

***CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA:
POTENCIALIDADES EN EL TRATAMIENTO DE
SEÑALES NO ESTACIONARIAS***

**Autor
LENIN CHINCHILLA ATENCIA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELECTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2012**

CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA: POTENCIALIDADES EN EL TRATAMIENTO DE SEÑALES NO ESTACIONARIAS

Autor

LENIN CHINCHILLA ATENCIA

Este proyecto es presentado como requisito para optar al título de Ingeniero
Electrónico

Director

RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS
Doctor En Ciencias Naturales (Física)

Codirectores

Dr. GABRIEL ORDÓÑEZ PLATA
Dr. JOHANN FARITH PETIT SUÁREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELECTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA

2012

*A Dios por su infinita misericordia, hacia mi y hacia quienes me rodean.
A mi mamá, papá y hermanos por infinitas razones, pero sobre todo por ayudarme a ser quien soy.
A mis tíos, mis abuelos, y toda la familia en general.*

AGRADECIMIENTOS

A Dios primeramente por permitirme ser quien soy, y nuevamente por su infinita misericordia hacia mi y hacia quienes me rodean.

A mi familia por su ayuda y apoyo.

A mi director, el profesor Rafael Ángel Torres Amarís, por su apoyo, paciencia y orientación.

A mis codirectores, los profesores Gabriel Ordoñez y Johann Farith Petit por su apoyo y orientación.

A mi profesor del colegio Humberto Lamus, cuyos consejos han sido de gran ayuda para llevar a cabo mis objetivos.

A mi novia Jehimi Lorena Rizzo Arevalo, mi Jey, por su compañía y apoyo durante el desarrollo de este trabajo y por contribuir a que algunas de mis vivencias hallan quedado en mi memoria como momentos especiales.

RESUMEN

TÍTULO: CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA: POTENCIALIDADES EN EL TRATAMIENTO DE SEÑALES NO ESTACIONARIAS*

AUTOR: LENIN CHINCHILLA ATENCIA**

PALABRAS CLAVES: Convolución fraccionaria, traslación fraccionaria, espacio de fase.

DESCRIPCIÓN:

En este trabajo se propone un filtrado variante en el tiempo con base en la convolución y traslación fraccionaria. La definición de convolución y traslación fraccionaria utilizada, es la planteada en [2]. Inicialmente se hace una descripción del operador traslación fraccionaria, aspecto importante del filtro, luego se muestra el filtro en términos de la convolución y el operador traslación fraccionaria con algunos ejemplos de aplicación. También se plantea un algoritmo para la traslación fraccionaria y para la convolución fraccionaria. Con el algoritmo de la convolución fraccionaria se desarrolla el filtrado, que es ilustrado para un ejemplo sencillo, mostrando que efectivamente se pueden llevar a cabo filtrados a través de un eje curvo en el espacio de fase, haciendo uso de la metodología propuesta.

En el documento inicialmente se describen las bases teóricas utilizadas para definir el filtro variante en el tiempo con base en la convolución fraccionaria; posteriormente, en el Capítulo 2 se presenta el soporte matemático que permite definir el filtro variante en el tiempo. En el Capítulo 3 se muestra un ejemplo de aplicación de este filtro, y diferentes problemas de aplicación donde sería útil esta metodología. Por último, en el Capítulo 4 se presentan las conclusiones del trabajo desarrollado.

*Trabajo de Grado

**Escuela Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones, Facultad de Ingenierías Físico–Mecánicas, Universidad Industrial de Santander. Directotr Ph.d. RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS. Codirectores Dr. GABRIEL ORDÓÑEZ PLATA, Dr. JOHANN FARITH PETIT SUÁREZ

ABSTRACT

TITLE: FRACTIONAL CONVOLUTION: POTENTIALS IN THE TREATMENT OF NON-STATIONARY SIGNALS.*

AUTHOR: LENIN CHINCHILLA ATENCIA**

KEYWORDS: Fractional convolution, fractional traslation, phase space.

DESCRIPTION:

In this work it proposes a time variant filtering based on fractional convolution and fractional traslation. The definition of fractional convolution and fractional traslation used, is the one introduced in [2]. Initially it does a description of the fractional traslation operator, important part of filter, it shows the filter in terms of fractional convolution and fractional traslation operator with a few examples of applications. It propose algoritms for fractional convolution and fractional traslation, with it is development the filtering that it shows for a easy example.

Initially it describes the theoric tools use for to define the time variant filter based on fractional convolution. In the chapter two it shows the mathematical tools that allow in to define the time variant filter with some illustrations that showing better the idea. In the chapter three it shows a aplicacion example of this filter and differents reals aplicacions where it would be useful. Finally, in the capter four it shows the conclusions of this work.

*Degree Work

**Physical–Mechanical Engineering department, Electrical, Electronics and Telecommunications College, Universidad Industrial de Santander. Advisor Ph.d. RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS, Co-advisors Dr. GABRIEL ORDÓÑEZ PLATA, Dr. JOHANN FARITH PETIT SUÁREZ

Índice general

INTRODUCCIÓN	17
1. MARCO TEÓRICO	20
1.1. Distribución de Heaviside	20
1.2. Señal analítica y transformación de Hilbert	20
1.3. Distribución de Wigner	21
1.3.1. Definición de la distribución de Wigner	21
1.3.2. Potencialidades de la distribución de Wigner en la caracterización de perturbaciones de corta duración que afectan la calidad de la energía eléctrica.	24
1.4. Definición integral de la transformación fraccionaria de Fourier	28
1.5. Operador traslación fraccionaria	28
1.6. Convolución fraccionaria	30
2. HERRAMIENTAS CONVENCIONALES PARA EL TRATAMIENTO DE SEÑALES	34
2.1. Pautas para el diseño de filtros lineales e invariantes en el tiempo(LIT)	34
2.2. Respuesta de filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que no varían con el tiempo	37
2.3. Respuesta de los filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que varían en el tiempo	41
3. DESCRIPCIÓN DE UN FILTRADO VARIANTE EN EL TIEMPO HACIENDO USO DE LA CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA	50
3.1. Algunas aplicaciones	54
3.2. Resumen del procedimiento de filtrado variante en el tiempo propuesto en este trabajo . .	64
4. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	66
4.1. CONCLUSIONES	66
4.2. TRABAJO FUTURO	67
BIBLIOGRAFÍA	67
ANEXO A: Algoritmos utilizados	70
A1 Algoritmo para obtener la convolución fraccionaria(<i>convat2</i>)	70

A2 Algoritmo para obtener la traslación fraccionaria representada en el espacio de fase, distribución de Wigner(<i>TrasFrac</i>)	72
A3 Algoritmo para describir la trayectoria, en la distribución de Wigner, del filtro propuesto(<i>TrasFrac3</i>)	73
A4 Algoritmo para obtener la distribución de Wigner(<i>wvd</i>)	75
A5 Algoritmo para obtener la Transformación de Fourier fraccionaria(<i>fracf</i>)	78

