

Procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de  
cuarto grado

Jose Alirio Araque Rodríguez

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciado en Matemáticas

Director

Alexander Betancur Sánchez

Magister en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2023

### **Dedicatoria**

*A Dios, mi guía constante y apoyo incansable durante todo este emocionante trayecto. Su presencia me ha brindado la fuerza necesaria para sortear obstáculos y superar desafíos.*

*A mis padres, Esperanza Rodríguez y Alirio Araque, cuyo apoyo incondicional y visión inspiradora han sido cimiento sobre el cual construí mis sueños. Espero estén orgullosos de mí.*

*A mis amigos, Cristian Ariza y Yazmin Jaimes, quienes han sido compañeros fieles desde el inicio de esta travesía académica. Tiene toda mi gratitud y cariño.*

*A María José Barrera, quien ha sido un apoyo incondicional desde que llegó a mi vida.*

*Tu amor y aliento han sido el motor que me impulsó a alcanzar cada meta.*

*A todos mis amigos y profesores que me acompañaron durante mi carrera, tiene mi gratitud por guiarme a descubrir un mundo nuevo de conocimiento.*

### **Agradecimientos**

*Al profesor Alexander Betancur, mi gratitud por su orientación valiosa y constante. Su experiencia y dirección han sido fundamentales para la realización de este proyecto.*

*A mis evaluadores, Luis Ángel Pérez y Wilson Olaya, por sus valiosas aportaciones y sugerencias que han enriquecido este documento.*

*A la Institución Educativa Liceo Patria, mi reconocimiento por permitirme formar parte de su comunidad educativa y contribuir a mi crecimiento profesional y personal.*

*A los estudiantes del grado que participaron de esta investigación, mi corazón rebosa de gratitud y amor al dirigirme a cada uno de ustedes.*

*Por último, deseo expresar mi gratitud a todas esas personas que, en diversos niveles de implicación, han contribuido a la realización de este trabajo. Cada contribución, por pequeña que parezca, ha sido un pilar en la construcción de este logro.*

*A cada uno de ustedes, ¡mis más sinceras gracias!*

**Tabla de contenido**

Introducción.....12

1 Planteamiento y Formulación del Problema.....13

2 Antecedentes .....16

2.1 El Álgebra Temprana.....16

2.2 Patrones .....17

2.3 Aritmética Generalizada .....21

2.4 Modelación .....23

3 Justificación .....26

4 Objetivos de la Investigación.....28

4.1 Objetivo General .....28

4.2 Objetivos Específicos .....28

5 Marco Teórico: Teoría de la Objetivación.....28

5.1 Consideraciones Generales .....28

5.2 Procesos de Objetivación y Subjetivación.....30

5.3 La Actividad y la Labor Conjunta.....31

5.4 Componentes y formas de Pensamiento Algebraico Temprano .....33

6 Diseño Metodológico .....35

6.1 Participantes .....35

6.2 Proceso Metodológico .....35

6.2.1 Selección y rediseño de tareas.....36

6.2.2 Implementación de las tareas en el aula.....38

6.2.3 Recolección y selección de datos .....	39
6.2.4 Interpretación y análisis teórico de los datos .....	40
7 Análisis a Priori sobre las Tareas y Consideraciones para la Implementación .....	40
7.1 Tarea 1 (Estrategia de conteo).....	40
7.1.1 Descripción de la tarea 1 .....	41
7.1.2 Análisis de la tarea 1 .....	42
7.2 Tarea 2 (Propiedad de descomposición aditiva) .....	42
7.2.1 Descripción de la tarea 2.....	43
7.2.2 Análisis de la tarea 2.....	44
7.3 Tarea 3 (Secuencias figurales con apoyo tabular).....	44
7.3.1 Descripción de la tarea 3.....	45
7.3.2 Análisis de la tarea 3.....	46
7.4 Tarea 4 (Equivalencia aritmética, generalización y modelado) .....	47
7.4.1 Descripción de la tarea 4.....	48
7.4.2 Análisis de la tarea 4.....	49
7.5 Tarea 5 (Modelación y generalización de patrones).....	50
7.5.1 Descripción de la tarea 5.....	51
7.5.2 Análisis de la tarea 5.....	52
8 Análisis Multimodal .....	53
8.1 Tarea 1 (Estrategias de conteo).....	55
8.2 Tarea 2 (Propiedad de descomposición aditiva) .....	60
8.3 Tarea 3 (Secuencias figurales con apoyo tabular).....	69
8.4 Tarea 4 (Equivalencia aritmética, generalización y modelado).....	86

8.5 Tarea 5 (Modelación y Generalización de patrones).....	100
9 Resultados de la Investigación y Reflexiones.....	109
Referencias Bibliográficas.....	116
Anexos.....	120

### Lista de Figuras

Figura 1 <i>Secuencia figural apoyada por representación tabular</i> .....	18
Figura 2 <i>Dibujo de Carlos de los términos 5 y 6 junto a fórmulas correspondientes</i> .....	18
Figura 3 <i>Movilización del gesto inscripción de un grupo de estudiantes encerrando tres círculos en la figura 1</i> .....	19
Figura 4 <i>Acción de tachar como medio semiótico movilizado</i> .....	20
Figura 5 <i>Modelo propuesto por Krysta y Albert</i> .....	24
Figura 6 <i>Situación de modelado</i> .....	25
Figura 7 <i>El conocimiento como parte de un mismo proceso que ocurre en la labor conjunta</i> .....	29
Figura 8 <i>Fases de la labor conjunta</i> .....	32
Figura 9 <i>Estructura metodológica multimodal</i> .....	36
Figura 10 <i>Hoja de trabajo Tarea 1 y figuras mostradas en el Nivel 2</i> .....	41
Figura 11 <i>Hoja de trabajo de la Tarea 2</i> .....	43
Figura 12 <i>Primera parte de la hoja de trabajo de la Tarea 3</i> .....	45
Figura 13 <i>Segunda parte de la hoja de trabajo de la Tarea 3</i> .....	46
Figura 14 <i>Primera parte de la hoja de trabajo de la Tarea 4</i> .....	48
Figura 15 <i>Segunda parte de la hoja de trabajo de la Tarea 4</i> .....	49
Figura 16 <i>Primera parte de la hoja de trabajo de la Tarea 5</i> .....	51
Figura 17 <i>Segunda parte de la hoja de trabajo de la Tarea 5</i> .....	52
Figura 18 <i>Producción del primer punto de la tarea 1 con Thomas</i> .....	59
Figura 19 <i>Producción del segundo punto de la tarea 2 con Matías</i> .....	67
Figura 20 <i>Primera secuencia figural apoyada por representación tabular en la tarea 3</i> .....	69

Figura 21 <i>Producción del segundo punto de la tarea 3 con Matías</i> .....	72
Figura 22 <i>Producción del segundo punto de la tarea 3 con Mariana</i> .....	73
Figura 23 <i>Producción de Danny Tarea 3 punto 4 con la primera secuencia.</i> .....	75
Figura 24 <i>Producción de Alejandra Tarea 3 punto 4 con la primera secuencia</i> .....	76
Figura 25 <i>Segunda secuencia figural apoyada por representación tabular en la Tarea 3</i> .....	77
Figura 26 <i>Producción de Mariana Tarea 3 punto 2 con la segunda secuencia</i> .....	80
Figura 27 <i>Producción de Isabella Tarea 3 punto 2 con la segunda secuencia.</i> .....	81
Figura 28 <i>Producción de Sara Tarea 3 punto 3 con la segunda secuencia</i> .....	81
Figura 29 <i>Producción de Danny Tarea 3 punto 3 con la segunda secuencia</i> .....	82
Figura 30 <i>Tercera secuencia figural apoyada por representación tabular en la Tarea 3</i> .....	82
Figura 31 <i>Producción de Danny Tarea 3 punto 2 con la tercera secuencia</i> .....	83
Figura 32 <i>Producción de Alejandro Tarea 3 punto 2 con la tercera secuencia</i> .....	83
Figura 33 <i>Producción de Danny Tarea 3 punto 3 con la tercera secuencia</i> .....	86
Figura 34 <i>Producción de Matías en el tercer punto de la tarea 4</i> .....	89
Figura 35 <i>Producción de Matías en el cuarto punto de la tarea 4</i> .....	90
Figura 36 <i>Producción de Danny Tarea 4 punto 4</i> .....	93
Figura 37 <i>Producción de Danny Tarea 4 punto 5 y 6</i> .....	94
Figura 38 <i>Producción de Matías Tarea 4 punto 5 y 6</i> .....	96
Figura 39 <i>Diseño de portavasos para la expresión <math>n+(n-1)+(n-1)+(n-2)</math></i> .....	100
Figura 40 <i>Elaboración de la secuencia con material concreto por un grupo de estudiantes</i> .....	101
Figura 41 <i>Secuencia numérica extendida por Matías</i> .....	106
Figura 42 <i>Secuencia numérica extendida por Juan Diego</i> .....	106
Figura 43 <i>Quinto punto de la tarea 5 producto del diálogo grupal entre estudiantes</i> .....	109

**Lista de Tablas**

Tabla 1 <i>Lista de documentos seleccionados para la propuesta de trabajo</i> .....	37
Tabla 2 <i>Clasificación de tareas con relación a la forma de pensamiento algebraico</i> .....	38
Tabla 3 <i>Producciones de Danny a lo largo de las distintas tareas</i> .....	97

## Resumen

**Título:** Procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de cuarto grado\*

**Autor:** Jose Alirio Araque Rodríguez\*\*

**Palabras Clave:** Álgebra temprana, Generalización, Pensamiento algebraico, Teoría de la Objetivación.

### Descripción:

Este estudio tiene como objetivo describir los procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano que emergen en los estudiantes de cuarto grado de educación primaria al experimentar situaciones relacionadas con generalización de patrones, aritmética generalizada y modelación. En particular, esta investigación pretende brindar perspectivas al realizar un análisis sobre el papel de los medios semióticos de objetivación en el proceso de alcanzar una comprensión estable de cómo abordar algebraicamente las tareas propuestas. Así mismo, identificar aportes para el trabajo en el aula de educación matemática en relación con la propuesta curricular del early-algebra.

Todo esto bajo la perspectiva de la Teoría Cultural de la Objetivación y la metodología multisemiótica propuesta por Radford (2015) la cual ha dedicado su estudio a la interrelación de diversos recursos semióticos en la creación de significados. Los resultados de este estudio muestran evidencias de que la descripción adecuada de los modos de conceptualizar, conocer y pensar va más allá de las interacciones verbales puesto que es fundamental considerar otros recursos que los estudiantes movilizan al enfrentarse a situaciones matemáticas. Así mismo, que se necesita continuar realizando diseños de tareas que involucren la aritmética generalizada, patrones y modelación con el fin de implementar en el aula y analizar la manera en la que estas líneas se complementan y favorecen las formas de pensar y actuar de los estudiantes sobre las cantidades indeterminadas, al tiempo que se potencia el pensamiento algebraico.

---

\* Trabajo de Grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Alexander Betancur Sánchez. Magister en Educación Matemática.

### Abstract

**Title:** Objectification processes in the development of early algebraic thinking in fourth graders \*

**Author:** Jose Alirio Araque Rodríguez \*\*

**Key Words:** Early algebra, Generalization, Algebraic thinking, Objectification theory.

### Description:

This study aims to describe the processes of objectification in the development of early algebraic thinking that emerge in fourth grade elementary school students when experiencing situations related to pattern generalization, generalized arithmetic, and modeling. This research aims to provide insights into the role of semiotic means of objectification in the process of reaching a stable understanding of how to approach proposed tasks algebraically. Likewise, to identify contributions for the work in the mathematics education classroom in relation to the early-algebra curricular proposal.

All this under the perspective of the Cultural Theory of Objectification and Radford's multi-semiotic methodology, as key elements given his dedicated study of the interrelation of diverse semiotic resources in the creation of meanings. The results of this study show that the adequate description of the ways of conceptualizing, knowing, and thinking goes beyond verbal interactions since it is fundamental to consider other resources that students mobilize when facing mathematical situations. These resources allow them to develop an awareness of the algebraic ways of thinking related to the three types of situations explored in this research.

---

\* Degree Work

\*\* Faculty of Sciences. School of Mathematics. Bachelor of Mathematics. Director: Alexander Betancur Sánchez. Magister in Mathematical Education.

### **Introducción**

El presente trabajo está inscrito en la línea de investigación de Didáctica de la Matemática, en particular, pensamiento algebraico temprano del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Este estudio indaga algunos de los requerimientos y oportunidades que implica el desarrollo e implementación de una secuencia de tareas que involucra patrones, aritmética generalizada y modelación, centrado en la propuesta curricular del Early-Álgebra en el grado cuarto de educación Básica Primaria.

Desde una perspectiva general, el desarrollo de ideas algebraicas enfocadas al estudio de la generalidad, el razonamiento y la comprensión de fenómenos de variación entre los niveles educativos básicos, es un tema de creciente interés tanto en las propuestas curriculares como en la investigación en Educación Matemática (NCTM, 2000; MEN, 2006; Radford, 2012; Cai y Knuth, 2011; Vergel, 2015a). En relación con lo anterior, esta investigación centra la mirada en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano y toma como base lo expuesto por Vergel (2015a) quién expresa que el proceso de generalización ha sido muy eficaz en la introducción de los primeros conceptos algebraicos, dado que permite a los alumnos mostrar nociones de pensamiento algebraico, sin embargo, es vital continuar explorando los procesos de la estructuración del pensamiento algebraico temprano.

Radford (2014) considera que el pensamiento algebraico no puede limitarse a la mera notación de símbolos o expresiones alfanuméricas. Los procesos movilizados por los estudiantes pueden abarcar respuestas corporales, lingüísticas y simbólicas. En este sentido, resulta fundamental un estudio de carácter cualitativo que evidencie las formas de pensamiento que surgen en las producciones de tareas diseñadas en relación con las líneas consideradas para el desarrollo del pensamiento algebraico: aritmética generalizada, patrones y modelación.

La presente propuesta de investigación está organizada en 9 capítulos: en el primero se presenta el planteamiento del problema donde se determina y orienta la necesidad de desarrollar la inclusión del álgebra temprana en grados elementales. En el capítulo dos, se dan a conocer los antecedentes, donde se exponen investigaciones relacionadas con el álgebra temprana y su introducción mediante escenarios que consideran patrones, aritmética generalizada y modelación. En el tercer capítulo corresponde a la justificación, en este se muestra la necesidad e importancia de diseñar una secuencia de tareas que contribuya al pensamiento algebraico a temprana edad en las líneas del pensamiento algebraico: aritmética generalizada, patrones y modelación. En el cuarto capítulo, se plantean los objetivos generales y específicos de la presente investigación.

En el quinto capítulo, se aborda el marco teórico, donde se precisan algunas características generales de la teoría cultural de la objetivación, la cual fundamenta el estudio y permite realizar el diseño de la secuencia de tareas matemáticas. En el capítulo 6 se presenta el diseño metodológico, donde se definen las características de los participantes y el proceso metodológico orientado por la metodología multisemiótica de Radford. Por su parte, el capítulo 7 está destinado a la descripción de las tareas con su correspondiente análisis a priori. El análisis y evidencias de la investigación es descrito ampliamente en el capítulo 8 donde se organiza por tareas y siguiendo las consideraciones de Radford (2015) con relación al etiquetado, transcripción y sistematización. Finalmente, el capítulo 9 contiene las conclusiones y reflexiones del estudio, añadiendo las preguntas que quedan abiertas y las posibilidades para otros estudios.

## **1 Planteamiento y Formulación del Problema**

Durante hace algunas décadas, se considera que la transición desde los conocimientos aritméticos a los algebraicos son un paso importante para alcanzar los conceptos más complejos

dentro del razonamiento y las matemáticas escolarizadas. Ahora bien, la investigación ha demostrado que existen diferentes dificultades como el uso y significado de símbolos literales, la indeterminación y el cambio abrupto en las convenciones usadas en el contexto aritmético, que encuentran los niños y jóvenes en la asimilación de esta transición, lo que finalmente produce problemas en el razonamiento algebraico (Kieran, 2007; Radford, 2012; Vergel, 2013, 2015a, 2015b).

La investigación relacionada con el pensamiento algebraico temprano empezó a ser considerada como una categoría de investigación sobre la década de los 90. En relación con el pensamiento algebraico, por ejemplo, Blanton y Kaput (2004) se refieren a este como “un hábito mental que impregna todas las matemáticas y que involucra la capacidad de los estudiantes para construir, justificar y expresar conjeturas sobre estructuras y relaciones matemáticas” (pág. 142). Los estudios de investigación durante la década de los 2000 se enfocaron especialmente en: i). la generalización relacionada con la actividad de creación de patrones, ii). la generalización relacionada con las propiedades de las operaciones y la estructura numérica, iii). la representación de relaciones entre cantidades, y iv). la introducción de la notación alfanumérica (Kieran et al., 2016).

Algunos investigadores (Blanton y Kaput, 2005; Kaput, 2008; Chimoni et al., 2021) consideran que el razonamiento algebraico puede tomar varias formas que lo caracterizan, estas son: aritmética generalizada (el uso de la aritmética como un dominio para expresar y formalizar generalizaciones), pensamiento funcional (generalizar patrones numéricos para describir relaciones funcionales) y aplicación de lenguajes de modelado (introducción de regularidades y generalizaciones mediante situaciones de modelación). Sin embargo, autores como Blanton y Kaput (2005) expresan que la aritmética generalizada y el pensamiento funcional son las formas

más comunes que reportan los estudios para abordar el razonamiento algebraico en los grados elementales.

Las investigaciones sobre el álgebra temprana muestran propuestas de enseñanza y aprendizaje, así como las dificultades que enfrentan los estudiantes, sin embargo, tales contribuciones son desconocidas por un buen número de maestros, otros las consideran como inapropiadas o simplemente no son usadas para planificar y evaluar el trabajo en el aula de clase (Vergel y Rojas, 2018).

El National Council of Teachers of Mathematics (2000) (NCTM – por sus siglas en inglés) considera que desde los primeros grados de escolaridad (Primaria) los profesores pueden ayudar a los estudiantes a construir una sólida base de comprensión y experiencia, como preparación para un trabajo más complejo en álgebra en los niveles medios y en la escuela secundaria. Sin embargo, profesores de matemáticas no logran adoptar en sus escenarios de enseñanza un componente de naturaleza algebraica a fin de generar una adecuada aproximación en grados inferiores. Aspectos tales como encontrar relaciones, generalizaciones, nociones de indeterminación y variación se apartan de la educación primaria debido a la concepción del álgebra entendida como una matemática avanzada y abstracta (Vergel y Rojas, 2018).

Otro punto importante es la forma cómo los estudiantes responden a la inclusión del álgebra en el aula escolar, es decir, los alumnos comunican y argumentan en relación con los recursos y medios que tienen disponibles según las tareas propuesta (Radford, 2017). Por lo tanto, es necesario ser sensibles, reconocer y examinar la manera en la que los estudiantes tienen un encuentro con formas de pensamiento algebraico (Procesos de objetivación). Rojas y Vergel (2013) consideran que el énfasis debe dirigirse a la manera cómo los estudiantes describen un patrón o la forma en que analizan una función y lo explican con tablas o dibujos. En este orden de

ideas, se requiere dar otras prioridades más allá de la manipulación de símbolos, la memorización de reglas y la resolución de problemas rutinarios

De acuerdo con lo anterior, la presente propuesta pretende responder a la pregunta ¿Qué procesos de objetivación desarrollan estudiantes de cuarto grado de primaria cuando abordan tareas que involucran aritmética generalizada, patrones y modelación?

## **2 Antecedentes**

En este apartado se indican algunos de los trabajos e investigaciones que han realizado distintos autores en relación con la introducción del álgebra temprana en el aula de clase. Con el propósito de contextualizar el problema de interés, se presenta tres secciones con aspectos relacionados a la realización de tareas que consideran situaciones sobre aritmética generalizada, patrones y modelación en el nivel de escolaridad de básica primaria.

### **2.1 El Álgebra Temprana**

La consideración de la corriente del álgebra temprana o Early-Algebra es relativamente reciente y sugiere la incorporación del álgebra en grados elementales. Investigadores como Mason (1991) han encontrado que los estudiantes en los primeros grados de escolaridad poseen una capacidad natural de generalización y que potenciar esta capacidad daría como resultado un progreso en el desarrollo de pensamiento algebraico. Por otro lado, Molina (2009) muestra que estudiantes de básica primaria están en condición de articular un pensamiento algebraico temprano siempre y cuando se realicen adaptaciones al contenido curricular de su nivel de escolaridad. De manera semejante, Kaput & Blanton (2000) abogan por la inclusión del álgebra en todos los niveles de escolaridad, especialmente, en la educación elemental, donde se ha omitido en la mayoría de los casos.

Zapatera (2018) muestra evidencia que estudiantes desde los primeros grados de escolaridad en primaria poseen la habilidad de valorar las operaciones aritméticas como funciones, reflexionar sobre relaciones aritméticas elementales y realizar hipótesis sobre esto por medio de símbolos, utilizar letras para significar cantidades y hacer uso de esto para resolver problemas. De esta manera, la corriente del álgebra temprana ha promovido la elaboración de tareas que incluyan: “las relaciones entre cantidades, la identificación de estructuras, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción” (Kieran, 2004, p. 149).

En síntesis, el surgimiento de dicha corriente promueve la integración del álgebra en los primeros grados de escolaridad matemática, con el propósito de desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes desde edades tempranas y promover un acceso más comprensivo al lenguaje simbólico, el trabajo con lo indeterminado y en general al álgebra simbólica.

## **2.2 Patrones**

En relación con las investigaciones encaminadas a la introducción del álgebra temprana con el uso de patrones, se han reportado trabajos que enfatizan el uso de secuencias como estrategia para desarrollar el pensamiento algebraico.

Algunas de las investigaciones más relevantes en el uso de secuencias figurales han sido reportadas en Radford (2008; 2010a; 2011; 2012; 2018). En particular, Radford (2012) realiza un estudio longitudinal donde muestra evidencia sobre la manera en que la percepción y uso de los símbolos evolucionan en los estudiantes participantes mientras resuelven tareas de patrones.

**Figura 1**

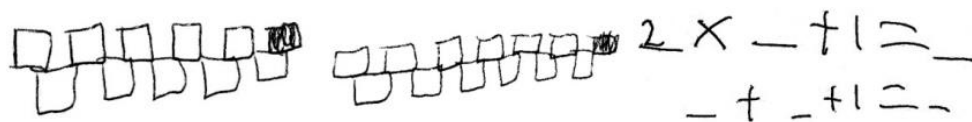
*Secuencia figural apoyada por representación tabular (Radford, 2012, p. 17).*



En la Figura 1 se muestra una secuencia figural en la que se presentan los primeros cuatro términos y se solicita a los estudiantes dibujar los siguientes dos términos de la secuencia. El contraste entre las formas de pensar y caracterizar los términos más grandes de la secuencia en las producciones de Carlos (caso de estudio) en los grados segundo y cuarto fue que: en segundo grado recurrió a términos particulares (1.000) para responder cómo determinar las cantidad de cuadrados de una figura cualquiera de la secuencia, mientras que en grado cuarto trata la indeterminación como “el número de la figura” e incluso plantea unas expresiones simbólicas para determinarlo (ver Figura 2). En relación con lo anterior, se puede identificar que conectar o sincronizar el número de la figura con una regla que permita averiguar cuántos elementos componen la correspondiente figura no es inmediato en los estudiantes.

**Figura 2**

*Dibujo de Carlos de los términos 5 y 6 junto a fórmulas correspondientes (Radford, 2012, p. 129).*

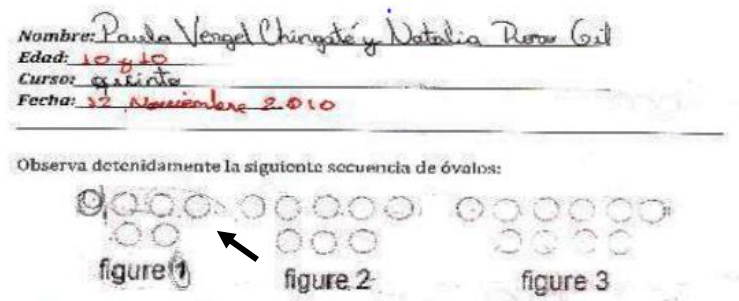


Por otro lado, Vergel (2014) presenta un estudio sobre las formas de pensamiento algebraico temprano que surgen en estudiantes de cuarto y quinto grado, donde se hace énfasis en la generalización de patrones en cuatro tipos (secuencias figurales apoyadas por representación

tabular, numéricas apoyadas por representación tabular, puramente numérica y figural). Un análisis preliminar realizado en este trabajo señala que existen algunas conexiones entre la sintaxis de las “expresiones algebraicas” del estudiante y los medios semióticos de objetivación movilizados.

**Figura 3**

*Movilización del gesto inscripción de un grupo de estudiantes encerrando tres círculos en la figura 1 (Vergel, 2014, p. 89).*



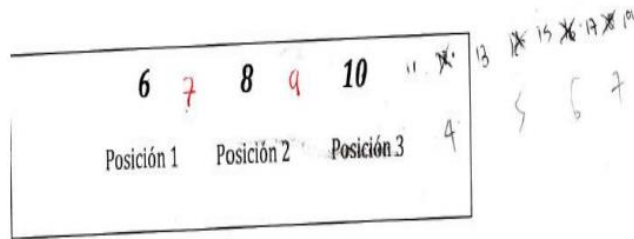
En la Figura 3 se muestra una secuencia figural con apoyo tabular, donde se pide al grupo de estudiantes determinar la cantidad de óvalos correspondientes a figuras posteriores, teniendo en cuenta las 3 primeras figuras que se muestran en la imagen. Esta tarea permite evidenciar la movilización de un medio semiótico, puesto que una acción del estudiante fue realizar el encerramiento de 3 círculos en la figura 1 de la secuencia, como un apoyo para dar resolución a los ejercicios planteados. Por otro lado, en la Figura 4 se muestra una secuencia numérica con apoyo tabular, donde el medio semiótico utilizado por el estudiante ha cambiado debido a la naturaleza del patrón presentado.

Los alumnos pueden establecer una relación entre la posición y el número que ocupa (ver Figura 4) tachando físicamente los números que no corresponden a la secuencia. Como resultado

se encuentra que la forma en como los estudiantes perciben una secuencia es el factor que determina la sintaxis algebraica.

**Figura 4**

*Acción de tachar como medio semiótico movilizado (Vergel, 2014, p. 90)*



Por otra parte, Dreyfus (como se citó en Zapatera, 2018) plantea que el método de generalización de patrones consta de tres acciones: reconocer una propiedad común entre los términos observados, generalizar dicha propiedad a todos los términos de la secuencia y finalmente, aplicar esta propiedad con el objetivo de desarrollar una regla general que permita ubicar la cantidad de objetos en cualquier término de la secuencia.

Zapatera y Callejo (2011) han clasificado las estrategias de resolución de problemas de generalización de patrones en tres categorías: La primera categoría se relaciona con las estrategias aditivas, donde empezando por la primera o cualquier posición, el alumno observa el patrón de crecimiento y cuenta dibujando la figura o sumando al patrón de crecimiento hasta el término requerido. La segunda categoría se relaciona con las estrategias funcionales, en las que el alumno propone una función para relacionar la posición de la figura con el número de elementos de la figura mediante el análisis del patrón de crecimiento y la cantidad que se mantiene constante. La tercera categoría hace referencia a las estrategias proporcionales, donde el estudiante por medio de funciones lineales de la forma  $f(n) = a \cdot n$ , halla el número de elementos de cada posición.

Zapatera (2018) indica que los mejores estudiantes comienzan con técnicas aditivas antes de pasar a estrategias funcionales, por otro lado, el esfuerzo cognitivo de los alumnos es mayor cuando se invierte el proceso (Determinar la posición dentro de la secuencia dada una cantidad de objetos específicos).

A nivel nacional, en lugar de hablar de pensamiento algebraico, este se denomina pensamiento variacional de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006), no obstante, se han realizado estudios en relación con el desarrollo del pensamiento algebraico. En Moreno (2015) el autor presenta resultados de una aproximación al pensamiento algebraico en un grado tercero de la Educación Básica Primaria Colombiana involucrando el trabajo con patrones, donde se muestran pruebas de que los alumnos descubren los términos iniciales de la secuencia numérica y los expresan utilizando el lenguaje natural o procedimientos aritméticos. Adicionalmente, se observó que los estudiantes emplean diversas técnicas, como el recuento y las representaciones visuales.

### **2.3 Aritmética Generalizada**

El álgebra suele introducirse en la escuela utilizando la generalización de la aritmética, la cual es considerada uno de los elementos esenciales de esta rama matemática. De acuerdo con Kaput (2017) la aritmética generalizada examina la estructura de los cálculos, en lugar de centrarse en los resultados. Luego, la experiencia de los estudiantes con tareas desde esta perspectiva debe orientar la actividad de encontrar en la estructura de las expresiones aritméticas relaciones entre las operaciones y permitir el descubrimiento de propiedades aritméticas en los cálculos y las transformaciones realizadas.

Blanton y Kaput (2005) han realizado una categorización con relación al razonamiento algebraico como aritmética generalizada donde se clasifica la capacidad del estudiante en relación

con el uso de la aritmética como dominio para expresar y formalizar generalizaciones. Esta categorización está comprendida en los siguientes cinco tipos:

**i). Exploración de las propiedades de las operaciones con números enteros:** Los casos de razonamiento algebraico en los que los alumnos observan distintas propiedades de los números enteros, así, por ejemplo, la descomposición de números enteros en posibles sumas y examinar su estructura.

**ii). Exploración de propiedades y relaciones de números enteros:** Aquí se observan generalidades como la resta de números negativos, la conmutatividad de la suma y la multiplicación o el principio distributivo de la multiplicación sobre la suma.

**iii). Explorar la igualdad como expresión de una relación entre cantidades:** Esta categoría comprende la capacidad del estudiante en comprender la noción de igualdad como una relación entre cantidades (Para observar esto se realizaron problemas para determinar el valor faltante como  $4 + 8 = \_ + 7$ ).

**iv). Tratamiento algebraico del número:** Esta categoría describe la habilidad de los alumnos por determinar la estructura de un resultado aritmético a partir de los números que componen la operación (La suma de número impares es par).

**v). Resolución de oraciones numéricas:** Esta categoría va más allá de resolver ecuaciones con una sola variable, busca evidenciar la comprensión del estudiante en problemas con conjuntos de ecuaciones, así como ecuaciones simples con incógnitas múltiples o repetidas, por ejemplo, observar que hallazgos consigue un estudiante al trabajar una oración como “*Si  $V + V = 4$ , entonces cuánto es  $V + V + 6$* ”

Entre otras investigaciones realizadas enfocadas a trabajar con elementos de la aritmética generalizada se encontraron trabajos relacionados con las operaciones aritméticas y la

equivalencia. Britt y Irwin (2011) muestran como por medio de estrategias como el reparto mental y la compensación en una operación aritmética (Por ejemplo,  $29 + 16 = 30 + 15 = 45$ ) se obtiene una rápida resolución a problemas numéricos y proporciona a los estudiantes de primaria oportunidades para pensar de manera general en números y operaciones.

#### **2.4 Modelación**

El siguiente punto trata sobre la modelación en situaciones de álgebra temprana, la distinción fundamental entre esta vía y las otras dos es que los alumnos parten de circunstancias o situaciones a matematizar y luego tratan de encontrar la regularidad inherente (Blanton y Kaput, 2005). Así, en la medida en que se describan regularidades suministradas a través de situaciones o fenómenos matemáticos, el uso de relaciones y funciones cuantitativas se puede considerar una modelación.

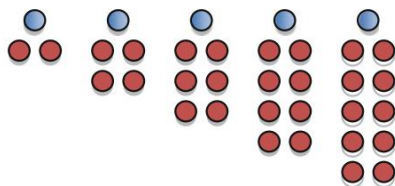
Las intervenciones instruccionales desde una perspectiva de modelado resaltan que la iniciación de la instrucción debe comenzar con el análisis de un problema. Brizuela y Schliemann (2004) desarrollaron lecciones sobre álgebra temprana para ayudar a los alumnos a comprender los conceptos de variable, función, gráfico y ecuación, donde, los alumnos que participaron en esta intervención fueron capaces de identificar las variables subyacentes y representar la relación entre ellas mediante una ecuación algebraica, mientras que otros utilizaron letras para representar las cantidades desconocidas.

Por otra parte, en Kieran et al., (2016) sintetizan algunos aspectos sobre la naturaleza, el aprendizaje y la enseñanza del álgebra temprana, entre estos se destaca el uso de situaciones de modelado para la inmersión del álgebra en la escuela primaria. A continuación, se presenta una situación propuesta para un curso de cuarto grado en una escuela canadiense: En su cumpleaños, Marc recibió una alcancía con un dólar. Él ahorra 2 dólares cada semana. Al final de la primera

semana tiene 3 dólares; al final de la segunda semana tiene 5 dólares, y así sucesivamente. A los estudiantes se les dieron fichas rojas y azules para modelar la situación de la primera a la quinta semana y se les pidió que calcularan cuántos dólares tendría Marc después de las semanas 10, 15 y 25. En la Figura 5 se presenta el modelo de Krysta y Albert; estudiantes de cuarto grado, para las primeras 5 semanas. Kieran et al., (2016) muestran que a partir del trabajo con las fichas los estudiantes continúan sus razonamientos para la semana 10 y 15. Progresivamente la atención de los estudiantes se centra en la dependencia del número de semanas y la cantidad de dólares que tiene Marc. Este episodio muestra la riqueza de la actividad movilizada en el aula y da posibilidad al estudiante a encontrarse con formas algebraicas.

