

**USO DE RELACIONES DE PROPIEDADES CRUZADAS ENTRE LA
CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA Y LA VELOCIDAD DE ONDA
COMPRESIONAL, OBTENIDAS A PARTIR DE REGISTROS DE POZO,
PARA LA ESTIMACIÓN DE LA POROSIDAD DE LA ROCA.**

GLORIA JUDITH PALACIO OSORIO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE ING. ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA 2012**

**USO DE RELACIONES DE PROPIEDADES CRUZADAS ENTRE LA
CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA Y LA VELOCIDAD DE ONDA
COMPRESIONAL, OBTENIDAS A PARTIR DE REGISTROS DE POZO,
PARA LA ESTIMACIÓN DE LA POROSIDAD DE LA ROCA.**

GLORIA JUDITH PALACIO OSORIO

**Trabajo de Investigación para optar para el título de
Magíster en Ingeniería Electrónica**

Tesis desarrollada dentro del Convenio de Cooperación N°005 de 2003

DIRECTOR:

DR. HERMANN RAÚL VARGAS TORRES

CODIRECTOR:

PhD. WILLIAM AGUDELO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE ING. ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA 2012**

DEDICATORIA:

“Si yo hablase lenguas humanas y angélicas, y no tengo amor, vengo a ser como metal que resuena, o címbalo que retiñe. ²Y si tuviese profecía, y entendiéndose todos los misterios y toda ciencia, y si tuviese toda la fe, de tal manera que trasladase los montes, y no tengo amor, nada soy.” I Corintios 1-2.

Dedico este trabajo de investigación a Dios por darme la sabiduría, la paciencia y la constancia para culminar el proyecto.

A mi amado esposo Omar Leonardo por su amor y entrega, por su compañía a cada instante, a veces invisible pero totalmente perceptible.

A mi adorada hija, Maria Paula, verla crecer es el mejor de los regalos y el mayor de los motivos para nunca desfallecer.

A mis padres Jorge Eduardo y Gloria, porque me enseñaron a ser la mujer que hoy soy, por sus sacrificios y por dedicar gran parte de su vida en hacernos hombres y mujeres de bien...gracias....mil gracias.

A mis hermanos Jorge, Ingrid y Silvia, compañeros del camino, gracias por su amistad.

A mis familiares, amigos y compañeros, por sus palabras de aliento y compañía.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mis más sinceros agradecimientos a:

A Yaqueline Figeredo Báez, por su orientación e invaluable ideas, por sembrar la semillita de la investigación en mí.

A William Agudelo, por su apoyo en todo momento.

Al profesor Hermann Raúl Vargas Torres, por su orientación, confianza y apoyo incondicional.

Al grupo de investigación de Petrosísmica UIS-ICP por abrirme la puertas al mundo de la investigación.

A mis compañeros de maestría, por su compañía y amistad.

A todos aquellos que creyeron en mí, en mi proyecto...gracias.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	16
1. RELACIONES ENTRE PROPIEDADES FÍSICAS DE LA ROCA.	18
1.1 Porosidad	20
1.1.1 Clasificación de la porosidad	21
1.1.2 Parámetros que influyen en la porosidad	21
1.1.2.1 Influencia de las propiedades de la geometría del grano.	21
1.1.2.2 Influencia del proceso de formación, profundidad y presión....	23
1.1.3 Determinación de la porosidad.	24
1.1.3.1 Análisis de corazones.....	24
1.1.3.2 Porosidad obtenida a través de los registros de pozo.	26
1.2 Propagación de las Ondas Acústicas en la roca.....	35
1.2.1 Velocidad de ondas acústicas en rocas sedimentarias consolidadas	37
1.2.2 Velocidad de ondas elásticas en rocas sedimentarias no consolidadas.....	39
1.3 Propiedades eléctricas de las rocas	40
1.3.1 Conductividad Electrolítica	42
1.3.2 Conducción electroquímica	49
1.4 Consideraciones para el modelado de la roca.....	51
1.4.1 Elementos paralelos.....	52
1.4.2 Geometría regular de partículas o poros.....	53
1.4.3 Constituyentes de roca acoplados.....	54
1.4.4 Modelo estructurado	55
1.5 Ecuaciones constitutivas para las propiedades de la roca	56
1.5.1 Teorías Mixtas.....	57
1.5.2 Teoría de la homogenización [27].....	57
1.5.3 Formato de presentación de los resultados.....	59
1.5.4 Ecuaciones constitutivas de la conductividad eléctrica	61
1.5.5 Ecuaciones constitutivas de la velocidad de onda compresional....	65

1.6	Relaciones de propiedades cruzadas entre propiedades físicas de las rocas.	70
1.6.1	Relaciones entre las propiedades determinadas por métodos geofísicos.....	70
1.6.2	Consideraciones al establecer relaciones entre las propiedades	74
1.6.3	Relaciones de propiedades cruzadas entre velocidad de onda compresional con la conductividad eléctrica	75
2	ESTADO DEL ARTE	80
2.1.	Estudio de las relaciones de propiedades cruzadas en la ciencia de materiales.....	81
2.2.	Estudio de las relaciones entre propiedades físicas de la roca para determinar propiedades en la interpretación de registros de pozo.....	82
2.3.	Discusiones y desafíos sobre el empleo de la metodología de relaciones de propiedades cruzadas.....	95
3	METODOLOGÍA Y RESULTADOS.....	97
3.1	Etapas de la metodología	98
3.1.1	Recolección de la información y parámetros físicos de los registros de pozos para estudiar la formación.....	98
3.1.2	Evaluación de las ecuaciones constitutivas que modelan la conductividad eléctrica y la velocidad de onda compresional.	99
3.1.3	Establecimiento de la relación de propiedad cruzada más adecuada para los datos.....	99
3.1.4	Búsqueda del nuevo valor de porosidad.....	100
3.1.5.	Validación de los valores de la porosidad calculados.....	109
	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	119
	BIBLIOGRAFÍA	122
	ANEXOS.....	126

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Clasificación de la porosidad de la roca.....	22
Tabla 2. Resultados de la regresión	87
Tabla 3. Resultados de la regresión	87

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Definición de porosidad.	20
Figura 2. Dispersión del tamaño del grano.	22
Figura 3. Contactos en los granos.	24
Figura 4. Almacenamiento de corazones en el laboratorio.	25
Figura 5. Registro de Densidad de una formación.....	27
Figura 6. Determinación de la porosidad del registro de densidad.	29
Figura 7. Registro Neutrón de una formación	30
Figura 8. Transmisión de la energía acústica.	31
Figura 9. Herramienta Sónica básica.....	32
Figura 10. Señales recibidas en la herramienta sónica.	33
Figura 11. Registro Sónico	34
Figura 12. Propagación de una onda longitudinal.....	35
Figura 13. Principio de inducción.....	42
Figura 14. Aplicación del registro de inducción.....	43
Figura 15. Registro Eléctrico de Inducción	45
Figura 16. Conductividad vs. Temperatura	46
Figura 17. Varias texturas de roca.	48
Figura 18. Rangos de resistividad en tipos de roca y minerales.	49
Figura 19. Efectos de varios procesos geológicos en la resistividad.	49
Figura 20. Iones absorbidos en una partícula de arcilla.....	50
Figura 21. Elementos paralelos	52
Figura 22. Modelo de Geometría Regular.....	53
Figura 23. Constituyentes de rocas acoplados.	54
Figura 24. Modelo estructurado.	55
Figura 25. Homogenización de un material micro-heterogéneo	58
Figura 26: Modelo de roca con defectos internos	72
Figura 27. Modelo para una roca porosa.	73
Figura 28. Ilustración de los términos	75
Figura 29. Generación de una función escala.	84
Figura 30 Análisis de la ecuación de Archie.	88
Figura 31: Velocidad versus factor de formación para una roca saturada con salmuera.	91
Figura 32. Vp versus Rw/Rt.	92
Figura 33. Relaciones de velocidad de onda P y conductividad	94
Figura 34. Relaciones de velocidad de onda P y conductividad	95
Figura 35: Diagrama de bloques.....	108

Figura 36. Modelos de velocidad como función de la porosidad correspondientes a un reservorio de arena saturada con petróleo.	110
Figura 37. Modelos de Conductividad como función de la porosidad correspondiente a un reservorio de arena saturada con petróleo.....	110
Figura 38. Datos de campo de velocidad vs. porosidad.	111
Figura 39. Datos de campo de conductividad vs. porosidad.....	111
Figura 40. Modelos de velocidad de onda compresional como función de la porosidad y datos reales de velocidad vs. porosidad, correspondientes a un reservorio de arena saturada con petróleo.	112
Figura 41. Diferentes modelos de conductividad eléctrica como función de la porosidad y datos reales de conductividad vs. Porosidad correspondientes a un reservorio de arena saturada con petróleo.	113
Figura 42. Relación de propiedad cruzada entre la Velocidad de Gassmann y la Conductividad de Crim.	113
Figura 43. Relación de propiedad cruzada entre la Velocidad de Gassmann y la Conductividad de Crim con datos reales.	114
Figura 44. Conductividad vs. profundidad para los datos de campo y la conductividad calculada a partir de los nuevos valores de porosidad.....	115
Figura 45. Conductividad vs. porosidad para: datos de los registros de pozo, conductividad calculada a partir de los valores optimizados de porosidad y la función de Crim.	116
Figura 46. Porosidad vs. profundidad para: los datos de los registros de pozo, los valores optimizados y los obtenidos a partir de los corazones de la zona de estudio.	116
Figura 47. Velocidad vs. profundidad para los datos de campo y la velocidad calculada a partir de los nuevos valores de porosidad.	117
Figura 48. Velocidad vs. porosidad para: datos de los registros de pozo, velocidad calculada a partir de los valores optimizados de porosidad y la función de Gassmann.	118
Figura 49. Porosidad vs. profundidad para: los datos de los registros de pozo, los valores optimizados y los obtenidos a partir de los corazones de la zona de estudio.	118
Figura 50: Propagación de los campos eléctrico y magnético en la dirección de y, con polarización en z.	129
Figura 51. Fuerzas de esfuerzo actuando en una partícula de un material vibratorio.	131
Figura 52. Transmisión de las fuerzas aplicadas entre las partículas al interior de un sólido.....	131
Figura 53. Definición de las fuerzas de tensión actuando en un elemento diferencial de volumen.	131

Figura 54 Deformación 133
Figura 55. (a) Modelo de la ley de Hooke, (b) Modelo de Kelvin-Voigt..... 135
Figura 56. Modelo mecánico de Maxwell..... 136
Figura 57. Desplazamiento 138

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A. ANALOGÍA ACÚSTICA ELECTROMAGNÉTICA.	126
A.1 Ondas electromagnéticas.	127
A.1.2 Ondas acústicas.	130
A.1.3 Establecimiento de la analogía en 1D.	139
A.2 Teoría electromagnética y acústica para aplicaciones en geofísica.	139
A.2.1 Electromagnetismo.	139
A.2.2 Acústica.	141
A.3 Establecimiento de la analogía entre las propiedades de la roca para aplicaciones en geofísica.	143
ANEXO B. FUNCIONAMIENTO DEL ALGORITMO.	145

RESUMEN

TITULO: Uso de relaciones de propiedades cruzadas entre la conductividad eléctrica y la velocidad de onda compresional, obtenidas a partir de registros de pozo, para la estimación de la porosidad de la roca¹.

PALABRAS CLAVES: Relaciones de propiedades cruzadas, porosidad, velocidad de onda, conductividad eléctrica, analogía acústica electromagnética.

AUTOR: Gloria Judith Palacio Osorio²

El agotamiento de las reservas de crudos convencionales ha hecho que las compañías petroleras dirijan sus esfuerzos hacia la recuperación de campos maduros. Sin embargo, no cualquier campo maduro puede aplicar para estas técnicas. En consecuencia, se requiere hacer un estudio de las características del yacimiento a partir de los registros de pozo existentes para determinar cuáles pozos cumplen con las condiciones necesarias para estos procesos.

Este trabajo de investigación propone utilizar una metodología basada en la analogía existente entre la velocidad de propagación de ondas electromagnéticas y acústicas, a bajas frecuencias, en un medio homogéneo, isotrópico y viscoelástico, como es el caso de una roca reservorio; para optimizar los valores de porosidad.

Por tanto, se aplica la metodología de relaciones de propiedades cruzadas y se implementa un algoritmo de optimización con los valores obtenidos de los registros de pozo eléctricos y sínicos. Es así como, a partir de las ecuaciones constitutivas que definen la velocidad de onda compresional y la resistividad eléctrica, y de las relaciones existentes entre estas propiedades, se obtienen las ecuaciones constitutivas que mejor representan el tipo de roca en estudio. Con estas ecuaciones se ejecuta el algoritmo de optimización que permite mejorar la estimación de la porosidad de la roca.

¹ Trabajo de investigación.

² Facultad de Ingenierías Físico mecánicas, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones, Director: Hermann Raúl Vargas Torres Universidad Industrial de Santander, Codirector: William Agudelo Ecopetrol ICP

ABSTRACT

TITLE: Using cross-property relations between electrical conductivity and compressional wave velocity, obtained from well logs, to estimate the porosity of the rock.³

AUTHOR: Gloria Judith Palacio Osorio⁴

KEYWORDS: Cross-property, porosity, wave velocity, electric conductivity, analogy acoustic-electromagnetic.

The petroleum companies, interested in improving the production of the mature fields, need to confirm the quantity of crude oil that the above mentioned deposits can contain and how much can be extracted. In this respect becomes necessary the estimation of petrophysical parameters as the porosity, across new methodologies, which allow to determine the existing volume of hydrocarbons.

The porosity of a reservoir is a petrophysical property essential in the calculation of reserves. Consequently, throughout the years, have been implemented diverse techniques for its determination like analyses of samples core of reservoir and the interpretation of the well logs, between others. The second technique is based on the measurement of the response of the reservoir rock to a stimulus, which can be of electrical, acoustic, nuclear or electromagnetic nature. Therefore, since some physical properties of the rock change with the porosity, this property allows to establish a direct correlation between the properties. This type of relations between physical properties is known as cross-property relations, who widely have been studied in the science of materials and some of its results have been applied to the rock physics.

Therefore, this research suggests the possibility of obtaining the porosity of the rock from relationships between physical properties of the rock or cross-property relations. We modeled the heterogeneities of the rock by relations, through the effective properties, which can project homogeneity in the heterogeneity at different scales.

³ Trabajo de Investigación

⁴ Facultad de Ingenierías Físicomecánicas, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones, Director: Hermann Raúl Vargas Torres Universidad Industrial de Santander, Codirector: William Agudelo Ecopetrol ICP

INTRODUCCIÓN.

En la actualidad, una de las estrategias para aumentar la producción de crudo se fundamenta en la recuperación de campos maduros, ya que la exploración de nuevos yacimientos implica una alta inversión y riesgo de fracaso. De hecho, alrededor de un 70 por ciento del crudo extraído en la actualidad proviene de campos con más de 30 años de producción [40]. Por tanto, es más viable económicamente, mejorar los procesos de recuperación de crudo con alguna de las técnicas modernas de extracción artificial, que invertir en nuevos proyectos de exploración petrolera [40]. Sin embargo, no cualquier campo maduro puede aplicar para estas técnicas. En consecuencia, se requiere hacer un estudio de las características del yacimiento a partir de los registros de pozo existentes para determinar cuáles pozos cumplen con las condiciones necesarias para estos procesos.

En Colombia, el ICP realiza investigaciones que permiten mejorar la caracterización de esos yacimientos, tal como la generación de nuevas metodologías que apoyen el cálculo de propiedades de la roca (porosidad, saturación de agua y permeabilidad). Las cuales son obtenidas a partir de la información existente de los registros de pozo eléctricos y sínicos.

Esta investigación está enmarcada dentro de los esfuerzos necesarios para optimizar el cálculo de la porosidad y constituye una herramienta para los analistas de pozo. En este sentido, este trabajo propone utilizar una metodología basada en la analogía existente entre la velocidad de propagación de ondas electromagnéticas y acústicas, a bajas frecuencias, en un medio homogéneo, isotrópico y viscoelástico, como es el caso de una roca reservorio.

Por tanto, se aplica la metodología de relaciones de propiedades cruzadas y se implementa un algoritmo de optimización con los valores obtenidos de los registros de pozo eléctricos y sínicos. Es así como, a partir de las ecuaciones constitutivas que definen la velocidad de onda compresional y la resistividad eléctrica, y de las relaciones existentes entre estas propiedades, se obtienen las ecuaciones constitutivas que mejor representan el tipo de roca en estudio. Con estas ecuaciones se ejecuta el algoritmo de optimización que permite mejorar la estimación de la porosidad de la roca.

El siguiente documento está distribuido en tres capítulos. En el primer capítulo se estudia la porosidad y sus relaciones con las propiedades acústicas y eléctricas de la roca, se exponen los modelos y teorías que describen el comportamiento de la roca por medio de las ecuaciones constitutivas, y se presentan las relaciones entre las propiedades descritas. En el segundo capítulo se encuentra un estudio detallado del estado del arte con respecto a investigaciones y trabajos desarrollados con la metodología de relaciones de propiedades cruzadas. En el tercer capítulo se describe la metodología implementada y se muestran los resultados de la investigación.

En el anexo A se estudia y demuestra la analogía existente entre la conductividad eléctrica y la velocidad de onda compresional a bajas frecuencias. Dicha analogía permite construir la fundamentación para plantear la relación que existe entre velocidad de onda acústica y conductividad eléctrica a partir de la porosidad.

1. RELACIONES ENTRE PROPIEDADES FÍSICAS DE LA ROCA.

El uso de las relaciones entre las propiedades físicas de las rocas resulta de la necesidad de obtener más información acerca de las propiedades de la roca. Así como, mayor precisión, fiabilidad y validez representativa de los resultados obtenidos en exploraciones geofísicas, en registros de pozos y en otros ambientes geofísicos.

Al buscar una solución a un problema de identificación de parámetros geofísicos se emplean los registros de pozo, los cuales se adquieren con los instrumentos de campo. Estos registros señalan datos con información relevante como: velocidades de onda, densidades y conductividades, entre otras magnitudes físicas. Por tanto, la interpretación cuantitativa de los registros es una forma de estimar indirectamente la distribución de los fluidos contenidos en el poro, representada en propiedades como porosidad, saturación y permeabilidad de la roca [16].

A partir de los datos que se obtienen de los registros, de las relaciones y de las transformaciones entre las propiedades físicas de las rocas, se logra estimar la distribución de una propiedad. Estas relaciones entre las propiedades se derivan de modelos teóricos o empíricos. Por tanto, las relaciones permiten estimar las propiedades que determinan la distribución de los fluidos almacenados en la roca. Sin embargo, debido a que las rocas son “minerales naturales cristalizados” [2-], cuya heterogeneidad es el resultado del efecto de un número indeterminado de factores, se tiene que las relaciones entre las propiedades dependen de la heterogeneidad⁵ de la roca [3-].

En general, las propiedades físicas de la roca y las relaciones que se establecen entre ellas son función de la composición de la roca, de los fluidos contenidos en los poros, de algunas simplificaciones de isotropía y homogeneidad, y de las características de las ondas con las que se estudia el medio.

⁵Para considerar la heterogeneidad, se establece el siguiente concepto de homogenización: “Un material con variaciones en sus propiedades a pequeña escala y con inclusiones embebidas de diferentes materiales o grietas permanentes, actúa físicamente como un medio homogéneo, si la longitud de onda de la excitación es grande comparada con la escala de las variaciones en la estructura o el tamaño de las inclusiones [4-]”.

Este capítulo es el resultado de la investigación de algunas propiedades físicas de las rocas y las relaciones que se pueden establecer entre ellas. En la sección 1.1, se expone el concepto de porosidad: su clasificación, los parámetros que marcan tendencias y afectan su valor, así como los procesos que permiten determinarla. En la sección 1.2 se estudia la velocidad del sonido en la roca y su comportamiento en diferentes tipos de roca. En la sección 1.3 se estudian las propiedades eléctricas de la roca, en particular la conductividad eléctrica. En la sección 1.4 se presentan los modelos que permiten representar matemáticamente el comportamiento de la roca a través de sus diferentes propiedades físicas. A partir de dichos modelos y del concepto de “teorías mixtas” es posible establecer las diferentes ecuaciones constitutivas que definen la velocidad de onda compresional y la conductividad eléctrica, tal como se presenta en la sección 1.5. Finalmente en la sección 1.6 se muestra la metodología de relaciones de propiedades cruzadas, sus modelos; y se concluye con las diferentes relaciones entre la velocidad de onda compresional y la conductividad eléctrica de la roca.

1.1 Porosidad

La porosidad es una propiedad física de la roca, que se define como la fracción del volumen total de la roca ocupado por espacios vacíos, e influye en la mayoría de las propiedades físicas de la roca tales como: velocidad de las ondas acústicas y conductividad eléctrica, entre otras. En la figura 1 se muestra en dos dimensiones una sección porosa y su equivalente agregado. Allí se representan:

- Los poros o extensiones locales en un sistema poro-espacio, los cuales proporcionan la mayoría del volumen disponible para almacenar fluidos.
- Las gargantas de poro, las cuales corresponden a las uniones entre poros, éstas son las restricciones más significantes para que el fluido fluya.

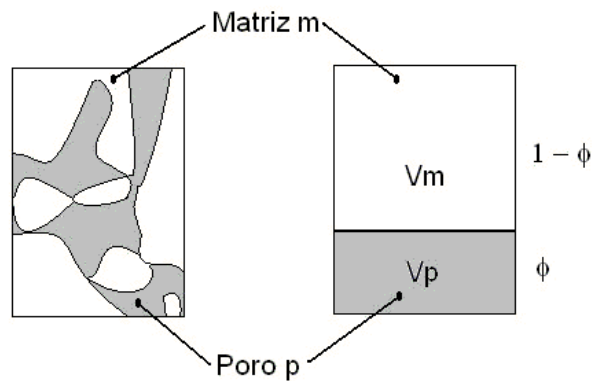


Figura 1. Definición de porosidad.
 V_m : volumen de la sustancia sólida, V_p : Volumen del espacio poroso.
Fuente: [44].

La porosidad es una cantidad adimensional la cual se expresa como una fracción decimal o un porcentaje, tal como se expresa en la ecuación (1.1).

$$\phi = \frac{V_p}{V} = 1 - \frac{V_m}{V} \quad (1.1)$$

Donde:

V : Volumen total de la roca.

V_p : Volumen del espacio poroso.

V_m : Volumen de la sustancia sólida.

El valor de la porosidad se puede determinar directamente, a través de las muestras de roca, llamadas también núcleos o corazones; ó indirectamente por medio de la evaluación de los registros de pozo. Sin embargo, el valor de porosidad hallado con los registros de pozo difiere de la definición expuesta en la figura 1, puesto que, corresponde a un cálculo estadístico el cual no describe la verdadera distribución del volumen del poro en la roca. Por esta razón, para validar estos datos son necesarios los análisis de laboratorio de corazones. Tanto los análisis de laboratorio como las técnicas a través de los registros de pozo serán explicados más adelante en éste capítulo.

1.1.1 Clasificación de la porosidad

En la tabla 1, se presentan los diferentes criterios bajo los cuales se puede clasificar la porosidad, así como los autores que los han propuesto. Allí se señalan en las celdas de color amarillo la porosidad primaria y en las celdas de color verde la porosidad secundaria.

1.1.2 Parámetros que influyen en la porosidad

Los aspectos que marcan tendencias y afectan el valor de la porosidad son: tipo de roca, propiedades de la geometría de grano, proceso diagenético, profundidad y presión [42]. A continuación se explican.

1.1.2.1 Influencia de las propiedades de la geometría del grano.

Las propiedades de la geometría de grano tienen los siguientes efectos en la porosidad primaria:

- a) *Tamaño de grano*: En teoría el tamaño del grano no influye en el valor de porosidad, sin embargo la porosidad tiende a disminuir sí el tamaño del grano aumenta. Adicionalmente, si se incrementan las fuerzas superficiales para sedimentos de granos finos, se incrementa la posibilidad de formarse esqueletos de roca con alta porosidad.
- b) *Distribución del tamaño de grano (grado)*: La porosidad aumenta cuando los tamaños de los granos son similares. En este sentido, en sedimentos pobremente ordenados (diferente tamaños) el espacio entre los granos

grandes es ocupado por los granos más pequeños, disminuyendo de ésta forma la porosidad, como se aprecia en la figura 2.

Tabla 1. Clasificación de la porosidad de la roca

		TIPO DE POROSIDAD		
TIPO DE CLASIFICACIÓN	Origen Resultado de varios procesos geológicos, físicos y químicos.	Primaria: Se origina durante la génesis de la roca.		
		Secundaria: Se origina durante la historia geológica de la roca.		
	Estructura Petrográfica [44].	Inter-granular: Espacio entre granos.		
		Intra-granular: Generada por contracción de los granos.		
		Fractura: Causada por acción química o mecánica.		
		Vulgar: Causada por organismos durante la formación o acción química.		
	De acuerdo con [8].	Desarrollo de la porosidad en relación a la historia de la roca.	Estructura selectiva: Corresponde a los espacios inter-partícula, intra-partícula, inter-cristal.	
			Estructura no selectiva: Corresponde al los espacios de fractura, canal y caverna.	
			Estructura selectiva y no selectiva: Corresponde a los espacios en rocas compuestas (mármol), o de agujeros taladrados.	
		Según tipo y grado de interconexión en los poros.	Total: Todos los espacios porosos $\Phi_{Total} = \Phi_{Prim} + \Phi_{Secun} \quad (1.2)$	
			Interconectada $\Phi_{conectada}$: Sólo aquellos espacios interconectados	
			Potencial Φ_{pot} : Parte de la porosidad interconectada en la cual el diámetro de los canales permite fluir al flujo.	
Efectiva Φ_{eff} : Disponible para fluidos libres, excluye todos los espacios no conectados. Utilizado en análisis de registros.				

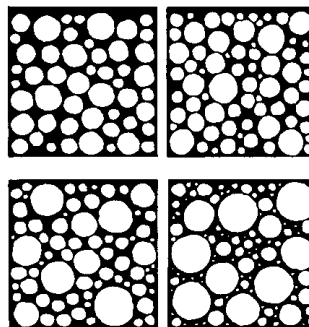


Figura 2. Dispersión del tamaño del grano.

Fuente [42].

- c) *Forma de grano*: El valor de la porosidad tiende a incrementar con el cambio de granos redondeados a partículas angulares. Por consiguiente, la mayor porosidad resulta de partículas altamente anisométricas.

1.1.2.2 Influencia del proceso de formación, profundidad y presión.

Se encuentran tres mecanismos principales, dentro del proceso de formación de la roca ó diagenético, que causan la compactación y pérdida de porosidad [14], los cuales corresponden a:

- a) *Carga sedimentaria*: Esta carga ocasiona la reorganización del medio poroso al expulsar el agua libre o al expulsar el agua de los contornos.
- b) *Deformación mecánica de los granos*: Esta deformación puede ser elástica, plástica o viscosa, la cual crea el esqueleto del medio poroso.
- c) *Deformación química*: Esta deformación incluye el proceso de solución y cristalización de los minerales de la roca.

La porosidad disminuye de forma no lineal cuando la profundidad incrementa, debido a que la presión que actúa en el esqueleto de la roca causa compresión del espacio poroso. Esta presión se origina a partir de las presiones hidrostática y litoestática. Por tanto, la porosidad inter-granular disminuye con los siguientes estados [8.]:

- a) *Empaquetado*: Las partículas sedimentadas sueltas se deslizan a posiciones más estables bajo la presión o el aumento de la sobrecarga formando el empaque más ajustado con menor porosidad y mayor contacto entre los granos. Sucede en arenas y areniscas.
- b) *Compactación*: La porosidad disminuye más por la deformación de los granos que por el incremento de presión de sobrecarga. En la figura 3 se puede apreciar dicha deformación, de tal forma que, los puntos de contacto entre los granos cambian gradualmente a contactos planos y finalmente a contactos cóncavos-convexos o contactos suturados. Esto sucede en arcillas.

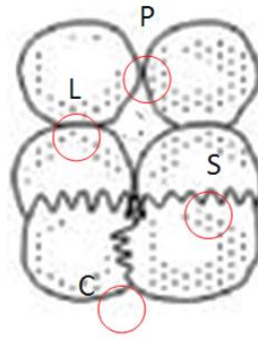


Figura 3. Contactos en los granos.

Puntos de contacto (P), contactos largos (L), contacto cóncavo convexo (C), contactos suturados (S).

Fuente: [42].

- c) *Cementación*: Corresponde a una deposición de material disuelto en superficies libres de granos, especialmente alrededor de éstos, reduciéndose aún más el espacio poroso y bloqueando pasajes estrechos.

1.1.3 Determinación de la porosidad.

La porosidad de la roca reservorio se puede determinar por medio de dos procesos: El primero se relaciona con la toma de muestras de roca llamadas corazones o núcleos, las cuales se analizan en laboratorio. El segundo corresponde a técnicas basadas en la utilización de registros de pozo. Entre estos dos procesos, el análisis de corazones es el método más confiable [17]. A continuación se describen estas dos técnicas.

1.1.3.1 Análisis de corazones.

Los corazones corresponden a muestras de roca de la sección perforada. Con la ayuda de la descripción de estos corazones se puede conocer la columna litológica de la zona y la profundidad a la que se encuentran las formaciones que la integran. Por lo regular, los corazones se obtienen sólo en los primeros pozos, ya que la toma de éstos resulta muy costosa. Sin embargo, la información obtenida a través de éstos es la fuente de validación para la información proveniente de los registros geofísicos, de tal forma que, se puede caracterizar completamente una determinada formación. En la figura 4, se muestra un grupo de muestras de corazones.

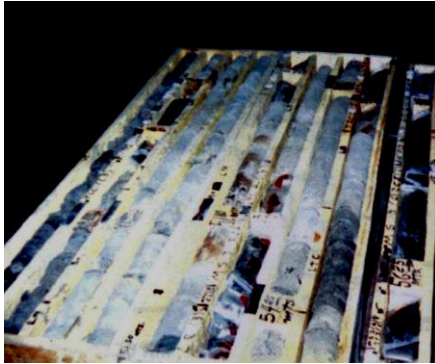


Figura 4. Almacenamiento de corazones en el laboratorio.

Fuente: [14]

En este sentido, de una muestra de roca básicamente se comparan tres volúmenes diferentes:

V_B : Volumen de la roca.

V_P : Volumen del poro.

V_G : Volumen del grano.

Estos tres volúmenes están relacionados con la siguiente ecuación:

$$V_B = V_P + V_G \quad (1.3)$$

Por lo tanto, para la medida de la porosidad, es necesario determinar sólo dos de los tres volúmenes, los cuales se exponen a continuación:

- a) *Volumen de la roca*: Este valor se determina de las dimensiones de la muestra, longitud y diámetro, puesto que viene en forma cilíndrica. Sin embargo, cuando existen muestras con irregularidades geométricas, resultan valores no representativos de V_B y por consiguiente en porosidades incorrectas. Para evitar dichas incertidumbres se procede a medir el volumen del núcleo por medio del principio de Arquímedes, al medir el volumen del fluido desplazado por dicha muestra.
- b) *Volumen del poro*: La metodología para calcular este volumen consiste en saturar una muestra de roca con un fluido que circule por ella bajo cambios de presión. Este líquido penetra en el espacio del poro y debido a que la presión es alta, el fluido penetra en los poros más pequeños. Sin embargo, la penetración nunca es perfecta debido a que se necesitaría una presión infinita para hacer que todos los poros se llenen completamente, lo que ocasiona daños en la estructura. Finalmente, el

fluido se extrae a condiciones de presión hidrostática y se mide su volumen. Dicho volumen corresponde al volumen del poro.

- c) *Volumen del grano*: La muestra de roca se aplasta para medir el volumen de los granos, lo cual destruye todos los poros. Por lo tanto, se obtiene la porosidad total cuando el volumen del grano es restado del volumen de la roca. Igualmente, el volumen del grano algunas veces es calculado del valor de la masa de la muestra seca al conocer la densidad promedio del grano. En el caso de la arena, la densidad promedio del cuarzo, se usa para calcular el volumen del grano. Sin embargo en las formaciones puede variar la litología y por lo tanto la densidad del grano no es una densidad de un mineral en particular.

1.1.3.2 Porosidad obtenida a través de los registros de pozo.

Un registro de pozo se define como: “toda aquella representación gráfica de una característica física de las formaciones, atravesadas por un pozo, en función de la profundidad” [16]. Por tanto, los registros permiten determinar características físicas y litológicas típicas de una formación que contiene hidrocarburos.

La porosidad se obtiene a partir de los siguientes registros: densidad, neutrón compensado y sónico. Estos se describen a continuación.

a. Registro de densidad de la formación:

Este registro se muestra en la figura 5 y se utiliza principalmente para la medición de la densidad de la formación, siendo de gran ayuda en la evaluación de la porosidad de las formaciones. El principio físico que rige la toma de este registro se relaciona con los diferentes niveles de energía de los rayos gamma al interactuar con la materia. De tal forma que, dichos niveles corresponden a la densidad de los electrones de la formación.

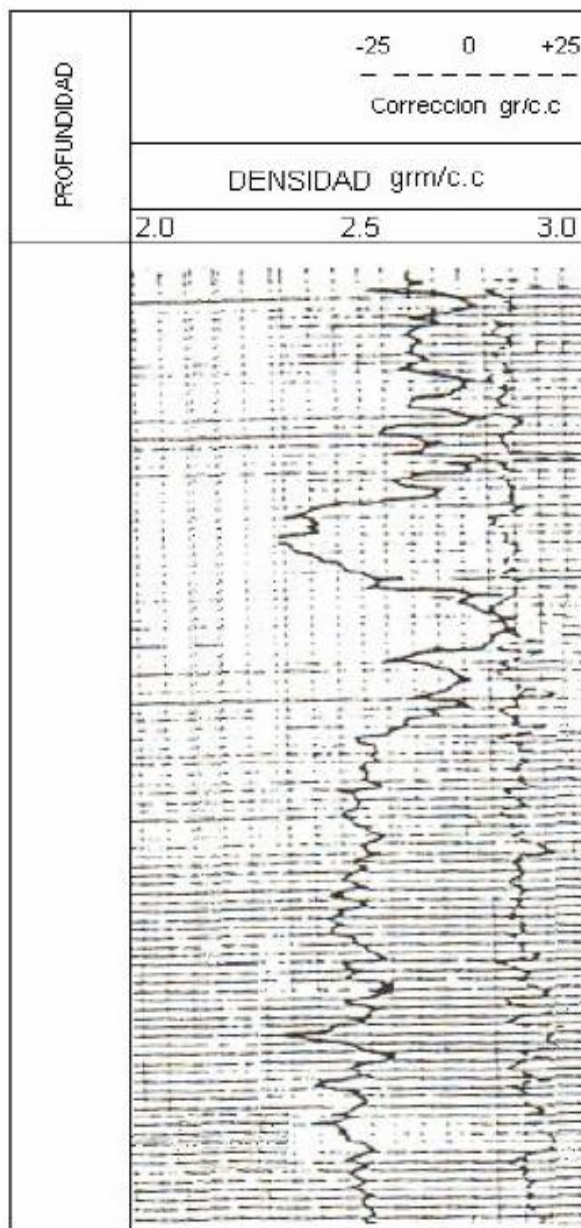


Figura 5. Registro de Densidad de una formación
Fuente: [16]

En este orden de ideas, para una sustancia constituida de un solo elemento, la densidad electrónica (ρ_e) se relaciona con la densidad volumétrica de la sustancia en la formación (ρ_b) mediante la ecuación (1.4):

$$\rho_b = \rho_e \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot Z} \right) \quad (1.4)$$

Donde:

ρ_b : Densidad volumétrica de la formación.

Z: Número atómico.

A: Peso Atómico.

La porosidad se deriva a partir de la densidad volumétrica en forma directa. Para formaciones limpias con densidad de matriz (o grano) ρ_{ma} , densidad de fluido ρ_f , y porosidad ϕ ; la densidad volumétrica ρ_b está dada por la sumatoria de los componentes de fluido y de la matriz:

$$\rho_b = \phi\rho_f + (1 - \phi)\rho_{ma} \quad (1.5)$$

Por tanto, la porosidad está dada por:

$$\phi = \frac{(\rho_{ma} - \rho_b)}{\rho_{ma} - \rho_f} \quad (1.6)$$

Donde, las densidades de la matriz en g/cc típicamente son:

$\rho_{ma} = 2,65$ para arenas, areniscas y cuarcitas.

= 2,68 para arenas limosas.

= 2,71 para calizas.

= 2,87 para dolomitas.

En formaciones que contienen agua, la densidad del fluido es típicamente la del lodo filtrado:

$\rho_f = 1,0$ para lodo fresco.

= 1,0 + 0,73 N para lodo salado.

Donde N es la concentración de cloruro de sodio en ppm x 10^{-6} .

En este sentido, la porosidad se deriva de la figura 6, la cual proporciona una solución gráfica para la ecuación (1.6). Allí, la densidad volumétrica está ubicada en la escala horizontal y la porosidad se ve en la escala vertical para los valores apropiados de ρ_{ma} y ρ_f .

