

PUNTOS ORILLA DE UN CONTINUO.

MAYRA ISABEL FERREIRA ORTIZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2020

PUNTOS ORILLA DE UN CONTINUO.

MAYRA ISABEL FERREIRA ORTIZ

Trabajo de Grado para optar al título de  
Matemática

Director:

Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2020

## **Agradecimientos**

Agradezco primeramente a Dios. También agradezco al profesor Javier Enrique Caramargo García por su apoyo, tiempo y explicaciones que me dio para la realización de este trabajo. A mi padre, hermano, amigos y compañeros por el apoyo durante este camino.

## CONTENIDO

	<b>pág.</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>9</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>11</b>
1.1. NOCIONES BÁSICAS	11
1.2. CONTINUOS IRREDUCIBLES E INDESCOMPONIBLES	17
1.3. CONTINUOS TIPO $\Delta$	24
<b>2. PUNTOS Y CONJUNTOS ORILLA</b>	<b>31</b>
2.1. PUNTOS ORILLA Y EJEMPLOS	32
2.2. PUNTOS ORILLA E IRREDUCIBILIDAD	39
2.3. ARCO Y CURVA CERRADA SIMPLE	51
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>62</b>

## RESUMEN

**TÍTULO:** PUNTOS ORILLA DE UN CONTINUO. \*

**AUTOR:** MAYRA ISABEL FERREIRA ORTIZ \*\*

**PALABRAS CLAVE:** CONTINUO, PUNTOS ORILLA, IRREDUCIBILIDAD.

### **DESCRIPCIÓN:**

Los puntos orillas al igual que los puntos de corte, son fundamentales en la Teoría de continuos, pues con ellos podemos caracterizar a diferentes continuos, los cuales son espacios métricos compactos y conexos. En este trabajo estudiamos los puntos orilla, demostraremos que cada continuo tiene al menos dos puntos orilla, generalizando así el Teorema clásico de la Teoría de continuos: cada continuo tiene al menos dos puntos de no corte. Mostraremos que cada punto de irreducibilidad es un punto orilla, y también que no todo punto orilla es de irreducibilidad para mirar esto mostraremos un contraejemplo. Sin embargo, daremos condiciones bajo las cuales un punto orilla sea punto de irreducibilidad. Introduciremos los continuos únicamente irreducibles y los continuos finitamente irreducibles. Asimismo, damos una caracterización de los continuos únicamente irreducibles con los puntos orilla. Demostraremos también que la unión de puntos orilla en un continuo únicamente irreducible es un conjunto orilla. Corregiremos la definición de continuo finitamente irreducible dada por Rocío Leonel y algunos de los resultados dados por ella en su artículo de “shore points in a continuum”. Una aplicación de los puntos de no corte es caracterizar a el arco y la curva cerrada simple, para finalizar este trabajo caracterizamos el arco y la curva cerrada simple utilizando los puntos orilla de un continuo.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Javier Enrique Camargo García.

## ABSTRACT

**TITLE:** SHORE POINTS OF A CONTINUUM \*

**AUTHOR:** MAYRA ISABEL FERREIRA ORTIZ. \*\*

**KEYWORDS:** CONTINUUM, SHORE POINTS, IRREDUCIBILITY.

**DESCRIPTION:**

Shore points just like cut points are fundamental in Continuum Theory, because with them we can characterize different continuum, which are compact and connected metric spaces. In this work we study shore points, we will demonstrate that every continuum has at least two shore points, thus generalizing the classic Theorem of Continuum Theory: every continuum has at least two non-cut points. We will show that each irreducibility point is a shore point, and also that not every shore point is irreducibility, to look at this we will show a counterexample. However, we will give conditions under which a shore point is an irreducibility point. We will introduce uniquely irreducible continuum and finitely irreducible continuum. Likewise, we give a characterization of uniquely irreducible continuum with shore points. We will also show that the union of shore points in a finitely irreducible continuum is a shore set. We will correct the definition of a finitely irreducible continuum given by Rocío Leonel and some of the results given by her in her article “shore points in a continuum”. An application of the no-cut points is to characterize the arc and the simple closed curve, to finish this work, we characterize the arc and the simple closed curve using shore points.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Mathematics School. Sciences Faculty. Universidad Industrial de Santander. Director: Javier Enrique Camargo García.

## INTRODUCCIÓN

La Teoría de Continuos es la rama de la topología que estudia los espacios métricos compactos y conexos. Esta teoría surge a finales del siglo XIX con los trabajos de George Cantor donde utiliza por primera vez el término “continuo” en un contexto de espacios euclidianos  $\mathbb{R}^n$ ; sin embargo, se formaliza a comienzos del siglo XX con los trabajos de Fréchet, Borel, Hausdorff, Alexandroff y Urysohn, donde se da el concepto de continuo como lo usamos actualmente, esto es, un espacio métrico no vacío compacto y conexo. Casi simultáneamente, Hausdorff, Borsuk, Ulam y Vietoris, introducen y estudian propiedades topológicas de hiperespacios de continuos. Nuestro trabajo los desarrollamos en el contexto de la teoría de continuos y sus hiperespacios.

Los puntos orilla fueron introducidos en el artículo “Shore points in dendroids and canonical pointed hyperspaces” de los profesores Luis Montejano e Isabel Puga, como un fortalecimiento de la noción de punto de no corte. La clase de puntos orilla la utilizaron en el estudio de dendroides, más específicamente, para describir una propiedad particular del hiperespacio de subcontinuos de un dendroide suave. Posteriormente, en “Shore points of a continuum” la profesora Rocío Leonel, generaliza la noción de punto orilla a cualquier continuo, y estudia el comportamiento de estos puntos en clases particulares de continuos. En el trabajo de la profesora Leonel centraremos este proyecto de grado.

Como se expuso anteriormente, los puntos orilla extienden la noción de punto de no corte en continuos. Unos de los resultados que mostraremos es que cada continuo tiene al menos dos puntos orilla; este teorema generaliza un resultado clásico muy importante de la teoría de continuos que afirma que todo continuo tiene al menos

dos puntos de no corte (ver Teorema 10.25 de <sup>1</sup>).

Otro aspecto que estudiaremos es el comportamiento de puntos orilla en continuos irreducibles. Es bien conocido que un punto de irreducibilidad es un punto de no corte; por esta razón, es natural relacionar los puntos orilla con los puntos de irreducibilidad en un continuo. En esta dirección, demostraremos además que en un continuo únicamente irreducible, la unión finita de puntos orilla es un conjunto orilla. Inicialmente este resultado fue demostrado por Montejano y Puga en un dendroide suave, y luego fue generalizado a continuos no degenerados por Leonel.

Una aplicación de los puntos de no corte son las caracterizaciones del arco y la circunferencia. Se dice que un continuo es un arco si, y solo si, tiene exactamente dos puntos de no corte (ver Teorema 10.27 de <sup>1</sup>); además, un continuo es una circunferencia si, y solo si, se desconecta por cualquier par de puntos del espacio (ver Teorema 10.28 de <sup>1</sup>). Entre los resultados más relevantes de nuestro trabajo daremos caracterizaciones del arco y la circunferencia, usando los puntos orilla de un continuo.

Actualmente se han desarrollado diversas investigaciones fundamentadas en los puntos orilla, como se evidencia ampliamente en la literatura. Por esta razón, consideramos importante el desarrollo de esta clase de trabajos donde se realizan con detalle pruebas que no se hacen en los artículos, y puede ayudar al lector a familiarizarse con mayor facilidad con este tema. Finalmente, consideramos importante resaltar que en la sección de continuos irreducibles se encontraron algunos errores en la literatura que en este trabajo fueron corregidos.

---

<sup>1</sup> E. CAMARGO J & VILLAMIZAR. *Topología general*. Colombia: Ediciones UIS, 2020.

## 1. PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es establecer las notaciones básicas que serán usadas a lo largo de este trabajo. Así mismo, se pretende recordar algunos resultados de la Teoría de continuos que son necesarios para la lectura del trabajo.

La mayoría de los resultados que presentamos en este capítulo son conocidos y sus demostraciones se pueden encontrar en libros de topología general. Por esta razón, no realizaremos muchas de estas demostraciones.

### 1.1. NOCIONES BÁSICAS

Aunque muchos de los conceptos que presentamos en esta sección se pueden enunciar de manera más general en el contexto de los espacios topológicos, en este trabajo consideraremos únicamente espacios métricos. A continuación recordamos su definición.

**Definición 1.1.1.** Sea  $X$  un conjunto. Una métrica o distancia en  $X$  es una función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para cada  $x, y$  y  $z$  en  $X$  se verifica:

1.  $d(x, y) \geq 0$ .
2.  $d(x, y) = 0$  si, y solo si,  $x = y$ .
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ .
4.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ . (desigualdad triangular)

El par  $(X, d)$  es llamado espacio métrico.

**Ejemplo 1.1.2.** Sean  $X$  un conjunto no vacío y  $d_0 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$d_0(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Entonces  $d_0$  es una métrica en  $X$ . La función  $d_0$  es llamada *métrica discreta*, y el par  $(X, d_0)$  se conoce como *espacio discreto*.

**Ejemplo 1.1.3.** Sea  $\mathbb{R}^n$  para algún  $n \geq 1$ . Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, \dots, y_n)$  son puntos de  $\mathbb{R}^n$ , definimos

$$d_2(x, y) = \left( \sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La pareja  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  es un espacio métrico. La métrica  $d_2$  es llamada *métrica euclidiana* o *métrica usual*.

Dado un espacio métrico  $(X, d)$ , un conjunto  $U \subseteq X$  se dice *abierto* si para cada  $x \in U$  existe  $r > 0$  tal que  $B(x; r) \subseteq U$ . El conjunto  $B(x; r)$  se conoce como *bola abierta* y se define como:

$$B(x; r) = \{z \in X \mid d(x, z) < r\}.$$

Además, un conjunto  $F \subseteq X$  se dice *cerrado* si  $X \setminus F$  es abierto de  $X$ .

En este trabajo usaremos la siguiente notación: Sea  $X$  un espacio métrico y  $A \subseteq X$  definimos:

1. La adherencia de  $A$  denotada por  $\bar{A}$  o  $\text{cl}_X(A)$  como:

$$\bar{A} = \bigcap \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado de } X \text{ y } A \subseteq F\}.$$

2. El interior de  $A$  denotado por  $\text{Int}(A)$  como:

$$\text{Int}(A) = \bigcup \{U \subseteq X \mid U \text{ es abierto de } X \text{ y } U \subseteq A\}.$$

3. La frontera de  $A$  denotada por  $\text{Fr}(A)$  como:

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

Para la siguiente definición se usará la noción de cubierta abierta. Una cubierta abierta de un espacio  $X$  es una familia de abiertos  $\mathcal{U}$  tal que  $X = \bigcup \mathcal{U}$ . Además, una subcubierta de  $\mathcal{U}$ , es un conjunto  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  tal que  $X = \bigcup \mathcal{V}$ .

**Definición 1.1.4.** Un espacio métrico  $X$  se dice compacto, si toda cubierta abierta de  $X$  admite una subcubierta finita.

**Ejemplo 1.1.5.** El intervalo cerrado  $[0, 1]$  es compacto.

Sea  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$  una cubierta abierta de  $[0, 1]$ . Definamos

$$L = \{t \in [0, 1] \mid \text{existe } \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathcal{A}, \text{ tal que } [0, t] \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}\}.$$

Es claro que  $0 \in L$  y por tanto,  $L \neq \emptyset$ . Como  $L$  está acotado superiormente, existe un  $s \in [0, 1]$  tal que  $s = \sup L$ . Probemos que  $s \in L$ . Como  $\mathcal{U}$  es una cubierta de  $[0, 1]$ , existe  $\lambda \in \mathcal{A}$  tal que  $s \in U_\lambda$ . Así,  $L \cap U_\lambda \neq \emptyset$ , pues  $s = \sup L$ . Sea  $t \in L \cap U_\lambda$  tal que  $[t, s] \subseteq U_\lambda$ . Entonces, dado que existe  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathcal{A}$  tal que  $[0, t] \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ , se tiene que  $[0, s] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} U_{\alpha_i}$ , donde  $\alpha_{n+1} = \lambda$ , y así  $s \in L$ .

Finalmente, veamos que  $s = 1$ . Supongamos que  $s < 1$ . Como  $s \in L$ , existe  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathcal{A}$  tal que  $[0, s] \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ . Supongamos que  $s \in U_{\alpha_n}$ . Sea  $t \in U_{\alpha_n} \cap (s, 1]$  tal que  $[s, t] \subseteq U_{\alpha_n}$ . Pero esto implica que  $[0, t] \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$  y  $t \in L$ . Con lo que contradicimos que  $s = \sup L$ . De lo anterior  $s = 1$  y  $[0, 1]$  es compacto.

**Definición 1.1.6.** Un espacio métrico  $X$  es llamado desconexo, si existen abiertos no vacíos  $U$  y  $V$  tales que  $X = U \cup V$  y  $U \cap V = \emptyset$ . En caso contrario, se dice que  $X$  es conexo.

A continuación mostramos que el intervalo cerrado  $[0, 1]$  además de ser compacto, es conexo.

**Ejemplo 1.1.7.** El intervalo  $[0, 1]$  es conexo.

Supongamos que  $[0, 1]$  es desconexo; es decir, existen abiertos disjuntos y no vacíos  $U$  y  $V$  de  $[0, 1]$  tales que  $[0, 1] = U \cup V$ . Podemos sin pérdida de generalidad suponer que  $1 \in V$ . Sea  $s = \sup U$ . Consideremos dos casos:

1.  $s \in U$ . Como  $U$  es abierto, existe  $\delta > 0$  tal que  $(s - \delta, s + \delta) \cap [0, 1] \subseteq U$ . Nótese que  $1 \notin U$  y por tanto,  $s + \delta < 1$ . Así, existe  $t \in U$  tal que  $s < t < s + \delta$  contradiciendo que  $s = \sup U$ .
2.  $s \in V$ . Como  $V$  es abierto, existe  $\delta > 0$  tal que  $(s - \delta, s + \delta) \cap [0, 1] \subseteq V$ . Como  $U \neq \emptyset$  y  $s = \sup U$  existe  $t \in U \cap (s - \delta, s)$ , contradiciendo que  $U \cap V = \emptyset$ .

De lo anterior, no existen abiertos disjuntos  $U$  y  $V$  de  $[0, 1]$  tales que  $[0, 1] = U \cup V$  y  $[0, 1]$  es conexo.

Teniendo en cuenta las definiciones dadas anteriormente, podemos definir un continuo.

**Definición 1.1.8.** Un *continuo* es un espacio métrico compacto y conexo diferente del vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en un espacio métrico.

De los ejemplos 1.1.5 y 1.1.7, tenemos que el intervalo cerrado  $[0, 1]$  es un continuo. Además,  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : ||z|| = 1\}$  es otro ejemplo de continuo.

En este trabajo cuando hagamos referencia a un arco, entenderemos como cualquier espacio homeomorfo a  $[0, 1]$ , y una curva cerrada simple será un espacio homeomorfo a  $S^1$ .

Nuestro espacio de trabajo serán los continuos. A continuación daremos algunas propiedades de conexidad, compacidad y de espacios métricos útiles para el trabajo.

**Definición 1.1.9.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq X$ . Definimos el diámetro de  $A$ , denotado por  $\text{diám}(A)$ , como  $\text{diám}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ .

Algunos ejemplos de diámetro de un conjunto.

1. Si  $X = [0, 1]$  el  $\text{diám}(X) = 1$ .
2. Si  $A = [0, 3] \times [0, 4] \subseteq \mathbb{R}^2$  el  $\text{diám}(A) = 5$ .

**Definición 1.1.10.** Sean  $X$  un espacio y  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $X$ . Diremos que  $A$  y  $B$  están mutuamente separados si  $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$ .

Para el siguiente teorema usaremos la noción de subespacio. Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq X$ , entonces la pareja  $(A, d|_{A \times A})$  es un espacio métrico, donde  $d|_{A \times A}(x, y) = d(x, y)$ , para todo  $x, y \in A$ . Diremos que  $A$  es un subespacio de  $X$ .

Los conjuntos mutuamente separados son utilizados para caracterizar los subespacios conexos de un espacio métrico como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.11.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $Z$  un subespacio de  $X$ . Entonces,  $Z$  es desconexo si, y solo si, existen subconjuntos mutuamente separados y no vacíos  $A$  y  $B$  de  $X$  tales que  $Z = A \cup B$ .