**Figura 5**

*Modelo propuesto por Krysta y Albert (Kieran et al., 2016, p. 17)*



Aún más, investigaciones como la de Chimoni et al., (2021) analizan dos tipos de tareas para la enseñanza del álgebra temprana, unas denominadas investigaciones guiadas por la matemática pura y exploraciones abiertas aplicadas. Por ejemplo, una de las situaciones de modelado propuestas involucraba un contexto de construcción de armaduras de varillas de acero (Ver Figura 6). En dicha situación los estudiantes fueron expuestos a un patrón lineal, fue necesario notar el patrón, generalizar la regla del patrón y representar el término general. Y en este caso como el reportado en Kieran et al., (2016) los estudiantes contaban con material concreto, es decir, palillos de madera disponibles. En este orden de ideas, Kieran et al., (2016) muestran que las

corrientes del pensamiento funcional y aritmética generalizada, así como la modelación, comparten muchas de las mismas ideas, procedimientos y modos de razonamiento, pues, los procesos de generalizar, representar, y justificar interactúan continuamente.

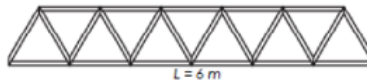
**Figura 6**

*Situación de modelado (Chimoni et al., 2021, p.536)*

Una fábrica hace armaduras de varillas de acero, como muestra la figura.



La longitud de cada armadura es igual al número de varillas en la base de la armadura.



Los resultados de las investigaciones referidas conceden una visión general del estado de los estudios realizados en el campo de pensamiento algebraico temprano y los medios que han sido utilizados para potenciar la enseñanza y el aprendizaje de concepto del álgebra escolar. Así mismo, aportan una serie de regularidades (como el uso de patrones) y elementos que aún no han sido muy implementados en el aula.

### 3 Justificación

La presente investigación se inscribe dentro de la corriente del Early-Álgebra, específicamente en el estudio de tareas que posibiliten el trabajo en conjunto entre patrones, la aritmética generalizada y la modelación según lo presentado en las secciones 2.2, 2.3 y 2.4 del presente documento.

Blanton & Kaput (2005) y Vergel (2013) señalaron que el contenido matemático del currículo de primaria permite la enseñanza de la simbolización, la generalización y el razonamiento algebraico, lo que significa que los alumnos de este ciclo educativo pueden desarrollar procesos algebraicos más complejos de lo que se podría creer en un principio, si los docentes posibilitan ambientes matemáticos donde se valore que los estudiantes exploren, modelicen, propongan explicaciones argumentadas y practiquen habilidades de cálculo.

Los estudios mencionados en el capítulo anterior (Radford, 2012; Vergel, 2014; Zapatera y Callejo, 2011; Moreno, 2015; Kaput, 2017; Kieran et al., 2016; Chimoni et al., 2021) respaldan la propuesta curricular del Early-Álgebra. Con relación a esto, NCTM (2000) indica que a pesar de no ser común escuchar el término del álgebra durante la etapa de la educación inicial, los alumnos necesitan comprender cómo se utilizan los símbolos para representar conceptos y ampliar su comprensión de diversas situaciones de generalización y cambio, así como los marcos y normas que regulan cómo deben realizarse estas actividades.

En el contexto colombiano, el pensamiento algebraico es interpretado desde el pensamiento variacional. Los Estándares Básicos de Competencia Matemática (MEN, 2006) manifiestan que el pensamiento variacional es una pieza clave en la resolución de problemas y la modelación de procesos de la vida diaria.

Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral (MEN, 2006, p. 66).

Así mismo, los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas mencionan que con el objetivo de desarrollar el pensamiento variacional desde los primeros niveles son adecuadas las actividades que brinden al estudiante la oportunidad de estudiar regularidades, hacer conjeturas sobre las mismas y explicarlas mediante un procedimiento o algoritmo, así mismo, el estudio del cambio por medio de la consideración de fenómenos de variación (MEN, 2006).

En el contexto local se han realizado estudios cuyo objetivo ha estado enfocado en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Martínez (2016) mediante el trabajo con tareas que implicaban generalización de patrones figurales y numéricos, muestra evidencia que el surgimiento de medios semióticos de objetivación y de los nodos semióticos en la actividad matemática dependen de la materialidad de la actividad. Así mismo, Delgado (2019) señala que, a través de los niveles de sofisticación y tareas vinculadas con la variedad, la generalización y el razonamiento desde un contexto de patrones, es posible evidenciar el desarrollo del pensamiento algebraico y alcanzar niveles más complejos del mismo.

A la luz de lo expuesto anteriormente, la presente investigación busca involucrar tareas considerando la aritmética generalizada, patrones y modelos. Así mismo, involucrar el contexto de los estudiantes y las orientaciones reportadas en la literatura. Finalmente, contribuir a la línea de investigación de Didáctica de la Matemática del grupo de investigación EDUMAT-UIS.

## **4 Objetivos de la Investigación**

### **4.1 Objetivo General**

Describir procesos de objetivación que desarrollan estudiantes de cuarto grado de primaria a partir de la implementación de situaciones y tareas que involucran la aritmética generalizada, patrones y modelación para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

### **4.2 Objetivos Específicos**

- Rediseñar y diseñar situaciones y tareas a partir de las reportadas en otras investigaciones.
- Rastrear los medios semióticos de objetivación que emergen en la actividad en el aula en tareas que involucren aritmética generalizada, patrones y modelación.
- Identificar los aportes para el trabajo en el aula obtenidos de la implementación y análisis para contribuir a la propuesta de cambio curricular que enfatiza el Early-Álgebra.

## **5 Marco Teórico: Teoría de la Objetivación**

En este capítulo se presenta el marco teórico que fundamenta la presente investigación. Se precisan algunos elementos y componentes relevantes dentro de la teoría cultural de la objetivación: consideraciones generales sobre la teoría, los procesos de objetivación y subjetivación y finalmente nos referimos a la actividad y la labor conjunta donde se describen los momentos en el aula de clase.

### **5.1 Consideraciones Generales**

La teoría de la objetivación (TO) es una teoría en educación matemática que se inspira de escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento la cual pretende plantear una alternativa procedimental donde la educación retoma una dimensión ética, histórica y cultural con el propósito de crear alumnos reflexivos que se posicionen de manera crítica en prácticas sociales

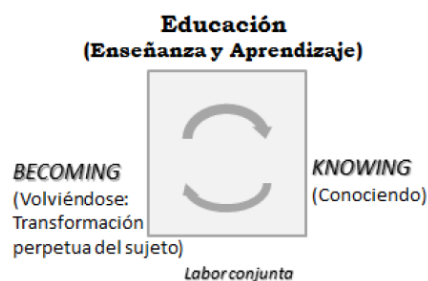
constituidas histórica y culturalmente (Radford, 2014). La TO a diferencia de otras teorías que se enfocan en lo epistemológico o psicológico se inscribe en un esfuerzo político, social, histórico y cultural dirigido a la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos. De manera que, la teoría se centra en transformar la actividad matemática, ir más allá de un escenario donde se adquiere o se transmite conocimiento. Pretende realizar un proceso más complejo construyendo relaciones profundas entre el ser y el saber, es decir, la atención no se centra únicamente en el contenido matemático (la dimensión del saber), sino también en el ser (la dimensión del sujeto) (Radford, 2020).

Al nacer cada ser humano se encontró con un sistema de maneras de pensar y concebir el mundo (pensamiento matemático, científico, etc.), el saber que está frente a nosotros se transforma y cambia de cultura en cultura. En este orden de ideas, el saber en la TO se define como un sistema de sistemas, “es decir, un sistema de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y reflexión, constituidos histórica y culturalmente” (Radford, 2020, p. 16). Así en la TO el aprendizaje no se puede concebir como algo que se transmita o se comercialice.

La Figura 7 busca capturar la esencia de esta relación dialéctica entre el ser y el saber dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

**Figura 7**

*El conocimiento y el volviéndose como parte de un mismo proceso que ocurre en la labor conjunta (Radford, 2014, p. 135)*



De acuerdo con la imagen anterior, se evidencian los términos de “Becoming” (Volviéndose) y “Knowing” (Conociendo). Estos darán lugar a procesos esenciales para la TO dentro del contexto del aula de clase: Objetivación y Subjetivación.

## 5.2 Procesos de Objetivación y Subjetivación

Según se ha referido en líneas precedentes, los procesos de Objetivación y Subjetivación corresponden a la esencia de la TO. La Objetivación trata de expresar la idea de que los sistemas de pensamiento cultural e históricamente constituidos nos objetan (es decir, se resisten, se oponen a nosotros). Tales sistemas emergen como algo que no somos nosotros, es decir, aparecen como como una forma de alteridad (Radford, 2020). De esta manera, la Objetivación es como un encuentro que no ocurre de repente, por eso en lugar de hablar de objetivación, preferimos hablar de *Procesos de Objetivación*.

Los *Procesos de Objetivación* (“knowing”) se definen como la “toma de conciencia en el curso de un proceso social, emocional y sensible; es un proceso mediatizado por la cultura material (signos, artefactos, lenguaje, etc.), los sentidos y el cuerpo (a través de gestos, acciones kinestésicas, etc.)” (Radford, 2014, p. 142).

Así mismo, los *Procesos de Subjetivación* (“Becoming”) se definen como los modos de interacción humana en el aula que modifican al sujeto como proyecto social a través de la participación en las prácticas sociales de su cultura. Definido explícitamente por Radford (2014) como “aquellos procesos mediante los cuales los sujetos toman posición en las prácticas culturales y se forman en tanto sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo” (p. 142). A partir, de estas consideraciones los profesores y alumnos llegan a hacer presencia a través de la actividad en el aula, donde llegan a posicionarse, es decir, profesores y estudiantes son vistos como proyectos de vida inacabados e inacabables, en continua

transformación, en busca de sí mismos, comprometidos juntos en el mismo esfuerzo en el que sufren, luchan, se afirman y encuentran juntos plena realización (Radford, 2020).

Por lo tanto, la enseñanza y aprendizaje –que comúnmente son considerados como dos procesos distintos- para la TO es una *labor conjunta*, aprender es una adquisición *comunitaria* de formas de reflexión del mundo guiada por modos epistémicos, culturales e históricamente formados. Se trata de dotar de *sentido* a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura; así la adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de *significados* (Radford, 2006)

### 5.3 La Actividad y la Labor Conjunta

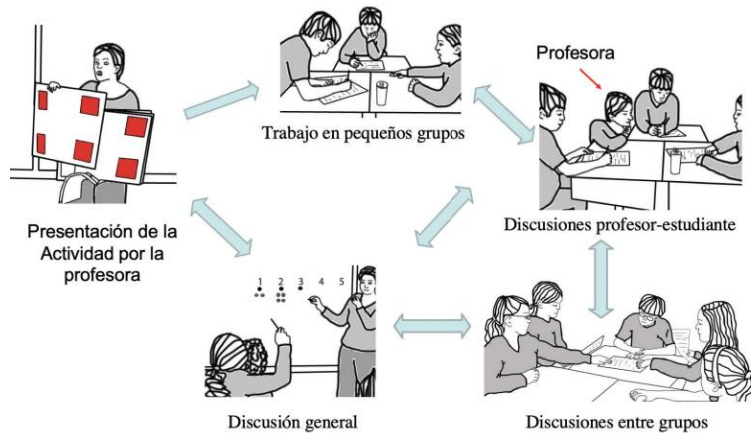
En la TO cobra gran importancia la *actividad*, pues es lo que hace posible el aprendizaje. Los procesos de Objetivación y Subjetivación tienen lugar en la actividad sensorial y práctica. En este sentido, la actividad no se refiere en la concepción entendida como una serie de acciones que realiza un individuo. La actividad se refiere a un sistema dinámico orientado a la satisfacción de las necesidades colectivas, es una forma social de esfuerzo conjunto a través de la cual los individuos producen sus medios de subsistencia mientras se producen a sí mismos como seres humanos (Radford, 2020). Más precisamente, la actividad se denomina *labor conjunta* (Radford, 2016), por lo que en la TO es la categoría principal. En términos de Radford (2014) “a través de la labor encontramos al otro y al mundo en sus dimensiones conceptuales y materiales. Es a través de la labor que encontramos los sistemas de ideas de la cultura: sistemas de ideas científicas, legales, artísticas, etc.” (p. 138). La finalidad de la *labor conjunta* se obtiene mediante las acciones realizadas por medios semióticos, los cuales corresponden al lenguaje, los gestos, las cosas, las herramientas y las señales que el sujeto emplea para alcanzar una forma estable de conciencia (Radford, 2003). En los medios semióticos, el gesto es crucial en los *procesos de Objetivación*,

sobre todo en los alumnos de básica primaria, cuyas creaciones pueden entenderse mejor a través de su actividad perceptiva ligada a su discurso (Radford, 2005).

La idea de la actividad en el aula como *labor conjunta* nos ofrece una alternativa para pensar en nuevas formas histórico-culturales no alienantes de enseñanza y aprendizaje. Radford (2020) considera dos ejes que organizan toda actividad en el aula: formas de producción de saberes y formas de colaboración humana. La primera involucra la manera en la que las ideas circulan en el aula o el espacio de enseñanza-aprendizaje y la segunda, con la naturaleza de la interacción humana. Por lo tanto, se han considerado unas fases de la *labor conjunta* que caracterizan y organizan las interacciones en el aula.

**Figura 8**

*Fases de la labor conjunta (Radford, 2020, p. 30)*



En la Figura 8 se ilustra las posibilidades de interacción en el aula y la manera en la que la producción de conocimientos y las formas de colaboración humana se conjugan. Cabe resaltar que la configuración no pretende simplemente destacar una pedagogía activa sino más bien reconocer las posibilidades donde emergen los procesos de objetivación y subjetivación.

Resulta necesario presentar cómo en este estudio se entiende la relación entre “*Tarea*” y “*Situación*”, se entiende por *tareas escolares* aquellas propuestas que solicitan el accionar del estudiante y que el profesor planifica en busca de un aprendizaje o como un instrumento para evaluación de este. Por otro lado, *las situaciones* hacen parte de ese mundo y/o contexto del estudiante en el cual las tareas se encuentran localizadas y son dotadas de significado (Rico y Moreno, 2016). Es decir, las tareas escolares se enmarcan y se desarrollan dentro de una situación y estas a su vez le brinda al estudiante la facilidad de dotar de significado los conceptos involucrados en las tareas, fomentando así un aprendizaje más práctico y significativo.

#### **5.4 Componentes y formas de Pensamiento Algebraico Temprano**

Por último, en base a la perspectiva de la teoría de la objetivación, el pensamiento algebraico es considerado como “un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente” (Vergel, 2015a, p. 196). Por otra parte, según Radford (citado por Vergel 2015a) afirma:

Una caracterización de este tipo de pensamiento está constituida por tres componentes: (a) el sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro) como aquello opuesto a la determinancia numérica; (b) la analiticidad, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos; y (c) la designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos. Consideramos estos tres componentes analíticas o vectores estrechamente relacionados (p. 196).

Radford (como se citó en Vergel, 2014) distingue tres tipos de pensamiento algebraico o capas definidas por los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes en la

actividad reflexiva, como la percepción, los movimientos, los gestos y el lenguaje natural. Estas formas de pensamiento algebraicos son las siguientes:

- 1) *Pensamiento algebraico Factual*: Son todos los medios semióticos de objetivación movilizados, como los gestos, movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este nivel la indeterminancia queda implícita dado que las acciones de los estudiantes son concretas. Pongamos por caso, señales a través de miradas o movimientos con objetos.
- 2) *Pensamiento algebraico Contextual*: Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación. La indeterminación se convierte en el objeto del discurso en esta forma de pensamiento, además, surge una formulación algebraica como una descripción de la generalidad presente. Por ejemplo, un estudiante expresa “dos por el número de la figura, más uno”.
- 3) *Pensamiento algebraico Simbólico*: Hay un cambio drástico en la forma de denominar objetos de la tarea matemática. En lugar de una descripción verbal o escrita de lo que observa, el estudiante representa la indeterminancia por medio de símbolos alfanuméricos del álgebra.

Por todo lo anteriormente expuesto, este trabajo comprende que la clase de matemáticas debe verse como un esfuerzo de colaboración entre el profesor y los alumnos que avanza de manera teórica, ética y cultural al mismo tiempo. En otras palabras, se deben plantear tareas en las que el alumno tenga la oportunidad de discutir varios enfoques sobre una misma problemática, mientras que el profesor le proporciona oportunidades para obtener una mejor comprensión, dé sentido a sus respuestas y reconozca las opiniones de los demás. Estas interacciones y esfuerzos cooperativos entre alumnos son los que permiten que el saber se convierta en objeto de conciencia.

## **6 Diseño Metodológico**

En este capítulo se presentan las delimitaciones en relación con los participantes, así como las diferentes fases realizadas en la presente investigación.

La investigación desarrollada siguió una metodología cualitativa, dado que su enfoque era describir los procesos de objetivación y subjetivación en la generalización de patrones, modelación y aritmética generalizada.

### **6.1 Participantes**

La investigación se desarrolló en la institución educativa Liceo Patria, ubicada en la ciudad de Bucaramanga, Santander. Esta institución es de carácter oficial, ofrece a los hijos del personal militar de la Quinta Brigada y de familias civiles, un servicio educativo de calidad formando integralmente personas comprometidas con su mejoramiento y el de su entorno natural, cultural y social.

La población objeto de estudio estuvo conformada por 34 estudiantes, con edades entre los 9 a los 11 años. Estos estudiantes cursaban el grado cuarto de educación básica primaria en la jornada de la tarde durante el primer semestre del año 2023.

### **6.2 Proceso Metodológico**

El proceso metodológico que se llevó a cabo en este estudio se basa en la metodología multisemiótica de Radford (2015). Este proceso metodológico también ha sido implementado en otras investigaciones como en Martínez (2016) y dicho estudio se usó como guía para definir las etapas en las que se divide. Así el desarrollo de la investigación consistió en cuatro etapas: selección y rediseño de tareas, implementación de las tareas en el aula de clase, recolección y análisis de los datos. La Figura 9 muestra el esquema metodológico seguido en este estudio.

**Figura 9**

*Estructura metodológica multimodal (Adaptado de Martínez, 2016)*



En las secciones siguientes se describen los rasgos principales de cada etapa de la metodología.

### **6.2.1 Selección y rediseño de tareas**

En esta primera etapa se tomó en consideración los referentes nacionales: Estándares Básicos de Aprendizaje (MEN, 2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016), también como referente internacional el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) con respecto a las expectativas del pensamiento algebraico y los estándares propuestos para la etapa de 3-5. También los reportes de investigación referidos brevemente en 2.2, 2.3 y 2.4.

Dada la importancia de la validez de los instrumentos, se realizó un proceso de identificación, diseño y rediseño de tareas. Por lo tanto, se seleccionaron algunas tareas y situaciones ya aprobadas por académicos e investigadores en otros estudios en relación con el pensamiento algebraico y otras fueron auténticas del presente estudio. Algunos de los estudios donde fueron tomadas las tareas relaciona en la Tabla 1 y, fueron agrupadas según la característica que más se destaca; pues consideramos que algunas tareas pueden integrar más de una forma característica del algebra temprana (patrones, aritmética generalizada o modelación).

**Tabla 1**

*Lista de documentos seleccionados para la presente propuesta de trabajo.*

<b>Patrones</b>	<b>Aritmética generalizada</b>	<b>Modelación</b>
Algebra escolar y pensamiento algebraico: Aportes para el trabajo en el aula (Vergel y Rojas, 2018).	Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning (Blanton & Kaput 2005).	Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching (Kieran, et al., 2016).
Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (Vergel, 2014).	The impact of two different types of instructional tasks (Chimoni, et al., 2021).	The impact of two different types of instructional tasks (Chimoni, et al., 2021).
Procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Martínez, 2016).	Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In Early algebrization (Britt & Irwin, 2011).	Ten-Year-Old Students Solving Linear Equations (Brizuela & Schliemann, 2004).

Para el rediseño de las tareas se siguió las recomendaciones de Radford y Sabena (2015) las cuales se muestran a continuación:

1. Selección minuciosa de las preguntas y problemas en cada una de las tareas.
2. Tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes.
3. Organizar las tareas de tal forma que las primeras preguntas sean alcanzables para los estudiantes, con el fin de integrarlos a la actividad, y progresivamente aumentar la complejidad para profundizar las ideas matemáticas clave.
4. Posibilitar espacios de reflexión crítica e interacción a través de grupos de discusión.

5. Ofrecer momentos de reflexión matemática para que los estudiantes puedan criticar o proponer otras formas de hacer las tareas.
6. Incluir formas de interacción social y colaboración en el salón de clase.

De acuerdo con las pautas establecidas anteriormente y los referentes teóricos seleccionados se diseñaron un total de 5 tareas. La Tabla 2 resalta las formas de pensamiento algebraico que se considera integra cada tarea y durante el capítulo 7 se aborda más a fondo cómo se manifiesta cada característica del pensamiento durante su implementación.

**Tabla 2**

*Clasificación de tareas con relación a la forma de pensamiento algebraico.*

	<b>Generalización de patrones</b>	<b>Aritmética Generalizada</b>	<b>Modelación</b>
Tarea 1	X	X	
Tarea 2		X	X
Tarea 3	X	X	
Tarea 4	X	X	X
Tarea 5	X		X

Así mismo, para cada tarea y situación considerada se hace un análisis considerando dos componentes: una solución normativa relativa a la respuesta puramente matemática de la tarea, es decir, la expresión algebraica que conecta las variables identificadas en el patrón o problema planteado; y un análisis teórico que esboza las posibles soluciones de los alumnos en relación con los componentes teóricos expuestos en el capítulo 5.

### **6.2.2 Implementación de las tareas en el aula**

La implementación en el aula siguió las consideraciones presentadas en la sección 5.3 en relación con la actividad y la labor conjunta. El tiempo de implementación en el aula fue de dos

semanas entre los días 4 y 18 de mayo del año 2023 donde se trabajaron un total de 4 sesiones de entre 90 y 120 minutos cada una de acuerdo con la disponibilidad de la institución.

### **6.2.3 *Recolección y selección de datos***

El procedimiento mediante el cual se realizó la recolección de los datos en esta investigación siguió las cuatro fases propuestas por Miranda, Radford y Guzmán (2007). A continuación se hace referencia a cada una de ellas:

**Fase 1:** Grabación en video y audio de las tareas realizadas en el aula de clase. Estas grabaciones se realizan con una cámara que captura, en algunos momentos, la participación de los estudiantes, y en otros, las discusiones focalizadas en algunos grupos de trabajo al momento de resolver las tareas propuestas.

**Fase 2:** Obtención de las hojas de trabajo de cada estudiante. Si la actividad no terminaba en una sesión, las hojas de trabajo se recogían y se entregaban nuevamente en la siguiente sesión.

**Fase 3:** Transcripción de los videos correspondientes a los fragmentos donde se identificaban momentos clave para el análisis.

**Fase 4:** Análisis de videos y de las hojas de trabajo en las cuales hay evidencias de los procesos de resolución de la tarea.

A fin de comprender los procesos de objetivación de los alumnos, nos interesa especialmente observar cómo alumnos y profesores utilizan múltiples recursos semióticos, no solamente expresiones con signos alfanuméricos. Por lo tanto, durante la inmersión en el aula se buscará encontrar el nivel de profundización matemática alcanzada por los estudiantes, por medio de cuestionamientos que valoren las respuestas y justificaciones brindadas durante las tareas. Por otro lado, una vez finalizada cada sesión se realizarán notas de campo para registrar lo sucedido

en el aula, se anotarán observaciones, reflexiones, hipótesis e interpretaciones personales del investigador.

#### **6.2.4 Interpretación y análisis teórico de los datos**

De acuerdo con la TO la unidad de análisis corresponde a la actividad en el aula. Por lo tanto, se realiza una descripción sistematizada de las producciones de los estudiantes (organización de la transcripción de los videos y recursos semióticos movilizados dentro de las hojas de trabajo). Una vez recolectados todos los datos, se hizo una selección de estos y se sometió a un procedimiento de triangulación entre el análisis a priori, las producciones verbales y kinestésicas de los estudiantes, la producción escrita y la discusión entre los investigadores. Los principios teóricos planteados, la pregunta de estudio y los objetivos se utilizaron como factores para elegir los momentos relevantes de la actividad en el aula, es decir, donde se identificaban una mayor cantidad de recursos semióticos movilizados.

## **7 Análisis a Priori sobre las Tareas y Consideraciones para la Implementación**

En este capítulo se realiza la descripción de las cinco tareas usadas en el estudio y un análisis previo de cada una de acuerdo con el lente teórico. Para cada tarea se precisa su objetivo y los posibles razonamientos de los estudiantes de cuarto grado que revelan rastros de pensamiento algebraico.

### **7.1 Tarea 1 (Estrategia de conteo)**

El objetivo de esta tarea es promover en los estudiantes la utilización efectiva de estrategias de cálculo al enfrentar situaciones que requieren de la identificación de una generalidad, las cuales siguen un patrón en su estructura. Las estrategias que surjan de esta actividad están directamente

relacionadas con las habilidades y los conocimientos matemáticos previos del individuo, donde se espera principalmente ver el uso del cálculo mental y el uso de patrones.

**Figura 10**

*Hoja de trabajo de la Tarea 1 y algunas figuras mostradas en el Nivel 2.*



**Memoria fotográfica**

La memoria fotográfica es la habilidad de recordar imágenes con gran detalle y claridad en nuestra mente. Es como tener una cámara en nuestro cerebro que toma fotos de todo lo que vemos y lo almacena para recordarlo más tarde. **¿Quieres saber si tienen memoria fotográfica?**

**Nivel 1**

¿Qué estrategias utilizaste para contar rápidamente los cuadrados que se mostraron en cada imagen? Explica utilizando tus palabras o dibujos.

**Nivel 2**

¿Qué estrategias utilizaste para contar rápidamente los cuadrados que se mostraron en cada imagen? Explica utilizando tus palabras o dibujos.

**Nivel 3**

¿Qué estrategias utilizaste para contar rápidamente los cuadrados que se mostraron en cada imagen? Explica utilizando tus palabras o dibujos.

LÍMITE DE TIEMPO:  
**4 segundos**



LÍMITE DE TIEMPO:  
**5 segundos**



LÍMITE DE TIEMPO:  
**6 segundos**



### 7.1.1 Descripción de la tarea 1

Esta tarea es de elaboración propia (Ver Figura 10) y consta de tres niveles compuestos por secuencias figurales cada uno utilizando cuadrados en su forma (Ver Anexos). El nivel uno contiene arreglos cuya cantidad de cuadrados es igual a  $n^2$  desde  $n = 1$  hasta  $n = 7$ . El nivel dos contiene arreglos cuya cantidad es igual a la suma de los primeros  $n$  números naturales desde  $n = 1$  hasta  $n = 7$ . El nivel tres se asemeja al nivel uno, pero con la ausencia de cuadrados en su forma. Cada imagen se muestra a todos los estudiantes proyectada en un televisor con un límite de tiempo de entre 5 y 10 segundos, de acuerdo con la cantidad de cuadrados presentes en el arreglo y, al finalizar cada nivel se pregunta por la estrategia o método que utilizaron para contar los cuadrados

en su totalidad. Las respuestas que se generen en este momento deben ser escritos en la guía de trabajo.

### **7.1.2 *Análisis de la tarea 1***

Los estudiantes deben prestar atención a la forma cómo se han dispuesto los cuadrados, dado que al avanzar dentro de un nivel, la cantidad de cuadrados en cada imagen será superior a la anterior, se espera que el estudiante vea la necesidad de cambiar la forma de contar los cuadrados y busque estrategias aditivas, multiplicativas o encuentre la regularidad en la secuencia de imágenes. En el caso del nivel dos (Ver imagen 10), por ejemplo, una de las posibles maneras de percibir la figura es reconocer la forma de escalera que tiene, luego, es posible que noten el aumento de una fila o columna en relación con la imagen anterior y que dicho aumento se mantiene constante. En este sentido, la tarea posibilita que los estudiantes relacionen distintos elementos semióticos perceptivos, gestuales y verbales.

### **7.2 Tarea 2 (Propiedad de descomposición aditiva)**

El objetivo de esta tarea es fomentar estrategias aditivas, donde el estudiante pueda reconocer los números como unidades abstractas que se pueden dividir y luego recombinar de diferentes formas para facilitar el cálculo numérico. Al mismo tiempo, se explora en este caso el concepto de igualdad como una relación de equivalencia que relaciona cantidades numéricas. Finalmente, lograr que los estudiantes reconozcan la propiedad  $T = a + b = (a + c) + (b - c)$  donde T representa la cantidad total y  $a + b = (a + c) + (b - c)$  representa las partes que componen la cantidad total con  $c$  como la cantidad que se ha manipulado y que reconfigura la adición. Esta tarea ha sido rediseñada con base en otro estudio publicado (Britt y Irwin, 2011, p. 145).

**Figura 11**

*Hoja de trabajo de la Tarea 2*

1. Observa la siguiente distribución de la suma de números en las siguientes dos tablas.

2. Idea una estrategia que te permite hallar el resultado de la suma de  $8+5$  **sin contar** los círculos. Explica cómo conseguiste tu respuesta.

3. Utiliza la estrategia que encontraste para resolver las siguientes sumas. Explica la estrategia que usaste y, si es posible, has un dibujo.

**$8+7$        $7+6$        $9+7$        $8+9$**

4. Realiza un dibujo semejante al **punto 1** para representar la suma de  $19+7$ .

5. ¿Podrías usar la misma idea que has usado antes para encontrar el resultado de la suma de  $19+7$ ? Escribe como lo hiciste.

6. Utiliza la estrategia que encontraste para resolver las siguientes sumas. Explica la estrategia que usaste y, si es posible, has un dibujo.

**$27+6$        $18+9$        $26+8$        $48+5$**

7. ¿Crees que es posible calcular el resultado de números más grandes utilizando la idea que encontraste? Intenta hacerlo con la suma de  $297+103$  y explica a qué conclusiones has llegado.

**7.2.1 Descripción de la tarea 2**

La tarea 2 (Ver figura 11) consiste en la utilización de marcos compuestos de 10 espacios para desarrollar la comprensión temprana de la compensación aditiva. En primer lugar, se dialoga con toda el aula para determinar el resultado de la suma  $8 + 5$  sin contar y se discute sobre las posibles estrategias que surjan en este momento. Luego, se motiva al estudiante a que realice este mismo razonamiento con otras sumas propuestas. Después, se propone al estudiante una suma que requiere el uso de más de un marco de 10 u otro tipo diferente de marco. Finalmente se concluye y observa el alcance que ha tenido el desarrollo de esta habilidad manipulativa preguntando por cantidades aún mayores y tratando de cuestionar por una posible generalidad para toda suma de dos números.

### **7.2.2 *Análisis de la tarea 2***

En esta tarea a medida que los estudiantes manipulan los contadores en los rectángulos de decenas, se espera se percaten de que los espacios pueden llenarse para completarlo, a su vez que funciona como contador al terminar el llenado. Se espera que los estudiantes, a través de la experiencia corpórea, desarrollen habilidades que fomenten la equivalencia y la vinculen con la igualdad. En este sentido, la actividad busca proporcionarles oportunidades para explorar y descubrir estrategias y enfoques para visualizar y realizar sumas con los números dados. Es probable que una vez realicen varias veces esta acción se desarrolle una estrategia de compensación y así poder visualizar la estructura de la transformación que utiliza posteriormente para resolver las tareas más desafiantes (operaciones como  $27+6=30+3$ ).


### **7.3 Tarea 3 (Secuencias figurales con apoyo tabular)**

El objetivo de esta tarea es ofrecer un espacio para favorecer el proceso de generalización de patrones a través de secuencias figurales. Este tipo de secuencias movilizan formas perceptivas y gestuales con mayor intensidad en los estudiantes, además, los índices geométricos y espaciales presentes en cada secuencia propuesta facilitan la identificación de las características que determinan el patrón por parte del estudiante. Esta tarea ha sido rediseñada según el informe de otra investigación (Moss y London, 2011, p. 290).

**Figura 12**

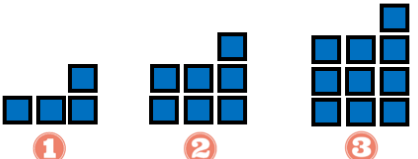
*Primera parte de la hoja de trabajo de la Tarea 3*

Observa el siguiente patrón de cuadrados.



1. Si este patrón sigue creciendo de la misma manera ¿Cómo sería la siguiente figura? ¿La figura 5 y 6? Dibuja cada una de ellas.
2. ¿Cuántos cuadrados hay en la figura número 15? Explica de qué manera calculaste este resultado.
3. ¿Qué cantidad de cuadrados tendrá la posición número 100? Explica cómo hallaste el resultado.
4. Para cualquier figura del patrón ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de cuadrados que tiene sin dibujarla?