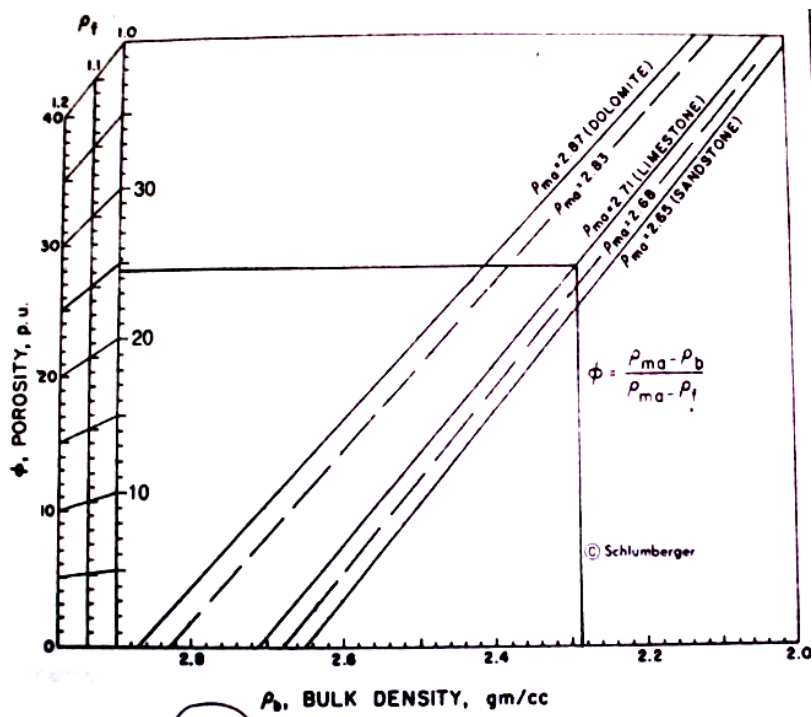


Figura 6. Determinación de la porosidad del registro de densidad.
Fuente: [12-].

b. Registro Neutrón Compensado

Este tipo de registro indica la cantidad de hidrógeno presente en los poros de la formación, por tanto, cuando hay presencia de líquidos provee valores muy aproximados al valor real de la porosidad, debido a que estos llenan el espacio poroso. Así mismo, este registro es útil como indicador de zonas gasíferas, ya que estas zonas contienen una menor cantidad de hidrógeno, entonces la porosidad aparente medida será baja. En este sentido, al comparar esta porosidad aparente con la obtenida por medio de otras herramientas, se determina la presencia de gas [44]. En la figura 7 se muestra un ejemplo de un registro neutrón.

Este registro refleja el comportamiento de los neutrones en la formación. Para evaluar las formaciones con estos registros se emiten neutrones de alta energía desde una fuente radioactiva, los cuales chocan con los materiales de la formación semejante a una colisión elástica. Con cada colisión el neutrón pierde algo de energía, la cual depende de la relación entre masas de los núcleos. En pocos microsegundos los neutrones han sido frenados debido a las sucesivas colisiones, luego se esparcen aleatoriamente sin perder más energía. Finalmente, son capturados por el núcleo de los átomos

de cloro, hidrógeno o silicio. Dicho núcleo se excita y emite un rayo gamma de captura. En conclusión, la radiación neutrónica es inducida en la formación usando una fuente radioactiva y su interacción con la formación se registra con la ayuda de un detector [44].

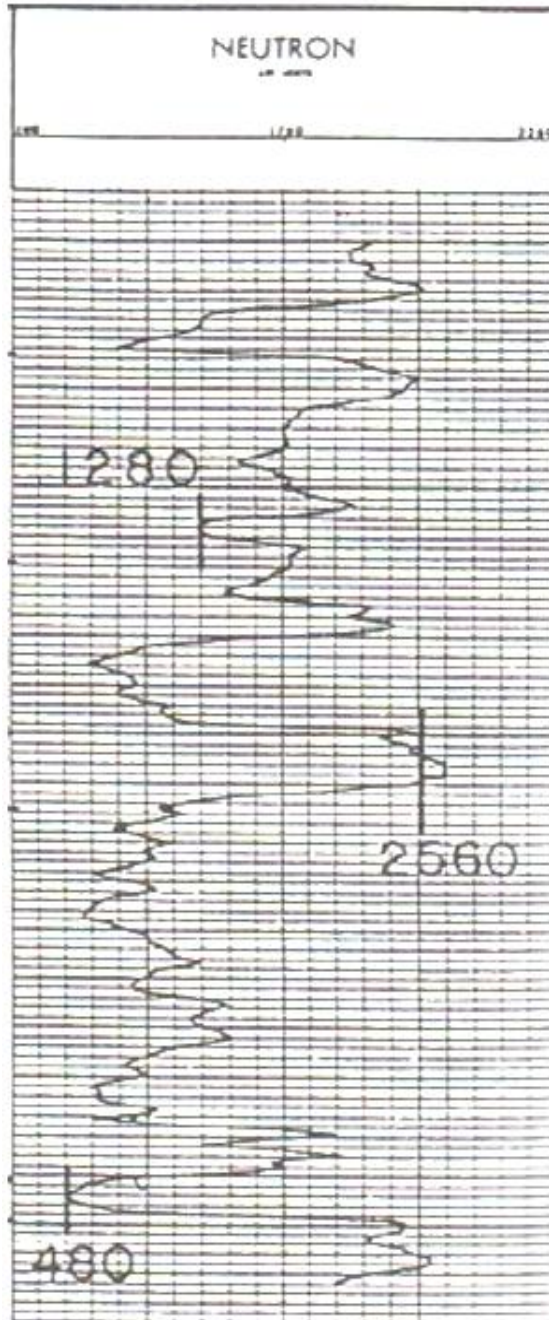


Figura 7. Registro Neutrón de una formación
Fuente: [44]

Una desventaja de este registro se relaciona con la localización de todas las aguas presentes en la formación, aún aquellas que no corresponden a porosidad alguna. Ejemplos de este caso suceden en las formaciones arcillosas, donde la porosidad derivada de perfiles neutrónicos es mayor que la efectiva; ó cuando se detecta agua de cristalización, mostrando una porosidad muy alta, en casos donde la porosidad es nula como en el yeso.

c. Registro Sónico

Un registro sónico representa la velocidad del sonido de las formaciones penetradas por la herramienta sónica a través de un pozo. Por tanto, este registro será tan largo como la pared del pozo. El principio físico que rige la toma de éste registro, corresponde a la propagación de la energía acústica en un medio sólido. Esta energía se genera de una fuente que emite impulsos sónicos repetitivos a una frecuencia audible para el oído humano. La figura 8 muestra las diferentes ondas y trayectorias.

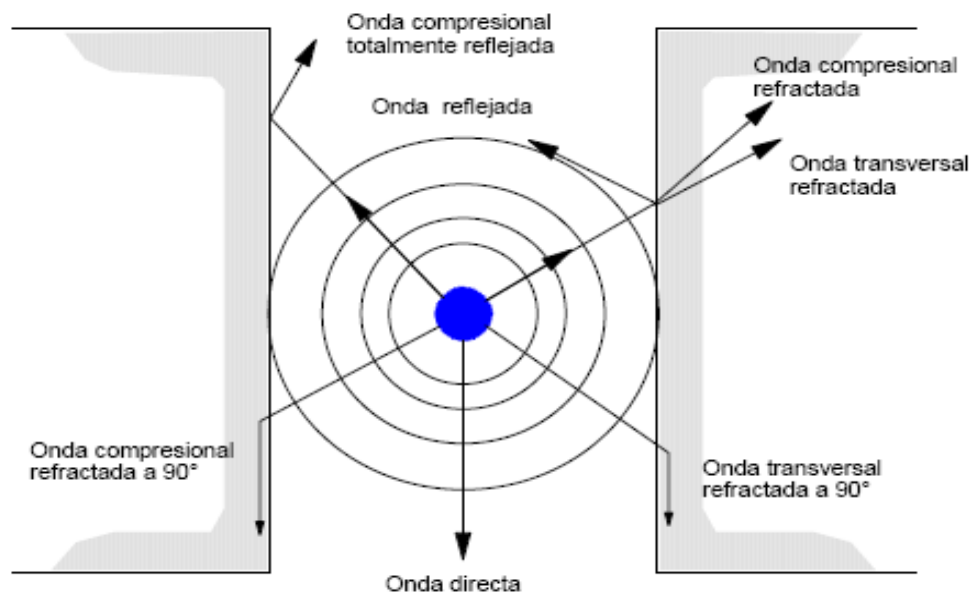


Figura 8. Transmisión de la energía acústica.

Fuente: [17]

La herramienta sónica consiste, básicamente, en un arreglo de un transmisor y dos receptores, uno cercano y otro lejano; con los cuales se mide una secuencia de dos tiempos, tal como se indica en la figura 9. La distancia entre el transmisor y el receptor más cercano corresponde típicamente a 91,44 cm, y hay una distancia de 60,96 cm entre los dos receptores.

La energía acústica emitida desde el transmisor impacta la pared del pozo. Esto origina una serie de ondas en la formación y en su superficie, tales como: Ondas refractarias que viajan a través de la formación (compresional y corte), ondas directas las cuales viajan a lo largo de la sonda y en el lodo, y ondas superficiales que viajan a lo largo de la pared del pozo (seudo-Rayleigh y Stoneley), tal como se observa en la figura 10. Allí también se observa la secuencia normal de llegada de las ondas, con la onda compresional primero, seguida de la onda de corte y por último las ondas seudo-Rayleigh y Stoneley.

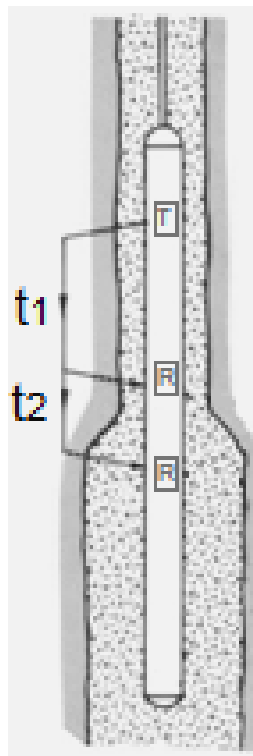


Figura 9. Herramienta Sónica básica
Fuente: [17]

La herramienta sónica básica mide únicamente el tiempo de viaje de la onda compresional, debido a que las ondas compresionales viaja 1,7 veces más rápido que las ondas de corte [17]. Este tiempo de viaje varía desde los 40 μ s/ft en formaciones duras y hasta los 150 μ s/ft en formaciones blandas. Correspondiendo a velocidades, las cuales son el inverso de los tiempos de tránsito, que varían desde 25000ft/s a 6600 ft/s. Por tanto, cuando el transmisor de la herramienta sónica se pulsa una vez, el receptor cercano

mide el tiempo transcurrido para la primera excursión negativa de la onda compresional que llega a él (t_1). Luego, el transmisor se pulsa de nuevo y el receptor lejano mide el tiempo transcurrido (t_2), tal como se muestra en las figuras 9 y 10. La diferencia entre los tiempos de llegada es calculada y dividida por la distancia entre los receptores.

El resultado se presenta como tiempo de tránsito de la formación en microsegundos por pie y corresponde al registro sísmico, el cual se muestra en la figura 11, cuya resolución vertical corresponde al espaciamiento entre los receptores.

Existen modelos teóricos que relacionan la porosidad con la velocidad en materiales porosos, pero ellos no están disponibles en el análisis normal de registros de pozos, por que requieren valores de propiedades elásticas del material del grano, del fluido de poro y del “esqueleto” de la roca. Por lo tanto, se utilizan modelos empíricos entre velocidad y porosidad, o tiempo de tránsito (Δt) y porosidad.

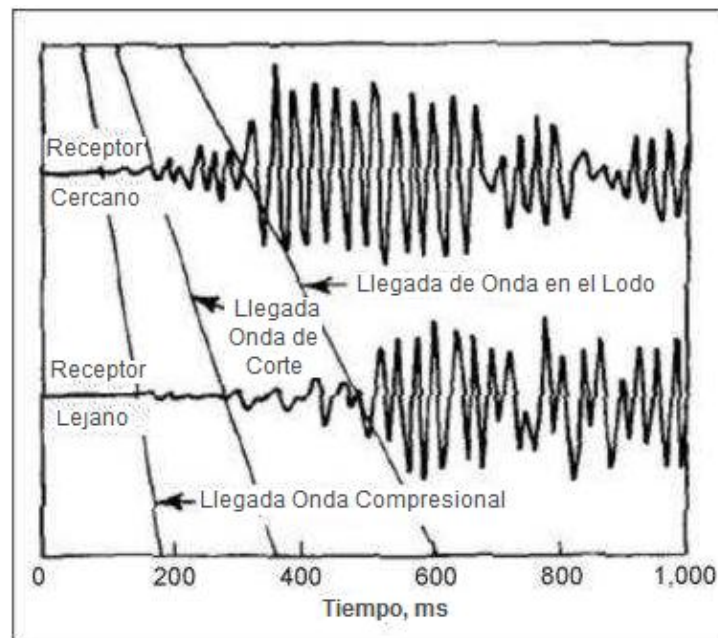


Figura 10. Señales recibidas en la herramienta sónica.
Fuente: [17].

La relación empírica universalmente usada es la fórmula “*time-average*” de Wylie [12-]. Esta conduce a la expresión:

$$t = \phi \cdot t_f + (1 - \phi) \cdot t_{ma} \quad (1.7)$$

Donde

t = Tiempo de propagación de la roca porosa.

ϕ = Porosidad.

t_f = Tiempo de viaje del fluido que ocupa los poros.

t_{ma} = Tiempo de la matriz rocosa sólida.

Al resolver la ecuación (1.7) para la porosidad, se tiene:

$$\phi = (t - t_{ma}) / (t_f - t_{ma}) \quad (1.8)$$

La ecuación (1.8) permite obtener la porosidad a partir del registro sónico, siempre que t_{ma} y t_f sean conocidos. El fluido en la zona de investigación es típicamente lodo filtrado. Por consiguiente, t_f se toma como 189 $\mu\text{s}/\text{ft}$ en lodo fresco. En lodo salado, un valor de 185 $\mu\text{s}/\text{ft}$ se emplea. Los tiempos de viaje de la matriz varían entre 40 y 50 $\mu\text{s}/\text{ft}$, dependiendo de la litología.

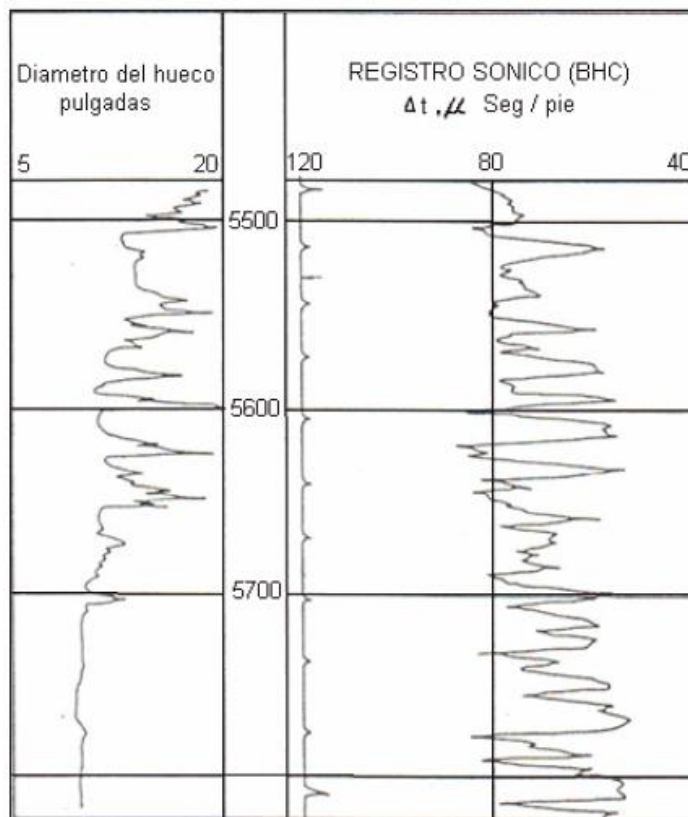


Figura 11. Registro Sónico

Fuente: [44]

1.2 Propagación de las Ondas Acústicas en la roca.

Como se menciona en la anterior sección, el objetivo de las herramientas sónicas en la prospección geofísica es medir la velocidad del sonido en la formación, por medio de transmisores de pulsos sónicos y de receptores.

El sonido es una forma de energía radiante de naturaleza mecánica. Esta energía se transmite desde una fuente de sonido como un movimiento molecular del medio. Este movimiento es vibratorio debido a que las moléculas conservan una posición promedio. Cada molécula transfiere energía a la siguiente molécula antes de regresar a su posición original. Cuando una molécula transfiere energía a otra, la distancia entre ellas es mínima, mientras que entre la primera y la anterior a ella, la distancia es mayor que la normal. Las áreas de distancia mínima entre las moléculas se llaman “áreas de compresión” y las de mayor distancia se llaman “áreas de rarefacción”. Un tren de impulsos de sonido aparecerá como áreas de compresión seguidas por áreas de rarefacción tal como se muestra en la figura 12.

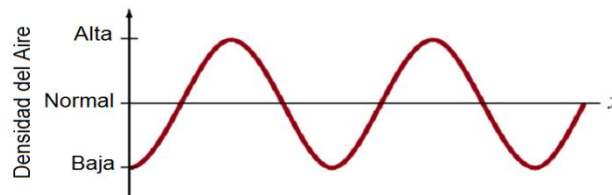
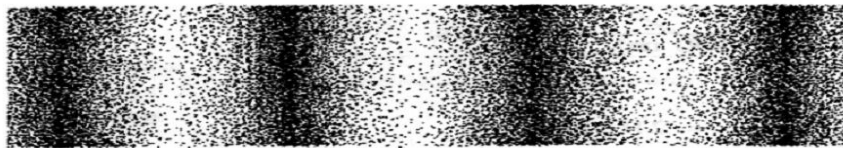


Figura 12. Propagación de una onda longitudinal.
Fuente: [44]

El sonido es una onda acústica, también llamada onda compresional. La cual se transmite longitudinalmente a través del medio por el cual se propaga. Es decir, la perturbación de las partículas es paralela a la propagación de la onda en el medio. Estas ondas se propagan en todas las fases de la materia, plasmas, gases, líquidos y sólidos.

Al describir las ondas de sonido en los fluidos, se tiene que la velocidad depende de la compresibilidad del fluido, definida en términos del módulo volumétrico o módulo de compresibilidad (k). Por otra parte, las ondas de

sonido en un sólido dependen de la rata de *Poisson* (σ), la cual se expresa en términos de las constantes elásticas de Lamé: λ y μ . Estas constantes describen el comportamiento elástico completamente [8.]. Junto con las constantes de *Lamé*, se emplea el módulo de *Young* (Y) o módulo Elástico. En general, los módulos mencionados se calculan a partir del conjunto de valores de los cristales y sustancias individuales o se determinan experimentalmente al caracterizar el fenómeno esfuerzo-deformación en la roca descrito por la propagación de las ondas acústicas. Lo anterior debido a que, las propiedades de las ondas acústicas en las rocas se controlan principalmente por las propiedades elásticas de los minerales de la formación, los fluidos constituyentes, las fracciones de volumen, las propiedades de contacto, la cementación y los contornos [8.].

En ese sentido, las propiedades elásticas mencionadas anteriormente y la velocidad de las ondas acústicas (velocidad de onda compresional) se controlan principalmente por las propiedades físicas de los constituyentes de la roca y del tipo de roca según su origen [8.], por medio de las relaciones (1.9) y (1.10):

Velocidad de onda compresional v_p :

$$v_p = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{d} \right)^{1/2} = \left(\frac{Y}{d} \cdot \frac{1 - \sigma}{(1 - 2\sigma) \cdot (1 + \sigma)} \right)^{1/2} = \left(\frac{M}{d} \right)^{1/2} \quad (1.9)$$

Donde d es la densidad y M es el “módulo de onda plana”, equivalente a:

$$M = \frac{1 - \sigma}{(1 - 2\sigma) \cdot (1 + \sigma)} \cdot Y \quad (1.10)$$

Para el desarrollo de esta investigación, las rocas sedimentarias son de especial interés debido a que representan la roca reservorio. Por consiguiente a continuación se especifica cualitativamente y cuantitativamente el comportamiento de la velocidad en rocas sedimentarias.

Los parámetros dominantes que influyen la velocidad en rocas sedimentarias corresponden a:

- Composición mineralógica de la matriz de la roca.
- Consolidación y segmentación de la matriz de la roca.
- Porosidad, forma de poro y contenido de poro.

- Presión y temperatura.
- Fracturación, en rocas carbonatadas.
- Estructura y textura.

Las rocas sedimentarias se clasifican en rocas consolidadas y no consolidadas. A continuación, se mencionan los parámetros que influyen en estos tipos de rocas sedimentarias.

1.2.1 Velocidad de ondas acústicas en rocas sedimentarias consolidadas

a. Dependencia de la velocidad en la composición de la matriz y la porosidad

La velocidad en una roca sedimentaria, está influenciada por la composición mineralógica de la roca, por el módulo elástico efectivo de la roca, por las condiciones de contacto entre granos y por la cementación en general. Sin embargo, en ciertos tipos de rocas consolidadas, la porosidad es la influencia dominante, especialmente es mayor cuando hay poca variación en la composición de la matriz. Por otro lado, en rocas poliminerales, las ecuaciones de las “teorías mixtas” dan una buena aproximación para el cálculo de la velocidad.

b. Contenido de arcilla:

La velocidad en la arcilla es menor que en el cuarzo o en el carbonato, por tanto el aumento del contenido de arcilla en una roca reduce la velocidad en dicha roca, debido a que:

- Una cantidad muy pequeña de arcilla reduce significativamente el módulo elástico de las arenas.
- La compresibilidad de la arcilla es mayor que la del cuarzo o la del carbonato, lo que produce una alta dependencia de la velocidad con la presión.
- Los efectos de la arcilla dependen de la distribución y de la configuración de la suspensión de la arcilla dentro del cuerpo de la roca.

c. Influencia del contenido del poro y la saturación sobre las velocidades:

La disminución de la velocidad resulta del cambio de la densidad. Por tanto, una o varias sustancias fijadas en el poro afectan la velocidad de la onda acústica debido a:

- Los efectos del cambio de las propiedades elásticas y de la densidad de los poros como parte del sistema “roca”.
- Los efectos del cambio de las condiciones partícula-contacto.
- Los efectos de las interacciones de las fases de gas-sólido-líquido.
- Los cambios muy pequeños de velocidad ocurren en rocas densas libre de poros.

d. Dependencia de la profundidad:

La velocidad (v) y la profundidad (z), se relacionan de acuerdo con las siguientes características:

- Dependencia no-linealidad entre v y z .
- Fuerte de dependencia de z en v para rocas que contienen arcilla.
- Para litología constante y composición poro-agua, la relación v - z depende de la presión.

e. Influencia de la presión:

El efecto de la presión en la velocidad de la roca, se observa mediante las siguientes características:

- La dependencia de la presión incrementa al incrementar la porosidad.
- La relación velocidad-presión es no lineal.

Adicionalmente, la velocidad aumenta con el incremento de la presión debido a que:

- Se reduce la porosidad.
- Se mejoran las condiciones de contacto entre los granos.

Los anteriores efectos se relacionan con cambios en las propiedades del esqueleto de la roca. En este sentido, en diferentes estudios se encuentran los siguientes resultados [42]:

- La presión es el parámetro crítico al actuar en el esqueleto de la roca (“presión efectiva”). Debido a que altas presiones de poro afectan las condiciones de contacto, y por lo tanto, afectan las propiedades del esqueleto de la roca, tal como la porosidad.
- Las propiedades elásticas de arcillas son afectadas por la presión de poro.

f. Efecto de la Temperatura:

Los efectos en la velocidad, producidos por el rango de temperatura de 0°C a 300°C son pequeños comparados con los efectos de porosidad y saturación. Para sedimentos saturados la tendencia general corresponde a pequeñas disminuciones de la velocidad de la roca con incrementos de temperatura [42].

1.2.2 Velocidad de ondas elásticas en rocas sedimentarias no consolidadas.

Para un sedimento no cohesivo la velocidad depende principalmente de:

a. Porosidad:

La velocidad v_p disminuye cuando se incrementa la porosidad.

b. Contenido de arcilla:

Los valores de velocidad son menores para rocas no consolidadas que para las rocas consolidadas. Con el incremento del contenido de arcilla, la velocidad se disminuye en sedimentos no consolidados. Este es el resultado de la baja comprensibilidad de la mezcla agua-arcilla agregada en los sedimentos.

c. Saturación de agua:

Las propiedades elásticas del fluido del poro influyen notablemente en la velocidad, donde los efectos son similares para los sedimentos consolidados y no consolidados. Sin embargo, los efectos de contorno de grano y la influencia de la tensión capilar son de gran importancia, debido a la sensibilidad del contacto entre las partículas. Por tanto, la velocidad muestra sólo pequeños cambios con baja saturación del agua (s_w) y cuando la saturación del agua alcanza el 95%, es decir $s_w=0.95$, la velocidad salta a grandes valores

d. Efecto de la presión (presión efectiva)

La velocidad incrementa con la presión por medio de una relación no lineal. Lo anterior debido, principalmente al cambio de condiciones de contacto entre los granos, puesto que la porosidad se reduce.

1.3 Propiedades eléctricas de las rocas

Las ecuaciones de Maxwell y sus ecuaciones constitutivas proporcionan el punto de partida para comprender cómo los campos electromagnéticos se utilizan en el estudio de la roca. De tal manera que, se pueden determinar las propiedades eléctricas y magnéticas de la roca. Sin embargo, estas ecuaciones por separado, no muestran una relación directa del comportamiento del campo electromagnético en la estructura de la roca o en sus propiedades. Por tanto, las ecuaciones constitutivas se combinan para formar una única característica del medio, el “número de onda k ”. Esta característica determina el comportamiento del campo electromagnético y es definida en función de la frecuencia angular ω y de tres propiedades físicas de la roca: la permitividad dieléctrica ε , la permitividad magnética μ y la conductividad eléctrica σ , tal como se muestra en la ecuación (1.12) [13-]. Para el lector interesado en profundizar acerca de la ecuación del campo electromagnético, podrá encontrar más información en el anexo A del libro.

$$k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega \quad (1.12)$$

El comportamiento del número de onda con el cambio de frecuencia es importante para comprender el uso de diferentes métodos electromagnéticos en el estudio de la roca. En este sentido, la frecuencia se considera como un parámetro de diseño y la selección de la frecuencia de operación depende en gran parte del criterio del investigador. Por tanto, en bajas frecuencias, para las cuales el comportamiento del campo electromagnético es de difusión óhmica, el número de onda es aproximadamente [13-]:

$$k^2 \approx -i\sigma\mu\omega \quad (1.13)$$

Para este caso, la dependencia de la permitividad eléctrica desaparece y la amplitud del campo decrece exponencialmente o se atenúa. Esta atenuación ocurre por la conversión de la energía del campo electromagnético en calor, debido al flujo de corrientes de conducción. Este régimen es conocido como el régimen “inductivo” en la aplicación de los métodos electromagnéticos para obtener los registros eléctricos.

Por otra parte, en altas frecuencias, el número de onda es aproximadamente [13-]:

$$k^2 \approx \omega^2\mu\varepsilon \quad (1.14)$$

En este régimen, la amplitud del campo electromagnético varía sinusoidalmente y se propaga con poca atenuación debido a los mecanismos de relajación dieléctricos, ya que su longitud de onda depende sólo de la constante dieléctrica [13-]:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega(\mu\varepsilon)^{1/2}} \quad (1.15)$$

Por tanto, las ecuaciones que describen la propagación de los campos electromagnéticos en la roca, se emplean para medir los tiempos de viaje de los campos reflejados en la masa rocosa, la conductividad eléctrica u otras propiedades de la roca.

En este sentido, cuando se emiten campos electromagnéticos de baja frecuencia, el registro de inducción proporciona una medida de la conductividad de la formación. Esto sucede en áreas de alta porosidad, donde la invasión es superficial y poco profunda, cuyos valores de resistividad son bajos [18]. A continuación se expone esta técnica, pues se emplean datos de este registro para el desarrollo de la investigación.

La figura 13 muestra la herramienta con la cual se mide la conductividad de la formación. El principio de funcionamiento del sistema de inducción consiste en hacer circular una corriente constante, cuya frecuencia es de 20 kHz, por una bobina transmisora. Ésta bobina genera un campo magnético alterno que causa una corriente circular (corriente de Eddy), la cual fluye en el medio circundante. La corriente crea un campo magnético que induce un voltaje en la bobina receptora. El voltaje inducido es proporcional a la conductividad del medio circundante. Este voltaje se mide y con él se calcula la conductividad de la formación, así como, la resistividad de la formación ó R_t . Finalmente, los valores de resistividad obtenidos se muestran en el registro de inducción [17].

En la figura 14, se muestran los rangos en los cuales los registros de Inducción (lateroperfil, inducción), pueden ser empleados. Allí se observa que el registro de inducción se utiliza siempre que el cociente entre la resistividad del lodo filtrado (R_{mf}) y la resistividad del agua (R_w) sea mayor que 2, y la resistividad de la formación no exceda a 200 Ω -m. Sin embargo, las curvas de porosidad dependen del valor de R_w , como se indica en la

figura. Si el lodo es conductivo, es decir el cociente entre R_{mf} y R_w es menor que 2, el registro de Lateroperfil debe ser empleado.

En general, el registro de Inducción, figura 15, se emplea cuando el lodo es fresco y la resistividad es baja. De tal forma que, con este registro se mide la conductividad de la formación con una resolución vertical razonable [17].

1.3.1 Conductividad Electrolítica

Una roca es un agregado de diferentes minerales, entonces, se espera que sus propiedades eléctricas resulten de la combinación de las propiedades de los minerales constituyentes. Sin embargo, ante la presencia de agua se afectan propiedades como la conductividad. Por tanto, el agua en tan sólo pequeñas cantidades domina el comportamiento de la conductividad en la roca; debido a que fluidos como el gas y el petróleo, presentes también en la roca, poseen una baja conductividad [18].

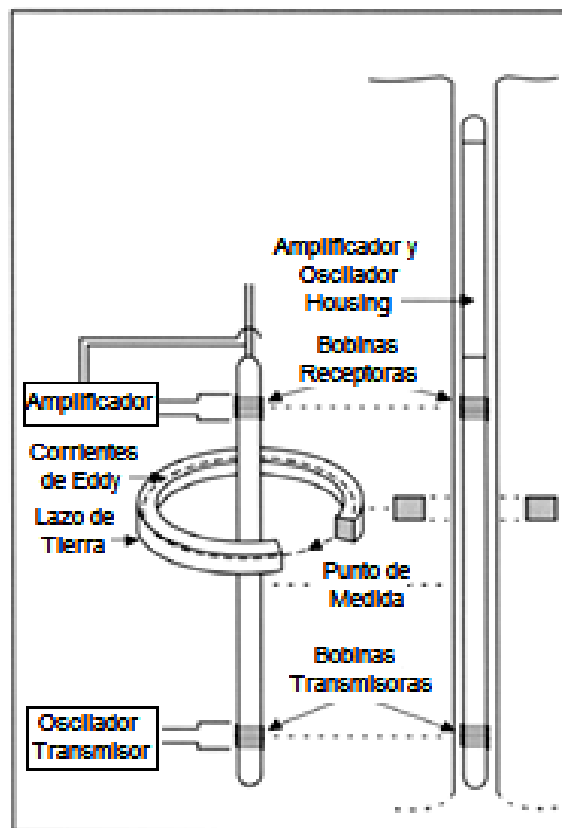


Figura 13. Principio de inducción.
Fuente: [17]

El agua es un solvente en la naturaleza. Existe como un electrolito con considerables cantidades de iones presentes, que aumentan su conductividad. En la roca, el agua fijada al espacio poroso, es frecuentemente un electrolito con una gran variedad de sales disueltas. La conductividad de una solución electrolítica depende del número de iones en la solución y de la movilidad, ó la velocidad con la cual los iones se aceleran bajo la acción de un campo eléctrico constante. La movilidad aumenta con el aumento de la temperatura y disminuye significativamente bajo el aumento de presión [18].

En la mayoría de las rocas, el agua es el único constituyente con conductividad significativa que está presente. Por tanto, la conductividad de la roca se determina por la conductividad del agua contenida en el poro y la forma del poro. En este sentido, la conducción iónica se controla principalmente por: Tipo y concentración de iones, temperatura y saturación del electrolito en el poro, porosidad, textura y tipo de roca [18].

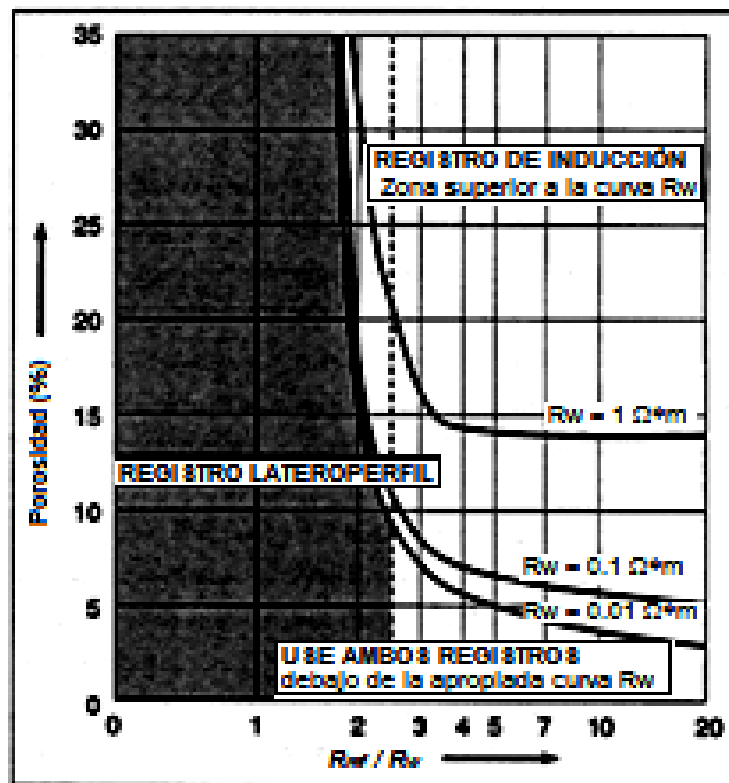


Figura 14. Aplicación del registro de inducción.
 R_{mf} (Resistividad del lodo filtrado) y R_w (Resistividad del agua)
 Fuente: [17].

a. Tipo y concentración de iones

Frecuentemente se encuentra que los iones conductores resultan de la disociación de las sales disueltas en el agua. Por tanto, una roca tendrá alta conductividad dentro de sus poros, cuando la solución es más salina. En este sentido, la mayoría del agua en la roca se clasifica según el contenido de iones, los cuales también reflejan el origen y la historia de las aguas subterráneas [8.]:

- Agua congénita: Corresponde al tipo más común de agua y surge de la deposición de sedimentos. Se caracteriza por ser rica en cloruro de sodio.
- Agua de bicarbonato: Estas aguas reflejan erosión en un continente y contiene una alta porción de carbonatos y calcio. Tienen menos concentración de sales que la anterior.
- Agua subterránea ácida: Se presenta en las regiones mineras donde el sulfuro y óxidos de los minerales son una fuente de ácidos en el ambiente.

