroeder, and SM Hooker. GeV electron beams from a centimetre-scale accelerator. *Nature physics*, 2(10):696–699, 2006.
- [76] Stefan Karsch, Jens Osterhoff, Antonia Popp, TP Rowlands-Rees, Zs Major, Matthias Fuchs, Benjamin Marx, Rainer Hörlein, Karl Schmid, Laszlo Veisz, et al. GeV-scale electron acceleration in a gas-filled capillary discharge waveguide. *New Journal of Physics*, 9(11):415, 2007.
- [77] Nasr AM Hafz, Tae Moon Jeong, Il Woo Choi, Seong Ku Lee, Ki Hong Pae, Victor V Kulagin, Jae Hee Sung, Tae Jun Yu, Kyung-Han Hong, Tomonao Hosokai, et al. Stable generation of GeV-class electron beams from self-guided laser-plasma channels. *Nature Photonics*, 2(9):571–577, 2008.
- [78] DH Froula, CE Clayton, T Döppner, KA Marsh, CPJ Barty, L Divol, RA Fonseca, SH Glenzer, C Joshi, W Lu, et al. Measurements of the critical power for self-injection of electrons in a laser wakefield accelerator. *Physical Review Letters*, 103(21):215006, 2009.
- [79] Chris E Clayton, JE Ralph, F Albert, RA Fonseca, SH Glenzer, Chandrasekar Joshi, Wei Lu, KA Marsh, Samuel F Martins, Warren B Mori, et al. Self-guided laser wakefield acceleration beyond 1 GeV using ionization-induced injection. *Physical review letters*, 105(10):105003, 2010.
- [80] Haiyang Lu, Mingwei Liu, Wentao Wang, Cheng Wang, Jiansheng Liu, Aihua Deng, Jiancai Xu, Changquan Xia, Wentao Li, Hui Zhang, et al. Laser wakefield acceleration of electron beams beyond 1 GeV from an ablative capillary discharge waveguide. *Applied Physics Letters*, 99(9):091502, 2011.
- [81] Hyung Taek Kim, Ki Hong Pae, Hyuk Jin Cha, I Jong Kim, Tae Jun Yu, Jae Hee Sung, Seong Ku Lee, Tae Moon Jeong, and Jongmin Lee. Enhancement of electron energy to the multi-GeV regime by a dual-stage laser-wakefield accelerator pumped by petawatt laser pulses. *Physical review letters*, 111(16):165002, 2013.
- [82] Hyung Taek Kim, VB Pathak, Ki Hong Pae, Agustin Lifschitz, François Sylla, Jung Hun Shin, C Hojbota, Seong Ku Lee, Jae Hee Sung, Hwang Woon Lee, et al. Stable multi-GeV electron accelerator driven by waveform-controlled pW laser pulses. *Scientific reports*, 7(1):1–8, 2017.

- [83] Andreas R. Maier, Niels M. Delbos, Timo Eichner, Lars Hübner, Sören Jalas, Laurids Jeppe, Spencer W. Jolly, Manuel Kirchen, Vincent Leroux, Philipp Messner, Matthias Schnepf, Maximilian Trunk, Paul A. Walker, Christian Werle, and Paul Winkler. Decoding sources of energy variability in a laser-plasma accelerator. *Phys. Rev. X*, 10:031039, Aug 2020.
- [84] Ya B Fainberg, VA Balakirev, and IN Onishchenko. Wake field excitation in plasma by a train of relativistic electron bunches. *Plasma Physics Reports*, 20(7), 1994.
- [85] James Benjamin Rosenzweig, DB Cline, B Cole, H Figueroa, W Gai, R Konecny, J Norem, P Schoessow, and J Simpson. Experimental observation of plasma wake-field acceleration. *Physical review letters*, 61(1):98, 1988.
- [86] JB Rosenzweig, P Schoessow, B Cole, C Ho, W Gai, R Konecny, S Mtingwa, J Norem, M Rosing, and J Simpson. Demonstration of electron beam self-focusing in plasma wake fields. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 2(6):1376–1383, 1990.
- [87] Atsushi Ogata. Plasma lens and wake experiments in japan. In *AIP Conference Proceedings*, pages vol.279(1)pg.420–449. American Institute of Physics, 1992.
- [88] C Joshi, B Blue, CE Clayton, E Dodd, C Huang, KA Marsh, WB Mori, S Wang, MJ Hogan, C O’Connell, et al. High energy density plasma science with an ultrarelativistic electron beam. *Physics of Plasmas*, 9(5):1845–1855, 2002.
- [89] Ian Blumenfeld, Christopher E Clayton, Franz-Josef Decker, Mark J Hogan, Chengkun Huang, Rasmus Ischebeck, Richard Iverson, Chandrashekhara Joshi, Thomas Katsouleas, Neil Kirby, et al. Energy doubling of 42 gev electrons in a metre-scale plasma wakefield accelerator. *Nature*, 445(7129):741–744, 2007.
- [90] Brent Edward Blue, CE Clayton, CL O’Connell, F-J Decker, MJ Hogan, C Huang, R Iverson, C Joshi, TC Katsouleas, W Lu, et al. Plasma-wakefield acceleration of an intense positron beam. *Physical review letters*, 90(21):214801, 2003.
- [91] P Muggli, BE Blue, CE Clayton, S Deng, F-J Decker, MJ Hogan, C Huang, R Iverson, C Joshi, TC Katsouleas, et al. Meter-scale plasma-wakefield accelerator driven by a matched electron beam. *Physical Review Letters*, 93(1):014802, 2004.
- [92] MJ Hogan, CD Barnes, CE Clayton, FJ Decker, S Deng, P Emma, C Huang, RH Iverson, DK Johnson, C Joshi, et al. Multi-gev energy gain in a plasma-wakefield accelerator. *Physical review letters*, 95(5):054802, 2005.

- [93] P Muggli, I Blumenfeld, CE Clayton, FJ Decker, MJ Hogan, C Huang, R Ischebeck, RH Iverson, C Joshi, T Katsouleas, et al. Energy gain scaling with plasma length and density in the plasma wakefield accelerator. *New Journal of Physics*, 12(4):045022, 2010.
- [94] M Litos, E Adli, W An, CI Clarke, CE Clayton, Sébastien Corde, JP Delahaye, RJ England, AS Fisher, J Frederico, et al. High-efficiency acceleration of an electron beam in a plasma wakefield accelerator. *Nature*, 515(7525):92–95, 2014.
- [95] Sébastien Corde, E Adli, JM Allen, W An, CI Clarke, CE Clayton, JP Delahaye, J Frederico, S Gessner, SZ Green, et al. Multi-gigaelectronvolt acceleration of positrons in a self-loaded plasma wakefield. *Nature*, 524(7566):442–445, 2015.
- [96] Sébastien Corde, E Adli, JM Allen, W An, CI Clarke, B Clausse, CE Clayton, JP Delahaye, J Frederico, S Gessner, et al. High-field plasma acceleration in a high-ionization-potential gas. *Nature communications*, 7(1):1–6, 2016.
- [97] Erik Adli, Arun Ahuja, O Apsimon, Robert Apsimon, A-M Bachmann, D Barrientos, Fabian Batsch, Jeremie Bauche, VK Berglyd Olsen, M Bernardini, et al. Acceleration of electrons in the plasma wakefield of a proton bunch. *Nature*, 561(7723):363–367, 2018.
- [98] Edda Gschwendtner, Marlene Turner, Erik Adli, A Ahuja, O Apsimon, Robert Apsimon, A-M Bachmann, Fabian Batsch, Chiara Bracco, F Braunmüller, et al. Proton-driven plasma wakefield acceleration in awake. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 377(2151):20180418, 2019.
- [99] Kangnan Jiang, Wentao Wang, Ke Feng, and Ruxin Li. Review of quality optimization of electron beam based on laser wakefield acceleration. *Optics Express*, 9(8):511, 2022.
- [100] A Döpp, C Thaur, E Guillaume, F Massimo, A Lifschitz, I Andriyash, J-P Goddet, A Tazfi, K Ta Phuoc, and V Malka. Energy-chirp compensation in a laser wakefield accelerator. *Physical Review Letters*, 121(7):074802, 2018.
- [101] Samuel F Martins, RA Fonseca, Wei Lu, Warren B Mori, and LO Silva. Exploring laser-wakefield-accelerator regimes for near-term lasers using particle-in-cell simulation in lorentz-boosted frames. *Nature Physics*, 6(4):311–316, 2010.
- [102] Stephan Kuschel, MB Schwab, Mark Yeung, Dominik Hollatz, Andreas Seidel, Wolfgang Ziegler, Alexander Sävert, MC Kaluza, and Matt Zepf. Controlling the

- self-injection threshold in laser wakefield accelerators. *Physical Review Letters*, 121(15):154801, 2018.
- [103] Estelle Cormier-Michel, Bradley Allan Shadwick, Cameron Guy Robinson Geddes, Eric Esarey, Carl B Schroeder, and Wim P Leemans. Unphysical kinetic effects in particle-in-cell modeling of laser wakefield accelerators. *Physical Review E*, 78(1):016404, 2008.
- [104] Pierre-Louis Bourgeois and Xavier Davoine. New mitigation approach to numerical cherenkov radiation in pic simulations of wakefield accelerators. *Journal of Computational Physics*, 413:109426, 2020.
- [105] YP Bliokh, JG Leopold, G Shafir, A Shlapakovski, and Ya E Krasik. Wakefield in a waveguide. *Physics of Plasmas*, 24(6):063112, 2017.
- [106] Jesús E López and Eduardo A Orozco. Particle-in-cell simulations of plasma wakefield formation in microwave waveguides. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing, APS Division of Plasma Physics. <https://doi.org/10.1063/5.0287429>, 2025.
- [107] David M Pozar. Microwave engineering. *Fourth Editions*, University of Massachusetts at Amherst, John Wiley & Sons, Inc, pages 26–30, 2012.
- [108] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2021.
- [109] Alexander Pukhov. Particle-in-cell codes for plasma-based particle acceleration. *arXiv preprint arXiv:1510.01071*, 2015.
- [110] C. K. Birdsall and A. B. Langdon. *Plasma Physics via Computer Simulation*. CRC Press, 2004.
- [111] R.W. Hockney and J.W. Eastwood. Computer simulation using particles. *Taylor & Francis*, 1988.
- [112] Giovanni Lapenta. Kinetic plasma simulation: Particle in cell method. *XII Carolus Magnus Summer School on Plasma and Fusion Energy Physics*, pages 76–85, 2015.
- [113] J.P. Boris. Relativistic plasma simulation—optimization of a hybrid code. *Proceedings of the Fourth Conference on Numerical Simulation of Plasmas*, pages 3–67, 1970.

- [114] Kane Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 14(3):302–307, 1966.
- [115] Takayuki Umeda, Yoshiharu Omura, T Tominaga, and Hiroshi Matsumoto. A new charge conservation method in electromagnetic particle-in-cell simulations. *Computer Physics Communications*, 156(1):73–85, 2003.
- [116] Giovanni Lapenta. Particle simulations of space weather. *Journal of Computational Physics*, 231(3):795–821, 2012.
- [117] Charles K Birdsall and A Bruce Langdon. Particle simulation techniques. In *Computer Applications in Plasma Science and Engineering*, pages 7–41. Springer, 1991.
- [118] Allen Taflove, Susan C Hagness, and Melinda Picket-May. Computational electromagnetics: the finite-difference time-domain method. *The Electrical Engineering Handbook*, 3:629–670, 2005.
- [119] Randall J LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press, 2002.
- [120] John P Boyd. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Corporation, 2001.
- [121] John P Verboncoeur. Particle simulation of plasmas: review and advances. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 47(5A):A231, 2005.
- [122] Richard Courant, Kurt Friedrichs, and Hans Lewy. Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik. *Mathematische annalen*, 100(1):32–74, 1928.
- [123] J-L Vay. Simulation of beams or plasmas crossing at relativistic velocity. *Physics of Plasmas*, 15(5), 2008.
- [124] Adam V Higuera and John R Cary. Structure-preserving second-order integration of relativistic charged particle trajectories in electromagnetic fields. *Physics of Plasmas*, 24(5), 2017.
- [125] T Zh Esirkepov. Exact charge conservation scheme for particle-in-cell simulation with an arbitrary form-factor. *Computer Physics Communications*, 135(2):144–153, 2001.

- [126] J-L Vay, A Almgren, J Bell, L Ge, DP Grote, M Hogan, O Kononenko, R Lehe, A Myers, C Ng, et al. Warp-x: A new exascale computing platform for beam-plasma simulations. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 909:476–479, 2018.
- [127] TJ M Boyd, TJM Boyd, and JJ Sanderson. *The physics of plasmas*. Cambridge university press, 2003.
- [128] Hong Qin, Shuangxi Zhang, Jianyuan Xiao, Jian Liu, Yajuan Sun, and William M Tang. Why is boris algorithm so good? *Physics of Plasmas*, 20(8), 2013.
- [129] Hann-Shin Mao and Richard Wirz. Comparison of charged particle tracking methods for non-uniform magnetic fields. In *42nd AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference in conjunction with the 18th International Conference on MHD Energy Conversion (ICMHD)*, page 3739, 2011.
- [130] P Sprangle, Eric Esarey, and A Ting. Nonlinear theory of intense laser-plasma interactions. *Physical review letters*, 64(17):2011, 1990.
- [131] Brigitte Cros. Laser-driven plasma wakefield: propagation effects. *arXiv preprint arXiv:1705.10566*, 2017.
- [132] Joseph R Smith, Chris Orban, Nashad Rahman, Brendan McHugh, Ricky Oropeza, and Enam A Chowdhury. A particle-in-cell code comparison for ion acceleration: Epoch, lsp, and warpx. *Physics of Plasmas*, 28(7), 2021.
- [133] Martin Hansson, Bastian Aurand, X Davoine, Henrik Ekerfelt, Kristoffer Svensson, Anders Persson, C-G Wahlström, and O Lundh. Down-ramp injection and independently controlled acceleration of electrons in a tailored laser wakefield accelerator. *Physical Review Special Topics—Accelerators and Beams*, 18(7):071303, 2015.
- [134] D Ullmann, P Scherkl, A Knetsch, T Heinemann, A Sutherland, AF Habib, OS Karger, A Beaton, GG Manahan, A Deng, et al. All-optical density downramp injection in electron-driven plasma wakefield accelerators. *Physical Review Research*, 3(4):043163, 2021.
- [135] T Silva, Anton Helm, J Vieira, R Fonseca, and LO Silva. On the use of the envelope model for down-ramp injection in laser-plasma accelerators. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 62(2):024001, 2019.

Apéndices

A. Simulaciones Particle in cell

Debido a la complejidad inherente de la aceleración *wakefield* producida por la interacción de pulsos electromagnéticos con plasmas, gran parte de los estudios analíticos disponibles se limitan a modelos lineales y unidimensionales. En estos, únicamente se consideran las variaciones a lo largo de la dirección de propagación del pulso y, además, se introducen supuestos adicionales, como el uso de formas simplificadas del pulso e incluso la consideración de que el forzador no evoluciona. Esta última aproximación es válida para pulsos muy intensos cuyo tiempo de interacción con el plasma no es lo suficientemente extenso. Sin embargo, es bien sabido que, a medida que el forzador (pulso electromagnético o haz de partículas cargadas) se propaga en el plasma, transfiere parte de su energía, reduciendo su amplitud y modificando su velocidad de propagación, lo que, a su vez, afecta directamente la amplitud y la velocidad de fase del *wake*.

Por otra parte, las aproximaciones unidimensionales sólo resultan adecuadas cuando el radio de la sección transversal del haz impulsor o el radio de enfoque del pulso electromagnético son considerablemente mayores que la longitud de onda. En escenarios donde esta condición no se cumple, los efectos transversales adquieren gran relevancia, generando estructuras transversales que debilitan el *wake* longitudinal responsable de la aceleración de partículas. Diversas investigaciones han demostrado que los efectos no lineales pueden favorecer significativamente la aceleración *wakefield*. Un ejemplo notable es el régimen *bubble* o *blow-out*, donde, debido al efecto ponderomotriz, los electrones son completamente expulsados al paso del forzador, formando cavidades libres de carga electrónica [50–57]. Otro caso relevante es la ruptura de la onda plásmica, fenómeno que depende de efectos tridimensionales, no lineales, relativistas y térmicos, y que, a pesar de parecer indeseable, se ha identificado como un mecanismo útil para la autoinyección de electrones. Asimismo, los efectos transversales, que sólo pueden describirse mediante modelos bidimensionales o tridimensionales, resultan esenciales para la focalización y calidad del haz acelerado. Dado que el proceso completo de aceleración implica una transferencia simultánea de energía y momento entre el pulso electromagnético y el

plasma, se requiere un estudio no lineal, relativista, tridimensional y autoconsistente para obtener resultados realistas.

En este contexto, las simulaciones tridimensionales, relativistas y autoconsistentes constituyen una herramienta teórica fundamental para el estudio de estos sistemas. Entre ellas, las simulaciones *Particle-In-Cell Electromagnéticas* (PIC-EM) se destacan como el enfoque más ampliamente utilizado, ya que permiten modelar de manera autoconsistente la generación y evolución del *wakefield*, la dinámica del forzador y el proceso de aceleración de partículas cargadas en plasmas débilmente acoplados.

Bajo esta motivación, en este capítulo se describen las generalidades y los fundamentos del esquema PIC-EM utilizado, los métodos y estrategias numéricas empleadas para el estudio de la aceleración *wakefield* inducida por pulsos intensos de microondas de corta duración propagándose en guías rectangulares llenas de plasma. Se presenta el diseño modular del código desarrollado, así como las pruebas de validación implementadas para garantizar la correcta reproducción de los fenómenos físicos de interés.

A.1 Descripción general del método

Las simulaciones autoconsistentes basadas en el método Particle-In-Cell (PIC) permiten describir simultáneamente la evolución de las funciones de distribución de electrones e iones bajo la acción de los campos electromagnéticos, así como la evolución de estos campos influenciados por la dinámica colectiva de las partículas cargadas.

Este enfoque se fundamenta en la resolución del sistema acoplado de ecuaciones de Vlasov-Maxwell. Para cada especie α (electrones o iones), la función de distribución $f_\alpha = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ en el espacio de fase de seis dimensiones, de posición y momentum, evoluciona según la ecuación de Vlasov relativista,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_\alpha + q_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_\alpha} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_\alpha = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde γ es el factor de Lorentz, y \mathbf{E} y \mathbf{B} son los campos eléctrico y magnético totales, respectivamente. Estos últimos resultan de la superposición del campo externo del pulso de microondas con los campos generados por las cargas libres del plasma.

La evolución de los campos electromagnéticos está determinada por las

ecuaciones de Maxwell: La ley de Gauss para el campo eléctrico,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{A.2})$$

la ley de Gauss para el campo magnético,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.3})$$

la ley de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.4})$$

y la ley de Ampère-Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{A.5})$$

donde ρ y \mathbf{J} son las densidades de carga y corriente respectivamente, generadas por las partículas cargadas. Los coeficientes μ_0 y ϵ_0 son la permeabilidad y permitividad del vacío, respectivamente.