Se ha cambiado un poco el patrón anterior, ahora se comporta así:



1. Si este patrón sigue creciendo de la misma forma ¿Cuántos cuadrados tendrán la figura 4, 5 y 6?
2. Hay un grupo de bloques que tiene 31 cuadrados ¿Qué figura es esa?
3. Para cualquier figura del patrón ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de cuadrados que tiene sin dibujarla?

### 7.3.1 Descripción de la tarea 3

La tarea 3 propone tres secuencias figurales con apoyo de representación tabular, el primer arreglo (Ver figura 12) consiste en un patrón formado por filas de tres cuadrados en relación con la regla  $3n$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . El segundo patrón (Ver figura 12) es semejante al anterior, dado que describe un arreglo formado por  $3n + 1$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Finalmente, el tercer patrón consiste en un arreglo en forma de “cohete” (Ver figura 13), este patrón puede describirse como un arreglo formado por tres triángulos en la parte superior del cohete y dos triángulos en la parte inferior del mismo, mientras que el cuerpo del cohete está formado por dos columnas de  $4n$  triángulos para  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Figura 13**

*Segunda parte de la hoja de trabajo de la Tarea 3*

Observa el siguiente patrón inspirado en un bonito cohete.

Figura 1
Figura 2
Figura 3
Figura 4

1. ¿Cómo imaginas que serán los siguientes 3 cohetes? Dibuja cada uno de ellos y escribe cuantos triángulos tiene cada uno.
2. ¿Cuál es la diferencia de crecimiento entre los triángulos azules y los bloques rojos? Explica con tus palabras.
3. Para cualquier figura del patrón ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de triángulos que tiene un cohete sin dibujarlo? Explica tu respuesta con tus palabras.

### 7.3.2 Análisis de la tarea 3

Dado que la tarea implica actividades que se consideran son nuevas para los estudiantes, se espera que los resultados obtenidos en cada uno de los tres patrones estén contenidos dentro del pensamiento algebraico factual. Al ser las primeras generalizaciones realizadas por los alumnos en la intervención, se espera una evolución de la manera en que emplean formas perceptivas y gestuales para generalizar la construcción de la figura, lo cual disminuirá a medida que realizan más actividades semejantes entre sí. Así mismo, se espera que los alumnos pueden utilizar estrategias de recuento, gestos, señalamientos, tabulaciones, expresiones verbales u escritos y otros recursos semióticos.

En relación con el proceso de generalización, los estudiantes pueden prestar atención a las similitudes y diferencias de las figuras dentro de cada secuencia dada, centrándose en la estructura espacial y numérica. Se espera identifiquen varios aspectos, tales como la cantidad de cuadrados o triángulos, la ubicación de cada uno de los componentes geométricos que componen la figura,

lo que permanece constante y lo que varía, entre otros. En relación con la estructura espacial de los patrones, es posible que los estudiantes identifiquen diversas formas de composición de la figura, aunque las posibilidades no son iguales en los tres patrones. Por ejemplo, en el segundo patrón podrían determinar el aumento de tres cuadrados a medida que avanza la secuencia manteniendo un solo cuadrado encima siempre. También es posible que los estudiantes perciban la figura como un arreglo de cuatro cuadrados al cual, a partir de la *figura 2* (de la secuencia de la tarea) se le agregarán 3 cuadrados a medida que crece la secuencia.

En el momento que los estudiantes sean capaces de identificar las características comunes de las figuras y aplicarlas a términos abstractos que no son directamente perceptibles, especialmente a términos que tienen poca relación aparente con las figuras en sí, es posible afirmar que han logrado una generalización exitosa. Por ejemplo, en el caso del tercer patrón, el estudiante debe establecer una relación entre la posición de la figura, la cantidad de triángulos azules y la cantidad de triángulos rojos para lograr una generalización precisa. En relación con la deducción de una manera de determinar cualquier término de la secuencia, es posible que el estudiante la describa en lenguaje natural, es decir, expresiones como: *"La figura 6 tiene 24 triángulos azules y 5 triángulos rojos"*, *"Este patrón tiene los múltiplos de 3"*, *"Para saber cuántos cuadrados tiene la figura 30, hay que multiplicar  $30 \times 3$  y luego sumarle 1"*. Son estos algunos de los recursos semióticos verbales que pueden surgir durante la tarea.

#### **7.4 Tarea 4 (Equivalencia aritmética, generalización y modelado)**

El diseño de la tarea es un aporte del presente estudio y cuyo objetivo es que los estudiantes desarrollen habilidades aritméticas y generalización de patrones simultáneamente, a través de la resolución de problemas matemáticos que involucren la identificación de relaciones numéricas y la aplicación de reglas y patrones matemáticos. Al completar la tarea, se espera que los estudiantes

sean capaces de reconocer patrones y utilizarlos para predecir resultados, así como aplicar estrategias de cálculo para verificar sus soluciones y justificar sus respuestas.

**Figura 14**

*Primera parte de la hoja de trabajo de la tarea 4*

**Protección de objetos**

En la cotidianidad, existen muchos objetos que protegen la cosas que queremos cuidar de posibles daños. Por ejemplo, tenemos guantes, chalecos, cascos y hasta el forro de nuestro celular.

En muchos restaurantes y en algunos hogares se utilizan portavasos. Una de las funciones de los portavasos es preservar la superficie de los vasos, que puede transpirar en función de la temperatura (fría o caliente).

Del mismo modo, pueden proteger las mesas de posibles fracturas o daños.

**Diseña tu propio portavasos**

En un restaurante muy famoso de la ciudad de Bucaramanga, se utilizan diferentes figuras de portavasos. Observa que el portavasos del **Diseño 1** tiene 5 círculos en cada borde como se muestra a continuación.



**Diseño 1**

1. ¿Cuántos **círculos en total** tiene el diseño de un portavasos que tiene **10 círculos** en cada lado? Escribe que cálculos has realizado para encontrar este resultado.
2. Ahora, ¿Cuántos **círculos en total** tiene un portavasos que tiene **15 círculos** en cada lado? Explica cómo lo hiciste.

**7.4.1 Descripción de la tarea 4**

La tarea 4 (Ver figura 14) muestra el diseño de una figura cuadrada compuesta por la misma cantidad de círculos en todos sus lados y se propone a los alumnos determinar la cantidad total de círculos en un portavasos que poseen una cantidad mayor de círculos en cada uno de sus lados. A medida que se avanza en la tarea se proponen nuevos diseños para elaborar nuevas formas de calcular la cantidad total de círculos en relación con el lado del cuadrado (Ver figura 15) con el fin

de orientar al estudiante a establecer la forma más sencilla encontrar el resultado (a su juicio) y establecer equivalencias.

**Figura 15**

*Segunda parte de la hoja de trabajo Tarea 4*

3. Si al **Diseño 1** se le hace una modificación para obtener el **Diseño 2**, ¿Cómo calcular el número total de círculos, tanto blancos como amarillos, de un portavasos con 49 círculos en cada lado? ¿Cómo encuentras el total si ahora son 129 círculos en cada lado? Explica tus cálculos mediante palabras o números.



Diseño 2

4. Un visitante del restaurante desea saber cuantos **círculos en total** tiene un portavasos con cualquier cantidad de círculos en uno de sus lados. Explica detalladamente que debería hacer el visitante para calcular los círculos.

En el último mes, el restaurante ha conseguido dos nuevos diseños de portavasos como los que se muestran a continuación.



**Diseño 3**



**Diseño 4**

5. Usando el **Diseño 3** ¿Cómo podrías calcular el número total de círculos (blancos y amarillos) de un portavasos que tiene 17 círculos en cada lado?

6. Si utilizas el **Diseño 4** ¿Cambias de estrategia para saber cuántos círculos (blancos y amarillos) tiene un portavasos con 17 círculos en cada lado?

7. Usando el **Diseño 3 y 4** ¿Cómo saber cuántos círculos en total tiene un portavasos con cualquier cantidad de círculos en uno de sus lados?

8. ¿Son equivalentes la manera de encontrar la cantidad de círculos sobre el borde del portavasos sin importar el diseño? ¿Por qué?

**7.4.2 Análisis de la tarea 4**

En la actividad suscitada por esta tarea se espera que los estudiantes utilicen tres sistemas semióticos para expresar capas de generalidad: primero con números como cuasi variables, después con palabras y, por último, con los símbolos literales del álgebra. Por ejemplo, el **Diseño 2** puede expresarse numéricamente como 2 grupos de 47 círculos amarillos más 2 grupos de 45 círculos blancos para el portavasos con 47 círculos en cada borde y en palabras como: "El número

total de círculos es dos grupos del número de círculos en un lado del borde (círculos amarillos) más dos lotes con dos menos que el número de círculos en un lado (círculos blancos).

La expresión algebraica resultante podría ser  $2 \times n + 2 \times (n - 2)$  que se escribe más habitualmente como  $2n + 2(n - 2)$ . La expresión algebraica para el **Diseño 3** es  $4 + 4(n - 2)$  y en cuanto al **Diseño 4** la expresión es la siguiente  $4(n - 1)$  respectivamente. Las representaciones figuradas como las que se muestran en esta tarea pueden ofrecer una rica fuente de tareas desafiantes que requieren que los alumnos busquen, expresen generalidad y las comparen, además, se pueden ampliar para figuras regulares con  $n$  cantidad de lados con el fin de abordar otras expresiones algebraicas.

Se espera que los estudiantes puedan adquirir una variedad de estrategias de conteo y aplicarlas junto con su conocimiento relacionado, para diseñar y ampliar estrategias operativas en aritmética, donde la generalización pueda expresarse mediante el uso de cuasi variables. Además, a aquellos estudiantes que hayan logrado trabajar con éxito con este estilo de variable, se les puede desafiar a hacer una contracción semiótica mediante preguntas y buscar que la abducción sea analítica usando rastros de lenguaje simbólico.

### **7.5 Tarea 5 (Modelación y generalización de patrones)**

El objetivo de esta tarea es indagar sobre el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en los estudiantes, centrándose tanto en los procesos de la generalización de patrones como en la modelación de situaciones matemáticas. Se busca explorar los medios semióticos que emergen en el proceso de transición desde formas intuitivas e informales hacia formas más sofisticadas y formales de pensamiento algebraico. Se examinará cómo los estudiantes interactúan con nuevas relaciones y objetos, y cómo articulan generalizaciones, considerando diferentes niveles de acciones numéricas concretas, descripciones situadas en la conciencia de una comunalidad y




acciones de abducción con símbolos o signos. Esta tarea ha sido rediseñada de acuerdo con los aportes de otra investigación (Chimoni et al., 2021, p. 513).

**Figura 16**


*Primera parte de la hoja de trabajo de la tarea 5*

**La figura geométrica más fuerte**


El triángulo se emplea generalmente en las construcciones. Se pueden encontrar en torres de alta tensión, grúas, algunos puentes, atracciones de feria y, por supuesto, en varios edificios, tanto visibles como ocultos tras sus tejados.

Una fábrica hace armaduras de varillas de acero de distintos tamaños, como se muestra en la siguiente imagen.



El tamaño de la armadura se determina de acuerdo con la cantidad de varillas que tiene en su base.



Una armadura de 3 bases

**1. Construye y dibuja las armaduras de varillas desde 1 hasta 5 varillas de base y escribe cuantas varillas tienen en total.**

Armadura de 1 base

Total de varillas =

Armadura de 2 bases

Total de varillas =

Armadura de 3 bases

Total de varillas =

Armadura de 4 bases

Total de varillas =

Armadura de 5 bases

Total de varillas =

**7.5.1 Descripción de la tarea 5**

Mediante una situación de construcción de armaduras de varillas de acero, se les presentó a los estudiantes un patrón lineal presente en diferentes objetos de la vida real y la importancia de este en diversidad de estructuras. En esta tarea se espera que los estudiantes puedan observar la

secuencia, determinar una característica común de acuerdo con la forma correspondiente de la figura (a través de las instrucciones dadas) y finalmente representar el término general.

A fin de facilitar este proceso, se dispuso de palitos de paleta a cada uno de los grupos como material concreto para simular la construcción de las armaduras de varillas y una serie de cuestionamientos en relación con la tarea.

### **Figura 17**

*Segunda parte de la hoja de trabajo de la tarea 5*

2. La fábrica recibe un pedido para fabricar una armadura de 9 bases y 10 bases. ¿Cuántas varillas en total tiene cada una? Explica con tus palabras como llegaste a tus resultados
3. ¿Cuántas varillas de acero tiene la armadura de 25 bases?
4. Si al contar las varillas de una armadura fabricada tienes un total de 39 varillas ¿Cuántos bases tiene la armadura?
5. Calcula el número de varillas de acero que tiene la armadura de 100 bases. Explica cómo lo has logrado. ¿Es posible calcularlo sin realizar un dibujo?
6. Para cualquier armadura sin importar la cantidad de varillas de la base ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de varillas total que tiene sin dibujarla? Explica tu respuesta.

#### **7.5.2 Análisis de la tarea 5**

A partir de la actividad generada por esta tarea, se espera que los estudiantes pueden aplicar estrategias aditivas y multiplicativas de manera predominante. Por ejemplo, es posible que se enfoquen en contar cada una de las varillas de la armadura como objetos individuales en lugar de percibirlos como una agrupación de objetos; acción que es clave para idear una posible generalización algebraica. En relación con los recursos semióticos a los que los grupos de estudiantes podría recurrir, se consideran las representaciones gráficas, el uso de material concreto, la actividad perceptual, las expresiones verbales y expresiones escritas en lenguaje natural, sin embargo, es posible que sean movilizados otros medios semióticos de objetivación.

Durante esta tarea se espera que los estudiantes se percaten a lo largo de su proceso de objetivación de la comunalidad de la figura. La secuencia tiene la característica de tomar de manera repetitiva triángulos que contienen la varilla base y la necesidad de agregar otra varilla entre dos triángulos, la cual podría ser denominada como “*el techo*”. Al identificar la comunalidad los estudiantes pueden ver la figura como una agrupación de triángulos, a los cuales va agregando un triángulo compuesto de tres varillas más una varilla adicional en la parte superior de la figura.

Se considera que es probable que los estudiantes logran identificar la relación existente entre el número de término y la cantidad de segmentos que conforman la figura (relación funcional). De esta forma, podrían extrapolar una generalización que les permita determinar el número de varillas sin necesidad de representar gráficamente el término diez o veinticinco. Al llegar al final de la tarea, podrían surgir algunas estrategias o generalización de acciones a partir de la labor conjunta que implicara la relación entre el número de bases con la cantidad de varillas que conforma la figura, tales como “*la armadura de 9 bases tiene 35 varillas porque sumé de cuatro en cuatro*” o “*tiene 99 varillas porque  $25 \times 3$  es 75 más 24 que es lo de arriba da 99*”.

## 8 Análisis Multimodal

En la teoría de la objetivación, la actividad se considera una unidad de análisis. Por lo tanto, se han examinado minuciosamente los videos para identificar los episodios en los que los estudiantes mostraron una mayor toma de conciencia en las tareas que involucraban generalización de patrones figurales, aritmética generalizada y modelación. Un análisis multimodal es necesario para comprender esa toma de conciencia, donde se estudie el papel y la relación entre las acciones perceptivas, la actividad auditiva, los gestos, el ritmo, el lenguaje y los signos matemáticos.

En relación con el análisis de los datos, luego de realizar la identificación de los episodios más significativos, se realizó una organización en una tabla compuesta por tres columnas. La primera columna hace referencia al número de línea de la transcripción, la segunda columna está compuesta por el cuerpo de la transcripción, esta incluye imágenes extraídas del video, y la tercera columna se compone de comentarios interpretativos o información obtenida mediante las notas de campo.

Resulta fundamental especificar el tipo de codificación de registro usada en la documentación de las distintas tareas para comprender los diálogos obtenidos por la videograbación. A fin de reconocer a cada estudiante en las transcripciones de los videos presentados, se le asigna un nombre diferente para proteger su verdadera identidad. La notación L1, L2, L3, ...se utiliza para numerar las líneas, es decir, cada línea indica la intervención de un individuo y, al momento de realizar un cambio de tarea o el aporte de otro estudiante a esa misma tarea, se comienza nuevamente con la numeración. El discurso verbal de los implicados en el video está escrito con letra estándar, mientras que el discurso no verbal está escrito entre corchetes y letra cursiva “[ ]” y los puntos suspensivos “...” se utilizan para indicar pausa en el lenguaje hablado (estructura semejante a la usada por Vergel, 2014).


Las tareas se desarrollaron de manera individual y grupal, dado que el salón estaba distribuido en mesas compuestas por dos estudiantes, establecidos por la profesora a cargo con el fin mantener el orden, y con el propósito de promover formas de subjetividad. No se limitó a los estudiantes a trabajar individualmente pero cada uno tenía su propia hoja de trabajo. Se esperaba que cada estudiante se sintiera en un ambiente favorable que facilitara la aparición de diversas formas de cooperación en la búsqueda de la solución de las tareas planteadas.




**8.1 Tarea 1 (Estrategias de conteo)**

Esta tarea comienza por preguntar sobre la estrategia que han utilizado para contar la totalidad de los cuadros proyectados en cada nivel. Para responder a las preguntas de los 3 niveles de esta tarea, los estudiantes recurrieron a estrategias numéricas y algunos llegaron a reconocer generalizaciones. La articulación de diferentes medios semióticos de objetivación (como gestos, dibujos y discurso) fueron clave para que los estudiantes a través de la actividad expresaran sus razonamientos durante el proceso de generalización. Se presenta a continuación algunos diálogos correspondientes a esta tarea.

**Transcripción 1**

*Primer punto de la tarea 1 con Ana*

L1	PROFESOR: ¡Ana! Entonces cuéntame cómo lo hiciste.	
L2	<p>ANA: Yo primero multiplicaba y contaba de tres en tres la fila así [<i>Levanta su mano con la palma totalmente estirada y con los dedos de su otra mano, recorre la mano ya levantada de arriba hacia abajo</i>] y después...</p> 	<p>Levanta y mantiene la mano estirada como medio semiótico para representar lo que ella considera una fila dentro del patrón.</p>
L3	PROFESOR: [Interrumpe] ¿Las filas en qué? [Indicando que repita lo que dijo anteriormente].	
L4	ANA: Así [ <i>Vuelve a levantar su mano con la palma totalmente estirada y con un dedo de su otra mano, recorre la mano ya levantada de arriba hacia abajo</i> ].	<p>Usa movimientos rectos de arriba hacia abajo como medio</p>

		<p>semiótico para indicar la estructura que ella considera es una fila.</p>
<p>L5</p>	<p>ANA: Después contaba cada fila cuánto tenía [<i>mueve la mano con su lápiz realizando un conteo en el aire de cada fila</i>] o sea, cuántas filas [<i>hace un movimiento con la mano de manera horizontal</i>] y primero cuánto tenía cada fila [<i>hace un movimiento vertical con la mano sosteniendo el lápiz</i>] y multiplicaba por el número que me daba.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div>	<p>Usa el movimiento de la mano de manera horizontal para indicar el multiplicando, luego mueve la mano de manera vertical para indicar el multiplicador los cuales son los dos factores que necesita para realizar la multiplicación.</p> <p>Se observa que la estudiante se apoya en la forma de distribución espacial (filas-columnas, vertical y horizontal) de los objetos presentados para elaborar una estrategia de conteo usando la multiplicación. Así se identifica que tales formas espaciales funcionan como medio semiótico de objetivación.</p>

El patrón del Nivel 1 (ver Anexos) contiene arreglos de cuadrados cuya cantidad es igual a los primeros  $n^2$  desde  $n = 1$  hasta  $n = 7$ . En el diálogo, podemos observar que la estudiante Ana explica al profesor la forma como descompone la figura del patrón y los objetos que debe contar para determinar la cantidad de cuadrados que se mostraron en cada imagen. Para esto, recurre a la articulación entre su expresión verbal, gestos y señalamientos que ella realiza con sus manos y con el lápiz.

En la línea 2, la expresión “*yo contaba de tres en tres la fila así...*” vemos que Ana señala la orientación del conteo, el cual realiza de arriba hacia abajo, además, especifica lo que ella considera que es una fila (una hilera vertical) mediante la postura de la mano estirada y en posición vertical. Al comunicar de esta forma sus ideas al profesor, se observa como Ana moviliza diferentes recursos semióticos para denotar que ha logrado identificar características de la estructura espacial y numérica de los cuadrados que conforman cada una de las siete figuras.

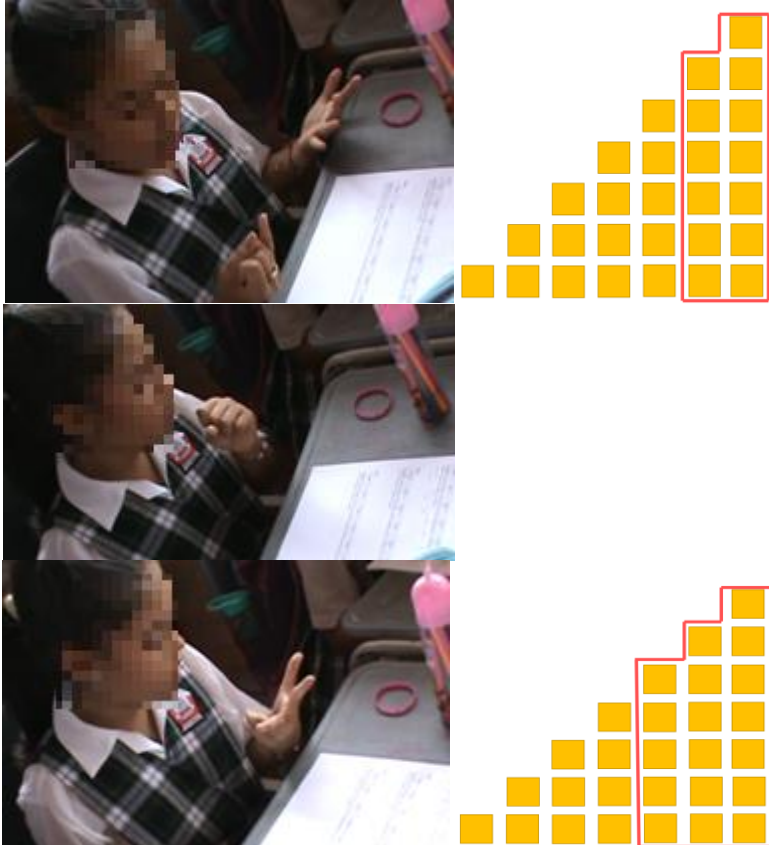
En la línea 5, se menciona que “*o sea, cuántas filas [hace un movimiento con la mano de manera horizontal] y primero cuánto tenía cada fila [hace un movimiento vertical con la mano sosteniendo el lápiz] y multiplicaba por el número que me daba*” se observa que Ana ha denominado “fila” a una hilera de cuadrados horizontales, sin embargo, en la línea 1 había expresado que las “filas” son hileras de cuadrados verticales por lo que se concluye que carece de otro término para conceptualizar la agrupación de los cuadrados con los que realiza las operaciones, no obstante, los movimientos que realiza con las manos tienen rol como medio semiótico de ayudar a complementar el razonamiento que expresa.

A partir de las imágenes que se mostraron del patrón correspondiente al Nivel 2, se indagó en una estudiante sobre la manera cómo determinó la cantidad de cuadrados de la última imagen proyectada. A continuación, se presenta la conversación que se desarrolla con el profesor y la estudiante que ha sido denominada Mariana.

**Transcripción 2**

*Segundo punto de la tarea 1 con Mariana*

L1	PROFESOR: Entonces cuéntame otra vez lo que me estabas diciendo.	
L2	MARIANA: Qué...entonces cada fila tenía uno más, entonces por ejemplo, la última yo recuerdo que tenía siete.	Uso de la función descriptiva del lenguaje

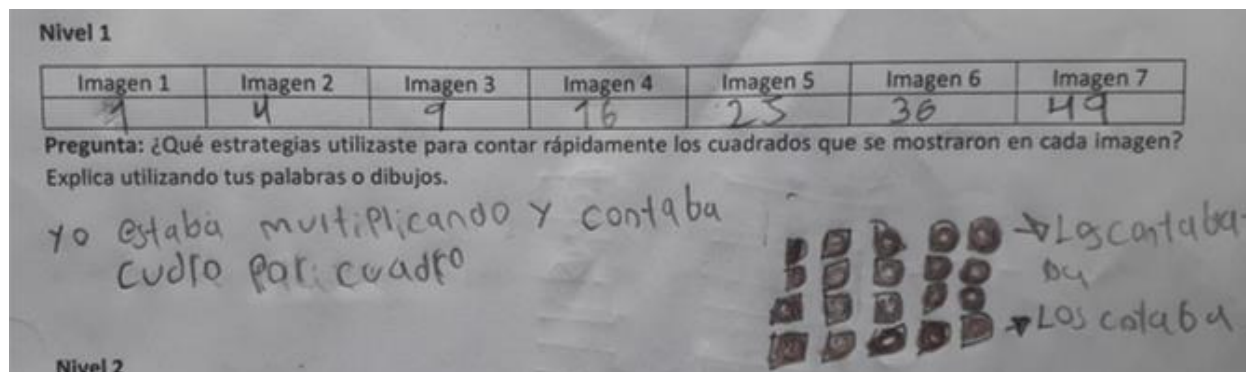
		en la expresión “cada fila tenía uno más”.
L3	PROFESOR: Si, es cierto.	
L4	<p>MARIANA: Entonces siete [<i>Levanta su mano y empieza a contar con los dedos a partir de ese número</i>] ocho, nueve, diez, once, doce, trece, ... [<i>baja todos sus dedos para continuar con el conteo</i>] catorce, quince, dieciséis, diecisiete, dieciocho, ... [<i>cierra el puño con todos sus dedos para seguir el conteo</i>] diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós [<i>baja nuevamente los dedos y sigue contando</i>] veintitrés, veinticuatro, veinticinco [<i>baja nuevamente los dedos y sigue contando</i>] veintiséis, veintisiete [<i>baja nuevamente los dedos y sigue contando</i>] ¡veintiocho! [<i>Se percata que había escrito un número diferente pero indica que ha terminado</i>].</p> 	<p>En la imagen de la izquierda se muestra la secuencia de conteo que realizó la estudiante para dar respuesta a la cantidad de cuadros en la imagen 7. El segmento rojo señala la adición de cuadros que hacía a medida que contaba, acción que repitió hasta llegar al último cuadro.</p> <p>El conteo realizado con los dedos de la mano se comporta como medio semiótico para objetivar la comunalidad de la secuencia.</p>
L5	PROFESOR: Entonces ¿la cantidad de cuadrados en la última imagen es 28?	
L6	MARIANA: Sí profesor.	

En la línea 2, en la afirmación de Mariana “*Entonces cada fila tenía uno más*” la expresión juega el rol descriptivo, dado que ella encuentra que a medida que se iban mostrando imágenes, el patrón aumentaba una fila con un cuadro adicional, esto va más allá cuando comienza a determinar cuántos cuadrados tiene la imagen 7, dado que realiza un conteo a partir del número 7 hasta el número 28 añadiendo los números del 6 hasta el 1 de manera regresiva, lo que le permite validar el resultado que ha encontrado. Se observa que la estudiante reconoce la cantidad de cuadrados que constituye cada uno de los términos en relación con la cantidad de cuadrados que haya en la última columna, lo cual hace referencia al número de la imagen. En términos de Radford (2003) se trata de una generalización de tipo aritmético, puesto que al sumar de uno en uno los números anteriores a los números correspondiente a la imagen pedida, implicaría un largo proceso, por lo que no le permitiría deducir una fórmula para encontrar cualquier figura de la secuencia si llegase a pedirse, podría decirse entonces que esta generalización se basa en un esquema aditivo.

Por otro lado, el Nivel 2 está compuesto de imágenes cuya cantidad es igual a la suma de los primeros  $n$  números desde  $n = 1$  hasta  $n = 7$  por lo que se esperaba que los estudiantes realizaran sumas a partir de 1 hasta el número de cuadrados que contenía la última columna o la primera fila del patrón (de abajo hacia arriba) mostrado en cada imagen, pero gran cantidad de estudiantes sumaban de manera regresiva como medio semiótico para determinar el resultado de la imagen mostrada. En la imagen 18 se muestra la producción escrita de un estudiante, donde podemos observar cómo a través del lenguaje y la realización de gráficos logra expresar la manera en que ha objetivado la forma de hallar la cantidad de cuadrados en cada imagen del nivel 1.

### **Figura 18**

*Producción del primer punto de la tarea 1 con Thomas*



En la imagen anterior, el estudiante utiliza las palabras para indicar de qué manera realizaba las operaciones para encontrar la cantidad de cuadrados en cada imagen, sin embargo, estas instrucciones no son muy específicas sobre exactamente qué se debe multiplicar o que contar dentro de la figura, esto no cobra sentido hasta observar el dibujo que ha realizado junto a su explicación escrita donde señala los cuadros que hay que contar para determinar el resultado junto a señalizaciones tituladas. Dejando de lado algunas imprecisiones en el dibujo o la escritura, sería posible afirmar que el estudiante ha logrado plantear una generalización de tipo factual, asociada a la relación percibida entre el número de la imagen y el número de cuadrados que la conforman.

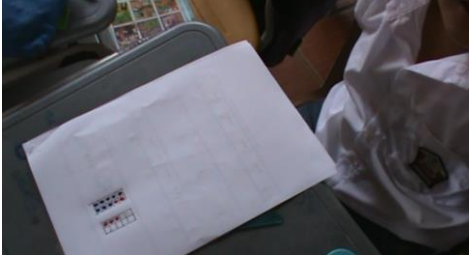
### 8.2 Tarea 2 (Propiedad de descomposición aditiva)

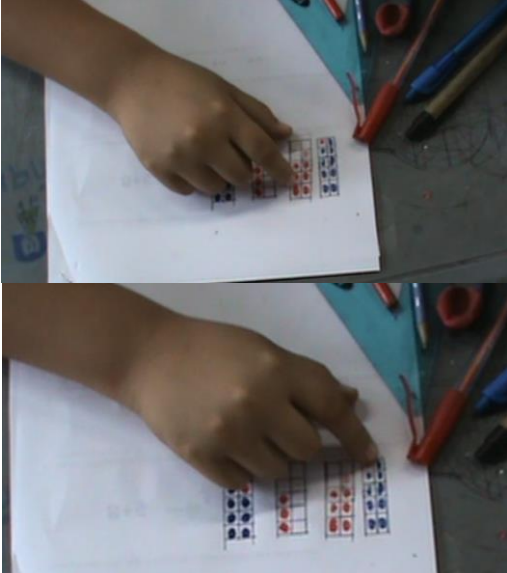
Esta tarea no logró implementarse en su totalidad, una de las explicaciones a esta situación es el detalle con el que los estudiantes dibujaban las tablas y los círculos, por lo que la representación de cualquier operación requería de tiempo. A pesar de esto, dentro de esta tarea se logró observar que algunos estudiantes encontraron estrategias operativas de corte aditivo, donde reconocen que los números son unidades abstractas que se pueden dividir y luego recombinar de diferentes formas para facilitar el cálculo numérico.

Un estudiante que realizó la tarea de manera individual explica el trabajo que realizó frente a los primeros 3 puntos de la Tarea 2.

**Transcripción 3**

Tercer punto de la tarea 2 con Jaime

L1	<p>JAIME: Vamos a quitar dos pepitas de la primera fila y ponérselos a la fila de alado [<i>Permanece inmóvil mientras se refiere a la fila roja y la fila azul incompleta</i>].</p> 	<p>Uso de la función descriptiva del lenguaje.</p>
L2	<p>PROFESOR: Perfecto ¿y qué suma quedó?</p>	
L3	<p>JAIME: [<i>Medita un poco mientras observa su dibujo</i>] Diez más tres.</p>	
L4	<p>PROFESOR: ¿Eso que te da como resultado?</p>	
L5	<p>JAIME: Trece.</p>	
L6	<p>PROFESOR: ¡Muy bien! Ahora ¿podríamos usar esto mismo que hiciste [<i>Señala el dibujo que realizó el estudiante</i>] con otra suma? Por ejemplo, el caso de nueve más siete [<i>Indica otra de las sumas propuestas del punto tres</i>].</p>	
L7	<p>JAIME: Sí profesor.</p>	
L8	<p>PROFESOR: En ese caso ¿Cuántas pepitas quitarías?</p>	
L9	<p>JAIME: Profe, deme unos minuticos y le digo la respuesta. [<i>Luego de esto, el estudiante comienza a dibujar</i>].</p>	
L10	<p>PROFESOR: Muy bien ¿cómo te fue?</p>	<p>Esto se pregunta luego de casi 10 minutos.</p>
L11	<p>JAIME: Bien profe, mire [<i>Levanta la hoja para mostrar el nuevo dibujo que ha hecho</i>]</p>	
L12	<p>PROFESOR: ¿Esto qué es? [<i>Señala con el dedo un dibujo compuesto por dos tablas pero que representaban otros números</i>].</p>	
L13	<p>JAIME: Siete más nueve.</p>	

L14	PROFESOR: ¿y qué hiciste?	
L15	<p>JAIME: Le saqué uno a este [<i>Señala la tabla que contiene al número siete con pepitas de color rojo</i>] para dárselo a este [<i>señala el lugar en la tabla azul donde dibujó una pepita roja</i>] y diez más seis es dieciséis.</p> 	<p>Uso de deícticos espaciales “este” y movimientos como medio semiótico para objetivar la igualdad de las dos operaciones y facilitar el cálculo.</p>
L16	<p>PROFESOR: Muy bien, perfecto ¿Consideras que así podrías sumar más rápido? [<i>Señala los dibujos que Jaime hizo en clase</i>].</p>	
L17	JAIME: Sí claro profe.	