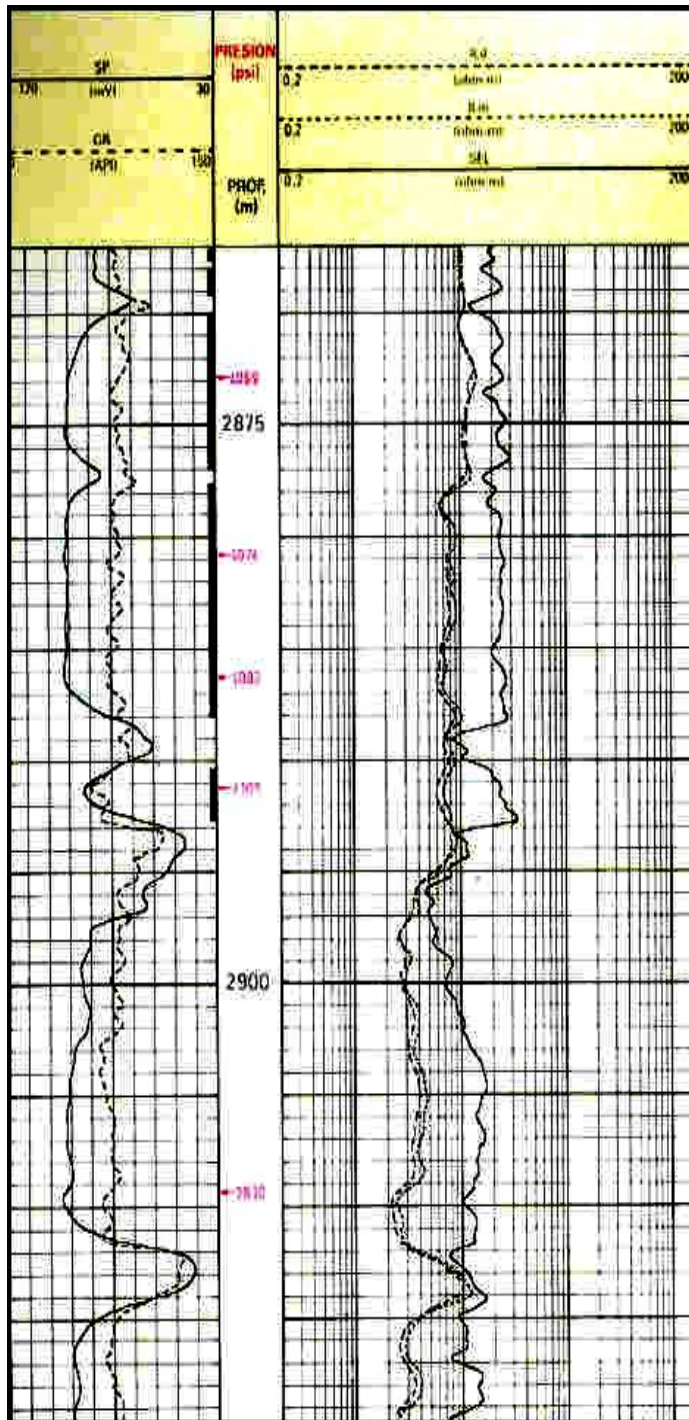


Figura 15. Registro Eléctrico de Inducción
Fuente: [44]

b. Efecto de la temperatura

La temperatura incrementa la movilidad de los iones, que a su vez incrementa la conductividad electrolítica, tal como se observa en la figura 16

para el cloruro de sodio. Sin embargo, en la mayoría de problemas electromagnéticos de la roca, para simplificar el análisis se asume que la conductividad eléctrica es independiente de la temperatura. Lo anterior, debido a que la conductividad eléctrica de la roca está más afectada por la salinidad y distribución del agua del poro que por la temperatura [18].

c. Efecto de la saturación:

El comportamiento eléctrico de la roca se puede clasificar según la roca sea:

1. Densa o absolutamente seca (sin contenido de agua): En esta roca se presenta altas resistividades. La conducción en este tipo de rocas se controla por las propiedades de la matriz rocosa. Esto resulta en tres observaciones significantes [8]:
 - a. Altos valores de resistividad.
 - b. Dependencia de la temperatura (disminución exponencial de resistividad con incremento de temperatura).
 - c. Dependencia de la presión (disminución no lineal la resistividad con incremento de la presión).

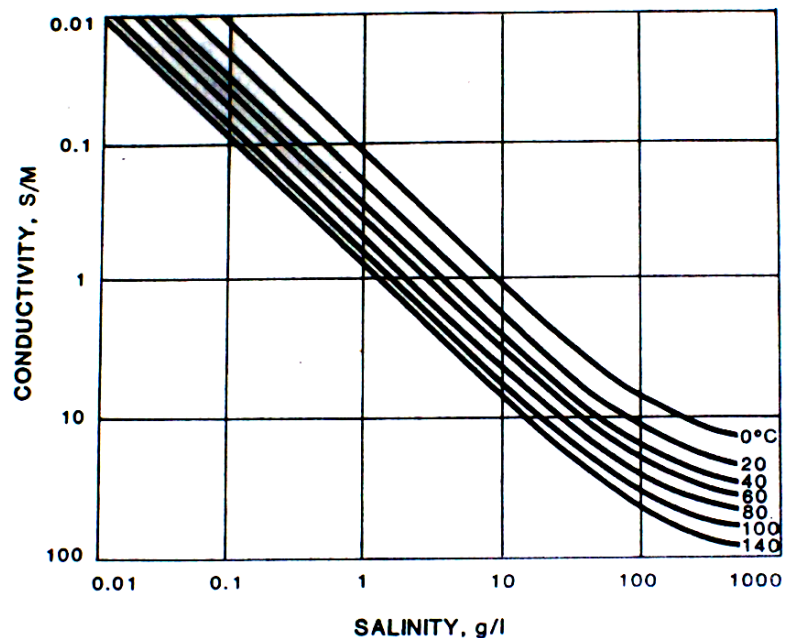


Figura 16. Conductividad vs. Temperatura
Conductividad de una solución de Cloruro de Sodio como función de la Temperatura y la concentración.
Fuente: [18]

2. Porosa y fracturada con agua: La conductividad eléctrica de estas formaciones se controla principalmente por las propiedades del agua. En este sentido, el agua se considera como un electrolito debido a las sales disueltas en ella. Por tanto, la conductividad de la matriz se desprecia en la mayoría de los casos, excepto ante la presencia de minerales altamente conductores como el oro o grafito [8.] y la naturaleza del agua de poro contribuye totalmente con su conductividad electrolítica intrínseca.
3. La geometría del poro conectado determina la geometría del camino conductivo, esto incluye propiedades geométricas del poro como porosidad y tortuosidad. Las estructuras del poro son complicadas en forma y difíciles para describir geoméricamente, pero por lo menos tres casos diferentes de la geometría del poro pueden ser reconocidos: (1) espacio intergranular en roca sedimentaria, (2) fractura, unión y microgrietas, usualmente en rocas cristalinas y (3) pequeñas o grandes cavidades pobremente interconectadas a la estructura del poro, como en las rocas volcánicas. Para una determinada porosidad y contenido de agua, el segundo caso corresponde a la roca con mayor conductividad de las tres. Lo anterior, debido a que en el segundo caso la estructura rocosa es simple. El tercer caso corresponde a la menor conductividad debido a la complejidad de la estructura rocosa [18].

Finalmente, las rocas porosas “limpias” o arenas libres de arcilla presentan alta conductividad electrolítica. Este comportamiento se describe empíricamente gracias a la ecuación de Archie. Puesto que, esta ecuación es una buena representación de la conductividad de la roca para los tipos de geometría de poro antes mencionada [18].

d. Efectos de la textura de la roca y de la porosidad en una muestra de roca:

Las diferentes texturas de la roca influyen en la resistividad de la roca. Estas se muestran en la figura 17.

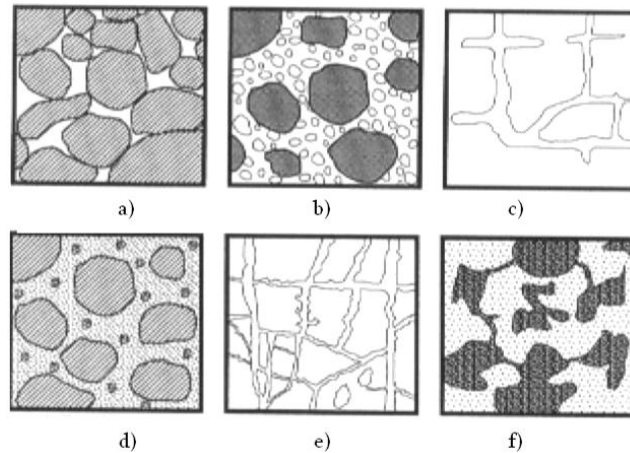


Figura 17. Varias texturas de roca.
Fuente: [8.]

A continuación se relacionan las características de porosidad y resistividad para cada tipo de textura de la roca, según la enumeración dada en la figura 17:

a)	Arenisca:	Grandes espacios vacíos, baja resistividad
b)	Arenisca:	Baja porosidad, alta resistividad
c)	Limo:	Grandes fracturas, baja resistividad
d)	Minerales precipitados	Reduce la porosidad, alta la resistividad
e)	Granito:	Baja porosidad, alta resistividad
f)	Basalto:	Alta porosidad de poros no conectados, baja permeabilidad, alta resistividad.

e. Efecto del tipo de roca y los procesos geológicos:

El tipo de roca y los procesos geológicos a los que la roca fue sometida influyen sobre su resistividad, tal como se muestra en las figuras 18 y 19.

En la figura 18 se muestran los rangos típicos de resistividades para diferentes rocas. Los rangos amplios y el traslape de éstos en varios tipos de roca, hacen difícil la identificación del tipo de roca por medio de las resistividades.

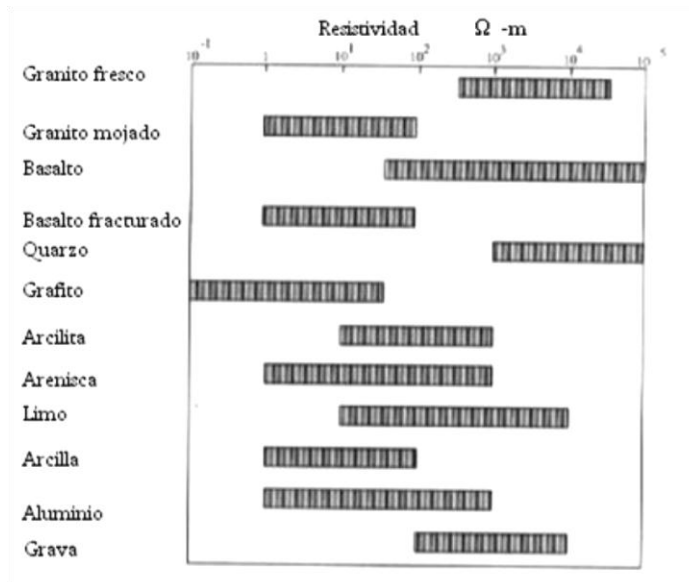


Figura 18. Rangos de resistividad en tipos de roca y minerales.
Fuente: [8.]

En la figura 19 se muestra el efecto de varios procesos geológicos en la resistividad de una roca, en general los procesos geológicos reducen la resistividad de la roca.

Alteración de Arcilla	↓	Humedad	↓
Disolución	↓	Inundación	↑
Falla	↓	Precipitación de Carbonatos	↑
Instrucción de agua salada	↓	Silificación	↑
Rupturas	↓	Metamorfismo	⇕
↓ Disminuye		↑ Aumenta	
⇕ Disminuye o Aumenta			

Figura 19. Efectos de varios procesos geológicos en la resistividad.
Fuente: [8.]

1.3.2 Conducción electroquímica

Una partícula de arcilla se comporta como un camino de conducción adicional al camino electrolítico. La resistencia de este camino adicional es baja. El origen de esta conductividad se debe a una doble capa de intercambio catiónico como se muestra en la figura 20. Donde los cationes se requieren para balancear la carga debido a la sustitución dentro de la

estructura del cristal, y para romper contornos. El tamaño finito de los cationes previene la formación de una única capa. Por tanto, una doble capa se forma. Esta doble capa consiste de una capa fija inmediatamente adyacente a la superficie de la arcilla y una capa difusa cuyo espesor disminuye exponencialmente con la distancia desde la capa fija.

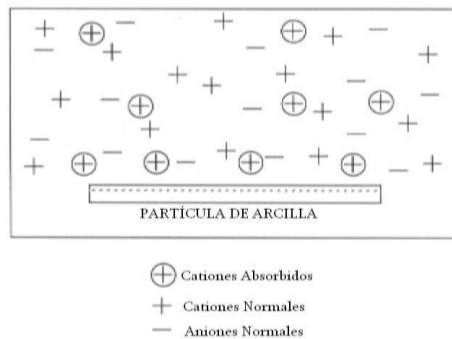


Figura 20. Iones absorbidos en una partícula de arcilla.
 Representación esquemática de los iones absorbidos en una partícula de arcilla.
 Fuente: [18]

La capa difusa, en contraste a la capa fija, se mueve libremente bajo la influencia de un campo eléctrico aplicado. Los cationes de la capa difusa se suman a la concentración normal de iones y por lo tanto incrementa la densidad de carga de los portadores, lo que resulta en un incremento de la superficie conductora. De modo que, en formaciones de roca arcillosa, la arcilla se considera como conductor, puesto que sus minerales exhiben un alto grado de capacidad de intercambio catiónico, aunque la arcilla se debe mojar para que este proceso pueda darse [18]. Por tanto, esta alteración incrementa la conductividad, debido a que aumenta los caminos de conducción electrolítica y en consecuencia, rocas con poco agua pueden ser moderadamente conductoras [18].

La existencia de esta conductividad en arenas arcillosas o arenas “sucias” se describe con las ecuaciones modificadas de Archie [18] y se asocia con la distribución y tipo de arcilla en la roca.

En el trabajo desarrollado en esta investigación, no se consideró la conductividad electroquímica debido a que se trabaja con una sección de roca que no contiene arcilla.

1.4 Consideraciones para el modelado de la roca.

Es posible derivar relaciones teóricas entre las propiedades de la roca para describir su comportamiento. Para tal fin, se establecen modelos que representan matemáticamente las propiedades de la roca. A partir de estos modelos, se constituyen las relaciones entre las diferentes propiedades físicas de la roca. Por consiguiente, la selección del modelo depende del tipo de roca y saturación en la cual se encuentra la sección en estudio. Por tanto, las funciones de los modelos y de las relaciones entre las propiedades, para esta investigación son:

1. El modelo permite la formulación de correlaciones esenciales, las cuales se conocen a partir de experimentos basados en un concepto físico y un cálculo matemático. Por tanto en esta investigación se tienen en cuenta los datos experimentales obtenidos a partir de los registros eléctricos y sísmicos. Así como las ecuaciones empíricas como: la ley de Archie, el modelo de CRIM, la ecuación de *time-average* de Wyllie y la ecuación de Raymer; y los modelos teóricos correspondientes a los promedios, los contornos de Hashin-Shtrikman, el modelo *Self-similar* y el modelo de Gassmann.
2. El modelo y las relaciones de propiedades cruzadas entre las ecuaciones de la velocidad de onda compresional y la conductividad eléctrica, permiten el cálculo de estas propiedades sin determinación experimental directa. Por tanto, para el desarrollo de esta investigación, se selecciona un modelo que permite establecer una relación entre la velocidad de onda compresional y la conductividad eléctrica a partir de la porosidad; dentro del contexto de la teoría de propagación de ondas acústicas y electromagnéticas en un medio homogéneo, isotrópico y viscoelástico.
3. Los modelos obtenidos relacionan propiedades físicas y petrofísicas como una contribución a la integración en el proceso de Geociencias.

Así mismo, los modelos en la física de rocas se relacionan con un grupo particular de tipo de roca y con un grupo particular de tipos de propiedades de roca. Por tanto, debido a la heterogeneidad de la roca, es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos para establecer los modelos:

1. Las propiedades efectivas de la roca dependen de la composición de la roca (fracciones de volumen) y las propiedades de los componentes.
2. La geometría interna, tal como: tamaño de grano y su distribución, forma de grano, textura, estructura, propiedades de contorno (cementación) y los efectos en la interfaces influyen en la determinación de las propiedades.
3. A partir de la porosidad se establecen relaciones entre las propiedades físicas de la roca, debido a la respuesta del medio ante la propagación de ondas acústicas o electromagnéticas.

En este sentido, a continuación se exponen cuatro tipos de modelos que permiten estudiar las propiedades de las rocas.

1.4.1 Elementos paralelos

Cada elemento representa un componente de la roca (mineral, fluido de poro) con sus propiedades específicas y fracción de volumen, como se observa en la figura 21. El campo u onda se puede dirigir en cualquier dirección, paralela o perpendicular a los planos entre las capas.

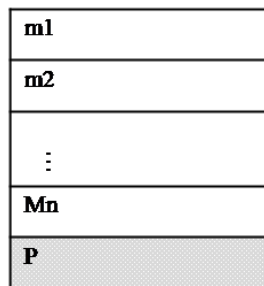


Figura 21. Elementos paralelos
M (matrix), P (poro).
Fuente: [8.]

Las ecuaciones para este caso son lineales. Por tanto, este modelo se aplica en muchos problemas prácticos y se integra en la mayoría de sistemas de interpretación de registros de pozo. Por ejemplo, la teoría de los modelos de Voigt y Reuss [8.] se fundamenta en este modelo. A partir de ellos se pueden estimar los contornos superior e inferior de las constantes elásticas

correspondientes a los minerales de la roca. Así mismo, una de las relaciones más conocidas es la relación “*time-average*” de Wyllie *et al.* [12-], con la cual se calcula la porosidad a partir de los registros acústicos.

Con la relación *time-average* se deriva una relación análoga para la conductividad eléctrica de la formación, llamada fórmula de CRIM (*Complex Refractive Index Method*). Esta relación se obtiene debido a que el tiempo de viaje en una fase o componente, es inversamente proporcional a la velocidad electromagnética, la cual también es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la conductividad. Por tanto el tiempo de viaje y la conductividad son proporcionales [8.], [13-] (ver anexo A).

Así mismo, el modelo de elementos paralelos equivale a un circuito serie cuando la corriente es perpendicular a las capas, y corresponde al fundamento de las ecuaciones de Glover [4-] y Hermance [25], con la cuales se calcula la conductividad de la formación rocosa.

Finalmente, la velocidad de onda P y la conductividad eléctrica, son propiedades de un medio compuesto que se obtienen al aplicar este modelo siguiendo los promedios aritméticos, armónicos y geométricos. Por consiguiente, este modelo se aplica a propiedades escalares solamente [8.].

1.4.2 Geometría regular de partículas o poros

Es el modelo más aplicado para rocas porosas, consiste de un arreglo de partículas sólidas o poros con una forma geométrica simple (esferas, elipsoides, tubos, canales, inclusiones esféricas o elipsoidales), tal como se muestra en la figura 22. La filosofía de este modelo es “partícula o poro con geometría orientada” [8.].

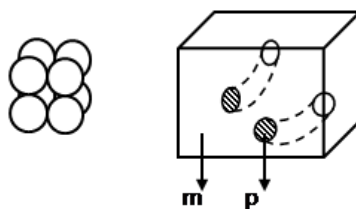


Figura 22. Modelo de Geometría Regular
partículas (esferas) o poros (tubos), m (matriz), p (poro)
Fuente: [8.]

Este modelo está compuesto por:

a. Modelo esfera

El modelo esfera se aplica al problema de propagación de ondas acústicas en rocas porosas no consolidadas (arenas) y a sus propiedades elásticas e inelásticas. Ejemplos de éste grupo son las investigaciones teóricas de Hara [24], los experimentos de Iida [26], el trabajo clásico de Gassmann [19] y White [20-]. Las teorías de estos modelos se fundamentan en los siguientes criterios:

- Descripción del comportamiento de dos esferas vecinas (propiedades en el contacto de esferas).
- Suposición del ordenamiento de las esferas (estructura interna del modelo).

b. Reconocimiento del espacio poroso:

Este modelo representa una manera de encontrar correlaciones entre la “geometría interna microscópica de la roca” y las “propiedades macroscópicas de la roca”. Es recomendado para propiedades que se determinan principalmente por procesos en el espacio poroso, tales como: las propiedades eléctricas (desde que la conductividad del agua del poro sea mayor que la de la matriz), y la permeabilidad hidráulica (parámetro que describe el movimiento del fluido en los canales porosos bajo un gradiente de presión) [11].

1.4.3 Constituyentes de roca acoplados

Estos modelos se fundamentan en las condiciones de acople e interacción de dos o más constituyentes de la roca. Una forma de representar este modelo se observa en la figura 23, donde los constituyentes de la roca y los poros se acoplan en una matriz. Por tanto, este grupo puede ser llamado “modelos de sistemas acoplados”.

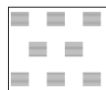


Figura 23. Constituyentes de rocas acoplados.
(Componentes de matriz y poros)
Fuente: [8.]

En 1937 Bruggeman, motivado por este modelo, publica una teoría generalizada (incluyendo propiedades elásticas) para sólidos laminados y otros compuestos [11]. Estas ideas son promovidas y desarrolladas por Backus [3] en sus teorías acerca de medios transversalmente isotrópicos. Otros miembros de éste grupo son las teorías de medios efectivos, las cuales son también lideradas por Bruggeman, e involucran tres componentes: fluido, sólido y cemento. De tal forma que, la gama más amplia de este modelo está dada por las propiedades elásticas de la roca. Igualmente, con base en este modelo Bruggeman calcula la conductividad promedio y la constante dieléctrica de un material compuesto, y deriva el modelo *Self-similar*, el cual es un método conceptual importante de éste grupo. Este último modelo es usado para calcular propiedades de rocas que contienen poros, fracturas y grietas [8].

La aplicación de este modelo en reservorios de rocas porosas estimula la generación de teorías fundamentadas en el concepto de “esqueleto”. Este concepto se construye a partir de minerales y espacios porosos en los cuales el fluido está almacenado. De esta manera, Gassmann [19] deriva su teoría clásica bajo la suposición de despreciar el movimiento relativo entre fluido y sólido.

Así mismo, Hashin y Shtrikman usan los principios de este modelo para mejorar los contornos de Voigt y Reuss, y obtienen contornos más restrictivos [8].

Estos modelos y sus consideraciones iniciales se relacionan con fórmulas empíricas como la ecuación de Archie [1], ecuación de Wyllie [12-], entre otras.

1.4.4 Modelo estructurado

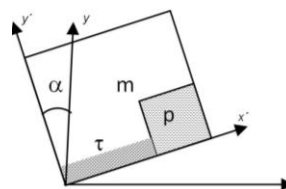


Figura 24. Modelo estructurado.
(Estructura, ángulo y propiedades del contacto)
Fuente: [8.]

Este modelo permite calcular propiedades físicas de rocas porosas y explicar diferentes relaciones (comportamiento anisotrópico, influencia de la estructura, etc.) [8.]. Uno de los objetivos de su desarrollo es encontrar un modelo simple que explique la mayoría de las propiedades físicas de las rocas (elásticas, eléctricas, térmicas, etc.).

Por tanto, el modelo se construye a partir de un elemento modelo (“micro-elemento”) con las propiedades del sólido (m), del poro (p) y de una región de “contacto” (τ); como se observa en la figura 24. La orientación espacial de este “micro-elemento” se relaciona al macro-sistema (x - y) con un “ángulo estructural” (α), como una medida de la geometría interna. Este modelo conceptual incluye un “volumen-orientado” debido a las dimensiones geométricas del micro-elemento, una “estructura-orientada” debido al ángulo estructural y una “frontera-orientada” debido a la introducción de las propiedades de la región de contacto [8.].

1.5 Ecuaciones constitutivas para las propiedades de la roca

Las ecuaciones constitutivas que definen las propiedades físicas de las mezclas se construyen a través de las Teorías Mixtas. Estas ecuaciones surgen de los diferentes modelos que describen el comportamiento de la mezcla y dependen de sus componentes [5].

Una mezcla es un agregado compuesto de dos o más materiales y se representa como un medio heterogéneo. Estas se presentan entre fluido-fluido, sólido-fluido ó sólido-sólido y se clasifican en [5]:

- Mezclas disueltas: Ocurren cuando un componente domina el comportamiento y la masa del sistema; tal como el aerosol de un fluido a través del aire (donde el aire es la materia dominante).
- Mezclas densas: Ocurren cuando todos los componentes son igualmente importantes para el comportamiento de la mezcla. Tal como el flujo de un fluido a través de un sólido poroso ó la difusión de gas a través de un sólido. La roca es una mezcla densa debido a que ocurre naturalmente entre minerales, vacíos, fracturas y diferentes fluidos.

Por tanto, las mezclas densas son de especial interés en esta investigación, debido a que por medio de ellas se modela el comportamiento de la roca al utilizar las teorías mixtas [5].

1.5.1 Teorías Mixtas

Las teorías mixtas comprenden diversas teorías que se construyen a partir de los modelos expuestos en la sección 1.4 y se emplean para estudiar el comportamiento de mezclas, tal como la roca. Ellas corresponden a teorías macroscópicas, es decir, abarcan la teoría de la homogenización [4]. Por tanto, las teorías mixtas permiten establecer ecuaciones constitutivas donde se involucran las diferentes constantes y propiedades físicas de los componentes de la roca [5]. De esta forma, si la porosidad está presente en la mezcla, como sucede en las rocas; con las teorías mixtas se definen las propiedades físicas de la roca y se predice su comportamiento.

En general, el uso de las teorías mixtas es esencial para describir propiedades físicas de la roca como la conductividad eléctrica y la velocidad de onda compresional, puesto que, con esta teoría se describe la propagación de ondas electromagnéticas o acústicas y se estudian los efectos de las heterogeneidades en la roca. [12].

1.5.2 Teoría de la homogenización [27].

A partir del concepto de medio homogéneo, definido en el capítulo 1, surge la necesidad de definir la homogenización de un medio heterogéneo como la roca, el cual se estudia con datos obtenidos en diferentes escalas de medición.

La homogenización implica determinar el comportamiento macroscópico (o “gran” escala) de un medio con heterogeneidad microscópica (o “pequeña” escala), a partir de la información disponible. Dicha información se obtiene de la propagación de ondas acústicas o electromagnéticas en el medio. (El significado exacto de “gran” y “pequeña” escala depende del problema específico y del medio bajo estudio) [4].

La figura 25 expone la idea básica de la teoría de homogenización. Allí se considera una mezcla encerrada en un volumen R en algún tiempo t y se

toma una pequeña muestra desde una posición x . También se observa que la muestra consiste de materiales individuales cuyo comportamiento es conocido. Así mismo, se considera que la existencia de cada componente es lo suficientemente densa como para promediar todas sus propiedades y asumir que cada uno tiene el mismo volumen infinitesimal. Por tanto, tal como se muestra en la figura 25, en el punto x de la mezcla con tres componentes (α , β y γ) sus propiedades se promedian en un volumen infinitesimal contenido en el punto x , el cual contiene una partícula de cada componente. Por consiguiente, en la configuración idealizada de la mezcla R^m , cada punto x se asume constituido de variables y propiedades asociadas con una partícula de cada componente. Para tal idealización se requiere que la mezcla sea lo suficientemente densa. En conclusión, esta teoría consiste en reemplazar un volumen de un sólido micro-heterogéneo por uno homogéneo que, desde un punto de vista macroscópico se comporta igual que el primer volumen ante la presencia de cualquier tipo de onda.

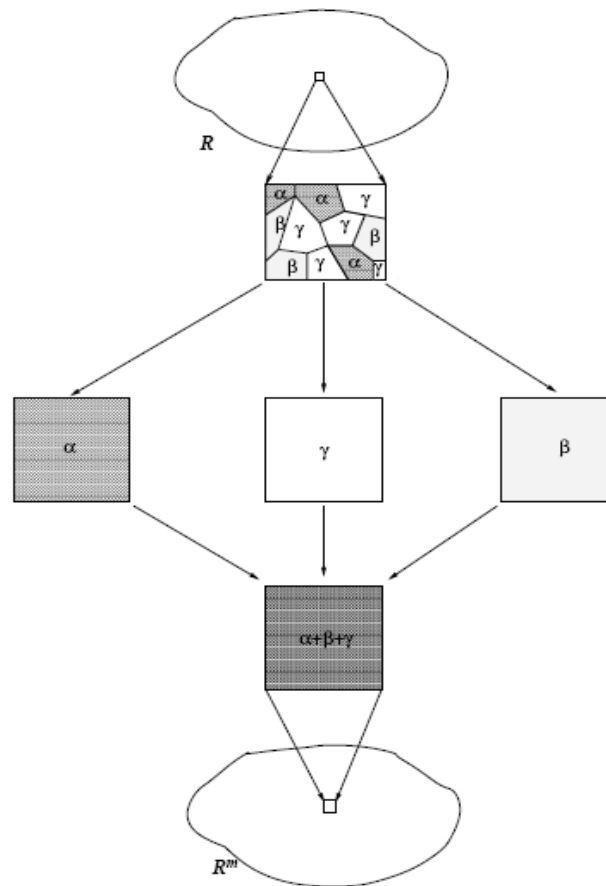


Figura 25. Homogenización de un material micro-heterogéneo

Fuente: [27]

1.5.3 Formato de presentación de los resultados.

Las ecuaciones constitutivas obtenidas con las teorías mixtas se presentan y organizan en tres categorías generales: resultados exactos, contornos y estimaciones. Un resultado exacto es una ecuación que relaciona una propiedad física en función de otra propiedad. Los contornos se fundamentan en principios variacionales. Finalmente, una estimación corresponde a una ecuación que ni es exacta ni es un contorno, tal como una serie de expansión truncada [5].

A continuación, se aclara la notación empleada en las ecuaciones correspondientes a las estimaciones y contornos.

Si se tiene que p_1, p_2, \dots, p_N ; son las fracciones de volumen de los N componentes de una determinada mezcla y se asume que: $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$. Entonces todos los elementos de la mezcla se cuentan. Por tanto, un volumen promedio Q de alguna cantidad se representa por [5]:

$$\langle Q \rangle = \sum_{i=1}^N p_i Q_i \quad (1.16)$$

Donde Q_i es el valor de Q en el i -ésimo componente.

Los valores mínimo y máximo de Q entre los N componentes se representan como: $Q_{min} = \min_i Q_i$ y $Q_{max} = \max_i Q_i$.

Los contornos superior e inferior se denotan con los superíndices (+) ó (-). Para la conductividad, por ejemplo, σ^+ corresponde al contorno superior y σ^- al contorno inferior, las cuales satisfacen la relación: $\sigma^- < \sigma < \sigma^+$. La misma notación de superíndice será utilizada para todas las propiedades físicas.

Berryman propone las siguientes funciones, donde se representa el comportamiento de una determinada mezcla en función de una variable o propiedad específica. A partir de estas funciones se pueden obtener los resultados anteriores.

Para la conductividad σ , se tiene la función S [5]:

$$S(z) \equiv \left\langle \frac{1}{\sigma + 2z} \right\rangle^{-1} - 2z \quad (1.17)$$

$$S(z) = \left(\sum_{i=1}^N \frac{p_i}{\sigma_i + 2z} \right)^{-1} - 2z \quad (1.18)$$

Donde z es la variable independiente y es positiva.

Para el módulo volumétrico K , se usa la función Λ :

$$\Lambda(u) \equiv \left\langle \frac{1}{K(r) + \frac{4}{3}u} \right\rangle^{-1} - \frac{4}{3}u \quad (1.19)$$

$$\Lambda(u) = \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{K_i + \frac{4}{3}u} \right)^{-1} - \frac{4}{3}u \quad (1.20)$$

Donde u es la variable independiente de la función Λ , la cual es positiva.

Cada una de estas dos funciones incrementa monóticamente cuando sus argumentos incrementan. Además, cuando el argumento de cada función desaparece se obtiene la media armónica de la correspondiente propiedad física [5]:

$$S(0) = \left\langle \frac{1}{\sigma(r)} \right\rangle^{-1} \quad (1.21)$$

$$\Lambda(0) = \left\langle \frac{1}{K(r)} \right\rangle^{-1} \quad (1.22)$$

Similarmente, al analizar cada función en el límite cuando los argumentos tienden a infinito, las funciones se aproximan a la media de la correspondiente propiedad física [5]:

$$S(\infty) = \langle \sigma(r) \rangle \quad (1.23)$$

$$\Lambda(\infty) = \langle K(r) \rangle \quad (1.24)$$

Estas funciones contienen los contornos superior e inferior de Hashin-Shtrikman (HS) los cuales son obtenidos al usar el valor mínimo o el máximo de la correspondiente propiedad del componente [5], esto es:

$$\sigma_{HS}^+ = S(\sigma_{\max}) \quad (1.25)$$

$$\sigma_{HS}^- = S(\sigma_{\min}) \quad (1.26)$$

$$K_{HS}^+ = \Lambda(K_{\max}) \quad (1.27)$$

$$K_{HS}^- = \Lambda(K_{\min}) \quad (1.28)$$

A continuación, se presenta una serie de modelos o ecuaciones constitutivas que describen la conductividad eléctrica y velocidad de onda compresional en función de la porosidad. Este grupo de modelos corresponde a una recopilación de ecuaciones empíricas, así como, otros resultados obtenidos con las Teorías Mixtas.

1.5.4 Ecuaciones constitutivas de la conductividad eléctrica

El estudio de las propiedades eléctricas de las rocas sedimentarias muestra las siguientes tendencias [8.]:

- La presencia de agua en los poros conduce a una fuerte dependencia de la resistividad de la roca en esa solución electrolítica. Por tanto la resistividad de la roca decrece con el aumento del número y movilidad de los iones de la solución electrolítica
- La superficie conductora, la interface grano-solución y la forma tanto de los granos como de los poros afectan la resistividad. Por consiguiente, la resistividad decrece con el incremento de porosidad.

En ese sentido, los modelos de conductividad son dependientes de la cantidad de área superficial y las propiedades químicas de la interface fluido-sólido. Entonces, las medidas eléctricas con las que se obtiene la conductividad de una solución se emplean para estimar la porosidad de las formaciones saturadas o parcialmente saturadas con agua [8.].

A continuación se presentan las ecuaciones constitutivas que relacionan la conductividad eléctrica con la porosidad.

a. Promedios

Los modelos más simples para la conductividad eléctrica de un medio compuesto corresponden a los siguientes promedios [12]:

$$\sigma = \sum_{i=1}^N p_i \sigma_i \quad (1.29)$$

$$\sigma = \left(\sum_{i=1}^N \frac{p_i}{\sigma_i} \right)^{-1} \quad (1.30)$$

$$\sigma = \prod_{i=1}^N \sigma_i^{p_i} \quad (1.31)$$

Donde p_i es la fracción de volumen de la fase i y σ_i es la conductividad de la fase i .

b. Ley de Archie y sus modificaciones

Esta ley plantea las bases para la interpretación de los registros de resistividad. Corresponde a una ley empírica que relaciona el factor de formación con la porosidad en una roca reservorio saturada con agua salada. La forma original de la ley de Archie [1] es:

$$\sigma = \sigma_f F^{-1} = \sigma_f \phi^m \quad (1.32)$$

Donde σ_f es la conductividad del fluido fijado al poro, m es el factor de cementación y $F = \phi^{-m}$ el factor de formación.

El factor de cementación m , varía aproximadamente entre 1.3 a 2.5 en la mayoría de las rocas sedimentarias y es cercano a 2 en arenas. En arenas no consolidadas naturales o artificiales m es cercano a 1.3 para granos esféricos, e incrementa a 1.9 para granos cuya forma sea como delgados discos [18]. En carbonatos m muestra un rango mayor de variación y alcanza valores hasta de 5. El mínimo valor de m es 1, sucede cuando la porosidad es 1 y la roca está totalmente saturada con agua salada, lo cual corresponde a una fractura [18].

Otro modelo considera explícitamente la conductividad de las partículas de arcilla σ_s [42]:

$$\sigma = \left(\frac{1 - \sigma_s / \sigma_f}{1 - \sigma_s / \sigma} \right)^m \sigma_f \phi^m \quad (1.33)$$

El modelo de Hermance [25] es un caso particular cuando $m=1$, en la expresión (1.34):

$$\sigma = (\sigma_f - \sigma_s)\phi^m + \sigma_s = (1 - \phi^m)\sigma_s + \sigma_f\phi^m \quad (1.34)$$

En esta expresión, cuando $\sigma_s \rightarrow 0$, se obtiene la ley de Archie.

Finalmente, el modelo de Glover [4-] adapta la ley convencional de Archie para producir una ley de Archie modificada. Este modelo es usado para dos fases conductoras con cualquier valor de conductividad y fracción de volumen, y conserva la capacidad para modelar las conectividades variables dentro de estas fases. La ecuación para este modelo tiene la forma:

$$\sigma = (1 - \phi)^p \sigma_s + \sigma_f \phi^m \quad (1.35)$$

Donde cada fase tiene su propia conectividad y un exponente representativo (m y p). Grandes exponentes ocurren en fases de baja conectividad y pequeños exponentes ocurren para fases de alta conectividad. Los exponentes se seleccionan mediante la siguiente relación [25]:

$$p = \frac{\log(1 - \phi^m)}{\log(1 - \phi)} \quad (1.36)$$

c. Modelos HS

Para predecir teóricamente la conductividad eléctrica efectiva σ_{eff} de una mezcla es necesario especificar: las fracciones de volumen, la conductividad eléctrica y la organización geométrica de cada una de las fases. Si únicamente se conocen las fracciones de volumen y la conductividad eléctrica de las fases, entonces sólo se obtienen los contornos superior e inferior de ésta. En este sentido, los contornos HS establecen un rango cercano de los posibles valores de conductividad efectiva, sin necesidad de alguna especificación acerca de la distribución geométrica de las fases [5]. Por tanto, los contornos HS para la conductividad, en un sistema de N componentes corresponden a:

$$\sigma_{HS}^- = S(\sigma_{min}) \leq \sigma \leq S(\sigma_{max}) = \sigma_{HS}^+ \quad (1.37)$$

De acuerdo con la ecuación (1.37), para un medio poroso compuesto de granos con conductividad σ_s , y fluido con conductividad σ_f , tal que: $\sigma_{min} = \sigma_s \leq \sigma_f = \sigma_{max}$, se tienen los siguientes contornos [5]:

$$\sigma_{HS}^- = \left(\frac{1 - \phi}{3\sigma_s} + \frac{\phi}{\sigma_f + 2\sigma_s} \right)^{-1} - 2\sigma_s \quad (1.38)$$

$$\sigma_{HS}^+ = \left(\frac{1 - \phi}{\sigma_s + 2\sigma_f} + \frac{\phi}{3\sigma_f} \right)^{-1} - 2\sigma_f \quad (1.39)$$

Cuando el caso es: $\sigma_{min} = \sigma_f \leq \sigma_s = \sigma_{max}$, los contornos se invierten, esto es, el contorno inferior pasa a ser el contorno superior y viceversa [5].

d. Modelo del método índice de refracción compleja (CRIM).