A continuación damos dos propiedades de los conexos que usaremos más adelante.

**Lema 1.1.12.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $Z$  un subespacio conexo de  $X$ . Si  $X = U \cup V$ , con  $U$  y  $V$  abiertos disjuntos, entonces  $Z \subseteq U$  o  $Z \subseteq V$ .

**Proposición 1.1.13.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $Z$  un subespacio conexo de  $X$ . Si  $Z \subseteq Y \subseteq \overline{Z}$ , entonces  $Y$  es conexo.

El siguiente teorema da una caracterización de la compacidad en espacios métricos en términos de sucesiones. Para este teorema necesitamos la noción de convergencia en un espacio métrico. Sean  $X$  un espacio métrico,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $X$  y  $x_0 \in X$ , decimos que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $x_0$ , escribimos  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , si para todo abierto  $W$  de  $X$  con  $x_0 \in W$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in W$  para todo  $n \geq n_0$ .

**Teorema 1.1.14.** Sea  $X$  un espacio métrico. Entonces,  $X$  es compacto si, y solo si, toda sucesión en  $X$  tiene una subsucesión convergente.

Existen diferentes herramientas para construir continuos, una de las más importantes que usaremos durante este trabajo se presentará en el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.15.** Sea  $\{C_i : i \in A\}$  una familia finita de subcontinuos de un continuo  $X$ . Si  $\bigcap_{i \in A} C_i \neq \emptyset$ , entonces  $\bigcup_{i \in A} C_i$  es un continuo.

El siguiente teorema es fundamental cuando hablamos de continuos. Una prueba se puede ver en Teorema 5.6 de <sup>2</sup>. Antes de mencionarlo, recordaremos la definición de componente.

**Definición 1.1.16.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $x \in X$ . Definimos la componente  $C$  de  $X$  que contiene a  $x$  como:

$$C = \{y \in X \mid \text{existe un subcontinuo conexo } Z \text{ de } X \text{ tal que } \{x, y\} \subseteq Z\}.$$

**Teorema 1.1.17.** (Teorema de golpes en la frontera). Sean  $X$  un continuo y  $U$  un abierto propio no vacío de  $X$ . Si  $K$  es una componente de  $\overline{U}$ , entonces  $K \cap \text{Fr}(U) \neq \emptyset$ .

Existen clases de puntos en un continuo que nos ayudan a estudiar sus propiedades y entenderlos mejor. Los puntos orilla son los que estudiaremos durante este trabajo, otros más reconocidos son los puntos de corte, que como su nombre lo indica, un punto de corte es un punto tal que cuando lo quitamos, el espacio se desconecta.

**Definición 1.1.18.** Un punto  $x$  de un continuo  $X$  se dice *punto de corte* si  $X \setminus \{x\}$  es desconexo. La colección de puntos de corte de un continuo  $X$  la notamos por  $\text{Cut}(X)$ .

---

<sup>2</sup> S NADLER. *Continuum Theory: An Introduction*. Marcel Dekker-New York-Basel-Hong Kong: Monographs, Textbooks in Pure y Applied Math, 1992.

Como mencionamos, un arco es un continuo  $X$  homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Además, si  $h: [0, 1] \rightarrow X$  es un homeomorfismo,  $h(0)$  y  $h(1)$  los llamaremos puntos de no corte o puntos finales de  $X$ ; esto es,  $\text{Cut}(X) = X \setminus \{h(0), h(1)\}$ .

En adelante, usaremos la expresión “continuo no degenerado” para indicar que es un continuo con más de un punto.

El siguiente teorema es muy usado en teoría de continuos. Una prueba se puede ver en Teorema 6.6 en <sup>2</sup>.

**Teorema 1.1.19.** Todo continuo no degenerado tiene al menos dos puntos de no corte.

El arco y la curva cerrada simple, se pueden caracterizar usando los puntos de corte, como lo muestran los siguientes teoremas. Una prueba del Teorema 1.1.20, se puede encontrar en Teorema 6.17 de <sup>2</sup> y la del Teorema 1.1.21, en Teorema 10.28 de <sup>1</sup>.

**Teorema 1.1.20.** Sea  $X$  un continuo no degenerado. Entonces,  $X$  es un arco si, y solo si,  $X$  tiene exactamente dos puntos de no corte.

**Teorema 1.1.21.** Sea  $X$  un continuo no degenerado. Entonces,  $X$  es una curva cerrada simple si, y sólo si,  $X \setminus \{a, b\}$  no es conexo para cualesquiera  $a, b \in X$ .

## 1.2. CONTINUOS IRREDUCIBLES E INDESCOMPONIBLES

En esta sección definiremos los continuos irreducibles y los continuos indecomponibles, recordaremos algunos resultados de estos continuos que son necesarios para la comprensión del trabajo.

**Definición 1.2.1.** Sea  $X$  un continuo. Diremos que  $X$  es *irreducible* si existen  $a, b \in X$  tales que si  $K$  es un subcontinuo de  $X$  y  $\{a, b\} \subseteq K$ , entonces  $X = K$ . Además,

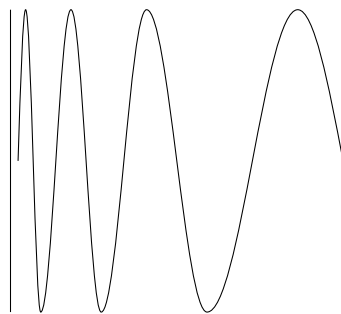
diremos que  $X$  es irreducible entre  $a$  y  $b$ , donde  $a$  y  $b$  los llamaremos *puntos de irreducibilidad de  $X$* .

**Ejemplo 1.2.2.** Un arco. Si  $a$  y  $b$  son los puntos de no corte, entonces  $X$  es irreducible entre  $a$  y  $b$ . Además,  $a$  y  $b$  son los únicos puntos de irreducibilidad de  $X$ .

**Ejemplo 1.2.3.** Sea  $W = \text{cl}_{\mathbb{R}^2}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(1/x) \text{ y } x \in (0, 1]\})$  un continuo.  $W$  se conoce como *la curva senoidal del topólogo*, vea la Figura 1. Este continuo es irreducible con respecto a cualquier punto del conjunto  $\{0\} \times [-1, 1]$  y el punto  $(1, \text{sen}(1))$ .

Sea  $p \in \{0\} \times [-1, 1]$  y  $q = (1, \text{sen}(1))$ , veamos que  $W$  es irreducible entre  $p$  y  $q$ . Sea  $K$  un subcontinuo de  $X$  tal que  $\{p, q\} \subseteq K$ . Como  $K$  es conexo, se tiene que  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \text{sen}(1/x) \text{ y } x \in (0, 1)\} \subseteq K$ . Además, como  $K$  es compacto,  $W \subseteq K$  y  $K = W$ . De lo anterior,  $W$  es irreducible entre  $p$  y  $q$ . Observemos que como  $p$  fue tomado arbitrariamente de  $\{0\} \times [-1, 1]$ , entonces cada punto de  $\{0\} \times [-1, 1]$  es un punto de irreducibilidad de  $W$ .

Figura 1. Curva senoidal del topólogo.



El siguiente teorema nos permite ver que en un continuo irreducible, el complemento de un subcontinuo tiene máximo dos componentes. La prueba se puede encontrar en Teorema 11.6 de <sup>2</sup>.

**Teorema 1.2.4.** Sea  $X$  un continuo irreducible entre  $a$  y  $b$ , y  $C$  un subcontinuo propio de  $X$ . Si  $X \setminus C$  es desconexo, entonces  $X \setminus C = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos conexos disjuntos,  $a \in U$  y  $b \in V$ .

El siguiente corolario es consecuencia del Teorema 1.2.4.

**Corolario 1.2.5.** Sean  $X$  un continuo irreducible y  $C$  un subcontinuo de  $X$ . Si  $C$  tiene algún punto de irreducibilidad de  $X$ , entonces  $X \setminus C$  es conexo.

**Definición 1.2.6.** Sea  $X$  un continuo. Diremos que  $X$  es *descomponible* si existen subcontinuos propios  $A$  y  $B$  de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Si  $X$  no es descomponible, diremos que  $X$  es *indescomponible*.

**Definición 1.2.7.** Sea  $X$  un continuo.  $X$  es *hereditariamente descomponible* si cada subcontinuo no degenerado de  $X$  es descomponible.

**Ejemplo 1.2.8.** Se conoce como *el círculo de Varsovia* al continuo

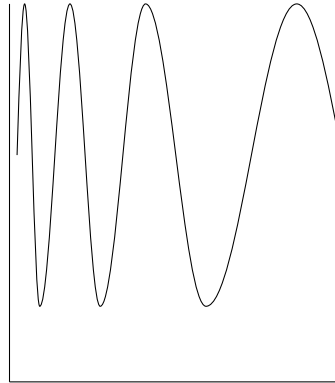
$$V = W \cup (\{0\} \times [-\frac{3}{2}, -1]) \cup ([0, 1] \times \{-\frac{3}{2}\}) \cup (\{1\} \times [-\frac{3}{2}, \text{sen}(1)]),$$

que representamos en la Figura 2, donde  $W$  es la curva senoidal del topólogo descrito en el Ejemplo 1.2.3. Este continuo es descomponible y no es irreducible.

Nótese que tomando  $L = (\{0\} \times [-\frac{3}{2}, -1]) \cup ([0, 1] \times \{-\frac{3}{2}\}) \cup (\{1\} \times [-\frac{3}{2}, \text{sen}(1)])$ , tenemos que  $V = W \cup L$ , donde  $W$  y  $L$  son subcontinuos propios. Así,  $V$  es descomponible.

El círculo de Varsovia es un continuo arcoconexo, esto es, para cada par de puntos existe un arco que los une. Esto implica que  $V$  no es irreducible, pues como se puede verificar fácilmente, el único continuo arcoconexo irreducible es  $[0, 1]$ .

Figura 2. Círculo de Varsovia.



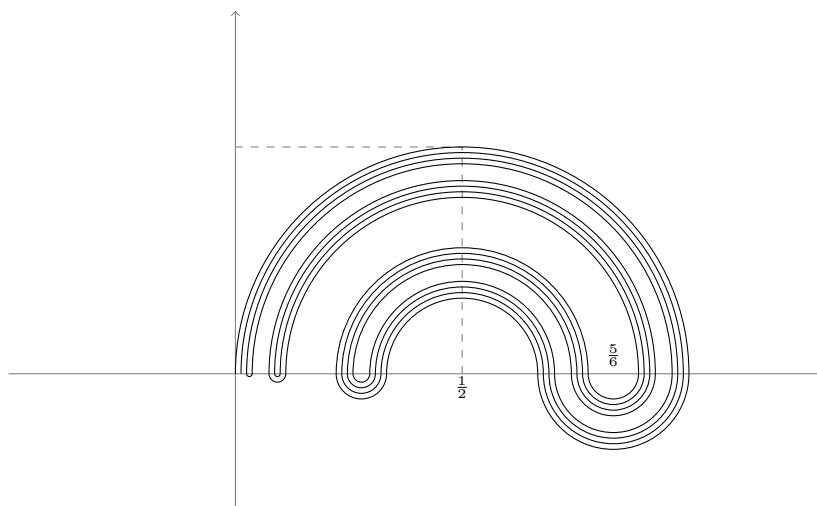
En el siguiente ejemplo usaremos la construcción clásica del conjunto ternario de Cantor  $\mathcal{C}$  contenida en  $[0, 1]$  (ver Figura 9.1 de <sup>1</sup>).

**Ejemplo 1.2.9.** Consideremos el continuo  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^2$  que consiste en:

- Todos los semicírculos con ordenadas mayor o igual a 0, con centro en  $(\frac{1}{2}, 0)$  y pasan por todos los puntos del conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$ .
- Todos los semicírculos con ordenadas menor o igual a 0, que tienen para  $n \geq 1$  el centro en  $(\frac{5}{(2 \cdot 3^n)}, 0)$  y pasa por cada punto del conjunto de Cantor que están en el intervalo  $\frac{2}{3^n} \leq x \leq \frac{1}{3^{n-1}}$ .

$\mathcal{K}$  se conoce como *el continuo de Knaster*. Vea la Figura 3.

Figura 3. Continuo de Knaster.



El continuo de Knaster es un continuo indescomponible, la prueba se puede ver en <sup>3</sup>. En <sup>2</sup> pág.22 se puede ver otra construcción del continuo de Knaster. Además, el Teorema 2.7 de <sup>2</sup> muestra como construir ejemplos de continuos indescomponibles.

Mencionaremos algunas caracterizaciones de los continuos indescomponibles.

**Teorema 1.2.10.** Un continuo  $X$  es indescomponible si, y sólo si, todo subcontinuo propio tiene interior vacío.

**Proposición 1.2.11.** Un continuo es indescomponible si, y sólo si, cada punto de  $X$  es un punto de irreducibilidad de  $X$ .

Para finalizar esta sección definimos la composante de un continuo. Damos propiedades de ella y resultados que muestran que todo continuo tiene: una composante,

---

<sup>3</sup> R. CAMARGO J. & ISAACS. "Continuos tipo Knaster y sus modelos geométricos". En: *Revista Colombiana de Matemáticas* 47.1 (2013), págs. 67-81.

tres componentes o una cantidad no numerable de componentes disjuntas dos a dos.

**Definición 1.2.12.** Sean  $X$  un continuo y  $p$  un punto de  $X$ . Definimos la *componente*  $\kappa(p)$  del continuo  $X$  como

$$\kappa(p) = \{x \in X \mid X \text{ no es irreducible entre } p \text{ y } x\}.$$

Si tomamos  $X = [0, 1]$  podemos ver que tiene exactamente tres componentes:  $\kappa(0) = [0, 1)$ ,  $\kappa(1) = (0, 1]$  y  $\kappa(x) = [0, 1]$  para cualquier  $x \in (0, 1)$ . Similarmente se puede comprobar que  $\kappa(z) = S^1$  para todo  $z \in S^1$ .

**Ejemplo 1.2.13.** Sea  $W$  la curva senoidal del topólogo, definida en el Ejemplo 1.2.3.

Mostraremos que  $W$  tiene tres componentes:

1. Si  $p \in \{0\} \times [-1, 1]$ , veamos  $\kappa(p) = W \setminus \{q\}$ , donde  $q = (1, \text{sen}(1))$ . Nótese que como  $W$  es irreducible entre  $p$  y  $q$ ,  $q \notin \kappa(p)$ . Sea  $m = (x_0, \text{sen}(1/x_0)) \in W$  tal que  $q \neq m$ . Consideremos  $M = \text{cl}_{\mathbb{R}^2}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(1/x) \text{ y } x \in (0, x_0]\})$ . Observemos que  $p \in M$ ,  $m \in M$ ,  $q \notin M$  y por tanto,  $M$  es un subcontinuo propio de  $W$ . Así,  $m \in \kappa(p)$ .
2.  $\kappa(q) = W \setminus (\{0\} \times [0, 1])$ , donde  $q = (1, \text{sen}(1))$ . Como  $W$  es irreducible entre  $q$  y cualquier punto de  $\{0\} \times [-1, 1]$ ,  $(\{0\} \times [-1, 1]) \cap \kappa(q) = \emptyset$ . Sea  $m \in W \setminus (\{0\} \times [0, 1])$ . Por definición  $m = (x_0, \text{sen}(1/x_0))$  donde  $0 < x_0 \leq 1$ . Consideremos  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(1/x) \text{ y } x \in [x_0, 1]\}$ . Nótese que  $q \in M$ ,  $m \in M$  y  $M$  es un subcontinuo propio de  $W$ . Por lo tanto,  $m \in \kappa(p)$ .
3. Si  $w_0 = (x_0, \text{sen}(1/x_0)) \in W \setminus (\{0\} \times [-1, 1] \cup \{q\})$ , donde  $q = (1, \text{sen}(1))$ , entonces  $\kappa(w_0) = W$ . Sea  $m \in W$ , si  $m \in \{0\} \times [-1, 1]$  o  $m = (x_1, \text{sen}(1/x_1))$  con  $x_1 \leq x_0$ , tomemos  $M = \text{cl}_{\mathbb{R}^2}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(1/x) \text{ y } x \in (0, x_0]\})$ ; nótese que  $M$  es un subcontinuo propio de  $W$  y  $\{w_0, m\} \subseteq M$ , por lo tanto

$m \in \kappa(w_0)$ . Si  $m = (x_1, \text{sen}(1/x_1))$ , con  $x_0 < x_1$ , consideremos  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(1/x) \text{ y } x \in [x_0, 1]\}$ , nótese que  $M$  es un subcontinuo propio de  $W$ , con  $\{w_0, m\} \subseteq M$ . De los casos anteriores  $m \in \kappa(w_0)$ , para todo  $m \in W$ , y  $\kappa(w_0) = W$ .