En este episodio Jaime describe su proceso de objetivación donde comienza a reconocer la propiedad  $T = a + b = (a + c) + (b - c)$  donde T representa la cantidad total y  $a + b = (a + c) + (b - c)$  representa las partes que componen la cantidad total con c como la cantidad que se ha manipulado y que reconfigura la adición. En primer lugar, se observa que Jaime representa la suma  $5 + 8$  en lugar de  $8 + 5$ , es claro que el resultado es el mismo debido a la conmutatividad de los números naturales, y esto configura la forma en como describe la manera de realizar la división y recombinación, como lo expresa en la línea 1 “*vamos a quitar dos pepitas*


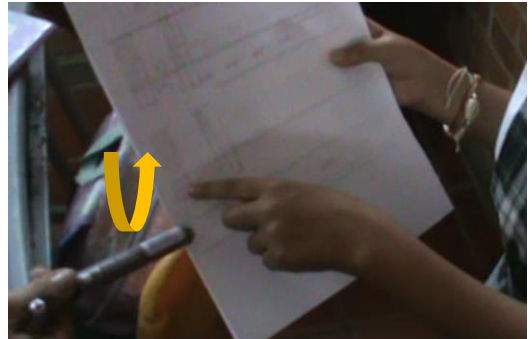
*de la primera fila y ponérselos a la fila de alado*” lo que numéricamente hace referencia a  $13 = 8 + 5 = 5 + 8 = (5 - 2) + (8 + 2) = 3 + 10$ .

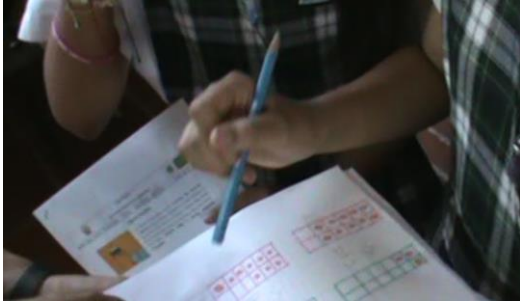
Luego de esto, se reta al estudiante a realizar este mismo procedimiento con otra suma entre las propuestas en el punto 3 a fin de identificar si se apropia de manera consciente de la propiedad aritmética involucrada que reconfigura la adición. En el diálogo Jaime, en la línea 15, con la expresión *“le saqué uno a este, para dárselo a este y diez más seis es dieciséis”* se observa que Jaime ha logrado realizar la transposición del concepto aritmético de una suma a otra, aunque esto no se da de inmediato pues requiere tiempo para realizar la representación de la suma. Por otro lado, se observa en el gráfico realizado por el estudiante, como en primer lugar realizó las tablas correspondientes a la suma  $9 + 7$  y luego se ve que ha borrado un círculo rojo y lo ha colocado en la tabla que representa el 9 lo que transformó la representación a la suma a  $10 + 6$  que resulta más rápida de calcular mentalmente. Al asociar el movimiento de dedos que hizo Jaime con su discurso verbal en la línea 15, podemos interpretar que puede realizar este mismo procedimiento con sumas de un dígito en cada término.

El alcance de esta tarea abarcaba sumas de una mayor cantidad de dígitos en cada sumando, al realizar progresivamente sumas de 1 dígito en cada sumando hasta 3 dígitos. Para mostrar el trabajo movilizado por algunos estudiantes para utilizar esta propiedad un sumando de 2 dígitos y un sumando de 1 dígito en la Tarea 2, tomamos los siguientes fragmentos de diálogo sobre la suma  $16 + 7$  sin utilizar métodos como el conteo o el algoritmo clásico de la suma, comenzando por un grupo de dos estudiantes.

#### **Transcripción 4**

*Suma propuesta en clase con Mariana y Sara en la tarea 2*

L1	MARIANA: ¡Con 21!	
L2	<p>SARA: ¡Con 21! Y en otra con 2 [<i>Señalan el dibujo que hicieron de dos tablas nuevas, una con 20 círculos y otra con 2</i>] y daría 23...y para hacerlo más fácil <math>21+2</math> que da 23.</p> 	<p>Señalizaciones como medio semiótico de objetivación.</p> <p>En esta producción la expresión “para hacerlo más fácil” es una función generativa del lenguaje.</p>
L3	PROFESOR: ¿En marcos de cuántos círculos?	Un término inadecuado para las tablas.
L4	SARA: ¿Cómo así?	
L5	PROFESOR: Sí ¿Cuántos círculos tienes por fila? [ <i>Señala la primera fila de arriba hacia debajo de la primera tabla</i> ]	
L6	MARIANA: ¿Cómo así?	
L7	<p>PROFESOR: ¿Cuántos tienes acá? [<i>Encierra con un movimiento circular la tabla que tiene 20 círculos</i>] ¿Están seguras de que tienen 21 círculos aquí? Recuerda que aquí [<i>señala la suma de ejemplo <math>8+5</math></i>] teníamos 5 y 5.</p> 	Señalizaciones como medio semiótico de objetivación.
L8	MARIANA: Entonces en cada fila tengo 10 y 10 [ <i>Señala la tabla que tiene 20 círculos</i> ]	
L9	PROFESOR: Si tienes 10 y 10 ¿entonces tienes 21 en total?	
L10	MARIANA: Ah no, tengo 20.	

L11	<p>SARA: [<i>interviene</i>] Entonces eran 3 aquí [<i>señala con el lápiz la otra tabla que tiene 2 círculos</i>].</p> 	<p>Uso de deícticos espaciales “aquí” para indicar el sumando al que se han restado círculos.</p>
-----	--	---

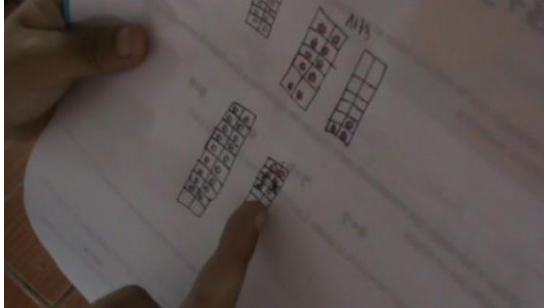
Podemos ver en este episodio cómo dos estudiantes utilizan recursos semióticos como señalamientos, gestos indéxales y expresiones lingüísticas para denotar que han identificado características de la estrategia aritmética relacionadas con la reconfiguración de una adición al comunicar sus ideas al profesor. En esta parte de la tarea no se había sugerido ningún tamaño para la tabla, solo se espera que así como en las primeras sumas, transformaran la suma de  $16 + 7$  en una operación más rápida o sencilla de realizar. En la línea 5 el profesor pregunta por la cantidad de círculos en la tabla porque a primera vista se notó que la cantidad de círculos que las estudiantes afirmaban que había estaba equivocada, pero la reconfiguración aditiva propuesta era correcta.

Otros estudiantes se limitaron a mover solamente 2 círculos en las sumas, aspecto que es correcto dado que manipulan las cantidades de los sumandos pero no se conseguía la suma más fácil posible, como se mostrará en el siguiente fragmento.

**Transcripción 5**

*Suma propuesta en clase con Matías en la tarea 2*

L1	<p>PROFESOR: ¿Cómo quedó tu dibujo? ¿Qué encontraste? [<i>Indicando la tarea de la suma 16+7</i>]</p>	
L2	<p>MATIAS: Aquí había puesto 16 [<i>señala con el dedo la primera tabla de arriba hacia abajo</i>] y aquí había puesto</p>	

	<p>7 [señala con el dedo la segunda tabla a la derecha de arriba hacia abajo] entonces de aquí, de estos siete [señala dos círculos de la segunda tabla que estaban tachados] cogí dos, entonces de esos dos se los pasé a este [señala la primera tabla] entonces el 16 quedaría convertido en 18 y este [señala la segunda tabla] quedaría convertido en 5, entonces <math>18+5 = 23</math></p> 	<p>Uso de deícticos espaciales “aquí” para indicar el sumando al que se han restado círculos.</p> <p>Utiliza la señal de la “equis” dentro del dibujo como medio semiótico para indicar la resta realizada.</p>
--	---	---

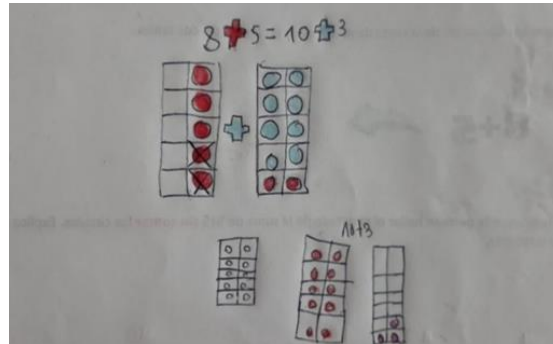
En este pequeño fragmento, Matías presenta una alternativa de la suma  $16 + 7$  la cuál de acuerdo con su explicación hace referencia a  $23 = 16 + 7 = (16 + 2) + (7 - 2) = 18 + 5 = 23$  y el procedimiento es correcto, dado que esta recombinação facilita el cálculo numérico aunque no resulta ser el más sencillo entre todos los posibles. Así mismo, el uso de la señal “equis” dentro de la representación de la suma trata de transmitir el mensaje sobre la igualdad entre  $16 + 7 = 18 + 5$  puesto que ambas operaciones se observan en la gráfica, a condición de que haya un diálogo entre el estudiante y el profesor sobre el significado de ese medio semiótico de objetivación. Además, se observa que en la tabla que dibujó sobran exactamente 2 espacios, espacios que no utilizó porque pensó que solamente debía mover dos círculos.

En relación con la iniciativa de Matías, consideramos que es importante resaltar el hecho de que, aunque no sea la forma más simple de hacer la suma, permite visualizar que la atención de los estudiantes no se centra en el resultado, sino en las formas equivalentes de reconfigurar las cantidades a operar. Esta observación adquiere relevancia al identificar la comunalidad y facilitar el proceso de abducción. Este mismo estudiante realiza un procedimiento semejante en la

manipulación de la suma  $8 + 5$  donde a partir de la gráfica y las múltiples tablas que realiza se puede observar la utilización de esta estrategia de compensación aditiva (Ver Figura 19).

**Figura 19**

*Producción de segundo punto de la tarea 2 con Matías*

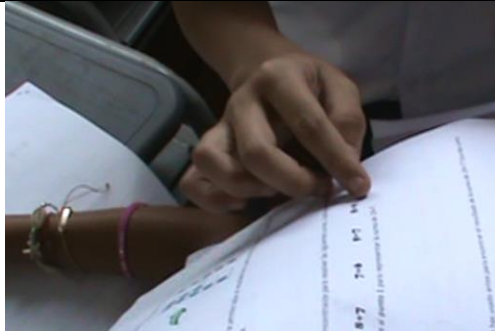



El siguiente dialogo se centra en el discurso realizado por Andrés, donde el estudiante nos explica la forma como obtiene las cantidades correspondientes a la suma que facilitaba los cálculos sin utilizar los marcos de decenas. En este punto de la intervención, se había realizado una discusión general y se llegó a la conclusión de que las sumas que contenían al número 10 resultaban más sencillas de operar.

**Transcripción 6**

*Serie de sumas con compensación de Andrés en la tarea 2*

L1	PROFESOR: Comencemos con esta [Señala las operaciones en el punto 3] ¿Cuánto es $8+9$ ?	
L2	ANDRES: Sería que le restáramos 2 al 9 [Señala los sumandos en la operación] y quedaría 7...y aquí [Señala el número 8] sumaríamos 2 y quedaría 10.	Usa la expresión semiótica “aquí” como deíctico espacial (gesto como señalamiento).

		
L3	PROFESOR: y por ejemplo ¿8+7?	
L4	ANDRES: Le restamos 2 al 7 y quedaría 4...digo 5 [Realiza un movimiento rápido sobre la operación pedida]	
L5	PROFESOR: Muy bien, así completarías los cuadros. Veamos y si te pregunto ahora por 6+5 ¿Qué respondes?	
L6	ANDRES: 6+5 es 11	
L7	PROFESOR: Ahora ¿cuánto sería 6+9?	
L8	ANDRES: 6+9 es 15	
L9	PROFESOR: ¡15! ¿Por qué 15?	
L10	ANDRES: Porque 10+6 es 16 y si le restamos 1 quedaría 15 [Mueve constantemente la mano de lado a lado mientras realiza cada una de las operaciones]. 	<p>Esta última parte del diálogo evidencia que Andrés ha encontrado otra propiedad semejante a la propuesta por los marcos de decenas.</p> <p>Ritmo y movimientos como medios semióticos que indican la manipulación mental de las operaciones.</p>

En las explicaciones de Andrés se puede apreciar como logra usar una estrategia de compensación sin la necesidad de utilizar los marcos con el fin de facilitar el cálculo. El procedimiento que realiza al principio corresponde al contemplado en el análisis previo de la tarea, sin embargo, en la línea 10 con la expresión “Porque 10+6 es 16 y si le restamos 1 quedaría 15”

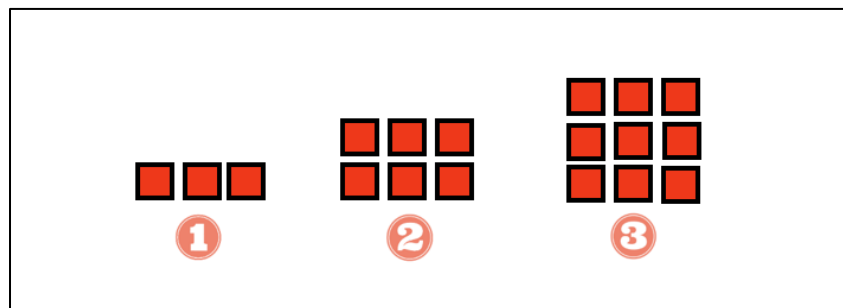
nos demuestra cómo ha llevado este razonamiento más allá, el cual algebraicamente se puede escribir como  $T = a + b = [(a + 1) + b] - 1$ , es decir, Andrés ha desarrollado una capacidad manipulativa de las cantidades sin estar limitado a sumar en un término lo que ha restado en el otro término de la operación. Por lo tanto, el diseño de la tarea permitió a algunos estudiantes pensar y actuar sobre igualdades de manera corpórea y a otros desarrollar esta habilidad para realizarlo de manera mental.

### 8.3 Tarea 3 (Secuencias figurales con apoyo tabular)

El análisis de esta tarea indicaba que la actividad debía estar orientada a familiarizar a los estudiantes con las secuencias figurales y observar que posibles propuestas de solución emergen durante la implementación en el aula. A partir del punto 1 del primer patrón, se quería indagar las maneras de como podían identificar el patrón de la secuencia, cuyo término general corresponde a la regla  $3n$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Figura 20**

*Primera secuencia figurar apoyada por representación tabular en la Tarea 3*

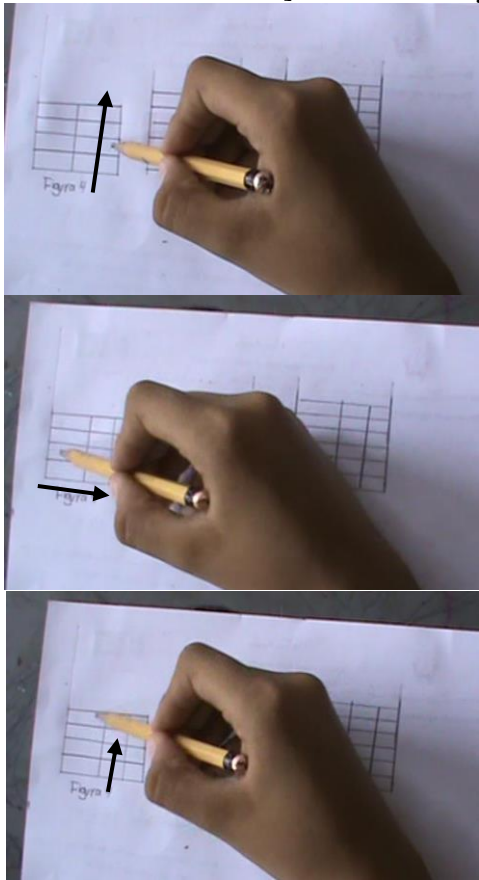


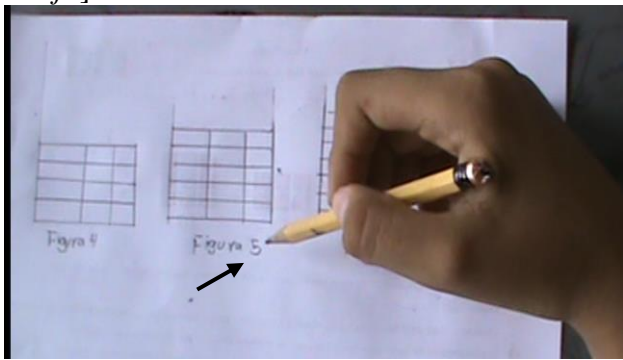
Se introdujo esta secuencia proyectando las tres primeras figuras mientras se preguntaba a todos los estudiantes por la cantidad de cuadrados que había en cada una. Posteriormente, se solicita entonces a los estudiantes que realicen el dibujo correspondiente de las posiciones 4, 5 y 6

de la secuencia. A continuación se presenta la conversación que se desarrolla entre el profesor y el estudiante Danny sobre la resolución del primer punto.

**Transcripción 7**

*Primer punto de la tarea 3 con Danny*

L1	<p>PROFESOR: ¿Cómo te quedaron las figuras 4, 5 y 6? Explícame cómo hiciste cada una.</p>	
L2	<p>DANNY: Lo hice así, conté cuántos cuadros tenía cada figura [<i>apunta su lápiz a la parte inferior derecha de la figura 4 del patrón y comienza a contar</i>] uno, dos, tres, cuatro [<i>mueve el lápiz cuadro a cuadro hasta llegar hasta arriba</i>] y después, hice los cuadros así [<i>señala en la figura 4 tres líneas horizontales</i>] y después así [<i>señala en la figura 4 dos líneas verticales</i>] así hice las rayas.</p> 	<p>Movimientos verticales y horizontales como medio semiótico para indicar la forma de la construcción de los cuadros.</p> <p>En las imágenes de la izquierda se muestra la secuencia de la construcción que realizó el estudiante para dar respuesta a la forma del patrón en la posición 4, 5 y 6</p>
L3	<p>DANNY: Acá igual [<i>señala de arriba hacia abajo los cuadros de la última columna de la figura 5</i>] solo que le</p>	

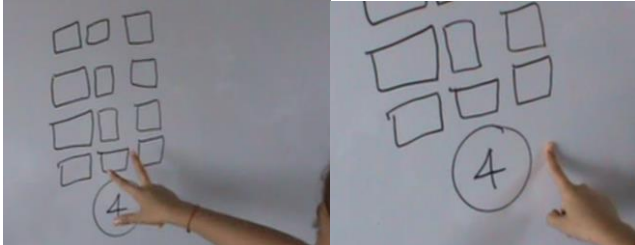
	<p>aumente cuadros, cuántos cuadros tuviera la figura [indica el número de la figura que se encuentra debajo del dibujo]</p> 	<p>Uso de deícticos espaciales “acá” y movimientos como medio semiótico para objetivar la comunalidad entre la figura 4 y la figura 5.</p> <p>Señalizaciones como medio semiótico para indicar dependencia de aumento de cuadros con el número de la figura.</p>
--	--	--

En este episodio, un aspecto a resaltar consiste en el deíctico espacial que usa Danny durante todo el dialogo para explicar la forma cómo ha construido cada figura, lo cual sugiere que ha identificado la comunalidad o característica común y ha encontrado una manera mediante el trazo de líneas de predecir cada figura particular que le sea solicitada. En la línea 3 “*Acá igual solo que le aumento cuadros, cuantos cuadros tuviera la figura*” el análisis indica que el estudiante ha logrado encontrar una relación entre el número de la figura y la cantidad de cuadrados que tiene cada término (aunque esto aún no es explícito) de la secuencia sin la necesidad de un procedimiento aritmético. Se considera ahora este otro fragmento donde una estudiante argumenta la forma y cantidad de círculos que tiene una figura.

**Transcripción 8**

*Primer punto de la tarea 3 con Mariana*

L1	<p>PROFESOR: [Dirigiéndose a todos] Bueno, vamos a ver cómo dibujaron los compañeros la figura 4, la figura 5 y la figura 6 en el tablero.</p>	<p>Se seleccionaron 3 estudiantes del salón para ilustrar los logros de sus grupos de trabajo.</p>
L2	<p>PROFESOR: Cuéntanos por qué la figura 4 es así [Se dirige al estudiante que dibujo la figura 4 en el tablero].</p>	

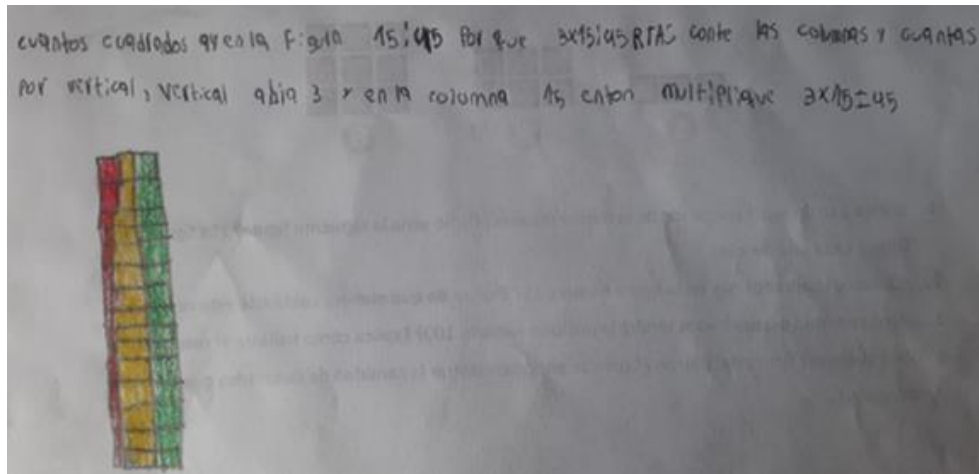
<p>L3</p>	<p>MARIANA: Porque me di cuenta de que cada figura tenía una fila más, entonces la figura uno solo tenía una fila de 3 cuadritos [<i>señala la primera fila que había dibujado</i>] la de dos tiene 2 y la tres tiene 3, entonces en la figura cuatro tenía cuatro filas de a 3 cuadritos y entonces así era la figura cuatro [<i>señala con el dedo el número de la figura</i>].</p> 	<p>Señalamientos como medio semiótico para indicar la cantidad de cuadritos por fila y la cantidad de filas en la figura 4.</p>
-----------	---	---

En la línea 3, a partir de las expresiones “*me di cuenta de que cada figura tenía una fila más*” y “*la figura uno solo tenía una fila de 3 cuadritos*” se puede inferir que estos dos razonamientos que la estudiante ha identificado la regularidad en los primeros términos de manera que puede realizar la construcción de la figura 4, es decir, la estudiante propone que a medida que crece la secuencia, la figura aumenta una fila, y que dicha fila aumentará la cantidad de cuadrados en 3 unidades.

Dado que la pregunta anterior solo enfatizaba el dibujo de las figuras, se les pide a los estudiantes encontrar la cantidad de cuadrados en la figura número 15 y explicaran de qué manera habían calculado el resultado. Se intentaba promover que los estudiantes produjeran una explicación que mostrara el uso de una generalidad en cuanto a la cantidad de cuadrados que hay en figuras que tomaría más tiempo representar. Mostramos a continuación la producción de Matías y Mariana, donde se evidencia el hallazgo de dos formas de determinar la cantidad de cuadrados en la figura pedida.

**Figura 21**

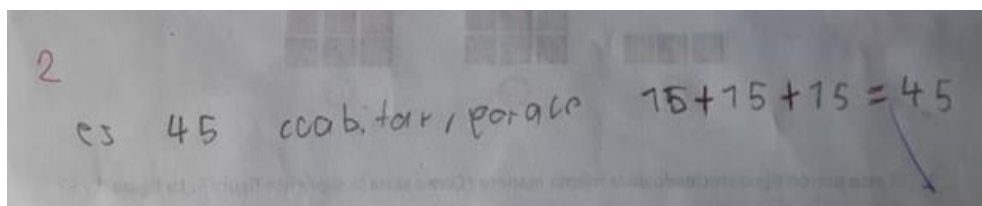
*Producción del segundo punto de la tarea 3 con Matías*



En este caso, Matías encuentra la forma de calcular la cantidad de cuadrados que tiene la figura 15. Se observa que la respuesta entregada está acompañada de diferentes medios para justificar que su razonamiento es correcto. En primer lugar, se identifica el uso de una estrategia multiplicativa para hallar el resultado, la expresión “*conté las columnas y cuantas por vertical, vertical había 3 y en la columna 15, entonces multipliqué  $3 \times 15 = 45$* ” confirma que utiliza el hecho numérico de que al tener grupos con el mismo número de elementos es posible determinar el total al multiplicar el número de grupos por el número de elementos. Además, acompaña esta explicación con un dibujo que es considerado un medio semiótico que demuestra que el estudiante identifica comunalidad a partir de las representaciones gráficas. Esto también se observa en otra estudiante que agrupa la cantidad de cuadrados por columnas, pero utiliza la adición en lugar de la multiplicación para determinar el total de elementos en la posición 15 de la secuencia.

**Figura 22**

*Producción del segundo punto de la tarea 3 con Mariana*

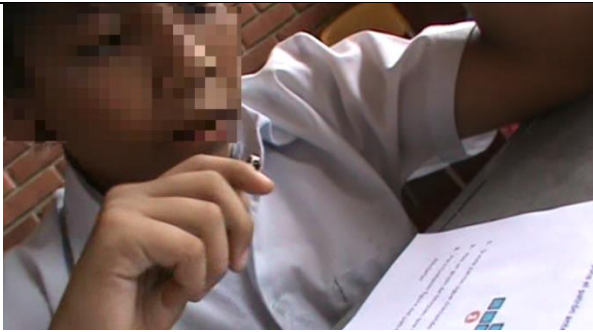


Las siguientes dos preguntas relacionadas con este patrón, tenían por objetivo motivar a los estudiantes a producir una generalización de la propiedad, o característica común de la secuencia, lo que en términos de la TO corresponde a plantear una abducción (Radford, 2013). El siguiente episodio evidencia una evolución de una forma de pensamiento algebraico factual a una forma contextual.

**Transcripción 9**

Cuarto punto de la tarea 3 con Danny

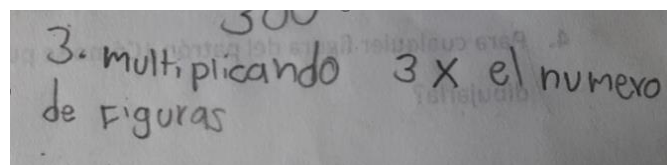
L1	PROFESOR: [ <i>Dirigiéndose a todos</i> ] Vamos con la última pregunta, voy a pasar por cada uno de los puestos a ver a qué conclusiones han llegado [ <i>Luego de unos minutos se acercó a algunos estudiantes que manifestaban a ver terminado</i> ]	
L2	PROFESOR: ¿Me podrías decir a qué has llegado?	
L3	DANNY: Se puede multiplicar tres por la cantidad de figuras [ <i>no realiza ningún movimiento mientras responde</i> ]	Uso de la función generativa del lenguaje como medio semiótico para expresar la generalidad.
L4	PROFESOR: Entonces si yo quiero encontrar la cantidad de cuadros en la figura 2000 ¿Qué debo hacer?	
L5	DANNY: Pues al multiplicarlo por 3 quedaría [ <i>Piensa unos cuantos segundos el resultado</i> ] sería 6000.	

		
L6	PROFESOR: ¡Muy bien!	

En síntesis, el diálogo como parte de la actividad sugiere que Danny no solo ha comprendido la característica común, sino también la ha generalizado, proponiendo una abducción para los términos subsecuentes de la secuencia como se evidencia en la línea 3. Esto le da la capacidad de calcular la cantidad de círculos de figuras grandes o remotas, aspecto que se observa entre la línea 4 y 5 donde se le pregunta a Danny por el número de cuadrados de una figura grande y responde correctamente al emplear la generalización algebraica a la que había llegado. De acuerdo con esto, se afirma que el estudiante en la tarea 3 muestra evidencias de un pensamiento algebraico contextual dado que la indeterminación se convierte en el objeto del discurso, además, ha surgido una formulación algebraica como una descripción de la generalidad de la secuencia presentada. En la Figura 23 se puede observar la producción escrita que realizó este estudiante durante este ítem.

**Figura 23**

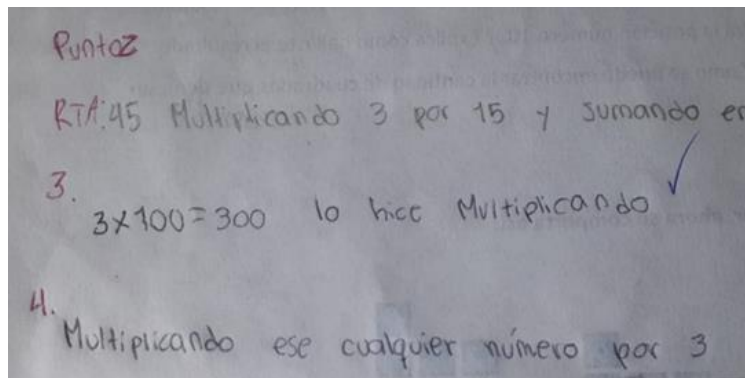
*Producción de Danny Tarea 3 punto 4 con la primera secuencia.*



Aunque a primera vista parece que ha hecho uso de símbolos para representar la indeterminación de la figura, los que el estudiante expresa con el signo “equis” es alusivo a operación de la multiplicación, lo que significa que lo que ha escrito se traduce a “*multiplicando 3 por el número de la figura*”. Algunos estudiantes llegaron a la misma conclusión, no obstante la expresión “*cualquier número*” resultó confusa en un primer momento, se cree que esto se debe a la naturaleza de las preguntas anteriores, dado que estas dirigen la atención del estudiante a indagaciones de casos particulares, luego, al no encontrar un número específico de la figura hizo que la pregunta generara confusión. En la Figura 24 se evidencia cómo la estudiante Alejandra llega a la generalidad mencionando de manera implícita el número de la figura.

#### Figura 24

*Producción de Alejandra Tarea 3 punto 4 con la primera secuencia.*



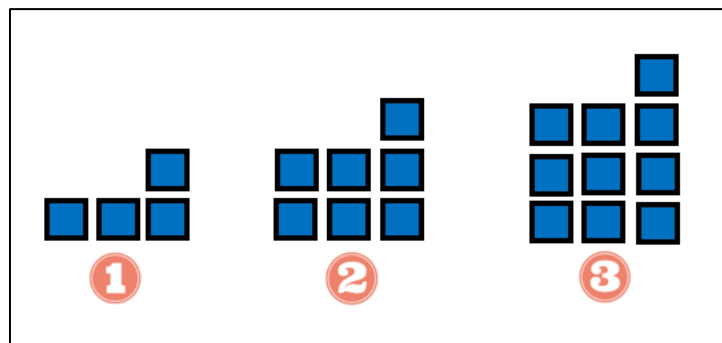
En la hoja de trabajo de esta estudiante, se distingue el uso de una estrategia multiplicativa durante toda la Tarea 3, al llegar a la pregunta que solicita una forma de encontrar la cantidad de cuadrados que tiene cualquier figura sin tener que dibujarla, utiliza la expresión “*multiplicando ese cualquier número por tres*” para referirse a una generalización contextual donde se pretende que la comunalidad pueda ser aplicada a figuras que no son fáciles de dibujar al realizar el producto

de un número dado por 3. Como resultado, esta frase en particular se convierte en una expresión semiótica que representa el actuar operatorio con cantidades indeterminadas.

La segunda secuencia figural (Ver figura 25) es semejante al anterior, dado que describe un arreglo formado por  $3n + 1$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . En esta parte de la Tarea 3 se esperaba que los estudiantes presten atención a las similitudes y diferencias con las figuras de la secuencia anterior, encuentren otras alternativas para encontrar la cantidad total de cuadrados y expresa la generalidad mediante expresiones verbales, escritas u otros recursos semióticos como señalamientos o movimientos indéxales.