Índice de figuras

1.1.	Representación de la distribución de Wigner de una señal multicomponente. Fuente: Autor.	23
1.2.	Representación de la distribución de Wigner de una señal chirp. Fuente: Autor.	23
1.3.	Señal de corriente perturbada y su DW. a) Señal de corriente perturbada en el dominio del tiempo. b) DW de la señal de corriente perturbada. Fuente: Autor.	24
1.4.	Señal de tensión perturbada y su DW. a) Señal de tensión perturbada en el dominio del tiempo. b) DW de la señal de tensión perturbada. Fuente: Autor.	25
1.5.	Señal de potencia instantánea perturbada y su DW. a) Señal de potencia instantánea perturbada en el dominio del tiempo. b) DW de la señal de potencia instantánea perturbada. Fuente: Autor.	25
1.6.	Señal de corriente perturbada y su DW. a) Señal de corriente perturbada en el dominio del tiempo. b) DW de la señal de corriente perturbada. Fuente: Autor.	26
1.7.	Señal de tensión perturbada y su DW. a) Señal de tensión perturbada en el dominio del tiempo. b) DW de la señal de tensión perturbada. Fuente: Autor.	26
1.8.	Señal de potencia instantánea perturbada y su DW. a) Señal de potencia instantánea perturbada en el dominio del tiempo. b) DW de la señal de potencia instantánea perturbada. Fuente: Autor.	27
1.9.	Proyección de la distribución de Wigner sobre un eje oblicuo. Fuente: [5].	29
1.10.	El efecto de la traslación fraccionaria sobre la distribución de Wigner-Ville de una función: Ω es el soporte de la DW de f , $\Omega_{\tau,\alpha}$ es el soporte de la DW de $T_{\tau,\alpha}f$. Fuente:[17].	29
1.11.	Convolución fraccionaria de dos funciones rectángulos a diferentes ordenes. a) Función rectángulo, b) Convolución a orden 0,2, c) Convolución a orden 0,4, d) Convolución a orden 0,6 e) Convolución a orden 0,8 f) Convolución a orden 1. Fuente: Autor.	33
2.1.	Diagrama que representa la relación entrada salida mediante la respuesta al impulso H. Fuente: Autor.	34
2.2.	Filtros ideales. Fuente: Autor.	35
2.3.	Características en la respuesta de algunos filtros convencionales. Fuente:[8]	36
2.4.	Características de la Señal 1 en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Señal real sin ruido en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. Fuente: Autor.	38

2.5. Características del ruido que se le adiciona a la Señal 1 en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Comportamiento del ruido en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal de ruido. Fuente:Autor.	38
2.6. Características de la Señal 1 con ruido en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Señal real afectada por el ruido, en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal afectada por el ruido. Fuente:Autor.	39
2.7. Respuesta en frecuencia de los filtros de Butterworth y Chebyshev tipo 1 de orden 6 utilizados para filtrar la señal mostrada en la Figura 2.6.Fuente:Autor.	39
2.8. Respuesta en el dominio de la frecuencia de las señales de entrada y salida a los filtros de Butterworth y Chebyshev1. a) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. b) Espectro en frecuencia de la señal con ruido. c) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Chebyshev tipo 1 de orden 6 para la señal de entrada con ruido. d) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Butterworth de orden 6 para la señal de entrada con ruido. Fuente:Autor.	40
2.9. Respuesta en el dominio del tiempo de las señales de entrada y salida a los filtros de Butterworth y Chebyshev1. a) Señal sin ruido en el dominio del tiempo. b) Señal con ruido en el dominio del tiempo. c) Señal de salida del filtro de Chebyshev tipo 1 de orden 6 para la señal de entrada con ruido, en el dominio del tiempo. d) Señal de salida del filtro de Butterworth de orden 6 para la señal de entrada con ruido, en el dominio del tiempo. Fuente:Autor.	41
2.10. Características de la Señal 2 en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Señal real en el dominio del tiempo sin ruido. b) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. Fuente:Autor.	42
2.11. Características del ruido que se le adiciona a la Señal 2 en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Comportamiento del ruido en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal de ruido. Fuente:Autor.	42
2.12. Características de la Señal 2 con ruido en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Señal real afectada por el ruido, en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal afectada por el ruido. Fuente:Autor.	43
2.13. Respuesta en frecuencia de los filtros de Butterworth y Chebyshev tipo 1 de orden 2 utilizados para filtrar la señal mostrada en la Figura 2.12.Fuente:Autor.	44
2.14. Respuesta en el dominio de la frecuencia de las señales de entrada y salida a los filtros de Chevyshev y Butterworth. a) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. b) Espectro en frecuencia de la señal con ruido. c) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Chebyshev tipo 1 de orden 2 para la señal de entrada con ruido. d) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Butterworth de orden 2 para la señal de entrada con ruido. Fuente:Autor.	44

2.15. Respuesta en el dominio del tiempo de las señales de entrada y salida a los filtros de Chebyshev y Butterworth. a) Señal sin ruido en el dominio del tiempo. b) Señal con ruido en el dominio del tiempo. c) Señal de salida en el dominio del tiempo del filtro de Chebyshev tipo 1 de orden 2 para la señal de entrada con ruido. d) Señal de salida en el dominio del tiempo del filtro de Butterworth de orden 2 para la señal de entrada con ruido. Fuente:Autor.	45
2.16. Características de la Señal 3 en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Señal real en el dominio del tiempo sin ruido. b) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. Fuente:Autor. Fuente:Autor.	46
2.17. Características del ruido que se le adiciona a la Señal 3 en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Comportamiento del ruido en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal de ruido. Fuente:Autor.	46
2.18. Características de la Señal 3 con ruido en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Señal real afectada por el ruido, en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal afectada por el ruido. Fuente:Autor.	47
2.19. Respuesta en frecuencia de los filtros de Butterworth y Chebyshev tipo 1 de orden 6 utilizados para filtrar la señal mostrada en la Figura 2.18. Fuente:Autor.	47
2.20. Respuesta en el dominio de la frecuencia de las señales de entrada y salida a los filtros de Chebyshev y Butterworth. a) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. b) Espectro en frecuencia de la señal con ruido. c) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Chebyshev tipo 1 de orden 6 para la señal de entrada con ruido. d) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Butterworth de orden 6 para la señal de entrada con ruido. Fuente:Autor.	48
2.21. Respuesta en el dominio del tiempo de las señales de entrada y salida a los filtros de Chebyshev y Butterworth. a) Señal sin ruido en el dominio del tiempo. b) Señal con ruido en el dominio del tiempo. c) Señal de salida en el dominio del tiempo del filtro de Chebyshev tipo 1 de orden 6 para la señal de entrada con ruido. d) Señal de salida en el dominio del tiempo del filtro de Butterworth de orden 6 para la señal de entrada con ruido. Fuente:Autor.	49
3.1. DW de una Gaussiana trasladada en el espacio de fase a través de una línea recta mediante el operador traslación fraccionaria. Fuente:Autor.	51
3.2. DW de una Gaussiana trasladada en el espacio de fase a través de una trayectoria curva mediante el operador traslación fraccionaria. Fuente:Autor.	52
3.3. DW de una Gaussiana trasladada en el espacio de fase a través de una trayectoria curva mediante el operador traslación fraccionaria. Fuente:Autor.	52
3.4. DW de una Gaussiana trasladada en el espacio de fase a través de una trayectoria curva mediante el operador traslación fraccionaria. Fuente:Autor.	53