Las densidades de carga ρ y corriente \mathbf{J} cumplen un papel central en la naturaleza autoconsistente del método, al establecer el nexo entre la dinámica de las partículas y la evolución de los campos electromagnéticos. A partir de las funciones de distribución de cada especie α (electrones e iones), estas se definen como,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_{\alpha}} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (\text{A.7})$$

Esta expresión evidencia que los campos no sólo influyen sobre las partículas a través de la fuerza de Lorentz, sino que, recíprocamente, las partículas modifican los campos mediante la corriente que generan. De este modo, ρ y \mathbf{J} constituyen el canal mediante el cual se cierra el acoplamiento entre partículas y campos, asegurando la retroalimentación dinámica propia de las simulaciones autoconsistentes.

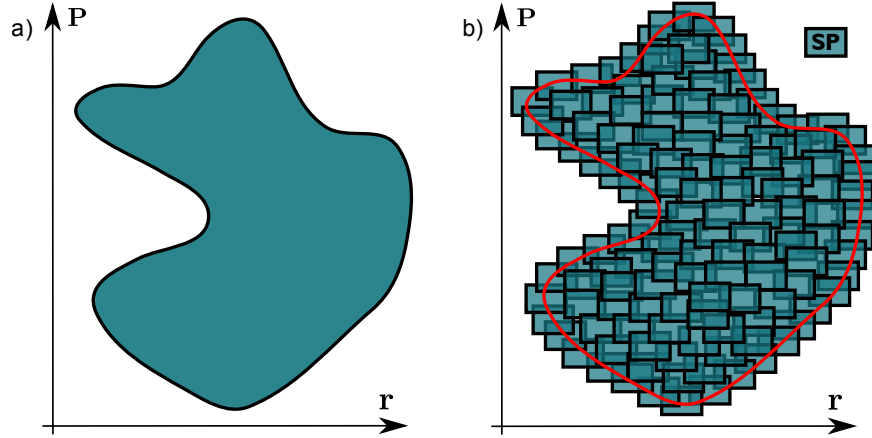
Para implementar numéricamente esta interacción, el método PIC introduce una primera aproximación fundamental: la representación discreta de la función de distribución f_{α} como una superposición de macro-partículas o superpartículas (SP). Estas superpartículas pueden entenderse como nubes que agrupan N_p partículas reales cercanas entre sí en el espacio de fase [116], y cuya dinámica colectiva se modela a

través de una función de distribución individual f_p . De este modo, se tiene que,

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{sp} f_{sp}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (\text{A.8})$$

donde cada término f_{sp} describe la contribución individual de una superpartícula sp al conjunto de la especie α . En otras palabras, la función de distribución continua f_α se discretiza como una suma de elementos localizados en el espacio de fase, tal como se ilustra en la Figura 33. Cada superpartícula (SP) representa un conjunto de

Figura 33: Representación esquemática del método Particle-In-Cell: (a) función de distribución continua en el espacio de fase, y (b) su aproximación discreta mediante la superposición de superpartículas, cada una modelando un conjunto de partículas cargadas agrupadas espacial y cinemáticamente.



N_p partículas reales de una misma especie, agrupadas espacial y cinemáticamente. El estado de estas partículas se define mediante el producto de dos factores: un factor de forma espacial $S_{\mathbf{r}}$, centrado en la posición $\mathbf{r}_{sp}(t)$, y un factor de forma en momentum $S_{\mathbf{p}}$, que suele representarse mediante una función delta de Dirac, lo que implica que todas las partículas dentro de una misma SP comparten la misma velocidad $\mathbf{v}_{sp}(t)$ [116]. Bajo esta formulación, la función de distribución asociada a una superpartícula sp adopta la siguiente estructura,

$$f_p(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = N_p S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sp}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{sp}), \quad (\text{A.9})$$

donde $S_{\mathbf{r}}$ determina cómo se distribuyen espacialmente las partículas de la superpartícula dentro de un volumen de tamaño finito. Este factor de forma suele construirse a partir de funciones *b-spline* b_l , tal como sigue,

$$S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sp}) = \frac{1}{\Delta_x^{sp} \Delta_y^{sp} \Delta_z^{sp}} b_l \left(\frac{x - x_{sp}(t)}{\Delta_x^{sp}} \right) b_l \left(\frac{y - y_{sp}(t)}{\Delta_y^{sp}} \right) b_l \left(\frac{z - z_{sp}(t)}{\Delta_z^{sp}} \right), \quad (\text{A.10})$$

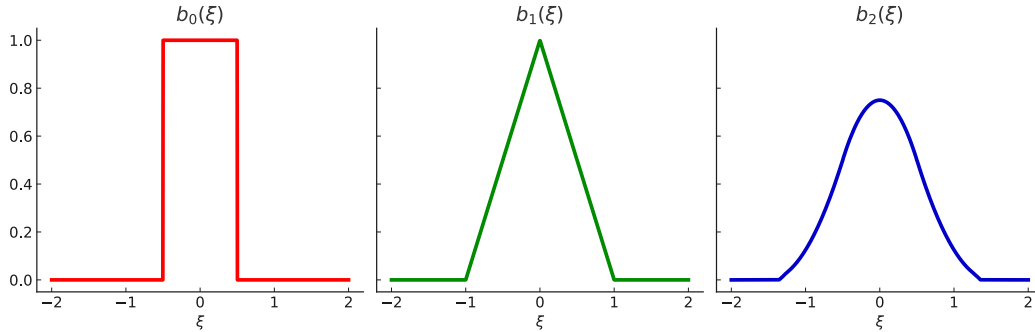
donde Δ_x^{sp} , Δ_y^{sp} y Δ_z^{sp} representan las dimensiones características del volumen ocupado por cada superpartícula, su tamaño. Las funciones $b_l(\xi)$ se generan recursivamente a partir de b_0 , mediante integraciones sucesivas,

$$b_l(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_0(\xi - \eta) b_{l-1}(\eta) d\eta, \quad (\text{A.11})$$

siendo b_0 la función tipo *flat-top*, definida como:

$$b_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Figura 34: Funciones $b_l(\xi)$ utilizadas para construir el factor de forma espacial de las superpartículas en el método PIC. Se muestran los tres primeros órdenes: b_0 , b_1 y b_2 , siendo b_0 la función de tipo *flat-top*.



A mayor orden l , el perfil espacial de cada superpartícula es más suave, lo cual reduce el ruido numérico asociado a la asignación de carga y corriente sobre la malla, y mejora la precisión del método. No obstante, esto también incrementa el costo computacional, por lo que en muchas simulaciones PIC se adopta el uso de funciones b_0 , que corresponden al caso particular en el que todas las N_p partículas reales de la SP se mueven con la misma velocidad $\mathbf{v}_{sp}(t)$ y están distribuidas uniformemente en una caja rectangular de dimensiones $\Delta_x^{sp} \times \Delta_y^{sp} \times \Delta_z^{sp}$.

Si bien puede parecer intuitivo que, si la función de distribución f_α satisface la ecuación de Vlasov, Ecuación (A.1), su superposición y por ende f_{sp} también la debe satisfacer, pero esto no es estrictamente cierto. El método Particle-In-Cell introduce aproximaciones fundamentales, como la discretización del espacio de fase y el uso de

superpartículas, que implican que la ecuación de Vlasov no se conserva exactamente a nivel macroscópico. Por tanto, en la práctica, se requiere garantizar que cada superpartícula cumpla con ciertos momentos de la ecuación de Vlasov para preservar las propiedades físicas del sistema.

Al tomar los primeros momentos sobre la Ecuación A.1, tal como se discute en el trabajo de Lapenta [116], se obtienen las ecuaciones de evolución para cada superpartícula. Estas se componen de tres ecuaciones fundamentales,

$$\frac{dN_p}{dt} = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{sp}}{dt} = \mathbf{v}_{sp}, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{d(\gamma m_{sp} \mathbf{v}_{sp})}{dt} = q_{sp} (\mathbf{E}_{sp} + \mathbf{v}_{sp} \times \mathbf{B}_{sp}). \quad (\text{A.15})$$

De aquí se pueden hacer las siguientes interpretaciones: *i*) Las simulaciones PIC exigen que el número de partículas reales N_p de una superpartícula debe permanecer constante en el tiempo, indicando que dicha cantidad no debe variar durante toda la simulación. *ii*) La dinámica de una superpartícula está definida por el sistema de ecuaciones de Newton-Lorentz relativista, donde $m_{sp} = N_p m_\alpha$ y $q_{sp} = N_p q_\alpha$ son, respectivamente, la masa y la carga total asociadas a cada superpartícula. Así, bajo las aproximaciones introducidas, la evolución de la función de distribución f_α se reduce al seguimiento de la dinámica de un conjunto discreto de superpartículas que obedecen a la ecuación de movimiento de Newton-Lorentz, donde los campos eléctricos y magnéticos efectivos que actúan sobre cada superpartícula, \mathbf{E}_{sp} y \mathbf{B}_{sp} , se obtienen a partir de las siguientes expresiones,

$$\mathbf{E}_{sp} = \int S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad \mathbf{B}_{sp} = \int S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (\text{A.16})$$

que pueden ser interpretadas como un campo promedio neto sobre cada SP y depende directamente tanto de la distribución espacial de los campos, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, así como del factor de forma espacial $S_{\mathbf{r}}$ empleado.

En este punto se revela el principio central de las simulaciones PIC: la resolución numérica de la ecuación de Vlasov se lleva a cabo mediante el seguimiento explícito de la evolución temporal de un conjunto de superpartículas. Estas representan la dinámica colectiva de grupos de partículas reales en el plasma. A partir de sus posiciones y velocidades en un instante t^n se calcula la densidad de carga y la densidad de corriente, las cuales permiten resolver las ecuaciones de Maxwell para obtener los campos, y estos

campos permiten conocer las nuevas posiciones y velocidades de las superpartículas en el instante t^{n+1} , ya que los campos influyen en su dinámica. Esta retroalimentación define un ciclo autoconsistente: los campos electromagnéticos afectan la dinámica de las partículas, y estas, a su vez, modifican los campos mediante su movimiento.

A.2 Ciclo computacional

El método Particle-In-Cell electromagnético (PIC-EM) permite resolver de forma autoconsistente la evolución conjunta de los campos electromagnéticos y de las partículas cargadas representadas por superpartículas. Numéricamente se implementa mediante un ciclo computacional, desde un instante t^n al siguiente t^{n+1} , e itera hasta alcanzar el tiempo final de simulación, y está compuesto por los siguientes pasos:

- **Cálculo de los términos fuentes:** A partir de las posiciones y velocidades de las superpartículas en el instante t^n , se calculan las densidades de carga y corriente. Estas magnitudes constituyen las fuentes del sistema de ecuaciones de Maxwell.
- **Resolución de las ecuaciones de Maxwell:** Utilizando las densidades de carga y corriente previamente calculadas, se resuelven las ecuaciones de Maxwell para obtener los campos eléctricos y magnéticos autoconsistentes.
- **Interpolación de campos a las partículas:** Los campos eléctricos y magnéticos se interpolan hacia las posiciones de cada superpartícula, con el fin de determinar los campos efectivos que actúan sobre ellas.
- **Integración de la dinámica de partículas:** Con base en los campos interpolados, se resuelven las ecuaciones de movimiento relativistas para cada superpartícula, obteniendo así sus nuevas posiciones y velocidades, en el instante t^{n+1} . Esta información se utilizará en la siguiente iteración del ciclo, donde se calculan las densidades de carga y corriente.

Este ciclo computacional constituye la base operativa de las simulaciones PIC-EM y permite modelar de forma autoconsistente la evolución de la interacción plasma-campos. Cada uno de los pasos descritos, desde la asignación de las fuentes hasta la integración de las trayectorias de las superpartículas, requiere del uso de estrategias numéricas particulares que garanticen la precisión, estabilidad y eficiencia del método. En el siguiente capítulo se detallarán dichas técnicas, así como las decisiones de implementación adoptadas en este trabajo para abordar cada etapa del ciclo computacional.

B. Técnicas numéricas

B.1 Discretización de las ecuaciones de Maxwell

La resolución numérica de las ecuaciones de Maxwell requiere, en primer lugar, su formulación en un dominio discreto tanto en el espacio como en el tiempo. Esta discretización es un paso fundamental en el método PIC, pues permite representar los campos electromagnéticos en una malla computacional y calcular su evolución temporal de forma autoconsistente con la dinámica de las partículas. La forma en que se lleve a cabo este proceso depende directamente del esquema numérico adoptado, el cual determina la precisión, estabilidad y coste computacional de la simulación.

A lo largo de los años, y en particular en el desarrollo del método PIC, se han propuesto diferentes enfoques para discretizar las ecuaciones de Maxwell [110, 117]. Entre ellos, destacan los métodos basados en diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD), que suelen ser simples de implementar y presentan un bajo coste computacional, aunque con limitaciones en la representación de geometrías complejas [118]. Por otra parte, los métodos de volúmenes finitos (FV) se caracterizan por ser esquemas conservativos por construcción y muy versátiles para manejar geometrías irregulares [119], pero resultan más costosos computacionalmente que los métodos FDTD cuando se emplean mallas regulares. Finalmente, los métodos espectrales ofrecen una alta precisión en problemas con soluciones suaves y dominios periódicos, aunque conllevan un mayor coste de implementación y presentan dificultades para tratar condiciones de frontera complejas [120]. En general, cada técnica numérica posee ventajas particulares que la hacen sobresalir frente a otras, así como limitaciones que pueden hacerla menos adecuada para ciertos problemas. La elección depende en gran medida de las características específicas del caso de estudio, como la geometría y las condiciones de frontera.

Dentro de los métodos de diferencias finitas, el esquema propuesto por Kane Yee en 1966 se ha consolidado como una de las técnicas más empleadas en simulaciones PIC electromagnéticas [114]. Su principal virtud radica en la disposición

escalonada de los componentes de los campos eléctrico y magnético en la malla, lo que permite una representación natural de las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial y el cumplimiento exacto, dentro de los límites de precisión numérica, de las leyes de Gauss y de la divergencia nula del campo magnético. Además, presenta un bajo coste computacional en mallas cartesianas regulares. Entre sus limitaciones se encuentran la dificultad para representar con exactitud geometrías curvilíneas y la necesidad de cumplir estrictamente la condición de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) para garantizar la estabilidad temporal. No obstante, sus ventajas como precisión, simplicidad de implementación y amplia validación en la literatura, superan ampliamente estas restricciones, lo que motiva su adopción en el presente trabajo para la discretización de las ecuaciones de Maxwell. Este esquema resulta especialmente adecuado para problemas formulados en coordenadas cartesianas, como es el caso de la simulación de la evolución de campos en guías rectangulares de microondas.

El esquema de Yee se centra en la discretización explícita de las dos ecuaciones de Maxwell que contienen rotacionales: la ley de Faraday (Ec. A.4) y la ley de Ampère-Maxwell (Ec. A.5). Por su parte, las ecuaciones de Maxwell asociadas a las divergencias, (Ec. A.2) y (Ec. A.3), no se resuelven de forma explícita en este esquema. En lugar de ello, se cumplen de manera implícita siempre que las condiciones iniciales satisfagan dichas relaciones y el cálculo de la densidad de carga y corriente respete la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (\text{B.1})$$

lo que garantiza la compatibilidad entre las fuentes y la evolución de los campos [121]. Bajo estas condiciones, las leyes de Gauss para el campo eléctrico y la divergencia nula del campo magnético se preservan numéricamente de un paso temporal a otro, dentro de los límites impuestos por la precisión de la aritmética y los errores de redondeo.

B.1.1 Discretización temporal

Para la evolución temporal, según el esquema de Yee, se adopta un esquema escalonado de tipo *leapfrog*, que emplea diferencias finitas centradas de segundo orden para discretizar las derivadas temporales. En este esquema se construyen dos mallas temporales, ambas con paso uniforme Δt , pero desfasadas entre sí en medio paso temporal, $\Delta t/2$ [110, 114]. Si se emplea el índice n para denotar el tiempo, una de estas mallas se representa con índices enteros $(0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots)$, mientras que la otra utiliza índices semienteros $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n + \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}, \dots)$. En este marco, la ecuación de evolución del campo magnético (Ec. A.4) se evalúa en instantes semienteros $t^{n+\frac{1}{2}}$,

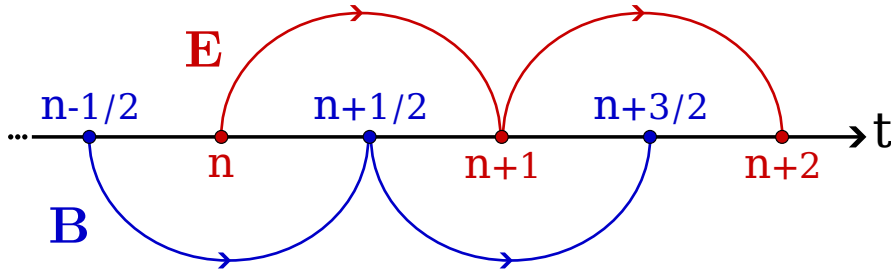
mientras que la ecuación de evolución del campo eléctrico (Ec. A.5) se evalúa en instantes enteros t^n . Así, las ecuaciones discretizadas adimensionales quedan expresadas como,

$$\frac{\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\nabla \times \mathbf{E}^n, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} = \nabla \times \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.3})$$

Este esquema permite calcular el campo magnético $\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}$ a partir de su valor en el paso previo $\mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}$ y del rotacional del campo eléctrico en t^n . Una vez obtenido $\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}$, se utiliza su rotacional junto con \mathbf{E}^n y la densidad de corriente $\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}$ para actualizar el campo eléctrico a \mathbf{E}^{n+1} . Es importante destacar que la evolución de ambos campos está acoplada: el cálculo de \mathbf{E} en un instante dado requiere conocer \mathbf{B} en el medio paso anterior, y viceversa. Por esta razón, el campo magnético avanza en tiempos semienteros, mientras que el campo eléctrico lo hace en tiempos enteros, aunque ambos evolucionan con el mismo paso temporal Δt . Esta disposición escalonada en el tiempo se ilustra en la Figura 35, donde se observan las dos mallas temporales homogéneas desfasadas en $\Delta t/2$, con el campo eléctrico definido en los tiempos enteros y el campo magnético en los tiempos semienteros.

Figura 35: Esquema de la malla temporal escalonada (leapfrog) utilizada en el método de Yee. El campo eléctrico \mathbf{E} se actualiza en instantes enteros t^n , mientras que el campo magnético \mathbf{B} se evalúa en instantes semienteros $t^{n+1/2}$. Esta disposición permite un acoplamiento estable y preciso entre ambas ecuaciones de Maxwell.