**Figura 25**

*Segunda secuencia figural apoyada por representación tabular en la Tarea 3*

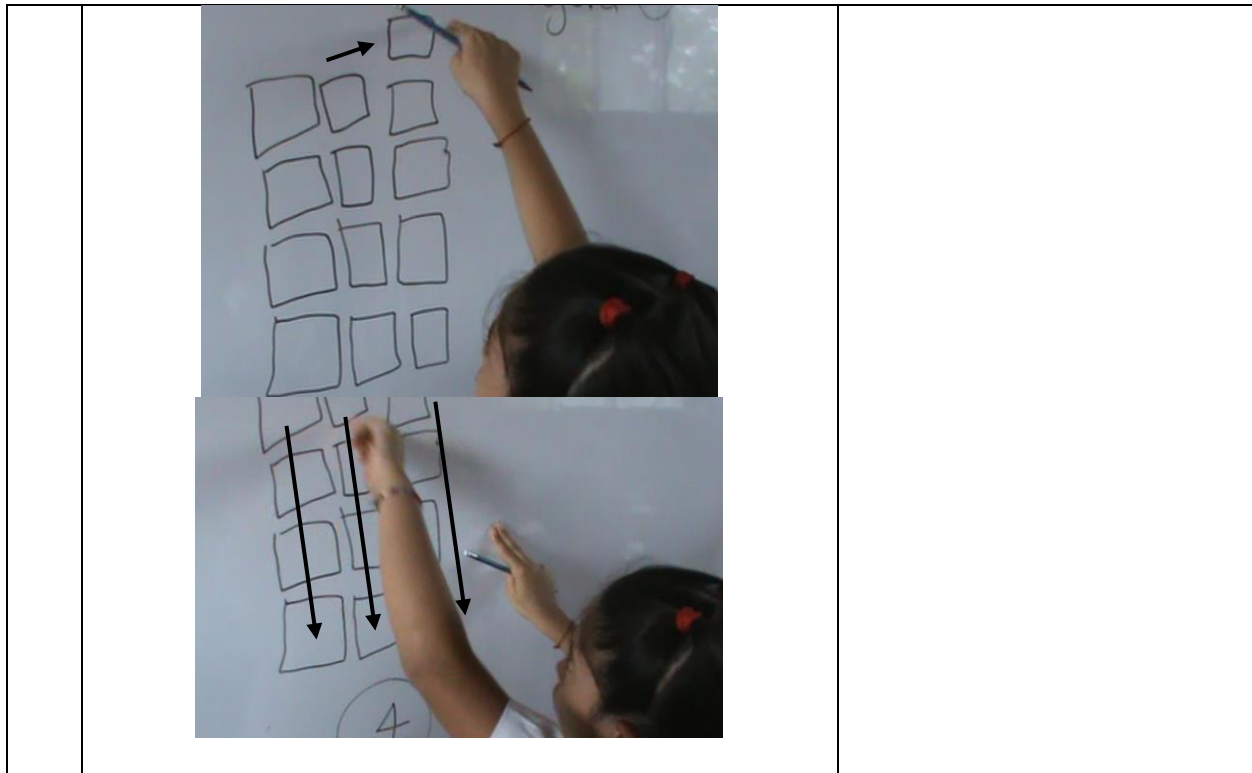


Por lo que se refiere a la construcción de las figuras de la segunda secuencia, se encontraron principalmente dos formas de realizarlo, la primera estaba relacionada con la expresión  $3n + 1$ , dado que en el primer patrón muchos estudiantes habían llegado a la conclusión de que la forma de determinar la cantidad de los cuadrados en cada posición era multiplicar tres por el número de la figura, entonces al encontrar esta semejanza, ahora solo debían considerar el cuadrado extra que se encontraba arriba. Se presentan las producciones de Mariana en la siguiente transcripción y Figura 26 que muestra su hoja de trabajo para ilustrar como ha objetivado a partir de la expresión  $n + n + (n + 1)$ .

**Transcripción 10**

*Primer punto de la tarea 3 con Mariana en la segunda secuencia*

L1	<p>PROFESOR: <i>[Dirigiéndose a todos]</i> Vamos con la primera pregunta, voy a pasar por cada uno de los dibujos a ver a que conclusiones han llegado <i>[Luego de unos minutos se acercó a algunos estudiantes que manifestaban a ver terminado su dibujo en el tablero]</i></p>	
L2	<p>PROFESOR: Muy bien, comenzamos con la primera figura <i>[señala la figura número cuatro del segundo patrón]</i> ¿Cómo lo hiciste?</p>	
L3	<p>MARIANA: Pues me di cuenta que era como la otra forma, solo que aquí arriba <i>[señala un cuadro que se encuentra por encima de todos los demás]</i> tenía un cuadrito que el otro no tenía, entonces vamos a sumar <i>[Mueve su mano derecha a la primera columna de la figura]</i> cuatro, cuatro, cuatro <i>[recorrió 3 columnas del dibujo con 4 cuadrados]</i> y uno arriba cinco <i>[señala el cuadro que se encuentra más arriba que lo demás]</i> entonces sería cuatro, cuatro y cinco <i>[repite el mismo movimiento que hizo al subir y bajar con mano izquierda por todas las columnas de la imagen]</i></p> <div data-bbox="381 1119 899 1533" data-label="Image"> </div>	<p>Uso de la expresión semiótica “aquí arriba” como déictico espacial para indicar elementos del patrón visualmente alcanzables.</p> <p>Las imágenes de la izquierda intentan mostrar las dos series de sumas que realiza Mariana para determinar la cantidad de cuadros en la figura 4 de la secuencia.</p> <p>Ritmo y movimientos como medios semióticos de objetivación para expresar las dos formas en las que ha considerado la secuencia.</p>

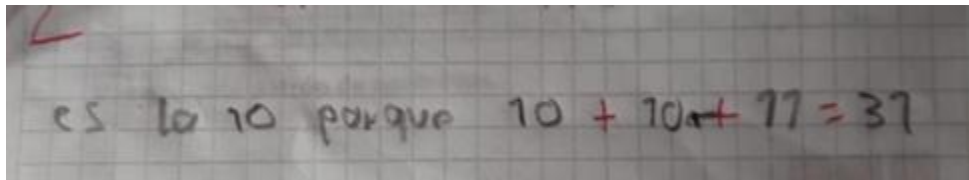


En este caso, Mariana expone la manera de construir la figura 4 de la secuencia mediante la operación  $4 + 4 + 4 + 1$  dado que en la línea expresa “*solo que aquí arriba tenía un cuadrado que el otro no tenía*” entonces debe sumar uno de más, esta forma de calcularlo hace referencia a la expresión algebraica  $n + n + n + 1$ . Se observa que, luego de explicar este procedimiento, agrupa los últimos dos sumandos en uno solo, lo que expresa como la suma de  $4 + 4 + 5$ , acompañado de la movilización de su mano izquierda como un recurso semiótico para mostrar cómo ha configurado la secuencia en relación con la cantidad de cuadrados en cada columna, lo que en términos algebraicos podríamos decir que ha transformado  $n + n + n + 1 = n + n + (n + 1)$  que puede no ser tan significativo matemáticamente, pero ilustra cómo la coordinación multimodal de recursos semióticos en acciones como el discurso, los señalamientos y la actividad perceptual se convierten en un nodo semiótico para lograr un punto de vista algebraico.

En cuanto a la segunda pregunta, esta tenía el objetivo de observar que procesos de objetivación surgían en los estudiantes si en lugar de preguntar por la cantidad de cuadrados en una figura, se preguntaba por el número de la figura de un arreglo con 31 cuadrados. Algebraicamente este problema podría expresarse como  $3n + 1 = 31$ , donde  $n$  es el número de la figura, y al despejar  $n$  de la ecuación encontramos que su valor es 10, un procedimiento que los estudiantes desconocen totalmente, de manera que se busca encontrar que otras maneras encuentran los estudiantes para dar solución a este problema. En la siguiente imagen (Ver figura 26) continuamos con las producciones de Mariana dado que se consideran representativas.

### Figura 26

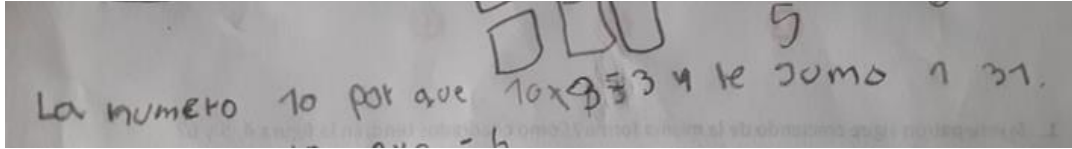
*Producción de Mariana Tarea 3 punto 2 con la segunda secuencia.*



La evidencia mostrada en la Figura 26 sugiere que Mariana mantiene la forma en como calcula la cantidad de cuadrados en cada posición de la secuencia, además, muestra una articulación de la estructura numérica con la estructura espacial, es decir, ha objetivado una regularidad y a concebido la figura dividida en tres partes,  $n + n + (n + 1)$ , es precisamente esto lo que le permite comprobar que la figura 10 tiene una cantidad de 31 cuadrados en su estructura. La figura 27 nos muestra otra posibilidad mediante la producción de Isabella, la cual indica la movilización de medios semióticos como la lingüística, lo cual permite percibir la intención de la manera cómo ha procedido para encontrar la respuesta a pesar de algunos errores en la redacción.

**Figura 27**

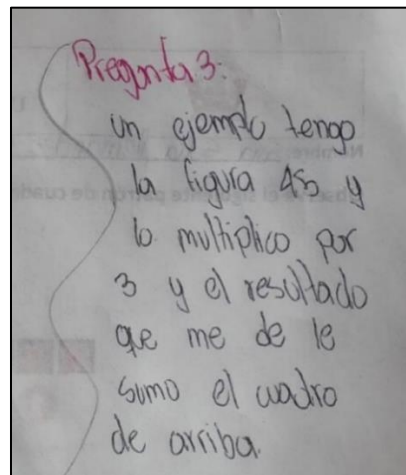
*Producción de Isabella Tarea 3 punto 2 con la segunda secuencia.*



Por lo que se refiere a la generalización del segundo patrón en la Tarea 3, se observó que la mayoría de los estudiantes y grupos lograron comunicar la regularidad objetivada para construir las figuras verbalmente, pero esto no fue posible en la comunicación escrita. Varios de los estudiantes aplicaron la generalización en esquemas operacionales para casos específicos grandes como una alternativa para referirse a la indeterminación del número de la figura (Ver Figura 28).

**Figura 28**

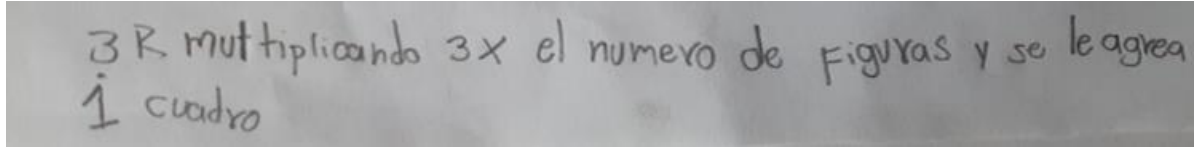
*Producción de Sara Tarea 3 punto 3 con la segunda secuencia.*



Las hojas de trabajo mostraban una gran dificultad para comunicar argumentos de forma escrita, pero unos pocos estudiantes lograron describir la manera de contar la cantidad de cuadrados en cualquier figura de la secuencia sin la necesidad de dibujarla. Por ejemplo, como lo hizo Danny (Ver Figura 29).

**Figura 29**

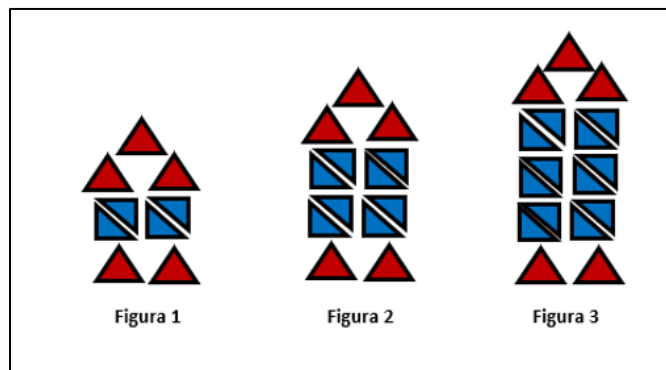
*Producción de Danny Tarea 3 punto 3 con la segunda secuencia.*



Finalmente, el tercer patrón consistía en un arreglo en forma de “cohete” (Ver figura 30), este patrón puede describirse como un arreglo formado por tres triángulos en la parte superior del cohete y dos triángulos en la parte inferior del mismo, mientras que el cuerpo del cohete está formado por dos columnas de  $4n$  triángulos para  $n = 1, 2, 3, \dots$  Esto quiere decir, que la cantidad total de triángulo en la secuencia corresponde a la expresión  $4n + 5$  triángulos para  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Figura 30**

*Tercera secuencia figural apoyada por representación tabular en la Tarea 3*

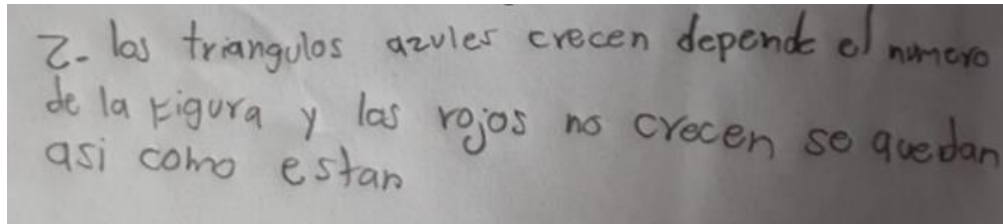


Observemos que esta secuencia está compuesta por dos colores, el color azul corresponde a la cantidad de triángulos que cambian en relación con el número de la figura y el rojo que representa una cantidad constante. El análisis enfatizará las producciones realizadas en punto 2 donde se buscaba que el estudiante evidencie de la presencia de elementos variantes y no variantes dentro de la secuencia, y el punto 3 motiva al estudiante a deducir una forma que le permita encontrar la cantidad de triángulos para cualquier término de la secuencia. En la Figura 31 se

muestra la producción de Danny, donde es posible ver cómo diferencia el crecimiento de los dos grupos de triángulos en la secuencia.

### Figura 31

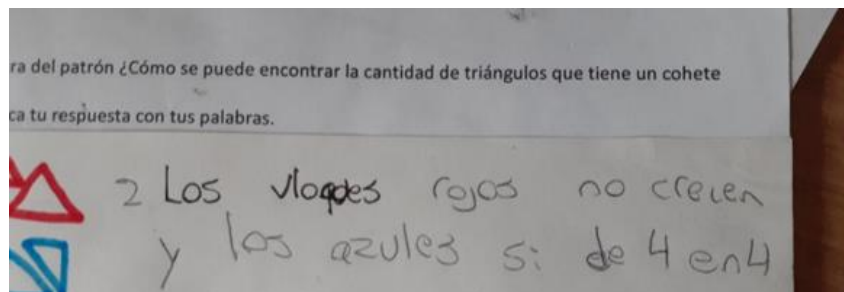
*Producción de Danny Tarea 3 punto 2 con la tercera secuencia.*



Se infiere que la producción escrita de Danny evidencia indicios de la identificación de una relación funcional, puesto que el estudiante percibe que la cantidad de triángulos azules está directamente relacionada con el número de la figura, mientras que los triángulos rojos no se ven alterados por esto. La expresión “*así como están*” manifiesta el uso de deícticos espaciales para indicar términos visualmente alcanzables, aunque el estudiante no realiza ningún señalamiento, si hace referencia a los 3 cohetes presentes en la hoja de trabajo. El estudiante expresa una generalización de la comunalidad de la secuencia de triángulos azules, sin embargo, no especifica de qué manera exactamente aumenta, aspecto que si consideraron otros estudiantes en sus producciones (Ver Figura 32).

### Figura 32

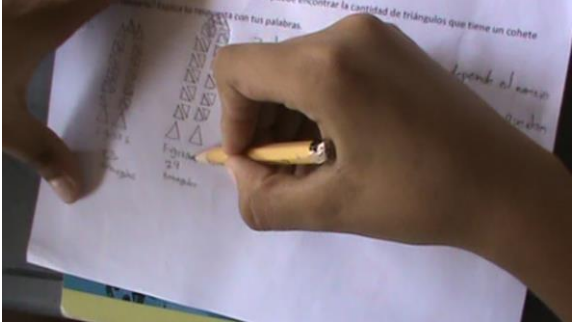
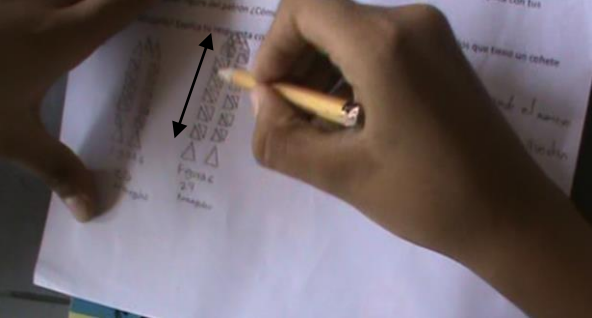
*Producción de Alejandro Tarea 3 punto 2 con la tercera secuencia.*

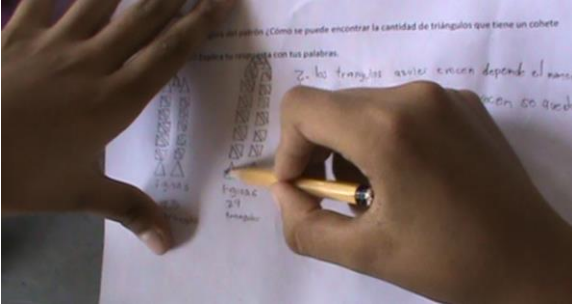


En el siguiente episodio se muestra el diálogo entre el profesor y Danny respecto a la generalización de la secuencia del cohete.

**Transcripción 11**

*Tercer punto en la tarea 3 con Danny en la tercera secuencia*

L1	<p>PROFESOR: ¿A qué respuesta llegaste para la pregunta 3, Danny?</p>	
L2	<p>DANNY: Si a mí me dicen que 15...que haga la figura 15, entonces yo sumo <math>15 + 15</math> que es por un lado.</p>	
L3	<p>PROFESOR: <i>[Interviene]</i> ¿Por qué <math>15 + 15</math>?</p>	
L4	<p>DANNY: Porque cada lado de acá... <i>[Busca un dibujo que había realizado de la figura 6 del patrón del cohete]</i></p>  <p>Seis, seis tiene <i>[señala la palabra "figura 6"]</i> una, dos, tres, cuatro, cinco y seis <i>[señala y cuenta triángulo a triángulo los triángulos azules de una parte de la columna del cohete]</i> y el otro lado tiene seis <i>[señala la otra parte de una misma columna de triángulos]</i> y <math>6 + 6</math> es 12.</p>  <p>Y lo otro va a hacer con el otro lado <i>[señala la otra columna compuesta de triángulos azules]</i> entonces <math>12 + 12</math> da 24 y después se suma estos cuadros de acá</p>	<p>Uso de la expresión semiótica "acá" como deíctico espacial (gesto como señalamientos).</p> <p>Uso de la expresión "lado" para indicar cada una de las dos columnas de triángulos azules de la secuencia.</p> <p>Uso reiterativo de deícticos espaciales.</p>

	<p>[señalando los triángulos rojos que están en la parte alta y baja del cohete]</p> 	
L5	<p>PROFESOR: ¿Entonces para la figura 15 cómo sería?</p>	
L6	<p>DANNY: Sumar <math>15 + 15</math> que es lo de un lado que daría 30, pero del otro lado, entonces son 60 y después se le suma esto [vuelve a señalar los triángulos rojos] entonces quedaría 65.</p>	<p>Uso de deícticos espaciales como “esto” y movimientos como medio semiótico para objetivar la abducción.</p>
L7	<p>PROFESOR: ¡Perfecto!</p>	

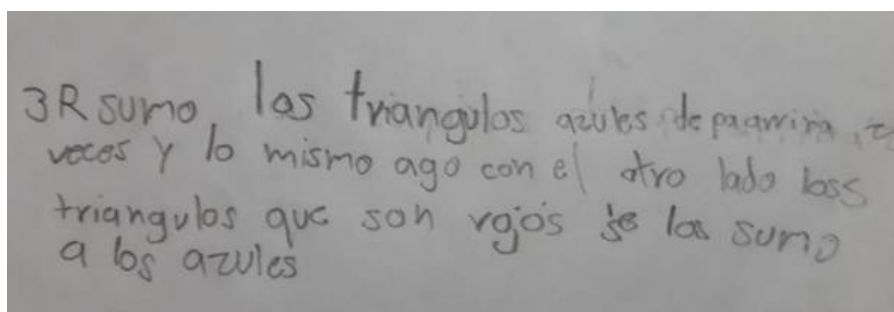
En este episodio, el estudiante comienza a comunicar la iniciación a una generalización contextual donde se pretende que la comunalidad pueda ser aplicada a la figura 15 (figura que resulta difícil de dibujar debido a las características del patrón) a partir de la figura 6, diálogo que se ve a detalle en las líneas 2, 3 y 4. Es este proceso que Danny ha realizado, emerge un nodo semiótico que caracteriza la actividad reflexiva del estudiante mediada por medios semióticos de objetivación, como lo son la actividad de coordinación de deícticos espaciales, los señalamientos, el discurso y la actividad perceptual.

En el diálogo, el estudiante recurre a distintas expresiones como “acá”, “esto” y “lado” de lo que se ha inferido que el estudiante divide la estructura espacial de la figura en 4 columnas de triángulos azules, cada una con una cantidad de triángulos igual al número de la posición de la figura y 5 triángulos rojos, los cuales ha mencionado “*se quedan así como están*”, lo que implica un esquema aditivo entre las 4 columnas de triángulos azules y los 5 triángulos rojos constantes.

Escribir estas ideas que ha dicho verbalmente durante el dialogo con el profesor no resulta ser una tarea fácil, al analizar la producción escrita en este punto, se observa que lo indeterminado queda por fuera de sus palabras, es decir, se ha consolidado una generalización algebraica factual (Ver figura 33).

### Figura 33

*Producción de Danny Tarea 3 punto 3 con la tercera secuencia.*



#### 8.4 Tarea 4 (Equivalencia aritmética, generalización y modelado)

El diseño de esta tarea buscaba integrar en una sola situación aspectos sobre la generalización de patrones, la aritmética generalizada y la modelación, de manera que el trabajo conjunto entre estos tres elementos desarrollara el pensamiento algebraico temprano y aumentara la cantidad de recursos semióticos movilizados por los estudiantes. Bajo estas circunstancias, se buscaba acercar a los estudiantes a una situación a matematizar y luego encontrar regularidades inherentes al problema, junto con una variedad de expresiones aritméticas posibles para formalizar una generalización.


Las preguntas iniciales estaban enfocadas en reconocer estrategias numéricas y sus generalizaciones en un nivel concreto, es decir, determinar la cantidad de círculos totales en relación con la cantidad de círculos que tiene el portavasos en el borde, una vez realizado esto, los estudiantes debían combinar estos dos elementos para construir una generalización dentro de la

forma de pensamiento algebraico factual. Antes de distribuir a los estudiantes en pequeños grupos, el profesor presenta la actividad y se realiza una discusión general con respecto a la forma de los portavasos con 6, 7 y 8 círculos en cada borde, y la cantidad de círculos total en cada uno. El siguiente diálogo se centra en la labor conjunta realizada por Matías y el profesor donde se observa la articulación de diferentes medios semióticos para lograr expresar su razonamiento sobre la forma de obtener la cantidad de cuadrados en el portavaso que tiene 8 círculos en el borde.

**Transcripción 12**

*Interacción en la tarea 4 con Matías*

L1	PROFESOR: [ <i>Dirigiéndose a todos</i> ] Bueno niños, quiero que contemos la cantidad de círculos que hay en estos portavasos. Esta vez quiero que tengamos en cuenta la cantidad de círculos que tiene el portavaso en cada lado ¿Bien?	Los estudiantes contaron junto con el profesor los círculos de los portavasos con 5, 6 y 7 círculos en cada lado mientras se mostraba la imagen en el tablero (Diseño 1).
L2	PROFESOR: Muy bien, ahora quiero que me digan cuantos círculos tiene el portavasos que tiene 8 círculos en cada lado antes de que yo les muestre la imagen.	Entre todos los estudiantes, se prestó atención a los cálculos que realizaba Matías
L3	MATIAS: $16+7$ da 23... [ <i>Mantiene la mirada elevada mientras realiza cálculos mentales y revisa las imágenes de portavasos ya mostradas</i> ] Creo que lo hago mal...	
L4	PROFESOR: ¿Seguro? ¿Por qué?	
L5	MATIAS: Porque contaría las de arriba...8 [ <i>señala con el dedo la cantidad superior de círculos que hay en el portavasos de 8 círculos de lado</i> ] más 8 da 16 [ <i>señala con el dedo la cantidad inferior de círculos que hay en el portavasos de 8 círculos de lado</i> ] y los lados...sobran 6 [ <i>señala con el dedo las cantidades laterales de círculos que hay en el portavasos de 8 círculos de lado</i> ] ¡No son 7! ¡No! ¡No! ¡Si son 6!	Señalamientos y movimientos como medios semióticos de objetivación para expresar las agrupaciones de círculos que está formando para contar.

		
L6	<p>PROFESOR: ¿Por qué tiene 6?</p>	
L7	<p>MATIAS: Si porque cuento los de arriba, entonces 8 y 8 es 16 [<i>señala con el dedo la cantidad superior e inferior de círculos que hay en el portavasos de 8 círculos de lado</i>] y quitamos los dos [<i>señala enfatizando la posición de las esquinas</i>] en ambos lados, entonces quedaría 6.</p>	<p>La expresión “quitamos los dos” hace referencia a las esquinas que ya había contado.</p>
L8	<p>MATIAS: 16 más 6 es 22...más 6 ¡Profe 28!</p>	

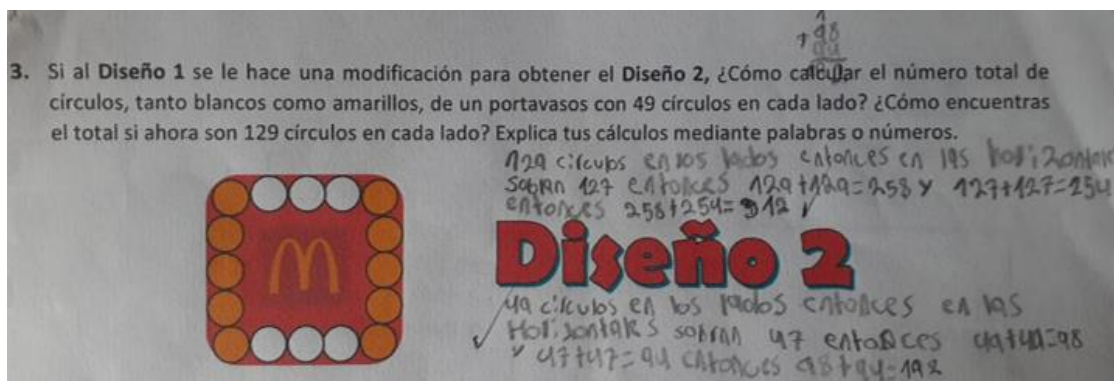
En el episodio anterior, se observa que el estudiante Matías empieza a construir una forma de contar la cantidad total de círculos (de ahora en adelante, nos vamos a referir a cada portavasos de acuerdo con la cantidad de círculos que tiene en el borde, dicho de otra forma, si se menciona “Portavasos 10” se hace referencia al portavasos que tiene 10 círculos en cada borde). Para lograr esto, el estudiante recurre a una articulación entre su expresión verbal, gestos y señalamientos que realiza con sus manos hacia el tablero donde se encuentra el Diseño 1 del portavasos con una cantidad menor de círculos en el borde. En el conteo del portavasos 8, el cual era el portavasos siguiente de las imágenes mostradas en el tablero, Matías a través de la observación identifica algunas de las características del Diseño 1 como son la ubicación espacial de las figuras geométricas que conforman el portavasos y la relación entre el número del portavasos con la cantidad de círculos que tiene en cada lado.

En la línea 5, las expresiones como “*los de arriba*” o “*los lados*” indican las agrupaciones que está realizando para determinar la cantidad total de círculos, además, no menciona en su discurso oraciones como “*los de abajo*” o “*los del otro lado*” lo que sugiere que obligatoriedad

de una regularidad, es decir, la cantidad de círculos que hay arriba es la misma cantidad de círculos que hay abajo y la cantidad de círculos que hay del lado izquierdo es la misma cantidad de círculos que hay de lado derecho. Esta misma estrategia es utilizada por Matías para determinar la cantidad de círculos en el portavasos 49 y 129, lo cual se ha solicitado en la Tarea 4 en el punto 3 utilizando el Diseño 2.

**Figura 34**

*Producción de Matías en el tercer punto de la tarea 4*



En esta parte de la tarea se hace un cambio en el Diseño 1 para obtener el Diseño 2 donde se realizan 4 agrupaciones de círculos entre el color blanco y amarillo como se ve en la Figura 34. En dicha figura se muestra como Matías ha utilizado la misma estrategia, sin embargo, en su producción escrita se observa que ha cambiado la expresión “los de arriba” por la expresión “las horizontales” para referirse a los círculos tanto de arriba como abajo, mientras que la expresión “en los lados” aún permanece refiriéndose a la cantidad de círculos que hay a la derecha e izquierda del portavasos. Si realizamos una comparación entre las agrupaciones que constituye Matías para determinar la cantidad total de círculos, se observa que en el punto 3 ha tenido en cuenta la distribución de colores en el Diseño 2, es decir, la expresión “las horizontales” la utiliza

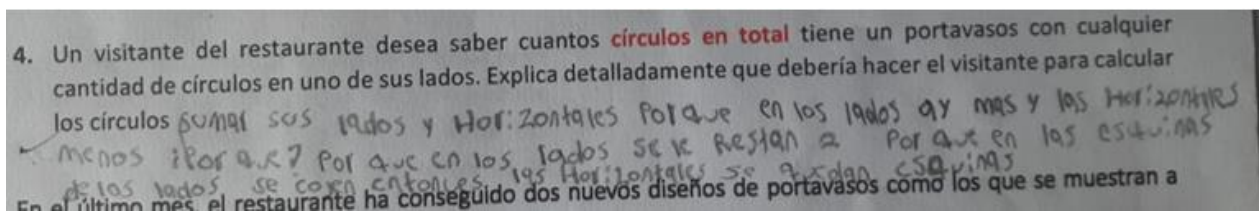
la referirse a los círculos blancos y “*los lados*” para referirse a los amarillos, aunque al principio de la tarea tomaba la cantidad de círculos total del borde arriba y de abajo.

Por otro lado, en la producción escrita de Matías se ve el uso de la palabra “*sobra*” por lo que se infiere que ha identificado una relación de la cantidad círculos amarillos con la cantidad de círculos blancos, razonamiento que le ha permitido encontrar una segunda relación entre la cantidad de círculos en cada lado del cuadrado con la cantidad total de círculos en el portavasos. Esta última relación responde a una equivalencia de la expresión algebraica  $2 \times n + 2 \times (n - 2)$  donde  $n$  es la cantidad de círculos en un lado, luego, la expresión que el estudiante ha utilizado sería la siguiente  $(n + n) + [(n - 2) + (n - 2)]$ .

Esta expresión pudiera ser compleja de escribir para los estudiantes y en el análisis se ha propuesto como un sistema semiótico entre las tres capas para expresar la generalidad, por lo tanto, esta Tarea tiene el objetivo de encontrar si los estudiantes logran trascender de la forma de pensamiento factual al contextual, por lo tanto el punto 4 busca que el estudiante exprese esa generalidad mediante medios semióticos como la escritura o el dibujo. Al seguir las producciones de Matías se encuentra que aunque su respuesta no está ligada al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, la indeterminancia no está involucrada en su respuesta por lo que ha efectuado una generalización algebraica factual como se puede ver en la Figura 35.

**Figura 35**

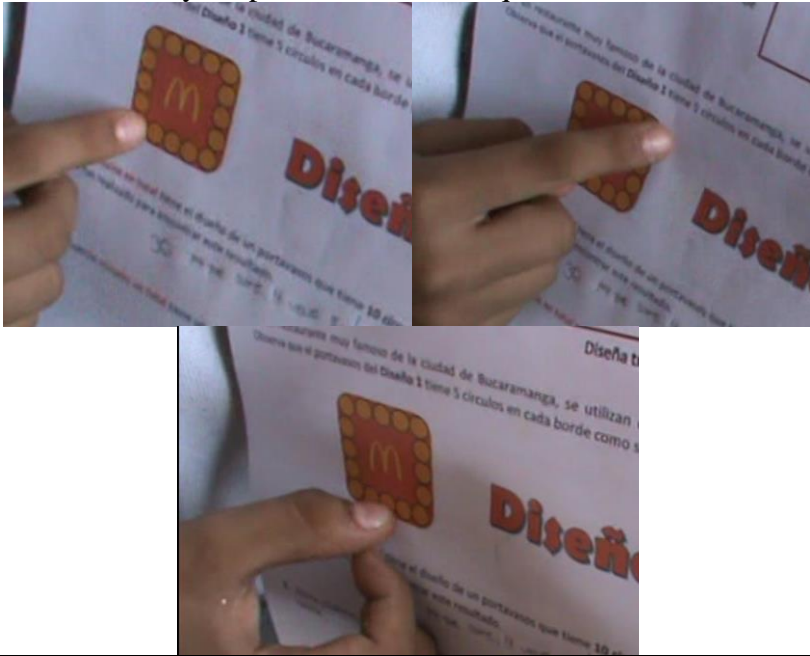
*Producción de Matías en el cuarto punto de la tarea 4*



Otro episodio que resultó relevante en relación con los objetivos de esta Tarea 4 es la aparición del Diseño 3 desde el punto 1 cuando la formulación de este diseño estaba prevista para el punto 5. A continuación se presenta la conversación entre el profesor y el estudiante Danny en relación con la forma en que ha realizado los cálculos para encontrar la cantidad de círculos en los portavasos.