3.5. Características de la Señal 2 con ruido en los dominios del tiempo y la frecuencia y distribución de Wigner(DW) de esta señal. a) DW de la señal analítica de la señal afectada por el ruido. b) Señal real afectada por el ruido, en el dominio del tiempo. c) Espectro en frecuencia de la señal afectada por el ruido. Fuente:Autor.	55
3.6. Características de la Señal 2 en los dominios del tiempo y la frecuencia y distribución de Wigner(DW) de esta señal. a) DW de la señal analítica de la señal sin ruido. b) Señal real sin ruido, en el dominio del tiempo. c) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. Fuente:Autor.	55
3.7. Descripción del filtrado variante en el tiempo sobre la Señal 2 con ruido. a) DW de la señal analítica de la señal afectada por el ruido. b) Trayectoria que sigue el filtro representada en la distribución de Wigner. c) DW de la señal obtenida después del filtrado. Fuente:Autor.	56
3.8. Respuesta en el dominio del tiempo y la frecuencia del filtrado variante en el tiempo. a) Señal sin ruido, en el dominio del tiempo. b) Señal obtenida después del filtrado, en el dominio del tiempo. c) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. d) Espectro en frecuencia de la señal obtenida después del filtrado. Fuente:Autor.	57
3.9. Características de la Señal 3 con ruido en los dominios del tiempo y la frecuencia y distribución de Wigner(DW) de esta señal. a) DW de la señal analítica de la señal afectada por el ruido. b) Señal real afectada por el ruido, en el dominio del tiempo. c) Espectro en frecuencia de la señal afectada por el ruido. Fuente:Autor.	58
3.10. Características de la señal 3 en los dominios del tiempo y la frecuencia y distribución de Wigner(DW) de esta señal. a) DW de la señal analítica de la señal sin ruido. b) Señal real sin ruido, en el dominio del tiempo. c) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. Fuente:Autor.	59
3.11. a) DW de la señal analítica de la señal afectada por el ruido. b) Trayectoria que sigue el filtro representada en el espacio de fase de señales. c) DW de la señal obtenida después del filtrado. Fuente:Autor.	60
3.12. Respuesta en el dominio del tiempo y la frecuencia del filtrado variante en el tiempo aplicado sobre la Señal 3 con ruido. a) Señal sin ruido en el dominio del tiempo. b) Señal obtenida después del filtrado en el dominio del tiempo. c) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. d) Espectro en frecuencia de la señal obtenida después del filtrado. Fuente:Autor.	61
3.13. Respuesta en frecuencia de un filtro de Chevishev tipo 1 de orden 6, utilizado para mejorar el resultado de la convolución fraccionaria, descrito en la Figura 3.14. Fuente:Autor. .	62

3.14. Respuesta en el dominio de la frecuencia de las señales de entrada y salida al filtro de Chebyshev. a) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. b) Espectro en frecuencia de la señal recuperada mediante la convolución fraccionaria. c) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Chebyshev donde la señal de entrada es la mostrada en <i>b</i> . Fuente:Autor.	62
3.15. Respuesta en el dominio del tiempo y la frecuencia obtenida mediante un filtrado variante en el tiempo seguido de un filtrado LIT aplicado sobre la Señal 3 con ruido. a) Señal sin ruido en el dominio del tiempo. b) Señal en el dominio del tiempo recuperada haciendo uso de la convolución fraccionaria y luego filtrada mediante un filtro de Chebyshev. c) Espectro en frecuencia de la señal analítica de la señal sin ruido. d) Espectro en frecuencia de la señal analítica de la señal recuperada haciendo uso de la convolución fraccionaria y luego filtrada mediante un filtro de Chebyshev. Fuente:Autor.	63
3.16. Distribución tiempo–frecuencia de una señal de radar. Fuente: [18].	65
3.17. Distribución tiempo–frecuencia de una traza sísmica. Fuente: [18].	65

Símbolos

V.P.:	Valor principal de Cauchy
i :	Factor imaginario
DW:	Distribución de Wigner
\mathfrak{F} :	Transformación de Fourier
\mathfrak{F}^{-1} :	Transformación de Fourier Inversa
\mathfrak{F}_α :	Transformación de Fourier fraccionaria de orden a , siendo $\alpha = a\frac{\pi}{2}$
F_α :	Transformada de Fourier fraccionaria de orden a , siendo $\alpha = a\frac{\pi}{2}$
$\mathfrak{A}[f]$:	Señal analítica de f
$\mathfrak{R}[f]$:	Parte real de f
$[f * g](x)$:	Convolución entre las señales f y g
$[f *_\alpha g](x)$:	Convolución fraccionaria de orden a , siendo $\alpha = a\frac{\pi}{2}$, entre las señales f y g
$\overline{f(x)}$:	Complejo conjugado de la señal f
$W_{f,g}(x, u)$:	Distribución de Wigner del producto de dos señales en el tiempo f y g
$W_{f*g}(x, u)$:	Distribución de Wigner de la convolución de dos señales en el tiempo f y g
$W_f \overset{u}{*} W_g$:	Convolución entre las distribuciones de Wigner de dos señales, f y g , a través de un eje paralelo al eje u

INTRODUCCIÓN

Procesar o tratar una señal es requerido en múltiples aplicaciones prácticas, tales como comunicaciones, imágenes, sísmica, caracterización de la calidad de la energía eléctrica, radar y sonar, entre otros. En general, muchos de los problemas a solucionar que plantean estas aplicaciones, se pueden asociar como un problema de estimación, en algunos casos, o como un problema de predicción en otros. Un caso práctico es cuando se tiene una señal de interés que se encuentra afectada por señales no deseadas que se les asocia como ruido, la idea es separar la señal del ruido, esto es básicamente un problema de estimación. En el caso de la predicción, esto es factible a partir del análisis del comportamiento de las señales que permiten predecir un evento determinado.