El modelo de CRIM se obtiene de la fórmula empírica de Lichtnecker-Rother para una mezcla de N componentes [36]. Para obtener la conductividad eléctrica, a partir de este modelo, se desprecia la permitividad dieléctrica ϵ de la constante dieléctrica efectiva $\kappa = \epsilon + i\sigma/\omega$. Entonces se obtiene la siguiente ecuación:

$$\sigma = \left[\sum_{i=1}^N p_i (\sigma_i)^{1/\gamma} \right]^\gamma \quad \gamma = 2 \quad (1.40)$$

Este modelo corresponde a un promedio volumétrico construido bajo el principio de la aproximación del rayo (El tiempo de viaje en la fase i es inversamente proporcional a la velocidad electromagnética, la cual a su vez es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la constante dieléctrica compleja κ). Se ha encontrado que la ecuación de CRIM es análoga a la ecuación *time-average* de Wyllie para el caso de la velocidad compresional.

e. Modelo *self-similar*

Este modelo corresponde a esferas recubiertas con agua como medio anfitrión al que gradualmente se le añaden inclusiones esféricas de material mineral [18]. Esto conduce a una roca compuesta con una conductividad finita, debido a que siempre existe un camino conductor a través del fluido. En este sentido, este modelo se inscribe dentro de la aproximación del “medio efectivo”, en la cual incrementos infinitesimales de inclusiones son adicionados a un medio anfitrión hasta que las fracciones de volumen deseadas son alcanzadas. La conductividad del compuesto satisface la siguiente ecuación:

$$0 = \sum_{i=1}^N p_i \left(\frac{\sigma - \sigma_i}{2\sigma + \sigma_i} \right) \quad (1.41)$$

Para dos fases (sólido y fluido), la solución está dada por:

$$\phi = f(\sigma, \sigma_s, \sigma_f) = \left(\frac{\sigma_s - \sigma}{\sigma_s - \sigma_f} \right) \left(\frac{\sigma_f}{\sigma} \right)^w \quad (1.42)$$

Donde $W = 1/3$ para inclusiones esféricas. Cuando $W \neq 1/3$ se tiene la relación de Hanai-Bruggeman, la cual describe un medio poroso con forma arbitraria de grano [18].

El uso de esta ecuación requiere de las siguientes consideraciones [18]:

- Las rocas se asumen isotrópicas
- Las teorías de medio efectivo son válidas cuando las longitudes de onda son mucho mayores que la escala de las heterogeneidades.

1.5.5 Ecuaciones constitutivas de la velocidad de onda compresional

Se ha demostrado que las propiedades de las rocas y el comportamiento de los fluidos presentes en ella, son modelados por la teoría acústica al describir la propagación de una onda sonora. Sí los poros de la roca contiene agua u otros fluidos, ó una saturación parcial de diferentes fluidos, entonces el comportamiento acústico de la roca depende de:

- La frecuencia de propagación de la onda sonora, (ver anexo A).
- Las propiedades elásticas, la viscosidad y la densidad de los constituyentes del poro.
- Las fracciones de volumen de los componentes.
- La distribución o arreglo de los componentes en el poro y los efectos en los contornos.

En este sentido, la velocidad de onda compresional en una roca porosa saturada depende principalmente del fluido contenido de poro, su viscosidad, sus parámetros elásticos y la frecuencia con que dicha onda es emitida. Por tanto, sí los tiempos en que esta onda se propaga son conocidos, es posible estimar la porosidad de la roca por medio de los modelos establecidos. A

continuación, se presentan las ecuaciones constitutivas que relacionan la velocidad de onda compresional con la porosidad de la roca.

a. Promedios

Como en el caso de la conductividad eléctrica, la velocidad de onda compresional para un medio compuesto se obtiene por medio de los siguientes promedios [12]:

$$v_p = \sum_{i=1}^N p_i v_i \quad (1.43)$$

$$v_p = \left(\sum_{i=1}^N \frac{p_i}{v_i} \right)^{-1} \quad (1.44)$$

$$v_p = \prod_{i=1}^N v_i^{p_i} \quad (1.45)$$

Donde p_i es la fracción de volumen de la fase i y v_i es la velocidad de la fase i .

b. Ecuación *time average* [13-]

A partir del trabajo de Wyllie *et al* [13-] se establece una relación entre la velocidad y la porosidad en rocas sedimentarias cuando se presentan las siguientes condiciones: las rocas tienen mineralogía relativamente simple, están saturadas de fluido y están sometidas a alta presión. Lo anterior se describe en la siguiente expresión:

$$v_p = \left(\frac{\phi}{v_f} + \frac{1 - \phi}{v_s} \right)^{-1} \quad (1.46)$$

Donde v_p es la velocidad es la velocidad de onda-P de la roca saturada, v_s es la velocidad del mineral y v_f es la velocidad del fluido.

La interpretación de esta ecuación es la siguiente: todo el tiempo de tránsito de la onda en la roca corresponde a la suma del tiempo de tránsito en el mineral más el tiempo de tránsito en el fluido de poro.

El uso de esta ecuación requiere de las siguientes consideraciones [8.]:

- Se asume la roca isotrópica con una mineralogía homogénea.

- La roca debe estar saturada de fluido.
- La ecuación trabaja mejor en rocas consolidadas y sometidas a alta presión, puesto que en materiales compactos las ondas acústicas se propagan mejor. Por tanto, la correlación entre la velocidad y la porosidad es alta. A baja presión o en situaciones no consolidadas, la ecuación tiende a sobre predecir la velocidad y la porosidad.

c. Ecuación de Raymer

Raymer *et al.* sugiere una mejora a la ecuación empírica de Wyllie para arenas consolidadas, mediante las siguientes relaciones [8.]:

$$v_p = (1 - \phi)^2 v_s + \phi v_f \quad \phi < 37\% \quad (1.47)$$

$$\frac{1}{\rho v_p^2} = \frac{\phi}{\rho_f v_f^2} + \frac{1 - \phi}{\rho_o v_o^2} \quad \phi > 47\% \quad (1.48)$$

Donde v_p es la velocidad de onda-P de la roca saturada, v_s es la velocidad del mineral, v_f es la velocidad del fluido, ρ es la densidad de la roca, ρ_f la densidad del fluido y ρ_o es la densidad del grano.

Esta ecuación cumple con las mismas condiciones que las mencionadas en la ecuación de Wyllie.

d. Modelos HS [5]

El módulo elástico efectivo de una mezcla de granos y poros se determina teóricamente con: las fracciones de volumen, los módulos elásticos y la geometría de las fases. Cuando se tiene sólo las fracciones de volumen y el módulo de las fases, lo que mejor se predice, para el módulo elástico efectivo, son los contornos superior e inferior de Hashin-Strickman (HS). Entonces, para un medio poroso de dos fases (sólido y fluido) los contornos HS están dados por:

$$K_{HS}^- = \left(\frac{\phi}{K_f} + \frac{1 - \phi}{K_s} \right)^{-1} \quad (1.49)$$

$$K_{HS}^+ = \left(\frac{1 - \phi}{K_s + x} + \frac{\phi}{K_f + x} \right)^{-1} - x \quad (1.50)$$

$$x = \frac{4}{3} \mu_s \quad (1.52)$$

$$\mu_{HS}^- = 0$$

$$\mu_{HS}^+ = \left(\frac{1 - \phi}{\mu_s + x} + \frac{\phi}{x} \right)^{-1} - x \quad (1.53)$$

$$x = \frac{\mu_s}{6} \left(\frac{9K_s + 8\mu_s}{K_s + 2\mu_s} \right) \quad (1.54)$$

Donde K_{HS}^+ y K_{HS}^- corresponden al módulo volumétrico superior e inferior del medio, μ_{HS}^- y μ_{HS}^+ corresponde al módulo de corte superior e inferior del sólido, K_s y K_f corresponden al módulo volumétrico del sólido y del fluido respectivamente, μ_s corresponde al módulo de corte del sólido.

Los contornos superior e inferior se calculan al intercambiar las fases. Generalmente el contorno superior se obtiene para la fase más rígida y el contorno inferior para la fase más blanda. La separación entre el contorno superior e inferior depende de cuán diferentes son los constituyentes. Frecuentemente se ha encontrado que cuando se mezclan sólidos los contornos son similares, y cuando se mezclan diferentes fases los contornos están muy separados.

Los contornos HS se emplean bajo las siguientes condiciones [12]:

- Cada constituyente es isotrópico, lineal y elástico.
- La roca es isotrópica, lineal y elástica.

A partir de los contornos de los módulos se obtienen los contornos de la velocidad de onda compresional [5]:

$$v_p^- = \sqrt{\frac{K_{HS}^-}{\rho}} \quad (1.55)$$

$$v_p^+ = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(K_{HS}^+ + \frac{4}{3} \mu_{HS}^+ \right)} \quad (1.56)$$

e. Velocidad de Gassmann

Uno de los problemas más importantes en el análisis de la física de rocas corresponde a la sensibilidad de las velocidades sísmicas en presencia de

fluidos del poro. Generalmente, cuando una roca se carga bajo un incremento de compresión, tal como el paso de una onda sísmica, los poros son siempre elásticamente, más comprimidos que los granos sólidos. Esta compresión de poro induce incrementos en la presión del fluido del poro, el cual resiste la compresión. Por lo tanto, el fluido con mayor K endurece más la roca. La teoría de Gassmann a baja frecuencia predice el incremento obtenido en el módulo volumétrico de la roca saturada, K_G , a través de la siguiente ecuación [19]:

$$K_G = \frac{K_s - K_m + \phi K_m (K_s / K_f - 1)}{1 - \phi - K_m / K_s + \phi K_s / K_f} \quad (1.57)$$

Donde K_s , K_m y K_f son los módulos volumétricos del grano, de la matriz y del fluido respectivamente.

La ecuación de Gassman asume, para el mineral del poro, un módulo homogéneo y estadísticamente isotrópico. Adicionalmente, esta ecuación es válida sólo en el rango de bajas frecuencias, tal que las presiones de poro inducidas se nivelan a través del espacio poroso. Es decir, hay suficiente tiempo para que el fluido de poro fluya y elimine las ondas inducidas por gradientes de presión en el poro. Lo anterior explica porqué la relación de Gassmann funciona tanto para los datos sísmicos *in situ* (con frecuencias menores a 100 Hz) como para los registros sísmicos (con frecuencias cercanas a 10^3 Hz) [8.].

A partir de K_G , la velocidad de onda compresional del medio totalmente saturado es:

$$v_p = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(K_G + \frac{4}{3} \mu_m \right)} \quad (1.58)$$

Donde μ_m es el módulo de corte de la matriz y ρ es la densidad de la mezcla, y está dada por:

$$\rho = (1 - \phi) \rho_s + \phi \rho_f \quad (1.59)$$

Donde ρ_s y ρ_f corresponden a las densidades del grano y del fluido respectivamente.

1.6 Relaciones de propiedades cruzadas entre propiedades físicas de las rocas.

Establecer relaciones entre diferentes propiedades físicas (*cross-property relations*) es una metodología que permite determinar una propiedad a partir de otra propiedad. La fundamentación teórica de esta metodología proviene de tres argumentos esenciales:

- La analogía entre las ondas acústicas y las ondas electromagnéticas a bajas frecuencias.
- El tipo de roca con el que se obtuvieron las ecuaciones constitutivas que describen las propiedades de la roca.
- Las relaciones entre las propiedades de los componentes de la roca con parámetros invariantes como la porosidad.

Al emplear esta metodología se obtienen relaciones entre la conductividad eléctrica y la velocidad de onda compresional por medio de la porosidad. Estas relaciones son necesarias cuando algunas propiedades se miden más fácil que otras, de manera que, conociendo la conductividad eléctrica la velocidad de onda compresional puede obtener y viceversa [12].

Con respecto a sus aplicaciones, se pueden distinguir entre dos tipos de relaciones [8.]:

1. Relaciones entre propiedades determinadas por métodos geofísicos, las cuales son influenciadas por el tipo de roca o litología y porosidad. A partir de estas relaciones se fundamenta la interpretación y análisis de los datos obtenidos con los de registros de pozos.
2. Relaciones entre propiedades determinadas por métodos geofísicos y otras propiedades físicas (propiedades geotécnicas, permeabilidad hidráulica, etc.).

El primer tipo de relaciones son de especial interés en esta investigación.

1.6.1 Relaciones entre las propiedades determinadas por métodos geofísicos

A continuación se presenta una serie de modelos que indican pautas para establecer relaciones entre propiedades de la roca. El empleo de un modelo en particular depende del tipo y complejidad del problema en estudio. Para

esta investigación, donde el medio se considera homogéneo, isotrópico y viscoelástico; las relaciones entre propiedades de la roca se fundamentan en los modelos volumétricos.

a. Modelos Volumétricos

Estas relaciones corresponden a un sistema de ecuaciones lineales válido para la composición de la roca y con el cual se calcula la porosidad. El modelo volumétrico es válido cuando las propiedades de la roca son escalares y representa el valor efectivo de una propiedad en particular. Este valor efectivo es determinado por los valores individuales de la propiedad de cada componente y sus respectivas fracciones de volumen. En general, el valor efectivo de una propiedad física X está dado por la suma de los productos entre la propiedad X_i y la fracción de Volumen V_i de los componentes individuales [5]:

$$X = \sum_{i=1}^n V_i \cdot X_i \quad \sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (1.60)$$

Al aplicar la ecuación (1.60) en varias propiedades, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales. Estas ecuaciones son fundamentales para muchos algoritmos y estrategias en la interpretación de registros, y se constituye en la base del análisis composicional [41], [30-].

b. Modelo para rocas fracturadas

Fracturas, grietas y otros defectos de la roca, cuyas dimensiones son mayores a la longitud de la onda en estudio, cambian dramáticamente las propiedades elásticas. Entonces, la velocidad de la onda acústica se reduce y resulta una dependencia de la velocidad con la presión. Por lo tanto, estos defectos puede cambiar significativamente la velocidad.

En la figura 26, se observa un esquema sencillo del modelo para roca fracturada, donde se asume que todos los efectos de los defectos (fracturas, defectos en los contornos de los granos, defectos intra-granulares, etc.) son descritos por un parámetro D [8.].

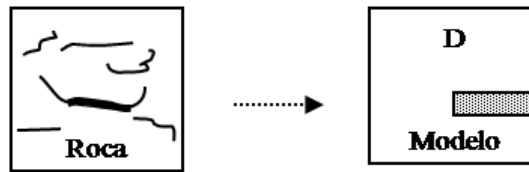


Figura 26: Modelo de roca con defectos internos
Grietas, fracturas, etc; expresados por el parámetro D
Fuente: [8.].

Este modelo es aplicado a: la velocidad de onda compresional, la conductividad eléctrica, la conductividad térmica y al esfuerzo, entre otras. Entonces, cuando se establecen relaciones entre estas propiedades la parte de conexión es el parámetro de defecto D.

Este modelo puede ser integrado en modelos estructurales, en donde el defecto tiene una orientación variable con respecto a la dirección de la onda de propagación.

c. Modelos con una estructura interna variable

Este modelo permite la descripción de diferentes influencias y dependencias de la roca, así como representar el comportamiento de las propiedades cuyo valor es variable dentro de la roca [8.].

Para derivar el modelo se distinguen tres partes diferentes de la roca:

- Matriz de material sólido (S).
- Poro ocupado por sustancia (p).
- Región de contacto (c), con propiedades diferentes a las de la matriz de material sólido.

Generalmente, el elemento de roca es idealizado como un modelo con sección transversal rectangular, como se observa en la figura 27. Por lo tanto el modelo consiste de un bloque rectangular con canales de poros circundantes, una región de contacto especial y una orientación espacial.

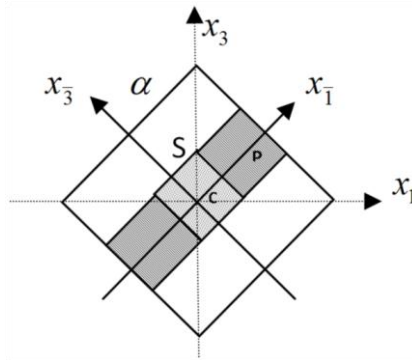


Figura 27. Modelo para una roca porosa.
Matriz del material S, poro P, región de contacto C.
Fuente: [8.].

En la figura 27, los sistemas cartesianos corresponden al “macro-sistema” ($x_1 - x_3$) y al “micro-sistema” ($x_{\bar{1}}, x_{\bar{3}}$). Este último está asociado a la estructura microscópica de las dos partículas de roca y su espacio poroso conectado. El “micro-sistema” está asociado al “macro-sistema” por un ángulo α , el cual es una medida para la estructura interna de la roca y es llamado “ángulo estructural”.

Una propiedad física en éste modelo se calcula de la siguiente manera:

- Cálculo de propiedades con respecto al micro-sistema.
- Transformación de estas propiedades en el macro-sistema.

Entonces, la macro-propiedad se obtiene de una ecuación con la siguiente forma:

$$\text{Macro-propiedad} = f(\text{micro-propiedad, fracciones de volumen, estructura, contornos})$$

Que depende de:

- Propiedades y fracciones de volumen de los constituyentes
- Geometría interna (grano, forma y estructura).
- Contorno o propiedades de contacto.

La fracción de volumen y la estructura son siempre los mismos parámetros para las propiedades elásticas, térmicas, eléctricas, y demás propiedades físicas de la roca. Por lo tanto estos parámetros actúan como “conexiones unidas” entre las diferentes propiedades físicas de la roca. Las relaciones están controladas por:

- Porosidad y estructura interna (parámetros de la red).
- Propiedades de contacto o de contorno.

- Propiedades geométricas de poro y grano, y las propiedades de la matriz como un factor de normalización.

1.6.2 Consideraciones al establecer relaciones entre las propiedades

Para establecer las relaciones entre propiedades físicas de la roca se revisan los siguientes criterios:

a. Homogeneidad

Debido a la amplia variedad en los valores de las características de las ondas empleadas para obtener los registros de pozo y de la heterogeneidad de la sección de la roca en estudio, el concepto de homogeneidad se tiene presente para esta investigación.

Lo anterior debido a la variedad de escalas de los datos. Puesto que una formación rocosa es típicamente estudiada con ondas sísmicas cuya frecuencia varía en el rango de 1Hz a 100 Hz y con ondas electromagnéticas cuya frecuencia varía en el rango de 0 a 50 kHz. Adicionalmente, los datos de laboratorio son obtenidos con ondas cuya frecuencia varía en el rango de 200 kHz a 100 kHz. Entonces, las velocidades de onda en el agua y en los minerales típicamente son de 1,5 km/s y cerca de 6,0 km/s respectivamente; y las longitudes de onda varían desde los 1,5 m a 7,5 m en el laboratorio y hasta los 60 m a 6 km en el campo.

Por tanto, para realizar una interpretación apropiada de los datos obtenidos en laboratorio o en campo, se requiere emplear ecuaciones que consideren al medio como un medio homogéneo.

b. Isotropía

Las rocas en un volumen determinado pueden considerarse isotrópicas o anisotrópicas. Este término indica si una propiedad varía con la dirección dentro del volumen. Si la propiedad es la misma en todas las direcciones, se considera como una propiedad isotrópica y se toma como un escalar. Una propiedad es anisotrópica, cuando es diferente en todas las direcciones y se toma como un tensor.

En la figura 28 se muestra una descripción ilustrativa dada por Gassmann, del comportamiento de una propiedad con cada uno de los dos criterios [8.].

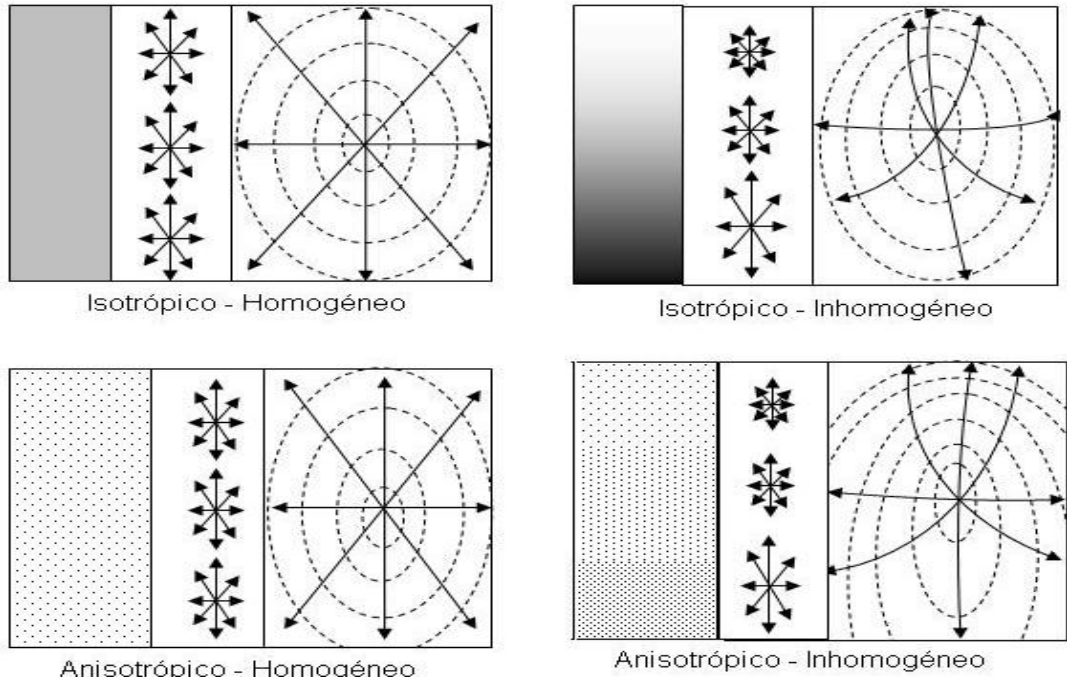


Figura 28. Ilustración de los términos Homogeneidad, in-homogeneidad, isotropía y anisotropía. Fuente [8].

1.6.3 Relaciones de propiedades cruzadas entre velocidad de onda compresional con la conductividad eléctrica

La propiedad que relaciona la velocidad de onda compresional con la conductividad eléctrica es la porosidad de la roca. Por tanto, si se asume que la conductividad y la velocidad se definen en función de la porosidad ϕ , como se indica en (1.61):

$$\sigma = f(\phi) \text{ y } v = g(\phi) \quad (1.61)$$

Entonces la relación entre σ y v está dada por:

$$\sigma = f[g^{-1}(v)] \quad (1.62)$$

En este sentido, y a partir de las ecuaciones constitutivas estudiadas en la sección 1.5, se establecen las siguientes relaciones de propiedades cruzadas entre la conductividad eléctrica y la velocidad de onda compresional para una roca saturada [12]:

a. Archie/Time-average

Al combinar la ecuación de Archie y la ecuación *Time-average*, se tiene:

$$\sigma = \sigma_f \left(\frac{v_s/v_p - 1}{v_s/v_f - 1} \right)^m \quad (1.63)$$

b. Archie/Raymer

Al combinar la ecuación de Archie y la ecuación de Raymer, se tiene:

$$v_p = \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_f} \right)^{1/m} \right]^2 v_s + \left(\frac{\sigma}{\sigma_f} \right)^{1/m} v_f \quad (1.64)$$

c. Glover et al. / Time average

Al combinar las ecuaciones de *Time-average* y Glover, se tiene:

$$\sigma = (1 - \phi)^p \sigma_s + \sigma_f \phi^m, \quad \phi = \frac{1/v_p - 1/v_s}{1/v_f - 1/v_s} \quad (1.65)$$

d. Hermance/ Time-average

Al combinar las ecuaciones *Time-average* y Hermance, se tiene:

$$\sigma = (\sigma_f - \sigma_s) \phi^m + \sigma_s, \quad \phi = \frac{1/v_p - 1/v_s}{1/v_f - 1/v_s} \quad (1.66)$$

e. Self-similar / Time-average

Para una matriz conductora, se obtiene la siguiente relación al combinar las ecuaciones *time-average* y *self-similar*.

$$v_p = \left[\left(\frac{1}{v_f} - \frac{1}{v_s} \right) \left(\frac{\sigma_s - \sigma}{\sigma_s - \sigma_f} \right) \left(\frac{\sigma_f}{\sigma} \right)^{1-1/m} + \frac{1}{v_s} \right]^{-1} \quad (1.67)$$

f. HS / Raymer

Al combinar la ecuación de Raymer y el contorno HS inferior, se construye una relación basada en:

$$v_p = (1 - \phi + \phi_p)^2 v_s + (\phi - \phi_p) v_f, \quad \phi = \frac{3\sigma}{\sigma + 2\sigma_f} \quad (1.68)$$

Donde ϕ_p es la porosidad de percolación. Típicamente $\phi_p=0.4$.

g. Contornos HS

Se combinan los modelos de los contornos HS para el caso electromagnético con el sísmico. Se considerará un medio de dos fases compuesto de una matriz sólida y un fluido, entonces, se obtiene la porosidad a partir de las ecuaciones (1.38) y (1.39) tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \phi &= \left(\frac{\sigma_s - \sigma_{HS}^-}{\sigma_s - \sigma_f} \right) \left(\frac{\sigma_f + 2\sigma_s}{\sigma_{HS}^- + 2\sigma_s} \right) \\ &= \left(\frac{\sigma_s - \sigma_{HS}^+}{\sigma_s - \sigma_f} \right) \left(\frac{3\sigma_f}{\sigma_{HS}^+ + 2\sigma_s} \right) \end{aligned} \quad (1.69)$$

La relación de propiedad cruzada dada por el contorno HS inferior y superior se obtiene al combinarla ecuación (1.69) con la ecuación (1.49) y (1.50), respectivamente se tiene:

$$K_{HS}^- = \left[\left(\frac{\sigma_s - \sigma_{HS}^-}{\sigma_s - \sigma_f} \right) \left(\frac{\sigma_f + 2\sigma_s}{\sigma_{HS}^- + 2\sigma_s} \right) \left(\frac{1}{K_F} - \frac{1}{K_S} \right) + \left(\frac{1}{K_S} \right) \right]^{-1} \quad (1.70)$$

$$K_{HS}^+ = \left[\left(\frac{\sigma_s - \sigma_{HS}^+}{\sigma_s - \sigma_f} \right) \left(\frac{3\sigma_f}{\sigma_{HS}^+ + 2\sigma_s} \right) \left(\frac{1}{K_F} - \frac{1}{K_S} \right) + \left(\frac{1}{K_S} \right) \right]^{-1} \quad (1.71)$$

La velocidad de onda está dada por la ecuación (1.56) y la densidad está dada por la ecuación (1.59):

$$\rho(\sigma) = (\rho_f - \rho_s)\phi(\sigma) + \rho_s \quad (1.72)$$

h. Relaciones basadas en la ecuación de Gassmann

Para este caso se asumen un modelo del módulo volumétrico de la roca en función de la porosidad. En este sentido, se considera el modelo de Krief [12] con el cual se obtiene el módulo $K_m(\phi)$:

$$K_m = K_s(1 - \phi)^{(1-\phi+A)/(1-\phi)} \quad (1.73)$$

De acuerdo con la ecuación (1.57) la relación entre el módulo volumétrico y la conductividad es:

$$K_G = \frac{K_s - K_m(\phi) + \phi K_m(\phi)(K_s/K_f - 1)}{1 - \phi - K_m(\phi)/K_s + \phi K_s/K_f} \quad (1.74)$$

Se reemplazan las diferentes ecuaciones de las conductividades en función de la porosidad en la ecuación (1.74).

Donde $\phi(\sigma)$ es:

$$\phi = \left(\frac{\sigma}{\sigma_f}\right)^{1/m}, \text{ Archie.} \quad (1.75)$$

$$\phi = \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_f - \sigma_s}\right)^{1/m}, \text{ Hermance.} \quad (1.76)$$

$$\phi = \left(\frac{\sigma^{1/\gamma} - \sigma_s^{1/\gamma}}{\sigma_f^{1/\gamma} - \sigma_s^{1/\gamma}}\right), \gamma = 2, \text{ CRIM.} \quad (1.77)$$

$$\phi = \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_f - \sigma_s}\right) \left(\frac{\sigma_f}{\sigma}\right)^{1-1/m}, \text{ Self-similar.} \quad (1.78)$$

$$\phi = \left(\frac{\sigma_s - \sigma}{\sigma_s - \sigma_f} \right) \left(\frac{\sigma_f + 2\sigma_s}{\sigma + 2\sigma_s} \right), \text{ HS contorno inferior.} \quad (1.79)$$

$$\phi = \left(\frac{\sigma_s - \sigma_{HS}^+}{\sigma_s - \sigma_f} \right) \left(\frac{3\sigma_f}{\sigma_{HS}^+ + 2\sigma_s} \right), \text{ HS contorno superior} \quad (1.80)$$

Las ecuaciones constitutivas anteriores corresponden a la porosidad de la roca en función de la conductividad eléctrica (ver sección 1.5.4). Los contornos HS se intercambian si $\sigma_f \leq \sigma_s$.

2 ESTADO DEL ARTE

Desde hace 50 años se han venido realizando estudios de las propiedades físicas de las rocas y los minerales aplicados en la exploración de hidrocarburos. Algunas de estas teorías y resultados experimentales juegan un papel importante en el avance de las ciencias de la tierra y las tecnologías de exploración. En este sentido, el presente capítulo, muestra la evolución de una metodología empleada para el desarrollo de nuevas teorías llamada: Relaciones de propiedades cruzadas. Estas relaciones se investigan en diferentes contextos tal como en la ciencia de materiales y en la interpretación registros de pozos.

La metodología de relaciones de propiedades cruzadas se emplea para determinar valores de una propiedad física a partir de otra propiedad física, cuando estas propiedades tienen una propiedad en común. Esta metodología resulta interesante, ya que si una propiedad física se mide más fácil que la otra, la segunda se obtiene a partir de una relación de propiedad cruzada [12].

En este capítulo se hace un seguimiento del desarrollo de la metodología utilizada hasta la fecha, de la siguiente forma: en la primera sección se hace una exposición de los trabajos desarrollados en la ciencia de materiales, en la segunda sección se muestran los trabajos más representativos de las relaciones entre propiedades en el entorno de la interpretación de registros de pozos, en la tercera sección se exponen trabajos de relaciones entre propiedades físicas y petrofísicas. Finalmente, en la cuarta sección se discuten algunos de los éxitos, fracasos y desafíos de ésta metodología dentro de la física de rocas, principalmente en la exploración de hidrocarburos.

2.1. Estudio de las relaciones de propiedades cruzadas en la ciencia de materiales

A través de diferentes estudios en la ciencia de materiales, se encuentra que las relaciones entre propiedades permiten establecer ecuaciones independientes de la micro-estructura del material con las que se estiman propiedades a partir de otras propiedades que se miden más fácilmente [37]. Ejemplos de estos estudios se muestran a continuación.

En 1960, Bristow deriva una relación explícita entre la conductividad eléctrica y el módulo elástico efectivo. Para un material cuya matriz es isotrópica y con baja concentración de micro-fracturas, las cuales se orientan aleatoriamente. En este trabajo se demuestra que las micro-fracturas producen cambios en las constantes elásticas del material comparables con los cambios en la resistividad eléctrica. Entonces las micro-fracturas son el parámetro de interconexión entre estas propiedades [9].

En 1988, Berryman & Milton [6] investigan relaciones de propiedades cruzadas en materiales isotrópicos de dos fases. Como resultado se derivan nuevos contornos para el módulo volumétrico, módulo de cizalla y conductividad eléctrica; a partir de relaciones entre parámetros geométricos y propiedades del material. Estos contornos tienen formas analíticas particularmente simples y mejoran los contornos tradicionales de Hashin-Strickman. Los resultados se restringen para materiales isotrópicos de dos fases, donde se distinguen claramente la fase sólida y vacía.

Los contornos de propiedades cruzadas, desarrollados por Berryman & Milton, son sustancialmente avanzados por Gibiansky & Torquato en 1996 [20]. Ellos los estrechan bajo restricciones adicionales de la micro-geometría y de las propiedades del compuesto. Gibiansky & Torquato describen cuantitativamente y matemáticamente la microestructura de materiales heterogéneos por medio de propiedades efectivas y usan tal información para predecir rigurosamente el comportamiento macroscópico al emplear la Teoría de la Homogenización. En su trabajo se demuestra que las propiedades efectivas del medio reflejan cierta información morfológica acerca del medio, por lo tanto, se puede extraer información útil acerca de una propiedad efectiva dando una aproximación (experimental o teórica) de otra propiedad. La generalidad de la aproximación permite tratar con una amplia clase de materiales heterogéneos anisotrópicos e isotrópicos.

Por tanto, se propone que los módulos elásticos y la conductividad eléctrica de los compuestos no son independientes, están de hecho, conectados a través de la microestructura. Sin embargo esta relación no es uno a uno porque los compuestos de diferentes microgeometrías pueden tener las mismas conductividades pero diferentes módulos elásticos, y viceversa. Efectivamente, los contornos de propiedades cruzadas encontrados muestran cómo los valores del módulo cizalla del compuesto son obtenidos asumiendo que las propiedades de la fase y las fracciones de volumen son fijos [20].

A diferencia de los trabajos anteriores M. Kachanov en el 2001[29], deriva relaciones de propiedades cruzadas entre propiedades efectivas, para el caso de materiales con baja concentración de poros. Dichas relaciones son derivadas entre la deformación elástica y la conductividad térmica. Como resultado se logra expresar el tensor de elasticidad en términos del tensor de conductividad, en materiales porosos anisotrópicos. Por lo tanto, los resultados pueden ser usados para estimar constantes elásticas anisotrópicas (generalmente difíciles de medir) a partir de las conductividades (que son más fáciles de medir). Igualmente, estos resultados se extienden a otras propiedades físicas, puesto que el problema conductividad térmica es matemáticamente equivalente al de conductividad eléctrica, permeabilidades magnética y dieléctrica o coeficientes de difusión. Este trabajo corresponde a una extensión de las relaciones de propiedades cruzadas en medios isotrópicos fracturados desarrollados por Beryman.

2.2. Estudio de las relaciones entre propiedades físicas de la roca para determinar propiedades en la interpretación de registros de pozo.

Las primeras relaciones entre propiedades físicas se obtienen debido a la ausencia de registros sísmicos en los pozos. En este sentido, se establecen ecuaciones empíricas que permiten predecir dichos registros a partir de registros eléctricos, tal como Faust [33] y Delaplanche *et al.* [15]. En 1953 Faust deriva la ecuación (2.1) para formaciones de arena y arcilla. Ésta corresponde a una relación empírica no-lineal entre la velocidad de onda P (V_p), la resistividad verdadera de la formación (R) y la profundidad (Z):

$$V = \delta(ZR)^{1/6} \quad (2.1)$$

Donde $\delta = 1,948$, corresponde a una constante empírica aplicada a la sección geológica en estudio. La potencia de $1/6$ se relaciona con el comportamiento de la velocidad del sonido con respecto a la profundidad en medios porosos.

En 1975, Rudman [38-] sugiere la ecuación (2.2):

$$V = \alpha Z^\beta R_a^\delta \quad (2.2)$$

Donde: α , β y δ son constantes empíricamente determinadas para una localidad dada y R_a , corresponde a la resistividad aparente de la formación.

Sin embargo, las relaciones anteriores no generan registros exactos. Lo anterior debido a que la profundidad no es un factor suficiente para predecir valores reales de la velocidad [38-]. Entonces, debido a que las velocidades de la roca dependen fuertemente de la porosidad, así como la resistividad verdadera R_t y la resistividad del fluido de la formación R_f ; Rudman relaciona la resistividad verdadera y la velocidad en una dependencia común con la porosidad.

Por consiguiente, Rudman genera registros de pseudo-velocidad a partir de datos de registros de resistividad con ecuaciones empíricas más acertadas. Utiliza la ecuación (2.3) desarrollada por Kim [31], la cual se observa en la figura 29 y corresponde a la ecuación:

$$TT' = A + (B)R_a^{-1/C} \quad (2.3)$$

Donde A, B y C son constantes determinadas empíricamente.