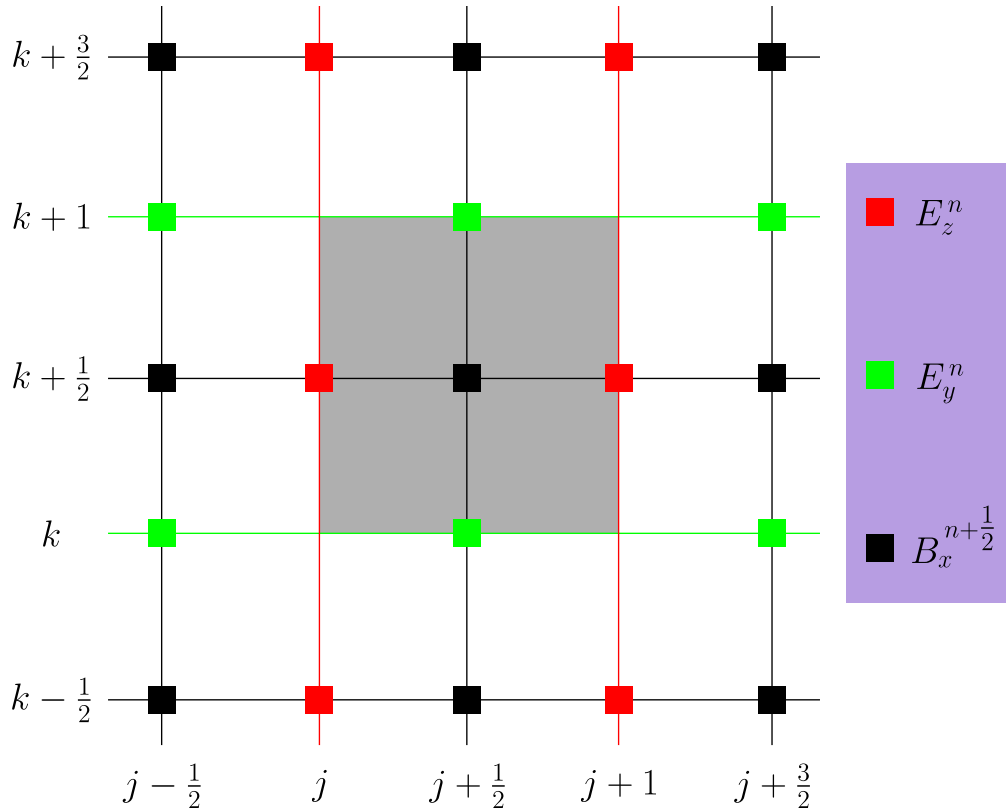
B.1.2 Discretización espacial

La discretización espacial en el esquema de Yee se fundamenta en una malla escalonada, conceptualmente análoga a la malla temporal descrita previamente, y en la aplicación de diferencias finitas centradas de segundo orden [110, 114]. En este tipo de malla, cada componente de los campos eléctrico y magnético se ubica en posiciones

específicas dentro de la celda, de modo que cada una de ellas se asocia a su propia submalla, desplazada respecto de las demás en medios pasos espaciales. Este diseño permite que las derivadas espaciales requeridas por los operadores rotacionales en las ecuaciones de Maxwell se calculen utilizando valores situados de forma natural a ambos lados del punto de evaluación, preservando la simetría de las diferencias finitas. Esto contribuye tanto a la estabilidad numérica como a la precisión del método. En el presente trabajo se consideran mallas homogéneas, de manera que la distancia entre dos nodos consecutivos en cada dirección es constante: Δx a lo largo de x , Δy a lo largo de y y Δz a lo largo de z . Los índices (i, j, k) se reservan para identificar posiciones en las direcciones (x, y, z) , respectivamente.

Para ilustrar el procedimiento, considérese la componente x de la ley de Faraday discretizada temporalmente (Ec. B.2). Si esta se evalúa en el punto de malla $(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}})$, la derivada parcial respecto a y involucra valores de E_z situados en j y $j + 1$, mientras que la derivada parcial respecto a z emplea valores de E_y en k y $k + 1$, tal como se esquematiza en la Figura 36.

Figura 36: Esquema 2D para la actualización de B_x en el esquema de Yee en un plano (y, z) con índice i fijo. $B_x^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ se obtiene a partir de diferencias finitas centradas de E_z^n en y y E_y^n en z , de acuerdo con la Ec. (B.4).



Esto conduce a la expresión de evolución de la componente x del campo magnético,

$$\begin{aligned}
 B_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) &= B_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} [E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})] \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta z} [E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)].
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

De forma análoga, la componente en y de la ley de Faraday evaluada en $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, z_{k+\frac{1}{2}})$ se actualiza como,

$$\begin{aligned}
 B_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) &= B_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta z} [E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k)] \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} [E_z^n(i + 1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})],
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

y finalmente, la componente z evaluada en $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}, z_k)$ se calcula mediante:

$$\begin{aligned}
 B_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) &= B_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} [E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)] \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta y} [E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1, k) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k)].
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

La misma lógica se aplica para las componentes del campo eléctrico a partir de la ley de Ampère-Maxwell discretizada temporalmente (Ec. B.3). Por ejemplo, la componente x , evaluada en $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, z_k)$, se actualiza como,

$$\begin{aligned}
 E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) &= E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[B_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - B_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k) \right] \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[B_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - B_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}) \right] \\
 &\quad - \Delta t J_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k),
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

la componente y , evaluada en $(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, z_k)$, evoluciona según,

$$\begin{aligned}
E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) &= E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \\
&+ \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[B_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - B_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) \right] \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[B_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - B_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \right] \\
&- \Delta t J_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k),
\end{aligned} \tag{B.8}$$

y por último, la componente z , evaluada en $(x_i, y_j, z_{k+\frac{1}{2}})$, se actualiza mediante,

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}(i, j, k + \frac{1}{2}) &= E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) \\
&+ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[B_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - B_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \right] \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[B_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - B_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \right] \\
&- \Delta t J_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}).
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Es importante destacar que el esquema de Yee es, por construcción, un método explícito, esto significa que para calcular el valor de una componente de campo en un instante posterior y en un punto de malla específico, únicamente se requiere conocer: (i) su valor actual en ese mismo punto, y (ii) los valores de las componentes del otro campo (eléctrico o magnético ya calculados) en los nodos inmediatamente adyacentes en el espacio, evaluados en medio paso temporal de diferencia. Esta dependencia estrictamente local implica que cada actualización no necesita información proveniente de toda la malla, sino sólo de un reducido vecindario definido por el ancho del operador diferencial utilizado, $\Delta x \Delta y \Delta z$ en este caso, ya que empleó diferencias finitas centradas de segundo orden en mallas escalonadas.

Esta característica tiene dos consecuencias relevantes. En primer lugar, la implementación resulta conceptualmente sencilla y modular, ya que cada nodo puede ser actualizado de forma independiente una vez que los valores del otro campo en su vecindad han sido calculados. En segundo lugar, el método es altamente compatible con técnicas de paralelización, tanto en arquitecturas de memoria compartida (*multithreading* en CPU) como en memoria distribuida (paralelización mediante MPI) e incluso en arquitecturas de cómputo masivamente paralelo como las GPU. En estos entornos, la naturaleza local de las operaciones reduce el costo de las comunicaciones

entre procesos.

Adicionalmente, esta estructura local y explícita facilita la aplicación de técnicas de optimización específicas, tales como el almacenamiento contiguo de datos en memoria para mejorar la localidad espacial en caché, el *loop unrolling* para reducir la sobrecarga de control en los bucles, o el uso de instrucciones vectoriales (*SIMD*) para actualizar simultáneamente múltiples nodos. Todo esto convierte al esquema de Yee en una herramienta no sólo robusta desde el punto de vista numérico, sino también eficiente desde la perspectiva computacional.

B.1.3 Condición de estabilidad de Courant–Friedrichs–Lewy

Un aspecto fundamental en la implementación del método de Yee es el cumplimiento de la condición de estabilidad de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL), la cual establece un límite superior para el paso temporal Δt en función de los pasos espaciales y de la velocidad de propagación de las ondas en el medio [122]. Este criterio asegura que la información numérica no se propague más rápido que la información física, previniendo así la aparición de inestabilidades numéricas.

En términos generales, para simulaciones tridimensionales, la condición CFL aplicada al método de Yee se expresa como

$$c \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}, \quad (\text{B.10})$$

donde c es la velocidad de la luz en el medio [118]. Esta relación impone que el frente de onda numérico no avance más de una celda de malla en un único paso temporal. En el caso particular de mallas isotrópicas, donde $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$, la Ec. (B.10) se simplifica a

$$c \Delta t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{3}}. \quad (\text{B.11})$$

En este escenario, el paso temporal suele definirse como

$$\Delta t = \kappa_c \left(\frac{\Delta}{\sqrt{3} c} \right), \quad (\text{B.12})$$

donde κ_c es el coeficiente de Courant, cuyo valor debe estar en el rango $0 < \kappa_c \leq 1$. Para mallas isotrópicas, el valor $\kappa_c = 0.5$ se conoce comúnmente como el “número mágico” del método de Yee. Este valor no es estrictamente obligatorio, pero constituye una elección conservadora y ampliamente utilizada, ya que ofrece un margen de

estabilidad robusto en diversas simulaciones electromagnéticas y, en algunos casos, facilita el acoplamiento del esquema con técnicas adicionales de filtrado para reducir y controlar el ruido numérico.

Es importante diferenciar los conceptos de estabilidad y precisión. La condición CFL garantiza la estabilidad, es decir, evita que los errores numéricos crezcan exponencialmente durante la integración temporal. Sin embargo, un esquema estable no es necesariamente preciso. La precisión del método de Yee se debe a su formulación mediante diferencias finitas centradas de segundo orden, tanto en espacio como en tiempo. Esto implica que el error de truncamiento decrece proporcionalmente a $(\Delta t)^2$ y $(\Delta)^2$, siempre que Δt y Δ sean lo suficientemente pequeños para resolver adecuadamente las escalas físicas relevantes. En consecuencia, el esquema aquí presentado es de segundo orden en precisión y es estable siempre que se cumpla la condición CFL descrita anteriormente.

Con lo anterior, se cuenta con la formulación completa del método de Yee para la resolución numérica de las ecuaciones de Maxwell en el contexto de simulaciones Particle-In-Cell. Este esquema, ampliamente utilizado por su simplicidad, estabilidad y precisión de segundo orden, constituye la base sobre la que se implementarán los procedimientos de actualización de campos en este trabajo. La solución de la dinámica de las partículas, así como las condiciones de frontera tanto para campos y partículas se discutirán en las siguientes secciones.

B.2 Integración de las ecuaciones de movimiento

Como se discutió en la sección anterior, la dinámica de cada superpartícula (SP) en una simulación Particle-in-Cell está gobernada por la ecuación relativista de Newton–Lorentz, Ec. (A.14) y Ec. (A.15), obtenidas a partir del balance de los primeros momentos de la ecuación de Vlasov. La resolución numérica de estas ecuaciones exige integrar simultáneamente las contribuciones eléctrica y magnética de la fuerza de Lorentz, preservando la estabilidad, la precisión y la conservación de magnitudes físicas relevantes. Existen diversos algoritmos para este fin, como el esquema leapfrog directo, el método de Vay o el de Higuera–Cary; sin embargo, el esquema de Boris se ha consolidado como uno de los más eficientes y robustos [113, 123, 124]. Su popularidad radica en que combina segundo orden de precisión temporal, preservación del volumen en el espacio de fases y una estructura que se acopla de forma natural al método de Yee utilizado en la actualización de los campos. Esta compatibilidad asegura que campos y partículas avancen en el tiempo

con la misma precisión y consistencia numérica, minimizando errores de interpolación y manteniendo la coherencia física global de la simulación.

El esquema de Boris comparte la filosofía del integrador de Yee, ya que emplea una disposición *leapfrog* en el tiempo: las posiciones y los momentos se definen en mallas temporales uniformes, desfasadas medio paso temporal $\Delta t/2$. En este marco, la ecuación de evolución de la posición, Ec. (A.14), se evalúa en el instante $t^{n+\frac{1}{2}}$, de modo que el vector de posición \mathbf{r}_{sp} avance en la malla de índices enteros, mientras que la Ec. (A.15) se evalúa en t^n , haciendo que el momento \mathbf{p}_{sp} y, por tanto, la velocidad \mathbf{v}_{sp} dada por $\mathbf{p}_{sp} = \gamma m_{sp} \mathbf{v}_{sp}$, evolucione sobre la malla semientera, tal como sigue,

$$\frac{\mathbf{p}_{sp}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{p}_{sp}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = q_{sp} \left(\mathbf{E}_{sp}^n + \mathbf{v}_{sp}^n \times \mathbf{B}_{sp}^n \right), \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\mathbf{r}_{sp}^{n+1} - \mathbf{r}_{sp}^n}{\Delta t} = \mathbf{v}_{sp}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.14})$$

En la Ec. (B.13) se requiere el valor de \mathbf{v}_{sp}^n , que se obtiene mediante el promedio

$$\mathbf{v}_{sp}^n = \frac{\mathbf{p}_{sp}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{p}_{sp}^{n-\frac{1}{2}}}{2 m_{sp} \gamma^n}. \quad (\text{B.15})$$

Esta formulación implicaría, en principio, un esquema no explícito. Sin embargo, la propuesta original de Boris y Bunemann introduce una descomposición en tres pasos que separa los efectos eléctricos y magnéticos, calculando cada uno en instantes temporales diferentes, de modo que el método se convierte en explícito. El procedimiento es el siguiente:

1. Primero, se empieza calculando un primer aporte o contribución del campo eléctrico, conocido en la literatura como la primera “media” aceleración,

$$\mathbf{p}^- = \mathbf{p}_{sp}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} q_{sp} \mathbf{E}_{sp}^n. \quad (\text{B.16})$$

2. Seguido a esto, se obtiene el aporte de la fuerza magnética. Esto es en esencia, una rotación, donde primero se calcula un “giro parcial”, dado por,

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}^- + (\mathbf{p}^- \times \mathbf{t}), \quad (\text{B.17})$$

donde el vector \mathbf{t} se define como,

$$\mathbf{t} = \frac{q_{sp} \mathbf{B}_{sp}^n \Delta t}{m_{sp} \gamma^- \frac{2}{2}}, \quad \text{con} \quad \gamma^- = \sqrt{1 + \frac{\|\mathbf{p}^-\|^2}{(mc)^2}}, \quad (\text{B.18})$$

y con este, calcular el giro corregido,

$$\mathbf{p}^+ = \mathbf{p}^- + \mathbf{p}' \times \mathbf{s}, \quad \text{siendo} \quad \mathbf{s} = \frac{2\mathbf{t}}{1 + \|\mathbf{t}\|^2}. \quad (\text{B.19})$$

3. Finalmente, el cálculo se completa con la segunda contribución ó “media” aceleración, realizada por el campo eléctrico:

$$\mathbf{p}_{sp}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{p}^+ + \frac{\Delta t}{2} q_{sp} \mathbf{E}_{sp}^n. \quad (\text{B.20})$$

4. Lo anterior, permite obtener la evolución de los momentos y velocidades de las superpartículas y es en realidad el paso clave en el esquema de Boris, pues la integración de las posiciones se obtiene de manera directa según la Ec. (B.14),

$$\mathbf{r}_{sp}^{n+1} = \mathbf{r}_{sp}^n + \Delta t \frac{\mathbf{p}_{sp}^{n+\frac{1}{2}}}{m_{sp} \gamma^{n+\frac{1}{2}}}, \quad (\text{B.21})$$

donde,

$$\gamma^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + \frac{\|\mathbf{p}_{sp}^{n+\frac{1}{2}}\|^2}{(mc)^2}}. \quad (\text{B.22})$$

El método de Boris presenta propiedades numéricas destacables. Por ejemplo, en ausencia de campo eléctrico y bajo un campo magnético uniforme, conserva exactamente la magnitud de \mathbf{p} y, por ende, la energía, reduciendo al mínimo la deriva numérica. Asimismo, preserva el volumen en el espacio de fases, lo que limita el calentamiento numérico espurio característico de integradores no simpléticos. Además, es un método con precisión de segundo orden en el tiempo. Aunque es robusto, la estabilidad práctica requiere que la rotación giromagnética cumpla $\Omega_c \Delta t \lesssim \pi$ en el régimen no relativista, con $\Omega_c = |q|B/m$, sin perder de vista el cumplimiento de la condición CFL electromagnética impuesta por el método de Yee para la solución numérica del campo electromagnético presentada en la sección anterior. Finalmente, es importante destacar que en el método de Boris las cantidades \mathbf{E}_{sp}^n y \mathbf{B}_{sp}^n corresponden a los campos electromagnéticos promedio experimentados por

cada superpartícula en la posición \mathbf{r}_{sp}^n , por lo que la obtención precisa de estos campos efectivos constituye un paso esencial, que será abordado en la siguiente sección.

B.3 Interpolación y unificación de campos

En el método de Yee, cada componente del campo electromagnético se almacena en posiciones espaciales distintas dentro de la celda, desplazadas medio paso en una o varias direcciones con respecto a un sistema de índices enteros (i, j, k) . Esta disposición escalonada es clave para la estabilidad y precisión del esquema FDTD, pero implica que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} no están definidos simultáneamente en los mismos puntos del espacio. Ahora bien, para obtener los valores efectivos \mathbf{E}_{sp}^n y \mathbf{B}_{sp}^n que intervienen en la integración de la dinámica de las superpartículas, es necesario estimar los campos en la posición real de cada SP mediante un proceso de interpolación o ponderación dado por la Ec. (A.16). Este cálculo puede abordarse de dos maneras: (i) unificando previamente todas las componentes del campo electromagnético en una malla común con índices enteros, de la cual se interpolan posteriormente los valores hacia cada SP, o (ii) interpolando directamente desde las posiciones escalonadas originales de cada componente. La primera opción ofrece un marco más homogéneo para las operaciones posteriores y simplifica la implementación computacional, mientras que la segunda evita interpolaciones intermedias y reduce el almacenamiento adicional, a costa de una mayor complejidad en el código de interpolación. En el presente trabajo se adopta el primer enfoque, dado que ofrece en general un marco simplificado en la implementación computacional y permite mantener la consistencia espacial en el tratamiento conjunto de \mathbf{E} y \mathbf{B} . A partir de esta idea, se presentará primero la formulación empleada para calcular la ponderación final de los campos efectivos sobre cada superpartícula y posteriormente se presenta la estrategia de unificación del campo electromagnético en la malla común.

B.3.1 Ponderación de campos sobre cada superpartícula

Para calcular el campo promedio sobre cada superpartícula no basta con conocer su posición central \mathbf{r}_{sp} ; es igualmente esencial especificar el factor de forma $S_{\mathbf{r}}$, tal como lo establece la formulación del método PIC en la Ec. (A.16). En este trabajo, el código desarrollado para simular el sistema bajo estudio emplea como factor de forma la primera función *b-spline*, b_0 . Esta elección responde a que b_0 no solo es la función *b-spline* más simple y por ende conduce a un esquema de interpolación directo, sino que también es una de las más utilizadas en simulaciones PIC debido a su excelente

rendimiento computacional [110, 112, 116].

Este criterio de simplicidad y eficiencia está en completa sintonía con las estrategias adoptadas en la implementación de la resolución numérica de las ecuaciones de Maxwell mediante el esquema de Yee, así como en la integración de la dinámica de las superpartículas con el método de Boris. Otro aspecto relevante es que el tamaño espacial de las superpartículas, Δ^{sp} , puede ser en principio arbitrario: no debe ser tan grande como para comprometer la precisión de las simulaciones, ni tan pequeño como para afectar de forma negativa la eficiencia computacional. Por esta razón, aunque no es un requisito estricto, es una práctica común, y considerada óptima en muchos casos, elegir Δ^{sp} igual a los pasos de malla espacial, así que $\Delta_x^{sp} = \Delta_x$, $\Delta_y^{sp} = \Delta_y$ y $\Delta_z^{sp} = \Delta_z$. Esta decisión asegura que la discretización espacial de las ecuaciones de campo y la discretización del espacio de fases en la ecuación de Vlasov estén directamente acopladas, manteniendo así la consistencia numérica del método.