Los problemas que tienen que ver con tratamiento de señales, se encuentran divididos en dos campos: por un lado las señales o procesos estacionarios, y por el otro los no estacionarios. En el caso estacionario el tratamiento está bien caracterizado, ya que el análisis de Fourier lo describe apropiadamente en el dominio de la frecuencia y el modelado mediante la convolución o ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, permite su estudio en el dominio del tiempo. Este análisis no es apropiado para señales no estacionarias, ya que el análisis de Fourier da información de la composición frecuencial de la señal pero no permite discriminar en que tiempo ocurren, por lo tanto no da información adecuada de los eventos variantes en el tiempo, siendo por consiguiente una herramienta inadecuada en el análisis de señales no estacionarias. Aún así se han planteado procedimientos de filtrado utilizando la transformación de Fourier fraccionaria [10], [12], [1],[16] en un intento por extender el análisis de Fourier al tratamiento de señales no estacionarias y en esta dirección es que apunta este trabajo.

Dado que varios fenómenos existentes en la práctica, son de naturaleza no estacionaria: canales de comunicación, señales sísmicas cuando se considera el fenómeno de dispersión, los eventos que afectan la calidad de la energía eléctrica,[14] [3] [18] entre otros, se hace necesario el uso de otras herramientas diferentes al análisis de Fourier. En este sentido varias herramientas se han propuesto, tal es el caso de los filtros lineales variantes en el tiempo, en los que entra el filtro de Zadeh, Weyl [14], el filtro de Kalman [4] y el tratamiento por Wavelets [9].

El procedimiento planteado en los filtros de Zadeh y Weyl[14], define una función peso a partir de una representación tiempo–frecuencia lineal, luego en el tiempo se ejecuta la operación que corresponde a hacer el producto sobre la representación tiempo–frecuencia entre la función peso y la señal. De esta forma se obtiene el filtrado variante en el tiempo. Además este tratamiento aún mantiene una noción de composición frecuencial de la señal.

El filtro de Kalman modela el filtro mediante ecuaciones en el espacio de estados, en donde se hace necesario ajustar unas constantes para obtener los resultados deseados. El tratamiento por Wavelets, hace uso del concepto de escalograma, en donde describe los detalles de la señal a partir de un parámetro llamado escala. Estos análisis se apartan de cualquier interpretación directa sobre una base armónica, es decir la noción de composición frecuencial de la señal se pierde, y si se intenta obtener alguna relación con la composición frecuencial esta relación no resulta ser muy clara.

En este trabajo se plantea un filtrado variante en el tiempo que sigue haciendo uso del concepto de la convolución para el filtrado de señales, pero en un sentido fraccionario. Además mantiene el análisis armónico ya que este procedimiento tiene una directa interpretación sobre la distribución de Wigner, que es una representación tiempo frecuencia con resolución perfecta. Esta es una de las diferencias de este tratamiento con el planteado por Kalman y Wavelets. Respecto al filtro de Zadeh y Weyl el tratamiento es similar, la diferencia radica en que al hacer uso de la distribución de Wigner no se tienen problemas de resolución, ya que por definición la distribución de Wigner ofrece resolución perfecta, mientras que los filtros de Zadeh y Weyl hacen uso de representaciones tiempo–frecuencia lineales los cuales no presentan resolución perfecta en estos dominios.

Uno de los propósitos de este trabajo es mostrar que la teoría de Fourier puede ser aplicada al tratamiento de señales no estacionarias, no queriendo decir con esto que el filtrado de Kalman y la representación de señales con wavelets no sean herramientas poderosas en determinados análisis, simplemente se presenta un procedimiento alternativo a los existentes, con la ventaja que sus ideas principales son asimilables al análisis de Fourier. El aporte de este trabajo es que el procedimiento planteado está basado en el concepto de traslación fraccionaria y convolución fraccionaria desarrollado en [17], ésta es una novedad importante respecto de las propuestas existentes. Cabe resaltar también, que el filtrado se desarrolla en el tiempo, y no en el espacio de fase, por lo que no es una preocupación la violación del principio de incertidumbre[14].

A continuación se presenta la organización de este documento. En el Capítulo 1 de este trabajo, se describen las herramientas utilizadas en el desarrollo del filtrado variante en el tiempo haciendo uso de la convolución fraccionaria, tales como la transformación de Fourier fraccionaria [11], convolución fraccionaria y operador de traslación fraccionaria [17]. La descripción de las técnicas de filtrado lineal e invariante en el tiempo, junto con algunos ejemplos de aplicación se presenta en el Capítulo 2. La

descripción matemática para el planteamiento de un filtrado variante en el tiempo haciendo uso de la convolución fraccionaria con algunos ejemplos de aplicación que muestran el uso de los algoritmos desarrollados y las conclusiones se presentan en los capítulos 3 y 4 respectivamente. Adicionalmente en el anexo A se describen los algoritmos utilizados en lenguaje MATLAB(versión 7.4) para realizar los diferentes tratamientos de la señal presentados en este trabajo.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se describe el soporte teórico requerido para comprender la propuesta que se hace en este trabajo de grado.

1.1. Distribución de Heaviside

La distribución de Heaviside, $H(x)$ se define por:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ 1/2 & \text{si } x = 0; \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Entre sus propiedades se destaca que, $\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}$, donde $\delta(x)$ es la distribución de Dirac, y la derivada se considera en el sentido de las distribuciones.

1.2. Señal analítica y transformación de Hilbert

La señal analítica está definida de la siguiente manera [6]: Sea $H(v)$ la distribución de Heaviside, $g(x)$ una señal, tal que $G(v)$ es su transformada de Fourier, \mathfrak{F}^{-1} es la transformación inversa de Fourier, entonces la señal analítica $s(x)$ asociada a la señal $g(x)$ es,

$$\begin{aligned} s(x) &= 2\mathfrak{F}^{-1}[H(v)G(v)](x), \\ &= g(x) + iV.P. \left[g(x) * \frac{1}{\pi x} \right]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Donde la parte imaginaria de la Ecuación 1.2, es la definición de la transformada de Hilbert, que escrita en su forma integral es,

$$V.P. \left[g(x) * \frac{1}{\pi x} \right] = \frac{1}{\pi} V.P. \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{x - \tau} d\tau \right]. \quad (1.3)$$

Donde V.P.[...] representa el valor principal de Cauchy y esta dado por[7]:

$$\lim_{x \rightarrow \delta} \left[\int_{-\infty}^{t-\delta} \frac{g(\tau)}{x - \tau} d\tau + \int_{t+\delta}^{\infty} \frac{g(\tau)}{x - \tau} d\tau \right]. \quad (1.4)$$

Como se nota de la Ecuación 1.2, la señal analítica es en general compleja, y una de sus propiedades importantes es que su espectro corresponde a la información contenida solo en las frecuencias positivas de la señal original $g(x)$, ya que el espectro de una señal real es par, no hay perdida de generalidad si se trabaja solo con el espectro de la parte positiva.

1.3. Distribución de Wigner

A continuación se definira la distribución de Wigner junto con sus propiedades, unos ejemplos de representación y sus potencialidades en la segmentación.