El siguiente teorema nos da una propiedad de las componentes de continuos, que será usada durante el presente trabajo. Una prueba de este resultado se puede ver en <sup>1</sup> Teorema 10.41.

**Teorema 1.2.14.** Sea  $X$  un continuo. Entonces,  $\kappa(p)$  es densa para cada  $p \in X$ .

Con los siguientes resultados caracterizamos los continuos descomponibles, los continuos descomponibles irreducibles y los continuos indescomponibles, usando la cantidad de componentes. La siguiente proposición se sigue directamente de la Definición 1.2.12.

**Proposición 1.2.15.** Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es descomponible, entonces existe  $x_0 \in X$  tal que  $\kappa(x_0) = X$ .

La prueba del Teorema 1.2.16 y el Teorema 1.2.17, se pueden encontrar en <sup>2</sup>, Teorema 11.16.

**Teorema 1.2.16.** Sea  $X$  un continuo descomponible. Entonces:

1.  $X$  no es irreducible si, y solo si,  $X$  tiene una componente.
2.  $X$  es irreducible si, y solo si,  $X$  tiene tres componentes.

**Teorema 1.2.17.** Sea  $X$  un continuo no degenerado.  $X$  es indescomponible si, y solo si,  $X$  tiene una cantidad no numerable de componentes disjuntas dos a dos.

### 1.3. CONTINUOS TIPO $\Lambda$

Los continuos tipo  $\Lambda$  son una clase amplia de continuos irreducibles. Los continuos tipo  $\Lambda$  cumplen propiedades útiles para el desarrollo y la comprensión de nuestro trabajo. Así, el objetivo de esta sección es introducir estos continuos y mencionar algunas de sus propiedades.

Antes de dar la definición de continuo tipo  $\Lambda$ , debemos mencionar algunas definiciones y propiedades previas para la comprensión de dicho concepto.

**Definición 1.3.1.** Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  se dice monótona si  $f^{-1}(A)$  es un continuo para todo subcontinuo  $A$  en  $Y$ .

Sean  $X$  y  $Y$  continuos. Nótese que  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  definida naturalmente como  $\pi_X(x, y) = x$  para cada  $(x, y) \in X \times Y$ , es una función monótona; pues si  $A$  es un subcontinuo de  $X$ , entonces  $\pi_X^{-1}(A) = A \times Y$  que claramente es un continuo. En general cualquier proyección de un producto arbitrario de continuos es una función monótona. En este trabajo mostraremos más ejemplos de funciones monótonas.

El siguiente lema muestra que los continuos irreducibles se preservan con las funciones monótonas. La prueba es sencilla.

**Lema 1.3.2.** Sean  $X$  y  $Y$  continuos, donde  $X$  es irreducible entre  $p$  y  $q$ . Si  $f : X \rightarrow Y$  es monótona, entonces  $Y$  es irreducible entre  $f(p)$  y  $f(q)$ .

A continuación definimos espacio cociente, partición o como lo llamaremos en este escrito *Espacio de descomposición*. Para ampliar el estudio de estos espacios el lector puede consultar la Sección 3.6 de <sup>1</sup>.

**Definición 1.3.3.** Sea  $X$  un espacio métrico. Una descomposición  $\mathcal{D}$  de  $X$  es una familia de subconjuntos disjuntos dos a dos tal que  $\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D = X$ . Definamos  $\tau_{\mathcal{D}}$  como la familia de todos los conjuntos de la forma  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$  tales que el conjunto

$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  es abierto de  $X$ . La familia  $\tau_{\mathcal{D}}$  es una topología para  $\mathcal{D}$  y  $(\mathcal{D}, \tau_{\mathcal{D}})$  es llamado espacio descomposición de  $X$ .

Si  $\mathcal{D}$  es un espacio descomposición de  $X$ , entonces definimos la función  $q: X \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $q(x) = D_x$  donde  $D_x$  es el único elemento de  $\mathcal{D}$  que contiene a  $x$ . La función  $q$  es continua (es una función cociente), pues  $q^{-1}(U) = \bigcup_{A \in \mathcal{U}} A$  es abierto de  $X$ , para cualquier  $U \in \tau_{\mathcal{D}}$ . La función  $q$  la llamamos función cociente o función descomposición.

Como es conocido, la topología de un espacio de descomposición de  $X$ , es la topología más fina de  $\mathcal{D}$  tal que  $q$  es continua.

En el siguiente enunciado definimos una clase importante de descomposiciones que será usada para la definición de descomposición admisible la cual es fundamental para los continuos tipo  $\Lambda$ .

**Definición 1.3.4.** Sea  $X$  un continuo. Una descomposición  $\mathcal{D}$  se dice semicontinua superiormente (usc), si para cada  $D \in \mathcal{D}$  y cada abierto  $U$  de  $X$  con  $D \subseteq U$ , existe un abierto  $V$  de  $X$ ,  $D \subseteq V$  tal que si  $D' \in \mathcal{D}$  y  $D' \cap V \neq \emptyset$ , entonces  $D' \subseteq U$ .

Además, un abierto  $U \subseteq X$  es llamado  $\mathcal{D}$ -saturado si  $U$  es unión de elementos de la descomposición  $\mathcal{D}$  o equivalentemente, si  $U = q^{-1}(q(U))$ , donde  $q: X \rightarrow \mathcal{D}$  es la función descomposición.

**Ejemplo 1.3.5.** Sean  $X = [-1, 1]$  y  $\mathcal{D} = \{\{s, -s\} \mid s \in (-1, 1)\} \cup \{\{-1\}, \{1\}\}$  una descomposición de  $X$ . Entonces  $\{1\} \subseteq (\frac{1}{2}, 1]$ , donde  $\{1\} \in \mathcal{D}$  y  $(\frac{1}{2}, 1]$  es abierto de  $[-1, 1]$ . Nótese que si  $V$  es un abierto de  $[-1, 1]$  tal que  $\{1\} \subseteq V$  entonces existe  $s \in V$  con  $s < 1$ . Así,  $\{s, -s\} \cap V \neq \emptyset$  y claramente  $\{s, -s\}$  no está contenido en  $(\frac{1}{2}, 1]$ . Con lo que  $\mathcal{D}$  no es una descomposición usc.

No es difícil ver que el espacio de descomposición definido en el Ejemplo 1.3.5, no es un espacio de Hausdorff y por tanto, no es metrizable. En la Proposición 9.3 de

<sup>1</sup>, se muestra que si  $X$  es un espacio métrico compacto y  $\mathcal{D}$  es una descomposición semicontinua superiormente, entonces  $\mathcal{D}$  como espacio de descomposición, es de Hausdorff; es más,  $\mathcal{D}$  es nuevamente un espacio métrico compacto.

**Ejemplo 1.3.6.** Sea  $X = [0, 1]^2$  y  $\mathcal{D} = \{\{x\} \times [0, 1] \mid x \in [0, 1]\}$  una descomposición de  $X$ . Sean  $x_0 \in [0, 1]$  y  $U$  abierto de  $X$  tal que  $\{x_0\} \times [0, 1] \subseteq U$  entonces, no es difícil ver que existe  $\delta > 0$  tal que  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times [0, 1] \subseteq U$ . Así, si  $V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times [0, 1]$ , entonces  $V$  es un abierto  $\mathcal{D}$ -saturado de  $X$ ,  $\{x_0\} \times [0, 1] \subseteq V \subseteq U$  y claramente, cada  $\{x\} \times [0, 1] \in \mathcal{D}$  con  $(\{x\} \times [0, 1]) \cap V \neq \emptyset$ , se tiene  $\{x\} \times [0, 1] \subseteq V \subseteq U$ . Con lo que  $\mathcal{D}$  es una descomposición usc.

**Definición 1.3.7.** Sea  $X$  un continuo irreducible entre  $x$  y  $y$ . Una descomposición  $\mathcal{D}$  se dice admisible si  $\mathcal{D}$  tiene más de un elemento,  $\mathcal{D}$  es usc, cada elemento de  $\mathcal{D}$  es un subcontinuo de  $X$  y para todo  $D \in \mathcal{D}$  tal que  $D \cap \{x, y\} = \emptyset$  se tiene que  $X \setminus D$  no es conexo.

El siguiente teorema da un resultado importante del espacio descomposición inducido sobre una descomposición admisible  $\mathcal{D}$ . La prueba de este teorema se puede ver en el Teorema 2 de <sup>4</sup>.

**Teorema 1.3.8.** Si  $\mathcal{D}$  es una descomposición admisible de un continuo irreducible  $X$ , entonces el espacio descomposición es un arco.

Diremos que una descomposición  $\mathcal{D}$  de un espacio  $X$ , es monótona, si la función descomposición  $q: X \rightarrow \mathcal{D}$  es monótona. A continuación definimos los continuos de tipo  $\Lambda$ .

**Definición 1.3.9.** Un continuo  $X$  se dice tipo  $\Lambda$  si es irreducible, admite una descomposición admisible y monótona  $\mathcal{D}$  y cada elemento de  $\mathcal{D}$  tiene interior vacío.

---

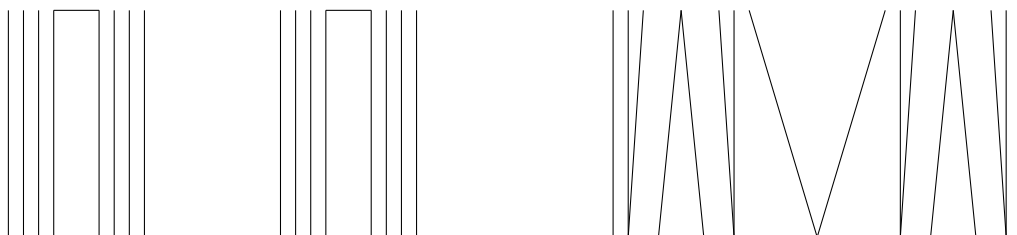
<sup>4</sup> ES THOMAS. "Monotone decompositions of irreducible continua". En: (1966).

El siguiente comentario caracteriza cualquier descomposición admisible de un continuo tipo  $\Lambda$ . Este comentario es una consecuencia de Teorema 1.3.8.

**Comentario 1.3.10.** Si  $M$  es un continuo tipo  $\Lambda$  y  $\mathcal{D}$  es cualquier descomposición admisible de  $M$ , existe una función monótona  $f: M \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(f) = \{f^{-1}(\{t\}) \mid t \in [0, 1]\}$ .

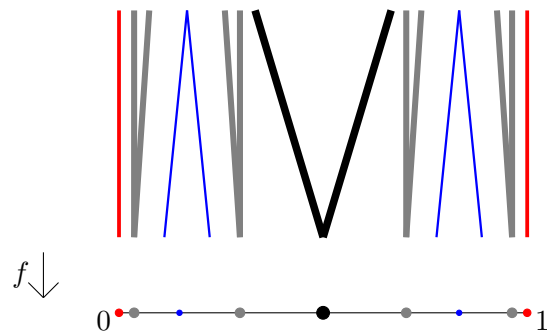
**Ejemplo 1.3.11.** Continuo de los  $V$  y los  $\Lambda$ . Sea  $\mathcal{C}$  el conjunto de Cantor en  $[0, 1]$  (ver la Figura 9.1 de <sup>1</sup>), y  $Z = \mathcal{C} \times [0, 1]$ . En la construcción de  $\mathcal{C}$ , suprimimos del intervalo cerrado  $[0, 1]$  un intervalo de longitud  $\frac{1}{3}$ ; seguidamente quitamos dos intervalos de longitud  $(\frac{1}{3})^2$ ; a continuación  $2^2$  intervalos de longitud  $(\frac{1}{3})^3$  y así, para cada entero positivo. Ahora, haremos un proceso inductivo, de cierta manera inverso. Reproduciremos cada uno de los intervalos quitados a la construcción de  $\mathcal{C}$ , alternadamente en  $[0, 1] \times \{0\}$  y  $[0, 1] \times \{1\}$ . Iniciamos, incluyendo el intervalo  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times \{0\}$ ; a continuación, incluimos 2 intervalos  $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}] \times \{1\}$  y  $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}] \times \{1\}$  de longitud  $(\frac{1}{3})^2$ . Un paso adicional, los  $2^2$  intervalos de longitud  $(\frac{1}{3})^3$  son  $[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}] \times \{0\}$ ,  $[\frac{7}{27}, \frac{8}{27}] \times \{0\}$ ,  $[\frac{19}{27}, \frac{20}{27}] \times \{0\}$  y  $[\frac{25}{27}, \frac{26}{27}] \times \{0\}$ . De esta manera construimos un continuo que llamaremos  $Y$ . El continuo de los  $V$  y los  $\Lambda$ , que denotamos por  $M$ , se obtiene identificando cada segmento horizontal que incluimos en la construcción de  $Y$ , vea la Figura 4. El continuo  $M$  es un continuo tipo  $\Lambda$ .

Figura 4. Continuo de los  $V$  y los  $\Lambda$ .



El continuo  $M$  es un continuo irreducible entre un punto de  $\{0\} \times [0, 1]$  y un punto de  $\{1\} \times [0, 1]$ , una prueba de esto se puede ver en el Ejemplo 10.30 de <sup>1</sup>. Consideremos  $\mathcal{D}$  la descomposición cuyos elementos están formados por cada arcoconexante (arcoconexo maximal) de  $M$ . Sea  $f: M \rightarrow [0, 1]$  la función cociente. De esta manera  $\mathcal{D} = \{f^{-1}(\{t\}) \mid t \in [0, 1]\}$ , donde  $f$  es la función monótona y mostramos una idea intuitiva en la Figura 5.

Figura 5. Continuo de  $V$ 's y  $\Lambda$ 's.



Veamos que  $\mathcal{D}$  es una descomposición admisible, claramente  $\mathcal{D}$  tiene más de un elemento. Además, por definición,  $f$  es monótona.

Sean  $x$  e  $y$  puntos de irreducibilidad de  $M$ ; es decir, sean  $x \in f^{-1}(0)$  y  $y \in f^{-1}(1)$ .

Veamos que si  $D \cap \{x, y\} = \emptyset$  para cualquier  $D$  en  $\mathcal{D}$ , entonces  $M \setminus D$  no es conexo.

Como  $M$  es un continuo irreducible entre un punto de  $\{0\} \times [0, 1]$  y un punto de  $\{1\} \times [0, 1]$ , por la definición de  $f$  tenemos que  $f^{-1}(\{0\}) = \{0\} \times [0, 1]$  y  $f^{-1}(\{1\}) = \{1\} \times [0, 1]$ . Luego, para cualquier  $t \in (0, 1)$ , tenemos que  $f^{-1}(\{t\}) \cap \{x, y\} = \emptyset$  y así,  $M \setminus f^{-1}(\{t\})$  no es conexo, pues  $M \setminus f^{-1}(\{t\}) = f^{-1}([0, t)) \cup f^{-1}((t, 1])$ , donde  $f^{-1}([0, t))$  y  $f^{-1}((t, 1])$  son abiertos disjuntos.

Veamos que  $\mathcal{D}$  es una descomposición usc. Sean  $x_0 \in [0, 1]$  y  $U$  abierto de  $M$  tal que  $f^{-1}(\{x_0\}) \subseteq U$ , consideremos  $\delta > 0$  tal que  $f^{-1}((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq U$ . Tomando

$V = f^{-1}((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ , tenemos claramente, que si  $D' \in \mathcal{D}$  y  $D' \cap V \neq \emptyset$ , entonces  $D' \subseteq U$ . Por lo tanto,  $\mathcal{D}$  es usc.

De lo anterior,  $\mathcal{D}$  es una descomposición admisible.

Por último, veamos que el interior de cada elemento de  $\mathcal{D}$  tiene interior vacío. Para esto basta notar que si  $W$  es un abierto de  $M$ , entonces  $W$  interseca una cantidad no numerable de segmento  $\{t\} \times [0, 1]$  en  $Y$ , donde  $t \in \mathcal{C}$ . Así,  $f(W)$  tiene infinitos puntos y  $f^{-1}(\{t\})$  tiene interior vacío para cada  $t \in [0, 1]$ .