**Transcripción 13**

*Primer y segundo punto de la tarea 4 con Danny*

<p>L1</p>	<p>DANNY: Como aquí en el diseño 1 [Señala la imagen del diseño 1 en la hoja enfatizando las esquinas] le quito las esquinas, después sumo esto [señala con el dedo cuidadosamente 3 cuadros] los lados, lo sumo 4 veces y después le sumo las esquinas.</p> 	<p>En las imágenes se muestra una recreación de los señalamientos y movimientos que hizo el estudiante durante su discurso.</p>
<p>L2</p>	<p>PROFESOR: Muy bien, en ese caso, cuanto te daría la de 15 círculos [Indica la pregunta número 3].</p>	
<p>L3</p>	<p>DANNY: 36 círculos.</p>	
<p>L4</p>	<p>PROFESOR: Eso sería con 10 círculos en cada lado.</p>	
<p>L5</p>	<p>DANNY: Daría... [Revisa la hoja y se va a calcular la pregunta].</p>	<p>Luego de unos minutos vuelve a</p>

		presentar su solución.
L6	DANNY: Profe, quitaría las esquinas, si le quito las esquinas las esquinas [ <i>señala el número 15 presente en el enunciado</i> ] entonces me daría 13 en cada lado [ <i>señala los lados del diseño 1</i> ] entonces, después multiplique 4 por [ <i>toma una pausa</i> ] profe, se puede sumar o multiplicar...4 se puede sumar $4 \times 13$ o sumar 4 veces 13 y yo multipliqué y...sumé 4 veces 13 y después le sume 4	
L7	PROFESOR: [ <i>Se percata de que el resultado de esas operaciones no está en el enunciado</i> ] ¿Entonces cuánto te dio?	
L8	DANNY: 56.	

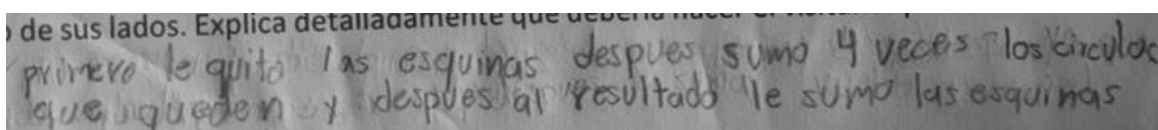
Durante el diálogo con el estudiante se han encontrado múltiples medios semióticos de objetivación los cuales le resultan útiles para contar el número de círculos totales en distintos portavasos dado que se percata que al retirar los círculos de las esquinas, obtendría una cantidad equivalente en cada uno de los lados del portavasos y finalmente debería sumar las cuatro esquinas que había retirado al comienzo. La coordinación de deícticos espaciales como se muestra en la línea 1 (señalamientos a las esquinas y los lados), el ritmo, las palabras que ha utilizado y finalmente la actividad perceptual, convierten toda la actividad en un nodo semiótico que caracteriza la producción de Danny con estos medios semióticos.

Al analizar detalladamente la progresión de sus elaboraciones, se considera que Danny ha consolidado rápidamente una comprensión perceptual del procedimiento aritmético y a su vez, la generalización de ese procedimiento para calcular la cantidad de círculos en portavasos que contengan una mayor cantidad de círculos. En su actividad perceptual, se observa un proceso que algebraicamente se puede escribir como  $4(n - 2) + 4$  donde  $n$  es la cantidad de círculos que tiene en el borde el portavasos. Al observar la generalización escrita que ha realizado en el punto 4 de esta tarea, se identifica que el estudiante expresa un esquema de operaciones como acciones

generalizadas para determinar la cantidad de círculos en cualquier portavasos, además esta generalización debe ir acompañada de una imagen del portavasos debido a que utiliza expresiones como “*le quito las esquinas*” y habla de manera implícita de la cantidad de círculos que hay en el lado de la figura.

### Figura 36

*Producción de Danny Tarea 4 punto 4*

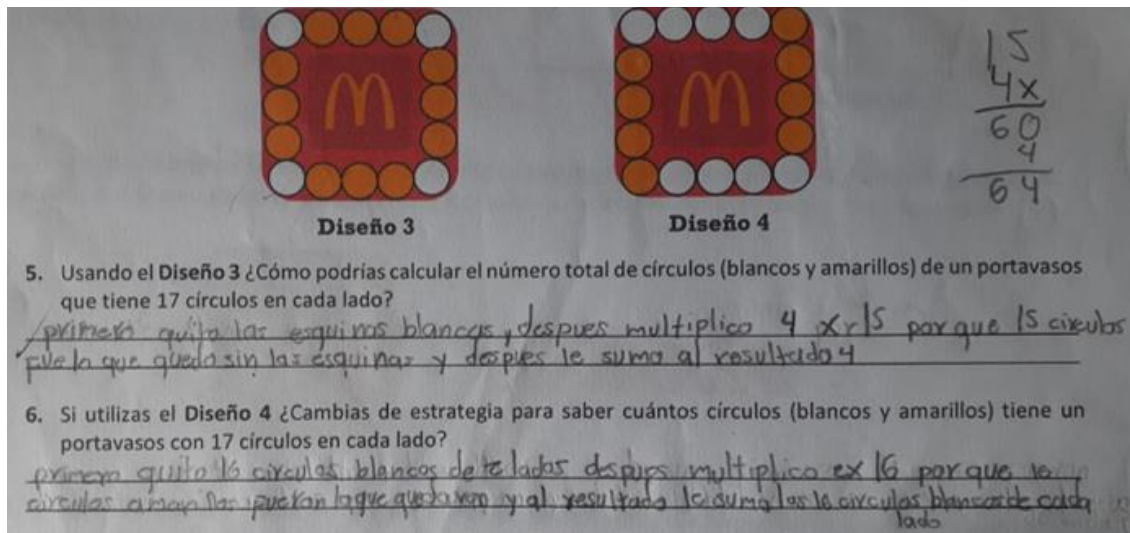


La transcripción de la respuesta que ha consignado Danny a esta pregunta es la siguiente “*Primero le quito las esquinas, después sumo 4 veces los círculos que queden y después al resultado le sumo las esquinas*” es así como el estudiante explica la manera en que ha tomado conciencia de la regularidad de la secuencia y la formación de los círculos como medio para determinar la cantidad total de círculos en cualquier portavasos.

En cuanto a la equivalencia entre las distintas formas en la que se podría calcular la cantidad de círculos en los portavasos, se promueve en el estudiante transformar su procedimiento aritmético adquirido del Diseño 2 o del Diseño 3 mediante la observación de un cuarto diseño con una distribución de colores diferente. Para esto, se pregunta por la cantidad de círculos en el portavasos 17 y por la estrategia que debería utilizar si emplea el Diseño 3 o el Diseño 4 teniendo en cuenta la disposición de los colores en los círculos. La Figura 37 muestra la manera como Danny ha escrito la forma de calcular la cantidad de círculos utilizando cada uno de los dos diseños.

**Figura 37**

*Producción de Danny Tarea 4 punto 5 y 6*

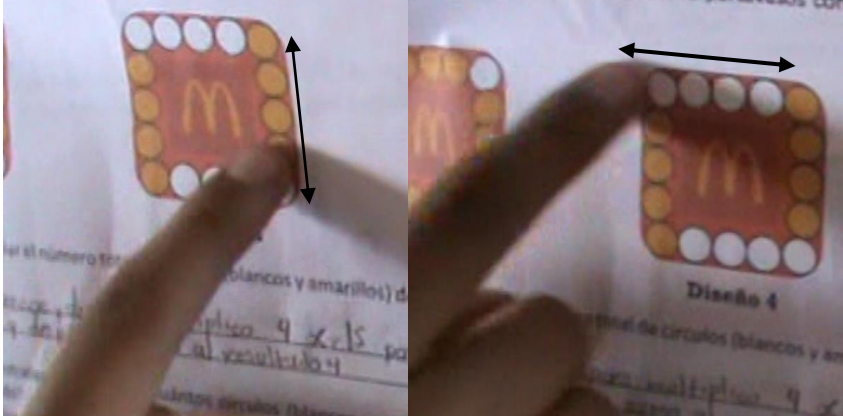


En estudiante ha escrito “*primero quito las esquinas blancas y después multiplico 4x15, porque 15 círculos fue lo que quedó sin las esquinas y después le sumo al resultado 4*” y “*primero quito 16 círculos blancos de 2 lados, después multiplico 2x16 porque 16 círculos amarillos fueron los que quedaron y al resultado le sumo los círculos blancos de cada lado*” en las preguntas 5 y 6 respectivamente. Al analizar ambas producciones se observa que en ambos casos ha optado por retirar la cantidad de círculos blancos que hay en cada portavasos, en el Diseño 3 menciona que “*primero quita las esquinas blancas*” lo que ha influido en las operaciones que realizó al utilizar el Diseño 4 dado que comienza su producción escrita con la expresión “*primero quito los 16 círculos blancos de los lados*” pero de acuerdo con la Transcripción 13, el estudiante sí se ha percatado que la distribución de la cantidad de círculos blancos y amarillos es la misma.

**Transcripción 14**

Sexto punto en la tarea 4 con Danny

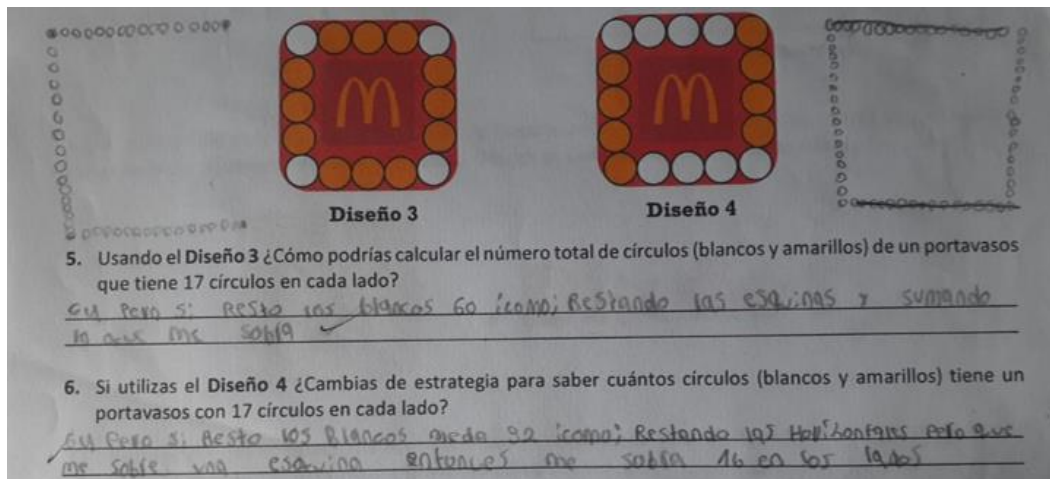
L1	PROFESOR: Explícame cómo resolviste la pregunta 6 ¿Cómo lo hiciste? [señala el diseño 4 de portavasos]	
----	--	--

<p>L2</p>	<p>DANNY: Primero quito 16 círculos blancos, como aquí [señala con el dedo el diseño 4 que apenas tiene 5 círculos en cada lado] aquí quedan 4 y 4 [señala con el dedo los círculos amarillos del diseño 4 de arriba hacia abajo] y para cada lado es el mismo número [señala y empareja con el dedo los lados con mismo color y cantidad de círculos]</p> 	<p>En las imágenes se muestra una recreación de los señalamientos y movimientos que hizo el estudiante durante su discurso.</p>
	<p>PROFESOR: y siguiendo con esa idea ¿Cómo calculas el portavasos de 17 círculos?</p>	
	<p>DANNY: Entonces primero le quito 16 círculos blancos de dos lados [mantiene guiada su lectura con el dedo] después multiplico <math>2 \times 16</math> porque 16 círculos amarillos fueron los que quedaron, como aquí [señala una vez más el diseño 4 presentado en la hoja] amarillos que son los mismos y al resultado le sumamos 16 círculos blancos de cada lado.</p>	

Esto produce entonces una equivalencia de la expresión algebraica  $4(n - 2) + 4 = 2(n - 1) + 2(n - 1)$  aunque de acuerdo con la respuesta del estudiante no fue esto lo que aritméticamente hablando sucede, si no que divide el procedimiento en dos operaciones, primero con los círculos amarillos y luego con los círculos blancos. Es la expresión “quitar” un recurso lingüístico que el estudiante moviliza para indicar esta separación entre los cálculos, por ejemplo, el procedimiento aritmético realizado para el portavasos 17 podría escribirse como  $(15 \times 4) + 4 = (2 \times 16) + (2 \times 16) = 64$ . Esto sucede de manera similar con otro estudiante, solamente que utiliza la palabra “restar” en lugar de “quitar” para expresar la separación de los cálculos y encontrar la equivalencia.

**Figura 38**

*Producción de Matías Tarea 4 punto 5 y 6*



El estudiante Matías se había enfocado solamente en resolver las preguntas mediante el Diseño 2, sin embargo, se observa en la Figura 38 como ha dibujado el portavasos 17 en relación con el Diseño 3 y el Diseño 4 y así, conseguir una generalización factual dado que al integrarlo con sus respuestas escritas, se identifica cómo ha involucrado mediante su actividad perceptual los diseños y los dibujos para proporcionar un procedimiento numérico que potencialmente puede proporcionarle la cantidad de círculos amarillos y blancos de cualquier diseño de portavasos, aunque en este caso solo fuera el portavasos 17.

Llegados a este punto, es relevante concentrar nuestra atención en los diversos resultados en el trabajo de estudiantes como Danny, quien ha demostrado un mayor nivel de comprensión de las características de las secuencias y el concepto de igualdad como equivalencia a lo largo de las sesiones llevadas a cabo hasta ahora. Por un lado, demuestra que ha adquirido conocimiento sobre cómo construir términos de la secuencia, ha identificado patrones comunes, ha llevado a cabo procesos de abducción de los diferentes patrones y en cada uno de ellos ha formulado hipótesis sobre el término general de la secuencia. Por otro lado, se evidencia como logra movilizarse entre

distintas estrategias de cálculo y adopta un proceso de acciones aritméticas generalizadas de acuerdo con las condiciones del contexto de la tarea. Es por medio de las tareas y la movilización de recursos semióticos, que Danny desarrolla una comprensión profunda de estos enfoques algebraicos del pensamiento (generalización de patrones y aritmética generalizada).

**Tabla 3**

*Producciones de Danny a lo largo de distintas tareas*

	<b>Identificación de la comunalidad (Tarea 3)</b>	<b>Generalización factual (Tarea 4)</b>	<b>Generalización contextual (Tarea 3)</b>
<b>Danny</b>	<i>“Los triángulos azules crecen depende el número de la figura y los rojos no crecen”</i>	<i>“Primero le quito las esquinas, después sumo 4 veces los círculos que queda y después al resultado le sumo las esquinas”.</i>	<i>“Multiplicando 3 por el número de la figura y se le agrega 1 cuadro”</i>

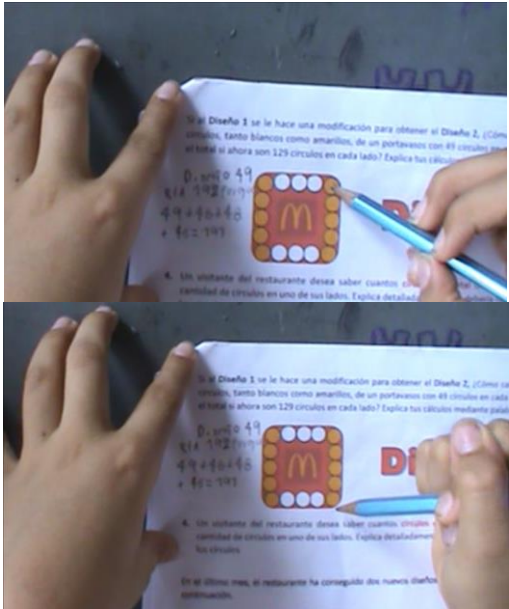
En la Tabla 3 se muestran algunas de las producciones de Danny a lo largo de las tareas 3 y 4, lo que nos interesa resaltar aquí es como en algunas tareas se observa un avance importante en su actividad semiótica. Como resultado, se establece una conexión más sofisticada entre los recursos semióticos, lo cual conduce a un nivel más profundo de conciencia y comprensión.

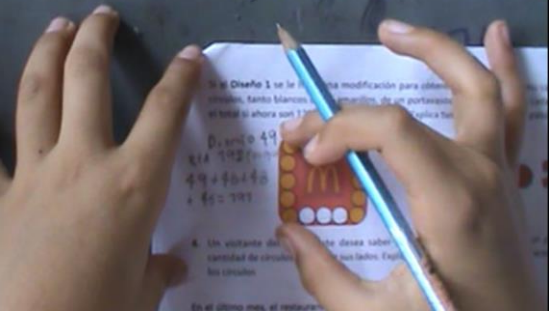
A nivel de todo el grupo, algunos estudiantes reconocieron rápidamente un patrón de crecimiento al mostrar el portavasos 5, 6 y 7, donde se notaba un aumento de 4 círculos a medida que se avanzaba en el número del portavasos, de forma que en sus producciones se encuentra que recurren a estrategias aditivas para hallar la cantidad de círculos de portavasos consecutivos como el 10, 15 y 17 que fueron pedidos durante la Tarea 4, sin embargo, esto provocó que en términos lejanos como el 49 o el 129 no obtuvieran resultados mediante su estrategia y abandonaran las demás preguntas. Los estudiantes que identificaron como estrategia de conteo la expresión relacionada con el Diseño 2 y el Diseño 3 lograron dar evidencias de estar en un nivel de

pensamiento Factual con leves elementos que indican que están en una transición hacia el nivel Contextual. Adicionalmente, un grupo reducido de estudiantes había formulado otra manera de contar los círculos que no había sido tomada en cuenta dentro del análisis a priori y que será mostrada a continuación mediante el análisis del siguiente episodio.

**Transcripción 15**

*Tercer punto de la tarea 4 con Mariana*

<p>L1</p>	<p>MARIANA: Yo sé que acá arriba, aquí arriba hay 49 [señala con el lápiz la línea superior de círculos del diseño 2] Aquí como este sumó uno [señala con el lápiz la esquina superior derecha] entonces quedan 48 [señala la línea derecha de círculos de arriba hacia abajo].</p> 	<p>En esta producción la expresión “yo sé que acá arriba, aquí arriba hay 49” es una función generativa del lenguaje.</p> <p>Uso de déicticos espaciales “aquí” para indicar elementos que ya ha sumado mientras realiza movimientos y señalamientos.</p>
<p>L2</p>	<p>PROFESOR: Sí, muy bien ¿y luego?</p>	
<p>L3</p>	<p>MARIANA: y aquí también 48 [señala con el lápiz la línea inferior de círculos del diseño 2] y luego aquí [encierra con el pulgar y el índice la línea izquierda de círculos ocultando las dos esquinas] se le quitarían dos porque el de arriba ya está sumado y el de abajo también</p>	<p>El estudiante tapa elementos de la figura como recursos semióticos para indicar el cambio en la cantidad de elementos en un lado del</p>

	<p>[señala con el lápiz la esquina superior e inferior izquierda] entonces quedarían 47.</p> 	<p>portavasos en relación con los demás.</p>
<p>L4</p>	<p>PROFESOR: Sí perfecto.</p>	
<p>L5</p>	<p>MARIANA: Así que en total sumo todo [realiza un movimiento circular con lápiz en mano] y me dio 192.</p>	

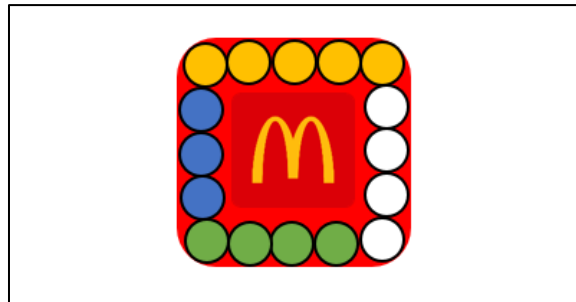
En la línea 1, la expresión “yo sé que acá arriba, aquí arriba hay 49” contiene el deíctico espacial “acá” que señala la ubicación de una serie de elementos que no son visualmente alcanzables pero se espera estén ahí, pues previamente en su discurso hace la afirmación “yo sé que” que sugiere que la estudiante hace énfasis en la igualdad entre el lado y el portavasos, lo que indica que ha percibido una relación entre el portavasos 49 con la cantidad de círculos que tiene en uno de sus lados. Mariana utiliza gestos como el ritmo, las señalizaciones y los movimientos para enfatizar y complementar los razonamientos que expresa, esto resulta importante porque la cantidad de círculos que compone el siguiente lado se ve afectado por esto, lo que implica que debe descartar en el conteo un elemento (la esquina) porque este ya ha sido considerado. Esto también ocurre con el tercer lado, pero en el último lado debe descartar dos elementos dado que en su análisis, ella ya ha tomado 2 círculos que pertenecen a ese lado de la figura.

De manera que la estrategia aritmética que la estudiante ha construido podría escribirse como  $n + (n - 1) + (n - 1) + (n - 2)$  donde  $n$  es el número de la cantidad de círculos que tiene el portavasos en cada uno de sus lados y es correcto para realizar los cálculos que pide la tarea. Si

se pensará en realizar un diseño donde surja esta expresión se considera que es necesario introducir más colores (ver Figura 39) para realizar de forma eficiente las agrupaciones de círculos.

**Figura 39**

*Diseño de portavasos para la expresión  $n + (n - 1) + (n - 1) + (n - 2)$*



**8.5 Tarea 5 (Modelación y Generalización de patrones)**

Dado que el objetivo de esta investigación consiste en describir los procesos de objetivación que los estudiantes lograran movilizar al enfrentar situaciones en tres líneas distintas de álgebra, se propone esta tarea que involucra la generalización de patrones con la modelación. En esta situación se esperaba que al experimentar con un problema que involucra una relación funcional, los estudiantes noten las variables que están involucradas y generaran datos, además, se espera que los estudiantes descubran formas de realizar seguimientos a estos datos mediante el uso adecuado de modelos y finalmente identificar y expresar una regla de la secuencia.

Para la situación de modelación de los estudiantes tenían a su disposición material concreto con el propósito de recrear el patrón (ver Figura 40) e identificar una manera de notar el patrón y generalizar el término general a través de medios semióticos que consideren indeterminancia, adicionalmente, dado que estas dos corrientes del pensamiento algebraico comparten muchas de las mismas ideas, se esperaba abrir la posibilidad de que los procesos de generalizar, representar y

justificar logran interactuar continuamente . El patrón que se propone se puede generar mediante el término general  $4n - 1$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Figura 40**

*Elaboración de la secuencia con material concreto por un grupo de estudiantes*

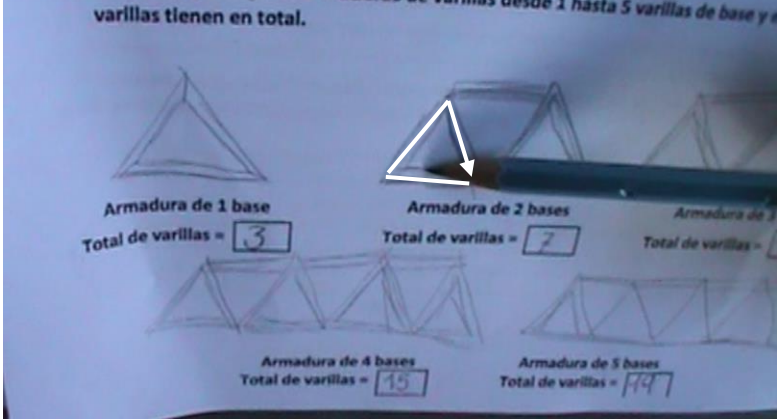
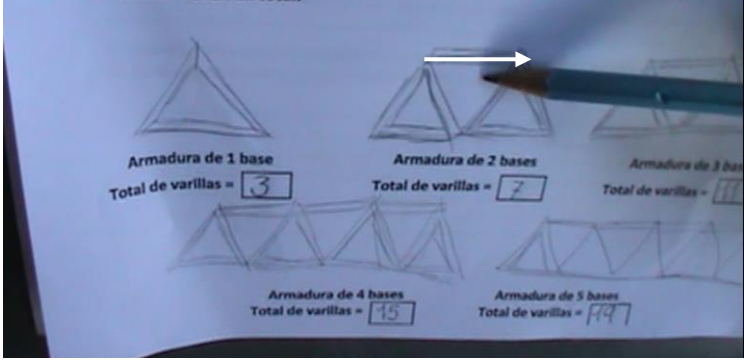


Entre las producciones de los estudiantes, Melanny propone una forma aditiva para responder al número de varillas correspondientes a los términos del 2 al 5 (ver Transcripción 16).

**Transcripción 16**

*Primer punto de la tarea 5 con Melanny*

L1	PROFESOR: ¿Cómo supiste que eran 19, Melany?	Se pregunta por la armadura de 5 bases.
L2	MELANY: 19 es que sumé... entonces acá [ <i>señala su dibujo de la armadura con una base</i> ] hay 3, pero como hay un palito arriba entonces [ <i>comienza a realizar un conteo con los dedos</i> ] 4, 5, 6, 7... y entonces comencé con las otras también así y así me dio 19.	Uso de funciones generativas del lenguaje “comencé con las otras también así” que indica generalidad.
L3	PROFESOR: ¿Entonces ibas sumando de a cuánto?	
L4	MELANY: Entonces a la primera tenían que ser 3 [ <i>señala el recuadro dónde escribió la cantidad de varillas de una armadura con una base</i> ] pero sumé a tres...y después cuatro [ <i>señala la respuesta de la varilla de dos bases</i> ] y cuatro [ <i>señala</i>	La estudiante instancia una forma aditiva para

	<p>la respuesta de la varilla de tres bases] cuatro [señala la respuesta de la varilla de 4 base] y cuatro [llega a la última armadura con 5 varillas de base]</p>	<p>dibujar los términos del 1 al 5.</p>
<p>L5</p>	<p>PROFESOR: ¿y por qué 4?</p>	
<p>L6</p>	<p>MELANY: Porque mira [señala un triángulo en la armadura dibujada de dos bases] un, dos, tres [mueve su lápiz señalando los lados del triángulo mientras los cuenta]</p>  <p>varillas tienen en total.</p> <p>Armadura de 1 base Total de varillas = 3</p> <p>Armadura de 2 bases Total de varillas = 7</p> <p>Armadura de 3 bases Total de varillas = 11</p> <p>Armadura de 4 bases Total de varillas = 15</p> <p>Armadura de 5 bases Total de varillas = 19</p> <p>Pero con esta [señala una varilla superior que se encuentra entre los triángulos] entonces sumé cuatro...</p>  <p>Armadura de 1 base Total de varillas = 3</p> <p>Armadura de 2 bases Total de varillas = 7</p> <p>Armadura de 3 bases Total de varillas = 11</p> <p>Armadura de 4 bases Total de varillas = 15</p> <p>Armadura de 5 bases Total de varillas = 19</p> <p>...más cuatro, más cuatro, pero entonces, mira acá hay un 3 [señala la armadura con una base] entonces cuatro, cinco, seis, siete [cuenta con los dedos la suma de 3 + 4] y así pasé con las otras y así logré obtener 19.</p>	<p>Uso del movimiento triangular como medio semiótico de objetivación para justificar la suma repetitiva del número 4.</p>

La característica común encontrada por la estudiante (sumar 4 varillas) a partir de la comparación entre las primeras dos armaduras es extendida y utilizada para hallar la cantidad de varillas que corresponde a cada armadura hasta el término 5. Esta abducción se utiliza de manera

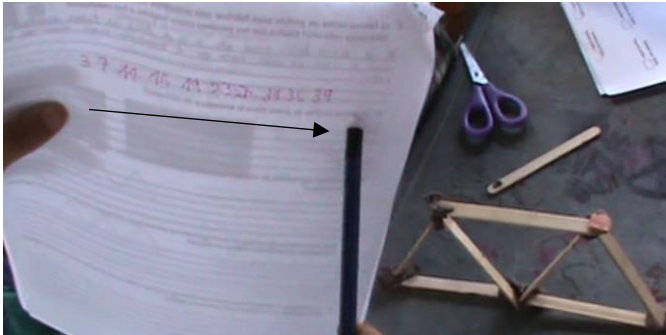
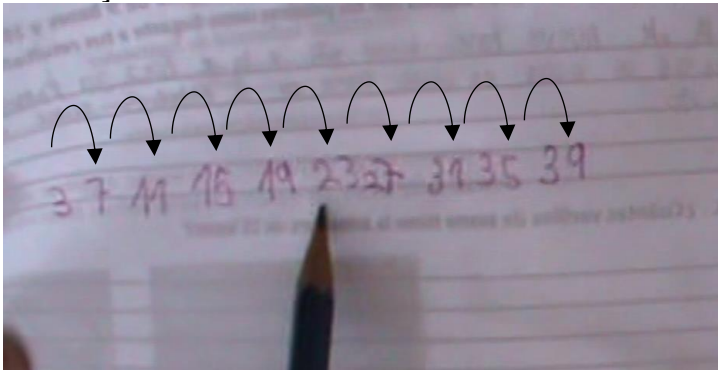
recursiva y no analítica puesto que se parte de un término conocido (en este caso 3) para hallar cualquier otro término de la secuencia, lo que se considera una generalización de tipo aritmético o como una **progresión aritmética**, y no una generalización de naturaleza algebraica dado que la abducción no constituye una fórmula que le brinde el número correspondiente a cualquier término de la secuencia.

Por otro lado, la actividad perceptual y los diálogos mostrados en la Transcripción 15, se evidencia que la estudiante ha articulado la estructura espacial y numérica de la secuencia, se infiere que Melanny concibe la forma del patrón como una constante adición de dos estructuras, en primer lugar 3 elementos que constituyen un triángulo y luego, un elemento adicional necesario para cumplir con la comunalidad de la secuencia, aspecto que se observa más detalladamente en la línea 6.

En el ámbito de la objetivación utilizado por los estudiantes con respecto a los puntos dos y tres para explicar sus razonamientos basados en hechos concretos, se han podido identificar tanto expresiones lingüísticas como señalamientos que adquieren relevancia en el proceso de concienciación, al expresar su pensamiento en el contexto de esta actividad. En particular, se realiza un enfoque en los diálogos y producciones del estudiante Matías cuyas manifestaciones insinúan que logró identificar una correspondencia. De la misma manera, Matías utiliza una estrategia aditiva para determinar la cantidad de varillas de una armadura de acuerdo con la cantidad de varillas que tiene la base, sin embargo, utiliza otros medios semióticos que durante las demás tareas no había surgido.

**Transcripción 17**

*Segundo punto de la tarea 5 con Matías*

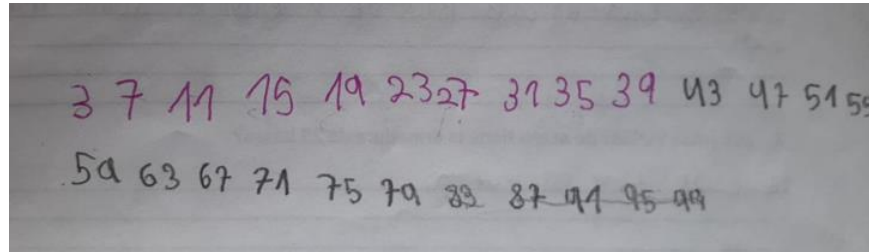
L1	<p>PROFESOR: ¿Matías como calculaste las varillas de las armaduras de 9 y 10 bases?</p>	
L2	<p>MATIAS: <i>[Lee la respuesta que ha escrito en la hoja]</i> La de 9 bases tiene 35 y la de 10 tiene 39 ¿cómo? Sumando de 4 en 4, o sea en cada base hay 4...hay 4, entonces sumé hasta llegar a la base 9 y 10.</p>	
L3	<p>PROFESOR: Sí, bien.</p>	
L4	<p>MATIAS: Entonces sumé detrás de la hoja <i>[voltea la hoja donde había escrito una serie de números]</i> hicimos estos números <i>[señala de izquierda a derechas una secuencia numérica de sumas de 4]</i></p>  <p>Estos números son cada base, entonces contamos <i>[empieza el conteo desde el número 3 lo cual es la cantidad de varillas en la primera base]</i> uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve <i>[va pasando término a término de las sumas que realizó]</i> esta es la de 9 <i>[se detiene en el número 35 y lo encierra con su lápiz]</i> y la de 10 tiene 39 <i>[encierra este resultado en lápiz también]</i></p> 	<p>Conteo como medio semiótico par objetivar la cantidad de varillas en relación con su posición en la secuencia puramente numérica.</p>

En este episodio, Matías describe su proceso de objetivación de la característica común encontrada en la secuencia, aunque también utiliza una estrategia aditiva (aumento de 4) el estudiante ha movilizó otros recursos diferentes al pictórico, lo que implica que ha determinado una hipótesis frente a la comunalidad encontrada. Se observa que ha matematizado el problema mediante la construcción de una secuencia puramente numérica que se observa en la producción del estudiante, herramienta que también cumple la función de ser una tabulación de los resultados, dado que para determinar la cantidad de varillas en las armaduras de 9 y 10 bases realiza el conteo hasta estos números a lo largo de su tabulación. Esta idea aunque permanece en el campo de la generalización aritmética, resulta útil para responder a la cantidad de elementos en términos relativamente lejanos, además, realizó el procedimiento inverso para determinar en número de la base con una cantidad de varillas dada como se contempla en el punto 4 pues bastaba con ubicar el número 39 en la secuencia de números que había realizado y contar cuántos números había hasta ese punto.