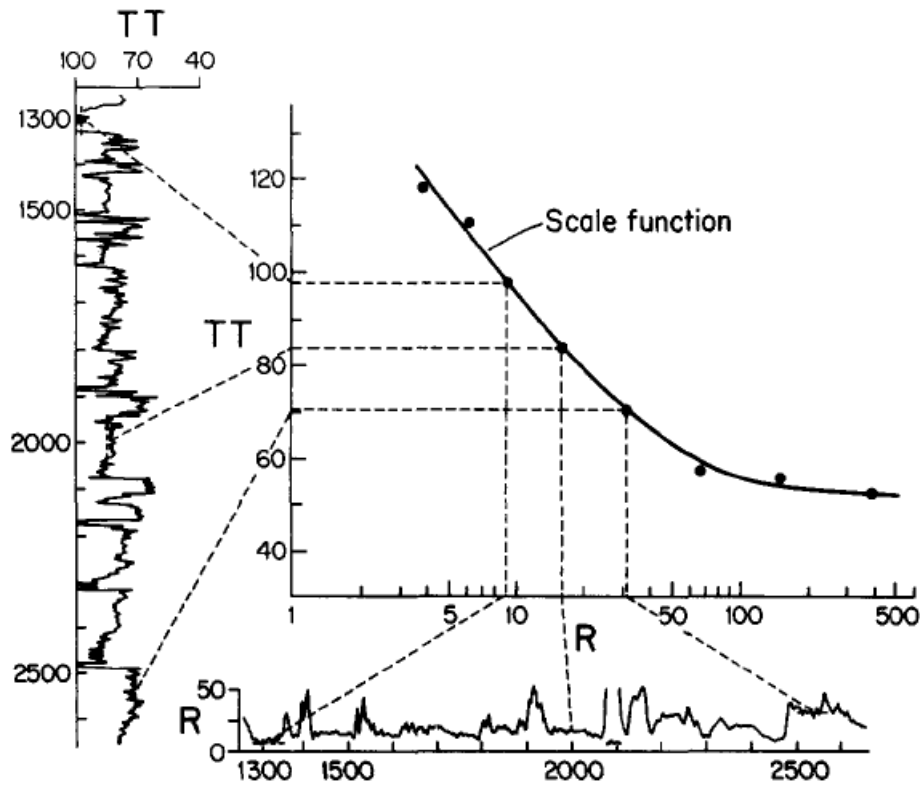


Figura 29. Generación de una función escala.
Resistividad (R) en $m\Omega$ y tiempo de tránsito (TT) $\mu s/pe$.
Fuente: [38-]

Esta figura representa una “función escala”, se obtiene para un pozo que cuenta con registros de tiempo de tránsito y de resistividad. La gráfica se construye a partir de las curvas de los registros, donde se seleccionan intervalos de la misma profundidad con características uniformes. Los valores promedios de los intervalos son entonces representados en una curva semi-logarítmica, donde altos valores de resistividad están asociados con bajos tiempos de tránsito. El eje x corresponde a los valores promedios de la resistividades y el eje y a los valores promedio de los tiempos de tránsito. Cada punto es asociado con una profundidad, la cual no se identifica en la curva. Finalmente la gráfica se obtiene al unir los puntos.

Entonces, la “función de escala”, representa una forma para transformar resistividades en pseudo-tiempos de tránsito (inverso de la velocidad sísmica). Esta función se obtiene para formaciones limpias (sin arcilla), a partir de un ajuste matemático de la función escala con las consideraciones teóricas correspondientes a la ley de Archie [1] y a la ecuación de Wylie [12-]. Estas últimas ecuaciones son:

$$F = \frac{R_w}{R_0} = a\Phi^m \quad (2.4)$$

$$t = \Phi t_f + (1 - \Phi)t_m \quad (2.5)$$

Donde:

F : Factor de formación.

R_w : Resistividad del agua contenida en la roca

R_0 : Resistividad de la roca que contiene agua.

Φ : Porosidad.

m : Factor de cementación.

a : Factor de tortuosidad.

t_f : Tiempo de Tránsito.

t_m : Velocidad de onda compresional en la matriz de la roca.

Los valores de a y m dependen de la litología de la roca.

En 1988, W.L. Brito Dos Santos, *et al* [10], desarrollan una relación teórica y un método para generar registros de pseudo-velocidad a partir de registros de resistividad eléctrica para una formación específica. La ecuación teórica que presentan, es una modificación de la ley de Archie para formaciones arcillosas en la zona lavada del pozo:

$$\Phi^m = \frac{R_{mf}}{R_{xo}} \left(\frac{R_r - R_{xo}}{R_r - R_{mf}} \right)^m \quad (2.6)$$

Donde R_r es la resistividad de las partículas en la mezcla, R_{mf} es la resistividad del lodo filtrado, R_{xo} es la resistividad de la roca conteniendo lodo filtrado y Φ corresponde a la porosidad.

La relación que se obtiene entre la resistividad y tiempo de transito, para la zona lavada es:

$$\Phi = A(R_{xo})^{-\frac{1}{m}} - B(R_{xo})^{\frac{m-1}{m}} + C \quad (2.7)$$

Donde:

$$A = \alpha(t_f - t_m) \quad (2.8)$$

$$B = \beta(t_f - t_m) \quad (2.9)$$

$$C = t_m \quad (2.10)$$

Los parámetros A , B y C se definen en zonas lito-resistivas, es decir, zonas donde la resistividad y la litología tienen poca variación. Por consiguiente se obtiene una ecuación para cada zona, entonces, a partir de los registros de resistividad de esta zona se obtienen, punto a punto, los registros de pseudo-velocidad. La aproximación se valida con una comparación de los registros de pseudo-velocidad derivados con los registros sísmicos actuales.

En el 2001 Granitto *et al.* [22], utilizan arreglos de redes neuronales y el algoritmo de Kernel-Aladine para desarrollar modelos empíricos, locales no lineales. Para obtener registros sísmicos a partir de registros de resistividades y de niveles de radioactividad natural de la formación. Al comparar las dos técnicas mencionadas con técnicas de regresiones lineales multivariantes, las primeras presentan mejor desempeño. De hecho, el algoritmo de Kernel-Aladine muestra una pequeña mejoría en desempeño que las redes neuronales.

En el 2003 A. P. Koesoemadinata y G. A. McMechan realizan siguiente estudio, el cual se fundamenta en el desarrollo de relaciones empíricas entre medidas de propiedades sísmicas, eléctricas y físicas de la roca; por medio del ajuste de mínimos cuadrados [32].

Ellos utilizan medidas de propiedades sísmicas (densidad volumétrica ρ_b , velocidad de onda-P V_P), propiedades electromagnéticas (conductividad eléctrica σ , constante dieléctrica κ) y varias propiedades físicas de la roca (porosidad ϕ , permeabilidad del fluido k , contenido de arcilla C , densidad del grano ρ_g , y densidad volumétrica ρ_b); para establecer relaciones empíricas entre ellas a partir de muestras de corazonces tomados en reservorios de areniscas y carbonatos. Las relaciones entre las propiedades de las muestras se obtienen por medio de correlaciones gráficas y análisis de regresiones, para cada tipo de roca. Estas aproximaciones son evaluadas por dos métricas: el coeficiente de correlación ajustado (R^2) y la Desviación Estándar (SD).

Como resultado se encuentra las relaciones para muestras de areniscas con mejores coeficientes de correlación correspondientes a: V_P como un función de $\ln k$ y C , V_P como un función de ρ_b y ϕ , y σ como función de $\ln \phi$ y C . Como se muestra en la tabla 2. Las relaciones para muestras de carbonatos no son muy significativas debido a su baja porosidad, por lo tanto presentan bajo coeficiente de correlación, como se muestra en la tabla 3.

Tabla 2. Resultados de la regresión

id	Regresión <i>least-squares</i>	R ²	SD	N
a	$V_p = 108.84\rho_b^4$	0.56	284.33	23
b	$V_p = 108.84\rho_b^4 + 53.40\phi - 895.88$	0.64	196.76	23
c	$V_p = -75.57\phi + 26.88C + 3474.00$	0.46	221.82	28
d	$V_p = -152.93 \ln k + 2866.96$	0.49	206.41	52
e	$V_p = -188.29 \ln k - 34.77C + 3469.10$	0.69	168.71	28
f	$\rho_b = 2.625 - 2.624(\phi/100)$	0.94	0.021	28
g	$\ln k = 0.43545\phi - 5.13879$	0.56	1.1851	58
h	$\ln k = 0.34384\phi - 0.26531C + 0.19117$	0.83	0.8314	34
i	$\sigma = -1.07005 \ln \phi + 3.71383$	0.31	0.3620	34
j	$\sigma = 0.05799C - 0.22365$	0.27	0.3706	34
k	$\sigma = -0.85512 \ln \phi + 0.04453C + 2.4264$	0.45	0.3211	34
l	$\sigma = -0.15069 \ln k + 1.00529$	0.48	0.3141	34
m	$\kappa = -2.90299 \ln \phi + 12.8161$	0.66	0.4797	34
n	$\kappa = -0.35978 \ln k + 5.35307$	0.78	0.3886	34
o	$\kappa = 0.10061C + 2.99067$	0.22	0.7248	34
p	$\kappa = -0.2572 \ln k - 0.07298\phi + 6.41999$	0.82	0.3486	34
q	$\kappa = 7.1806\rho_b - 11.0397$	0.65	0.5150	28
r	$\kappa = 6.6611\rho_b + 0.0818C - 11.1742$	0.79	0.3942	28
s	$\kappa = 0.00119V_p + 1.41383$	0.55	0.3194	28
t	$\kappa = 0.00058V_p - 0.16294 \ln k + 3.3758$	0.64	0.2877	28
u	$\kappa = 0.00072V_p - 0.06851\phi + 3.8133$	0.65	0.2826	28
v	$\kappa = 0.00072V_p + 2.3032\rho_b - 2.4137$	0.68	0.2727	23
w	$V_p = 479.67343\kappa + 380.980$	0.55	203.19	28
x	$V_p = 229.35033\kappa - 104.8169 \ln k + 1756.658$	0.64	182.19	28

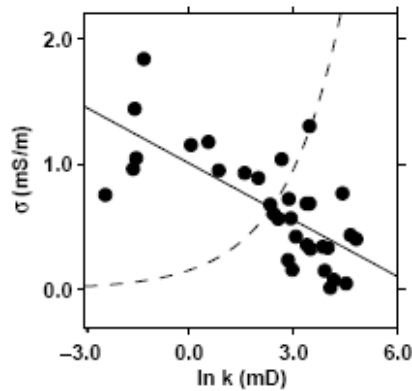
Coefficiente de correlación (R2), desviación estándar (SD) y número de muestras (N) de los corazones de areniscas.
Fuente: [32].

Tabla 3. Resultados de la regresión

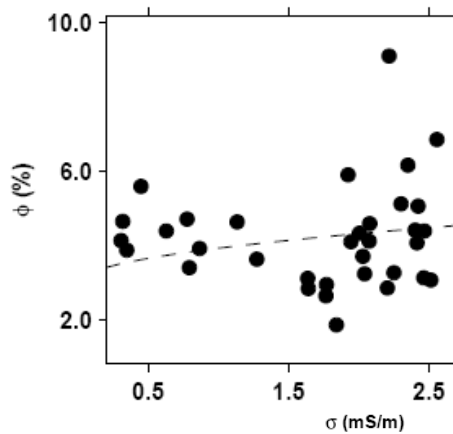
Id	Regresión <i>least-squares</i>	R ²	SD	N
a	$V_p = 5975.557\rho_b^2 - 23674.0\rho_b + 26432.0$	0.11	518.810	
b	$V_p = 5975.557\rho_b^2 - 23674.0\rho_b + 42.0 \ln k + 26202.937$	0.19	395.957	
c	$V_p = -100.339\phi + 5999.052$	0.08	402.988	
d	$V_p = -121.788\phi + 33.123 \ln k + 6067.684$	0.15	374.339	
e	$\sigma = 1.28146\kappa - 9.4604$	0.67	0.428	
f	$\sigma = 15.8175\rho_b - 42.3837$	0.36	0.600	
g	$\kappa = 7.10284\rho_b - 11.06380$	0.16	0.447	

Coefficiente de correlación (R2), desviación estándar (SD) y número de muestras (N) de los corazones de carbonatos.
Fuente: [32].

Una interesante observación en esta revisión del estado del arte es la falla de la ecuación de Archie para predecir la σ en muestras de areniscas y carbonatos, como se observa en la figura 30. Esto es aparentemente causado por el bajo ambiente de saturación de agua tanto en las areniscas (debido al aumento de la porosidad), como en los carbonatos (donde la cantidad de agua es tan baja, que la conductividad se determina por la química de la matriz)



(a)



(b)

Figura 30 Análisis de la ecuación de Archie.

(a) La relación σ -lnk (línea sólida), la línea a trazos es obtenida de la ecuación de Archie ($\sigma = a\sigma_w S^n (\Phi - \Phi_p)^m$) con $\Phi_p=0,03$, $a= 0.62$, $\sigma_w= 15$ S/m, $m=1.835$, y $n=2$. (b) Ecuación de Archie con $\Phi_p=0,03$ (umbral de percolación.), $\sigma_w= 60$ S/m, $S=0.5$, $a= 0.62$, $m=1.95$, y $n=2$. Donde S(fracción del espacio poroso que es fijado con agua de conductividad σ_w).

Fuente: [32]

Para futuros trabajos ellos recomiendan un mayor número de muestras, más conjuntos de medidas en cada muestra y más datos experimentales.

En el 2004 Tiwary *et al.* [43-], desarrollan una fórmula para predecir registros sísmicos, en secuencias de arenas arcillosas, usando los registros *gamma ray* y de resistividad; para un campo ubicado en el oeste de India. Parten de la ecuación de Kim, para este caso se muestra en la ecuación (2.11):

$$TT_{log} = V_{shale} * TT_{shale} + V_{sand} * TT_{sand} + \phi * TT_{water} \quad (2.11)$$

Donde:

V_{shale} : Volumen de arcilla de la formación, se determina mediante el registro *gamma ray*.

V_{sand} : Volumen de arena de la formación, se determina mediante el registro *gamma ray*.

TT_{shale} : Tiempo de Tránsito en la arcilla.

TT_{sand} : Tiempo de Tránsito en la arena.

TT_{water} : Tiempo de Tránsito en el agua.

ϕ : Porosidad.

Al graficar TT_{shale} de varios pozos del campo Grandhar contra profundidad, se encuentra que en un rango de profundidad Z de 1000m a 4000m la relación es lineal, la cual se define en la ecuación (2.12),:

$$TT_{(shale)} = 158.97 - 0.0241 Z \quad (2.12)$$

Para éste caso, la porosidad se determina a partir de los registros de resistividad con la ecuación de Archie, donde los parámetros a , m y n son 0.81, 2 y 2 respectivamente. Además suponen $R_w = 2.0$ la cual varía con la profundidad y el gradiente de temperatura de 0.03 grados centígrados/m, solamente para el campo Grandhar [43-].

Los valores para el tiempo de tránsito tanto en el agua como en la arena corresponden a:

$$\begin{aligned} TT_{water}: & \quad 190 \mu\text{s}/\text{ft} \\ TT_{sand}: & \quad 53.5 \mu\text{s}/\text{ft} \end{aligned}$$

Entonces, se obtuvo finalmente la ecuación (2.13) para calcular el valor de TT_{log} cada 0.1524m de profundidad

$$\begin{aligned} TT_{log} = & V_{shale} * (158.97 * Z - 53.55) \\ & + \left[\frac{1}{\sqrt{RT}} - \frac{V_{shale}^{1-\frac{V_{shale}}{2}}}{\sqrt{R_{sh}}} * \sqrt{0.81 * R_w} \right] * (190 - 53.5) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Donde:

Z: Profundidad en metros.

R_T : Resistividad de la formación.

R_{sh} : Resistividad de la arcilla.

R_w : Resistividad del agua.

En este estudio se encuentran buenos resultados al comparar registros sónicos existentes en algunos pozos con los registros calculados a partir de la ecuación (2.13). Por lo tanto esta ecuación permite calcular registros sónicos, a partir de registros eléctricos, en pozo donde dichos registros no existen. Sin embargo, para mejorar la predicción se recomienda tomar el valor conocido de la saturación de hidrocarburos y de S_w (saturación de agua), en lugar de $S_w= 1$, que fue el valor tomado para determinar la porosidad de la formación.

En el 2006, en el trabajo de P. Hacikoylu *et al*[23], se estudia la ecuación empírica de Faust y la contrastan con el modelo de Raymer, para obtener registros sónicos a partir de la resistividad. Tal como se muestra en la ecuación (2.14).

$$V_p = (1 - \Phi)^2 V_m + \Phi V_f \quad (2.14)$$

Donde:

V_p : Velocidad de onda P.

V_m : Velocidad en la fase mineral.

V_f : Velocidad en la fase de fluido.

Como se aprecia en la figura 31, el modelo de Raymer (curvas a y b) consiste en una ecuación empírica que predice la velocidad en arenas consolidadas con un contenido de arcilla variable [23]. Por el contrario, la ecuación de Faust (curvas de colores) es sólo aplicable para arenas consolidadas, con poco contenido de arcilla, en un rango de 1.0 a 2.5 km de profundidad, pero no para *shale* o formaciones con alto contenido de arcilla [23].

Por lo tanto, se concluye que la relación de Faust, se puede aplicar sólo bajo determinadas condiciones del reservorio. Por consiguiente, se propone una relación entre resistividad y velocidad, la cual se fundamenta en un modelo de física de rocas apropiado para arcillas no consolidadas. Por simplicidad, sólo se muestra el mejor ajuste lineal del modelo, figura 31, el cual corresponde a la ecuación (2.15):

$$V_p = \frac{\left(\frac{R_t}{R_w}\right)}{\left[0.9 + c \left(\frac{R_t}{R_w}\right)\right]} \quad 0.27 \leq c \leq 0.32 \quad (2.15)$$

Donde el coeficiente c depende de las variaciones en los parámetros de entrada (contenido de arcilla, etc.).

Así mismo, en la figura 32 se superponen los modelos resistividad normalizada, con datos reales. Se demuestra que el modelo obtenido muestra mejor ajuste con los datos reales. Por lo tanto, en este estudio se concluye que la velocidad en rocas porosas saturadas depende de la porosidad, el contenido de arcilla y de la textura de la roca (rocas consolidadas y no consolidadas), como lo plantea Raymer. Específicamente, bajo la misma porosidad y mineralogía la velocidad puede variar drásticamente entre rocas consolidadas y no consolidadas [23]. Finalmente, en este trabajo se concluye que el modelo de Faust, no debe ser utilizado para reconstruir curvas sónicas a partir de registros eléctricos para rocas no consolidadas.

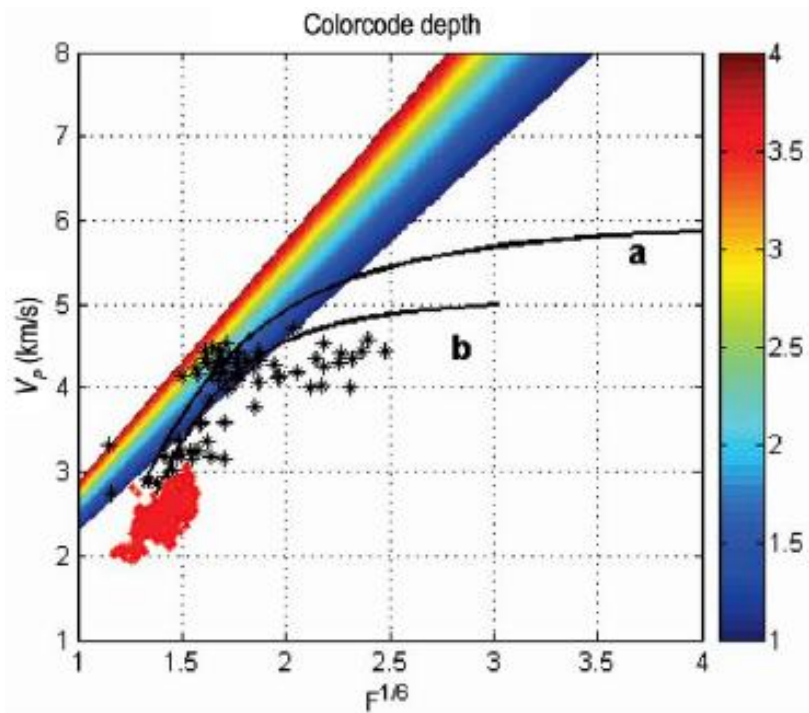


Figura 31: Velocidad versus factor de formación para una roca saturada con salmuera. Las curvas a y b corresponde al a ecuación empírica de Raymer sin contenido de arcilla y con bajo contenido de arcilla respectivamente. Igualmente se muestra datos de pozos reales de areniscas con arcilla consolidadas (símbolos negros) y *shale* no consolidadas (rojo)
Fuente: [23]

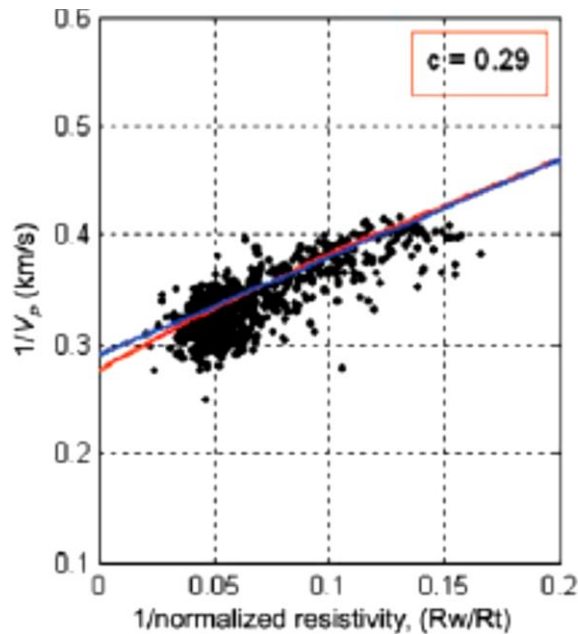


Figura 32. V_p versus R_w/R_t .
 Curva Modelo (rojo) y la curva de la ecuación 15 (azul) son superpuestas en los datos de registros.
 Fuente: [23]

En el 2007 Ikwuakor en su trabajo, propone una aproximación más simple para determinar medidas acústicas a partir de los registros de resistividad[35]. Esta aproximación se basa en la ecuación de porosidad-velocidad de Pickett y la ecuación de Wyllie, (2.16) y (2.17) respectivamente:

$$\Delta t = \Delta t_m + B\Phi \quad (2.16)$$

$$R_t = R_w \phi^{-m} S_w^{-n} \quad (2.17)$$

Donde:

Δt : Tiempo de tránsito medido en el registro acústico.

Δt_m : Tiempo de tránsito en la matriz.

B : Constante dependiente de la litología, esfuerzo efectivo y áreas del contacto de los granos.

R_i : Resistividad de la formación.

R_w : Resistividad del agua de la formación.

ϕ : Porosidad.

S_w : Saturación del agua.

m : Factor de cementación.

n : Exponente de saturación.

Al eliminar ϕ entre las dos ecuaciones, se obtiene la ecuación (2.18):

$$\text{Log } R_t = m \log B + \log R_w - n \log S_w - m \log(\Delta t - \Delta t_m) \quad (2.18)$$

La ecuación (2.18) predice que, para el mismo tipo de roca y R_w constante, una gráfica cruzada de R_t versus $(\Delta t - \Delta t_m)$ es una familia de líneas rectas paralelas con pendiente $-m$ y constante S_w . Para formaciones saturadas de agua. La ecuación (2.18) se reduce a la ecuación (2.19):

$$\log R_o = (m \log B + \log R_w) - m \log(\Delta t - \Delta t_m) \quad (2.19)$$

Donde:

R_o : Resistividad de la roca saturada de agua.

Una característica importante de las ecuaciones (2.18) y (2.19), es que tienen en cuenta el tipo de formación geológica.

En el 2008 Lee, *et al.* [35], proponen una estrategia para predecir registros sísmicos de pozo a partir de registros eléctricos, con el propósito de evaluar recursos de Hidratos de gas de *North Slope* en Alaska. En el área de estudio, la mayoría de registros de densidad y sísmicos no se emplean para generar sismogramas sintéticos de la zona en 3-D, ya que fueron obtenidos debajo de la zona estable de hidratos de gas. Sin embargo, se cuenta con buenos registros de resistividad eléctrica y *gamma ray* de la parte baja de la sección sedimentaria. Por lo tanto, las velocidades se calculan a partir de las medidas de resistividad y valores de registros de porosidad. El método usado para tal fin, proviene de la teoría modificada de Gasmman-Biot [34]. Éste junto con otros métodos tradicionales se combinan para generar los mejores registros sísmicos posibles.

En el 2007 Carcione, *et al.* [12], desarrollan relaciones entre las ecuaciones constitutivas, empíricas o teóricas, que definen las propiedades físicas de la roca. Estas relaciones muestran tendencias para comprender el comportamiento de la roca y obtener información útil sobre los fluidos presentes en ella.

Motivado por el trabajo de Berryman y Milton, Carcione propone establecer relaciones entre propiedades a partir de una propiedad común. Estas relaciones son útiles para determinar propiedades que no se pueden adquirir fácilmente. Entonces, primero se obtienen las ecuaciones constitutivas que definen la velocidad de onda-P y la conductividad para un tipo de roca dado y luego cruzan dichas relaciones a partir de una propiedad común, que es la

porosidad. Por lo tanto, se desarrollan nuevas teorías al relacionar la conductividad eléctrica y la velocidad sísmica de una formación geológica común. Es decir, si se conoce la conductividad, la velocidad de onda P puede ser obtenida y viceversa.

Las relaciones se aplican a arcilla saturada con salmuera y a arena saturada con petróleo. Las pruebas se realizan con datos de registros de pozos sísmicos y eléctricos, y se encuentra que las relaciones de propiedades cruzadas que mejor se ajustan a los datos reales corresponde a la velocidad de Gassman y a los modelos de Archie, *Self-Similar* y el método de índice de refracción complejo (CRIM). Como se observa en las figuras 33 y 34.

De las relaciones obtenidas entre la velocidad de onda-P y la conductividad eléctrica se concluye que en el *overburden* la tendencia de la velocidad de onda-P es incrementar, mientras la conductividad se reduce. En el *reservorio* se observa un comportamiento opuesto.

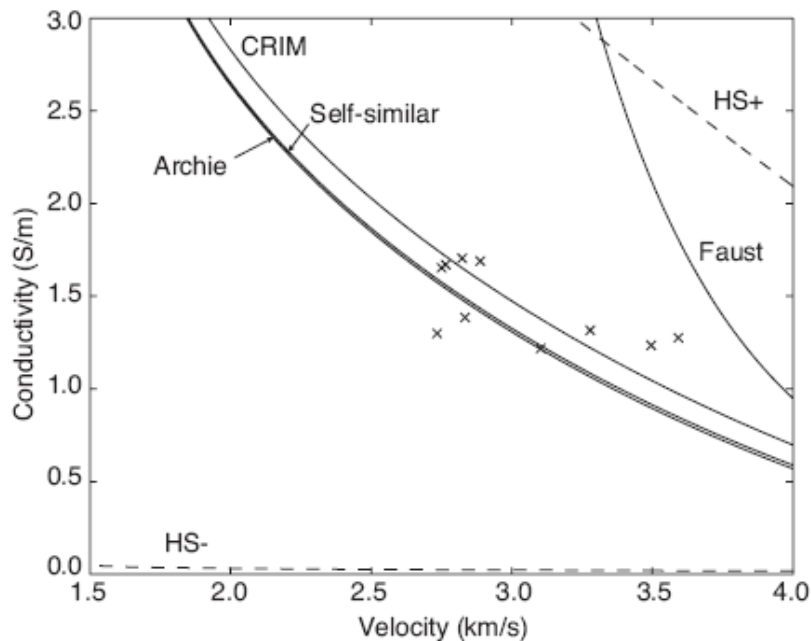


Figura 33. Relaciones de velocidad de onda P y conductividad

Estas graficas se basan en la velocidad de Gassmann y diferentes modelos de la conductividad eléctrica, de la sección de arcilla saturada con salmuera. Los círculos corresponden a datos reales de registros de pozos.

Fuente: [12]

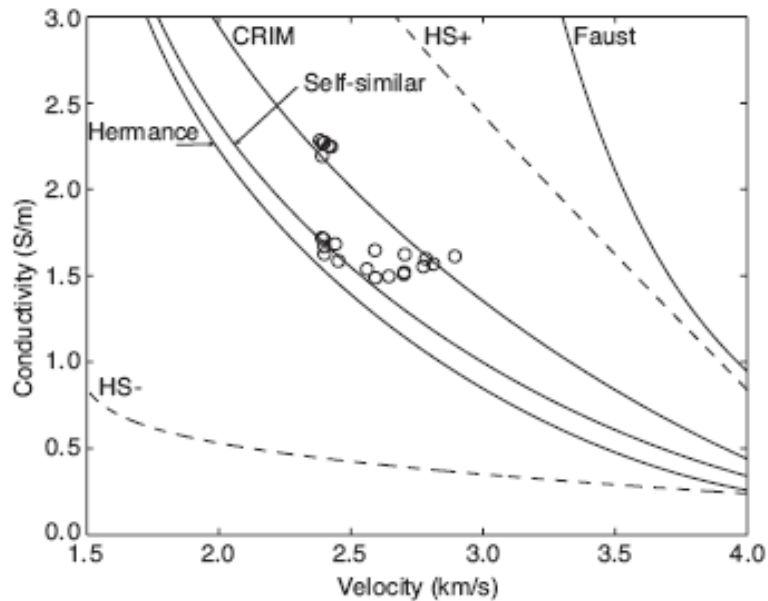


Figura 34. Relaciones de velocidad de onda P y conductividad

Estas gráficas se basan en la velocidad de Gassmann y diferentes modelos de la conductividad eléctrica, de la sección de arena saturada con petróleo. Los círculos corresponden a datos reales de registros de pozos.

Fuente: [12]

2.3. Discusiones y desafíos sobre el empleo de la metodología de relaciones de propiedades cruzadas.

En este capítulo se estudia el desarrollo de una metodología basada en las propiedades físicas de los materiales porosos. Esta metodología brinda un punto de partida para evaluar las propiedades físicas de las rocas reservorio.

En ese sentido, desde la Ciencia de Materiales surgen trabajos como el de Torquato [3]. Él formaliza el planteamiento de las relaciones entre propiedades físicas con propiedades que dependen de la microestructura del material, para modelar el comportamiento de dicho material. Otro trabajo que contribuye notablemente con las relaciones de propiedades cruzadas corresponde al de Berryman y Milton [6], quienes sugieren la necesidad de mejorar los contornos de las propiedades físicas para delimitar el modelo. Y en un estudio más reciente proponen la teoría de la homogenización, como herramienta para modelar propiedades en la micro-escala desde las ecuaciones en la macro-escala.

Los resultados anteriores se utilizan en la Física de Rocas para estudiar las propiedades de las rocas reservorio. Este estudio sigue la metodología aplicada a los materiales porosos, con el fin de encontrar las velocidades de onda en regiones donde no existen registros sísmicos o éstos no son confiables. Inicialmente, se proponen la relación de Faust [33] la cual no tiene mayor alcance. Puesto que, el comportamiento de la velocidad sísmica no depende de la profundidad, como allí se plantea. Entonces, se utilizan los registros de resistividad y valores de porosidad. Lo anterior, resulta de fiabilidad de la ley de Archie [1] al interpretar los registros resistivos y de la fuerte dependencia de la velocidad sísmica con la porosidad. Por tanto, a partir de los registros de pozo, de las suposiciones de la roca reservorio y de la amplia gama de ecuaciones constitutivas que modelan las propiedades de la roca; se establecen las relaciones de propiedades cruzadas con las que se obtienen registros sísmicos sintéticos. No obstante, los resultados dependen de las condiciones particulares de la roca, de los datos utilizados, de los parámetros de las ecuaciones constitutivas y de los modelos matemáticos de las propiedades.

En general de este trabajo de recopilación del estado del arte para la metodología de relaciones de propiedades cruzadas, se pueden extraer las siguientes recomendaciones o desafíos para trabajos futuros:

- Obtener y utilizar modelos teóricos representativos de la roca reservorio en estudio, con el fin de ampliar las posibilidades para establecer las relaciones entre las propiedades físicas.
- Establecer las relaciones entre las propiedades dentro del contexto de la teoría de la homogenización, para que los resultados sean coherentes con los datos reales que se cuenten.
- Observar el comportamiento de las relaciones entre propiedades físicas ante la presencia de otras propiedades como: porosidad ϕ , permeabilidad de fluido k , contenido de arcilla C , y densidad promedio ρ .
- Emplear ecuaciones constitutivas que se ajusten al tipo de roca en estudio y a los datos obtenidos en dicha formación para obtener relaciones entre propiedades representativas del medio en estudio.

3 METODOLOGÍA Y RESULTADOS

La idea fundamental de esta tesis es desarrollar una técnica que permita estimar la porosidad de la roca a partir del uso de relaciones de propiedades cruzadas. En este sentido, el capítulo expone la metodología que se implementa para desarrollar una técnica que permite obtener un valor óptimo de la porosidad de la roca, mediante un algoritmo de optimización no lineal de mínimos cuadrados, utilizando datos de campo y las ecuaciones constitutivas que modelan la roca. Lo anterior, corresponde a la solución de un problema inverso debido a que se obtienen valores óptimos de la porosidad a partir de valores medidos en campo de velocidad de onda compresional y conductividad eléctrica.

En general, la metodología se divide en dos partes. En la primera parte, se clasifican las ecuaciones que representan los datos en estudio de acuerdo a los criterios de las relaciones de propiedades cruzadas. Luego en la segunda parte, a partir de estas ecuaciones y con los valores de la porosidad inicial, se establece un algoritmo para encontrar un vector de valores óptimos de la porosidad, este algoritmo representa la minimización de una función objetivo para cada propiedad. Por tanto, este problema de minimización corresponde a un problema de optimización, que se soluciona mediante el algoritmo del gradiente conjugado, el cual permite encontrar de una forma rápida y efectiva la solución a problemas de minimización [13].

Por tanto, en la sección 3.1, se enumeran y describen detalladamente las diferentes etapas que conforman la metodología. A continuación, en la sección 3.2, se muestran los resultados que se obtienen al ejecutar los dos algoritmos desarrollados en Matlab, uno por cada propiedad, a partir del conjunto de datos de registros de pozo y otros datos específicos de la sección de la formación en estudio.

3.1 Etapas de la metodología

La metodología que se implementa para obtener los valores óptimos de la porosidad consta de las siguientes tareas:

- Recopilación de los valores de velocidad de onda compresional y conductividad eléctrica, a partir de la información de los registros de pozo de la sección de formación a estudiar, así como de otros datos específicos de dicha región.
- Evaluación de las ecuaciones constitutivas que modelan la conductividad eléctrica y la velocidad de onda compresional de la sección de la formación, a partir de la información obtenida anteriormente.
- Establecimiento de la relación de propiedad cruzada más adecuada para la sección de la formación en estudio.
- Búsqueda del valor de la porosidad de la roca que minimice la suma de los cuadrados de los residuos entre los datos de campo y las ecuaciones constitutivas que modelan la roca, a partir de las ecuaciones constitutivas previamente seleccionadas.
- Evaluación de los valores de la porosidad calculados, al compararlos con los valores de la porosidad obtenida a partir de los núcleos o corazones de la sección de la formación en estudio.

3.1.1 Recolección de la información y parámetros físicos de los registros de pozos para estudiar la formación.

Los datos empleados para el desarrollo de esta metodología corresponden a valores de: velocidades de onda compresional (v_p) o tiempo de tránsito (t_t), resistividades eléctricas de la formación (R_t) y porosidades de la formación (ϕ). Los cuales han sido obtenidos a partir de los registros de pozo resistivo y sónico. Específicamente, los datos se obtienen del registro sónico básico y del registro eléctrico de inducción.

Los datos son suministrados por el Instituto Colombiano de Petróleo (ICP) y corresponden a una sección de arena limpia saturada con petróleo, de una determinada formación (Por razones de confidencialidad de la información no se puede indicar el lugar). Estos se presentan como datos discretos en una tabla, en donde a cada valor de profundidad le corresponde un determinado valor de conductividad eléctrica, tiempo de tránsito y porosidad.

Adicionalmente, se cuenta con datos específicos de la sección como: módulos volumétricos (k), densidad del grano (ρ_s), densidad del fluido (ρ_f), conductividad eléctrica de los granos (σ_s) y conductividad eléctrica del fluido (σ_f) y valores de porosidad de las mismas secciones de la formación, los cuales se obtienen a partir de unas muestras de corazones o núcleos [8.]. Con estos últimos datos de porosidad se valida la metodología.

3.1.2 Evaluación de las ecuaciones constitutivas que modelan la conductividad eléctrica y la velocidad de onda compresional.

Las diferentes ecuaciones constitutivas empleadas en este trabajo se ajustan a la formación en estudio mediante los datos de campo (densidades, módulos volumétricos y conductividades de los fluidos) suministrados por el ICP.

El procedimiento para seleccionar las ecuaciones constitutivas, que representan la sección de la formación en estudio, corresponde en determinar cuál de las gráficas de las ecuaciones constitutivas sigue la tendencia de los datos de los registros de pozo, cuando éstos se grafican junto con las ecuaciones. Sin embargo, puesto que se cuenta con una sección de la formación, sólo algunas ecuaciones constitutivas de las presentadas en el capítulo 1 se emplean. Lo anterior debido al tipo de roca y saturación, ya que para cada caso hay ecuaciones específicas.

3.1.3 Establecimiento de la relación de propiedad cruzada más adecuada para los datos.

Las relaciones de propiedades cruzadas entre la conductividad eléctrica y la velocidad de onda compresional se obtienen usando diferentes combinaciones de las ecuaciones constitutivas. Cada una de las relaciones se establece para el tipo de roca con el que se evalúan estas ecuaciones y los datos de campo.

Por consiguiente, las relaciones de propiedades cruzadas se plantean a partir de las ecuaciones constitutivas que cumplan con los siguientes criterios:

- Se requiere que las ecuaciones constitutivas sigan la tendencia de los datos de campo.
- Se requiere que las ecuaciones constitutivas se encuentren dentro de los contornos de Hashin-Strickman. Debido a que estos contornos marcan límites respecto de las fases del medio en estudio. Por tanto, cuando una ecuación se encuentra dentro de dichos contornos, ésta representa el comportamiento de un material de dos fases, tal como mineral y fluido de poro.