Así de lo anterior, concluimos que  $M$  es un continuo tipo  $\Lambda$ .

El siguiente teorema nos afirma que existe una descomposición admisible minimal única. La prueba de este teorema la encontramos en el Teorema 6 de <sup>4</sup>.

**Teorema 1.3.12.** Sea  $M$  un continuo irreducible. Si  $M$  es tipo  $\Lambda$ , entonces existe una única descomposición admisible minimal.

Con la caracterización dada en el Comentario 1.3.10, de las descomposiciones admisibles; al igual a como lo hicimos en el Ejemplo 1.3.11, podemos identificar donde se encuentran los puntos de irreducibilidad de un continuo tipo  $\Lambda$ . La siguiente proposición nos muestra dicho resultado.

**Proposición 1.3.13.** Sean  $X$  un continuo tipo  $\Lambda$  y  $\mathcal{D}$  una descomposición admisible de  $X$ . Por el Comentario 1.3.10,  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(f) = \{f^{-1}(\{t\}) \mid t \in [0, 1]\}$ . Entonces cada punto de  $f^{-1}(\{0\})$  con cada punto de  $f^{-1}(\{1\})$ , son puntos de irreducibilidad de  $X$ .

*Demostración.* Sea  $X$  un continuo tipo  $\Lambda$  y  $\mathcal{D} = \{f^{-1}(\{t\}) \mid t \in [0, 1]\}$  la descomposición admisible minimal y única de  $X$ .

Sean  $p$  y  $q$  los puntos de irreducibilidad de  $X$ . Consideremos  $t$  y  $s$  puntos de  $[0, 1]$  tales que  $t < s$ ,  $p \in A = f^{-1}([0, t])$  y  $q \in B = f^{-1}([s, 1])$ , nótese que  $A$  y  $B$  son subcontinuos, pues  $f$  es monótona. Sea  $L$  un subcontinuo de  $X$  tal que  $L \cap f^{-1}(\{t\}) \neq \emptyset$  y  $L \cap f^{-1}(\{s\}) \neq \emptyset$ . Obsérvese que  $A \cup L \cup B = X$ , pues  $p \in A$  y  $q \in B$ . Si  $r \in (t, s)$ , entonces  $f^{-1}(\{r\}) \cap (A \cup B) = \emptyset$ , luego  $f^{-1}(\{r\}) \subseteq L$ , así  $f^{-1}((t, s)) \subseteq L$ . Luego

tomando cualquier punto de  $f^{-1}(\{0\})$  y cualquier punto de  $f^{-1}(\{1\})$  son puntos de irreducibilidad de  $X$ . □

El siguiente teorema da una condición suficiente y necesaria para que un continuo sea tipo  $\Lambda$ . La prueba de este teorema es muy elaborada. Una demostración la podemos encontrar en el Teorema 10 de <sup>4</sup>.

**Teorema 1.3.14.** Sea  $M$  un continuo irreducible. Entonces,  $M$  es tipo  $\Lambda$  si, y solo si, cada subcontinuo con interior no vacío de  $M$ , es descomponible.

## 2. PUNTOS Y CONJUNTOS ORILLA

Dado un continuo  $X$ ,  $C(X)$  denota el hiperespacio de subcontinuos de  $X$  y lo definimos por

$$C(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es un continuo}\}. \quad (1)$$

Este conjunto lo dotamos de la *métrica de Hausdorff*  $H$ , definida para cada  $A, B \in C(X)$ , como sigue:

$$H(A, B) = \max\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A) : b \in B\}\}, \quad (2)$$

donde  $d(x, E) = \min\{d(x, e) : e \in E\}$ ,  $E \in C(X)$  y  $x \in X$ .

El hiperespacio de subcontinuos  $C(X)$  cumple propiedades importantes. A continuación recordaremos una de ellas. La prueba del siguiente resultado es consecuencia del Teorema 4.13 de <sup>2</sup> y la Proposición 6.2 de <sup>1</sup>.

**Proposición 2.0.1.**  $C(X)$  es compacto.

En este capítulo estudiamos los puntos orilla. Un punto orilla es un punto que al quitarlo de un continuo  $X$ , existe un subcontinuo tal que no tenga al punto y este tan cerca como se quiera del total. Analizaremos la relación que existe entre los puntos orilla y los puntos de irreducibilidad, introduciremos los continuos únicamente irreducibles y los finitamente irreducibles. Finalmente, caracterizaremos al arco y a la curva cerrada simple con los puntos orilla.

Es importante resaltar que la mayoría de las pruebas dadas en este capítulo se ba-

san en las demostraciones dadas por Rocío Leonel en <sup>5</sup>. Sin embargo, para algunos resultados como el Teorema 2.3.4, el Teorema 2.3.1, el Teorema 2.3.6 y el Teorema 2.2.15 damos una demostración diferente a la propuesta por Rocío Leonel en <sup>5</sup>.

## 2.1. PUNTOS ORILLA Y EJEMPLOS

Iniciamos esta sección con la definición formal de conjunto y punto orilla. Posteriormente, mostramos ejemplos y algunos resultados relacionados con estas nociones.

**Definición 2.1.1.** Sea  $X$  un continuo. Un subconjunto no vacío  $A$  de  $X$  se dice *conjunto orilla*, si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $C \in C(X)$ , tal que  $A \cap C = \emptyset$  y  $H(X, C) < \varepsilon$ . En particular, cuando  $A = \{p\}$ , decimos que el punto  $p$  es un *punto orilla* de  $X$ .

La siguiente proposición nos ayudará a entender los ejemplos que enunciamos más adelante.

**Proposición 2.1.2.** Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ . Si  $p \in \text{Cut}(X)$ , entonces  $p$  no es un punto orilla.

*Demostración.* Supongamos que  $p$  es un punto orilla. Sean  $U$  y  $V$  abiertos disjuntos no vacíos tales que  $X \setminus \{p\} = U \cup V$ . Sean  $x \in U$ ,  $y \in V$  y tomemos  $r > 0$  tal que  $B(x; r) \subseteq U$  y  $B(y; r) \subseteq V$ . Como  $p$  es punto orilla, existe un subcontinuo  $Y$  de  $X$  tal que  $H(Y, X) < r$  y  $p \notin Y$ . De esto,  $Y \subseteq U \cup V$ . Entonces por definición de la métrica de Hausdorff (2),  $Y \cap B(x; r) \neq \emptyset$  y  $Y \cap B(y; r) \neq \emptyset$ . Así,  $Y \cap U \neq \emptyset$  y  $Y \cap V \neq \emptyset$ . Luego contradice la conexidad de  $Y$ , por el Lema 1.1.12. De lo anterior,  $p$  no es un punto orilla. □

---

<sup>5</sup> R LEONEL. "Shore points of a continuum". En: *Topology and its Applications* 161 (2014), págs. 433-441.

De la Proposición 2.1.2, podemos decir que los puntos orilla son un subconjunto de la familia de puntos de no corte.

En un arco los puntos orilla son exactamente los puntos de no corte; es decir, los puntos orilla de  $[0, 1]$  son 0 y 1. Sin embargo, esto no siempre se cumple como vemos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.1.3.** Existen un continuo  $X$  y un punto  $p \in X$  tal que  $p$  no es ni orilla, ni punto de corte.

Sea  $X = W \cup \{(-x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(1/x) \text{ y } x \in (0, 1]\}$ , donde  $W$  es la curva senoidal del topólogo definida en el Ejemplo 1.2.3, vea la Figura 6. Si  $p = (0, 0)$ , entonces  $p$  no es un punto de corte ni tampoco un punto orilla.

Es claro que  $p$  no es un punto de corte (ver la Proposición 1.1.13). Veamos que  $p$  no es orilla. Sea  $\varepsilon > 0$  tal que si  $L$  es un subcontinuo de  $X$  con  $H(L, X) < \varepsilon$ , entonces  $L \cap W \neq \emptyset$  y  $L \cap (X \setminus W) \neq \emptyset$ . Sea  $t_0 \in [-1, 0)$  tal que  $(t_0, \text{sen}(-1/t_0)) \in L \cap (X \setminus W)$ . Por la conexidad de  $L$ ,

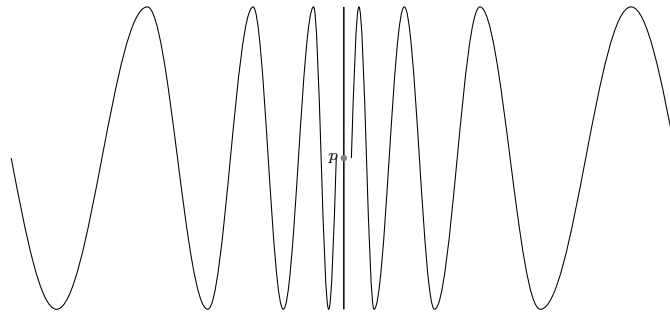
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(-1/x) \text{ y } x \in [t_0, 0)\} \subseteq L.$$

Además,  $L$  es compacto. Luego,

$$\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(-1/x) \text{ y } x \in [t_0, 0)\}) \subseteq L.$$

Si definimos  $p_n = (-1/(2\pi n), 0)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(-1/x) \text{ y } x \in [t_0, 0)\}$  que converge a  $p$ . Así,  $p \in \text{cl}_{\mathbb{R}^2}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(-1/x) \text{ y } x \in [t_0, 0)\})$ , y  $p \in L$ . De lo anterior,  $p$  no es un punto orilla de  $X$ .

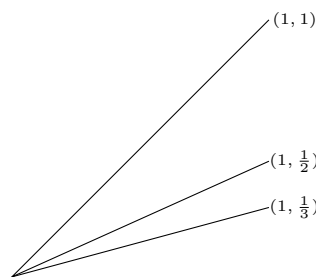
Figura 6.  $p$  no es punto orilla y tampoco punto de corte.



A continuación, mostramos más ejemplos de los puntos orilla en diferentes continuos.

**Ejemplo 2.1.4.**  $n$ -odo simple. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Un  $n$ -odo simple es un continuo homeomorfo a  $T_n = \{(1, 1/i)t : t \in [0, 1] \text{ y } i \in \{1, \dots, n\}\}$ . En particular, si  $n = 3$ ,  $T_3$  se conoce como triodo simple, observe la Figura 5.

Figura 7. Triodo simple.



Los puntos orilla de  $T_n$  es el conjunto

$$\mathcal{O} = \{(1, 1/n_1) \mid n_1 \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Veamos que cada punto de  $\mathcal{O}$  es orilla. Sea  $\varepsilon > 0$ . Dado  $n_0$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ , definimos

$$W = \{t(1, 1/n_1) \mid t \in [0, 1 - 1/n_0] \text{ y } n_1 \in \{1, \dots, n_0\}\}.$$

Nótese que  $W$  es un continuo,  $W \cap \mathcal{O} = \emptyset$  y  $H(W, X) < \varepsilon$ . Así,  $\mathcal{O}$  corresponde exactamente a los puntos orilla de  $X$ .

**Ejemplo 2.1.5.** Sea  $W$  la curva senoidal del topologo definida en el Ejemplo 1.2.3. Los puntos orilla de  $W$  son

$$\mathcal{O} = \{(1, \sin(1))\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

Veamos que cada punto de  $\mathcal{O}$  es orilla. Sean  $\varepsilon > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{2}{(2n_0-1)\pi} < \varepsilon$ . Consideremos  $x_0 = \frac{2}{[2(n_0+2)-1]\pi}$ , nótese que  $x_0 < \varepsilon$ . Definamos

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin(1/x) \text{ y } x \in [x_0, 1 - x_0]\}$$

Obsérvese que  $M$  es un continuo,  $M \cap \mathcal{O} = \emptyset$  y  $H(M, X) < \varepsilon$ . Por lo tanto,  $\mathcal{O}$  corresponden exactamente a los puntos orilla de  $W$ .

**Ejemplo 2.1.6.** Sea  $F_H = \{t(1, 1/n) \mid t \in [0, 1] \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \cup ([0, 1] \times \{0\})$ . Nótese que  $F_H$  es un continuo y se conoce como *el abanico armónico*. Vea la Figura 8. Los puntos orilla son exactamente los puntos que no cortan a  $F_H$ ; esto es, el conjunto

$$\mathcal{O} = \{(1, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup ((0, 1] \times \{0\})$$

conforma los puntos orilla del continuo.

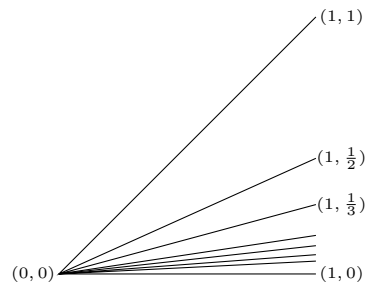
Denotemos por  $\text{Cut}(F_H)$  a los puntos de corte de  $F_H$ . Por la Proposición 1.1.19, tenemos que los puntos orilla es un subconjunto del conjunto  $\mathcal{O}$ . Veamos que cada

punto de  $\mathcal{O}$  es orilla. Sea  $\varepsilon > 0$ . Dado  $n_0$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ , definimos

$$W = \{t(1, 1/n) \mid t \in [0, 1 - 1/n_0] \text{ y } n \in \{1, \dots, n_0\}\}.$$

Nótese que  $W$  es un continuo,  $W \cap \mathcal{O} = \emptyset$  y  $H(W, X) < \varepsilon$ . Así,  $\mathcal{O}$  corresponde exactamente a los puntos orilla de  $X$ .

Figura 8. Abanico Armónico



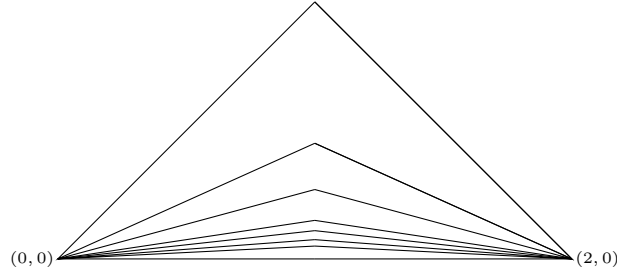
**Definición 2.1.7.** Un continuo  $X$  se dice colocalmente conexo en  $x \in X$  siempre que para cada subconjunto abierto  $U$  de  $X$  tal que  $x \in U$ , existe un subconjunto abierto  $V$  de  $X$  tal que  $x \in V \subseteq U$  y  $X \setminus V$  es conexo. Un continuo  $X$  se dice colocalmente conexo si es colocalmente conexo en cada uno de sus puntos.

**Ejemplo 2.1.8.** Se conoce como *suspensión armónica* al continuo

$$\text{Sus}(H) = W \cup W^*,$$

donde  $W$  es el abanico armónico descrito en el ejemplo anterior y  $W^* = -W + 2 = \{(-a + 2, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a, b) \in W\}$ . Vea la Figura 9.

Figura 9. Suspensión armónica.



La suspensión armónica también se puede ver como un espacio cociente  $(H \times [0, 1]) / \sim$ , donde  $H = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  y las clases no degeneradas son  $H \times \{0\}$  y  $H \times \{1\}$  (ver Definición 3.53 de <sup>1</sup>). La suspensión armónica es un continuo colocalmente conexo.

**Proposición 2.1.9.** Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es colocalmente conexo, entonces todo punto de  $X$  es un punto orilla.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Sean  $a \in X$  y  $B(a, \frac{\varepsilon}{3}) \subseteq X$ . Por definición de continuo colocalmente conexo, existe un subconjunto abierto  $V$  de  $X$ , tal que  $a \in V \subseteq B(a, \frac{\varepsilon}{3}) \subseteq X$  y  $X \setminus V$  es conexo. Consideremos a  $M = \overline{X \setminus V}$ , nótese que  $M$  es un continuo de  $X$  y  $a \notin M$ . Veamos que  $H(X, M) < \varepsilon$ .