1.3.1. Definición de la distribución de Wigner

La distribución de Wigner $W_f(x, u)$ [13] de una señal f puede ser definida en términos de la representación temporal de la señal, $f(x)$, como

$$W_f(x, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + x'/2) \overline{f(x - x'/2)} e^{-i2\pi ux'} dx', \quad (1.5)$$

o en términos de la representación en frecuencia de la señal, $F(u)$, como

$$W_f(x, u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u + u'/2) \overline{F(u - u'/2)} e^{i2\pi xu'} du'. \quad (1.6)$$

Además se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f(x, u) dx = |F(u)|^2, \quad (1.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f(x, u) du = |f(x)|^2, \quad (1.8)$$

$$W_{f \cdot g}(x, u) = W_f \overset{u}{*} W_g, \quad (1.9)$$

$$W_{f * g}(x, u) = W_f \overset{x}{*} W_g. \quad (1.10)$$

Esto último, son solo algunas propiedades de la distribución de Wigner. La descripción matemática se hace en términos de las variables x y u que al hablar de una señal temporal representarían el tiempo y

1.3 Distribución de Wigner

la frecuencia respectivamente. No se hace la descripción en términos de tiempo y frecuencia ya que esta herramienta no es exclusiva de este tipo de señales, por lo que habría pérdida de generalidad si se hace.

Las ecuaciones 1.7 y 1.8 establecen que la distribución de Wigner cumple las distribuciones marginales, esto quiere decir que esta representación da información acerca de la energía instantánea y la densidad espectral de energía de la señal en cada punto, aspecto importante cuándo se quiere obtener información acerca del comportamiento espectral de la señal.

Si se asocia la variable x como tiempo y la variable u como frecuencia, la Ecuación 1.9 muestra que el producto de señales en el tiempo se interpreta, en términos de la distribución de Wigner, como la convolución de la distribución de Wigner de las señales a través de un eje paralelo al eje u o sea al eje de la frecuencia y la Ecuación 1.10 muestra que la convolución de señales en el tiempo se interpreta, en términos de la distribución de Wigner, como la convolución de la distribución de las señales a través de un eje paralelo al eje x es decir el eje del tiempo. Dado que el análisis convencional consiste en productos y convoluciones en el tiempo, estas propiedades muestran porqué este análisis convencional no permite tratar señales no estacionarias, ya que en términos de la distribución de Wigner, este es interpretado como convoluciones a través de ejes verticales u horizontales, valido solo cuando la señal de interés puede ser recuperada con operaciones a través de ejes paralelos al eje del tiempo o al eje de la frecuencia.

Esta herramienta es de vital importancia en este trabajo ya que es una representación tiempo-frecuencia que, teóricamente, ofrece una resolución perfecta, a parte que cumple con las distribuciones marginales, mostradas en las ecuaciones 1.7 y 1.8. Además el resultado de la convolución fraccionaria, que se definirá más adelante, tiene una directa interpretación sobre esta representación. A continuación se detallan los resultados de la distribución de Wigner para dos señales con diferentes variaciones en el tiempo. Por consiguiente si se quisiera recuperar alguna de las componentes de la señal bastaría un tratamiento a través de ejes horizontales, convoluciones en el tiempo, que es equivalente a productos en el dominio de la frecuencia.

En la Figura 1.1, se muestra la representación de Wigner para una señal multicomponente de la forma $\sin(2\pi f_1 t)(H(t) - H(t - t_1)) + \sin(2\pi f_2 t)(H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \sin(2\pi f_3 t)(H(t - t_2) - H(t - t_3)) + \sin(2\pi f_4 t)(H(t - t_3) - H(t - t_4))$ con $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, donde $H(t)$ es la distribución de Heaviside o función escalón. En el recuadro principal se muestra la distribución de Wigner, en la parte inferior la señal en el tiempo y en la parte izquierda el espectro de la señal. Tal como se ve en el ejemplo en la representación tiempo-frecuencia cada componente tiende a representarse como una línea, a esto se hace referencia cuando se dice que la distribución de Wigner ofrece perfecta resolución.

En la Figura 1.2, se muestra la representación de Wigner para una señal chirp de la forma $\sin(20\pi t^2)$. En el recuadro principal se muestra la distribución de Wigner, en la parte inferior la señal en el tiempo

1.3 Distribución de Wigner

y en la parte izquierda el espectro de la señal. Aquí se ve que el tratamiento convencional, productos o convoluciones en el tiempo, no sería válido ya que el perfil de esta señal no se ajusta a ningún eje vertical ni horizontal, por lo que el tratamiento convencional pierde aplicabilidad en este tipo de señales, señales con perfiles curvos u oblicuos en el espacio de fase de señales, obtenido con la distribución de Wigner; aquí sería necesario un filtro variante en el tiempo, ya que esta es la naturaleza de la señal.

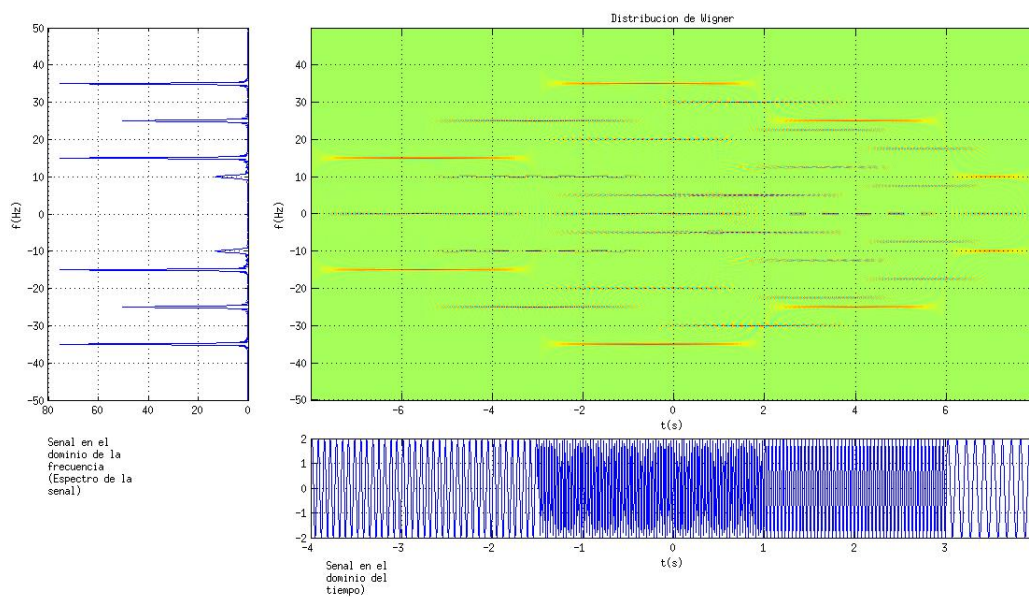


Figura 1.1: Representación de la distribución de Wigner de una señal multicomponente. Fuente: Autor.