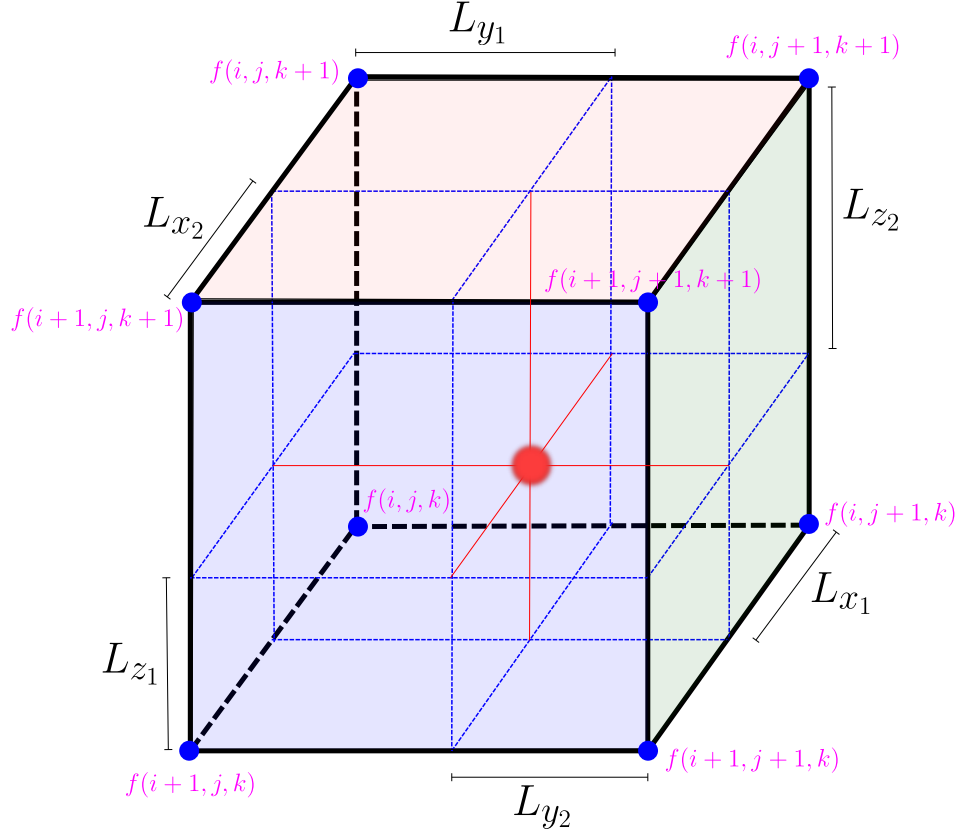
En este contexto, si los campos se conocen en los nodos de la malla común (i, j, k) , y se asume que el valor del campo es constante dentro de cada celda e igual a su valor en el nodo, la Ec. (A.16) conduce naturalmente a que el esquema de interpolación esté dado por la función *b-spline* de orden inmediatamente superior al utilizado para definir la forma de la superpartícula. Al emplear b_0 como función de forma, la interpolación correspondiente es b_1 , que se traduce en un esquema de interpolación trilineal, el cual consiste en identificar la celda de la malla común que contiene a la superpartícula y evaluar su posición relativa dentro de ella. A partir de esta posición, se calculan las fracciones de distancia a lo largo de cada eje, ilustradas en la Fig. 37, y actúan como factores de peso para combinar con los valores del campo en los ocho vértices de la celda, tal como sigue,

$$f(\mathbf{r}_{sp}^n) = \frac{1}{\Delta_x \Delta_y \Delta_z} \left[\begin{aligned} & f(i, j, k) L_{x_2} L_{y_2} L_{z_2} + f(i+1, j, k) L_{x_1} L_{y_2} L_{z_2} + \\ & f(i+1, j+1, k) L_{x_1} L_{y_1} L_{z_2} + f(i, j+1, k) L_{x_2} L_{y_1} L_{z_2} + \\ & f(i, j, k+1) L_{x_2} L_{y_2} L_{z_1} + f(i+1, j, k+1) L_{x_1} L_{y_2} L_{z_1} + \\ & f(i+1, j+1, k+1) L_{x_1} L_{y_1} L_{z_1} + f(i, j+1, k+1) L_{x_2} L_{y_1} L_{z_1} \end{aligned} \right] \quad (\text{B.23})$$

Este resultado es un promedio ponderado, donde el peso de cada vértice está determinado por el producto de las distancias relativas en las tres direcciones. Este

procedimiento asegura una transición continua del valor del campo entre celdas.

Figura 37: Esquema de interpolación trilineal en una celda de la malla común. Los puntos azules indican los valores del campo en los ocho vértices de la celda representados por la función f , mientras que la esfera roja indica la posición de la superpartícula dentro de la celda. Las fracciones de distancia a lo largo de cada eje determinan los pesos asociados a cada vértice, de modo que el valor del campo en la posición de la superpartícula se obtiene como un promedio ponderado de dichos valores nodales.



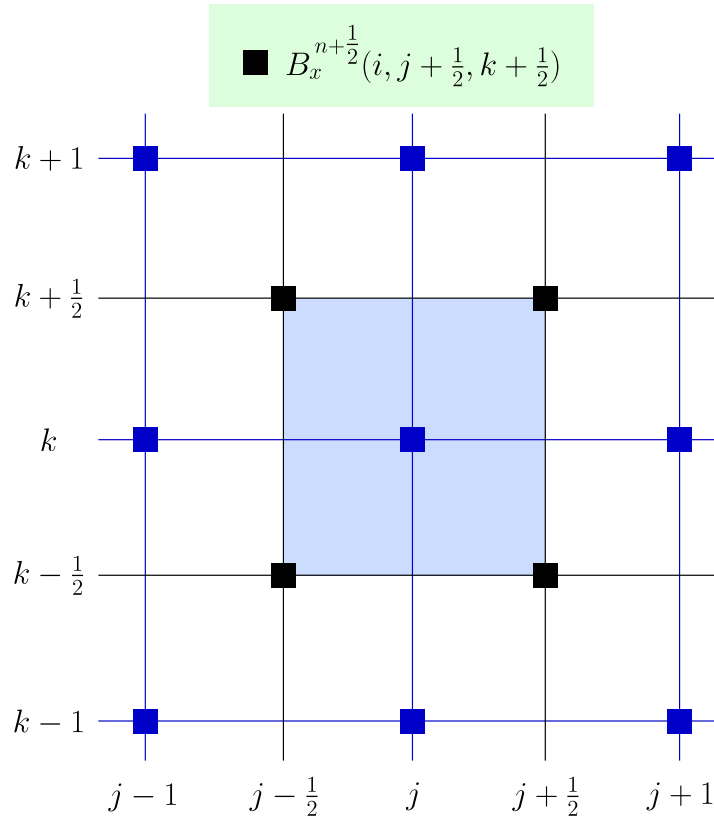
B.3.2 Proyección de campos sobre la malla común

Ahora bien, la ponderación del campo sobre cada SP, presentada en la Ec.(B.23), exige proyectar todas las componentes de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} sobre una malla común con índices enteros, tanto en el espacio (i, j, k) como en el tiempo (n) . Este último es estrictamente necesario, requerido por el método de Boris en la evolución de los momentos (ver Ec. (B.13)). A modo ilustrativo, se detalla el procedimiento para la componente B_x , que en el esquema de Yee presentado previamente se encuentra definida en tiempos semienteros; no obstante, es inmediato notar que

$$B_x^n = \frac{1}{2} (B_x^{n+\frac{1}{2}} + B_x^{n-\frac{1}{2}}). \quad (\text{B.24})$$

En cuanto a la ubicación espacial, B_x se conoce en $(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$, por ello, a lo largo del índice i no se requiere ninguna operación, ya coincide con la malla objetivo, y el enfoque se centra en el plano (y, z) . La Fig. 38 muestra en negro los nodos de la malla donde vive B_x y en azul la malla objetivo; se resalta el punto (j, k) y los cuatro nodos desfasados que se emplean para proyectar B_x al punto deseado.

Figura 38: Esquema de unificación de B_x en malla común. Los puntos negros indican los nodos de la malla escalonada de Yee donde vive B_x ; la malla azul corresponde a la malla objetivo con índices enteros (i, j, k) . El valor $B_x^n(i, j, k)$ se obtiene mediante interpolación bilineal en (y, z) de los cuatro nodos desfasados y promedio temporal entre $n \pm \frac{1}{2}$.



En este caso, la interpolación bilineal espacial combinada con el promedio temporal conduce al siguiente promedio aritmético,

$$\begin{aligned}
 B_x^n(i, j, k) = \frac{1}{8} & \left[B_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + B_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + \right. \\
 & B_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) + B_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) + \\
 & B_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + B_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + \\
 & \left. B_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) + B_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) \right].
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

La misma idea se aplica a las demás componentes del campo magnético, de modo que,

$$\begin{aligned}
B_y^n(i, j, k) = \frac{1}{8} & \left[B_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) + B_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) + \right. \\
& B_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}) + B_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}) + \\
& B_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) + B_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) + \\
& \left. B_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}) + B_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}) \right], \tag{B.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_z^n(i, j, k) = \frac{1}{8} & \left[B_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) + B_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) + \right. \\
& B_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k) + B_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k) + \\
& B_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) + B_z^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) + \\
& \left. B_z^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k) + B_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k) \right]. \tag{B.27}
\end{aligned}$$

Para unificar el campo eléctrico, las expresiones resultan más sencillas. Por un lado, el esquema de Yee hace que \mathbf{E} evolucione temporalmente en instantes enteros, por lo que no se requiere interpolación temporal. Por otro lado, cada componente espacial de \mathbf{E} está desfasada medio paso sólo en uno de los ejes respecto de la malla objetivo, de modo que la proyección se reduce a una interpolación unidimensional. En consecuencia, el valor en la malla común (i, j, k) se obtiene promediando los dos nodos más cercanos a lo largo del eje correspondiente,

$$E_x^n(i, j, k) = \frac{1}{2} \left[E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) + E_x^n(i - \frac{1}{2}, j, k) \right], \tag{B.28}$$

$$E_y^n(i, j, k) = \frac{1}{2} \left[E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) + E_y^n(i, j - \frac{1}{2}, k) \right], \tag{B.29}$$

$$E_z^n(i, j, k) = \frac{1}{2} \left[E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^n(i, j, k - \frac{1}{2}) \right]. \tag{B.30}$$

En resumen, la unificación de las componentes de \mathbf{E} y \mathbf{B} en una malla común, junto con la aplicación de la interpolación trilineal basada en el factor de forma seleccionado, garantiza que cada superpartícula experimente un campo efectivo coherente con la discretización espacial empleada en la simulación. Este procedimiento mantiene la consistencia numérica entre el avance de campos y partículas, y constituye el último paso previo a la evaluación de las fuerzas de Lorentz que intervienen en la integración de las ecuaciones de movimiento.

B.4 Asignación de carga y corriente

La asignación de las densidades de carga y corriente en las simulaciones PIC consiste en distribuir la carga de cada superpartícula sobre los nodos de la malla en función de su posición y de la función de forma $S_{\mathbf{r}}$ utilizada, tal como se presentó en la Ec. (A.6) y Ec. (A.7). Sin embargo, si la corriente \mathbf{J} se calcula de forma independiente a la variación temporal de la densidad de carga ρ , la ecuación de continuidad puede no cumplirse exactamente, haciendo que el esquema de Yee propuesto para la evolución de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} introduzca errores numéricos. Para evitarlo, hay que implementar un algoritmo que preserve el cumplimiento de la ecuación de continuidad durante toda la simulación [109].

B.4.1 Esquema Zigzag

En las simulaciones PIC electromagnéticas, la asignación correcta de carga y corriente es un aspecto fundamental para garantizar la calidad y consistencia de los resultados numéricos. En particular, el cálculo preciso de la densidad de corriente es crítico, ya que esta magnitud interviene directamente en el método de Yee. En dicho método, la ley de Gauss no se resuelve de forma explícita; su cumplimiento se garantiza si la ecuación de continuidad de la carga se satisface en todo instante de la simulación.

Entre los algoritmos propuestos en la literatura para preservar esta propiedad, el método de Esirkepov destaca por ser uno de los más completos: asegura el cumplimiento de la ecuación de continuidad con precisión de error de máquina y es aplicable a cualquier función de forma utilizada para describir la distribución espacial de las superpartículas [125]. Sin embargo, estas ventajas implican una implementación más compleja y un mayor coste computacional, especialmente por la necesidad de múltiples sentencias condicionales (`if`).

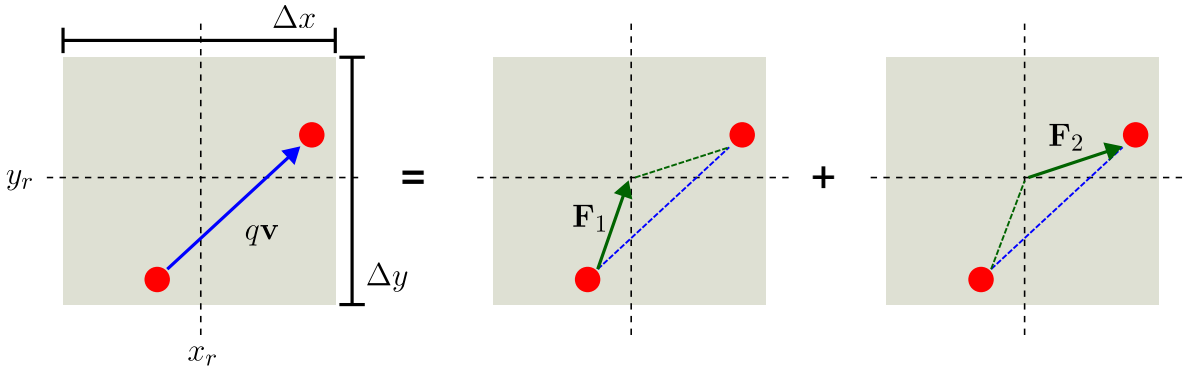
En contraste, el esquema propuesto por T. Umeda en 2003, conocido como *esquema zigzag*, elimina por completo el uso de sentencias condicionales, lo que incrementa la velocidad de cálculo manteniendo una elevada precisión [115]. Su limitación es que solo es aplicable al caso particular en que la forma de la superpartícula está definida por la función *b-spline* de orden cero, b_0 , lo que, sin embargo, coincide con la elección adoptada en este trabajo; así que la justificación para emplear el esquema zigzag en este estudio radica en su simplicidad y eficiencia. La idea principal parte del hecho de que una superpartícula puede atravesar, en una sola iteración temporal, de una celda a otra. Este desplazamiento está sujeto a la

restricción de que, en cada dirección cartesiana, la distancia recorrida no exceda el tamaño de celda,

$$\Delta t v_{x_{sp}}^{n+\frac{1}{2}} < \Delta x, \quad \Delta t v_{y_{sp}}^{n+\frac{1}{2}} < \Delta y, \quad \Delta t v_{z_{sp}}^{n+\frac{1}{2}} < \Delta z, \quad (\text{B.31})$$

condición que se cumple automáticamente si el criterio de Courant se respeta en la integración de los campos mediante el esquema de Yee. En este método se calculan los flujos de carga a través de las caras de las celdas cruzadas por la superpartícula. Para ello, la trayectoria rectilínea de la SP, desde su posición inicial (x_1, y_1, z_1) hasta la final (x_2, y_2, z_2) en cada paso temporal, se descompone en dos desplazamientos intermedios definidos por una posición de relevo (x_r, y_r, z_r) , lo que produce una trayectoria en forma de “zigzag”. Este procedimiento es, en conjunto, equivalente al desplazamiento real, pero facilita el cálculo de los flujos de carga sin pérdida de precisión. La Fig. 39 muestra, en un caso bidimensional, un ejemplo de la descomposición zigzag, con el fin de facilitar la comprensión de la idea central del método. La descripción completa del algoritmo, junto con sus casos particulares y demostraciones, puede consultarse en la publicación original. En lo que sigue, se exponen únicamente los pasos esenciales.

Figura 39: Esquema ilustrativo de la descomposición zigzag en 2D para el cálculo de la densidad de corriente \mathbf{J} . A la izquierda se muestra el desplazamiento rectilíneo original de la superpartícula $q\mathbf{v}$ en una celda de dimensiones $\Delta x \times \Delta y$. A la derecha, las trayectorias alternas que se construyen mediante una posición intermedia de relevo. Cada segmento alterno tiene asociado sus respectivos flujos de carga F_1 y F_2 .



En el marco de la implementación del esquema *zigzag*, se considera una partícula que se desplaza desde la posición inicial (x_1, y_1, z_1) hasta la posición final (x_2, y_2, z_2) . A partir de cada posición se determinan los índices de celda asociados (i_1, j_1, k_1) y (i_2, j_2, k_2) , donde, por ejemplo, $i_1 = \text{floor}(x_1/\Delta x)$, y de forma análoga para los demás índices. Con esta información, se define el punto de relevo intermedio. Así, la coordenada

x_r se obtiene como

$$x_r = \text{mín} \left[\text{mín}(i_1 \Delta x, i_2 \Delta x) + \Delta x, \text{máx} \left(\text{máx}(i_1 \Delta x, i_2 \Delta x), \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right], \quad (\text{B.32})$$

y de manera idéntica se calculan y_r y z_r . A continuación, el movimiento se descompone en dos tramos, calculando los respectivos flujos de carga, $\mathbf{F}_1 \equiv (F_{x1}, F_{y1}, F_{z1})$ y $\mathbf{F}_2 \equiv (F_{x2}, F_{y2}, F_{z2})$ mediante

$$\begin{aligned} F_{x1} &= q_{sp} \frac{x_r - x_1}{\Delta t}, & F_{x2} &= q_{sp} \frac{x_2 - x_r}{\Delta t} = q_{sp} v_x^{n+\frac{1}{2}} - F_{x1}, \\ F_{y1} &= q_{sp} \frac{y_r - y_1}{\Delta t}, & F_{y2} &= q_{sp} \frac{y_2 - y_r}{\Delta t} = q_{sp} v_y^{n+\frac{1}{2}} - F_{y1}, \\ F_{z1} &= q_{sp} \frac{z_r - z_1}{\Delta t}, & F_{z2} &= q_{sp} \frac{z_2 - z_r}{\Delta t} = q_{sp} v_z^{n+\frac{1}{2}} - F_{z1}. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Para determinar la contribución de cada flujo a los nodos de la malla, se emplean las funciones de peso,

$$\begin{aligned} W_{x1} &= \frac{x_1 + x_r}{2} - i_1, & W_{x2} &= \frac{x_r + x_2}{2} - i_2, \\ W_{y1} &= \frac{y_1 + y_r}{2} - j_1, & W_{y2} &= \frac{y_r + y_2}{2} - j_2, \\ W_{z1} &= \frac{z_1 + z_r}{2} - k_1, & W_{z2} &= \frac{z_r + z_2}{2} - k_2. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Finalmente, cada componente de la densidad de corriente en el instante $n + \frac{1}{2}$ y respectivos puntos de malla se calculan como:

$$\begin{aligned} J_x^{n+\frac{1}{2}}(i_l + \frac{1}{2}, j_l, k_l) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{xl} (1 - W_{yl}) (1 - W_{zl}), \\ J_x^{n+\frac{1}{2}}(i_l + \frac{1}{2}, j_l + 1, k_l) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{xl} W_{yl} (1 - W_{zl}), \\ J_x^{n+\frac{1}{2}}(i_l + \frac{1}{2}, j_l, k_l + 1) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{xl} (1 - W_{yl}) W_{zl}, \\ J_x^{n+\frac{1}{2}}(i_l + \frac{1}{2}, j_l + 1, k_l + 1) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{xl} W_{yl} W_{zl}. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

$$\begin{aligned}
 J_y^{n+\frac{1}{2}}(i_l, j_l + \frac{1}{2}, k_l) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{yl}(1 - W_{xl})(1 - W_{zl}), \\
 J_y^{n+\frac{1}{2}}(i_l + 1, j_l + \frac{1}{2}, k_l) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{yl}W_{xl}(1 - W_{zl}), \\
 J_y^{n+\frac{1}{2}}(i_l, j_l + \frac{1}{2}, k_l + 1) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{yl}(1 - W_{xl})W_{zl}, \\
 J_y^{n+\frac{1}{2}}(i_l + 1, j_l + \frac{1}{2}, k_l + 1) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{yl}W_{xl}W_{zl}.
 \end{aligned} \tag{B.36}$$

$$\begin{aligned}
 J_z^{n+\frac{1}{2}}(i_l, j_l, k_l + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{zl}(1 - W_{xl})(1 - W_{yl}), \\
 J_z^{n+\frac{1}{2}}(i_l + 1, j_l, k_l + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{zl}W_{xl}(1 - W_{yl}), \\
 J_z^{n+\frac{1}{2}}(i_l, j_l + 1, k_l + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{zl}(1 - W_{xl})W_{yl}, \\
 J_z^{n+\frac{1}{2}}(i_l + 1, j_l + 1, k_l + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} F_{zl}W_{xl}W_{yl},
 \end{aligned} \tag{B.37}$$

donde $l = 1, 2$ se emplea para referirse a los índices $(i_1, i_2, j_1, j_2, k_1, k_2)$ correspondientes, así como a los respectivos pesos y flujos. Es importante resaltar que cada componente de la densidad de corriente obtenida mediante este procedimiento queda perfectamente alineada con la posición y el instante requeridos en el esquema de Yee, permitiendo su incorporación directa en las Ecs. (B.7)–(B.9), sin necesidad de interpolaciones adicionales y garantizando un acoplamiento óptimo entre ambos métodos.