Mostraremos que  $\sup\{d(m, X) \mid m \in M\} < \varepsilon$  y  $\sup\{d(x, M) \mid x \in X\} < \varepsilon$ . Nótese que  $\sup\{d(m, X) \mid m \in M\} = 0$ , pues  $M \subseteq X$ . Ahora, veamos que  $\sup\{d(x, M) \mid x \in X\} < \varepsilon$ . Sea  $x \in X$ , debemos encontrar  $y \in M$ , tal que  $d(x, y) < \varepsilon$ . Si  $x \in X \setminus V$ , hacemos  $y = x$  y  $d(x, x) = 0$ . Si  $x \in V$ , sea  $y \in \text{Fr}(B(a, \frac{\varepsilon}{3}))$ , nótese que  $d(x, y) < \varepsilon$ , pues  $\text{diám}(B(a, \frac{\varepsilon}{3})) \leq \frac{2\varepsilon}{3}$ . Por lo tanto,  $\sup\{d(b, M) \mid b \in X\} < \varepsilon$ . Así,  $H(X, M) < \varepsilon$  y  $x$  es un punto orilla de  $X$ . Como  $x$  fue arbitrario, cada punto de  $X$  es punto orilla.  $\square$

En el Corolario 2.2.2, mostraremos que todo punto en un continuo indescomponible es un punto orilla y los continuos indescomponibles no son colocalmente conexos. Así, el recíproco de la Proposición 2.1.9, no es cierto.

**Definición 2.1.10.** Un subconjunto  $A$  no vacío de un continuo  $X$  es un *continuo orilla* si  $A$  es un continuo y un conjunto orilla.

Más adelante mostraremos que cada punto de irreducibilidad de un continuo  $X$ , es un punto orilla. Luego, por la Proposición 1.2.11, cada subcontinuo propio de un continuo indescomponible es un continuo orilla.

El siguiente teorema es fundamental para la prueba de algunos resultados del trabajo. Una prueba se puede ver en el Teorema 4 de <sup>6</sup>.

**Teorema 2.1.11.** Sea  $X$  un continuo y  $A$  un subconjunto propio de  $X$ . Entonces, existe un punto  $p \in X \setminus A$  tal que la unión de todos los subcontinuos de  $X$  contenidos en  $X \setminus \{p\}$  y que intersecan a  $A$ , es densa en  $X$ .

Compare el siguiente resultado con el Teorema 1.1.19.

**Teorema 2.1.12.** Cada continuo  $X$  tiene por lo menos dos puntos orilla.

*Demostración.* Sea  $z$  un punto de  $X$ . Por el Teorema 2.1.11, existe un punto  $q$  en  $X \setminus \{z\}$  tal que  $K = \bigcup \{A \in C(X) : z \in A \text{ y } q \notin A\}$  es denso en  $X$ .

Probaremos que  $q$  es punto orilla de  $X$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , como  $X$  es compacto existen abiertos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  de  $X$ , tal que  $\text{diám}(U_i) < \frac{\varepsilon}{4}$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ .

Como  $K$  es denso en  $X$ , tenemos que para cada  $U_i$  existe un subcontinuo  $D_i$  en  $K$ , tal que  $U_i \cap D_i \neq \emptyset$ . Considere  $M = \bigcup_{i=1}^n D_i$ , por el Teorema 1.1.15,  $M$  es un subcontinuo propio de  $X$ , pues  $z \in D_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  y además  $q \notin M$ .

Veamos que  $H(M, X) < \varepsilon$ . Mostraremos que  $\sup\{d(a, X) \mid a \in M\} < \varepsilon$  y  $\sup\{d(x, M) \mid x \in X\} < \varepsilon$ . Nótese que  $\sup\{d(a, X) \mid a \in M\} = 0$ .

---

<sup>6</sup> RH BING. "Some characterizations of arcs and simple closed curves". En: *American Journal of Mathematics* 70.3 (1948), págs. 497-506.

Ahora, veamos que  $\sup\{d(x, M) \mid x \in X\} < \varepsilon$ . Sea  $x \in X$ , debemos encontrar  $y \in M$ , tal que  $d(x, y) < \varepsilon$ . Como  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ , existe un  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x \in U_j$ , escogemos  $y$  tal que  $y \in D_j$ . Como  $U_j \cap D_j \neq \emptyset$  y  $\text{diám}(U_j) < \frac{\varepsilon}{4}$ , tenemos que  $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ . Por lo tanto,  $\sup\{d(x, M) \mid x \in X\} < \varepsilon$ . Luego,  $H(M, X) < \varepsilon$ . Así,  $q$  es punto orilla de  $X$ .

De la misma manera si hacemos  $z = q$ , existe  $p$  en  $X \setminus \{q\}$  tal que  $p$  es punto orilla, por lo tanto,  $X$  tiene al menos dos puntos orillas.  $\square$

Observe que con el Teorema 2.1.12 y el Lema 2.1.2, se puede obtener el Teorema 1.1.19.

## 2.2. PUNTOS ORILLA E IRREDUCIBILIDAD

En esta sección, mostramos que cada punto de irreducibilidad es un punto orilla. Además, presentamos un ejemplo que muestra que no necesariamente un punto orilla es punto de irreducibilidad, daremos condiciones necesarias para que se cumpla dicha implicación. Estudiaremos los continuos únicamente irreducibles y los caracterizaremos. Además, veremos que el conjunto de puntos orilla de un continuo únicamente irreducibles es un conjunto orilla. Por último, presentaremos los continuos finitamente irreducibles y mostraremos algunas propiedades relacionadas con sus puntos orilla.

**Teorema 2.2.1.** Sea  $X$  un continuo irreducible. Si  $p$  es un punto de irreducibilidad de  $X$ , entonces  $p$  es un punto orilla de  $X$ .

*Demostración.* Sean  $p, q$  puntos de irreducibilidad de  $X$  y  $\varepsilon > 0$ . Como  $X$  es compacto existen abiertos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  de  $X$ , tales que  $\text{diám}(U_i) < \frac{\varepsilon}{4}$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ .

Por el Teorema 1.2.14, la composante  $\kappa(q)$  es densa en  $X$ . De lo anterior, para cada  $U_i$  existe un subcontinuo  $D_i$  en  $\kappa(q)$  tal que  $U_i \cap D_i \neq \emptyset$ . Considere  $M = \bigcup_{i=1}^n D_i$ , por el Teorema 1.1.15,  $M$  es un continuo propio de  $X$ , ya que  $q \in D_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $p \notin M$ .

Además, por una prueba análoga a la del Teorema 2.2.1, tenemos que  $H(M, X) < \varepsilon$ . Esto implica que  $p$  es un punto orilla.  $\square$

**Corolario 2.2.2.** Si  $X$  es un continuo indescomponible, entonces todo punto es un punto orilla.

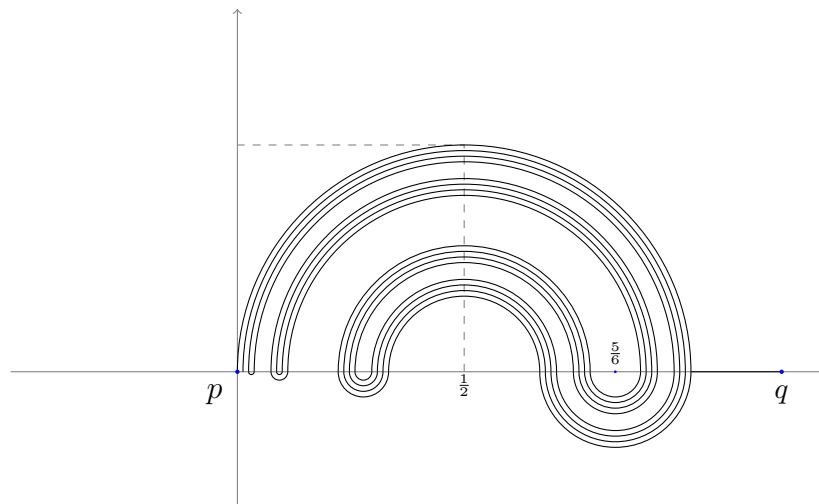
*Demostración.* Por la Proposición 1.2.11, cada punto de  $X$  es de irreducibilidad. Así, por el Teorema 2.2.1, cada punto de  $X$  es punto orilla.  $\square$

La recíproca del Teorema 2.2.1 no es cierta, como se presenta en la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.3.** Existen un continuo  $X$  y  $p \in X$ , tales que  $p$  es orilla pero no es de irreducibilidad.

*Demostración.* Sean  $X = \mathcal{K} \cup ([1, \frac{3}{2}] \times \{0\})$ ,  $p = (0, 0)$  y  $q = (\frac{3}{2}, 0)$ , donde  $\mathcal{K}$  es el continuo de Knaster definido en el Ejemplo 1.2.9 (vea la Figura 10).

Figura 10.  $\mathcal{K} \cup ([1, \frac{3}{2}] \times \{0\})$

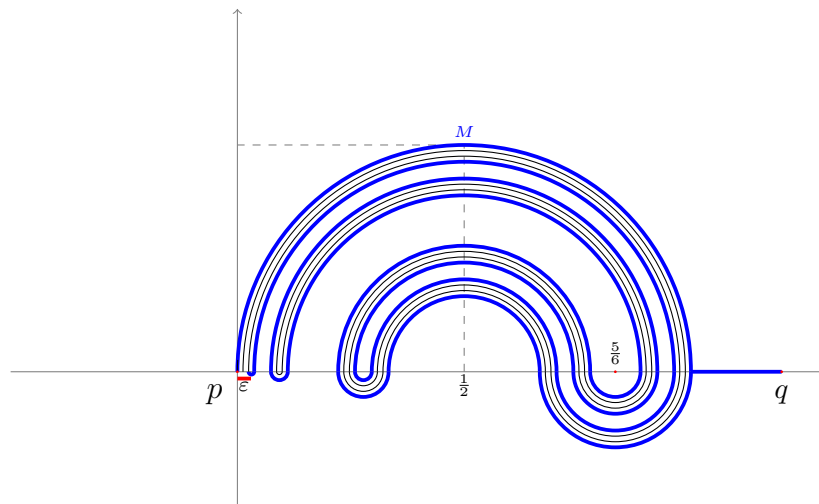


Nótese que  $p$  es un punto orilla y no es un punto de irreducibilidad.

Observemos que  $p$  no es un punto de irreducibilidad. Sea  $\alpha$  el único arco en  $X$  que une los puntos  $p$  y  $q$ . Sea  $x \in X$  y veamos que  $X$  no es irreducible en  $p$  y  $x$ . Si  $x \in \alpha$ , entonces  $\alpha$  es un subcontinuo propio de  $X$  que contiene el conjunto  $\{p, x\}$ . Ahora si  $x \notin \alpha$ , entonces  $x \in \mathcal{K}$ ; y  $\mathcal{K}$  es un subcontinuo propio de  $X$  que contiene  $\{p, x\}$ . De lo anterior, como  $x$  se tomó arbitrariamente,  $p$  no es un punto de irreducibilidad.

Veamos ahora que  $p$  es un punto orilla. Sea  $\varepsilon > 0$ . Nótese que siempre existe un continuo  $M$ , como lo describimos en la Figura 11, tal que  $H(M, X) < \varepsilon$  y  $p \notin M$ ; es decir,  $p$  es un punto orilla.

Figura 11.  $p$  punto orilla



□

Como observamos en la proposición anterior, no todo punto orilla es punto de irreducibilidad. A continuación, enunciaremos resultados que muestran condiciones que deben cumplir los continuos para que un punto orilla sea de irreducibilidad.

**Teorema 2.2.4.** Sean  $X$  un continuo de tipo  $\Lambda$  y  $p$  un punto orilla de  $X$ . Entonces  $p$  es un punto de irreducibilidad de  $X$ .

*Demostración.* Como  $X$  es un continuo tipo  $\Lambda$  es irreducible, admite una descomposición admisible minimal  $\mathcal{L} = \{f^{-1}(\{s\}) \mid s \in [0, 1]\}$  y si  $L \in \mathcal{L} \setminus \{f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\})\}$ , entonces  $L$  tiene interior vacío y su complemento es desconexo.

Sean  $h$  y  $k$  puntos tales que  $X$  es irreducible entre  $h$  y  $k$ . Supongamos que  $p$  no es punto de irreducibilidad, entonces por la Proposición 1.3.13,  $p \notin f^{-1}(\{0\})$  y  $p \notin f^{-1}(\{1\})$ , luego existe  $s$  en  $(0, 1)$ , tal que  $p \in f^{-1}(\{s\})$ . Sean  $r, w \in (0, 1)$  tales que  $0 < r < s < w < 1$ . Como  $X$  es tipo  $\Lambda$  tenemos

$$X \setminus f^{-1}(\{s\}) = U_1 \cup V_1$$

$$X \setminus f^{-1}(\{r\}) = U_2 \cup V_2$$

$$X \setminus f^{-1}(\{w\}) = U_3 \cup V_3$$

con  $U_i, V_i$  abiertos no vacíos y disjuntos, para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Para  $x_i \in U_i$  y  $y_i \in V_i$  existe  $r_i$  tal que  $B(x_i, r_i) \subseteq U_i$  y  $B(y_i, r_i) \subseteq V_i$  para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Sean  $r = \min\{r_i : i \in \{1, 2, 3\}\}$  y  $\varepsilon = \frac{r}{4}$ . Como  $p$  es punto orilla, existe un subcontinuo  $D$  en  $X$  tal que  $p \notin D$  y  $H(X, D) < \varepsilon$ . Nótese que  $f^{-1}(\{s\}) \cap D \neq \emptyset$ , pues si  $f^{-1}(\{s\}) \cap D = \emptyset$ , tenemos que  $D \subseteq U_1 \cup V_1$ . Entonces por definición de la métrica de Hausdorff (2),  $D \cap B(x_1; r_1) \neq \emptyset$  y  $D \cap B(y_1; r_1) \neq \emptyset$ . Así,  $D \cap U_1 \neq \emptyset$  y  $D \cap V_1 \neq \emptyset$ . Esto contradice la conexidad de  $D$ , por el Lema 1.1.12. De lo anterior,  $f^{-1}(\{s\}) \cap D \neq \emptyset$ . De forma similar, podemos afirmar que  $f^{-1}(\{r\}) \cap D \neq \emptyset$  y  $f^{-1}(\{w\}) \cap D \neq \emptyset$ .

Ahora consideremos  $f^{-1}([0, r])$  y  $f^{-1}([w, 1])$ , obsérvese que son subcontinuos pues  $f$  es monótona. Por lo anterior,  $f^{-1}([0, r]) \cap D \neq \emptyset$ , y  $f^{-1}([w, 1]) \cap D \neq \emptyset$ . Claramente,  $h \in f^{-1}([0, r])$  y  $k \in f^{-1}([w, 1])$ . Asimismo,  $p \notin f^{-1}([0, r])$  y  $p \notin f^{-1}([w, 1])$ .

Consideremos a  $L = D \cup f^{-1}([0, r]) \cup f^{-1}([w, 1])$ , obsérvese que  $L$  es un continuo y que  $p \notin L$ , luego  $L$  es un subcontinuo propio de  $X$ , con  $\{h, k\} \subseteq L$ , lo que es una contradicción.

Por lo tanto,  $p$  es punto de irreducibilidad. □

**Corolario 2.2.5.** Sea  $X$  un continuo irreducible y hereditariamente descomponible. Si  $p$  es un punto orilla de  $X$ , entonces  $p$  es un punto de irreducibilidad de  $X$ .

*Demostración.* Como  $X$  es un continuo irreducible y hereditariamente descomponible, por el Teorema 1.3.14,  $X$  es tipo  $\Lambda$ . Así, por el Teorema 2.2.4,  $p$  es punto de irreducibilidad de  $X$ . □

Otra condición que puede cumplir un continuo  $X$  para que un punto orilla sea punto de irreducibilidad, es que  $X$  sea únicamente irreducible. A continuación definimos los continuos únicamente irreducible.

**Definición 2.2.6.** Un continuo es *únicamente irreducible* si y sólo si tiene sólo dos puntos de irreducibilidad.

El arco es un continuo únicamente irreducible, los únicos puntos irreducibilidad son justamente los puntos de no corte; es decir, los puntos de irreducibilidad de  $[0, 1]$  son 0 y 1.

El siguiente lema se usará para la prueba del Teorema 2.2.8, el cual da otra condición para que un punto orilla sea de irreducibilidad.

**Proposición 2.2.7.** Sea  $X$  un continuo únicamente irreducible entre los dos puntos  $z$  e  $y$ . Si  $B$  es un subcontinuo indescomponible de  $X$ , entonces  $\{z, y\} \cap B = \emptyset$ .

*Demostración.* Supongamos que  $z \in B$ . Sea  $w \in B$  tal que  $w \neq z$  y  $w \in \kappa(z)$ , donde  $\kappa(z)$  representa la composante del punto  $z$  en el continuo  $B$ .