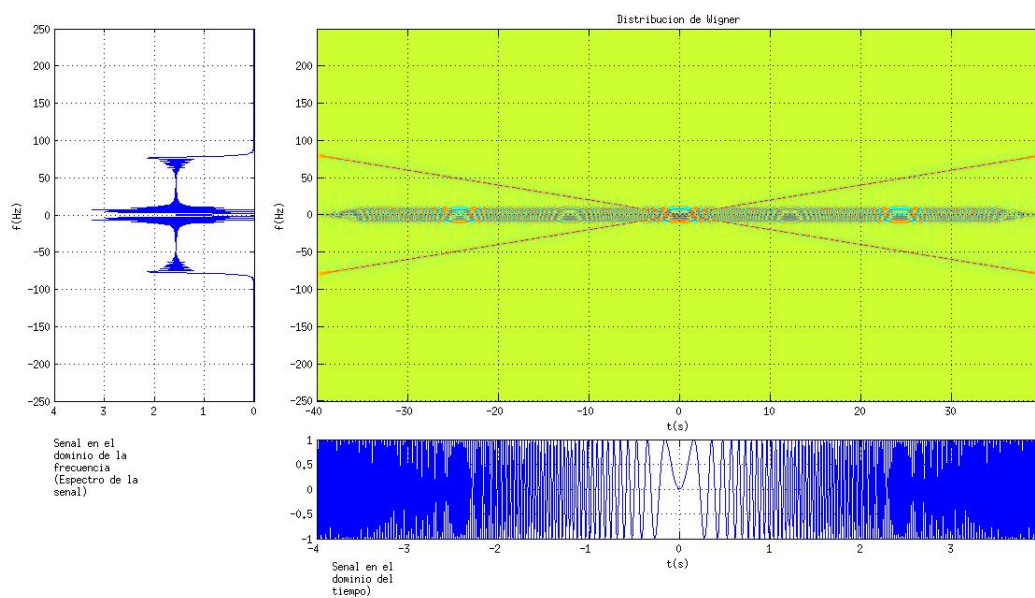


Figura 1.2: Representación de la distribución de Wigner de una señal chirp. Fuente: Autor.

1.3.2. Potencialidades de la distribución de Wigner en la caracterización de perturbaciones de corta duración que afectan la calidad de la energía eléctrica.

A continuación se presentan una serie de señales electricas con perturbaciones de corta duración y su respectiva distribución de Wigner(DW). Estas señales corresponden a simulaciones obtenidas a partir del algoritmo ATP en circuitos IEEE de prueba [15].

En la Figura 1.3 se muestra una señal de corriente con una perturbación de corta duración y su respectiva DW. Se puede ver que la DW permite la detección de la perturbación y esto debido a que hay un cambio en la amplitud mientras dura la perturbación. En la Figura 1.4 se muestra la señal de tensión y su DW, correspondiente a la misma fase de la señal de corriente mostrada en la Figura 1.3. Aquí también se observa una variación de la amplitud en la DW mientras dura la perturbación. En la Figura 1.5 se muestra la señal de potencia instantánea correspondiente a las señales mostradas en las figuras 1.3 y 1.4. Esto permite asociar que la variación en los parámetros de la distribución de Wigner de la señal tiene que ver con una perturbación producida en la señal, en este caso tiene que ver con el cambio en la amplitud de la distribución de Wigner.

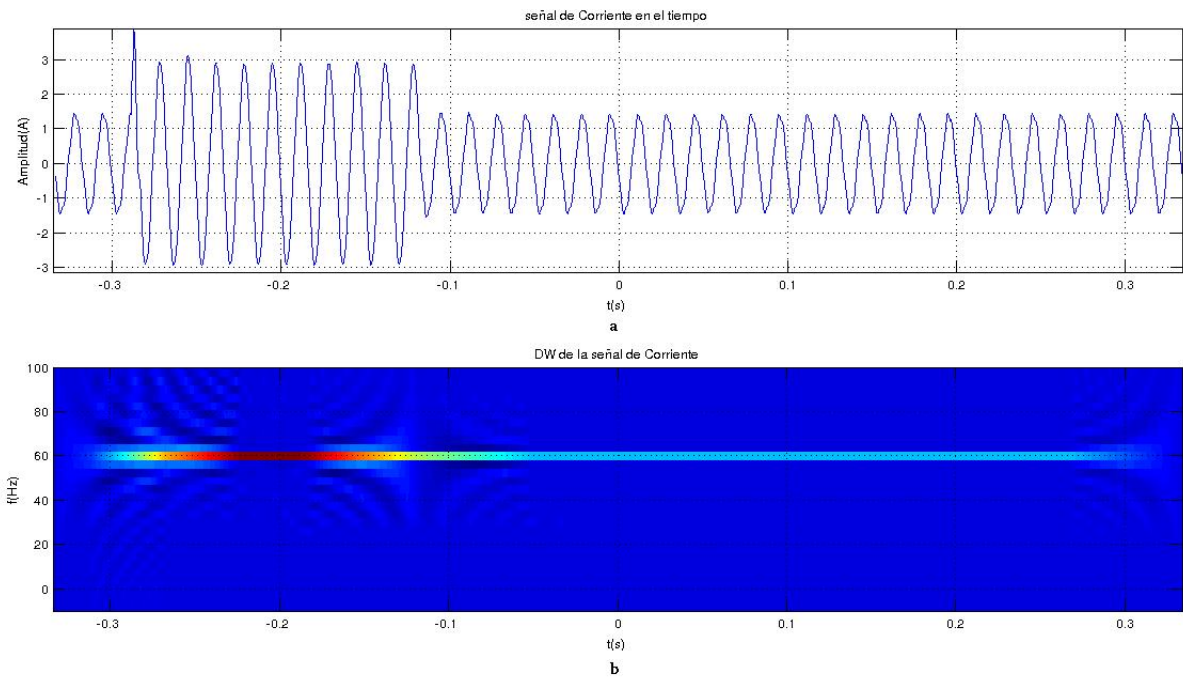


Figura 1.3: Señal de corriente perturbada y su DW. a) Señal de corriente perturbada en el dominio del tiempo. b) DW de la señal de corriente perturbada. Fuente: Autor.