Dicho lo anterior y con el propósito de que emergieran formas factuales de generalización se había propuesto en la Tarea 5 el cálculo de números más elevados como el 25 y el 100 lo que encaminaba al estudiante a cambiar la forma en cómo realizaba el hallazgo en cada término en la secuencia, sin embargo en los estudiantes en los que había surgido esta idea, trabajaban en encajar este procedimiento con el propósito de determinar términos más lejanos como se observa en la Figura 41.

**Figura 41**

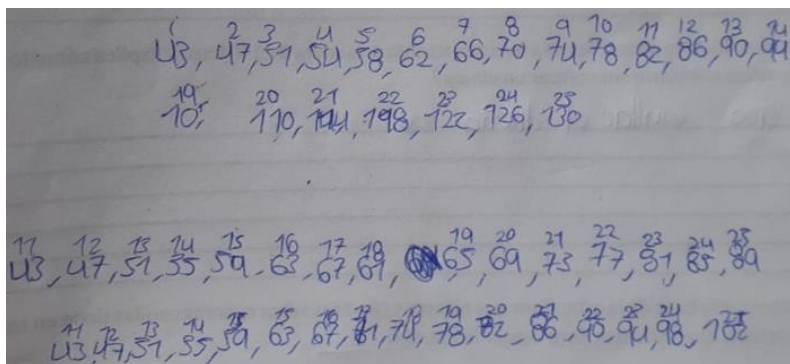
*Secuencia numérica extendida por Matías*



Otro estudiante que había llegado a una conclusión similar en cuanto a la forma de determinar la cantidad de varillas comienza desde un punto de la secuencia más lejano, realiza sumas repetidas del número 4 y etiqueta cada término como un medio semiótico que le permite identificar con mayor facilidad la cantidad de elementos en cada figura. Habría que decir también que durante la examinación de sus elaboraciones escritas se encuentran problemas durante la continua suma, lo que reitera las dificultades de utilizar generalizaciones de esta tipología.

**Figura 42**

*Secuencia numérica extendida por Juan Diego*



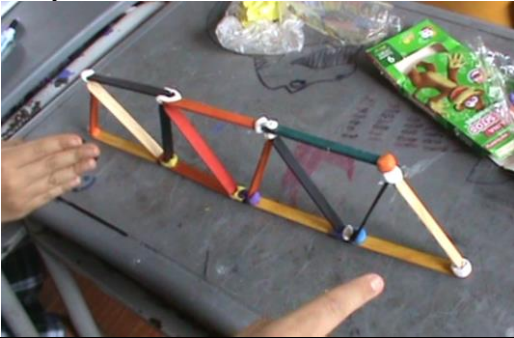
En la Figura 42 por la parte superior, se observa cómo Juan Diego ha etiquetado los números, designando el número 1 al número 43 hasta llegar al número 130 el cual se encuentra etiquetado con el número 25, este resulta ser un primer intento para resolver la pregunta del punto 3, pero esta enumeración no es correcta, dado que si las etiquetas corresponden al número de bases

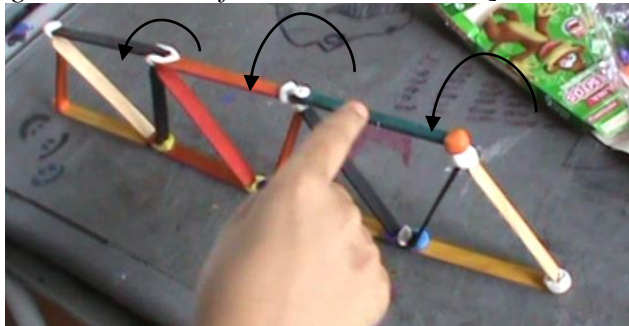
de una armadura, el número 43 debería ser etiquetado con el número 11. Esta modificación es realizada y se muestra en la parte inferior de la Figura 42, no obstante, esto lo obliga a realizar nuevamente todas las operaciones y cometer errores durante su procedimiento. Como resultado, se puede decir que aunque Juan Diego identifica acertadamente la comunalidad, la aplicación de estrategia manifiesta problemas para encontrar el número de varillas para una posición particular debido a desaciertos operacionales.

En uno de los grupos, Sara y Mariana explican otra forma de contar la cantidad de varillas de la armadura con 5 bases.

**Transcripción 18**

*Primer punto de la tarea 5 con Sara y Mariana*

L1	PROFESOR: ¿Cómo llegaron a 19 ustedes? ¿Cómo contaron?	Se pregunta por la armadura de 5 bases.
L2	MARIANA: O sea, esto se va a caer [ <i>señala que la armadura de palitos que hicieron estaba débil</i> ].	
L3	MARIANA Y SARA: O sea, imaginamos que había otro acá [ <i>señalan un espacio vacío donde debería estar la siguiente base de la armadura</i> ] y lo que llevábamos de esto [ <i>indican con la mano la armadura de 4 bases que construyeron</i> ] se lo sumábamos.	Señalamientos como medios semióticos para indicar el procedimiento aritmético efectuado.
		
L4	PROFESOR: ¿y como lo sumaron?	
L5	MARIANA: O sea, uno, dos, ..., seis [ <i>empieza a señalar palitos de paleta que comprendían la armadura que tenían construida</i> ] Primero contamos esto sin el techo [ <i>trata de hacer con la mano una señal que evita considerar el techo</i> ] entonces 6, 7, 8, 9 [ <i>señala con el</i> ]	

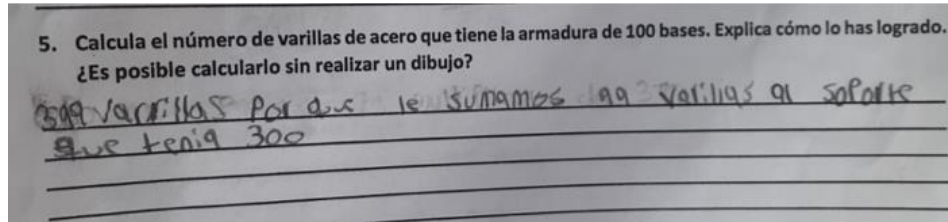
	<p><i>dedo cada varilla mientras realiza el conteo] 10, 11, 12 y aquí [señala el triángulo imaginario de la quinta base] 13, 14, 15, más el techo 16, 17, 18, 19 [mueve el dedo mientras realiza el conteo desde el techo imaginario hasta el final de la armadura].</i></p> 	<p>El movimiento y las señalizaciones refuerza las intenciones del discurso.</p> <p>El conteo es dividido entre los triángulos que conforma la figura y las varillas horizontales superiores.</p>
--	--	---

De la actividad y el discurso entre el profesor y el grupo de Sara y Mariana, se evidencia que las estudiantes han llegado a determinar el conteo considerando otra estructura espacial para la secuencia, esta está compuesta por una serie de triángulos y “*el techo*” como mencionan en la línea 5 y resulta ser un recurso utilizado por las estudiantes para referirse a la cantidad de varillas horizontales que se encuentran en la parte superior. Esta forma de contar la cantidad de varillas puede expresarse algebraicamente como  $3n + (n - 1)$  donde  $n$  representa cuantas bases tiene la armadura, además es una equivalencia de la expresión  $4n - 1$  de donde principalmente había surgido el patrón.

Este esquema fue discutido entre el grupo de Sara y Mariana y el grupo de Matías, quien después de un largo tiempo de trabajo conjunto entre los demás grupos y el profesor percibe la forma en que puede hallar más fácilmente la armadura de 100 bases, la cual mediante la estrategia aditiva que tenía resultaba tediosa y tomaba mucho tiempo. Además, surge una nueva expresión para referirse a los triángulos, la cual se ha denominado como “*soporte*” que se convierte en un recurso para referirse a los triángulos de la armadura.

**Figura 43**

*Quinto punto de la tarea 5 producto del diálogo grupal entre estudiantes*



En general, el grupo de estudiantes logró plantear solamente una generalización de tipo aritmético, asociada a un esquema aditivo (sumar de 4 en 4) y no logra encontrar una generalización de tipo factual dado que no perciben una relación entre el número de la base y el número total de varillas que conforman la armadura. Se considera que esto se debe los estudiantes no detectan una correspondencia entre las varillas y por lo tanto se hace necesario que la actividad se modifique a fin de que los estudiantes evidencien indicios de la articulación de la estructura y puedan lograr generalizaciones de tipo Factual.

## 9 Resultados de la Investigación y Reflexiones

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en el proceso investigativo en torno a la identificación de los procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de cuarto grado cuando abordan tareas sobre generalización de patrones, aritmética generalizada y modelación. Durante el desarrollo de este trabajo, se han estudiado, diseñado e implementado distintas tareas que brindaron a los estudiantes la oportunidad de enfrentarse a situaciones desafiantes que requerían la aplicación del pensamiento algebraico, y mediante la observación junto con el análisis minucioso de sus producciones, se han logrado

identificar diferentes medios semióticos de objetivación presentes en su pensamiento y cómo estos evolucionan dentro de cada una de las tareas.

En relación con el análisis de los sucesos más relevantes dentro de las tareas y a su vez afines al objetivo de esta investigación, se evidencia que los estudiantes emplearon una diversidad de recursos semióticos, que van más allá del discurso con el propósito de expresar sus ideas. Además de reconocer la importancia del discurso como una herramienta fundamental en cada una de las tareas, resulta crucial destacar que emergieron numerosas expresiones no verbales, como el lenguaje corporal, los gestos, el ritmo, las expresiones faciales y la señalización, elementos que desempeñan un papel significativo dentro del desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Lo cual se corresponde con los diversos estudios existentes y en particular con Vergel (2015) y Martínez (2016).

En este sentido, se reconoce que la actividad perceptual de los estudiantes, junto con cada uno de estos elementos no verbales, desempeña un papel integral en la construcción y comunicación del conocimiento matemático. La comprensión y valoración de estas expresiones no verbales, permite una mayor apreciación de la variedad de formas en las que los estudiantes pueden representar y externalizar su pensamiento matemático.

Al mismo tiempo, durante la implementación de las actividades, se observa cómo los estudiantes mediante la labor conjunta, utilizaban de manera más frecuente recursos semióticos como los deícticos espaciales y el lenguaje natural compuesto con expresiones como “así”, “aquí”, “este”, etc....que corresponden a ser deícticos espaciales o funciones generativas del lenguaje con el objetivo de alcanzar una mayor comprensión de las formas algebraicas de pensamiento en relación a las tres corrientes del álgebra que se consideraron en las tareas.

Por otro lado, durante el desarrollo de las actividades, se reconoce cómo los estudiantes utilizan frecuentemente el señalamiento para indicar términos consecutivos, con el objetivo de comunicar la identificación de un patrón de generalización. Así mismo, empleaban movimientos que a fin de mostrar que consideraban una relación entre el número de la figura con su respectiva cantidad de elementos. Así, por ejemplo, entre las producciones de Danny durante la Tarea 3 con la secuencia del cohete, su acción perceptiva, así como sus expresiones lingüísticas al señalar el número de la posición término junto al término correspondiente, involucraban movimientos y acciones para argumentar la consecución de esta correspondencia entre ambas cantidades. Son estas acciones y movimientos los que han permitido a los estudiantes establecer conexiones y, a partir de la identificación de lo común en las figuras, plantear un procedimiento que potencialmente podría proporcionar cualquier término de la secuencia.

Es precisamente la interacción entre los gestos, las expresiones lingüísticas y las señalizaciones, entre otros recursos semióticos lo que permitió a los estudiantes fomentar la capacidad de relacionar elementos clave y construir comprensión tanto de la generalización de patrones, como de propiedades aritméticas generalizadas.

Algo semejante ocurre durante el proceso de conteo, los estudiantes utilizaban este recurso semiótico como un refuerzo para visualizar las partes que conformaban una figura y establecer conexiones numéricas, aspecto que fue principalmente promovido durante la Tarea 1 dado que se condicionaba la visualización de la secuencia. Así mismo, recurrían al uso de los dedos para contar y evidenciar el incremento de un término a otro. De esta manera, el conteo se convertía en una herramienta perceptiva que posibilitaba vincular la representación visual con la estructura numérica, facilitando la abducción del patrón. Al emplear tanto la percepción visual como el

conteo manual, los estudiantes fortalecían su capacidad de identificar regularidades y establecer relaciones numéricas.

En cuanto a las tareas que se tenían un enfoque más apegado a la aritmética generalizada, durante la Tarea 2 la interacción con los contadores en los cuadros de decenas, los estudiantes adquirieron conciencia de como los espacios se llenan en una tabla para completarla, lo que les permitió visualizar la estructura de la transformación, la relación de equivalencia entre las diferentes descomposiciones y aplicarla a operaciones aritméticas más desafiantes. Sin embargo, se considera que esta tarea necesita de una forma más rápida de representar las sumas que a su vez conserve características que favorezcan la manipulación y configuración de las cantidades. Esta comprensión profunda de la estrategia de compensación les proporciona una base sólida para aplicar principios de aritmética generalizada en situaciones más amplias. Habría que decir también que uno de los propósitos de la configuración aritmética es facilitar el cálculo mental, aspecto que, si no se realiza de manera correcta, no alcanza su máxima potencialidad en la realización de adiciones con números de dos y tres cifras. Aunque en el estudio no se relacionó evidencia sobre la evolución de las descomposiciones aditivas y sus equivalencias a expresiones con símbolos alfanuméricos queda abierto a otras investigaciones hacer un seguimiento a dicho fenómeno.

Por otra parte, el análisis reveló que la implementación de la Tarea 4 promovió dinámicas de discusión en el aula, lo que resultó en un mayor compromiso de los estudiantes con la actividad, dado que durante estas discusiones, los estudiantes tuvieron la oportunidad de mostrar las maneras que habían encontrado para determinar la cantidad de círculos en los portavasos, puesto que algunos grupos habían identificado una comunalidad entre los términos proporcionados y esto les permitió formular conjeturas aritméticas y así expresar una generalización que les brindara una

forma de hallar la cantidad de círculos totales en relación con la cantidad de círculos en un lado del cuadrado.

De acuerdo con la fundamentación teórica de esta investigación, se distinguen tres tipos de pensamiento algebraico o capas definidas por los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes durante su actividad reflexiva. Radford (como se citó en Vergel 2014) los define como pensamiento algebraico factual, pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico simbólico, los cuales serán utilizados para categorizar las producciones de los estudiantes con relación a la generalización alcanzada. Durante la primera y segunda tarea, observamos que los estudiantes se involucraron en el pensamiento algebraico factual, el cual está basado en hechos concretos y durante su proceso de objetivación, utilizaron diversos medios semióticos como gestos, conteo, movimientos, ritmo y expresiones lingüísticas, que surgieron como elementos clave para su comprensión.

Por otra parte, la tercera tarea es la que ha alcanzado la capa más alta de acuerdo con la clasificación de Radford y en comparación a las demás tareas, se identifica que los estudiantes convierten la indeterminancia en objeto de discurso e incluso logran registrar esto en sus producciones escritas, pues estas incluyen una formulación algebraica que describe la generalidad de cada uno de los tres patrones mostrados. Para ilustrar mejor este punto, algunos estudiantes han utilizado expresiones como *“cualquier número”* o *“número de figuras”* como un medio semiótico clave que indica la iniciación a una generalización contextual donde se pretende que la comunalidad puede ser aplicada a cualquier figura, lo que también se traduce como una evolución de los recursos movilizados o nodo semiótico. Otro rasgo importante durante esta situación fue la variedad de formas de conteo que emergieron a la hora de identificar una característica común

entre todas las figuras, es decir, hay generalización a partir de la cantidad de objetos dispuestos de manera vertical, horizontal o con relación a su término de aumento.

Por otro lado, de la cuarta y quinta tarea se infiere que el trabajo conjunto permitió idear diferentes estrategias para resolver el tipo de preguntas propuestas, aspecto que sobresale en la tarea cuatro dada la cantidad de generalizaciones aritméticas ideadas por los estudiantes y que sin la necesidad de mostrar una distribución de colores en la figura, apareció como hipótesis en algunos grupos. Nuevamente en estas dos tareas se encuentra que la movilización de diversos recursos semióticos verbales y corpóreos son fundamentales para determinar una generalización, sin embargo, esto ha sido aplicado a objetos a nivel concreto, por consiguiente las generalizaciones obtenidas reposan sobre esquemas operacionales para casos particulares. Esto significa que la indeterminancia queda implícita y por lo tanto, sus acciones quedan categorizadas en el pensamiento factual.

En términos generales, los estudiantes demostraron en cada una de las tareas reconocer la comunalidad de las secuencias, aspecto que les permitió extender esta característica común hacía términos más lejanos. En cuanto a la estrategia más utilizada, la mayoría al comenzar optaba por esquemas aditivos y multiplicativos, mientras que una minoría necesitaba de medios pictóricos para encontrar el número relacionado a una posición. Por otro lado, los estudiantes lograron visualizar la propiedad aritmética trabajada como una recombinación del cálculo numérico en casos particulares, lo que significa que no se alcanza a reflexionar sobre una posible generalidad para todos los números. Adicional a esto, los estudiantes tuvieron éxito al resolver ecuaciones como  $3x + 1 = 31$  (Tarea 3 punto 2) puesto que asociaron el significado de este procedimiento a los conceptos de equivalencia y las propiedades de igualdad. Por último, la modelación estuvo involucrada en cada una de las tareas, aunque en menor grado para algunas situaciones, pues se

considera que la modelación demanda un pensamiento de naturaleza compleja, dado que implica la capacidad de generalizar las regularidades presentes en situaciones o fenómenos matemáticos, dicho esto, se concluye que esta corriente algebraica se refleja en el alcance que tuvieron las producciones de los estudiantes en la síntesis de sus razonamientos.

### Referencias Bibliográficas

- Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary grade students' capacity for functional thinking. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). Bergen, Norway: PME.
- Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In *Early algebraization* (pp. 137-159). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Brizuela, B., & Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the learning of mathematics*, 24(2), 33-40.
- Cai, J., & Knuth, E. (2005). Developing algebraic thinking: Multiple perspectives. *ZDM*, 37(1), 1–3.
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2021). The impact of two different types of instructional tasks on students' development of early algebraic thinking (El impacto de dos tipos diferentes de tareas instruccionales en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano de los estudiantes). *Journal for the Study of Education and Development*, 44(3), 503-552.
- Delgado, P. (2019) *Desarrollo de pensamiento funcional: un estudio exploratorio de los niveles de sofisticación* (Tesis de maestría) Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- Gobara, S. T., & Radford, L. (2020). Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. *São Paulo, Brazil: Livraria da Física*.
- Kaput, J. J. (2017). 1 What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In *Algebra in the early grades* (pp. 5-18). Routledge.
- Kaput, J. J., & Blanton, M. L. (2000). Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics: Making It Implementable on a Massive Scale.
- Kaput, J., & Schorr, R. (2008). The case of SimCalc, algebra, and calculus. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives*, 2, 211.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the Early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 18(1), 139-151.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second*


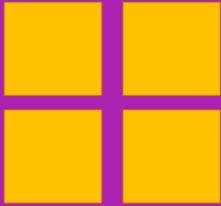


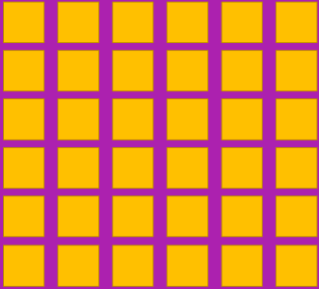

- Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer Nature.
- Martínez, J. (2016) *Procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano* (Tesis de maestría) Universidad Industrial de Santander, Colombia
- Mason, J. (1991). *Supporting primary mathematics: Algebra*. Milton Keynes, UK: Open University Press.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp.65- 86). London: Kluwer Academic Publishers.
- Mathematics Education, 12(1), 1-19.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje para el área de matemáticas*. Bogotá: MEN
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN
- Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación matemática*, 19(3), 5-30.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156
- Moreno, G. (2015). *Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos* (Tesis de pregrado) Universidad del Valle, Colombia.
- Moss, J., & London McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*, 277-301.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37 -70.
- Radford, L. (2005). Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification. In Helen L. Chick, Jill L. Vincent (Eds.): *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1. Melbourne. University of Melbourne, pp. 143-145.

- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 9(Extraordinario 1), 103-129.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40(1), 83-96.
- Radford, L. (2010a). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Radford, L. (2010b). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in*
- Radford, L. (2011, January). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 17-24)*.
- Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. *ICME-12 Regular Lecture*. Seoul, South Korea.
- Radford, L. (2013). Sumisión, alineación y (un poco de esperanza): hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. En A. Ramírez y Y. Morales (Eds). *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. (pp. 6-8). Santo Domingo, República Dominicana: Plenary Lecture.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etno-matemática*, 7(2), 132-150.
- Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 8(18), 547-567.
- Radford, L. (2017). Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación.
- Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*, 3-25.
- Radford, L. y Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. Dordrecht: Springer, *Advances in Mathematics Education*, 157-182.
- Rico, L. y Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Torres, L. A., & Sánchez, L. F. (2013). Generalización de patrones numéricos en el desarrollo del pensamiento variacional en la educación primaria.

- Vergel, R. (2013). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). En Gallego P. (Ed.) (2013). *Revista Científica, Edición especial*, 234-240.
- Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) (Doctoral dissertation, Universidad Distrital Francisco José de Caldas).
- Vergel, R. (2015a). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215
- Vergel, R. (2015b). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 68, 9-17.
- Vergel, R., & Rojas, P. (2018). Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula. *Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas*.
- Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones: una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria= Introduction of algebraic thinking through the generalization of patterns: a sequence of tasks for Pre-school and Primary Education. *Números: revista de didáctica de las matemáticas. La Laguna (Tenerife, España): Sociedad Canaria " Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas. N. 97 (2018)*.
- Zapatera, A., & Callejo, M. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales.

Anexos

Anexo a: Secuencias proyectadas en la Tarea 1

 <p><b>Nivel</b> <b>1</b></p>	<p>LÍMITE DE TIEMPO <b>3 segundos</b></p>  
<p>LÍMITE DE TIEMPO <b>3 segundos</b></p>  	<p>LÍMITE DE TIEMPO <b>3 segundos</b></p>  
<p>LÍMITE DE TIEMPO <b>3 segundos</b></p>  	<p>LÍMITE DE TIEMPO <b>3 segundos</b></p>  
<p>LÍMITE DE TIEMPO <b>3 segundos</b></p>  	<p>LÍMITE DE TIEMPO <b>3 segundos</b></p>  

 <h1>Nivel 2</h1>	<p>LÍMITE DE TIEMPO 3 segundos</p>  
<p>LÍMITE DE TIEMPO 3 segundos</p>  	<p>LÍMITE DE TIEMPO 3 segundos</p>  
<p>LÍMITE DE TIEMPO 3 segundos</p>  	<p>LÍMITE DE TIEMPO 3 segundos</p>  
<p>LÍMITE DE TIEMPO 3 segundos</p>  	<p>LÍMITE DE TIEMPO 3 segundos</p>  

 <h1>Nivel 3</h1>	<p>LÍMITE DE TIEMPO 5 segundos</p>  
<p>LÍMITE DE TIEMPO 5 segundos</p>  	<p>LÍMITE DE TIEMPO 5 segundos</p>  
<p>LÍMITE DE TIEMPO 5 segundos</p>  	<p>LÍMITE DE TIEMPO 5 segundos</p>  
<p>LÍMITE DE TIEMPO 5 segundos</p>  	<p>LÍMITE DE TIEMPO 7 segundos</p>  

**Anexo b: Transcripción de los videos****SESIÓN NÚMERO UNO (4 DE MAYO DE 2023)****Video 1**

PROFESOR: [*Dirigiéndose a los estudiantes*] ¡Lo copiamos, lo copiamos, lo copiamos! [*invitando a los estudiantes a copiar la cantidad de cuadrados que habían alcanzado al ver en la imagen mostrada en el tablero*].

THOMAS: [*Mirando a otro compañero*] Cinco por cinco ¿veinticinco? Sí, cinco por cinco veinticinco [*Dirige su mirada a la hoja para escribir el resultado*].

PROFESOR: [*señalando la pantalla*] ¿Listo? Vamos con el siguiente, pendientes...y [*muestra la siguiente imagen en el televisor*].

ESTUDIANTES: ¡Cuarenta! ¡Cuarenta! ¡Cuarenta! [*Gritan varios estudiantes*] ¡Treinta y seis! ¡Treinta y seis! [*Gritan otros estudiantes*] ¡Cuarenta y ocho! [*Grita un estudiante más*].

PROFESOR: ¿Treinta y seis? ¿Cuarenta? Cada uno escribe los cuadrados que alcanzó a contar en la hoja [*Levanta una hoja idéntica a la de cada estudiante*] Bien, vamos con el último, el último es más difícil ¿listo? ...y [*muestra la siguiente imagen en el televisor*].

ESTUDIANTES: ¡Ah! [*Mostrando sorpresa por la cantidad de cuadros mostrados en el tablero*] Uno, dos, tres cuatro, ... [*Pronuncian algunos estudiantes mientras señalan los cuadros en la imagen*]. ¡Cuarenta y nueve! ¡Cuarenta y nueve! ¡Cuarenta y nueve! [*Dicen una gran mayoría de estudiantes*].

PROFESOR: [*Dirigiéndose a los estudiantes*] ¿Cuántos? ¿Cuarenta y nueve?

ESTUDIANTES: ¡Cuarenta y nueve! ¡Cuarenta y nueve! [*Dicen con mayor seguridad*].

PROFESOR: Listo, terminamos el Nivel 1.

**Video 2**

ANDRÉS: Multiplicar y contar porque...solo porque por esta línea que está acá [*traza con el lápiz una línea vertical cerca de un dibujo previamente hecho*] uno sabe que ya hay un cuadrado [*Escribe al lado de esa línea el número uno*].

PROFESOR: Si es correcto [*Asiente con la cabeza lo que señala el estudiante*]

ANDRÉS: Entonces, si los cuentas, uno, uno y uno, por ejemplo [*señala con el lápiz un arreglo de cuadrados de  $2 \times 2$  comenzando por el cuadrado inferior izquierdo*] dos acá y dos para arriba [*mueve el lápiz hasta el cuadrado inferior derecho y luego sube al cuadrado superior derecho*] y dos por dos cuatro.

PROFESOR: ¿y esos eran los que había en total en el arreglo 2?

ANDRÉS: Ajá [*afirma moviendo la cabeza*].

### Video 3

PROFESOR: ¡Ana! Entonces cuéntame cómo lo hiciste [*Haciendo referencia a la pregunta del Nivel 1*].

ANA: Yo primero multiplicaba y contaba de tres en tres la fila así [*Levanta su mano con la palma totalmente estirada y con un dedo de su otra mano, recorre la mano ya levantada de arriba hacia abajo*] y después.

PROFESOR: [Interrumpe] ¿Las filas en qué? [Indicando que repita lo que dijo anteriormente.

ANA: Así [*Vuelve a levantar su mano con la palma totalmente estirada y con un dedo de su otra mano, recorre la mano ya levantada de arriba hacia abajo*] y después contaba cada fila cuanto tenía, o sea, cuantas filas y primero cuanto tenía cada fila y multiplicaba por el número que me daba.

### Video 4

PROFESOR: ¿Qué estrategia encontrar para contar los cuadrados en las imágenes chicos? [*Dirigiéndose a todos*]

MATIAS: Digamos, en la última fila había siete [*Señalando en la pantalla la última figura del patrón en el nivel dos*] Entonces me di cuenta de que en cada uno había uno, dos, después tres, después cuatro, después cinco... entonces me tocaba sumar siete más seis, trece [*Comienza a mover su mano en círculos a medida que realizaba las sumas*] más cinco dieciocho y todo eso [*Indicando que la suma seguía hasta llegar a uno*].

### Video 5

PROFESOR: Entonces cuéntame otra vez lo que me estabas diciendo [*Referente a la resolución de la pregunta dos del Nivel 2*].

MARIANA: Qué... entonces cada fila tenía uno más, entonces por ejemplo, la última yo recuerdo que tenía siete, así que siete.

PROFESOR: Si, es cierto.

MARIANA: Entonces siete [*Levanta su mano y empieza a contar con los dedos a partir de ese número*] ocho, nueve, diez, once, doce, trece [*realiza una breve pausa y baja todos sus dedos para volver a contar*] catorce, quince, dieciséis, diecisiete, dieciocho [*realiza otra breve pausa y baja todos sus dedos para volver a contar*] diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós [*baja nuevamente los dedos y sigue contando*] veintitrés, veinticuatro, veinticinco [*baja nuevamente los dedos y sigue contando*] veintiséis, veintisiete [*baja nuevamente los dedos y sigue contando*] ¡veintiocho! [*Se percata que había escrito un número diferente*].

PROFESOR: Entonces ¿la cantidad de cuadrados en la última imagen es 28?

MARIANA: Si profesor.

### Video 6

JAIME: Vamos a quitar dos pepitas de la primera fila y ponérselos a la fila de alado [*Permanece inmóvil mientras se refiere a la fila roja y la fila azul incompleta*].

PROFESOR: Perfecto ¿y qué suma quedó?

JAIME: [*Medita un poco mientras observa su dibujo*] Diez más tres.

PROFESOR: ¿Eso que te da como resultado?

JAIME: Trece.

PROFESOR: ¡Muy bien! Ahora ¿podríamos usar esto mismo que hiciste [*Señala el dibujo que realizó el estudiante*] con otra suma? Por ejemplo, el caso de nueve más siete [*Indica otra de las sumas propuestas del punto tres*].

JAIME: Si profesor.

PROFESOR: En ese caso ¿Cuántas pepitas quitarías?

JAIME: Profe, deme unos minuticos y le digo la respuesta. [*Luego de esto, el estudiante comienza a dibujar*].

PROFESOR: Muy bien ¿cómo te fue? [*Pregunta luego de casi 10 minutos*]

JAIME: Bien profe, mire [*Levanta la hoja para mostrar el nuevo dibujo que ha hecho*]

PROFESOR: ¿Esto qué es? [*Señala con el dedo un dibujo compuesto por dos tablas pero que representaban otros números*].

JAIME: Siete más nueve.

PROFESOR: ¿y qué hiciste?

JAIME: Le saqué uno a este [*Señala la tabla que contiene al número siete con pepitas de color rojo*] para dárselo a este [*señala el lugar en la tabla azul donde dibujó una pepita roja*] y diez más seis es dieciséis.

PROFESOR: Muy bien, perfecto ¿Consideras que así podrías sumar más rápido? [*Señala los dibujos que Jaime hizo en clase*]

JAIME: Si claro profe.

### Video 7

PROFESOR: Bueno Ana entonces explícanos qué hiciste [*Señala la suma de  $16+8$* ]

ANA: Yo hice...yo primero hice los cuadros [*Señala con un dedo de abajo hacia arriba la tablas*] y conté cuantos me cabían en cada uno, entonces caben diez.

PROFESOR: Si, en los cuadros de la guía solo puede colocar diez.

ANA: Entonces como caben diez y el resultado da veinticuatro [*señala la respuesta de la suma de  $16+8$* ] los amplie y le puse a cada uno para que este me quepa [*toma sus dos manos y las junta, mostrando un gesto de ajuste*] le puse aquí el resto que me faltaba [*señala el final de cada columna de puntos*] y a cada uno le metí de a dos [*utiliza dos dedos bajo cada columna de puntos indicando en qué lugar hizo las adiciones*]

PROFESOR: Bien, entonces cuantos tiene cada marco de altura [*señala las tablas de arriba hacia abajo*].

ANA: ¿Eh? ¿Así? [*Señala con su dedo de abajo hacia arriba de la tabla*].

PROFESOR: Si, así.

ANA: Cada uno tiene de a seis.

PROFESOR: Muy bien, ¿Esto te ayuda a contar más rápido?

ANA: Eh, si...

PROFESOR: ¿Por qué?

ANA: Porque puedo decir que aquí [*señala con su dedo índice una de las dos tablas de puntos*] seis por dos, doce y [*mueve su dedo a la otra tabla*] seis por dos doce y lo puedo sumar.

PROFESOR: ¿y eso cuánto te da? [*dirigiéndose al estudiante*]

ANA: [*Gesticula la cara de forma que parece está pensando*] serían 24.

### **Video 8**

MARIANA: ¡Con 21!

SARA: ¡Con 21! Y en otra con 2 [*Señalan el dibujo que hicieron de dos tablas nuevas, una con 20 círculos y otra con 2*] y daría 23...y para hacerlo más fácil  $21+2$  que da 23.

PROFESOR: ¿En marcos de cuántos círculos?

SARA: ¿Cómo así?

PROFESOR: Si ¿Cuántos círculos tienes por fila? [*Señala la primera fila de arriba hacia debajo de la primera tabla*]

MARIANA: ¿Cómo así?

PROFESOR: ¿Cuántos tienes acá? [*Encierra con un movimiento circular la tabla que tiene 20 círculos*] ¿Están seguras de que tienen 21 círculos aquí? Recuerda que aquí [*señala la suma de ejemplo  $8+5$* ] tenían 5 y 5.

MARIANA: Entonces en cada fila tengo 10 y 10 [*Señala la tabla que tiene 20 círculos*]

PROFESOR: Si tienes 10 y 10 ¿entonces tienes 21 en total?