Como  $X$  es únicamente irreducible, tenemos que  $w$  no es punto de irreducibilidad, luego existe un subcontinuo propio  $W$  de  $X$  tal que  $\{w, y\} \subseteq W$ . Además como  $w \in \kappa(z)$  en  $B$ , existe un subcontinuo propio  $A$  de  $B$ , tal que  $\{w, z\} \subseteq A$ . De lo anterior,  $w \in A \cap W$ , luego por el Teorema 1.1.15,  $W \cup A$  es subcontinuo de  $X$ . Veamos que  $W \cup A$  es un subcontinuo propio de  $X$ . Supongamos que  $X = W \cup A$ , como  $B$  es un indescomponible entonces por el Teorema 1.2.10, tenemos  $\text{Int}(A) = \emptyset$ , pero como  $W$  es cerrado,  $X \setminus W$  es abierto y  $X \setminus W \subseteq A$  lo cual no puede suceder. Por lo tanto,  $W \cup A$  es un subcontinuo propio de  $X$ , con  $\{z, y\} \in W \cup A$ , lo que contradice la irreducibilidad de  $X$ . Luego,  $z \notin B$ . Análogamente se muestra para  $y$ . Así, concluimos que  $\{z, y\} \cap B = \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 2.2.8.** Sea  $X$  un continuo únicamente irreducible y  $p$  un punto de la orilla de  $X$ . Entonces  $p$  es un punto de irreducibilidad de  $X$ .

*Demostración.* Por la Proposición 1.2.11,  $X$  es descomponible, pues si fuese indescomponible cada punto de  $X$  sería de irreducibilidad, pero  $X$  es únicamente irreducible. Luego existen  $Y$  y  $Z$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = Z \cup Y$ . Sea  $p$  un punto orilla de  $X$ .

Supongamos que  $X$  es hereditariamente descomponible, luego por el Colorario 2.2.5,  $p$  es punto de irreducibilidad.

Ahora supongamos que  $X$  no es hereditariamente descomponible y  $p$  no es un punto de irreducibilidad de  $X$ .

Sean  $z$  e  $y$  los únicos puntos de irreducibilidad de  $X$ . Como  $X$  es descomponible y únicamente irreducible, existen  $Y$  y  $Z$  subcontinuos propios de  $X$ , tal que  $z \in Z$ ,  $y \in Y$ ,  $\{y, p\} \subseteq Y$  y  $\{z, p\} \subseteq Z$ . De lo anterior, tenemos que  $\{y, z\} \cap Y \neq \emptyset$  y  $\{y, z\} \cap Z \neq \emptyset$ . Luego, por la Proposición 2.2.7,  $Y$  y  $Z$  son descomponibles; de esto, existen  $A_1, B_1$  subcontinuos propios de  $Z$ , y  $A_2, B_2$  subcontinuos propios de  $Y$ , tales que  $Z = A_1 \cup B_1$  e  $Y = A_2 \cup B_2$ , con  $z \in A_1$  e  $y \in A_2$ .

Si  $p \in A_1$ , entonces, por el Teorema 1.1.15,  $A_1 \cup Y$  es un subcontinuo propio de  $X$ , que contiene a  $y$  e  $z$ , lo cual es una contradicción. Así,  $p \notin A_1$ . Análogamente  $p \notin A_2$ .

Sean  $r_1 = \min\{d(z, B_1), d(z, Y)\}$  y  $r_2 = \min\{d(y, Z), d(y, B_2)\}$ . Nótese que  $X \setminus (B_1 \cup Y)$  es un abierto. Luego para  $r = \frac{\min\{r_1, r_2\}}{2}$  existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < \delta < r$  y  $B(z, \delta) \subseteq X \setminus (B_1 \cup Y) \subseteq A_1$ .

Así mismo, como  $p$  es punto orilla, para  $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$  existe  $C$  un subcontinuo de  $X$  tal que  $p \notin C$  y  $H(X, C) < \varepsilon$ , teniendo así que  $C \cap B(z, \delta) \neq \emptyset$ .

Considérese  $W = A_1 \cup C \cup A_2$ . Observe que  $W$  es un subcontinuo pues de lo anterior  $C \cap A_1 \neq \emptyset$  y  $C \cap A_2 \neq \emptyset$  (Si  $C \cap A_2 = \emptyset$ , tenemos que para todo  $x \in A_2$ ,  $d(x, C) > r > \varepsilon$ , contradiciendo que  $H(X, C) < \varepsilon$ ). Además  $W$  es propio ya que  $p \notin W$  y  $\{y, z\} \subseteq W$ , lo que es una contradicción; pues  $z$  e  $y$  son puntos de irreducibilidad. Por lo tanto,  $p$  es punto de irreducibilidad.  $\square$

La siguiente proposición nos da una caracterización de los continuos únicamente irreducibles usando los puntos orilla.

**Proposición 2.2.9.** Para un continuo no degenerado  $X$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $X$  es únicamente irreducible.
2.  $X$  tiene sólo dos puntos orillas.

*Demostración.* Si  $X$  es únicamente irreducible, entonces  $X$  tiene sólo dos puntos de irreducibilidad se sigue directamente de los teoremas 2.2.1 y 2.2.8.

Recíprocamente, sean  $p$  y  $q$  los únicos puntos orilla de  $X$ . Supongamos que  $X$  no es irreducible, luego existe  $A$  subcontinuo propio de  $X$  tal que  $\{p, q\} \subseteq A$ . Entonces por el Teorema 2.1.11, existe  $x \in X \setminus A$  tal que  $\mathcal{D}$  es denso en  $X$ , donde

$$\mathcal{D} = \bigcup \{C \in \mathcal{E}\}, \text{ con}$$

$$\mathcal{E} = \{C \in C(X) \mid C \subseteq X \setminus \{x\} \text{ y } A \cap C \neq \emptyset\}$$

Veamos que  $x$  es punto orilla.

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $X$  es compacto, existen abiertos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  de  $X$  tales que  $\text{diám}(U_i) < \varepsilon$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , y  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ . Como  $\mathcal{D}$  es denso en  $X$ , para cada  $U_i$  existe  $C_i$  en  $\mathcal{E}$  tal que  $U_i \cap C_i \neq \emptyset$ . Sea  $C = (\bigcup_{i=1}^n C_i) \cup A$ . Nótese que  $C$  es un continuo en  $X$ , pues  $A \cap C_i \neq \emptyset$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $x \notin C$ .

Veamos que  $H(C, X) < \varepsilon$ . Mostraremos que

$$\sup\{d(c, X) \mid c \in C\} < \varepsilon \text{ y } \sup\{d(x, C) \mid x \in X\} < \varepsilon.$$

Nótese que  $\sup\{d(c, X) \mid c \in C\} = 0$ . Ahora, veamos que  $\sup\{d(x, C) \mid x \in X\} < \varepsilon$ . Sea  $x \in X$ . Debemos encontrar  $y \in C$  tal que  $d(x, y) < \varepsilon$ . Como  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ ,

existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x \in U_j$ . Escogemos  $y$  tal que  $y \in C_j$ . Como  $U_j \cap C_j \neq \emptyset$  y  $\text{diám}(U_j) < \frac{\varepsilon}{4}$ , tenemos que  $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ . Por lo tanto,  $\sup\{d(x, C) \mid x \in X\} < \varepsilon$ . Luego,  $H(C, X) < \varepsilon$ . Por lo anterior,  $x$  es un punto orilla de  $X$ , lo cual es contradicción. Por lo tanto  $X$  es irreducible entre  $p$  y  $q$ .

Por el Teorema 2.2.1,  $X$  es únicamente irreducible; pues, cualquier otro punto de irreducibilidad de  $X$  es punto orilla.  $\square$

Demostremos que en un continuo únicamente irreducible, la unión finita de puntos orilla es un conjunto orilla. Este resultado fue demostrado por Montejano y Puga en <sup>7</sup> en un dendroide suave, y finalmente extendido a continuos no degenerados por Leonel en <sup>5</sup>.

**Teorema 2.2.10.** Sea  $X$  un continuo únicamente irreducible. Entonces, la unión finita de puntos orilla de  $X$ , es un conjunto orilla de  $X$ .

*Demostración.* Sean  $p$  y  $q$  los únicos puntos de irreducibilidad de  $X$ , luego por la Proposición 2.2.9 y el Teorema 2.2.1,  $p$  y  $q$  son los únicos puntos orilla de  $X$ .

Veamos que  $\{p, q\}$  es un conjunto orilla. Obsérvese que  $X$  es descomponible, pues si fuese indescomponible cada punto de  $X$  sería de irreducibilidad, pero  $X$  es únicamente irreducible.

Como  $X$  es descomponible y por el Corolario 1.2.5, existen subcontinuos propios  $P$  y  $Q$  tales que  $X = P \cup Q$ , con  $P = \overline{X \setminus Q}$ ,  $Q = \overline{X \setminus P}$ ,  $p \in P$  y  $q \in Q$ .

Veamos que  $Q = \overline{X \setminus P}$  es un continuo irreducible entre  $q$  y cualquier punto de  $\text{Fr}(P)$ .

Supongamos que  $Q$  no es irreducible entre  $x \in \text{Fr}(P)$  y  $q$ , esto es, existe un subcontinuo propio  $M$  en  $Q$  con  $\{x, q\} \subseteq M$ , como  $x \in P$ , tenemos que  $M \cup P$  es un continuo

---

<sup>7</sup> L MONTEJANO e I PUGA. "Shore points in dendroids and conical pointed hyperspaces". En: *Topology and its Applications* 46.1 (1992), págs. 41-54.

de  $X$ , si  $M \cup P = X$ , entonces  $X \setminus P \subseteq M$ ; además, como  $\overline{X \setminus P}$  es el cerrado más pequeño que contiene a  $X \setminus P$ , tenemos que  $\overline{X \setminus P} \subseteq M$ , pero  $M$  es un subcontinuo propio de  $Q$ ; así,  $P \cup M$  es un subcontinuo propio de  $X$  con  $\{p, q\} \subseteq M \cup P$ , lo que contradice que  $p$  y  $q$  sean puntos de irreducibilidad de  $X$ .

De lo anterior,  $Q$  es irreducible entre  $q$  y cualquier punto de  $\text{Fr}(P)$ .

De la misma manera,  $\overline{X \setminus Q} = P$  es un continuo irreducible entre  $p$  y cualquier punto de  $\text{Fr}(Q)$ .

Sea  $x \in \text{Fr}(P) \cap \text{Fr}(Q)$ . Como  $p$  y  $x$  son puntos de irreducibilidad de  $P$ , por el Teorema 2.2.1,  $p$  y  $x$  son puntos orilla de  $P$ . De igual forma,  $q$  y  $x$  son puntos orilla de  $Q$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ , como  $p$  es punto orilla de  $P$ , existe un subcontinuo  $A$  de  $P$  tal que  $p \notin A$ ,  $x \in A$  y  $H(A, P) < \frac{\varepsilon}{4}$ . Además, como  $q$  es punto orilla de  $Q$ , existe un subcontinuo  $B$  de  $Q$  tal que  $q \notin B$ ,  $x \in B$  y  $H(B, Q) < \frac{\varepsilon}{4}$ . Consideremos ahora  $C = A \cup B$ , por el Teorema 1.1.15,  $C$  es un subcontinuo propio de  $X$ , pues  $x \in B \cap A$  y  $\{p, q\} \cap C = \emptyset$ . De lo anterior, tenemos que  $H(C, P \cup Q) = H(C, X) < \varepsilon$ . Por lo tanto,  $\{p, q\}$  es un conjunto orilla de  $X$ .

□

Para finalizar esta sección estudiamos los continuos finitamente irreducibles. La definición dada por Rocío Leonel en <sup>5</sup>, no es correcta, como explicamos a continuación.

La definición dada en <sup>5</sup> es la siguiente:

**Definición 2.2.11.** Un continuo  $X$  es *finitamente irreducible* si existe un subconjunto finito  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  de  $X$  tal que, si  $A$  es un subcontinuo de  $X$  y  $Y \subseteq A$ , entonces  $A = X$ . En este caso diremos que  $X$  es irreducible en  $Y$ .

De acuerdo con la Definición 2.2.11, el intervalo  $[0, 1]$  es irreducible en  $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ , en  $\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\}$  o en  $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$ . Es decir,  $[0, 1]$  es irreducible en cualquier conjunto finito que contenga  $\{0, 1\}$ . El Teorema 2.2.15 que mostraremos más adelante, que

también aparece demostrado en <sup>5</sup>, dice que si  $X$  es irreducible en  $Y$ , entonces cada punto de  $Y$  es un punto orilla de  $X$ . Sin embargo, cualquier punto en  $[0, 1] \setminus \{0, 1\}$  no es un punto orilla de  $[0, 1]$  como mostramos anteriormente. Es importante resaltar que aunque el Teorema 2.2.15 que está enunciado en <sup>5</sup>, es correcto, su demostración no es correcta y en esta tesis está corregida.

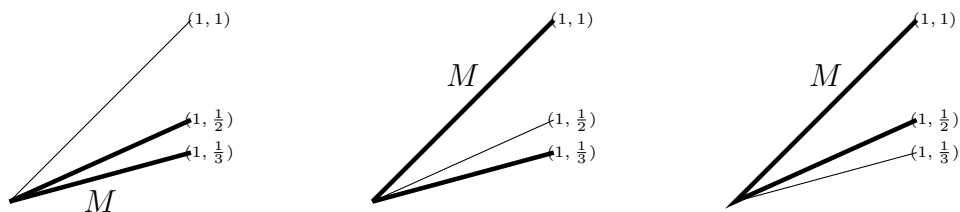
Por lo tanto, en nuestro trabajo le agregamos una condición necesaria para que esta definición tenga sentido.

**Definición 2.2.12.** Un continuo  $X$  es finitamente irreducible si existe un subconjunto finito  $Y = \{y_1, \dots, y_k\} \subseteq X$  tal que:

1. Si  $Z$  es un subcontinuo de  $X$  y  $Y \subseteq Z$ , entonces  $Z = X$ .
2. Para cada  $Y' \subsetneq Y$ , existe un subcontinuo  $Z_{Y'}$  de  $X$ , tal que  $Y' \subseteq Z_{Y'}$  y  $Z_{Y'} \neq X$ .

Sea  $X$  el triodo simple definido en el Ejemplo 2.1.4,  $X$  es un continuo finitamente irreducible. Sea  $Y = \{(1, 1), (1, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{3})\}$ . Nótese que  $X$  es irreducible en  $Y$ , pues no existe un continuo propio de  $X$ , tal que  $Y$  este contenido en él. Además si  $Y' \subsetneq Y$ , es fácil ver que existe un subcontinuo propio  $M$  de  $X$  tal que  $Y' \subseteq M$ , observe la Figura 12.

Figura 12. Si  $Y' \subsetneq Y$  existe  $M$ , tal que  $Y' \subseteq M$ .



**Notación 2.2.13.** Sea  $X$  un continuo irreducible en  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Definamos  $\mathcal{Q}(y_i)$  como:

$$\mathcal{Q}(y_i) = \{x \in X : \exists A \in C(X) \mid \{y_i, x\} \subseteq A \text{ y } A \cap Y = \{y_i\}\}.$$

En el artículo estudiado, Rocío Leonel muestra que  $\mathcal{Q}(y_i)$  es denso en  $X$ . Sin embargo, esto es falso. Mostraremos un contraejemplo.

**Lema 2.2.14.** Existe un continuo  $X$  irreducible en  $Y = \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq X$ , tal que  $\mathcal{Q}(y_i)$  no es un conjunto denso en  $X$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

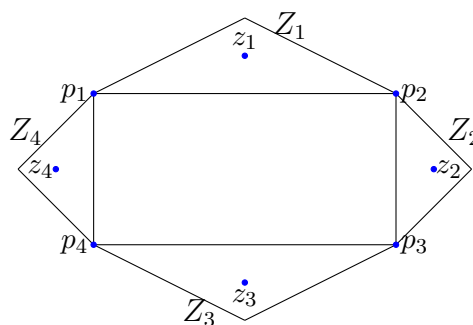
*Demostración.* Sean  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  continuos indescomponibles tales que:

Para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ , tomamos  $\{p_i, p_{i+1}, z_i\}$  puntos en diferentes componentes de  $Z_i$ , y  $\{p_4, p_1, z_4\}$  puntos en diferentes componentes de  $Z_4$ ; además,  $Z_i \cap Z_{i+1} = \{p_{i+1}\}$  y  $Z_1 \cap Z_4 = \{p_1\}$ . Observe la Figura 13.