B.4.2 Asignación de carga

En el algoritmo anterior se presentó la correcta distribución de la corriente asociada a una superpartícula sobre los puntos de malla circundantes. Este procedimiento es suficiente para garantizar simulaciones consistentes desde el punto de vista físico, ya que el método de Yee no requiere de manera explícita la densidad de carga ρ . Por esta razón, no es necesario un tratamiento especial para la asignación de ρ en los puntos de malla; de hecho, su cálculo no es indispensable para la ejecución de las simulaciones tal como se han planteado. Sin embargo, es habitual realizar un seguimiento de esta magnitud, o de su correspondiente concentración de partículas n ,

la cual puede obtenerse directamente aplicando la formulación estándar del método PIC (Ec. A.6), que depende del factor de forma espacial S_r empleado [110, 112]. En este caso, dado que se emplea el factor de forma asociado a la primera función *b-spline*, la asignación de carga sigue un principio análogo al utilizado para la interpolación de campos hacia las superpartículas, pero en sentido inverso. Esto es natural, puesto que en la interpolación de campos, la información se proyecta desde la malla hacia la superpartícula, mientras que en la asignación de carga, es la carga de la superpartícula la que se proyecta hacia los puntos de malla.

El primer paso consiste en identificar la celda en la que se encuentra la superpartícula, y a continuación determinar las fracciones de distancia recorridas a lo largo de cada eje, tal como se ilustra en el esquema de interpolación (véase la Figura 37). De esta manera, la carga asignada a cada vértice de la celda se calcula mediante las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned}
 \rho^n(i, j, k) &= \frac{L_{x_2} L_{y_2} L_{z_2}}{\Delta_x \Delta_y \Delta_z} \rho_{sp}^n, & \rho^n(i+1, j, k) &= \frac{L_{x_1} L_{y_2} L_{z_2}}{\Delta_x \Delta_y \Delta_z} \rho_{sp}^n, \\
 \rho^n(i+1, j+1, k) &= \frac{L_{x_1} L_{y_1} L_{z_2}}{\Delta_x \Delta_y \Delta_z} \rho_{sp}^n, & \rho^n(i, j+1, k) &= \frac{L_{x_2} L_{y_1} L_{z_2}}{\Delta_x \Delta_y \Delta_z} \rho_{sp}^n, \\
 \rho^n(i, j, k+1) &= \frac{L_{x_2} L_{y_2} L_{z_1}}{\Delta_x \Delta_y \Delta_z} \rho_{sp}^n, & \rho^n(i+1, j, k+1) &= \frac{L_{x_1} L_{y_2} L_{z_1}}{\Delta_x \Delta_y \Delta_z} \rho_{sp}^n, \\
 \rho^n(i+1, j+1, k+1) &= \frac{L_{x_1} L_{y_1} L_{z_1}}{\Delta_x \Delta_y \Delta_z} \rho_{sp}^n, & \rho^n(i, j+1, k+1) &= \frac{L_{x_2} L_{y_1} L_{z_1}}{\Delta_x \Delta_y \Delta_z} \rho_{sp}^n.
 \end{aligned} \tag{B.38}$$

B.4.3 Algoritmo de suavizado - Filtro de tres puntos

Como se ha mencionado, la combinación del esquema zigzag para la asignación de corriente y el método directo para la asignación de carga asegura la preservación de la ecuación de continuidad y un acoplamiento coherente con el esquema de Yee. Esta formulación permite describir con precisión la interacción entre superpartículas y campos, evitando errores numéricos acumulativos y manteniendo la fidelidad física de la simulación durante toda su evolución temporal. Sin embargo, el factor de forma empleado, aunque práctico por su sencillez de implementación, puede producir asignaciones de carga y corriente con cierto nivel de ruido numérico, manifestado como variaciones abruptas o perfiles poco suaves. Por esta razón, en simulaciones PIC es habitual implementar estrategias de filtrado digital para suavizar dichas distribuciones cuando no se utilizan funciones *b-spline* de orden superior [109, 117].

Una de las técnicas más empleadas, por su simplicidad y bajo coste computacional, es el filtrado de tres puntos [123, 126]. En este esquema, dada una función discreta ϕ_i definida sobre un eje, la versión suavizada ϕ_i^f se calcula como:

$$\phi_i^f = \alpha \phi_i + \frac{1 - \alpha}{2} (\phi_{i-1} + \phi_{i+1}), \quad (\text{B.39})$$

donde el filtrado se realiza utilizando los dos puntos de malla adyacentes (izquierdo y derecho), y el parámetro α controla el peso relativo entre el valor central y el promedio de sus vecinos inmediatos. Este procedimiento es conocido como filtro bilineal cuando $\alpha = 0.5$, y actúa como un filtro paso-bajo que atenúa las componentes de alta frecuencia presentes en las asignaciones de carga y corriente. En términos generales, el efecto del filtrado puede incrementarse al aplicarse múltiples veces sobre un conjunto de datos; no obstante, un exceso de aplicaciones o pases puede suavizar en exceso la señal, por lo que en la literatura se proponen técnicas de compensación para mitigar este efecto.

Una desventaja de aplicar un gran número de pases del filtro bilineal es el aumento del coste computacional. Para superar esta limitación, se emplean combinaciones de filtros de tres puntos con diferentes saltos a lo largo del eje, es decir, considerando no solo los dos vecinos más cercanos, sino también puntos más alejados:

$$\phi_i^f = \alpha \phi_i + \frac{1 - \alpha}{2} (\phi_{i-s} + \phi_{i+s}), \quad (\text{B.40})$$

siendo s el tamaño del salto. Valores típicos son $s = 1, 2, 3, 4$, lo que permite suprimir simultáneamente un rango más amplio de números de onda, logrando una reducción efectiva del ruido con menos pases totales. Un ejemplo reportado en la literatura indica que la combinación de filtros de tres puntos con $s = 1, 2, 3, 4$ y una etapa de compensación puede lograr un efecto equivalente al de aproximadamente 80 pases de un filtro bilineal simple, pero requiriendo tan solo unos ~ 10 pases efectivos.

En este trabajo se ha implementado esta estrategia, aplicando múltiples pases de filtros de tres puntos con diferentes saltos, en lugar de recurrir a una gran cantidad de pases de un filtro bilineal simple. Esta técnica se ha aplicó de forma uniforme a lo largo de las tres direcciones espaciales y en todo el dominio de la simulación, con el fin de minimizar el ruido numérico y preservar la calidad física de los resultados obtenidos.

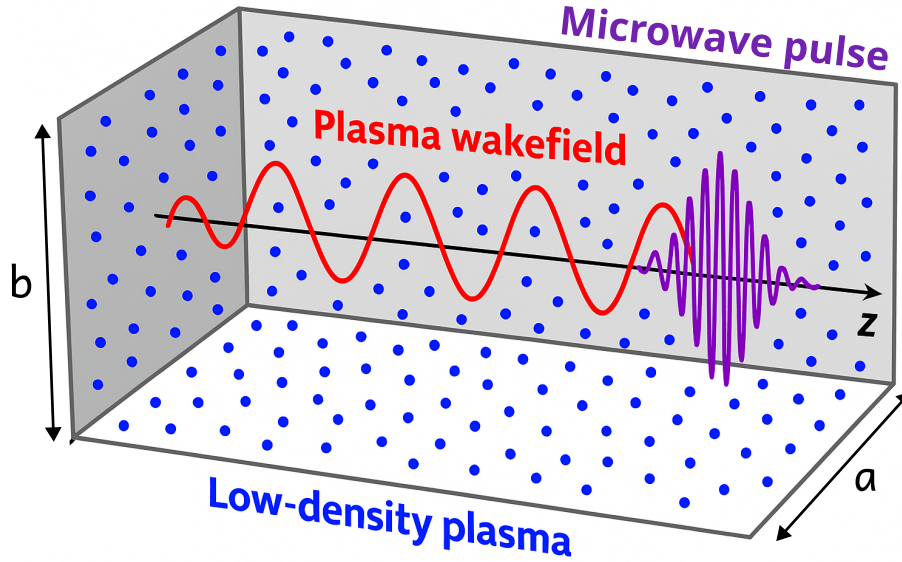
B.5 Esquema físico y condiciones de frontera

Las condiciones de frontera son un elemento clave en las simulaciones numéricas, ya que influyen de forma significativa en la dinámica y evolución del sistema. Por ello,

su implementación debe realizarse con especial cuidado. Estas condiciones no se aplican únicamente a los campos electromagnéticos, sino que también requieren un tratamiento específico para las partículas al llegar a las fronteras. La elección de las condiciones de frontera depende directamente del sistema físico que se desea simular.

En este trabajo, se considera la interacción autoconsistente entre un pulso de microondas propagándose en una guía de ondas rectangular metálica llena de plasma inicialmente en equilibrio, tal como se ilustra en la Figura 40. La guía presenta un ancho a alineado con el eje x , una altura b a lo largo del eje y , y una longitud L_z en la dirección de propagación z .

Figura 40: Esquema físico del dominio de simulación empleado en este trabajo. Se considera una guía de ondas rectangular metálica de ancho a en la dirección x , alto b en la dirección y y longitud L_z en la dirección de propagación z . El plasma se encuentra confinado en el interior de la guía y el pulso de microondas se propaga a lo largo del eje z .



B.5.1 Condiciones de frontera para los campos

Bajo estas consideraciones, el tratamiento de los campos es directo: las paredes metálicas, al modelarse como conductores perfectos, imponen que las componentes tangenciales del campo eléctrico se anulen en su superficie. De esta forma, las dimensiones de la guía definen la región de simulación, delimitada como:

$$[0 < x < a] \times [0 < y < b] \times [0 < z < L_z], \quad (\text{B.41})$$

la cual, al discretizarse e integrarse mediante el esquema de Yee, conduce para el plano $x = 0$ que,

$$E_y^n(0, j + \frac{1}{2}, k) = E_z^n(0, j, k + \frac{1}{2}) = 0. \quad (\text{B.42})$$

De manera análoga, para el plano $x = a$:

$$E_y^n(np_x - 1, j + \frac{1}{2}, k) = E_z^n(np_x - 1, j, k + \frac{1}{2}) = 0, \quad (\text{B.43})$$

donde np_x es el número total de puntos de malla empleados para discretizar el dominio computacional a lo largo de x . Es importante notar que la ecuación (B.43) se evalúa en $i = np_x - 1$ debido a que, bajo la convención utilizada, los índices se cuentan desde cero, es decir, $i = 0, 1, 2, \dots, np_x - 1$. Otro aspecto relevante es que, en el esquema de Yee, no es necesario imponer explícitamente las condiciones de frontera sobre el campo magnético en estos planos, ya que la condición física correspondiente (anulación del campo normal) se cumple automáticamente si se satisfacen las condiciones sobre el campo eléctrico tangencial dadas por las ecuaciones (B.42) y (B.43), es decir, la componente normal B_x se anula de forma natural en $i = 0$ y $i = np_x - 1$.

Cabe señalar que la componente normal del campo eléctrico, E_x , no está definida directamente en estos planos debido al desfase espacial característico del esquema de Yee: E_x se encuentra definido desde $i = \frac{1}{2}$ hasta $i = np_x - \frac{3}{2}$ en el espacio discreto. Una situación análoga ocurre para las componentes tangenciales del campo magnético. Por lo tanto, en los planos $i = 0$ y $i = np_x - 1$ basta con imponer las condiciones (B.42) y (B.43) para garantizar que se cumplan todas las condiciones de frontera de campo electromagnético. Aplicando los mismos principios se obtienen las condiciones para los planos $y = 0$,

$$E_x^n(i + \frac{1}{2}, 0, k) = E_z^n(i, 0, k + \frac{1}{2}) = 0. \quad (\text{B.44})$$

y $y = b$,

$$E_x^n(i + \frac{1}{2}, np_y - 1, k) = E_z^n(i, np_y - 1, k + \frac{1}{2}) = 0. \quad (\text{B.45})$$

Lo anterior describe las condiciones en las paredes de la guía. Sin embargo, a lo largo del eje z se busca permitir la propagación libre, dado que este corresponde al eje de avance del pulso dentro de la guía. Una opción común para este propósito es implementar condiciones de frontera absorbentes mediante el esquema *Uniaxial Perfectly Matched Layer* (UPML), el cual permite que la onda salga de la región de simulación con una reflexión prácticamente nula, siendo completamente absorbida en los planos $z = 0$ y $z = L_z$ [118]. No obstante, en el caso particular de este trabajo, la aplicación del UPML no es estrictamente necesaria. El objetivo es que, por un

extremo ($z = 0$), el pulso de microondas ingrese e interactúe con el plasma a lo largo de la guía, y que la simulación finalice en el instante en que el pulso alcanza el extremo opuesto ($z = L_z$). Por lo tanto, no se requiere simular ni esperar a que la onda salga completamente de la región de simulación, lo que hace prescindible el uso de un absorbente perfecto en este eje.

En este trabajo, en el plano $z = 0$ se excitan pulsos gaussianos con el perfil espacial correspondiente al modo deseado, ya sea transversal eléctrico (TE_{mn}) o transversal magnético (TM_{mn}). El algoritmo de excitación debe reproducir fielmente dichos modos, bien documentado en la literatura. Para inducir la propagación, el perfil transversal del campo electromagnético en $z = 0$ se hace oscilar a la frecuencia objetivo f_0 , lo que se logra multiplicando por un factor sinusoidal $\sin(\omega_0 t)$, donde $\omega_0 = 2\pi f_0$. La modulación temporal de la amplitud del pulso se realiza mediante una envolvente gaussiana de la forma $e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}$, donde σ controla la duración temporal del pulso y t_0 es el instante en el que dicha envolvente alcanza su máximo en el plano $z = 0$.

Bajo el esquema en malla de Yee, no todas las componentes de campo requieren ser impuestas explícitamente en $z = 0$, pues no todas están definidas en posiciones con índice entero $k = 0$. En este caso, únicamente es necesario inicializar las componentes E_x y E_y , que se implementan como:

$$E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, 0) = \frac{\omega_0 \mu n_y \pi}{k_c^2 b} A \cos\left(\frac{m_x \pi x_{i+1/2}}{a}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y_j}{b}\right) \sin(\omega_0 t^n) e^{-\frac{(t^n - t_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (\text{B.46})$$

$$E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, 0) = -\frac{\omega_0 \mu m_x \pi}{k_c^2 a} A \sin\left(\frac{m_x \pi x_i}{a}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y_{j+1/2}}{b}\right) \sin(\omega_0 t^n) e^{-\frac{(t^n - t_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (\text{B.47})$$

donde m_x y n_y indican los números modales asociados a la variación transversal en las direcciones x y y , respectivamente, mientras que el superíndice n denota el paso temporal. Aunque la componente B_z se encuentra definida en posiciones con índice k entero, su actualización está adelantada medio paso temporal ($n + \frac{1}{2}$). Por lo tanto, si las componentes E_x y E_y se inicializan correctamente como se indica, B_z se generará de manera natural y consistente.

Finalmente, dado que el plasma se inicializa en un estado de equilibrio, es decir, cuasineutral y sin campos externos presentes, todas las componentes de campo se establecen inicialmente en cero. A partir de esta condición, el pulso de microondas se excita progresivamente siguiendo el procedimiento previamente descrito. Dado que la simulación se detiene en el instante en que el pulso alcanza el extremo opuesto de la

guía ($z = L_z$), no es estrictamente necesario imponer una condición de frontera específica en dicho plano; la inicialización en cero resulta suficiente para que el sistema evolucione de forma consistente. Cabe destacar que, si durante la simulación el pulso no llega a $z = L_z$, no existe interacción alguna con este plano, por lo que el tratamiento adoptado es completamente válido.

B.5.2 Condición de frontera para las partículas

Para las superpartículas se implementaron condiciones de frontera absorbentes en las paredes metálicas. Se añadió una capa de absorción de dos celdas adyacente a cada frontera transversal. Cuando una partícula ingresa en esta región, su trayectoria se propaga hasta el punto de intersección con la pared dentro del mismo paso temporal; su carga y corriente se depositan hasta dicho punto siguiendo el mismo esquema de conservación de carga utilizado en el dominio principal, y posteriormente la partícula es eliminada del sistema.

En cuanto a las superpartículas que alcanzan los planos $z = 0$ y $z = L_z$, estas son absorbidas en las fronteras, es decir, eliminadas numéricamente de la simulación. Cabe destacar que en el extremo $z = L_z$ esta condición no llega a activarse en la práctica, ya que la simulación se detiene en el momento en que el pulso de microondas alcanza dicho plano, garantizando que el plasma en esa región permanezca inalterado.