1.3 Distribución de Wigner

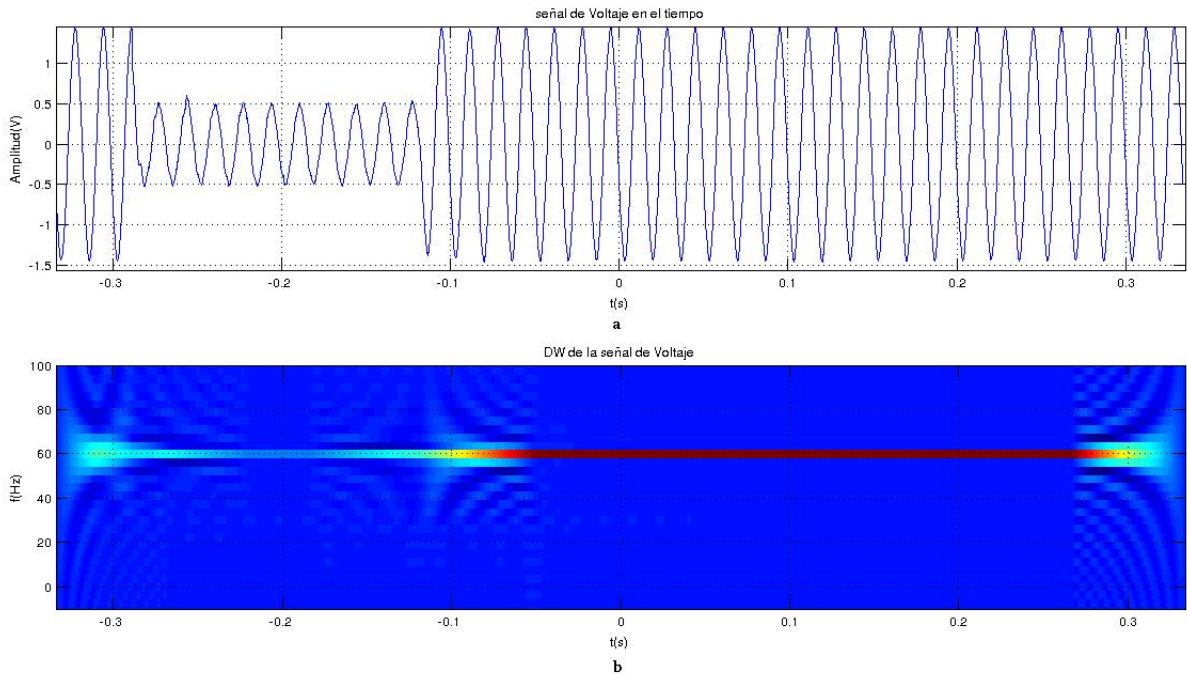


Figura 1.4: Señal de tensión perturbada y su DW. a) Señal de tensión perturbada en el dominio del tiempo. b) DW de la señal de tensión perturbada. Fuente: Autor.

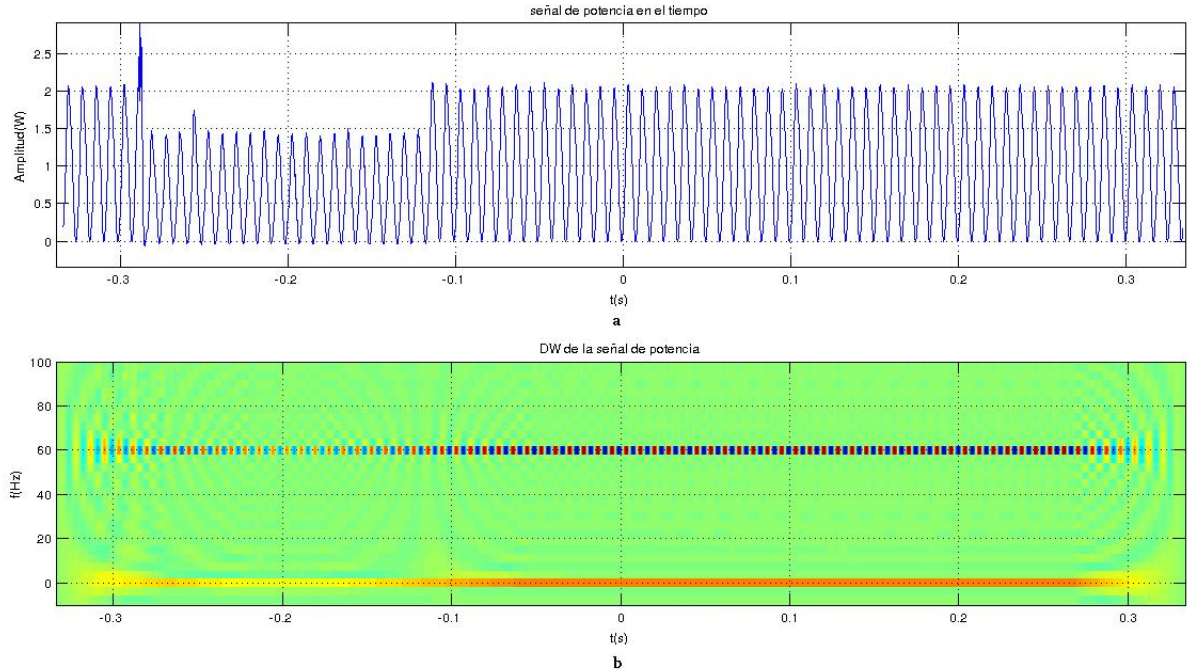


Figura 1.5: Señal de potencia instantánea perturbada y su DW. a) Señal de potencia instantánea perturbada en el dominio del tiempo. b) DW de la señal de potencia instantánea perturbada. Fuente: Autor.

1.3 Distribución de Wigner

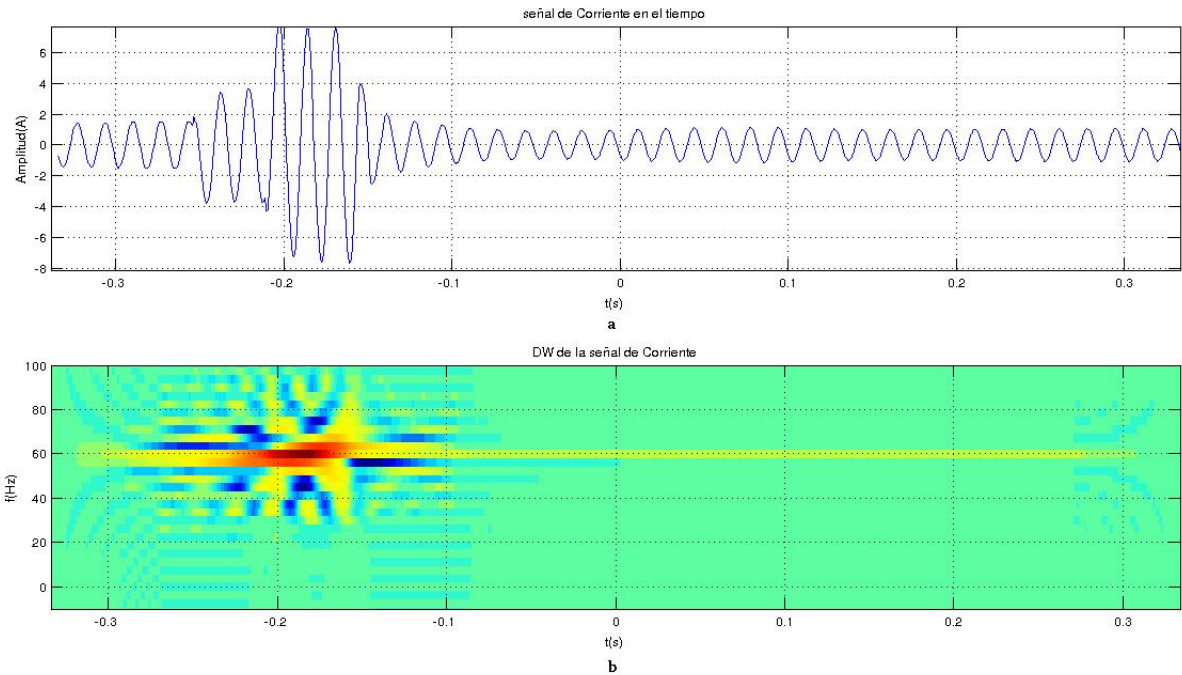


Figura 1.6: Señal de corriente perturbada y su DW. a) Señal de corriente perturbada en el dominio del tiempo. b) DW de la señal de corriente perturbada. Fuente: Autor.