3.1.4 Búsqueda del nuevo valor de porosidad

La idea fundamental de este algoritmo es obtener valores óptimos de la porosidad a partir de los datos de campo y de las ecuaciones constitutivas que modelan la roca. Este objetivo se logra al utilizar dos algoritmos paralelos, uno para cada propiedad y finalmente al evaluar el mejor vector de porosidad entre los dos casos.

Por tanto, se presenta un problema inverso, el cual consiste en generar un nuevo vector de porosidad a partir de las ecuaciones constitutivas que modelan la roca y los datos de campo de los registros de pozo de la velocidad de onda compresional y la conductividad eléctrica. Así como un problema de optimización, puesto que se requiere que éste vector de porosidad sea el que minimice la función objetivo; la cual corresponde a la discrepancia entre los datos de campo y las curvas de las ecuaciones constitutivas.

De acuerdo a lo anterior, se emplea una técnica de optimización llamada regresión por mínimos cuadrados, la cual permite encontrar los valores de los parámetros que minimizan la suma de los cuadrados de los residuos entre los datos y la curva. Sin embargo, debido a que se tiene que las ecuaciones constitutivas son no lineales, la solución se debe abordar con un modelo de regresión no lineal.

En ese orden de ideas, el vector óptimo de porosidad se determina al minimizar las funciones objetivo J_V ó J_C , las cuales corresponden a la suma de los cuadrados de los residuos entre los datos de campo de la velocidad de onda compresional ó la conductividad eléctrica de la roca y los valores calculados a partir de las ecuaciones constitutivas, tal como se observa en las ecuaciones (3.1) y (3.2):

$$J_V = \sum_k [C_{obs} - C_{cal}(\phi)]^2 \quad (3.1)$$

$$J_C = \sum_k [V_{obs} - V_{cal}(\phi)]^2 \quad (3.2)$$

Donde:

C_{obs} , V_{obs} : Son los valores de conductividad y velocidad de los registros de pozo.

$C_{cal}(\phi)$, $V_{cal}(\phi)$: Son los valores de conductividad y velocidad obtenidos al evaluar los valores de porosidad en las ecuaciones constitutivas.

k : Es el número de datos.

Debido a la no-linealidad de las funciones objetivo, la solución del problema de optimización se debe realizar de forma iterativa y en diferentes etapas. Así como, utilizar una expansión en serie de Taylor para expresar la ecuación no lineal original en una forma lineal aproximada. Entonces, es posible aplicar la teoría de mínimos cuadrados para obtener nuevas estimaciones de la porosidad que se mueven en la dirección que minimiza el residuo, tal como la del gradiente conjugado.

En este sentido, debido a que las ecuaciones constitutivas $C_{cal}(\phi)$ y $V_{cal}(\phi)$ son no lineales, se aproximan a una función lineal mediante la serie de Taylor de primer orden alrededor de los valores de porosidad, por tanto, para la conductividad eléctrica de la roca se tiene:

$$C_{cal}(\phi_{j+1}) = C_{cal}(\phi_j) + \frac{dC_{cal}(\phi_j)}{d\phi} * (\phi_{j+1} - \phi_j) \quad (3.3)$$

Donde:

j : Corresponde al valor inicial.

$j+1$: corresponde al valor de predicción

Para la velocidad de onda compresional, se tiene la siguiente aproximación:

$$V_{cal}(\phi_{j+1}) = V_{cal}(\phi_j) + \frac{dV_{cal}(\phi_j)}{d\phi} * (\phi_{j+1} - \phi_j) \quad (3.4)$$

Al reemplazar las aproximaciones lineales de $C_{cal}(\phi)$ y $V_{cal}(\phi)$ dadas en (3.3) y en (3.4) en las funciones objetivos (3.1) y (3.2), se tiene:

$$J_C = \sum_k \left[C_{obs_k} - C_{cal}(\phi_j)_k - \frac{dC_{cal}(\phi_j)_k}{d\phi} * (\phi_{j+1} - \phi_j)_k \right]^2 \quad (3.5)$$

$$J_V = \sum_k \left[V_{obs_k} - V_{cal}(\phi_j)_k - \frac{dV_{cal}(\phi_j)_k}{d\phi} * (\phi_{j+1} - \phi_j)_k \right]^2 \quad (3.6)$$

De donde el error de predicción corresponde a para el caso de la conductividad eléctrica a:

$$e_{c,k} = C_{obs_k} - C_{cal}(\phi_j)_k \quad (3.7)$$

Y para el caso de la velocidad de onda compresional a:

$$e_{v,k} = V_{obs_k} - V_{cal}(\phi_j)_k \quad (3.8)$$

Por tanto, al reemplazar (3.7) y (3.8) en (3.5) y (3.6) se tienen las nuevas funciones objetivo:

$$J_C = \sum_k \left[e_{c,k} - \frac{dC_{cal}(\phi_j)_k}{d\phi} * (\phi_{j+1} - \phi_j)_k \right]^2 \quad (3.9)$$

$$J_V = \sum_k \left[e_{v,k} - \frac{dV_{cal}(\phi_j)_k}{d\phi} * (\phi_{j+1} - \phi_j)_k \right]^2 \quad (3.10)$$

En general, las nuevas funciones objetivo se pueden expresar en notación matricial como:

$$J = (e - Ap)^T (e - Ap) \quad (3.11)$$

Donde:

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \end{bmatrix} = \text{Vector de errores de predicción, para todos los } k \text{ datos.}$$

$$\Delta p = \begin{bmatrix} r_1 - \phi_{0_1} \\ r_2 - \phi_{0_2} \\ \vdots \\ r_k - \phi_{0_k} \end{bmatrix} = \text{Vector de los cambios de porosidad requeridos para todos}$$

los k datos, donde r_1, r_2, \dots, r_k , corresponde al vector solución y $\phi_{0_1}, \phi_{0_2}, \dots, \phi_{0_k}$ a los valores iniciales de porosidad.

La matriz A representa a la matriz A_v ó A_c , de tal forma que:

$$A_v = \begin{bmatrix} dV_1/d\phi & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & dV_k/d\phi \end{bmatrix} = \text{Matriz diagonal de la primera derivada de la}$$

velocidad con respecto a la porosidad para todos los k datos.

$$A_c = \begin{bmatrix} dC_1/d\phi & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & dC_k/d\phi \end{bmatrix} = \text{Matriz diagonal de la primera derivada de la}$$

conductividad con respecto a la porosidad para todos los k datos.

La función objetivo expresada en notación matricial en (3.11), se minimiza tomando la primera derivada con respecto a la porosidad e igualando a cero la ecuación restante de tal forma que se obtiene la siguiente ecuación normal:

$$[A^T A][\Delta p] = [A^T e] \quad (3.12)$$

Entonces al resolver la ecuación (3.12) para Δp se tiene:

$$\Delta p = [A^T A]^{-1} * [A^T e] \quad (3.13)$$

Por tanto, es posible resolver la ecuación (3.12) para $[\Delta p]$, con lo que se pueden obtener los valores mejorados de la porosidad:

$$r_{j+1} = r_j - \Delta p_j \quad (3.14)$$

Sin embargo para una cantidad grande de datos ésta solución es impráctica debido al gran tamaño de $[A^T A]^{-1}$. Adicionalmente esta solución puede oscilar ampliamente y puede converger con lentitud o no converger.

Por tanto, un método más general es usar rutinas de optimización no lineal como el método del gradiente conjugado. Este método combina dos

características básicas de las técnicas empleadas para encontrar el mínimo de una función: el gradiente de la función y las direcciones conjugadas.

Los métodos con gradiente utilizan de forma explícita información de la derivada para generar algoritmos eficientes que localicen el óptimo, puesto que el gradiente indica la dirección del máximo cambio o crecimiento de la función. Por otra parte, los métodos basados en direcciones conjugadas son por lo común bastante eficientes y de hecho son convergentes en la regresión por mínimos cuadrados, conforme se aproxime al óptimo.

En este sentido, puesto que una función no lineal llega a ser razonablemente aproximada por la serie de Taylor, los métodos de regresión por mínimos cuadrados, basados en el gradiente de la función y las direcciones conjugadas, convergerán exactamente en un número finito de pasos, comenzando en un punto inicial cerca del valor óptimo.

Por tanto, para abordar el problema de encontrar el vector óptimo de la porosidad es necesario establecer un valor inicial de la porosidad, ésta se ajustará de manera sistemática para minimizar a J_V ó J_C mediante la técnica de búsqueda del gradiente conjugado. Sin embargo, el valor mínimo encontrado no necesariamente corresponde a un mínimo absoluto de dichas funciones. Sólo se puede asegurar que un mínimo local ha sido alcanzado cuando el gradiente de J_V ó J_C con respecto a ϕ es cero. De tal forma que, sucesivas iteraciones de este procedimiento se pueden realizar. Por esta razón, el valor inicial sugerido puede tener una influencia crítica en la respuesta final.

El proceso de optimización implementado consiste en modificar secuencialmente o actualizar los valores de porosidad de una determinada sección de la formación, a partir de los modelos de velocidad y conductividad eléctrica previamente seleccionados. Una actualización de los valores de porosidad en la sección de la formación es llamada iteración. En general, este proceso consiste de una serie de iteraciones a través de todos los datos de velocidad y conductividad de los registros de pozo y de los valores evaluados a partir de las ecuaciones constitutivas, con el fin de encontrar la contribución de cada dato para la nueva porosidad. En este sentido, la solución para las ecuaciones (3.9) y (3.10) emplea la siguiente estrategia:

1. Usar una única iteración de Gauss-Seidel para encontrar valores aproximados de ϕ .

2. Actualizar los valores de ϕ usando el algoritmo del gradiente conjugado.

Finalmente, la calidad de la solución del algoritmo puede ser medida al calcular el error promedio cuadrático o RMS entre el valor de los registros de pozo y el actual valor de las ecuaciones constitutivas.

$$ERROR = (J/k)^{(1/2)} \quad (3.15)$$

Donde k corresponde al número de datos, y J a cualquiera de las funciones J_V ó J_C

Normalmente, se espera que este error decrezca continuamente mientras las iteraciones se ejecutan, hasta que se alcanza la convergencia. En este punto, el error no se modifica y J_V ó J_C estará en su valor mínimo local. La ecuación (3.15) también da una forma de evaluar la calidad de algún valor real dado. Si el actual valor del error es mucho mayor que el error promedio, ERROR, se puede concluir que los datos contiene un dato erróneo, el cual se puede despreciar.

a. Iteración de Gauss-Seidel

En esta aplicación se realiza una iteración de Gauss-Seidel como un paso de pre-acondicionamiento, para dar un punto de partida a las siguientes iteraciones. Lo anterior debido a que la iteración de Gauss-Seidel permite obtener una primera solución del problema en la vecindad de la suposición inicial. En ese sentido, las soluciones de Gauss-Seidel para cada una de las ecuaciones son:

$$r_v = \phi_0 + \frac{\sum_k \frac{\partial V_k}{\partial \phi} * e_k}{\sum_k (\partial V_k / \partial \phi)^2} \quad (3.16)$$

$$r_c = \phi_0 + \frac{\sum_k \frac{\partial C_k}{\partial \phi} * e_k}{\sum_k (\partial C_k / \partial \phi)^2} \quad (3.17)$$

Donde:

r_v y r_c : Son los vectores de porosidad obtenidos en Gauss-Seidel.

$\sum_k (\partial V_k / \partial \phi)$ y $\sum_k (\partial C_k / \partial \phi)$: Son diferentes de cero.

b. Iteraciones del Gradiente Conjugado [13].

El algoritmo del gradiente conjugado parte del vector de porosidad r_v ó r_c , estimado por medio de la iteración de Gauss-Seidel y se desarrolla en dos partes:

1. En la primera iteración el vector de porosidad es proporcional al vector gradiente g .
2. En la segunda y siguientes iteraciones, el vector de porosidad resulta de una combinación lineal entre el actual vector gradiente g y el anterior vector de porosidad (Δr).

Primera iteración

A partir del vector solución r_v ó r_c , según sea el caso (para generalizar se utiliza r).

El vector gradiente indica la dirección de descenso de la función J . Se define de la siguiente manera:

$$g = -A^T e + A^T A r \quad (3.18)$$

Para la primera iteración, el primer vector de cambio, Δr , es proporcional al gradiente, g :

$$\Delta r = \alpha g \quad (3.19)$$

Entonces el nuevo vector solución r_n corresponde a:

$$r_n = r + \Delta r \quad (3.20)$$

La ecuación (3.20) se inserta en (3.11) y se determina el valor de α que hace mínima la función J . Este valor de α es:

$$\alpha = -\frac{g^T A g}{g^T g} \quad (3.21)$$

Donde α corresponde al parámetro de descenso. Por tanto el vector de cambio, Δr corresponde a:

$$\Delta r = -\frac{(g^T A g)}{(g^T g)} g \quad (3.22)$$

Entonces el vector r_n es un vector “mejorado” del vector desconocido r .

Siguientes iteraciones

Para la segunda y siguientes iteraciones se observa un nuevo vector de cambio, el cual corresponde a una combinación lineal entre el actual vector gradiente g y la actualización anterior del vector de cambio Δr .

$$\Delta r_n = \alpha g + \beta \Delta r \quad (3.23)$$

La ecuación (3.23) se inserta en (3.11) y se resuelve para el valor de α y β que minimicen a J . Como resultado se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es:

$$\alpha = \frac{(-g^T g)(\Delta r^T A^T A \Delta r) + (\Delta r^T A^T A g)(g^T \Delta r)}{(g^T A^T A g)(\Delta r^T A^T A \Delta r) - (g^T A^T A \Delta r)(\Delta r^T A^T A g)} \quad (3.24)$$

$$\beta = \frac{(-g^T A^T A g)(g^T \Delta r) + (g^T g)(g^T A^T A \Delta r)}{(g^T A^T A g)(\Delta r^T A^T A \Delta r) - (g^T A^T A \Delta r)(\Delta r^T A^T A g)} \quad (3.25)$$

En general, para todas las iteraciones después de la primera, el método del gradiente conjugado se resume como:

1. Calcular el actual vector gradiente g , usando la ecuación (3.18).
2. Calcular α y β de las ecuaciones (3.24) y (3.25).
3. Calcular el vector de cambio actualizado, Δr_n , de la ecuación (3.23).
4. Calcular el nuevo vector r_n , de la ecuación (3.20)
5. Volver al paso 1 para una nueva iteración.

A continuación se ilustra un diagrama de bloques, donde se muestra cada una de las etapas de la metodología desarrollada para la optimización de la porosidad.

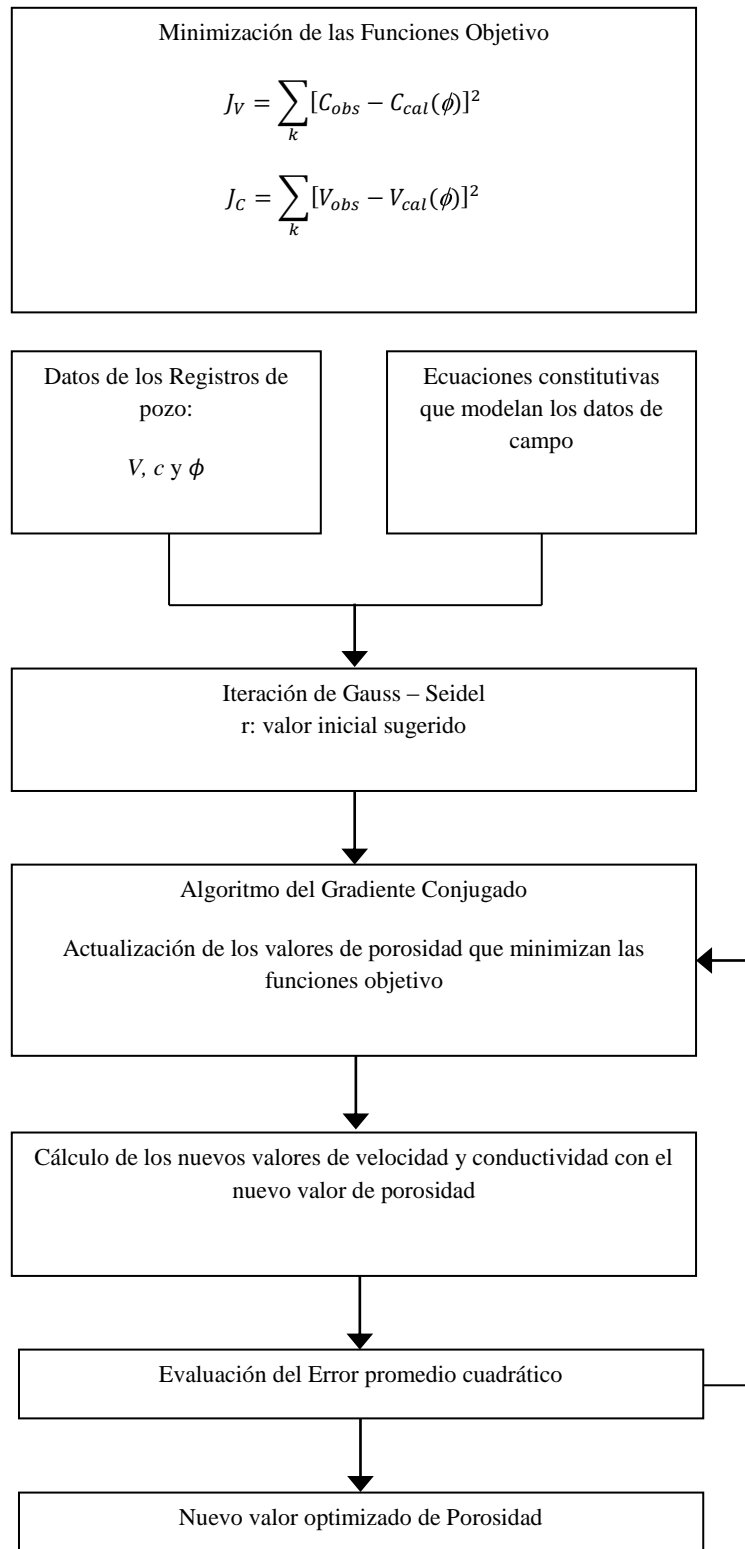


Figura 35: Diagrama de bloques
Metodología empleada estimar la porosidad de la roca a partir del uso de relaciones de propiedades cruzadas.

Fuente: Autor.

3.1.5. Validación de los valores de la porosidad calculados

Los nuevos valores de porosidad se validan al compararlos con los datos de porosidad que se obtienen del estudio de los corazones o núcleos de la sección de formación en estudio. Puesto que con éste método se obtienen buenos valores de porosidad de la roca.

3.2 Resultados

A continuación, se muestran los resultados obtenidos al implementar la metodología descrita en conjunto de datos, de un pozo vertical, para una sección del reservorio correspondiente a arena saturada con petróleo.

El conjunto de datos de entrada o iniciales con los que se deben contar para la ejecución del algoritmo están conformados por:

- Valores de profundidad.
- Valores de velocidad de onda compresional, generados a partir del registro sínico.
- Valores de conductividad eléctrica, generados a partir del registro de inducción
- Valores de porosidad de la roca, generados a partir de los registros sínicos así como, a partir de los núcleos o corazones de la roca.
- Valores de datos específicos de la roca de la sección de la formación en estudio como el modulo volumétrico y la densidad de los componentes de la roca.

En primer lugar se evalúa cada una de las ecuaciones constitutivas presentadas en el capítulo 1. Las curvas se construyen a partir de los valores específicos de la sección de la formación en estudio y de valores de porosidad entre 0 y 1, debido a que éste es el rango de valores posibles para la porosidad. A continuación, en la figura 36 se presentan las gráficas de las diferentes ecuaciones para la velocidad de onda compresional y en la figura 37 se presentan las gráficas de las diferentes ecuaciones para la conductividad eléctrica.

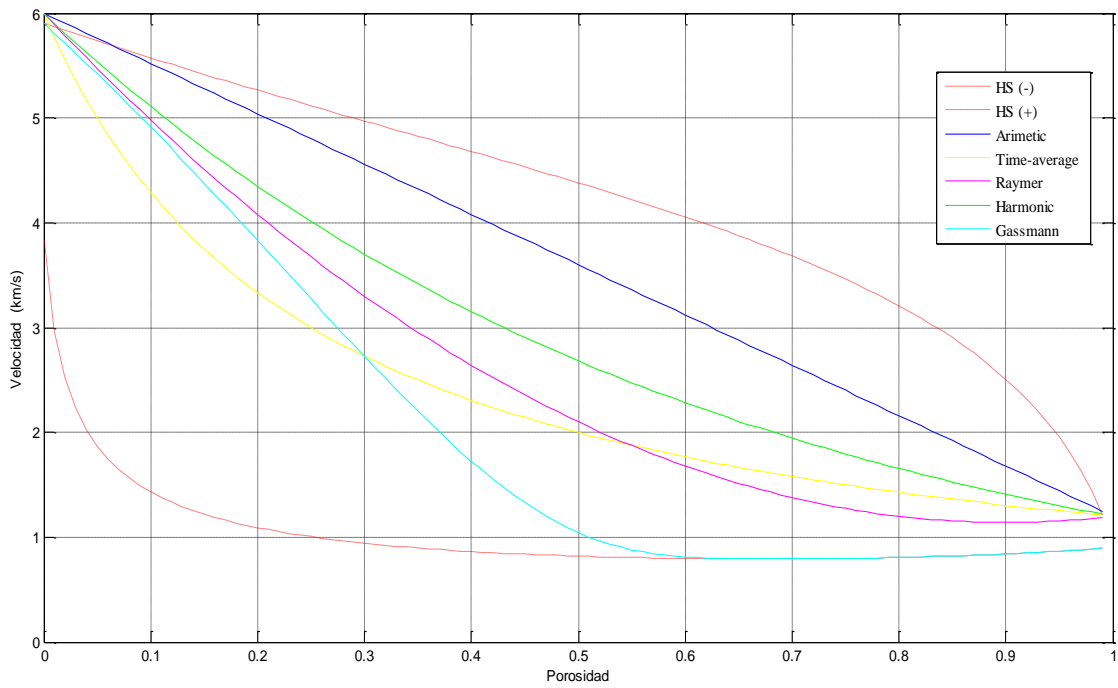


Figura 36. Modelos de velocidad como función de la porosidad correspondientes a un reservorio de arena saturada con petróleo.

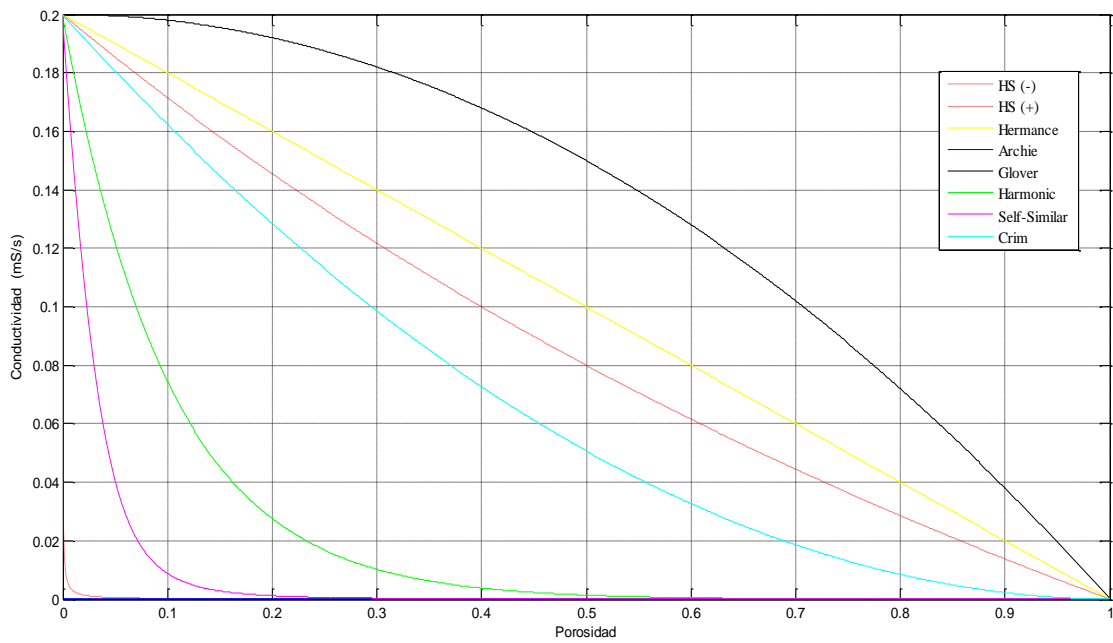


Figura 37. Modelos de Conductividad como función de la porosidad correspondiente a un reservorio de arena saturada con petróleo.

En la figura 38 se muestra el conjunto de datos de campo para la velocidad de onda compresional vs. porosidad y en la figura 39 se muestra el conjunto de datos de la conductividad eléctrica vs. porosidad.

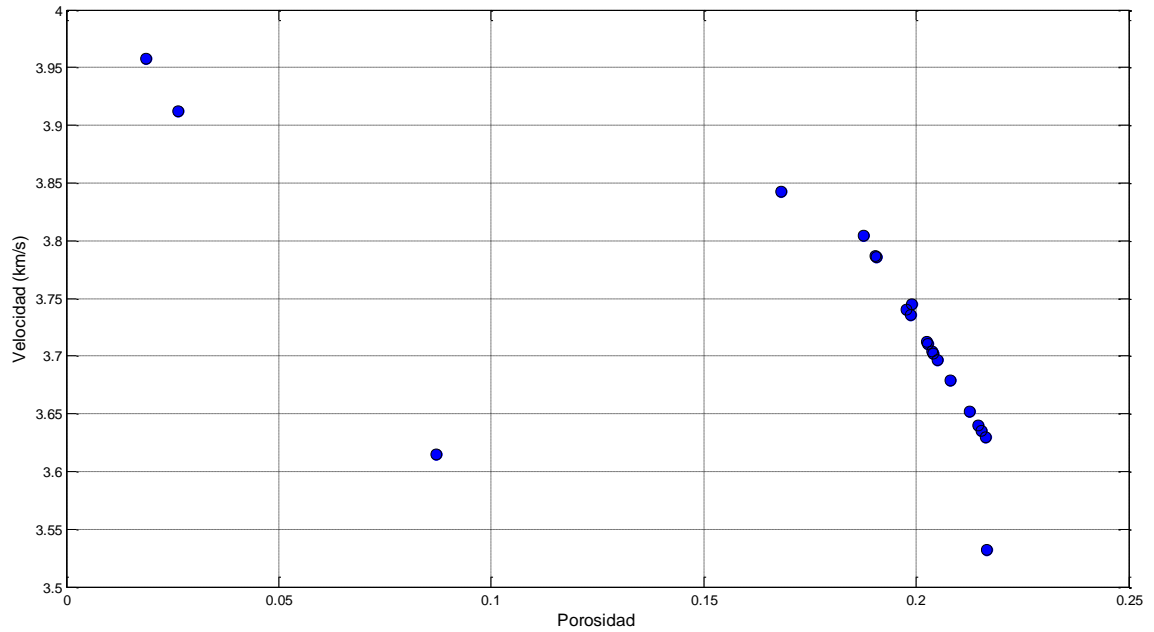


Figura 38. Datos de campo de velocidad vs. porosidad.

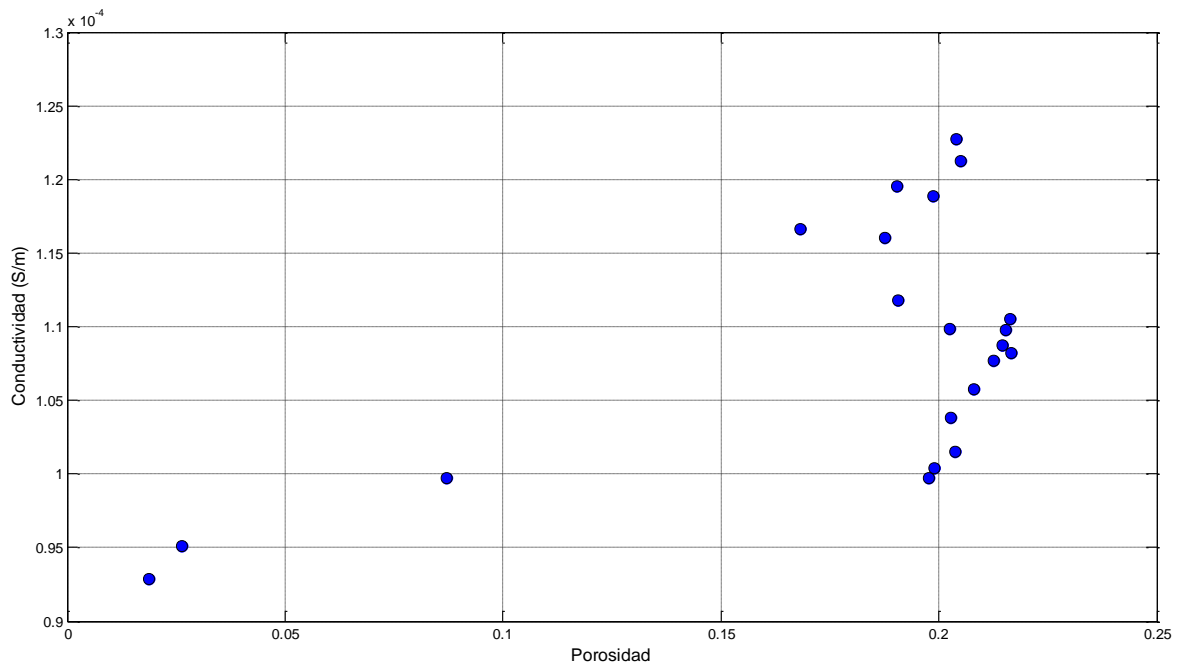


Figura 39. Datos de campo de conductividad vs. porosidad.

A continuación, se superponen los datos de campo junto con las ecuaciones constitutivas en una sola gráfica. Para establecer las ecuaciones constitutivas que mejor describan o modelen los datos de la sección de formación en estudio. Por tanto, en la figura 40 se grafican las ecuaciones constitutivas junto con los datos de campo para la velocidad de onda compresional. Y en la figura 41, se grafican las ecuaciones constitutivas junto con los datos de campo para la conductividad eléctrica.

De las figuras 40 y 41 se aprecia que la ecuación constitutiva de Gassmann, para el caso de las velocidades, y la ecuación constitutiva de Crim, para el caso de las conductividades; marcan la tendencia del comportamiento de cada grupo de datos de campo respectivamente. En especial para el caso de las velocidades, se observa una gran similitud. En este sentido, y teniendo en cuenta que ambas ecuaciones respetan los contornos de Hashin-Strickman, se puede establecer la relación de propiedad cruzada, a partir de la porosidad, entre estas ecuaciones tal como se observa en la figura 42. En ésta figura también se puede apreciar que efectivamente, la curva cae dentro de los contornos de Hashin-Strickman.

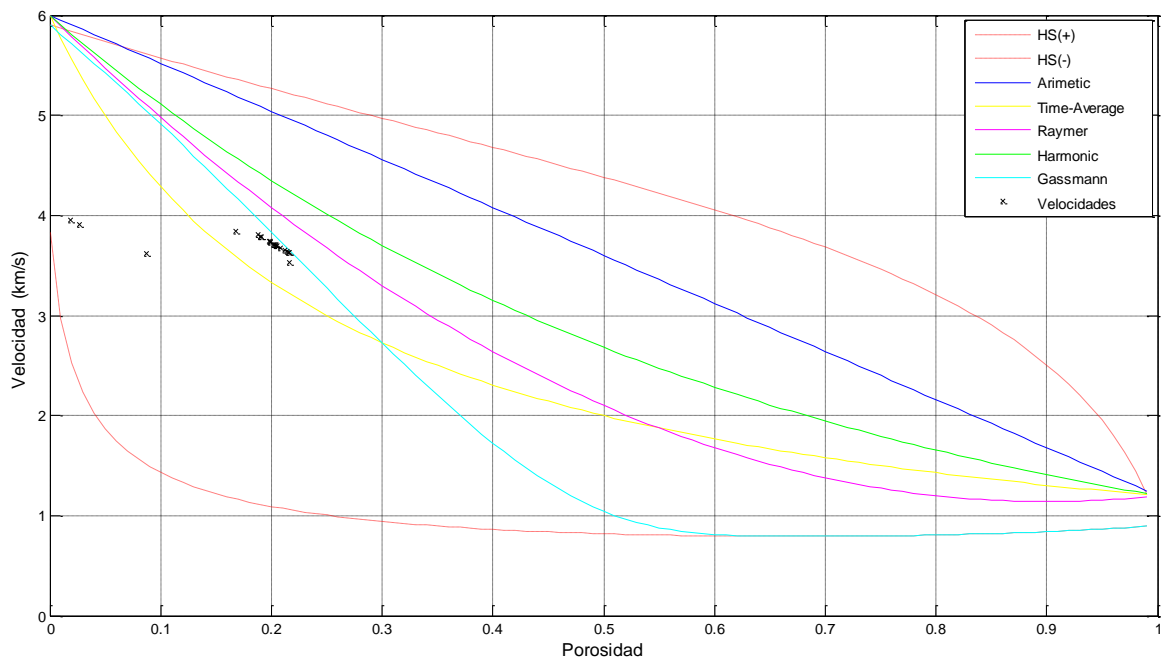


Figura 40. Modelos de velocidad de onda compresional como función de la porosidad y datos reales de velocidad vs. porosidad, correspondientes a un reservorio de arena saturada con petróleo.

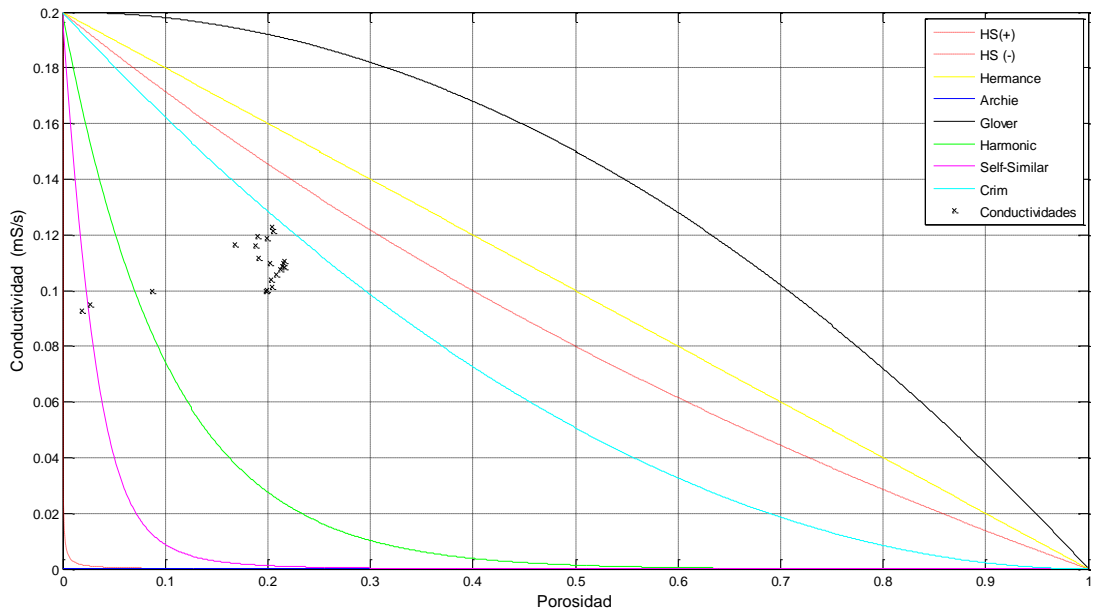


Figura 41. Diferentes modelos de conductividad eléctrica como función de la porosidad y datos reales de conductividad vs. Porosidad correspondientes a un reservorio de arena saturada con petróleo.

Por tanto, en la figura 42 se observa que en el límite de baja velocidad, la curva se aproxima a la conductividad del fluido, la cual es mucho menor que la conductividad de los granos de arena; mientras que, en el límite de alta velocidad, la conductividad es la de los granos de arena.