Por el Teorema 1.1.15,  $M = Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 \cup Z_4$  es un continuo. Nótese que  $M$  es irreducible en  $Y = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ .

Veamos ahora que  $\mathcal{Q}(z_1)$ , no es denso en  $M$ . Sea  $U$  un abierto de  $Z_3$ . Nótese que no existe un subcontinuo  $N$  de  $M$  tal que  $N \in \mathcal{Q}(y_1)$  y  $U \cap N \neq \emptyset$ , pues si  $N \cap Z_3$  necesariamente  $Z_4 \subseteq N$  o  $Z_1 \cup N$ , lo cual no puede suceder pues  $N \cap Y = \{z_1\}$ . Por lo tanto,  $N \cap U = \emptyset$ . Así,  $\mathcal{Q}(y_1)$  no es denso en  $X$ .

Figura 13.  $Z_i$  continuos indescomponibles para  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$



□

**Teorema 2.2.15.** Sea  $X$  un continuo irreducible en  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Entonces  $y_i$  es un punto orilla de  $X$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

*Demostración.* Sea  $K$  un subcontinuo de  $X$  tal que  $\{y_2, y_3, \dots, y_n\} \subseteq K \subsetneq X$ . Es claro que  $y_1 \notin K$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $K_n$  la componenete de  $X \setminus B(y_1, \frac{1}{n})$  tal que  $K \subseteq K_n$ , nótese que  $y_1 \notin K_n$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .

Veamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = X$ . Como  $C(X)$  (1) es compacto, por el Teorema 1.1.14, existe una subsucesión  $(K_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} K_{n_k} = K_0$ , para algún compacto  $K_0$ .

Mostraremos que  $K_0 = X$ . Sea  $x_{n_k} \in K_{n_k}$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Por lo anterior, existe un  $x_0 \in K_0$  tal que  $x_{n_k}$  converge a  $x_0$ . Nótese que por la definicion de los  $K_n$ , existirá una subsucesión  $x_{n_k}$  en los  $K_{n_k}$ , tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y_1$ . Por lo tanto,  $y_1 \in K_0$ . Luego, como  $X$  es irreducible en  $Y$  y  $Y \subseteq K_0$ , tenemos que  $K_0 = X$ .

De lo anterior, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un  $K_{n_k}$  tan cerca del total como se quiera, donde además  $y_1 \notin K_{n_k}$ . Así,  $y_1$  es un punto orilla de  $X$ . De forma similar se muestra que  $y_i$  es punto orilla para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$ . □

### 2.3. ARCO Y CURVA CERRADA SIMPLE

En las secciones previas a este capítulo se definieron el arco y la curva cerrada simple. Recordemos que el arco es un continuo homeomorfo al intervalo  $[0, 1]$  y la curva cerrada simple es un continuo homeomorfo a  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ . Los puntos orilla, similar a los puntos de no corte, caracterizan al arco y a la curva cerrada simple como mostramos a continuación.

**Teorema 2.3.1.** Sea  $X$  un continuo no degenerado. Entonces  $X$  es un arco si, y sólo si, cada subcontinuo  $B$  de  $X$  tiene sólo dos puntos orillas.

*Demostración.* Si  $X$  es un arco, entonces  $X$  es homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Nótese que todos los subcontinuos no degenerados de  $X$  son homeomorfos a  $X$ . Así, es claro que cada subcontinuo no degenerado  $B$  de  $X$  tiene exactamente dos puntos orilla, pues cada subcontinuo  $B$  es un arco.

Recíprocamente, supongamos que cada subcontinuo no degenerado de  $X$  tiene sólo dos puntos orilla. Luego, por la Proposición 2.2.9, cada subcontinuo de  $X$  es únicamente irreducible. Además,  $X$  es hereditariamente descomponible, pues si un subcontinuo  $B$  de  $X$  fuese indescomponible por el Teorema 1.2.11, cada punto de  $B$  es de irreducibilidad y contradice el hecho de ser únicamente irreducible. Así, por el Teorema 1.3.14,  $X$  es tipo  $\Lambda$ ; esto es,  $X$  admite una descomposición admisible y cada elemento de la descomposición tiene interior vacío. Así, existe una función monótona  $f: X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\mathcal{L} = \{f^{-1}(\{s\}) \mid s \in [0, 1]\}$  es la descomposición admisible descrita en la Definición 2.2.4.

Veamos que cada elemento de  $\mathcal{L}$  es degenerado. Sean  $t$  y  $s$  puntos de  $[0, 1]$  tales que  $t < s$ . Definamos  $A = f^{-1}([0, t])$  y  $B = f^{-1}([s, 1])$ , nótese que son continuos ya que  $f$  es monótona. Es claro que  $A \cap B = \emptyset$ . Por la Proposición 1.3.13, tenemos que cada punto de  $f^{-1}(\{0\})$  y de  $f^{-1}(\{1\})$  son de irreducibilidad. Como  $X$  es únicamente irreducible tenemos que  $|f^{-1}(\{0\})| = |f^{-1}(\{1\})| = 1$ . Supongamos ahora que  $|f^{-1}(\{s_0\})| > 1$ , para todo  $0 < s_0 < 1$ . Consideremos  $A = \overline{f^{-1}([0, s_0])}$  y  $B = \overline{f^{-1}([s_0, 1])}$ , observemos que  $A$  y  $B$  son subcontinuos de  $X$  y nótese que:

1.  $A \cap B \neq \emptyset$ . Supongamos que  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $X \setminus A \cup B$  es no vacío, abierto y  $X \setminus A \cup B \subseteq f^{-1}(\{s_0\})$ , y es una contradicción pues cada elemento de  $\mathcal{L}$  tiene interior vacío.
2.  $X = A \cup B$ . Como  $p$  y  $q$  son puntos de irreducibilidad, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $p \in \overline{f^{-1}([0, s_0])} = A$  y  $q \in \overline{f^{-1}([s_0, 1])} = B$ . Además, por 1),  $A \cap B \neq \emptyset$ , luego  $A \cup B$  es un subcontinuo de  $X$ . De lo anterior,  $X = A \cup B$ .

Como  $|f^{-1}(\{s_0\})| > 1$ , podemos afirmar que  $|f^{-1}(\{s_0\}) \cap A| > 1$  o  $|f^{-1}(\{s_0\}) \cap B| > 1$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $|f^{-1}(\{s_0\}) \cap A| > 1$ . Veamos que cada punto de  $(f^{-1}(\{s_0\}) \cap A)$  es punto orilla de  $A$ . Sean  $x \in (f^{-1}(\{s_0\}) \cap A)$  y  $p \in f^{-1}(\{0\})$ , supongamos que existe un subcontinuo propio  $L$  de  $A$ , tal que,  $\{x, p\} \subseteq L$ . Nótese que  $f^{-1}(\{s\})$  con  $s$  en  $(0, s_0)$  esta contenida en  $L$  (Vea la prueba de la Proposición 1.3.13). Luego,  $A \setminus L$  es un abierto contenido en  $f^{-1}(\{0\}) \cup (f^{-1}(\{s_0\}) \cap A)$ . Como  $|f^{-1}(\{0\})| = 1$ , tenemos que  $A \setminus L \subseteq (f^{-1}(\{s_0\}) \cap A)$  pero es una contradicción, pues cada elemento de  $\mathcal{L}$  tiene interior vacío. Por lo tanto, no existe un subcontinuo propio de  $A$  que contenga a  $\{x, p\}$ . Luego,  $\{x, p\}$  son puntos de irreducibilidad de  $A$ . Así, por el Teorema 2.2.1,  $x$  es punto orilla de  $A$ . De lo anterior, cada punto de  $f^{-1}(\{s_0\}) \cap A$  y de  $f^{-1}(\{0\})$  son puntos orilla de  $A$ , lo que es una contradicción, pues cada subcontinuo de  $X$  tiene sólo dos puntos orilla. Por lo tanto,  $|f^{-1}(\{s_0\})| = 1$  para todo  $s_0 \in [0, 1]$ , es decir cada elemento de  $\mathcal{L}$  es degenerado. Por lo tanto,  $X$  es un arco.

□

Una prueba del Teorema 2.3.4 se puede encontrar en el Teorema 7 de <sup>7</sup>. En este trabajo, mostraremos otra prueba de este teorema. Antes de mencionarlo, definimos los continuos semiaposindéticos.

**Definición 2.3.2.** Sean  $X$  un continuo y  $p$  y  $q$  puntos de  $X$ . Decimos que  $X$  es **semiaposindético entre  $p$  y  $q$**  siempre que exista un subcontinuo  $W$  de  $X$  tal que  $\{p, q\} \cap \text{Int}(W) \neq \emptyset$  y  $\{p, q\} \setminus W \neq \emptyset$ .  $X$  es semiaposindético si es semiaposindético entre cada par de sus puntos.

Es sencillo ver que el arco es un continuo semiaposindético, pues para cualquier par de punto  $x$  e  $y$  de  $[0, 1]$  con  $x < y$  solo basta tomar  $W = [0, \frac{x+y}{2}] \subseteq [0, 1]$ ,  $x$  esta en el interior de  $W$  y  $y$  no esta en  $W$ . Por lo tanto, el arco es semiaposindético.

**Ejemplo 2.3.3.** Sea  $F_H$  el abanico armónico, definido en el Ejemplo 2.1.6. Entonces  $F_H$  es semiaposindético.

Sean  $p, q \in F_H$ . Consideremos dos casos:

1.  $\{p, q\} \cap (F_H \setminus ([0, 1] \times \{0\})) \neq \emptyset$ . Sin pérdida de generalidad suponemos que  $p \in F_H \setminus ([0, 1] \times \{0\})$ . Como  $F_H$  es localmente conexo en  $p$ , existe un abierto conexo  $U$  de  $F_H$  tal que  $p \in U$  y  $q \notin \text{cl}_{F_H}(U)$ . Así,  $W = \text{cl}_{F_H}(U)$  es un continuo tal que  $p \in \text{Int}(W)$ .
2.  $\{p, q\} \subseteq [0, 1] \times \{0\}$ . Nótese que  $d(p, 0) \neq d(q, 0)$ . Supongamos que  $d(p, 0) < d(q, 0)$ . Sea  $t_0 \in (d(p, 0), d(q, 0))$ . Definimos

$$W = \{t(1, 1/n) \mid t \in [0, t_0] \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \cup ([0, t_0] \times \{0\}).$$

Tenemos entonces que  $p \in \text{Int}(W)$  y  $q \notin W$ .

De lo anterior, en cualquier caso, existe un continuo que contiene a uno de los puntos en su interior y no contiene al otro. Así,  $F_H$  es semiaposindético.

**Teorema 2.3.4.** Sea  $X$  un subcontinuo no degenerado. Entonces  $X$  es un arco si, y sólo si,  $X$  es semiaposindético y tiene sólo dos puntos orilla.

*Demostración.* Si  $X$  es un arco, entonces  $X$  es semiaposindético y tiene sólo dos puntos orilla.

Recíprocamente supongamos que  $X$  es semiaposindético y tiene sólo dos puntos orilla. Como  $X$  tiene dos puntos orilla, por la Proposición 2.2.9,  $X$  es únicamente irreducible. Sean  $p$  y  $q$  los únicos puntos de irreducibilidad de  $X$ .

Sea  $x_0 \in X \setminus \{p, q\}$ . Definamos:

$$\mathcal{L}_p = \{x \in X \mid \text{existe un subcontinuo } L \subseteq X \setminus \{x_0\}, \text{ tal que } \{p, x\} \subseteq L\}$$

$$\mathcal{L}_q = \{x \in X \mid \text{existe un subcontinuo } L \subseteq X \setminus \{x_0\}, \text{ tal que } \{q, x\} \subseteq L\}$$

A continuación mostramos algunas propiedades de los conjuntos  $\mathcal{L}_p$  y  $\mathcal{L}_q$ :

1.  $\mathcal{L}_p$  y  $\mathcal{L}_q$  son conexos.

Es sencillo ver que  $\mathcal{L}_p = \bigcup \{A \mid A \text{ es un subcontinuo de } X \setminus \{x_0\} \text{ y } p \in A\}$ . Luego, como  $p \in A$  para todo  $A \in \mathcal{L}_p$ ,  $\mathcal{L}_p$  es conexo, por el Teorema 1.1.15. De forma análoga  $\mathcal{L}_q$  es conexo.

2.  $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q = \emptyset$ .

Supongamos que  $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q \neq \emptyset$ . Esto es, existe  $w \in \mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q$ . Por lo tanto, existen continuos  $L$  y  $M$  en  $X \setminus \{x_0\}$  tales que  $\{p, w\} \subseteq L$  y  $\{q, w\} \subseteq M$ . Así, por el Teorema 1.1.15,  $L \cup M$  es un continuo de  $X \setminus \{x_0\}$ , con  $\{p, q\} \subseteq M \cup L$ ; lo cual contradice que  $p$  y  $q$  sean puntos de reducibilidad de  $X$ . De lo anterior,  $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q = \emptyset$ .

3.  $(\overline{\mathcal{L}_p} \cap \mathcal{L}_q) \cup (\mathcal{L}_p \cap \overline{\mathcal{L}_q}) = \emptyset$ .

Supongamos que  $z \in \overline{\mathcal{L}_p} \cap \mathcal{L}_q$  para algún  $z \in X$ . Nótese que  $z \neq x_0$  pues  $x_0 \notin \mathcal{L}_q$ .

Como  $X$  es semiaposindético existe un continuo  $W$  tal que  $|\text{Int}(W) \cap \{z, x_0\}| = 1$  y  $|X \setminus W \cap \{z, x_0\}| = 1$ . Consideremos dos casos:

a)  $z \in \text{Int}(W)$ . Como  $z \in \overline{\mathcal{L}_p}$ , existe  $a \in \mathcal{L}_p \cap W$ . Sea  $L$  un subcontinuo de  $X$  tal que  $\{p, a\} \subseteq L \subseteq X \setminus \{x_0\}$ . Además, existe  $R$  subcontinuo de  $X$ , con  $\{z, q\} \subseteq R \subseteq X \setminus \{x_0\}$ . De esto  $X = L \cup W \cup R$ , pero es una contradicción pues  $x_0 \notin L \cup W \cup R$ .

b)  $x_0 \in \text{Int}(W)$ . Nótese que  $\{p, q\} \cap W = \emptyset$ , pues si  $\{p, q\} \cap W \neq \emptyset$ , entonces  $\overline{X \setminus W}$  es un continuo que tiene a  $z$  en su interior (ver Corolario 1.2.5), y no contiene a  $x_0$ . Esto contradice la parte I de esta prueba. Así,  $\{p, q\} \cap W = \emptyset$ . Por el Teorema 1.2.4,  $X \setminus W = U_p \cup U_q$ , donde  $U_p$  y  $U_q$  son abiertos conexos disjuntos,  $p \in U_p$  y  $q \in U_q$ . Obsérvese que  $\overline{U_p} \subseteq \mathcal{L}_p$ ,  $\overline{U_q} \subseteq \mathcal{L}_q$ .

Si  $z \in U_q$ , contradice que  $z \in \overline{\mathcal{L}_p}$ . Si  $z \in U_p$ , contradice que  $z \in \mathcal{L}_q$ .

Concluimos que  $\overline{\mathcal{L}_p} \cap \mathcal{L}_q = \emptyset$ . De la misma forma mostramos que  $\overline{\mathcal{L}_q} \cap \mathcal{L}_p = \emptyset$ .

4.  $x_0 \in \overline{\mathcal{L}_p} \cap \overline{\mathcal{L}_q}$  y por tanto  $X = \overline{\mathcal{L}_p} \cup \overline{\mathcal{L}_q}$ .

Supongamos que  $x_0 \notin \overline{\mathcal{L}_p} \cap \overline{\mathcal{L}_q}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $x_0 \notin \overline{\mathcal{L}_p}$ . Sea  $U$  abierto de  $X$  tal que  $x_0 \in U \in \overline{U} \in X \setminus \overline{\mathcal{L}_p}$ . Sea  $K$  la componente de  $X \setminus U$  tal que  $\overline{\mathcal{L}_p} \subseteq K$ . Por el Teorema de golpes en la frontera 1.1.17,  $K \cap \text{Fr}(U) \neq \emptyset$ . Como  $\overline{\mathcal{L}_p} \cap \text{Fr}(U) = \emptyset$ . Así,  $\overline{\mathcal{L}_p} \not\subseteq K$ , lo que es una contradicción, por definición de  $\mathcal{L}_p$ . Luego,  $x_0 \in \overline{\mathcal{L}_p}$ .