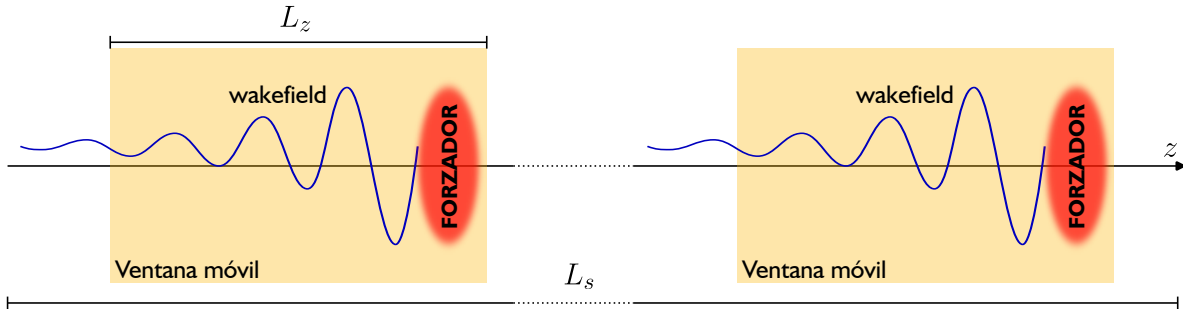
B.5.3 Ventana móvil de simulación

En este punto resulta pertinente introducir el concepto de región de simulación móvil, también denominada *ventana móvil*. Para comprender su utilidad, debe recordarse que el *wake* se genera y propaga detrás del forzador (pulso electromagnético o haz de partículas), ya que es en dicha región donde el plasma se encuentra perturbado. En contraste, el plasma no excitado permanece en equilibrio y no presenta dinámica relevante para la simulación. Por otra parte, en muchos estudios de este fenómeno, la longitud de la región de simulación L_s es considerablemente mayor que la longitud de onda del *wake* o el ancho característico del forzador. Esto implica que, para describir la dinámica autoconsistente, se requieren grandes cantidades de puntos de malla y superpartículas, lo cual conlleva un elevado costo computacional. Sin embargo, gran parte de este esfuerzo resulta innecesario: por un lado, el plasma aún sin perturbar no aporta información relevante; por otro, la dinámica asociada a regiones ya perturbadas pero alejadas del forzador tiende a perder interés, pues el plasma tiende nuevamente al equilibrio. Con el propósito de

reducir este costo computacional innecesario, se introduce una región de simulación móvil que se desplaza paralela y junto al pulso de microondas [109, 123, 126]. De este modo, los recursos numéricos se concentran en la zona de mayor interés: las inmediaciones del pulso, donde ocurre la excitación principal del plasma y la formación del *wake*. Estas ideas se ilustran en la Figura 41.

La longitud de la ventana móvil, L_z , puede elegirse de manera arbitraria, aunque con ciertas restricciones: no debe ser tan pequeña como para impedir la observación de la formación del *wake*, ni tan grande como para que el costo computacional pierda la ventaja buscada. La literatura recomienda que la extensión de esta ventana sea del orden de $4\lambda_p$. En este trabajo se implementó una ventana móvil que se desplaza con la velocidad de grupo del pulso, garantizando así que el forzador permanezca contenido dentro de la región de simulación a lo largo de toda la dinámica de interés.

Figura 41: Esquema ilustrativo del concepto de ventana móvil: en lugar de simular toda la longitud L_s de la guía de ondas llena de plasma, se restringe la simulación a una región móvil de longitud L_z , la cual se desplaza a la velocidad de grupo del pulso, reduciendo de manera significativa el número de puntos de malla y el costo computacional.



En este punto, a lo largo del presente capítulo se describieron los fundamentos generales de las simulaciones Particle-in-Cell, así como las técnicas y estrategias que se implementaron en este trabajo, incluyendo el método de Yee para la evolución de los campos, el método de Boris para el seguimiento de la dinámica de las superpartículas, las técnicas de asignación de carga y corriente, el uso de filtros digitales para reducir el ruido numérico, y las condiciones de frontera para campos y superpartículas. Asimismo, se introdujo la ventana móvil de simulación como estrategia para optimizar los recursos computacionales. Con estos elementos, el código desarrollado alcanza estabilidad, eficiencia y consistencia física, estableciendo las bases necesarias para que en el siguiente capítulo se presenten tanto la validación del modelo como los resultados propios del objetivo de este trabajo.

C. Validación numérica

La construcción de un código *particle-in-cell* (PIC) involucra múltiples subrutinas y procedimientos numéricos, cuya correcta implementación debe ser verificada antes de abordar las simulaciones físicas de interés. En este contexto, la validación constituye un paso esencial para garantizar la estabilidad, precisión y en general, confiabilidad de los resultados obtenidos.

En este capítulo se presentan las pruebas de validación realizadas sobre el código desarrollado, organizadas en dos niveles. En primer lugar, se evalúa el desempeño de subrutinas individuales, tales como el integrador de movimiento de partículas y el integrador de las ecuaciones de Maxwell. Posteriormente, se realizan pruebas de integración orientadas a verificar la coherencia global del esquema PIC, incluyendo la conservación de magnitudes físicas, la implementación de condiciones de frontera y la reproducción de fenómenos fundamentales del plasma.

El propósito de estas pruebas no es realizar un análisis exhaustivo de las técnicas numéricas, ya ampliamente estudiadas en la literatura, sino demostrar que la implementación realizada desde cero es capaz de reproducir de manera fiel y estable los resultados esperados. De esta forma, se establece la solidez del código PIC desarrollado y se construye la base necesaria para los capítulos posteriores, dedicados al estudio de la excitación de *wakefields* y la aceleración de electrones en guías de onda llenas de plasma.

C.1 Validación del esquema de Boris

El ensayo típico para validar un integrador de las ecuaciones de movimiento de partículas cargadas consiste en verificar su capacidad para reproducir la órbita circular de una partícula en presencia de un campo magnético uniforme. En esta primera prueba se considera un campo $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ con $B_0 = 1$ T y un electrón cuya velocidad inicial es puramente transversal al campo, $|\mathbf{v}_0| = 0.9c$. Este régimen permite evaluar la fidelidad

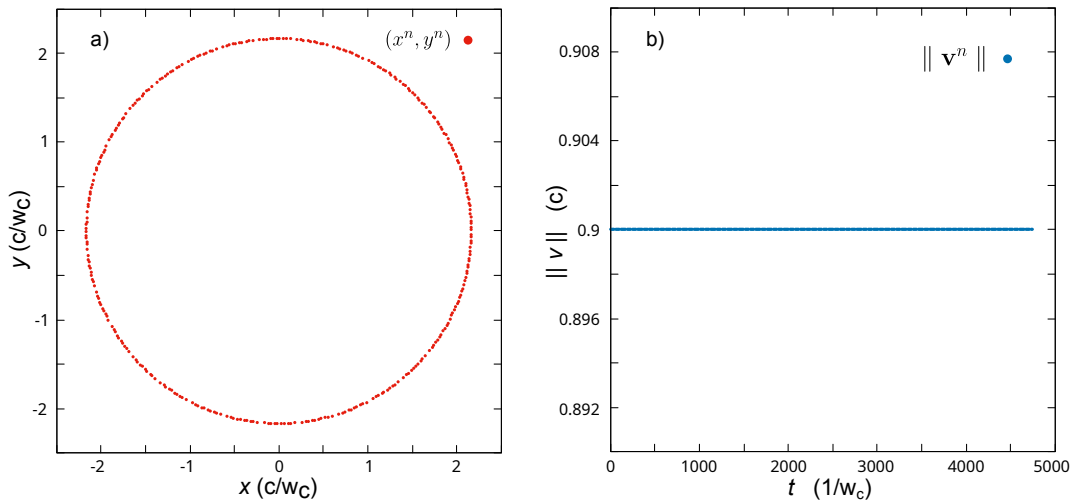
del integrador en condiciones relativistas, donde el radio de Larmor está dado por

$$\rho_L = \frac{\gamma m_e v_\perp}{e B_0} = \frac{p_\perp}{e B_0}, \quad (\text{C.1})$$

donde m_e es la masa del electrón, e la carga elemental, v_\perp la rapidez perpendicular al campo, p_\perp el momento transversal y γ el factor de Lorentz. En este caso, la trayectoria esperada es un círculo en el plano x - y de radio ρ_L , manteniéndose $z = \text{const.}$ El integrador de Boris debe conservar la magnitud de la velocidad $|\mathbf{v}|$ y reproducir la frecuencia ciclotrón relativista ω_c dentro del error de truncamiento del esquema y de las restricciones de estabilidad asociadas a Δt .

La Figura 42(a) muestra la trayectoria circular generada por la subrutina desarrollada, en la que el paso temporal Δt se escogió de modo que un giro completo quedara discretizado en 10 pasos. En dicha figura se observan aproximadamente 330 coordenadas (x, y) del electrón a lo largo de 300 giros, lo que evidencia la notable estabilidad del método. Es importante resaltar que, con un paso temporal tan grande, otros integradores tienden a volverse erráticos tras múltiples giros, mientras que el esquema de Boris mantiene la trayectoria estable. La Figura 42(b) ilustra la conservación de la energía, mostrando que la magnitud de la velocidad se mantiene constante durante toda la simulación.

Figura 42: *Dinámica de un electrón en un campo magnético uniforme $B_0 = 1$ T obtenida con el integrador de Boris. (a) Órbita circular en el plano x - y a lo largo de 300 giros. (b) Conservación de la magnitud de la velocidad durante toda la simulación.*



Mediante un ajuste por mínimos cuadrados a los resultados simulados, se obtuvo un radio normalizado, respecto a c/ω_c , de ~ 2.164 , mientras que el valor teórico, calculado a partir de la expresión (C.1), es ~ 2.065 . La discrepancia observada

se atribuye al tamaño del paso temporal Δt . En efecto, al incrementar la resolución a 101 puntos por giro, el radio simulado resulta ser ~ 2.066 , valor mucho más próximo al esperado.

Para finalizar la validación de esta subrutina, se consideró un escenario en el que no solo interviene el campo magnético sobre la dinámica de la partícula, sino también un campo eléctrico uniforme. En la Figura 43 se muestra la trayectoria de un electrón sometido a campos eléctrico y magnético cruzados, dados por $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{y}}$ y $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$, con $E_0 = 1 \text{ kV/m}$ y $B_0 = 1 \text{ mT}$. Esta configuración resulta especialmente adecuada para propósitos de validación, ya que la solución analítica de la trayectoria es bien conocida y puede compararse de manera directa con los resultados numéricos; así, si el electrón se libera en reposo desde el origen de un sistema cartesiano, las expresiones analíticas de su movimiento están dadas por

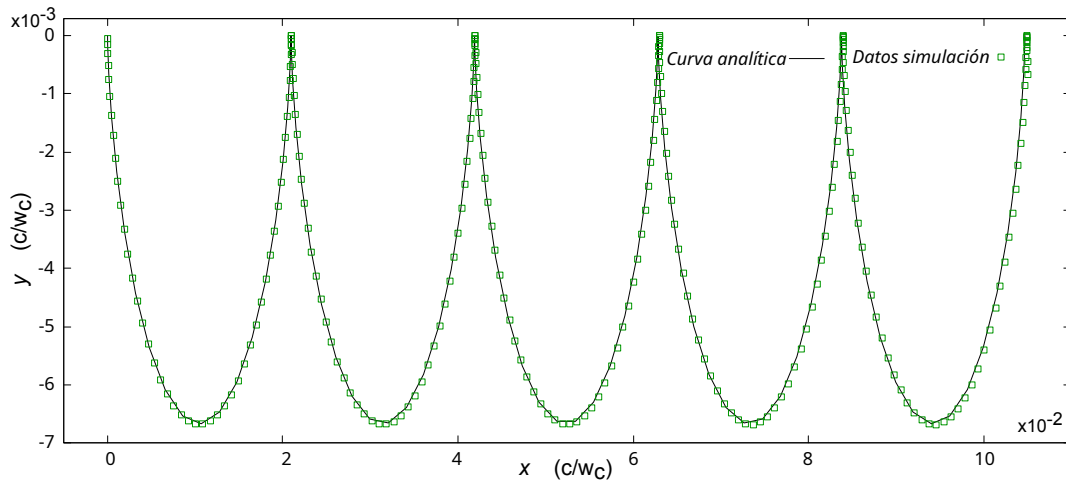
$$x(t) = \frac{E_0}{B_0\omega_c} [\omega_c t - \sin(\omega_c t)], \quad (\text{C.2})$$

$$y(t) = \frac{E_0}{B_0\omega_c} [\cos(\omega_c t) - 1], \quad (\text{C.3})$$

donde $\omega_c = eB_0/m_e$ corresponde a la frecuencia ciclotrón del electrón [127].

Los resultados de la simulación muestran una excelente correspondencia entre la trayectoria numérica y la solución analítica, confirmando la correcta implementación del integrador. En este caso, se utilizó un paso temporal $\Delta t \sim 1.257 \times 10^{-01}/\omega_c$, tal que el período ciclotrón $T_c = 2\pi/\omega_c$ quedara discretizado en 50 intervalos.

Figura 43: Trayectoria de un electrón en campos eléctrico y magnético uniformes cruzados. Se observa la comparación entre la trayectoria obtenida con la subrutina de Boris (cuadros verdes) y la solución analítica (línea negra).



Al comparar la trayectoria numérica directamente con la solución analítica, se encontró una diferencia o error máximo de $\sim 1.2 \times 10^{-3}$, valor que está dentro de la precisión del método $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, de segundo orden [123, 128, 129].

En particular, el esquema de Boris ha alcanzado un amplio reconocimiento en el ámbito de las simulaciones numéricas de plasmas, debido a la notable estabilidad que ofrece incluso en simulaciones prolongadas, lo cual fortalece su implementación en este trabajo. El algoritmo preserva de manera robusta parámetros físicos fundamentales como la energía y el radio de giro de las partículas, aún empleando pasos temporales moderados.

Con estas pruebas se establece la correcta implementación del integrador de Boris en el código desarrollado, garantizando la fidelidad en la resolución de la dinámica de partículas cargadas bajo campos electromagnéticos uniformes. Este resultado constituye un punto de partida sólido para abordar validaciones adicionales y, posteriormente, las simulaciones físicas de interés.

C.2 Validación del método de Yee

Con el fin de verificar el correcto funcionamiento de la subrutina encargada de resolver las ecuaciones de Maxwell, se llevaron a cabo simulaciones de propagación de ondas electromagnéticas en la guía de onda. Este procedimiento constituye una validación fundamental, ya que permite evaluar directamente la capacidad del esquema de Yee para reproducir modos de propagación bien conocidos y caracterizados en la literatura. En particular, se realizaron pruebas de excitación tanto de modos eléctricos transversales, TE_{mn} como magnéticos transversales, TM_{mn} , lo cual resulta especialmente apropiado en el contexto de este trabajo. De esta manera, además de validar la implementación del esquema numérico, se pone a prueba el mecanismo de excitación de campos presentado en el capítulo anterior, asegurando su correcta integración con la dinámica de propagación en la guía.

Como primer paso en la validación se definió la construcción de la guía rectangular con dimensiones $a = 3$ cm y $b = \frac{a}{2} = 1.5$ cm. Las paredes de la guía se modelaron como conductores perfectos y se asumió vacío en su interior. Los modos seleccionados para la validación corresponden a TE_{10} y TM_{11} , cuyas frecuencias de corte aproximadas son 5 GHz, y 11.2 GHz, respectivamente. Por lo tanto, para lograr su propagación, la frecuencia de excitación, f_0 , debe ser mayor a los valores indicados. Cabe resaltar que en estas pruebas no se utilizaron pulsos gaussianos, sino excitaciones continuas, de modo que cada modo se propagó a lo largo de la región de

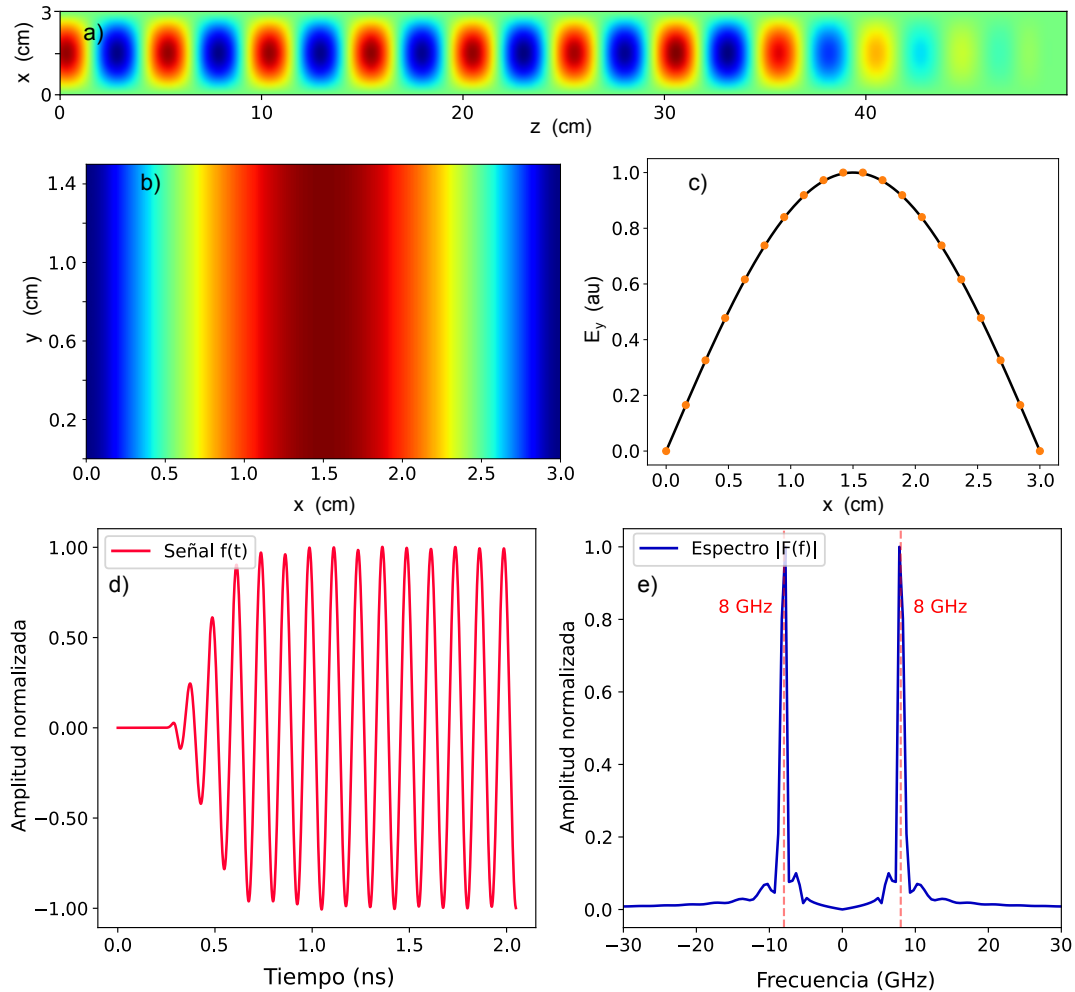
simulación con longitud $L_z = 10 \lambda_g$, siendo λ_g la longitud de onda de propagación en la guía. Esta configuración permite evaluar de manera clara y directa la capacidad del esquema de Yee para reproducir modos bien caracterizados en estructuras guiadas.

Dado que en estas pruebas no se utilizaron pulsos gaussianos, la envolvente presentada en las Ecuaciones (B.46) y (B.47) fue sustituida. No obstante, con el fin de garantizar una excitación suave y evitar cambios abruptos en los campos, se empleó el factor $(1 - e^{-\frac{t^n}{\tau_0}})$, donde se fijó $\tau_0 = 1/f_0$. De esta manera, el modo queda completamente excitado después de aproximadamente cinco oscilaciones, mientras que la transición inicial se mantiene gradual, lo cual previene variaciones abruptas que podrían inducir errores numéricos. Este tipo de suavización resulta particularmente adecuada en métodos basados en diferencias finitas.