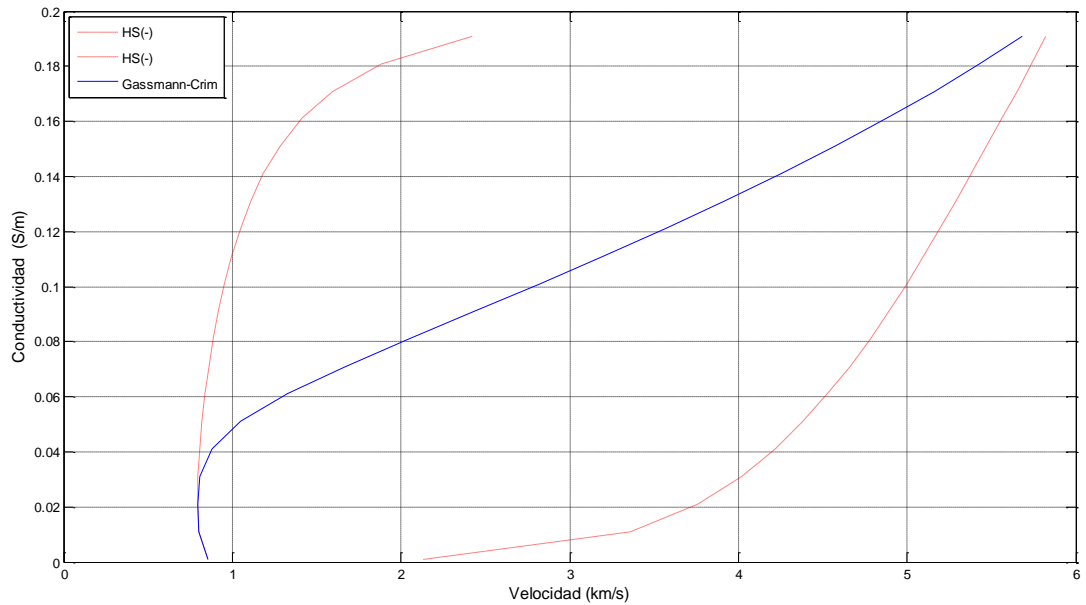


Figura 42. Relación de propiedad cruzada entre la Velocidad de Gassmann y la Conductividad de Crim.

Adicionalmente, en la figura 42, se observa la tendencia del aumento de la velocidad de la onda compresional con pequeños incrementos de la conductividad eléctrica para este tipo de roca reservorio.

La figura 43 se obtiene al graficar la curva de la figura 42 con los datos de campo. A partir de los datos graficados allí, se observa el comportamiento de la velocidad y la conductividad en la sección de la formación en estudio. Se encuentra que la relación de propiedad cruzada sugerida no está muy lejos de reflejar dicho comportamiento. En este sentido, la metodología que se diseña en este trabajo, busca mejorar los valores de velocidad y conductividad obtenidos de las ecuaciones constitutivas previamente seleccionadas por medio de la optimización de los valores de porosidad, para que la diferencia entre estos valores y los datos de campo sea mínima.

Por consiguiente, las ecuaciones constitutivas correspondientes a la velocidad de Gassmann y a la conductividad de Crim, son las ecuaciones que, para los datos de campo, representan mejor la sección de la formación en estudio. De modo que, éstas son las ecuaciones empleadas en los algoritmos de optimización. Por tanto, los algoritmos desarrollados, uno para cada función objetivo, originan dos vectores de porosidad optimizados y a partir de ellos se selecciona el vector que más se aproxime a los valores de porosidad de los corazones o núcleos de la sección de la formación en estudio.

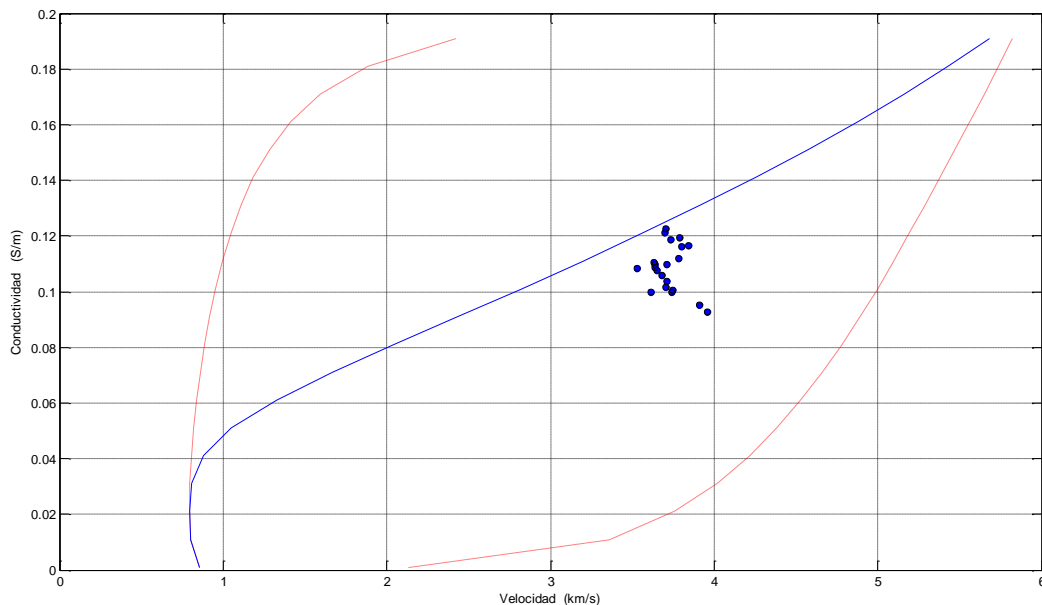


Figura 43. Relación de propiedad cruzada entre la Velocidad de Gassmann y la Conductividad de Crim con datos reales.

En las siguientes figuras se exponen las gráficas obtenidas al ejecutar los algoritmos. En la figura 44 se muestran los valores de conductividad de los registros de pozo y los valores de conductividad calculados con la ecuación de Crim, a partir del vector de porosidad optimizado, en función de la profundidad. En ella se observa que los nuevos valores de conductividad difieren de los valores de conductividad de los registros de pozo. Para este caso, se ha encontrado que el mínimo error obtenido, según el criterio de convergencia del algoritmo, es de: 0.022072, el cual ocurre en la iteración número 9.

En la figura 45, se muestra de nuevo los valores de las conductividades de los registros de pozo y las evaluadas a partir de la ecuación de Crim, en función de la porosidad. En esta figura se observa claramente que los datos optimizados no siguen la tendencia de los datos de campo. Finalmente, en la figura 46, se aprecia que la porosidad optimizada, está más distante de la porosidad de los corazones que la porosidad de los registros de pozo. Por tanto se concluye que los valores de porosidad a partir de los registros de pozo son mejores que la porosidad optimizada.

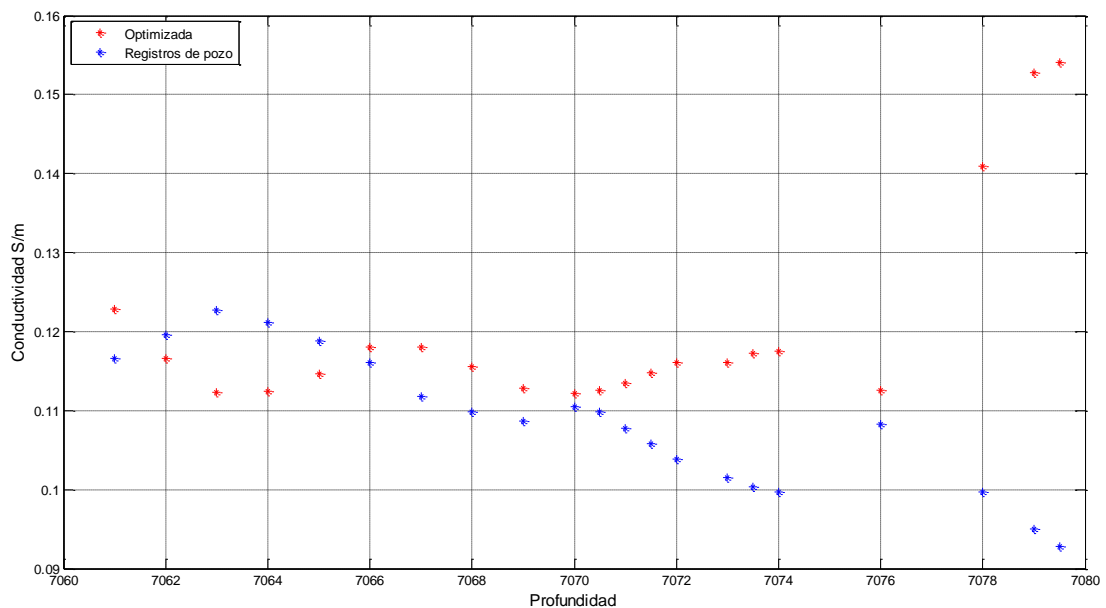


Figura 44. Conductividad vs. profundidad para los datos de campo y la conductividad calculada a partir de los nuevos valores de porosidad

El vector de porosidad, obtenido para el caso de conductividades eléctricas, indica que la optimización implementada no mostró buenos resultados, ya que se generó un vector que se aleja del valor verdadero de porosidad. Por

tanto, es necesario utilizar ecuaciones constitutivas que reflejen mejor el comportamiento de la conductividad eléctrica.

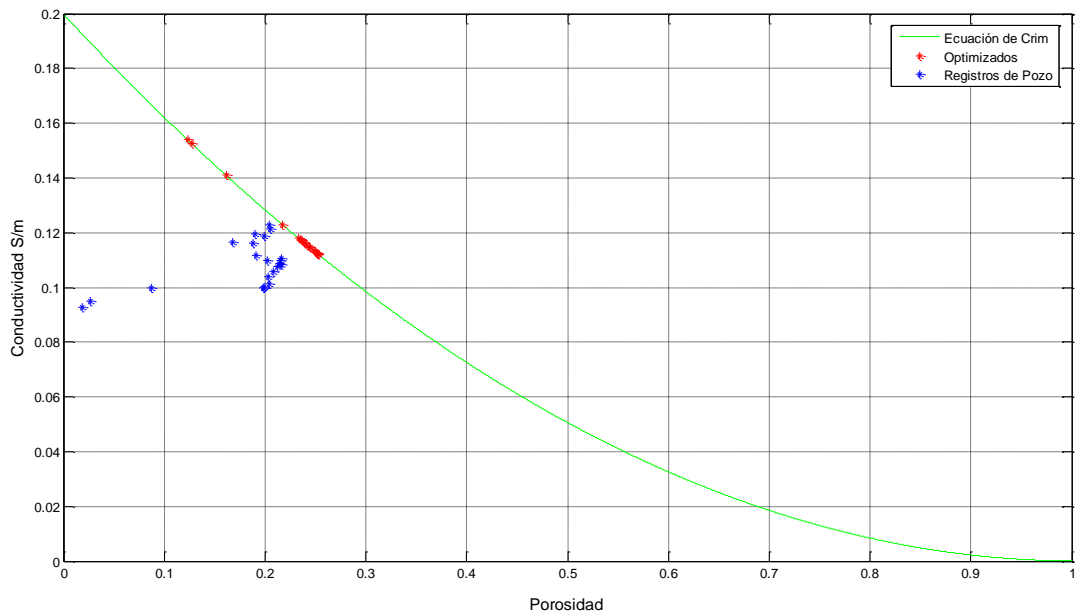


Figura 45. Conductividad vs. porosidad para: datos de los registros de pozo, conductividad calculada a partir de los valores optimizados de porosidad y la función de Crim.

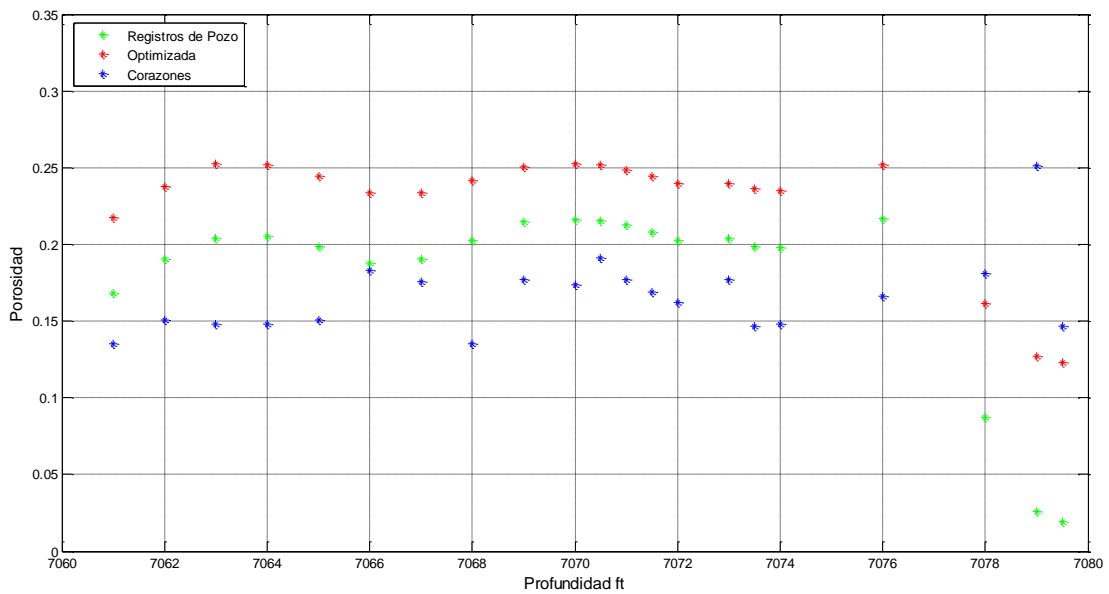


Figura 46. Porosidad vs. profundidad para: los datos de los registros de pozo, los valores optimizados y los obtenidos a partir de los corazones de la zona de estudio

A pesar de los resultados anteriores, para el caso de la velocidad de onda compresional, se encuentran mejores resultados tal como se muestra en las siguientes figuras.

En la figura 47, se observan los valores de la velocidad de los registros de pozo y los calculados con la ecuación de Gassmann a partir del vector de porosidad optimizado en función de la profundidad. Allí se observa que los nuevos valores de velocidad siguen la tendencia de los datos iniciales. Para este caso, se encuentra que el mínimo error obtenido, según el criterio de convergencia del algoritmo, es de: 0.40738, el cual ocurre en la iteración número 17

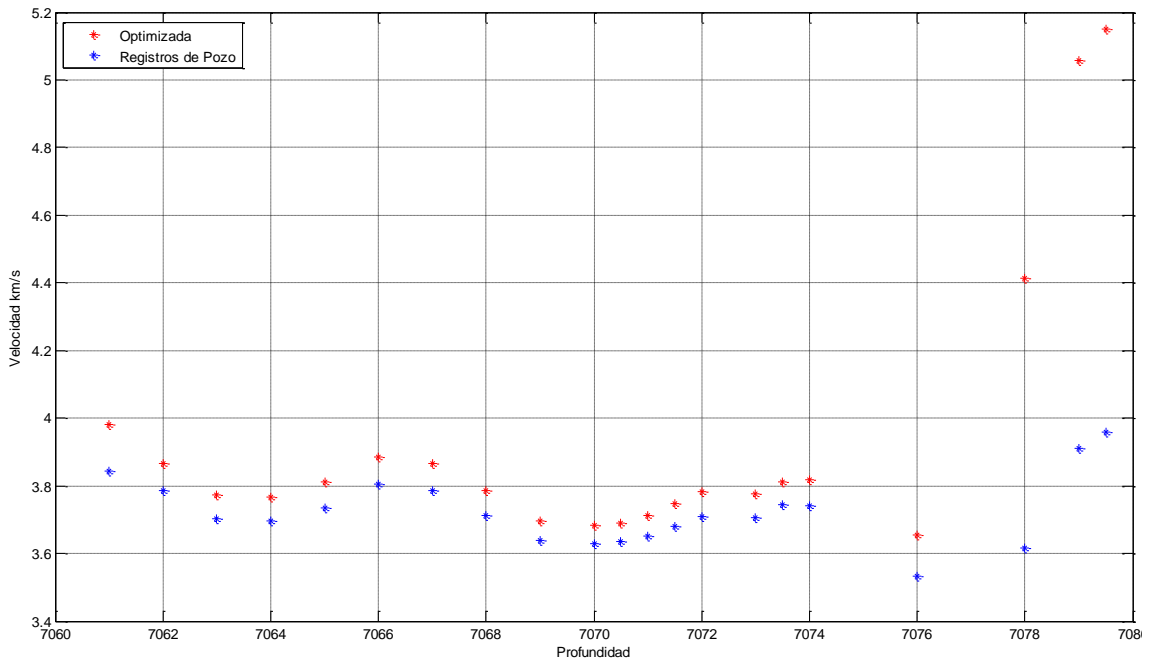


Figura 47. Velocidad vs. profundidad para los datos de campo y la velocidad calculada a partir de los nuevos valores de porosidad

En la figura 48 se presentan nuevamente los valores de las velocidades de los registros de pozo y los calculados con la ecuación de Gassmann en función de la porosidad. Allí es evidente la alta fidelidad entre los tres conjuntos de datos, especialmente en los puntos más cercanos a un valor de porosidad de 0.2.

Por último, en la figura 49 se muestra los tres conjuntos de porosidades en función de la profundidad, allí se observa indiscutiblemente que, los valores de porosidad optimizados son más cercanos a los valores de porosidad real, que los datos de los registros de pozo. De tal forma que, a partir de la

ejecución de éste algoritmo es posible encontrar mejores valores de porosidad.

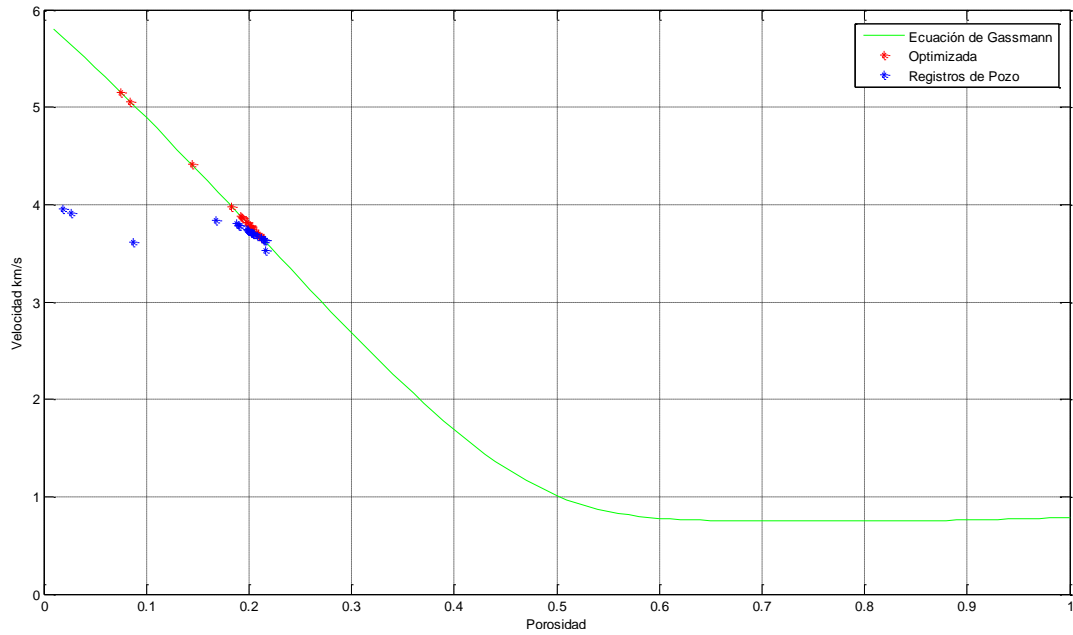


Figura 48. Velocidad vs. porosidad para: datos de los registros de pozo, velocidad calculada a partir de los valores optimizados de porosidad y la función de Gassmann.

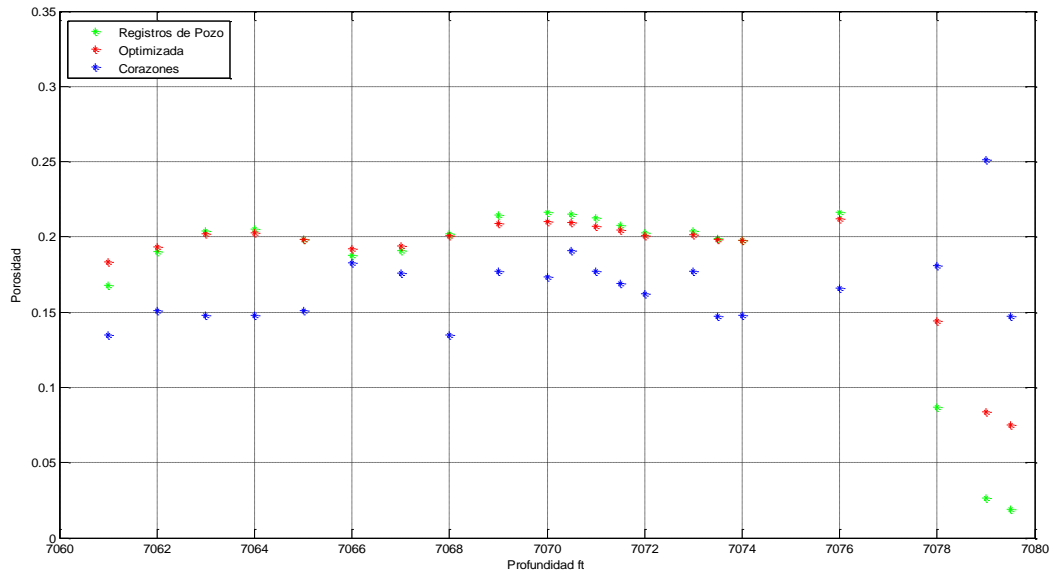


Figura 49. Porosidad vs. profundidad para: los datos de los registros de pozo, los valores optimizados y los obtenidos a partir de los corazones de la zona de estudio.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Por medio del desarrollo de esta investigación y de la ejecución de la metodología implementada se concluye:

El objetivo fundamental de la investigación se cumple y consiste en desarrollar una técnica para estimar la porosidad de la roca a partir del uso de relaciones de propiedades cruzadas. En este sentido, se elaboró una metodología que permite obtener un valor optimizado de la porosidad de la roca, mediante la solución de un problema inverso. En efecto, se obtienen valores optimizados de la porosidad a partir de los datos de campo y de las ecuaciones constitutivas que modelan la roca. Dichas ecuaciones constitutivas se seleccionan a partir de la metodología de relaciones de propiedades cruzadas, entre las señales de conductividad eléctrica y velocidad sísmica. Por tanto se ha mejorado la predicción de parámetros petrofísicos en un campo maduro.

Para conseguirlo, se demostró la analogía acústica electromagnética entre las propiedades de la roca aplicada a la geofísica, la cual es ilustrada al comparar las características básicas de las ondas planas uniformes electromagnéticas y acústicas al transmitirse en un medio homogéneo, isotrópico y viscoelástico. Igualmente, se realizó un estudio de las diferentes ecuaciones constitutivas que modelan el comportamiento de la velocidad de onda compresional y la conductividad eléctrica en función de la porosidad de la roca; y de las diversas relaciones de propiedades cruzadas que se pueden realizar entre dichas ecuaciones constitutivas.

También, se realizó un estudio juicioso acerca de la evolución del uso de las relaciones de propiedades cruzadas entre propiedades sísmicas y electromagnéticas, en la ciencia de materiales y en el entorno de la interpretación de los registros de pozos. Así como la discusión de algunos de los éxitos, fracasos y desafíos de ésta metodología dentro de la física de rocas, principalmente en la exploración de hidrocarburos. Esto con el fin de desarrollar una metodología acorde con la realidad y las necesidades de la industria del petróleo, la cual contribuye en el análisis petrofísico de los registros de pozo.

Se aplicó la técnica a un conjunto de datos, suministrados por el Instituto Colombiano de Petróleo (ICP), de una sección de arena limpia saturada con petróleo en una formación específica de un campo maduro; con los cuales se logró establecer que la relación de propiedad cruzada, la cual representa los datos de la sección de la formación en estudio corresponde a la relación de Gassmann/CRIM. Confirmándose que la tendencia del comportamiento del conjunto de datos para dicho reservorio corresponde al aumento de la velocidad de onda compresional para pequeños incrementos de la conductividad eléctrica. Por tanto, con esta relación es posible obtener la conductividad eléctrica a partir de la velocidad de onda compresional y viceversa para esta sección a partir del valor de porosidad obtenido de los registros de pozo. Igualmente, con las ecuaciones de Gassmann y CRIM, es posible buscar nuevos y optimizados valores de la porosidad de la roca.

Asimismo, se logró diseñar e implementar en Matlab dos algoritmos que permiten aplicar la técnica para encontrar valores optimizados de la porosidad de la roca, partiendo de valores de porosidad iniciales proporcionados en los registros de pozo. Los algoritmos se construyen a partir del algoritmo del gradiente conjugado, el cual permite realizar un proceso de inversión general linealizada. A partir de la ejecución de este algoritmo se encontró un vector de porosidad optimizado que minimizó la diferencia entre los valores calculados de velocidad y conductividad eléctrica y los datos de campo. El porcentaje de error que se obtiene para el mejor caso, es decir para el de la velocidad de onda compresional es de: 0.40738.

Una ventaja de la técnica diseñada es su flexibilidad, pues es desarrollada a través de dos algoritmos paralelos, uno para cada propiedad, generando de esta forma dos soluciones diferentes. Por tanto, simplemente se selecciona el vector que más se acerque a los datos de porosidad obtenidos con los núcleos o corazones de la formación en estudio. Adicionalmente, esta característica garantiza que se está reflejando realmente el comportamiento de la roca y que los valores obtenidos siguen la tendencia del comportamiento descrita en la relación de propiedad cruzada.

Para trabajos e investigaciones futuras, se recomienda observar el comportamiento de las relaciones entre propiedades físicas en la presencia

de otras propiedades, diferentes a la porosidad, tales como: permeabilidad del fluido k , contenido de arcilla C , y densidad promedio de los minerales de la roca.

BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Archie, G. E. The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics: AIME Trans. (Petroleum Development and Technology), v. 146, p. 54-62, 1942.
- [2]. B. A. Auld. Acoustic fields and waves in solids, Vol 1. Wiley-Interscience Publication. New York, 1973.
- [3]. Backus, G. E. (1962) Long wave anisotropy produced by horizontal layering. Jour. Geophys. Res. 67, 4427-4440.
- [4]. Berryman, J. G. (2003) Scale-up in Poroelastic Systems and Applications to Reservoirs, 16th ASCE Engineering Mechanics Conference, University of Washington, Seattle.
- [5]. Berryman, J. G. Mixture theories for rock properties [en línea], American Geophysical Union Handbook of Physical Constants, edited by T. J. Ahrens (AGU, New York, 1995), pp. 205-228. [consulta 15 de marzo de 2009]. Disponible en Internet: <http://sepwww.stanford.edu/sep/berryman/rockphys.html>
- [6]. Berryman, J. G., and G. W. Milton. Microgeometry of random composites and porous media: Journal of Physics D, 21, 87–94. 1988
- [7]. Born, M., y Wolf, E. Principles of Optics, 6a ed. Pergamon Press, Oxford, U.K., 808 pp., 1980
- [8]. Bourbié T., Coussy O., Zinszner B. Acustics of porous media. Editions Technip. Paris 1987.
- [9]. Bristow, J. R. Microcracks, and the static and dynamic elastic constants of annealed and heavily cold-worked metals: British Journal of Applied Physics, 11, 81–85. 1960
- [10]. Brito Dos Santos, W. L., T. J. Ulrych, and O. A. L. De Lima A new approach for deriving pseudovelocity logs from resistivity logs: Geophysical Prospecting, 36, 83–91. 1988.
- [11]. Bruggeman, D. A. G. (1937) Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. III. Die elastischen Konstanten der quasiisotropen Mischkörper aus isotropen Substanzen. Annalen der Physik. Vol 421, 2, 160-178.
- [12]. Carcione, J. M., and Ursin, B. Cross-property relations between electrical conductivity and seismic velocity of rocks, Geophysics 72, E193. 2007.

- [13]. Claerbout Jon F. Conjugate Gradient Tutorial. Stanford Exploration Project U.S. 48, pp 351 -358 [consultado en internet 15 de septiembre de 2010]. Disponible en Internet:
- [14]. http://sepwww.stanford.edu/theses/sep48/48_25_abs.html
- [15]. Dandekar, Abhijit Y. Petroleum reservoir rock and fluid properties. Taylor & Francis, CRC pres. Soun Parkway N.Y. 2006.
- [16]. Delaplanche, J., et al, 1963, An example of the use of synthetic seismograms: Geophysics, v. 28, p. 842-854.
- [17]. Desbrandes, R. Theorie et Interpretation de Diagraphies. Editions Technish, Paris. 1968.
- [18]. Dewan J.T., Moder open-hole log interpretation, Penn Well Publish Company, Oklahoma, 1983.
- [19]. Fuller, B. D., Ward, S. H. (1970) linear system descriptions of the electrical parameters of rocks, IEEE Trans Geosc. Electronics GE-8, 7-8.
- [20]. Gassmann, F. Elastic waves through a packing of spheres, Geophysics, Tulsa, 16, 673-685. 1951.
- [21]. Gibiansky, L.V. and S. Torquato, Bounds on the effective module of cracked materials. J Mech Phys Solids 44, 233-242. 1996
- [22]. Glover, P. W. J., M. J. Hole, and J. Pous, 2000, Amodified Archie's law for two conducting phases: Earth and Planetary Science, 180,369–383.
- [23]. Granitto, P.M., Verdes P.F., Navone H.D., Ceccatto H.A., D. Curia and C. Larriestra. Modeling Sonic Logs in Oil Wells: A Comparison of Neural Networks Ensembles and Kernel Methods, Argentine Symposium on Artificial Intelligence (ASAI'01) (Bs. As., September 12-13, 2001).
- [24]. Hacikoylu, P., J. Dvorkin, and G. Mavko, (2006) Resistivity-velocity transforms revisited: The Leading Edge, 25, 1006–1009. 5th Conference & Exposition on Petroleum Geophysics, Hyderabad-2004, India PP 146-151.
- [25]. Hara, G. Theorie der akustischen Schwingsausbreitung in gekörnten Substanzen und experimentelle Untersuchungen an Kohlepulver, Elektrische Nachrichten Technik, 12, 7 191-200. 1935.
- [26]. Hermance, J. F., 1979, The electrical conductivity of materials containing partial melt, a simple model from Archie's law: Geophysical Research, 6, 613–616.
- [27]. Huckenholz, H.G. The rocks of the earth, En: References for Introduction [en línea]. Angenheister, G. (ed.) 1982. SpringerMaterials – Base de Datos: Landolt-Börnstein [consultado 8 de marzo 2009] Disponible en Internet: <http://www.springermaterials.com>DOI: 10.1007/10201894_19.

- [28]. Iida, K. Velocity of elastic Waves in a granular Substance. Earthquake Research Institute. Vol 28, 51, 783-808. 1939.
- [29]. Ikwuakor, K. C. (2007) Comments on “Resistivity-velocity transforms revisited”: The Leading Edge, 26, 134–137.
- [30]. Kachanov , M., Sevostianov I., and B. Shafiro (2001) Explicit cross-property correlations for porous materials with anisotropic microstructures: Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49, p. 25 [citado en: 15 de agosto de 2009]. Disponible en: <www.sciencedirect.com>
- [31]. Keller, G. V., y Frischknecht, F. C., Electrical methods in geophysical prospecting: Q, Colo. Sch Mines, 63 No. 2. 1966.
- [32]. Kim, D. Y., 1964, Synthetic velocity log: Artículo presentado en: 33d Ann. Internat. SEG Mtg., New Orleans.
- [33]. Koesoemadinata, A. P., and G. A. McMechan. Correlations between seismic parameters, EM parameters, and petrophysical/petrological properties for sandstone and carbonate at low water saturations, Geophysics, 2003, 68(3), 870–883.
- [34]. L.Y. Faust."A velocity function including lithologic validation", Geophysics 18, 271-297. 1953.
- [35]. Lee, M.W., 2002, Biot-Gassmann theory for velocities of gas-hydrate-bearing sediments: Geophysics, v. 67, p. 1711–1719.
- [36]. Lee, M.W., Collett, T.S., and Agena, W.F. (2008) Assessing gas-hydrate prospects on the North Slope of Alaska—Theoretical considerations: U.S. Geological Survey, Scientific Investigations Report 2008–5175, 28 p.
- [37]. Markov, K.Z., (1999) Elementary micromechanics of heterogeneous media. En: Markov, K.Z. and Preziosi, L., Editors, 1999. Heterogeneous Media: Modeling and Simulation, Birkhäuser, Boston, pp. 1–162.
- [38]. Milton, G.W., Composites: A myriad of microstructure independent relations, T. Tatsumi, E. Watanabe, and T. Kambe, eds., Theoretical and applied mechanics, Proceedings of the XIX International Congress of Theoretical and Applied Mechanics: Elsevier Science Publ. Co., Inc., 443–459. 1997
- [39]. Raymer et al . An improved sonic transit time-to-porosity transform” . Trans. Soc. Prof. Well Log Analysts, 21st Annual Logging Symposium, 1980.
- [40]. Rudman, A. J., J. F. Whaley, R. F. Blake, and M. E. Biggs, Transformation of resistivity to pseudovelocity logs, AAPG Bull, 1975. 59, 1151–1165.
- [41]. Santamaría, Ricardo. Pequeños campos de crudo ya destronaron a Caño Limón. En: El Tiempo, Bogotá: (4 de junio, 2010); p. 1-2.

- [42]. Schlumberger (1991), Log interpretation Principles/Applications, Schlumberger Ed. Serv.
- [43]. Schneider, F., M. Boutecca, G. Vasseur. Validity of the porosity/effective-stress concept in sedimentary basins modelling. *Frist Break*, 12, 6, 321-326.1994.
- [44]. Schön, J.H., *Physical Properties of Rocks: Fundamental and Principles of Petrophysics*. 1 ed. 2004.
- [45]. Schooper, J.R. Porosity and Permeability, in : *LANDOLT-BÖRNSTEIN Numerical Data and Funtional Relationships in Science and Technology, New Series, GroupV, Geophysics and Space Research, Vol. 1Physical Properties of rocks, Subvol. A* Springer-Verlag Berlin. Heidelberg. New York.1982.
- [46]. Serra, O. *Fundamentals of well-log interpretation*, Elsevier Amsterdam Oxford New York Tokyo.1984.
- [47]. Temizer, I. (2004) ME 285 PROJECT: Continuum Theory of Mixtures. Disponible en: www.me.berkeley.edu/compmat/ilkerDOCS/ME285_Project_Mixtures.pdf
- [48]. Tiwary, D.N., Singh B., Arasu R.T., Rhaman M., P.Saha & M. Chandra, (2004) *Travel Time Modelling using Gamma Ray and Resistivity Log in Sand Shale Sequence of Gandhar Field*
- [49]. Torquato, S., *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*: Springer, New York, 2002.Villamar, V.M. *Geología de Explotación. Proyecto D-5101 Gerencia de Desarrollo de Yacimientos IMP* 1983.
- [50]. Ward S.H. y Hohmann G,W. *Electromagnetic theory for geophysical applications. Electromagnetic methods in applied geophysics.Society of exploration geophysicists. Vol 1*,1998.
- [51]. *Western Atlas (1995) Introduction to Wireline Log Analysis*, Western Atlas International, Inc Huston TX.
- [52]. White, J. E. *Underground Sound*, Elsevier Publ. Amsterdam, Oxford, New York. 1983.
- [53]. Wyllie, M. R. J., A. R. Gregory , L.W. Gardner (1956) *Elastic wave velocities in Heterogeneous and porous media*, *Geophysics*, 21, 41 – 70.

ANEXOS

ANEXO A. ANALOGÍA ACÚSTICA ELECTROMAGNÉTICA

Muchos de los grandes científicos del pasado estudiaron la teoría del movimiento ondulatorio. Todo este desarrollo fue entre la teoría de las ondas de luz y la teoría de las ondas en materiales. En 1660 Robert Hooke formuló la relación esfuerzo-deformación, la cual establece el comportamiento elástico de los cuerpos sólidos. Hooke creía que la luz era un desplazamiento vibratorio del medio, a través del cual ésta se propaga en una velocidad infinita. Experimentos significativos y avances matemáticos llegaron en el siglo XIX. Thomas Young fue uno de los primeros al considerar el esfuerzo de cizalla como un esfuerzo elástico y definió el módulo elástico, llamado módulo de Young. George Green hizo extensivo el uso de la analogía entre ondas elásticas y ondas de luz y su desarrollo ilustra la potencia del uso de las analogías matemáticas.

Luego, en la segunda parte del siglo XIX, James Clerk Maxwell y Lord Kelvin usan analogías físicas y matemáticas para estudiar el fenómeno de la propagación de una onda en la teoría elástica y el electromagnetismo. De hecho, la corriente de desplazamiento introducida por Maxwell en las ecuaciones electromagnéticas es análoga a los desplazamientos elásticos. Maxwell asume que sus ecuaciones son válidas en un sistema absoluto considerado como un medio (llamado ether) el cual se ajusta a todo el espacio. Para Maxwell el ether está en un estado de tensión y sólo transmite ondas transversales. Con el avance de la teoría de la relatividad, el concepto del ether es abandonado. Sin embargo el hecho de que las ondas electromagnéticas son ondas transversales es importante. Esta situación es contraria a las ondas acústicas que se transmiten en un fluido, el cual sólo puede transmitir ondas longitudinales. Sin embargo, un cuerpo viscoelástico transmite ondas longitudinales y transversales.

La propagación de las ondas acústicas y electromagnéticas en un medio viscoelástico corresponde a fenómenos físicos que tienen la misma formulación matemática. Por tanto, se puede establecer una analogía entre las propiedades de estos campos y el medio, con las ecuaciones para cada campo y las respectivas relaciones constitutivas. De tal forma que, se establecen relaciones entre propiedades para estimar otras propiedades.