MARIANA: Ah no, tengo 20.

SARA: *[interviene]* Entonces eran 3 aquí *[señala con el dedo la otra tabla que tiene 2 círculos]*.

### Video 9

PROFESOR: Muy bien, explícame que hiciste con la suma de  $16+7$ .

MELANY: Aquí habían 16 *[Señala con el dedo una tabla con 20 círculos distribuidos en dos columnas de 10 círculos]* cogí algunos de aquí *[señala formando un círculo la otra tabla que tiene 3 círculos]* y los completé aquí *[señala con dos dedos, de arriba hacia abajo, las dos columnas que conforman la primera tabla]* después aquí me dio 3 y ya aquí encontré el resultado.

PROFESOR: ¿Cuál es el resultado?

MELANY: 23

### Video 10

PROFESOR: ¿Cómo quedó tu dibujo? ¿Qué encontraste? *[Indicando la tarea de la suma  $16+7$ ]*

MATIAS: Aquí había puesto 16 *[señala con el dedo la primera tabla de arriba hacia abajo]* y aquí había puesto 7 *[señala con el dedo la segunda tabla a la derecha de arriba hacia abajo]* entonces de aquí, de estos siete *[señala dos círculos de la segunda tabla que estaban tachados]* cogí dos, entonces de esos dos se los pasé a este *[señala la primera tabla]* entonces el 16 quedaría convertido en 18 y este *[señala la segunda tabla]* quedaría convertido en 5, entonces  $18+5 = 23$

## SESION NÚMERO DOS (9 DE MAYO DE 2023)

### Video 1

PROFESOR: ¿Cómo te quedaron las figuras 4, 5 y 6? Explícame como hiciste cada una.

DANNY: Lo hice así, conté cuantos cuadros tenía cada figura *[apunta su lápiz a la parte inferior derecha de la figura 4 del patrón y comienza a contar]* uno, dos, tres, cuatro *[mueve el lápiz cuadro a cuadro hasta llegar hasta arriba]* y después, hice los cuadros así *[señala en la figura 4 tres líneas horizontales]* y después así *[señala en la figura 4 tres líneas verticales]* así hice las rayas.

DANNY: Acá igual *[señala de arriba hacia abajo los cuadros de la figura 5]* solo que le aumente cuadros, cuantos cuadros era la figura *[indica el número de la figura que se encuentra debajo del dibujo]*

### Video 2

PROFESOR: *[Dirigiéndose a todos]* Bueno, vamos a ver cómo dibujaron los compañeros la figura 4, la figura 5 y la figura 6 en el tablero.

PROFESOR: Cuéntanos por qué la figura 4 es así [*Se dirige al estudiante que dibujo la figura 4 en el tablero*].

MARIANA: Porque me di cuenta de que cada figura tenía una fila más, entonces la figura uno solo tenía una fila de 3 cuadritos [*señala la primera fila que había dibujado*] la de dos tiene 2 y la tres tiene 3, entonces en la figura cuatro tenía cuatro filas de a 3 cuadritos y entonces así era la figura cuatro [*señala con el dedo el número de la figura*].

MARIANA: ¡Melany la cinco!

PROFESOR: Bueno y aquí cómo hicimos la figura cinco [*señala la figura dibujada en el tablero*].

MELANY: Repetir 3 veces los 5 cuadritos [*señala la parte superior de la figura 5*] entonces, tres, tres, tres, tres, tres [*comienza a bajar cuadro a cuadro hasta terminar en el último*] y eso nos da la figura cinco.

PROFESOR: Muy bien y ¿aquí? [*Indica la última figura dibujada en el tablero*]

THOMAS: Entonces aquí hay que sumar tres, más tres, más tres, más tres... [*sube progresivamente con el marcador hasta terminar una columna de cuadritos*] y eso nos da...no me acuerdo pero estoy seguro de que es así.

PROFESOR: Bien, entonces vamos a ver cuántos cuadros hay en cada figura [*Dirigiéndose a todos los estudiantes*] ¿Cuántos cuadrados hay en la figura 5?

DANNY: ¡15! [*Alza la voz por encima de sus compañeros*]

PROFESOR: ¿Por qué 15? [*Dirigiéndose a todos los estudiantes*]

DANNY: Porque  $3 \times 5$  es 15

PROFESOR: Genial y aquí la figura seis ¿Cuántas tenía? [*Señala la figura 6 del patrón*]

ESTUDIANTES: ¡18!

DANNY: Porque  $3 \times 6$  es 18

PROFESOR: Muy bien.

### Video 3

PROFESOR: ¿Cuántos cuadrados hay en la figura número 15?

THOMAS: Yo sumé  $3 + 3... + 3 + ...$  [*Medita sobre la cantidad de sumas que está realizando*] y pues  $3 \times 15$  da 45 y ya.

DANNY: Yo lo hago multiplicando.

PROFESOR: ¿Cómo así?

DANNY: Multiplicando  $3 \times 15$  [*señala la operación que había realizado en su hoja*].

PROFESOR: y eso ¿por qué?

DANNY: Porque  $3 \times 15$  da 45 y cada cuadro tiene 3 [*señala uno de los dibujos realizados con anterioridad*] y pues serían 15.

#### Video 4

PROFESOR: Bueno, vamos a la pregunta tres ¿Qué cantidad de cuadrados tendrá la posición número 100? [*Dirigiéndose a todo el salón*]

ESTUDIANTES: 300 [*Gritan algunos estudiantes*]

PROFESOR: ¿Son 300? ¿Por qué son 300?

ESTUDIANTES: Porque  $3 \times 100$  es 300 [*Gritan varios estudiantes*]

PROFESOR: ¿Qué debemos multiplicar entonces?

ESTUDIANTES:  $3 \times 100$

#### Video 5

PROFESOR: [*Dirigiéndose a todos*] Vamos con la última pregunta, voy a pasar por cada uno de los puestos a ver a que conclusiones han llegado [*Luego de unos minutos se acercó a algunos estudiantes que manifestaban a ver terminado*]

PROFESOR: ¿Me podrías decir a que has llegado?

DANNY: Se puede multiplicar tres por la cantidad de figuras [*no realiza ningún movimiento mientras responde*].

PROFESOR: Entonces si yo quiero encontrar la cantidad de cuadros en la figura 2000 ¿Qué debo hacer?

DANNY: Pues al multiplicarlo por 3 quedaría [*Piensa unos cuantos segundos el resultado*] sería 6000.

PROFESOR: ¡Muy bien!

#### Video 6

PROFESOR: Bueno Sara, explícame que hiciste en la pregunta 4?

SARA: O sea, si me llegan a dar el número 45, lo multiplico por 3 y esa sería la respuesta

#### Video 7

PROFESOR: [*Dirigiéndose a todos los estudiantes*] Bueno niños, ahora vamos a ver el otro patrón, este es un poco diferente y vamos a elegir a 3 compañeros para que lo dibujen en el tablero [*Se eligen tres estudiantes al azar y se dan 5 minutos para hacer los dibujos*]

PROFESOR: Muy bien, comenzamos con la primera figura [*señala la figura número cuatro del segundo patrón*] ¿Cómo lo hiciste?

MARIANA: Pues me di cuenta que era como la otra forma, solo que aquí arriba [*señala un cuadro que se encuentra por encima de todos los demás*] tenía un cuadrito que el otro no tenía, entonces vamos a sumar [*Mueve su mano a la primera columna de la figura*] cuatro, cuatro, cuatro [*recorrió las 3 columnas del dibujo*] y uno arriba cinco [*señala el cuadro que se encuentra más arriba que lo demás*] entonces sería cuatro, cuatro y cinco [*repite el mismo movimiento que hizo al subir y bajar la mano por todas las columnas de la imagen*]

PROFESOR: Muy bien, bueno y por aquí ¿cómo lo hicieron? [*señala la siguiente figura del patrón*]

ANDRES: Bueno, es así porque allá son 4 [*señala con el marcador el patrón dibujado por Mariana*] entonces acá deberían de ser 5 [*toma una pequeña pausa*] y entonces cómo acá hay uno demás [*señala el cuadro que está por encima de todos*] entonces se va sumando, aquí son 5 [*señala de abajo hacia arriba la primera columna*] y para allá son 3 [*señala la última fila de izquierda a derecha*] y acá son seis [*señala la última columna de 6 cuadrados*] porque acá son 5 [*señala la última columna del dibujo de la figura 4 realizado por Mariana*] entonces 6, 5 y 3 [*balancea el marcador por encima del dibujo*].

PROFESOR: Vamos por el último [*Se dirige al último dibujo en el tablero*]

MATIAS: Eh...conté las columnas [*señala de arriba hacia abajo los cuadrados de la figura 6*] entonces cuando el profesor estaba explicando, yo me di cuenta de que en cada una, o sea en la primera figura, llevaba cuatro, entonces la segunda llevaba siete y entonces me di cuenta de que en cada figura se sumaba de a tres, luego sumé de a tres, de a tres, de a tres [*comienza a hacer círculos en el aire con el marcador*] entonces me dio 19 la figura 6.

### Video 8

PROFESOR: Matías, quiero que me expliques con más detalles cómo es que has calculado la cantidad de cuadros en el segundo patrón.

MATIAS: Aquí hay cuatro si ve [*Señala la primera figura del patrón*] y aquí hay siete [*Mueve su dedo y señala la segunda figura del patrón*] entonces va sumando de a 3 cada figura, entonces acá [*señala la figura 3*] hay 10, después la cuatro hay 13 [*no realiza ningún movimiento o gestos*] después la cinco tiene 16 y por última la seis tiene 19 cuadros.

PROFESOR: ¡Muy buena observación!

### Video 9

PROFESOR: [*Dirigiéndose a todos*] Muy bien chicos, vamos con la última pregunta ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de cuadrados que tiene sin dibujarla?

*Se dan algunas instrucciones adicionales y a continuación se pregunta a algunos estudiantes.*

PROFESOR: ¿Encontraste la forma de hacerlo?

DANNY: Es como la anterior que le dije [*Voltea la hoja y señala la generalización para el primer patrón*] Solo que aquí [*Vuelve a voltear la hoja y lee lo que ha escrito como respuesta*] hay que multiplicar 3 por el número de las figuras y se le agrega un cuadro más.

PROFESOR: ¡Excelente!

PROFESOR: ¿Cómo te fue Matías? ¿Tienes una respuesta?

MATIAS: Si, pero no sé cómo escribirla.

PROFESOR: A ver, cuéntame cómo lo harías.

MATIAS: O sea, digamos, a mí me dan un número...una cantidad de., [*busca una palabra que exprese su idea*] digamos...treinta y...! treinta y cuatro! Entonces [*toma una breve pausa*] estoy multiplicando, de vertical digamos que hay 3 [*refiriéndose a la cantidad de cuadros por filas*] entonces estoy multiplicando 3 por...3 por 34 [*Se toma un tiempo para calcularlo mentalmente*] Eh... ¿42?

PROFESOR: ¿Estás seguro? Bueno, multiplicas y luego ¿qué haces?

MATIAS: Bueno y después el número que hay aquí arriba [*Señala el cuadro que está encima de todos los cuadros de la figura 6*] lo sumamos con la cantidad [*señala los demás cuadros de la figura*] que da, entonces digamos da 42 digamos [*ríe un poco al no saber la respuesta*] entonces  $42+1$  da 43.

PROFESOR: Bien, puedes encontrar la cantidad pero debes operar correctamente. No te da 42 pero quiero que encuentres el resultado con la forma que me diste para hacerlo.

### Video 10

PROFESOR: Para terminar, vamos con un patrón que es muy parecido a un cohete [*Señala la pantalla donde se proyectaban la figura 1, 2 y 3 del patrón*].

PROFESOR: Entonces veamos la pregunta dos ¿Cuál es la diferencia de crecimiento entre los triángulos azules y los bloques rojos?

ANA: Aquí yo puse [*señala la pregunta 2*] que los rojos no crecen y que los azules si crecen de 4 en 4 porque...porque aquí vemos [*señala la figura 2 del patrón del cohete*] que tiene la misma cantidad de 5, 5 y 5, en cambio aquí [*señala nuevamente la figura 2 del patrón del cohete*] vemos cuadros, pero en realidad no son cuadros, están conformados por 2 triángulos.

Entonces aquí hay ocho [*señala los cuadros azules de la figura 2*] entonces ellos tienen más, ellos crecen [*señala la figura 3 del patrón y la figura cuatro dibujada por ella*] y los rojos no crecen, siguen en la misma forma.

PROFESOR: Bien y ¿Cuánto crecen los azules?

ANA: Eh, por cuadro crecen dos y si fueran por dos cuadros crecen en cuatro.

PROFESOR: ¿Te refieres a los triángulos?

ANA: Si.

PROFESOR: O sea, si lo miramos solamente con triángulos ¿Cómo están creciendo los triángulos?

ANA: Crecen de a dos, crecen de a dos por un cuadro.

### Video 11

PROFESOR: ¿A qué respuesta llegaste para la pregunta 3, Danny?

DANNY: Si a mí me dicen que 15...que haga la figura 15, entonces yo sumo  $15 + 15$  que es por un lado.

PROFESOR: *[Interviene]* ¿Por qué  $15 + 15$ ?

DANNY: Porque cada lado de acá... *[Busca un dibujo que había realizado de la figura 6 del patrón del cohete]* Seis, seis tiene *[señala la palabra "figura 6"]* una, dos, tres, cuatro, cinco y seis *[señala y cuenta triangulo a triangulo los triángulos azules de una parte de la columna del cohete]* y el otro lado tiene seis *[señala la otra parte de una misma columna de triángulos]* y  $6 + 6$  es 12 y lo otro va a hacer con el otro lado *[señala la otra columna compuesta de triángulos azules]* entonces  $12 + 12$  da 24 y después se suma estos cuadros de acá *[señalando los triángulos rojos que están en la parte alta y baja del cohete]*

PROFESOR: ¿Entonces para la figura 15 cómo sería?

DANNY: Sumar  $15 + 15$  que es lo de un lado que daría 30, pero del otro lado, entonces son 60 y después se le suma esto *[vuelve a señalar los triángulos rojos]* entonces quedaría 65.

PROFESOR: ¡Perfecto!

## SESION NÚMERO TRES (16 DE MAYO DE 2023)

### Video 1

PROFESOR: *[Dirigiéndose a todos]* Bueno niños, quiero que contemos la cantidad de círculos que hay en estos portavasos. Esta vez quiero que tengamos en cuenta la cantidad de círculos que tiene el portavaso en cada lado ¿Bien?

*Se contaron los círculos de los portavasos con 5, 6 y 7 círculos en cada lado mientras se mostraba la imagen en el tablero.*

PROFESOR: Muy bien, ahora quiero que me digan cuantos círculos tiene el un portavasos que tiene 8 círculos en cada lado antes de que yo les muestre la imagen.

Entre todos los estudiantes, se prestó atención a los cálculos que realizaba Matías

MATIAS:  $16+7$  da 23... [*Mantiene la mirada elevada mientras realiza cálculos mentales y revisa las imágenes de portavasos ya mostradas*] Creo que lo hago mal...

PROFESOR: ¿Seguro? ¿Por qué?

MATIAS: Porque contaría las de arriba...8 [*señala con el dedo la cantidad superior de círculos que hay en el portavasos de 8 círculos de lado*] más 8 da 16 [*señala con el dedo la cantidad inferior de círculos que hay en el portavasos de 8 círculos de lado*] y los lados...sobran 6 [*señala con el dedo las cantidades laterales de círculos que hay en el portavasos de 8 círculos de lado*] ¡No son 7! ¡No! ¡No! ¡Si son 6!

PROFESOR: ¿Por qué tiene 6?

MATIAS: Si porque cuento los de arriba, entonces 8 y 8 es 16 [*señala con el dedo la cantidad superior e inferior de círculos que hay en el portavasos de 8 círculos de lado*] y quitamos los dos [*señala enfatizando la posición de las esquinas*] en ambos lados, entonces quedaría 6.

MATIAS:  $16$  más 6 es 22...más 6 ¡Profe 28!

## Video 2

PROFESOR: [*Dirigiéndose a todos*] Bueno ahora con todo esto, quiero que respondan la primera pregunta que hay en las hojas.

*Uno cuantos minutos después y revisar el trabajo de algunos estudiantes*

SARA: Mire profe, conté los de acá [*señala 5 círculos de arriba hacia abajo del portavasos con 5 círculos en cada lado*] entonces ahí hay 10 [*Indica que quiere imaginar el portavasos de 10 círculos utilizando la el diseño de 5 círculos*] Entonces ahora quiero contar estos [*señala los círculos que de la parte superior*] pero no cuento este porque ya lo había contado [*señala un círculo que había tenido en cuenta anteriormente*] entonces me queda ocho y  $8+8$  es [*a partir de ocho comienza a contar con los dedos otras ocho unidades*] 16 y pues 10 y 10 son 20...más 16 ¡36!

PROFESOR: Es correcto.

## Video 3

ALEJANDRA:  $10 + 4$  ...espere ¿Cómo es que era? [*Se detiene a observar la hoja*] Sumando 36 más 4, más 4, ... me da 56 [*señala la pregunta 2 dónde se pregunta por la cantidad de círculos en un portavasos de 15 círculos en cada lado*]

PROFESOR: ¿Estás segura de esto?

ALEJANDRA: Si porque ya dijimos que solo aumenta de a 4 [*Sonríe*].

## Video 4

DANNY: Cómo aquí en el diseño 1 [*Señala la imagen del diseño 1 en la hoja enfatizando las esquinas*] le quito las esquinas, después sumo esto [*señala con el dedo cuidadosamente 3 cuadros*] los lados, lo sumo 4 veces y después le sumo las esquinas.

PROFESOR: Muy bien, en ese caso, cuanto te daría la de 15 círculos [*Indica la pregunta número 3*]

DANNY: 36 círculos

PROFESOR: Eso sería con 10 círculos en cada lado.

DANNY: Daría... [*Revisa la hoja y se va a calcular la pregunta*].

*Luego de unos minutos vuelve a presentar su solución*

DANNY: Profe, quitaría las esquinas, si le quito las esquinas las esquinas [*señala el número 15 presente en el enunciado*] entonces me daría 13 en cada lado [*señala los lados del diseño 1*] entonces, después multiplique 4 por [*toma una pausa*] profe, se puede sumar o multiplicar...4 se puede sumar  $4 \times 13$  o sumar 4 veces 13 y yo multipliqué y...sumé 4 veces 13 y después le sume 4

PROFESOR: [*Se percata de que el resultado de esas operaciones no está en el enunciado*] ¿Entonces cuánto te dio?

DANNY: 56.

### **Video 5**

PROFESOR: Dime ¿Cómo lo hiciste? [*Indica la pregunta 2*]

SARA: jaja [*ríe un poco nerviosa*] yo empecé contando esto [*señala los círculos laterales derechos del diseño 1*] entonces ahí hay 15 y pues acá me quedarían 12 [*señala los círculos inferiores del diseño 1*] porque ya conté este y este [*señala con el lápiz las esquinas superiores derechas del diseño 1*]

PROFESOR: Si ¿y luego?

SARA: Entonces sumé  $15 + 15$  que es [*se muestra pensativa mientras realiza los cálculos mentalmente*] y da 35... ¡No! 30

PROFESOR: Si, muy bien.

SARA: Y  $30 + 13$  es 43 y más otros 13 eso es...56.

PROFESOR: ¡Perfecto!

### **Video 6**

PROFESOR: ¿Cómo lo hiciste? [*Indica la pregunta 2*]

MATIAS: [*Lee la respuesta que ha escrito en la hoja*] Entonces porque sumé los de arriba y abajo, entonces en cada fila hay 15 entonces conté los de arriba y los de abajo [*Señala los grupos de círculos que seleccionó para sumar*] Entonces  $15 + 15$  es 30 y en los lados sobran 13 entonces  $13 + 13$  es 26 entonces  $30 + 26 \dots 56$ .

PROFESOR: Muy bien.

### Video 7

PROFESOR: [*Se dirige a todo el salón*] Bueno, vamos a la pregunta 3 ¿Alguno ya tiene una respuesta?

DANNY: Yo profe [*Levanta la mano*]

PROFESOR: Voy para allá, lo demás seguimos trabajando en la pregunta que se encuentren.

DANNY: Profe mire,  $47 \times 4$  [*señala la respuesta escrita que tiene en su hoja*]

PROFESOR: ¿Por qué multiplicas  $47 \times 4$ ?

DANNY: Lo multiplico 4 veces [*señala y remarca el sitio donde hizo la operación*]

PROFESOR: ¿Por qué 47?

DANNY: Porque le quito las esquinas primero.

PROFESOR: Bien, entiendo.

DANNY: Luego, lo multiplico 4 veces [*empieza a realizar la operación mediante el algoritmo tradicional*] esto me da 188, después le sumo los 4 de las esquinas y esto me da  $4 + 8$  es 12 y 8...y una que llevaba 9 y una [*el resultado final es 192*]

PROFESOR: [*Al ver que el resultado es correcto lo motiva a pasar a la siguiente pregunta*] Muy buen, pasamos a la siguiente pregunta.

### Video 8

MATHIAS: Es que no...no sé si es así. Es que en un lado, en los dos lados van a haber 49 [*Señala los ejemplos pegados en el tablero de portavasos con 7 y 8 círculos de lado*].

PROFESOR: Si es correcto [*Se percata de la pregunta que trata de responder*].

MATHIAS: y en la mitad van a haber 47 [*continúa señalando los ejemplos pegados en el tablero*] porque  $49 - 2$  daría 47 [*Se dirige al trabajo realizado en la hoja y señala las operaciones que realizó*] entonces  $47 + 47$  es 94 y  $49 + 49$  es 98 y si los sumo sería 192.

PROFESOR: Si, estás en lo correcto.

MATHIAS: ¿Sí? [*Lo dice desconfiado*] ¿Entonces la respuesta es 192? ¡Ay profe! Es que estoy asustado.

PROFESOR: jajaja tranquilo Mathias.

### Video 9

MARIANA: Yo sé que acá arriba, aquí arriba hay 49 [*señala con el lápiz la línea superior de círculos del diseño 2*] Aquí como este sumó uno [*señala con el lápiz la esquina superior derecha*] entonces quedan 48 [*señala la línea derecha de círculos de arriba hacia abajo*]

PROFESOR: Sí, muy bien ¿y luego?

MARIANA: y aquí también 48 [*señala con el lápiz la línea inferior de círculos del diseño 2*] y luego aquí [*encierra con el pulgar y el índice la línea izquierda de círculos ocultando las dos esquinas*] se le quitarían dos porque el de arriba ya está sumado y el de abajo también [*señala con el lápiz la esquina superior e inferior izquierda*] entonces quedarían 47.

PROFESOR: Sí perfecto.

MARIANA: Así que en total sumo todo [*realiza un movimiento circular con lápiz en mano*] y me dio 192.

### Video 10

PROFESOR: Explícame como lo hiciste [*indicando la pregunta 5 relacionado con el diseño 3*]

DANNY: Primero quito las esquinas blancas, después multiplico  $4 \times 15$  porque 15 círculos fue lo que quedó sin las esquinas blancas y después le sumo al resultado 4.

### Video 11

PROFESOR: ¿Cuántos círculos en total tienen un portavasos con cualquier cantidad de círculos?

MATIAS: [*Lee al pie de la letra la respuesta que ha escrito en el papel*] Sumando sus lados y horizontales porque en los lados hay más y en las horizontales menos [*sigue con el dedo la lectura de su respuesta*]

PROFESOR ¿por qué?

MATIAS: Porque en los lados, los horizontales se le restan dos [*hace referencia al diseño 2 donde los horizontales están representados con color blanco*] porque en las esquinas de los lados se cogen 2 [*levanta su mano para indicar el número dos con los dedos*] entonces las horizontales se quedan sin esquinas, entonces se le restan dos.

### Video 12

PROFESOR: Explícame como resolviste la pregunta 6 ¿Cómo lo hiciste? [*señala el diseño 4 de portavasos*]

DANNY: Primero quito 16 círculos blancos, como aquí [*señala con el dedo el diseño 4 que apenas tiene 5 círculos en cada lado*] aquí quedan 4 y 4 [*señala con el dedo los círculos amarillos del*

*diseño 4 de arriba hacia abajo*] y para cada lado es el mismo número [*señala y empareja con el dedo los lados con mismo color y cantidad de círculos*]

PROFESOR: y siguiendo con esa idea ¿Cómo calculas el portavasos de 17 círculos?

DANNY: Entonces primero le quito 16 círculos blancos de dos lados [*mantiene guiada su lectura con el dedo*] después multiplico  $2 \times 16$  porque 16 círculos amarillos fueron los que quedaron, como aquí [*señala una vez más el diseño 4 presentado en la hoja*] amarillos que son los mismos y al resultado le sumamos 16 círculos blancos de cada lado.

### SESION NÚMERO CUATRO (18 DE MAYO DE 2023)

#### Video 1

PROFESOR: Los palitos de paleta solo alcanzan para construir una armadura de 4 bases ¿Cuántas varillas tendrá una armadura de 5 bases?

EDINSON: Súmanos 4... sumamos 4 varillas porque mire [*se acerca a la construcción de la armadura hecha con palitos de paleta*]

PROFESOR: ¿Cómo así?

EDINSON: Pues aquí hay 15 [*señala la construcción de la armadura con bases hecha de palitos de paleta y plastilina*] Entonces uno [*señala la siguiente base de la armadura imaginariamente*] dos, tres [*señala otras dos varillas que conforman la forma triangular del patrón*] cuatro y la de arriba [*señala con el dedo la parte de arriba de la armadura mientras lo mueve de manera horizontal*] entonces da 19.

#### Video 2

PROFESOR: ¿Cómo supiste que eran 19, Melany?

MELANY: 19 es que sumé...entonces acá [*señala su dibujo de la armadura con una base*] hay 3, pero como hay un palito arriba entonces [*comienza a realizar un conteo con los dedos*] 4, 5, 6, 7... y entonces comencé con las otras también así y así me dio 19.

PROFESOR: ¿Entonces ibas sumando de a cuánto?

MELANY: Entonces a la primera tenían que ser 3 [*señala el recuadro dónde escribió la cantidad de varillas de una armadura con una base*] pero sumé a tres...y después cuatro [*señala la respuesta de la varilla de dos bases*] y cuatro [*señala la respuesta de la varilla de tres bases*] cuatro [*señala la respuesta de la varilla de 4 base*] y cuatro [*llega a la última armadura con 5 varillas de base*].

PROFESOR: ¿y por qué 4?

MELANY: Porque mira [*señala un triángulo en la armadura dibujada de dos bases*] un, dos, tres [*mueve su lápiz señalando los lados del triángulo mientras los cuenta*] y con está [*señala una varilla superior que se encuentra entre los triángulos*] entonces sumé cuatro, más cuatro, más

cuatro, pero entonces, mira acá hay un 3 [*señala la armadura con una base*] entonces cuatro, cinco, seis, siete [*cuenta con los dedos la suma de  $3 + 4$* ] y así pasé con las otras y así logré obtener 19.

### Video 3

PROFESOR: ¿Cómo llegaron a 19 ustedes? ¿Cómo contaron?

MARIANA: O sea, esto se va a caer [*señala que la armadura de palitos que hicieron estaba débil*].

MARIANA Y SARA: O sea, imaginamos que había otro acá [*señalan un espacio vacío donde debería estar la siguiente base de la armadura*] y lo que llevábamos de esto [*indican con la mano la armadura de 4 bases que construyeron*] se lo sumábamos.

PROFESOR: ¿y como lo sumaron?

MARIANA: O sea, uno, dos,..., seis [*empieza a señalar palitos de paleta que comprendían la armadura que tenían construida*] Primero contamos esto sin el techo [*trata de hacer con la mano una señal que evita considerar el techo*] entonces 6, 7, 8, 9 [*señala con el dedo cada varilla mientras realiza el conteo*] 10, 11, 12 y aquí [*señala el triángulo imaginario de la quinta base*] 13, 14, 15, más el techo 16, 17, 18, 19 [*mueve el dedo mientras realiza el conteo desde el techo imaginario hasta el final de la armadura*].

PROFESOR: ¡Muy bien!

### Video 4

ANGELICA: Yo hice este, entonces digamos estaba haciendo este [*señala la armadura de 4 bases*] y entonces aquí le sumé... [*señala con el dedo un sitio vacío donde supone debe ir la siguiente base*] le sumé cuatro más.

PROFESOR: ¿por qué cuatro más?

ANGELICA: Porque aquí uno, dos, tres y cuatro [*cuenta las varillas de la última base de la armadura de 4 bases tomando una varilla superior como base*] entonces eso me dio 19.

PROFESOR: y ¿la base no es la de abajo?

ALEJANDRA: No era la base, era el techo.

ANGELICA: Eso, el techo, el techo.

### Video 5

PROFESOR: ¿Matías como calculaste las varillas de las armaduras de 9 y 10 bases?

MATIAS: [*Lee la respuesta que ha escrito en la hoja*] La de 9 bases tiene 35 y la de 10 tiene 39 ¿cómo? Sumando de 4 en 4, o sea en cada base hay 4...hay 4, entonces sumé hasta llegar a la base 9 y 10.

PROFESOR: Si, bien.

MATIAS: Entonces sumé detrás de la hoja [*voltea la hoja donde había escrito una serie de números*] hicimos estos números [*señala de izquierda a derechas una secuencia numérica de sumas de 4*] estos números son cada base, entonces contamos [*empieza el conteo desde el número 3 lo cual es la cantidad de varillas en la primera base*] uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve [*va pasando término a término de las sumas que realizó*] esta es la de 9 [*se detiene en el número 35 y lo encierra con su lápiz*] y la de 10 tiene 39 [*encierra este resultado en lápiz también*]

### Video 6

JAIME: O sea, pusimos los lápices de la misma manera que las otras formas [*señala la construcción que hicieron acostada sobre la mesa*] y nos salió 19.

PROFESOR: ¿O sea que contaron utilizando los lápices?

JAIME: Sí.

### Video 7

PROFESOR: ¿Cómo calculaste la cantidad de varillas que tiene una armadura de 100 bases?

MATIAS: Recuerda yo que le había mostrado [*muestra la secuencia de números aún más larga desde la última vez*] Entonces la de 20 bases daba 79 ¿Sí?

PROFESOR: ¿Por qué?

MATIAS: Porque conté de 4 en 4 hasta este número [*señala con el lápiz el número 79 de la secuencia numérica*] entonces conté todo esto [*pasa el dedo por todos los términos de la secuencia*] hasta llegar a 20.

PROFESOR: Bien perfecto.

MATIAS: Entonces conté veinte, más veinte, más veinte, más veinte, más veinte [*señalando una suma del número 79 cinco veces seguidas*] digo 20 pero es 79 [*aclarando el señalamiento del número 79 mientras decía 20*] entonces esto serían 100 bases, entonces lo sumamos y... [*señala el resultado de la suma*] o también se puede multiplicar por 5 y la respuesta es 395.

### Video 8

PROFESOR: [*Dibuja en el tablero la suma de dos armaduras de 2 bases y su respectiva cantidad de varillas, es decir 7 varillas*] ¿Cuántas varillas tiene la de 4 bases? [*Le pregunta a Matías*].

MATIAS: La de 4 bases tiene... 15.

PROFESOR: [*Escribe esta respuesta frente a la cantidad de varillas de 2 armadura de dos bases*] Pero será que  $7 + 7$  es igual a 15? [*Escribe el signo de suma entre los siete e iguala esta operación al número 15*]

PROFESOR: [*Mientras Matías continúa observando*] Entonces será que 20 más la que tiene 20 y así sucesivamente nos dará ¿395?

MATIAS: No, o sea [*pide que se le dé el marcador para escribir en el tablero*] la base de 20 tiene...79 ¿Sí?

PROFESOR: Si, es verdad.

MATIAS: Entonces conté 79 que es 20 [*Luego empieza a escribir la suma del número 79 cinco veces*]

PROFESOR: ¿y lo sumaste? [*señala de arriba hacia abajo la suma de los 5 números*]

MATIAS: Si, los sumé. Entonces  $9 + 9 + 9 + 9 + 9$  es 45, llevo 4 y luego,  $7 + 7$  es  $14 + 7$  es 21, más 7 es 28, más 7 es 35 y cuatro que llevaba 39

PROFESOR: Sí, pero mira [*señala el ejemplo de la suma de dos armaduras con dos bases*] sumando no llegamos al mismo resultado.

*Luego de esto, pasamos a revisar los dibujos que había hecho su hoja*

MATIAS: Vea profe,  $3 + 7$  [*señala las primeras dos armaduras con una y dos bases respectivamente*] por eso, entonces me di cuenta de que se sumaba.

PROFESOR: [*interviene*] Pero mira, mira [*señala nuevamente la que tiene 2 bases*] si yo sumo la que tiene 2 [*señala la base*] más otra que tiene 2 [*reitera la operación realizando un movimiento circular con el dedo alrededor de la figura*] tú me dices que me tiene que dar la que tiene 4 [*señala la armadura de 4 bases*] ¿Si o no?

MATIAS: Profe pero es que... [*toma una pausa para pensar en lo que señala el profesor*] no sé, yo creo que si me quedó bien porque...es que no sé, si creo que me quedó bien porque en cada una se suman 4 porque mire [*vuelve a repasar la secuencia desde la primera base y finalmente no se llega a un acuerdo*].