En ambas pruebas, el espacio se discretizó de manera que, a lo largo del eje z , dirección de propagación, una longitud de onda λ_g quedara representada con 31 puntos de malla, imponiéndose además que $\Delta x = \Delta y = \Delta z$. El paso temporal se determinó mediante el criterio de Courant, fijando el coeficiente en $\kappa_c = 0.5$. En particular, las Figuras 44(a), (b) y (c) muestran los mapas de color asociados a la componente E_y de la onda excitada a 8 GHz sobre los planos $y = b/2$ y $z = L_z/2$ y el perfil a lo largo de $y = b/2$, obtenidos al final de la simulación. Se observa que los perfiles concuerdan muy bien con lo esperado teóricamente, a pesar de haberse utilizado una discretización relativamente baja ($np_x = 20$, $np_y = 10$, $np_z = 311$). La Figura 44(d) presenta la evolución temporal de E_y en el punto $(a/2, b/2, L_z/6)$, evidenciando la transición suave de la excitación previamente descrita. Finalmente, la Figura 44(e) muestra el contenido frecuencial obtenido a partir de la transformada rápida de Fourier, confirmando la correcta excitación del modo a la frecuencia de 8 GHz.

Para concluir la validación de la subrutina basada en el método de Yee, así como del mecanismo de excitación implementado, se excitó el modo TM_{11} a una frecuencia de 15 GHz. El objetivo de esta prueba es corroborar la capacidad del código para reproducir modos de tipo TM además de los modos TE previamente presentados. Las Figuras 45(a), (b) y (c) muestran, respectivamente, los perfiles de las componentes E_z , B_x y B_y en el plano $z = L_z/2$, confirmando que los patrones obtenidos corresponden a los predichos teóricamente para este modo. En este caso, con las condiciones de discretización previamente descritas, la malla resultó conformada por ($n_x = 32$, $n_y = 16$, $n_z = 311$) puntos en cada coordenada. Por su parte, la Figura 45(d) presenta la comparación entre los perfiles teóricos y numéricos de las componentes B_x y B_y evaluadas sobre los ejes $x = a/2$ y $y = b/2$, respectivamente. Se observa una excelente correlación entre ambas, incluyendo la

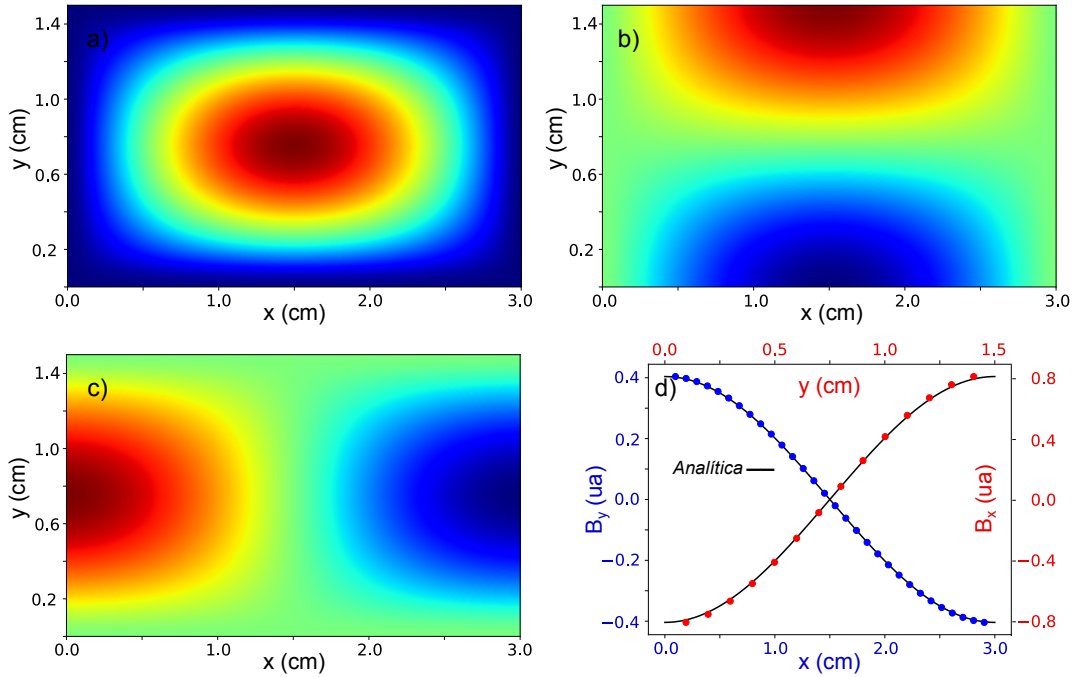
Figura 44: Validación: Excitación y propagación del modo TE_{10} en una guía rectangular vacía de dimensiones $a = 3$ cm, $b = 1.5$ cm. Distribución espacial de la componente E_y en los planos (a) $y = b/2$ y (b) $z = L_z/2$ obtenidos al final de la simulación para una excitación de 8 GHz. (c) Comparación entre teoría (línea sólida) y simulación (puntos naranja) a lo largo del eje ($y = b/2, z = L_z/2$). (d) Evolución temporal de E_y en el punto $(a/2, b/2, L_z/6)$, y (e) su respectivo espectro en frecuencia de la señal.



relación de amplitudes entre los máximos de dichas componentes, que es de aproximadamente dos, $B_x/B_y \sim 2$. Este resultado coincide con la predicción teórica $\frac{B_x}{B_y} = \frac{na}{mb}$, lo que pone de manifiesto la capacidad del método para capturar con precisión las características espaciales y de amplitud de los modos TM excitados.

De esta manera, las pruebas realizadas demuestran que la implementación del esquema de Yee en el código desarrollado reproduce apropiadamente la propagación de ondas electromagnéticas en guías rectangulares, tanto para modos TE como TM. Los resultados obtenidos mostraron una excelente concordancia con las soluciones teóricas en cuanto a los perfiles espaciales, el contenido frecuencial y las relaciones de amplitud

Figura 45: Validación de la excitación y propagación del modo TM_{11} excitado a 15 GHz. (a), (b) y (c) Distribución espacial de las componentes E_z , B_x y B_y respectivamente en el plano $z = L_z/2$. (d) Comparación entre los resultados numéricos y la teoría para B_x y B_y sobre los ejes $x = a/2$ y $y = b/2$.



entre componentes de campo. Así es que, de esta forma se valida no solo la correcta integración del método, sino también la eficacia del mecanismo de excitación propuesto en el capítulo anterior. Estos resultados otorgan plena confianza en la subrutina de campos, garantizando su fiabilidad para las simulaciones principales que constituyen el núcleo de este trabajo.

En conjunto, la validación del integrador de movimiento de partículas mediante el esquema de Boris y del integrador de campos electromagnéticos basado en el método de Yee confirma la correcta implementación de los dos núcleos fundamentales de un algoritmo PIC. Ambas pruebas mostraron una excelente concordancia con las soluciones analíticas conocidas, preservando las propiedades físicas esenciales y garantizando estabilidad numérica.

C.3 Validación de las simulaciones PIC

Los resultados anteriores, junto con las verificaciones indirectas de la correcta implementación de las condiciones de frontera y de los mecanismos de excitación, consolidan la confianza en el código desarrollado. Como paso siguiente, se presentan las pruebas de validación del esquema PIC en su conjunto, en las cuales se acoplan de

manera coherente las distintas subrutinas y se ponen a prueba en escenarios que reproducen fenómenos característicos de plasmas débilmente acoplados. Estas validaciones constituyen la base necesaria antes de abordar el estudio central de este trabajo, enfocado en la excitación de *wakefields* y en la aceleración de electrones en guías de microondas llenas de plasma.

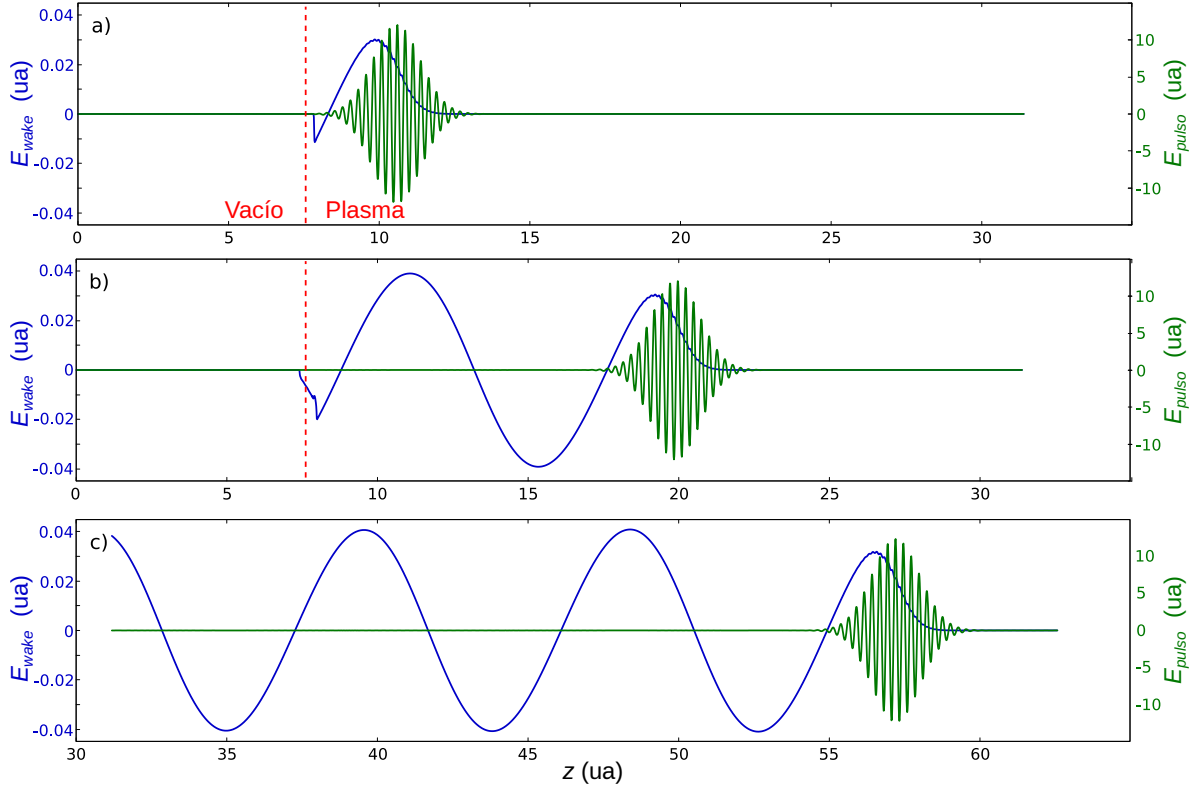
La estrategia empleada en el desarrollo del código PIC fue avanzar de manera progresiva, comenzando por implementaciones unidimensionales antes de llegar a configuraciones más complejas. Como primer punto de partida, se consideró la excitación de un *wakefield* en un plasma producido por la propagación de un pulso láser intenso y de corta duración. Este escenario resulta apropiado por dos razones: (i) el fenómeno bajo estas condiciones es físicamente plausible y cuenta con amplio respaldo teórico, y (ii) permite contrastar de forma clara lo simulado con el comportamiento esperado.

C.3.1 Implementación unidimensional

En esta validación inicial, se tomó un plasma homogéneo en equilibrio con densidad $n_0 = 3 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$, perturbado por un pulso láser con amplitud de campo eléctrico pico $E_{\text{pulso}} = 2 \text{ TV/m}$, frecuencia $f_0 = 375 \text{ THz}$ y un tamaño o duración equivalente a aproximadamente 15 longitudes de onda. La discretización espacial se fijó de manera que la longitud de onda central del pulso, λ_0 , quedara representada por 20 puntos de malla, y se emplearon 10 superpartículas por celda. Los resultados de esta simulación se ilustran en la Figura 46, donde se identifican tres instantes representativos: (a) el pulso que viaja desde una región vacía empieza a interactuar con el plasma; (b) el pulso ya se encuentra dentro del plasma, generando a su paso la perturbación característica; y (c) el *wakefield* completamente formado, en el cual se observa además la activación de la ventana móvil que sigue al pulso láser en su propagación. Este comportamiento cualitativo constituye un primer indicio del correcto funcionamiento del código desarrollado; sin embargo, es necesario avanzar hacia una validación cuantitativa que contraste los resultados con valores teóricos esperados.

Se analizó la dependencia de la amplitud del *wakefield* respecto a parámetros numéricos como el paso de malla y el número de superpartículas por celda. La Tabla 9 muestra los valores de amplitud obtenidos al variar el número de puntos por longitud de onda del pulso, n_{pg} . Se observa que, al aumentar la resolución espacial, la amplitud del campo disminuye levemente y tiende a converger. La diferencia máxima entre los

Figura 46: Evolución unidimensional de la interacción de un pulso láser intenso con un plasma homogéneo. (a) El pulso se propaga en la región vacía previo a la interacción. (b) El pulso atraviesa el plasma, generando la perturbación inicial. (c) Formación completa del wakefield, con la ventana móvil siguiendo la propagación del pulso.



casos extremos ($n_{pg} = 20$ y $n_{pg} = 90$) es de aproximadamente un 3.5 %, manteniéndose siempre en el mismo orden de magnitud, reflejando un buen comportamiento del código.

Tabla 9: Amplitud del wakefield en unidades normalizadas E_{wake} como función del número de puntos por longitud de onda del pulso, n_{pg} , fijando el número de SPs por celda en 20.

| n_{pg} | 25 | 50 | 70 | 90 |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|
| E_{wake} (ua) | 0.0423 | 0.0414 | 0.0410 | 0.0408 |

Por otra parte, la Tabla 10 presenta la variación de la amplitud del *wakefield* al modificar el número de superpartículas por celda, manteniendo fijo $n_{pg} = 25$. En todos los casos se obtuvo el mismo valor de amplitud, lo cual indica que este parámetro no afecta significativamente los resultados en el rango considerado. Cabe señalar que, aumentar el número de SPs reduce el nivel de ruido numérico, por lo que no se recomienda reducirlo en exceso para reducir al carga computacional.

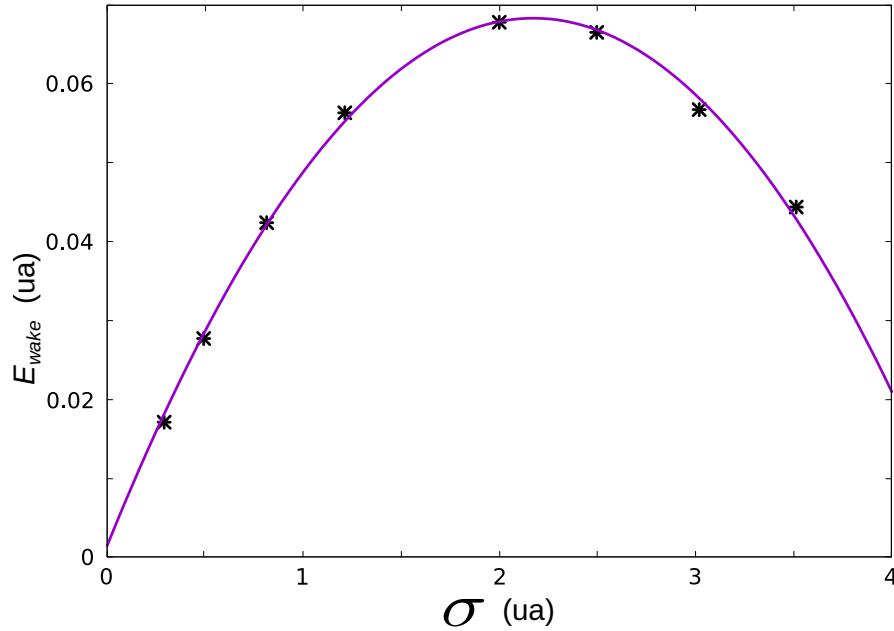
Hasta este punto, el código desarrollado demuestra ser consistente y robusto frente a variaciones de parámetros numéricos, reproduciendo resultados estables y en

Tabla 10: Amplitud del wakefield en función del número de SPs por celda, n_{spc} , con $n_{\text{pg}} = 25$.

| n_{spc} | 10 | 20 | 40 | 60 | 80 |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| E_{wake} (ua) | 0.0423 | 0.0423 | 0.0423 | 0.0423 | 0.0423 |

concordancia con lo esperado. Esto brinda confianza para avanzar hacia el análisis de la dependencia del fenómeno con parámetros físicos del pulso, lo que permitirá contrastar los resultados con reportes previos en la literatura.

Para explorar la dependencia del *wakefield* con parámetros físicos del pulso láser, se analizaron variaciones en dos aspectos principales: su amplitud y su duración. En primer lugar, se analizó la influencia del ancho del pulso gaussiano, definido por el parámetro σ . La Figura 47 muestra que la amplitud del *wakefield* crece inicialmente con σ , alcanzando un valor máximo para un ancho intermedio y disminuyendo posteriormente. Este resultado confirma la existencia de un ancho óptimo del pulso que maximiza la excitación del *wakefield*. La amplitud máxima obtenida en la simulación en unidades normalizadas es $E_{\text{wake}}^{\text{sim}} \sim 0.0665$, que concuerda estrechamente con la predicción de la teoría lineal, $E_{\text{wake}}^{\text{teo}} \sim 0.067$.

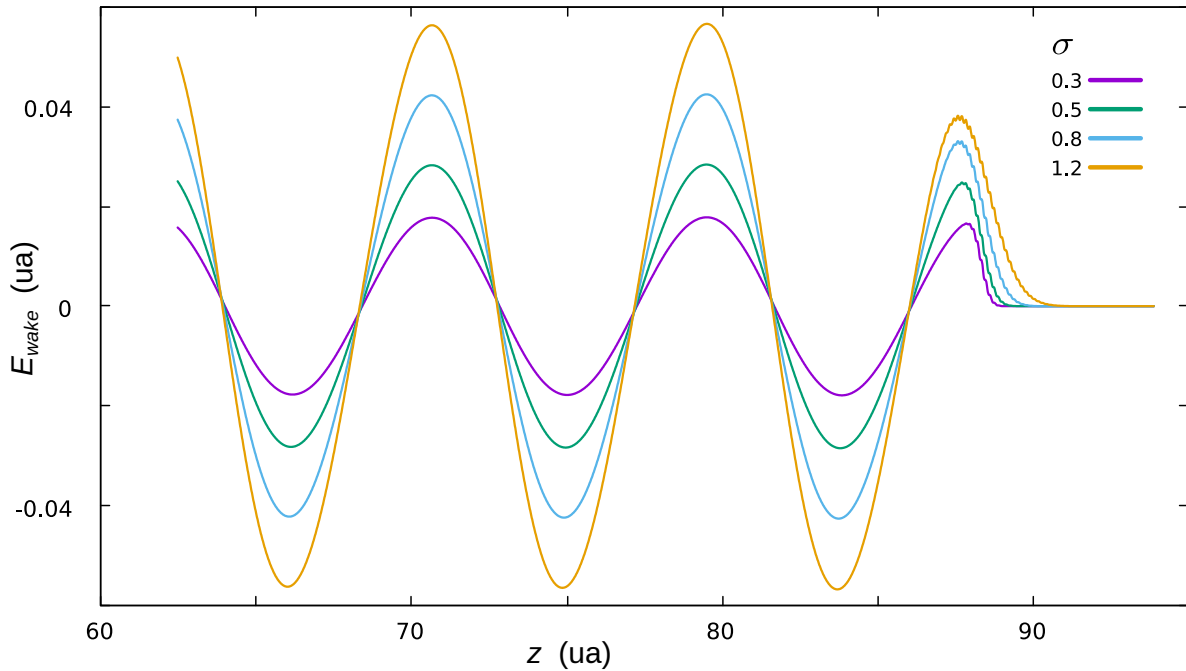
Figura 47: Amplitud del wakefield como función del ancho del pulso gaussiano, σ . Se observa un valor óptimo de σ que maximiza la amplitud, en concordancia con la teoría lineal.