5.  $X = \mathcal{L}_p \cup \{x_0\} \cup \mathcal{L}_q$ .

Supongamos que existe  $a \in X \setminus (\mathcal{L}_p \cup \{x_0\} \cup \mathcal{L}_q)$ . Nótese que  $a \neq x_0$ . Como  $X$  es semiaposindético existe un subcontinuo  $W$  tal que  $|\text{Int}(W) \cap \{a, x_0\}| = 1$  y  $|X \setminus W \cap \{a, x_0\}| = 1$ . Consideremos dos casos:

a)  $x_0 \in \text{Int}(W)$ . Por (4) tenemos que  $x_0 \in \overline{\mathcal{L}_p} \cap \overline{\mathcal{L}_q}$ , por lo tanto,  $W \cap \mathcal{L}_p \neq \emptyset$  y  $W \cap \mathcal{L}_q \neq \emptyset$ , esto es existen  $M \in \mathcal{L}_p$  y  $N \in \mathcal{L}_q$  tal que  $W \cap M \neq \emptyset$  y  $W \cap N \neq \emptyset$ . Así  $X = W \cup M \cup N$ , pero es una contradicción pues  $a \notin W \cup M \cup N$ .

b)  $a \in \text{Int}(W)$ . Por (4),  $a \in \overline{\mathcal{L}_p} \cup \overline{\mathcal{L}_q}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $a \in \overline{\mathcal{L}_p}$ , por lo tanto  $W \cap \mathcal{L}_p \neq \emptyset$ , esto es existe  $N \in \mathcal{L}_p$  tal que  $N \cap W \neq \emptyset$ . Nótese que  $x_0 \notin W$  y  $x_0 \notin N$ . De lo anterior,  $W \cup N$  es un continuo de  $X$ , tal que  $x_0 \notin W \cup N$  y  $p \in W \cup N$ . Por lo tanto,  $W \cup N \in \mathcal{L}_p$ . De esto,  $a \in \mathcal{L}_p$  lo que es una contradicción.

Por (b), obtenemos que  $\mathcal{L}_p \cup \{x_0\} = \overline{\mathcal{L}_p}$  y  $\mathcal{L}_q \cup \{x_0\} = \overline{\mathcal{L}_q}$ . Así, por (1), obtenemos que  $\mathcal{L}_p \cup \{x_0\} \cup \mathcal{L}_q$  es conexo.

Además de (a) y (b), concluimos que  $X = \mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_q \cup \{x_0\}$

De lo anterior, por (5) y (3), tenemos que  $X \setminus \{x_0\} = \mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_q$  es desconexo. Como  $x_0 \in X \setminus \{p, q\}$  fue arbitrario, podemos concluir que  $X$  tiene exactamente dos puntos de no corte. Así, por el Teorema 1.1.20,  $X$  es un arco.

□

Los puntos de no corte caracterizan la curva cerrada simple, como lo muestra el Teorema 1.1.21. A continuación mostraremos algunos resultados, los cuales caracterizan la curva cerrada simple con los puntos orilla.

**Teorema 2.3.5.** Un continuo  $X$  es una curva cerrada simple si, y sólo si, por cada dos puntos diferentes  $p$  y  $q$  de  $X$ , existen exactamente dos subcontinuos propios  $A$  y  $B$  de  $X$ , tal que  $p$  y  $q$  son los únicos dos puntos orilla de  $A$  y  $B$ ,  $\{p, q\} = A \cap B$  y si existe otro subcontinuo propio  $C$  de  $X$  diferente de  $A$  y  $B$  tal que  $\{p, q\} \subseteq C$ , entonces alguno de los puntos  $p$  o  $q$  no es un punto orilla de  $C$ .

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un curva cerrada simple. Es sencillo ver que para  $p, q$  puntos de  $X$ , existen exactamente dos subcontinuos propios  $A$  y  $B$  de  $X$ , tal que  $p$  y  $q$  son los únicos dos puntos orilla de  $A$  y  $B$ ,  $\{p, q\} = A \cap B$  y si existe otro subcontinuo propio  $C$  de  $X$  diferente de  $A$  y  $B$  tal que  $\{p, q\} \subseteq C$ , entonces alguno de los puntos  $p$  o  $q$  no es un punto orilla de  $C$ .

Recíprocamente veamos primero que  $X$  no tiene puntos de corte, supongamos que  $z \in X$  es punto de corte de  $X$ , entonces  $X \setminus \{z\} = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos disjuntos no vacíos, sean  $u \in U$  y  $v \in V$  dos puntos de  $X$ , por hipótesis existen  $K$  y  $H$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $u$  y  $v$  son sus únicos puntos orilla. Note que  $x \in K$ , pues si  $x \notin K$  entonces  $K \subseteq U \cup V$  y por el Lema 1.1.12,  $K \subseteq U$  o  $K \subseteq V$ , luego si  $K \subseteq U$ ,  $v$  no sería punto orilla de  $K$ . Análogamente  $x \in H$ , por lo tanto,  $\{u, v, x\} \subseteq H \cap K$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $X$  no tiene puntos de corte.

Sean  $p$  y  $q$  puntos de  $X$ . Por hipótesis, existen exactamente dos subcontinuos  $A$  y  $B$  de  $X$  tales que  $p$  y  $q$  son sus únicos puntos orilla y  $A \cap B = \{p, q\}$ .

Veamos que  $X = A \cup B$ . Supongamos que  $X \neq A \cup B$ ; es decir, existe  $z \in X \setminus (A \cup B)$ . Sean  $E$  y  $E'$  subcontinuos de  $X$  tales que  $z$  y  $p$  son los únicos puntos orilla. Nótese que  $E$  y  $E'$  existen por hipótesis y además  $E \cap E' = \{p, z\}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $q \notin E$ . Obsérvese que  $E \cup A$  es un subcontinuo de  $X$ , pues  $p \in E \cap A$ . Veamos que  $E \cap A = \{p\}$ . Sea  $m \in E \cap A$ , con  $m \neq p$ , probaremos que  $p$  y  $q$  son puntos orilla de  $E \cup A$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Por la Proposición 2.2.9,  $A$  es irreducible entre  $p$  y  $q$ ; más aún,  $A$  es únicamente irreducible. Así, existe  $F$  subcontinuo propio de  $A$  tal que  $p \notin F$ ,  $q \in F$  y  $H(F, A) < \varepsilon$ . Notéese que  $m$  está en la componente de  $q$  respecto a  $A$ , pues  $A$  es únicamente irreducible. Luego existe un subcontinuo propio  $C_m$  de  $A$ , tal que  $\{m, q\} \subseteq C_m$ . Además, como  $q \in C_m \cap F$ , por el Teorema 1.1.15,  $C_m \cup F$  es un subcontinuo de  $A$  y  $p \notin C_m \cup F$ . Así  $H(C_m \cup F, A) < \varepsilon$ .

De la misma manera, se puede encontrar  $N$  subcontinuo de  $E$ , tal que  $\{z, m\} \subseteq N$ ,  $p \notin N$  y  $H(N, E) < \varepsilon$ . Como  $m \in N \cap (C_m \cup F)$ , entonces por el Teorema 1.1.15,  $M = N \cup C_m \cup F$  es un subcontinuo de  $E \cup A$ ,  $p \notin M$  y  $H(M, E \cup A) < \varepsilon$ . Esto implica que  $p$  es punto orilla de  $E \cup A$ .

Ahora veamos que  $q$  es punto orilla de  $E \cup A$ . Como  $q$  es punto orilla de  $A$  tenemos que existe un subcontinuo propio  $W$  de  $A$  tal que  $p \in W$ ,  $q \notin W$  y  $H(W, A) < \varepsilon$ . Como  $p \in W \cap E$  por el Teorema 1.1.15,  $W \cup E$  es un subcontinuo propio de  $A \cup E$ ,  $q \notin W \cup E$  y  $H(W \cup E, A \cup E) < \varepsilon$ . Así,  $q$  es punto orilla de  $A \cup E$ .

Nótese que  $E \cup A$  es un subcontinuo diferente de  $A$  y  $B$ , contradiciendo hipótesis. Así,  $E \cap A = \{p\}$ .

Seguido a lo anterior, mostraremos que  $q$  y  $z$  son puntos orilla de  $E \cup A$ . Claramente  $q$  es punto orilla. Sea  $\varepsilon > 0$ . Existe un subcontinuo  $R$  de  $E$ , tal que  $z \notin R$ ,  $p \in R$  y

$H(R, E) < \varepsilon$ . Como  $p \in R \cap A$ , por el Teorema 1.1.15,  $R \cup A$  es un subcontinuo de  $E \cup A$  y  $z \notin R \cup A$ . Luego,  $H(M \cup A, E \cup A) < \varepsilon$ , por tanto  $z$  es punto orilla de  $E \cup A$ .

Veamos que  $E \cup A$  es únicamente irreducible. Sea  $r$  un punto diferente de  $z$  y  $q$ , si  $r = p$  tenemos que para cualquier otro punto  $m \in E \cup A$  existe un subcontinuo propio  $L$  de  $E \cup A$  tal que  $\{m, r\} \subseteq L$ , pues  $E$  y  $A$  son únicamente irreducibles entre  $\{p, q\}$  y  $\{p, z\}$  respectivamente. Ahora si  $r \notin \{p, z, q\}$ , supongamos que  $r \in A$ , luego como  $A$  es únicamente irreducible existe un subcontinuo  $K$  de  $A$  tal que  $\{r, q\} \subseteq K \subseteq A \subseteq (A \cup E)$ , como  $K$  es un subcontinuo de  $A$ , tenemos que  $K$  es subcontinuo de  $A \cup E$ . Así  $E \cup A$  es únicamente irreducible, esto es,  $z$  y  $q$  son sus únicos puntos orilla.

Lo mismo ocurre con  $E \cup B$ ,  $E \cap B = \{p\}$  y  $\{q, z\}$  son sus únicos puntos orilla.

Note que  $(E \cup A) \cap (E \cup B) = E \cup (A \cap B) = E \cup \{p, q\} = E \cup \{q\}$ , lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto  $X = A \cup B$

De lo anterior

$$X \setminus \{p, q\} = A \setminus \{p, q\} \cup B \setminus \{p, q\},$$

y utilizando el Teorema 1.1.21, tenemos  $X$  es una curva cerrada simple.  $\square$

**Teorema 2.3.6.** Sea  $X$  un continuo. Si cada punto de  $X$  es un punto orilla y cada subcontinuo propio tiene sólo dos puntos orilla, entonces  $X$  es una curva cerrada simple o un continuo indescomponible.

*Demostración.* Primero observe que  $X$  no es un arco, pues cada punto de  $X$  es un punto orilla y un arco sólo tiene dos puntos orillas.

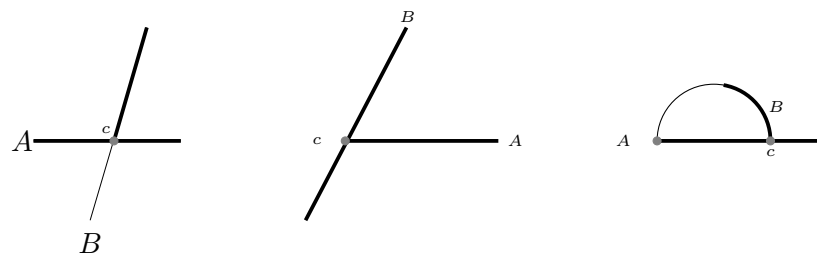
Sea  $B$  un subcontinuo propio de  $X$ , como  $B$  tiene sólo dos puntos orilla y cada subcontinuo  $D$  de  $B$  tiene solo dos puntos orilla, por el Teorema 2.3.1,  $B$  es un arco.

Supongamos que  $X$  es descomponible. Sean  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . De los anterior,  $A$  y  $B$  son arcos.

Nótese que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Así, podemos considerar dos casos:

1. Si existe  $c \in A \cap B$  tal que  $c \in \text{Cut}(A)$  o  $c \in \text{Cut}(B)$ , entonces  $X$  contiene un triodo simple (vea la Figura 14), lo cual es una contradicción, pues todos los puntos de  $X$  son puntos orilla.

Figura 14.  $X$  contiene un triodo simple.



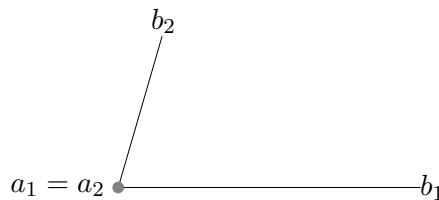
2. Sea  $S = \mathcal{C} \cup \mathcal{H}$ , donde  $\mathcal{C} = \{a \in A \mid a \notin \text{Cut}(A)\}$  y  $\mathcal{H} = \{b \in B \mid b \notin \text{Cut}(B)\}$ .

Si  $A \cap B \subseteq S$ . Como  $A$  y  $B$  son arcos por el Teorema 1.1.20,  $\mathcal{C}$  tiene únicamente dos puntos y  $\mathcal{H}$  también. Sean  $a_1$  y  $b_1$  los puntos de  $\mathcal{C}$ ;  $a_2$  y  $b_2$  los puntos de  $\mathcal{H}$ .

- a) Si  $A \cap B = \{a_1\}$ .

$X$  es un arco. Si  $a_1 = a_2$ . Vea la Figura 15.

Figura 15.  $X$  es un arco.

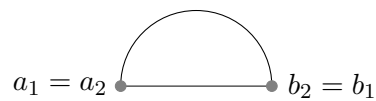


Lo anterior, es una contradicción pues  $X$  no es un arco. Así  $A \cap B \neq \{a_1\}$ .

De forma análoga,  $A \cap B \neq \{a_2\}$ ,  $A \cap B \neq \{b_1\}$ , y  $A \cap B \neq \{b_2\}$ .

b)  $A \cap B = \{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\}$ . Entonces  $X$  es una curva cerrada simple. Vea la Figura 16.

Figura 16.  $X$  es una curva cerrada simple.



De lo anterior si  $X$  es descomponible, tenemos que  $X$  es una curva cerrada simple. Así,  $X$  es indescomponible o  $X$  es una curva cerrada simple.  $\square$

La prueba del siguiente corolario se sigue de la prueba del teorema anterior.

**Corolario 2.3.7.** Sea  $X$  un continuo descomponible. Si todo subcontinuo propio de  $X$  es un arco, entonces  $X$  es un arco o una curva cerrada simple.

La prueba del siguiente resultado se sigue directamente del Teorema 2.3.6.

**Corolario 2.3.8.** Sea  $X$  es un continuo descomponible. Entonces,  $X$  es una curva cerrada simple si, y solo si, cada punto de  $X$  es un punto orilla y cada subcontinuo de  $X$  es únicamente irreducible.

## BIBLIOGRAFÍA

- BING, RH. "Some characterizations of arcs and simple closed curves". En: *American Journal of Mathematics* 70.3 (1948), págs. 497-506 (vid. pág. 38).
- CAMARGO J & VILLAMIZAR, E. *Topología general*. Colombia: Ediciones UIS, 2020 (vid. págs. 10, 17, 20, 23, 24, 26-28, 31, 37).
- CAMARGO J. & ISAACS, R. "Continuos tipo Knaster y sus modelos geométricos". En: *Revista Colombiana de Matemáticas* 47.1 (2013), págs. 67-81 (vid. pág. 21).
- ILLANES A & NADLER, S. *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances*. New York y Basel: *Mono-graphs, Textbooks in pure y applied mathematics*, vol. 216, Marcel Dekker, Inc., 1999.
- KURATOWSKI, K. *Topology*. Vol. 2. New York–London: Academic Press y Warsaw: PWN, 1968.
- LEONEL, R. "Shore points of a continuum". En: *Topology and its Applications* 161 (2014), págs. 433-441 (vid. págs. 32, 47-49).
- MACÍAS, S. *Topics on continua*. Springer-Chan, 2018.
- MONTEJANO, L e I PUGA. "Shore points in dendroids and conical pointed hyperspaces". En: *Topology and its Applications* 46.1 (1992), págs. 41-54 (vid. págs. 47, 53).

NADLER, S. *Continuum Theory: An Introduction*. Marcel Dekker-New York-Basel-Hong Kong: Monographs, Textbooks in Pure y Applied Math, 1992 (vid. págs. 16-18, 21, 23, 31).

THOMAS, ES. "Monotone decompositions of irreducible continua". En: (1966) (vid. págs. 26, 29, 30).