En este anexo se presenta la analogía entre las ecuaciones del campo acústico y las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético en 1D y en bajas frecuencias, debido a las características de los datos de campo de los que se cuenta. Adicionalmente esta aproximación en 1D es coherente ya que en bajas frecuencias las dimensiones transversales del medio son muy pequeñas en comparación con las grandes longitudes de onda [8]. Sin embargo, esta analogía se puede demostrar en 3D y 2D.

En particular, para esta aplicación, la analogía se ilustra al comparar las características básicas de las ondas planas uniformes electromagnéticas y acústicas cuando se transmiten en un medio viscoelástico, isotrópico y homogéneo. En este sentido, el estudio de ondas planas para casos con campos completamente uniformes sobre planos normales a la dirección de propagación, genera soluciones que se obtienen muy fácil matemáticamente. Estas soluciones aportan aproximaciones útiles a ondas reales en muchos problemas prácticos, de tal forma que la teoría de las ondas planas proporciona un punto de partida para explorar la analogía entre estos campos [7].

A.1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de maxwell.

En notación vectorial, las ecuaciones de Maxwell cuando se aplican a campos eléctricos y magnéticos variantes con el tiempo son [13-]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (\text{A.1})$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_s \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Con el operador:

$$\nabla = \begin{bmatrix} 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Donde \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{J}_c y \mathbf{J}_s corresponde a: el vector intensidad de campo eléctrico, el vector intensidad de campo magnético, el vector densidad de flujo eléctrico, el vector densidad de flujo magnético, el vector densidad de corriente de convección y el vector densidad de corriente de la fuente.

Las ecuaciones (A.1) hasta (A.4) son ecuaciones diferenciales donde cada una de estas cantidades está relacionada entre sí por medio de las ecuaciones constitutivas para el medio. Las cuales corresponden a:

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon}(\omega, \mathbf{E}, \mathbf{r}, t, T, P, \dots) \mathbf{E} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}(\omega, \mathbf{H}, \mathbf{r}, t, T, P, \dots) \mathbf{H} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma}(\omega, \mathbf{E}, \mathbf{r}, t, T, P, \dots) \mathbf{E} \quad (\text{A.8})$$

Donde los tensores $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\mu}$, y $\boldsymbol{\sigma}$ describen la permitividad, la permeabilidad y la conductividad del medio como funciones de la frecuencia angular ω , el campo eléctrico \mathbf{E} o magnético \mathbf{H} , la posición \mathbf{r} , la temperatura T y la presión P . Cada uno de estos tensores es complejo en el caso general, permitiendo a las fases de \mathbf{D} y \mathbf{E} , \mathbf{H} y \mathbf{B} , \mathbf{J} y \mathbf{E} , ser diferentes [13-].

Al Sustituir las ecuaciones (A.6), (A.7) y (A.8) en (A.2) y (A.3), se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \quad (\text{A.9})$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\mu} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (\text{A.10})$$

Movimiento de la Onda en 1D

Para el movimiento de una onda electromagnética en 1D, se considera el medio homogéneo, isotrópico y uniforme con permitividad dieléctrica (ϵ), permeabilidad magnética (μ) y conductividad (σ) completamente fijas en el espacio. Se asume un campo electromagnético plano presente en este medio en el cual el campo eléctrico tiene una sola componente en x (E_x), el campo magnético tiene sólo una componente en z (H_z) y las amplitudes de los dos campos varían sólo en la dirección de y , como se observa en la figura 50.

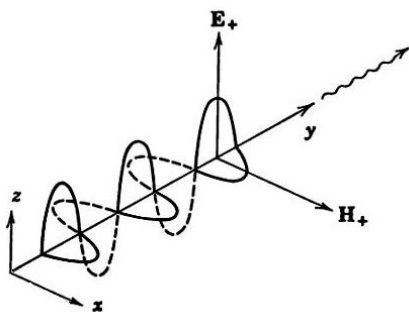


Figura 50: Propagación de los campos eléctrico y magnético en la dirección de y, con polarización en z.
Fuente: [52]

Puesto que los campos se propagan en y, sólo $\partial/\partial y$ en ∇ es diferente de cero, entonces:

$$\nabla = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\partial/\partial y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Para un medio sin fuentes de corriente, las ecuaciones de Maxwell (A.12) y (A.13) se reducen a:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \quad (\text{A.12}) \quad -\nabla \times \mathbf{E} = \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \quad (\text{A.14}) \quad -\frac{\partial E_z}{\partial y} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (\text{A.17})$$

$$0 = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y \quad (\text{A.15}) \quad 0 = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (\text{A.18})$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z \quad (\text{A.16}) \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (\text{A.19})$$

De las ecuaciones anteriores se observa que los campos magnético y eléctrico son transversales. Al examinarlas, se encuentra que están acopladas en pares, esto es, un par con H_z y E_x , y el otro con H_x y E_z . Para analizar la propagación en y se toma el primer par:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \quad (\text{A.20}) \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (\text{A.21})$$

La ecuación de onda para el campo eléctrico corresponde a:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (\text{A.22})$$

Y para el campo magnético:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (\text{A.23})$$

A.1.2 Ondas acústicas

Ecuación de movimiento

Al considerar una partícula de un material vibratorio, dentro de un elemento diferencial de volumen, la fuerza aplicada al cuerpo y las fuerzas aplicadas a la superficie de la partícula por las partículas vecinas corresponden a fuerzas asociadas con dicha vibración[52]. En ese sentido, la segunda ley de Newton establece que:

$$\int_{\delta S} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\delta V} \mathbf{F} dV = \int_{\delta V} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV \quad (\text{A.24})$$

Donde \mathbf{T} corresponde al vector *stress*, cuyas unidades corresponden a Newtons/metro². En un medio vibratorio \mathbf{T} es función de la posición espacial de las partículas, físicamente representa a las fuerzas aplicadas por las partículas vecinas en cada cara del elemento de volumen, como se observa en la figura 51. El vector normal a la superficie de la partícula corresponde a \mathbf{n} , \mathbf{F} es la fuerza externa aplicada, \mathbf{u} es el vector desplazamiento de la partícula y ρ es la densidad de masa del medio en equilibrio.

En la figura 51 se observan las fuerzas que ejercen las partículas vecinas sobre el elemento de volumen.

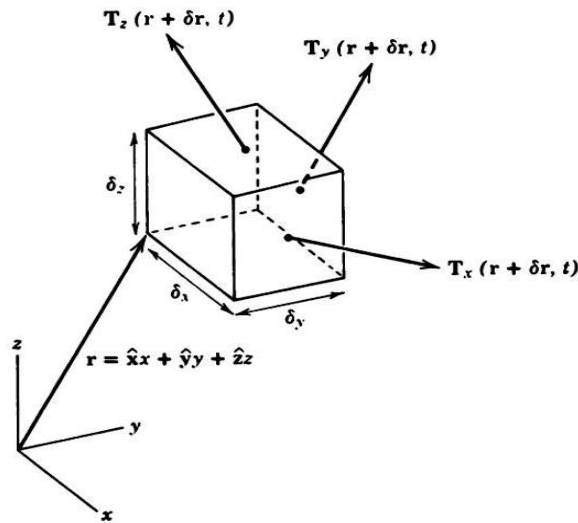


Figura 51. Fuerzas de esfuerzo actuando en una partícula de un material vibratorio.
Fuente: [52]

En la figura 52 se observa la transmisión de las fuerzas superficiales aplicadas a un cuerpo por medio de las fuerzas elásticas entre las partículas.

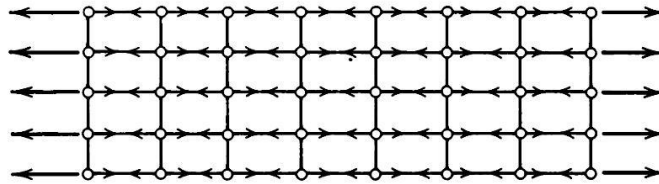


Figura 52. Transmisión de las fuerzas aplicadas entre las partículas al interior de un sólido.
Fuente: [52].

A continuación, en la figura 53 se muestra la definición de la matriz de esfuerzo compresivo o distensivo [52].

$$\begin{bmatrix} T_{nx} \\ T_{ny} \\ T_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

vector *matriz stress* *vector*
esfuerzo *normal*

$$T = T_{nx} + T_{ny} + T_{nz} \tag{A.25}$$

Figura 53. Definición de las fuerzas de tensión actuando en un elemento diferencial de volumen.
Fuente: [52]

Cuando la matriz *stress*(T) es simétrica se expresa como un vector fila de seis elementos:

$$T = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

$$T = [T_{xx} \quad T_{yy} \quad T_{zz} \quad T_{yz} \quad T_{xz} \quad T_{xy}]^T \quad (\text{A.26})$$

Si en la ecuación (A.24) el volumen de la partícula es suficientemente pequeño, los integrandos de volumen de las integrales son constantes, y

$$\frac{\int_{\delta S} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS}{\delta V} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{F} \quad (\text{A.25})$$

El límite cuando $\delta V \rightarrow 0$ en el lado izquierdo de la ecuación (A.25) se define como la divergencia del vector *stress*, representada como:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\int_{\delta S} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS}{\delta V} \quad (\text{A.26})$$

Y teniendo en cuenta que la velocidad de la partícula es $\mathbf{v} = \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta t}$, entonces la ecuación (A.24) es:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} - \mathbf{F} \quad (\text{A.27})$$

Para un medio vibrando libremente ($\mathbf{F} = 0$), entonces la ecuación (A.27) es:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \quad (\text{A.28})$$

Se define \mathbf{p} como la densidad de momento ($\text{kg/m}^2\text{s}$):

$$\mathbf{p} = \rho \mathbf{v} \quad (\text{A.29})$$

(A.29) en (A. 28) es:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\delta \mathbf{p}}{\delta t} \quad (\text{A.30})$$

La ecuación (A.30) es usualmente conocida como la ecuación de movimiento, la cual gobierna el comportamiento elástico de la onda; donde desde ahora:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

Deformación del material

Un material se deforma cuando las partículas del medio son desplazadas una con respecto a otra, como se muestra en la figura 54. Este desplazamiento se representa con el vector $\mathbf{u}(\mathbf{L}, t)$, donde \mathbf{L} , representa el vector posición de la partícula con respecto a el origen del sistema de coordenadas. El vector \mathbf{u} , varía con el tiempo, conforme la onda se propaga en el medio.

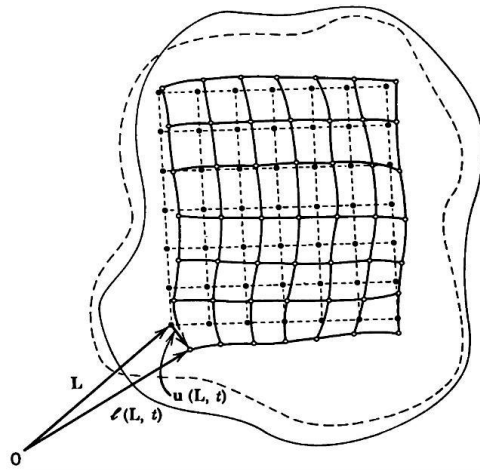


Figura 54 Deformación

Partícula en equilibrio (puntos negros) y posiciones después de una deformación (puntos blancos). Igualmente se muestra el vector desplazamiento de una partícula cuando el cuerpo es deformado.

Fuente: [52]

La deformación de un cuerpo vibrando es descrita por el vector *strain* o deformación $\mathbf{S}(\mathbf{L}, t)$, la cual corresponde al gradiente del desplazamiento de la partícula:

$$\mathbf{S}(\mathbf{L}, t) = \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{L}, t) \quad (\text{A.32})$$

La ecuación (A.32) corresponde a la relación *strain*-desplazamiento. Físicamente la deformación se interpreta como el límite del máximo desplazamiento dentro de una superficie cerrada de un pequeño volumen.

Debido a que la matriz deformación es simétrica, se define como el vector columna:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \\ S_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Por tanto:

$$\mathbf{S} = \nabla^T \mathbf{u} \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \nabla^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nabla^T \mathbf{v} \quad (\text{A.35})$$

Ecuaciones constitutivas

Las fuerzas de restauración elástica o *stress* entre las partículas y la deformación o *strain* se relacionan entre sí por medio de la ecuación constitutiva (A.36), la cual corresponde a la ley empírica de Hooke.

$$\mathbf{T} = \mathbf{cS} \quad (\text{A.36})$$

La ley de Hooke establece que el *stress* es proporcional a la deformación por el tensor de elasticidad \mathbf{c} , llamado *stiffness*. Igualmente se define la relación *strain-stress* como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{sT} \quad (\text{A.37})$$

Donde \mathbf{s} corresponde al tensor *compliance* y $\mathbf{s} = \mathbf{c}^{-1}$

El tensor de elasticidad \mathbf{c} , está compuesto de 81 componentes independientes. Sin embargo, de acuerdo con la simetría del material se reduce el número de constantes independientes.

Modelos de un medio real

La ley de Hooke establece un comportamiento elástico sin pérdida de energía tal como lo expresa la relación fuerza-desplazamiento de un resorte; sin embargo, al considerar la propagación de la onda a través de un medio real en el cual la onda sufre una atenuación, el modelo de Hooke se sustituye por el modelo de Kelvin-Voigt o el modelo de Maxwell. Estos modelos incluyen el amortiguamiento por medio de un elemento viscoso.

En la figura 55 se muestra junto con el modelo de Hooke, el modelo de Kelvin-Voigt. Para este segundo modelo la relación *stress-strain* en el resorte es:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{c}\mathbf{S} \quad (\text{A.38})$$

Y la relación *stress-strain* en el amortiguador es:

$$\mathbf{T}_2 = \eta \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (\text{A.39})$$

Donde η corresponde al tensor de viscosidad.

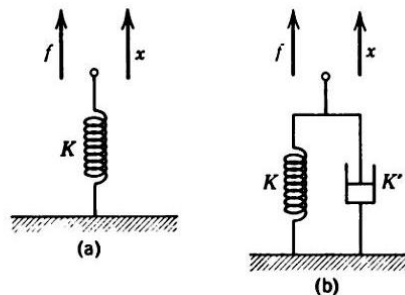


Figura 55. (a) Modelo de la ley de Hooke, (b) Modelo de Kelvin-Voigt.
Fuente: [52]

Asumiendo que el *stress* total del sistema es: $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$, la relación *stress-strain* del elemento de Kelvin-Voigt corresponde a la ecuación constitutiva:

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}\mathbf{S} + \boldsymbol{\eta} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (\text{A.40})$$

El modelo mecánico desarrollado por Maxwell consiste en un arreglo en serie de un resorte y un amortiguador como se muestra en la figura 56.

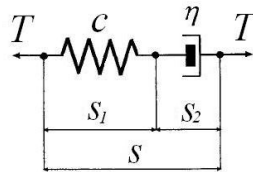


Figura 56. Modelo mecánico de Maxwell.
Fuente: [52]

En la figura 56, al aplicar un esfuerzo \mathbf{T} sobre el modelo se produce una deformación \mathbf{S}_1 en el resorte y una deformación \mathbf{S}_2 en el amortiguador.

La relación *stress-strain* en el resorte es:

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}\mathbf{S}_1 \quad (\text{A.41})$$

La relación *stress-strain* en el amortiguador es:

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\eta} \frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial t} \quad (\text{A.42})$$

Asumiendo que la deformación total del sistema es: $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, la relación *stress-strain* del elemento de Maxwell es:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \mathbf{c}^{-1} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{T} \quad (\text{A.43})$$

Al reemplazar (A.34) en (A.43) y $\mathbf{s} = \mathbf{c}^{-1}$ y al definir la matriz: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta}^{-1}$, se tiene:

$$\nabla^T \mathbf{v} = \mathbf{s} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{T} \quad (\text{A.44})$$

Ecuación de onda

A partir de la definición de la deformación de un material, del modelo de Maxwell [53] y de la ecuación de movimiento, se obtiene la ecuación de onda que gobierna la propagación del *stress* en un medio real, por tanto:

El gradiente de $\nabla \cdot \mathbf{T}$ corresponde a:

$$\nabla^T \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla^T \cdot \rho \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \quad (\text{A.45})$$

$$\nabla^2 \mathbf{T} = \rho \frac{\delta}{\delta t} \nabla^T \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A.46})$$

La derivada con respecto a t de $\nabla^T \mathbf{v}$ corresponde a:

$$\frac{\delta}{\delta t} \nabla^T \mathbf{v} = \frac{\delta}{\delta t} \left(\mathbf{s} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{T} \right) \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \nabla^T \mathbf{v} = \mathbf{s} \frac{\delta^2 \mathbf{T}}{\delta t^2} + \boldsymbol{\tau} \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{T} \quad (\text{A.48})$$

Al reemplazar (A.48) en (A.46), se tiene la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{T} = \rho \mathbf{s} \frac{\delta^2 \mathbf{T}}{\delta t^2} + \rho \boldsymbol{\tau} \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{T} \quad (\text{A.49})$$

Movimiento de la Onda en 1D

Se asume la propagación en la dirección de y de una onda plana, la cual varía uniformemente en la misma dirección, sobre un medio isotrópico y homogéneo. De tal forma, se tiene una onda compresional, como se observa en la figura 56, la cual se propaga con desplazamiento \mathbf{u}_y y velocidad \mathbf{v}_y :

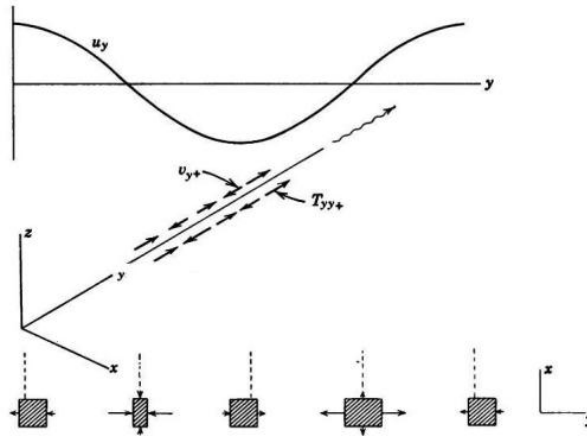


Figura 57. Desplazamiento
De una partícula cuando una onda compresional se propaga en dirección de y a través de ella.
Fuente: [52]

Puesto que los campos se propagan en y , sólo $\partial/\partial y$ en (A.26) es diferente de cero, entonces:

$$\nabla = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.50})$$

Para un medio isotrópico el cual vibra libremente sin fuerzas externas, la ecuación de movimiento (A.26) y la relación *stress-strain* según el modelo de Maxwell, se reducen a:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\delta v_x}{\delta t} = 0 \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\delta v_y}{\delta t} \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{\partial T_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\delta v_z}{\delta t} = 0 \quad (\text{A.54})$$

$$\nabla^T \mathbf{v} = \mathbf{s} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{T} \quad (\text{A.55})$$

$$0 = \mathbf{s} \frac{\partial T_{xx}}{\partial t} + \boldsymbol{\tau} T_{xx} \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \mathbf{s} \frac{\partial T_{yy}}{\partial t} + \boldsymbol{\tau} T_{yy} \quad (\text{A.57})$$

$$0 = \mathbf{s} \frac{\partial T_{zz}}{\partial t} + \boldsymbol{\tau} T_{zz} \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = 0 = \mathbf{s} \frac{\partial T_{yz}}{\partial t} + \boldsymbol{\tau} T_{yz} \quad (\text{A.59})$$

$$0 = \mathbf{s} \frac{\partial T_{xz}}{\partial t} + \boldsymbol{\tau} T_{xz} \quad (\text{A.60})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 = \mathbf{s} \frac{\partial T_{xy}}{\partial t} + \boldsymbol{\tau} T_{xy} \quad (\text{A.61})$$

Como la onda se propaga sólo en y , entonces las ecuaciones (A.52), (A.54), (A.56), (A.58), (A.59), (A.60), (A.61) son iguales a cero, por tanto la ecuación de movimiento y el modelo de Maxwell corresponde a:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = s \frac{\partial T_{yy}}{\partial t} + \tau T_{yy} \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\delta v_y}{\delta t} \quad (\text{A.63})$$

Por tanto la ecuación de onda para el *stress* corresponde a:

$$\frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} = \rho c^{-1} \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial t^2} + \rho \tau \frac{\partial T_{yy}}{\partial t} \quad (\text{A.64})$$

A.1.3 Establecimiento de la analogía en 1D

Al examinar las ecuaciones (A.20), (A.22) y las ecuaciones desde la (A.62), (A.64); se encuentra que el primer grupo de ecuaciones se convierte en el segundo grupo de ecuaciones y viceversa, bajo la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned} v_y &\Leftrightarrow H_z \\ T_{yy} &\Leftrightarrow E_x \\ \rho &\Leftrightarrow \mu \\ s &\Leftrightarrow \epsilon \\ \tau &\Leftrightarrow \sigma \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de onda (A.22) basada en el modelo de Maxwell es matemáticamente equivalente a ecuación de onda (A.64).

A.2 Teoría electromagnética y acústica para aplicaciones en geofísica.

A.2.1 Electromagnetismo

Para la mayoría de los problemas electromagnéticos en 1D, se asumen las siguientes suposiciones para simplificar el análisis [13-], [8]:

- La distribución de las propiedades eléctricas en el subsuelo se considera homogénea, isotrópica e independiente del tiempo, temperatura o presión
- La permeabilidad magnética se asume como la del espacio libre, esto es, $\mu=\mu_0$.
- La longitud de la onda es mayor comparada con las dimensiones de los poros y canales del poro por donde el flujo ocurre continuamente.

En ese sentido, la ecuación de onda para un campo electromagnético se descompone en dos partes: una para la cual el campo eléctrico es transversal a alguna abscisa y la otra en donde el campo magnético es transversal a otra abscisa; de tal forma que se tienen las siguientes las ecuaciones (A.22) y (A.23):

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Y para el campo magnético:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

En el dominio de la frecuencia se tiene

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + (\mu\epsilon\omega^2 - j\mu\sigma\omega)E_x = 0 \quad (A.65)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (\mu\epsilon\omega^2 + j\mu\sigma\omega)H_z = 0 \quad (A.66)$$

$$k^2 = (\mu\epsilon\omega^2 - j\mu\sigma\omega) \quad (A.67)$$

Donde k corresponde al número de onda, el cual es función de las propiedades físicas de la roca y de la frecuencia. El comportamiento del número de onda con el cambio de frecuencia es importante para utilizar diferentes métodos electromagnéticos.

En (A.65) si $\mu\epsilon\omega^2 \ll \mu\sigma\omega$ para materiales de la Tierra en frecuencias menores que 10^2Hz ; se observa que las corrientes de desplazamiento son mucho menores que las corrientes de conducción, entonces la dependencia de la permitividad dieléctrica desaparece [13-]. En este sentido, en muy bajas frecuencias el comportamiento del campo de onda se determina a través de

las ecuaciones de onda de difusión y la Tierra se comporta como un buen conductor. Por lo tanto las ecuaciones de difusión en su versión 1D pueden ser escritas como:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - j\mu\sigma\omega E_y = 0 \quad (\text{A.68})$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -j\mu\sigma\omega H_z = 0 \quad (\text{A.69})$$

Donde el número de onda viene dado por [13-]:

$$k^2 = -j\mu\sigma\omega \quad (\text{A.70})$$

$$k = (-j\mu\sigma\omega)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.71})$$

$$k = \alpha - j\beta \quad (\text{A.72})$$

$$\alpha = \beta = \left(\frac{\mu\sigma\omega}{2}\right)^{1/2} \quad (\text{A.73})$$

De esta forma la onda E_y (o H_z) se desplaza en la Tierra con una velocidad de propagación V_p [13-]:

$$V_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (\text{A.74})$$

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores $\mu = \mu_0$, entonces, para una frecuencia dada la velocidad de propagación de la onda sólo depende de la conductividad del medio

$$V_p = 2 \sqrt{\frac{\pi f}{\mu_0 \sigma}} \quad (\text{A.75})$$

A.2.2 Acústica

A partir de la ecuación de movimiento para una onda plana y del modelo de maxwell se obtiene la ecuación de onda para el *stress* (A.64):

$$\frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} = \rho c^{-1} \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial t^2} + \rho \tau \frac{\partial T_{yy}}{\partial t}$$

En el dominio de la frecuencia se tiene que (A.64) corresponde a:

$$\frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} + (\rho c^{-1} \omega^2 - j\rho\tau\omega) T_{yy} = 0 \quad (\text{A.76})$$

El número de onda viene dado por:

$$k^2 = \rho c^{-1} \omega^2 - j\rho\tau\omega \quad (\text{A.77})$$

En (A.76) si $\rho c^{-1} \omega^2 \ll \rho\tau\omega$ para materiales de la Tierra en frecuencias menores que 10^2 Hz; se observa que el comportamiento elástico es menor que el comportamiento viscoso, entonces la dependencia de la constante de elasticidad desaparece. En este sentido, en muy bajas frecuencias el comportamiento del campo de onda es controlado por la fricción viscosa (laminar) del fluido contra el sólido [8]. Este comportamiento se estudia en detalle por Biot en su trabajo acerca de la teoría de la propagación de ondas elásticas en medios porosos saturados.

Por lo tanto, para bajas frecuencias, la ecuación de movimiento en su versión 1D pueden ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} - j\rho\tau\omega T_{yy} = 0 \quad (\text{A.78})$$

El número de onda viene dado por:

$$k^2 = -j\rho\tau\omega \quad (\text{A.79})$$

$$k = (-j\rho\tau\omega)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.80})$$

$$k = \alpha - j\beta \quad (\text{A.81})$$

$$\alpha = \beta = \left(\frac{\rho\tau\omega}{2}\right)^{1/2} \quad (\text{A.82})$$

De esta forma, la onda T_{yy} se desplaza en la Tierra con una velocidad de propagación V_p

$$V_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\rho\tau}} \quad (\text{A.83})$$

Por tanto, para una frecuencia dada, en un medio homogéneo donde la densidad ρ es constante, la velocidad de propagación de la onda depende de la viscosidad del fluido que satura al medio; y teniendo en cuenta que $\tau = \eta^{-1}$, se tiene:

$$V_p = \sqrt{\frac{2\omega \cdot \eta}{\rho}} \quad (\text{A.84})$$

De hecho, Nur y Wang en 1988 publicaron en su trabajo: "Efectos de la Saturación y Propiedades de los Fluidos de Poro"; que la velocidad decrece resultado del incremento de toda la densidad del medio [8.]. Sin embargo, algunas veces estos efectos son compensados por otros efectos relacionados con la porosidad y la estructura del poro, fenómenos interfaciales en la superficie entre la roca y el fluido de poro, y el comportamiento de relajación viscoso de los fluidos de poro. Adicionalmente, ellos encontraron que a mayor viscosidad del fluido mayor era la velocidad de la onda compresional [8.]. Por otra parte, en bajas frecuencias, el acople entre el fluido del poro y la matriz es perfecto y la ecuación planteada en la teoría de Biot para una frecuencia infinita es la fórmula de Gassmann; de tal forma que la teoría de Gassmann es un caso especial de la teoría de Biot [8.].

A.3 Establecimiento de la analogía entre las propiedades de la roca para aplicaciones en geofísica

Se encuentra que la velocidad de propagación de un campo electromagnético en bajas frecuencias cuando se transmite en un medio homogéneo, isotrópico y conductor es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la conductividad eléctrica de dicho medio o proporcional a la raíz cuadrada de la resistividad (R) del medio, por tanto:

$$V_p \propto \sqrt{\frac{1}{\sigma}} \text{ o } V_p \propto \sqrt{R} \quad (\text{A.85})$$

Igualmente, la velocidad de propagación de un pulso sónico en un medio homogéneo, isotrópico y viscoelástico es directamente proporcional a la raíz cuadrada del coeficiente de viscosidad del medio poroso saturado (η):

$$V_p \propto \sqrt{\eta} \quad (\text{A.86})$$

Por tanto, al comparar las velocidades de propagación de las ondas acústicas y electromagnéticas, se establece una analogía entre la conductividad eléctrica (σ) y el coeficiente de viscosidad (η). Por tanto se concluye que en bajas frecuencias el medio presenta una disipación, la cual se debe a la presencia de los fluidos almacenados en los poros de la roca.

Por otro lado en bajas frecuencias el medio se comporta como conductor eléctrico, y la energía se disipa rápidamente en forma de calor. La conducción del medio se debe también a la presencia de fluidos que se almacenan en los poros de la roca. Por tanto queda demostrada una estrecha relación entre la velocidad de onda compresional y la conductividad eléctrica, gracias a la presencia de fluidos almacenados en los poros de la roca. De tal manera que, la porosidad es la propiedad que permite establecer relaciones entre la velocidad de onda compresional y la conductividad eléctrica.

ANEXO B. FUNCIONAMIENTO DEL ALGORITMO

Inicialmente, los datos de los registros de pozo se introducen a MATLAB a través de un archivo de EXCEL. Esta matriz de datos está conformada por 4 columnas. La primera columna corresponde a la profundidad, la segunda columna a la conductividad eléctrica, la tercera columna a la velocidad de onda compresional y la cuarta a la porosidad calculada.

Adicionalmente se introduce un vector de porosidad con el cual se puede evaluar las ecuaciones constitutivas. Otros datos ingresados por el usuario corresponden a especificaciones de la formación y los fluidos presentes en ella. Estos datos corresponden a:

Ss: conductividad de sólido en mS/m:

Sf: conductividad de fluido en mS/m:

vs: velocidad en el sólido

vf: velocidad en el fluido

ks: módulo volumétrico para el sólido

kf: módulo volumétrico para el fluido

Us: módulo de corte para el sólido

ps: densidad del sólido en g/cm³

pf: densidad del fluido en g/cm³

```
clc
clear all
close all
disp('ALGORITMO PARA OPTIMIZAR EL VALOR DE LAS POROSIDADES')
disp(' ');
%Datos de los registros de pozo
datos=xlsread('datos.xls');
z=datos(:,1);
Cw=datos(:,2);
Vw=datos(:,3);
pw=datos(:,4);
p=[0.000001:0.001:1];
```

En esta primera etapa el usuario selecciona las ecuaciones constitutivas que sigan el comportamiento de las gráficas y se establece la relación cruzada con las ecuaciones seleccionadas

Por tanto, se grafican cada una de las ecuaciones constitutivas que definen tanto a la velocidad de onda compresional como a la conductividad eléctrica, luego se superponen los datos y se observan el comportamiento, lo que permite inferir cual gráfica, una para cada caso, es la más adecuada. Esta decisión se apoya en los contornos de HS ya que estos permiten establecer límites del comportamiento de las gráficas en medios saturados. Entonces, si las gráficas están dentro de éstos contornos, ésta se pueden emplear.

```
%*****PRIMERA ETAPA*****  
  
disp('PRIMERA ETAPA: Selección de las ecuaciones constitutivas');  
disp(' ');  
  
%*****CONDUCTIVIDAD*****  
disp('Ecuaciones constitutivas para la conductividad eléctrica');  
disp('Ingrese los siguientes datos: ');  
Ss=input('Valor de la conductividad de sólido en mS/m: ');  
Sf=input('Valor de la conductividad de fluido en mS/m: ');  
disp('Gráficas de los datos de campo de las conductividades ');  
datos_con  
pause  
disp('Gráficas de las Ecuaciones de las conductividades');  
Conductividades  
pause  
disp('Gráficas de las Ecuaciones de las conductividades y los datos de  
campo');  
ecu_y_dat_con  
pause  
num_gra_con=input('La ecuación que sigue la tendencia de los datos es la  
gráfica No: ');  
cond_mejor=Vcon(:,num_gra_con);
```

```

%*****VELOCIDADES*****
disp("");
disp('Ecuaciones constitutivas para la velocidad de onda compresional');
disp('Ingrese los siguientes datos: ');
vs=input('Valor de la velocidad en el sólido en Km/s: ');
vf=input('Valor de la velocidad en el fluido en Km/s: ');
Ks=input('Valor del módulo volumétrico para el sólido: ');
Kf=input('Valor del módulo volumétrico para el fluido: ');
Us=input('Valor del módulo de corte para el sólido: ');
ps=input('Valor de la densidad del sólido en g/cm3: ');
pf=input('Valor de la densidad del fluido en g/cm3: ');
disp('Gráficas de los datos de campo de las velocidades ');
datos_vel
pause
disp('Gráficas de las Ecuaciones de las velocidades');
Velocidades
pause
disp('Gráficas de las Ecuaciones de las velocidades y los datos de campo');
ecu_y_dat_vel
pause
num_gra_vel=input('La ecuación que sigue la tendencia de los datos es la
gráfica No: ');
vel_mejor=Vvel(:,num_gra_vel);
disp("");
%*****Relaciones de Propiedades cruzadas*****
disp('La relacion de propiedad cruzada correspondiente a las')
disp('ecuaciones constitutivas seleccionadas se observa en la siguiente
gráfica: ')
Iporo
pause
Cross

```

A partir de las ecuaciones seleccionadas, se ejecuta el algoritmo de optimización de la porosidad. Este se ejecuta en dos versiones, una para cada propiedad, como se muestra a continuación.

Como se menciona en el capítulo 3, este algoritmo se realiza en dos etapas. La primera etapa corresponde a un paso de pre-acondicionamiento, en el cual se establece una linealización de la función objetivo en una suposición inicial. Esta suposición inicial corresponde al valor de porosidad de los datos de campo. Luego se ejecuta el algoritmo del gradiente conjugado el cual permite encontrar los valores de la porosidad que minimizan la función objetivo

```

%*****Algoritmo de Optimización*****
%A partir de las ecuaciones seleccionadas se ejecuta la inversión general
%linealizada, para encontrar los mejores valores de porosidad.
%*****VELOCIDADES*****
%PROGRAMA PARA OBTENER LAS POROSIDADES QUE MINIMIZEN LA
FUNCIÓN J
%Datos y constantes de entrada
%Inicio.
[Pgs,er1,dvg,vg]=GSv(Pw,Vw,Kf,Ks,Us,pf,ps);%Sol de Gauss-Seidel
[Pvn,dPv]=GC_I(dvg,Pgs,er1);%Primera Sol de Gradiente Conjugado
%Almacenamiento de variables.
NPv(:,1)=Pvn;
Vgass(:,1)=VG(Kf,Ks,Us,pf,ps,Pvn);
Erv(:,1)=ER(Vw,Vgass(:,1));
mer(1)=ERMS(Erv(:,1));
%Siguietes actualizaciones de la porosidad
k=1;
for i=2:40
    n=i-1;
    [Pvn,dPv]=GC_II(Kf,Ks,Us,pf,ps,Vw,Pvn,dPv);
    NPv(:,i)=Pvn;
    Vgass(:,i)=VG(Kf,Ks,Us,pf,ps,Pvn);
    Erv(:,i)=ER(Vw,Vgass(:,i));
    [mer(i),f(i)]=MenorER(Erv);
    if f(i)==f(n)

```

```

    k=k+1;
else k=1;
end
if k==5 %el error mínimo se ha repetido al menos 5 veces
    l=i-4;
    emin=mer(l);
    Pvmin=NPv(:,l);
    Vgmin=Vgass(:,l);
    break
end
end
disp(' ');
disp(['El mínimo error es: ', num2str(emin)]);
disp(' ')
disp(['y ocurre en la iteración: ', num2str(l)]);
disp(' ')
disp(['La porosidad obtenida a partir de V es: ']);
disp(Pvmin);
disp(['La velocidad de Gassmann es: ']);
disp(Vgmin);
dfi=0.0001;

```

```

%*****CONDUCTIVIDADES*****
%Inicio.
dfi=0.0001;
[Pcgs,er2,dc,Cc]=GSc(Pw,Cw,sigmaS,sigmaF);%Sol de Gauss-Seidel
[Pcn,dPc]=GCc_l(dc,Pcgs,er2);%Primera Sol de Gradiente Conjugado
%Almacenamiento de variables.
NPc(:,1)=Pcn;
Ccrim(:,1)=C(sigmaS,sigmaF,Pcn);
Erc(:,1)=ER(Cw,Ccrim(:,1));

```

```

mer(1)=ERMS(Erc(:,1));
%Siguietes actualizaciones de la porosidad
for i=2:30
    n=i-1;
    [Pcn,dPc]=GCC_II(sigmaS,sigmaF,Cw,Pcn,dPc);
    NPc(:,i)=Pcn;
    Ccrim(:,i)=C(sigmaS,sigmaF,Pcn);
    Erc(:,i)=ER(Cw,Ccrim(:,i));
    [mer(i),f(i)]=MenorER(Erc);
    if f(i)==f(n)
        k=k+1;
    else k=1;
    end
    if k==10 %el error minimo se ha repetido al menos 5 veces
        emin=mer(i);
        Pmin=Pcn;
        l=i-4;
        break
    end
end
Ccmin=C(sigmaS,sigmaF,Pmin);
disp(' ');
disp(['El mínimo error es: ', num2str(emin)]);
disp(' ')
disp(['y ocurre en la iteración: ', num2str(l)]);
disp(' ')
disp(['La porosidad obtenida a partir de V es: ']);
disp(Pmin);

```

Finalmente, se grafican de nuevo las ecuaciones constitutivas al evaluarlas con los nuevos valores de porosidad, los datos de campo, los datos de la porosidad provenientes de los corazones y se evalúan los diferentes valores

porosidad con el error promedio cuadrático para encontrar el mejor valor de porosidad optimizado.