Un hecho de resaltar, es que este σ está asociado con el ancho de la envolvente gaussiana del campo, pero en la práctica, la duración del pulso láser se asocia con el ancho medio, FWHM, de la envolvente de la potencia del pulso. Al estimar dicha

duración que del pulso se encontró que es aproximadamente medio periodo de la onda plásmica, $\text{FWHM}_{\text{optimo}} \sim 0.5T_p = \pi/\omega_p$.

Otro aspecto que permite evaluar la consistencia del código es que la longitud de onda plasmónica λ_p depende exclusivamente de la densidad del plasma n_0 y no de las propiedades del pulso láser. Este hecho se evidencia en la Figura 48, donde se muestran los perfiles longitudinales del *wakefield* para diferentes valores de σ . Como puede apreciarse, la longitud de onda plásmica permanece invariante, mientras que la duración del pulso únicamente modifica la amplitud de la onda excitada, en concordancia con lo esperado teóricamente.

Figura 48: *Perfiles longitudinales del wakefield E_{wake} obtenidos al variar el ancho del pulso gaussiano σ . Se observa que la longitud de onda plásmica λ_p permanece invariante, mientras que la amplitud varía con la duración del pulso.*



En segundo lugar, se estudió la influencia de la intensidad del pulso, caracterizada por el parámetro adimensional a_0 , definido como

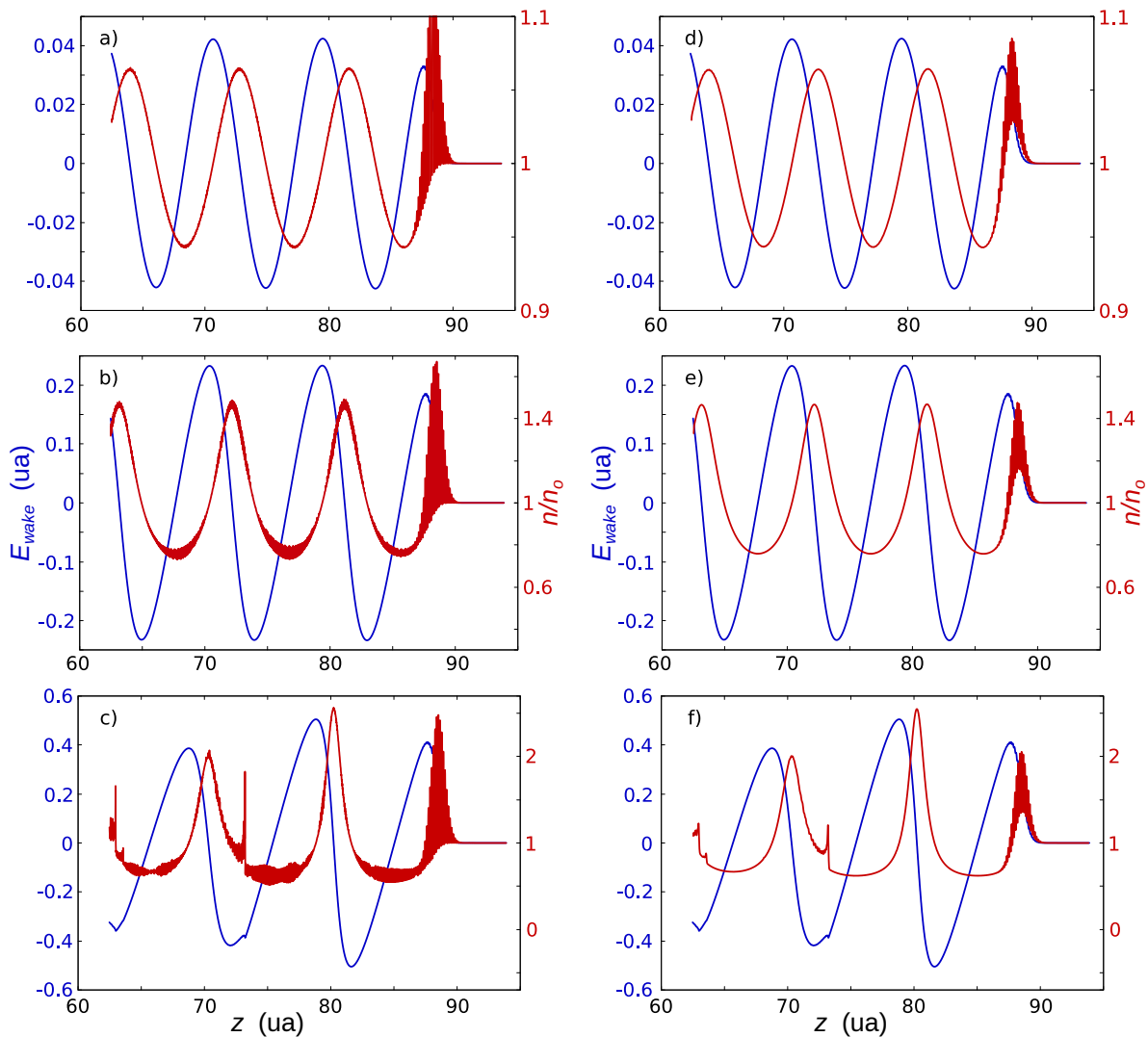
$$a_0 = \frac{eE_{\text{pulso}}}{m_e c \omega_0}, \quad (\text{C.4})$$

el cual determina el régimen de interacción: lineal ($a_0 < 1$), cuasilineal ($a_0 \sim 1$) y no lineal ($a_0 > 1$). La Figura 49 muestra la evolución del *wakefield* y de la densidad electrónica para tres casos: (a) régimen lineal, $a_0 \sim 0.5$; (b) cuasilineal, $a_0 = 1.25$; y (c) no lineal, $a_0 = 2$. Los resultados concuerdan con lo reportado en la literatura [130,131],

mostrando que la amplitud del *wake* crece con la intensidad del pulso y que su perfil evoluciona de una forma sinusoidal suave hacia configuraciones más complejas en el régimen no lineal.

Cabe resaltar que los perfiles de densidad electrónica presentan un nivel de ruido que se hace más evidente a medida que aumenta la intensidad del pulso. Este efecto es esperado y se debe a la naturaleza discreta de las superpartículas en el método PIC [117,126,132]. La implementación de la subrutina de suavizado mediante un filtro de tres puntos, mostrada en el lado derecho de la Figura 49, atenúa de manera eficaz dicho ruido, preservando al mismo tiempo la dinámica física del sistema.

Figura 49: Perfiles del wakefield E_{wake} (línea azul) y de la densidad electrónica n_{plasma} (línea roja) al variar la amplitud del pulso láser: (a,d) $E_{laser} = 2$ TV/m, (b,e) $E_{laser} = 5$ TV/m, (c,f) $E_{laser} = 8$ TV/m. Izquierda: simulaciones sin filtrado, donde se observa el ruido característico del método PIC. Derecha: resultados con suavizado, mostrando la reducción efectiva del ruido.



Las pruebas realizadas en el marco de las simulaciones PIC unidimensionales permitieron validar de manera integral la correcta implementación del código desarrollado. Los resultados cualitativos y cuantitativos mostraron una concordancia notable con las predicciones teóricas en distintos regímenes de interacción, desde el lineal hasta el no lineal, y confirmaron la robustez numérica frente a variaciones de parámetros de discretización y de configuración del pulso láser. Asimismo, la inclusión de rutinas de filtrado demostró ser eficaz en el control del ruido inherente al método, preservando la física subyacente del proceso. Estos resultados consolidan la confianza en el código para abordar escenarios más complejos, constituyendo la base para las simulaciones bidimensionales y tridimensionales que se presentan a continuación.

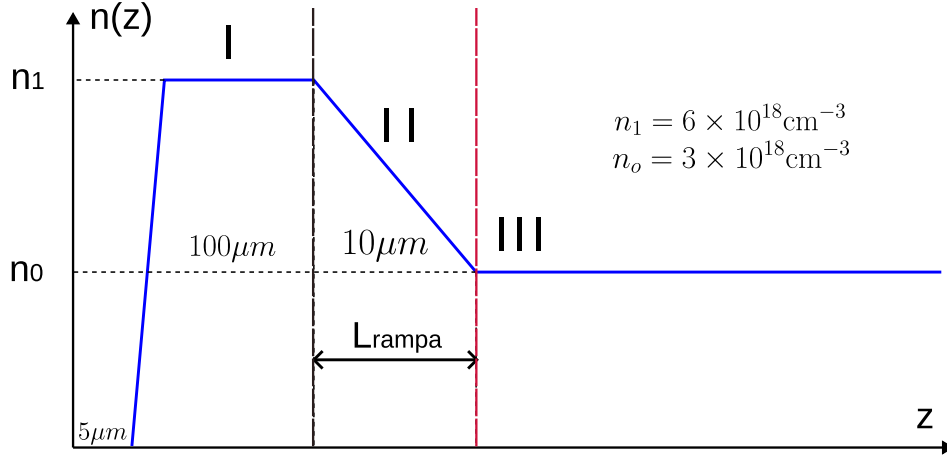
C.3.2 Implementación bidimensional

Continuando con el proceso de validación, el siguiente paso consiste en extender el código a dos dimensiones con el fin de incorporar efectos transversales y analizar escenarios más realistas. Para esta etapa se implementó un caso representativo de la aceleración basada en plasma: el mecanismo de inyección por *density down-ramp* [133, 134]. Este fenómeno se presenta cuando un pulso láser intenso excita una onda plásmica en el régimen no lineal (*blow-out*), expulsando la mayor parte de los electrones de la región de propagación y generando una cavidad libre de carga. Si el perfil de densidad del plasma presenta una disminución controlada a lo largo del eje de propagación (z), los electrones en la parte posterior de la cavidad se acumulan sobre el eje óptico y, debido a la fuerte repulsión electrostática, la onda plásmica colapsa localmente. Como resultado, un grupo de electrones se auto-inyecta en la cavidad y, tras abandonar la región de gradiente, dichos electrones permanecen atrapados y son posteriormente acelerados.

Para inducir este mecanismo, se diseñó un perfil de densidad, mostrado en la Figura 50, descrito de la siguiente forma:

- En los primeros $5\ \mu\text{m}$, el pulso se propaga en vacío, evitando perturbaciones iniciales.
- En los siguientes $100\ \mu\text{m}$, la densidad aumenta linealmente hasta un máximo de $n_{\text{top}} = 6.0 \times 10^{18}\ \text{cm}^{-3}$, lo que permite una transición gradual del pulso al plasma y evita la generación de ruido numérico.
- A continuación, la densidad se mantiene constante en n_1 durante $100\ \mu\text{m}$, proporcionando una región estable para la formación del *wakefield*.

Figura 50: Perfil longitudinal de densidad utilizado en las simulaciones de LWFA con rampa descendente. Tras una región inicial de vacío de $5\ \mu\text{m}$, la densidad aumenta linealmente en $100\ \mu\text{m}$ hasta una meseta de $n_1 = 6 \times 10^{18}\ \text{cm}^{-3}$ (región I). Posteriormente, desciende en una rampa lineal de $L_{\text{rampa}} = 10\ \mu\text{m}$ hasta $n_0 = 3 \times 10^{18}\ \text{cm}^{-3}$ (región II), y finalmente se mantiene uniforme en n_0 (región III). Las líneas punteadas negra y roja marcan el inicio y final de la rampa.



- Posteriormente, la densidad desciende linealmente en un tramo de $10\ \mu\text{m}$ hasta alcanzar un valor de constante de $n_0 = 3.0 \times 10^{18}\ \text{cm}^{-3}$, condición que activa la auto-inyección de electrones.
- Finalmente, en la región III, la densidad se mantiene constante en n_0 , lo que permite la aceleración sostenida de los electrones previamente inyectados.

La interacción se simuló a lo largo de $1050\ \mu\text{m}$ de propagación, distancia suficiente para abarcar las tres etapas principales del proceso: la formación del *wakefield*, la auto-inyección y la aceleración subsiguiente de los electrones atrapados.

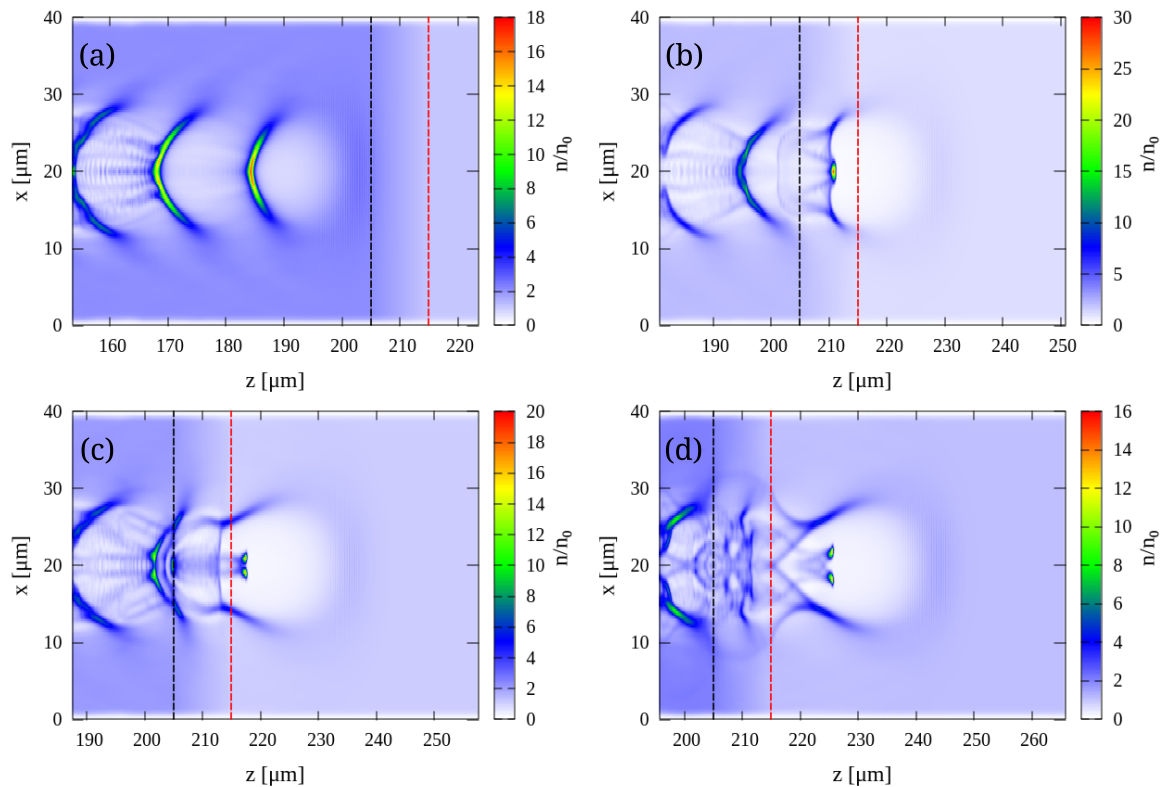
El pulso láser empleado se caracterizó por una amplitud normalizada $a_0 = 3$, una duración de $28\ \text{fs}$ y una longitud de onda $\lambda = 0.8\ \mu\text{m}$. Estos parámetros fueron seleccionados para garantizar la excitación del *wake* en el régimen no lineal. El ancho de haz se fijó en $w_0 = 12\ \mu\text{m}$, valor que proporciona un equilibrio adecuado entre los efectos de enfoque y difracción durante su propagación a lo largo del eje z .

La discretización espacial se realizó con una malla uniforme de resoluciones $\Delta z = 0.05\ \mu\text{m}$ y $\Delta x = 0.2\ \mu\text{m}$, suficientes para resolver tanto la longitud de onda del láser como la longitud de onda plasmónica y la dinámica electrónica. Para reducir el costo computacional se implementó la técnica de ventana móvil, con dimensiones de $70\ \mu\text{m}$ en z y $40\ \mu\text{m}$ en x , desplazándose a velocidad próxima a c , lo que permitió abarcar la región de interés ($1050\ \mu\text{m}$) sin requerir un dominio excesivamente grande. El plasma

fue representado mediante 16 superpartículas por celda en la región correspondiente a la densidad n_0 . El paso temporal se estableció según el criterio CFL, con un coeficiente de Courant de 0.5, asegurando estabilidad numérica y una resolución adecuada de la dinámica.

La Figura 51 muestra la evolución del proceso de auto-inyección electrónica en cuatro instantes representativos. El inicio de la inyección coincide con la entrada de la burbuja en la región de la rampa descendente de densidad, marcada por la línea vertical negra. Sin embargo, la formación completa del haz de electrones auto-inyectado solo se hace evidente una vez que la burbuja atraviesa por completo la rampa, delimitada por la línea vertical roja. Durante los primeros instantes, mientras el pulso aún recorre la rampa, el haz es apenas visible, pues se encuentra en proceso de formación.

Figura 51: Evolución del perfil de concentración electrónica en las cercanías de la rampa descendente de densidad al paso del pulso láser. Se presentan cuatro instantáneas que ilustran el inicio y desarrollo del proceso de auto-inyección, indicando con líneas verticales negra y roja el comienzo y final de la rampa, respectivamente.



Los resultados obtenidos evidencian que la física del fenómeno ha sido correctamente capturada: la inyección de electrones ocurre únicamente debido a la presencia de la rampa descendente. Para el caso analizado, se calculó que el haz

auto-inyectado posee una emitancia normalizada de $\epsilon_x \sim 0.37\pi$ mm mrad, valor consistente con los típicamente reportados en la literatura para sistemas de aceleración basada en plasma.

Con el fin de reafirmar la adecuada reproducción de la física involucrada, se exploró la dependencia del proceso de inyección con la longitud de la rampa. De acuerdo con estudios previos [135], un incremento en la longitud de la transición reduce el número de electrones auto-inyectados, ya que una variación más suave de la densidad limita la acumulación de carga en la cola de la burbuja e inhibe una ruptura brusca de la onda plásmica. No obstante, al mismo tiempo, una rampa más extensa ofrece un trayecto mayor antes de que el pulso abandone la región de gradiente, lo que permite que los electrones inyectados experimenten una preaceleración adicional dentro de la cavidad.

Este comportamiento se observa de manera clara en la Figura 52, donde se confirma tanto la reducción en el número de electrones inyectados como el incremento en la energía adquirida al aumentar la longitud de la rampa. Dichos resultados refuerzan la validez del código desarrollado, en particular en su capacidad para reproducir de forma realista la física esencial del mecanismo de inyección *density down-ramp*, y en general, la de la aceleración basada en plasma, objeto de estudio de este trabajo.

Figura 52: Dependencia del proceso de auto-inyección con la longitud de la rampa de densidad. En azul se muestra el número de superpartículas inyectadas y en rojo la energía promedio alcanzada por los electrones inyectados. Los puntos corresponden a los resultados obtenidos en las simulaciones y las líneas representan los respectivos ajustes exponenciales.