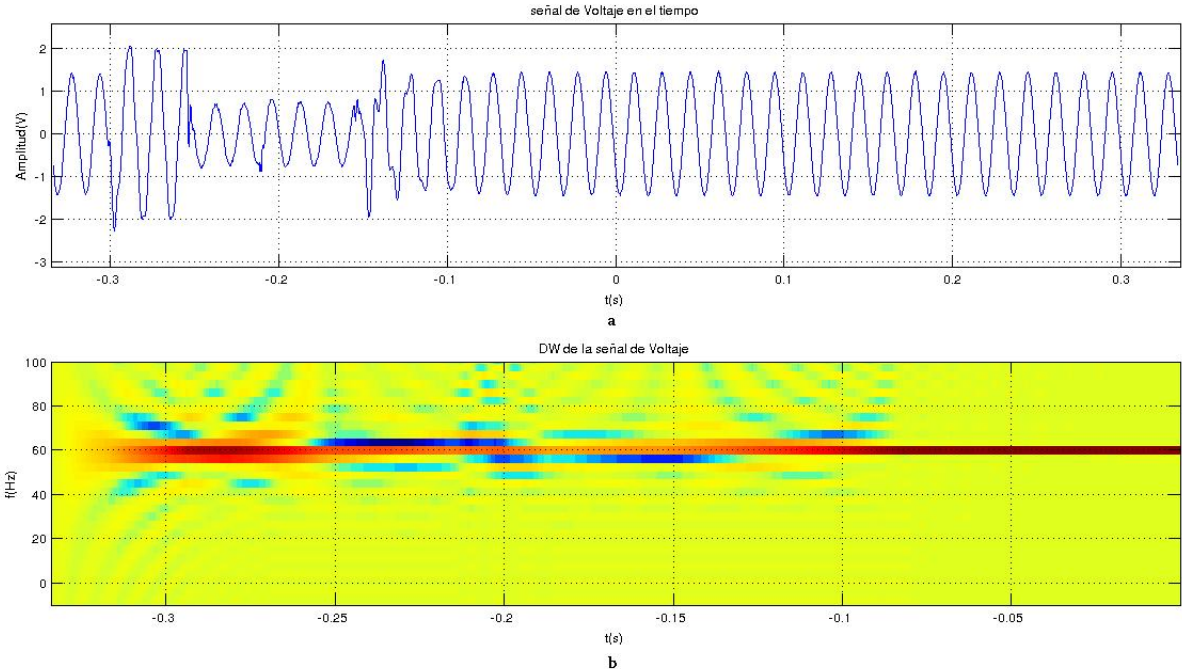


Figura 1.7: Señal de tensión perturbada y su DW. a) Señal de tensión perturbada en el dominio del tiempo. b) DW de la señal de tensión perturbada. Fuente: Autor.

1.3 Distribución de Wigner

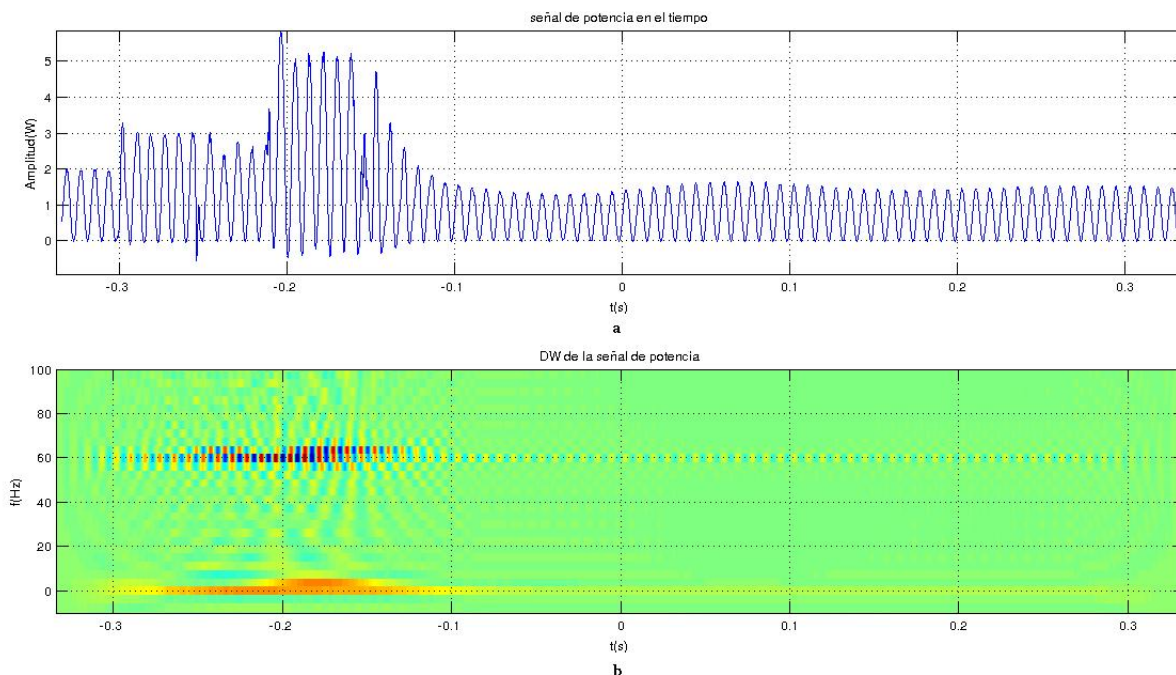


Figura 1.8: Señal de potencia instantánea perturbada y su DW. a) Señal de potencia instantánea perturbada en el dominio del tiempo. b) DW de la señal de potencia instantánea perturbada. Fuente: Autor.

En la Figura 1.6 se muestra una señal de corriente con otra perturbación de corta duración y su respectiva DW. Se puede ver que la DW permite la detección de la perturbación y esto debido a que aparecen frecuencias diferentes a la principal, 60Hz, durante la perturbación. En la Figura 1.7 se muestra la señal de tensión y su DW, correspondiente a la misma fase de la señal de corriente mostrada en la Figura 1.6. En la Figura 1.8 se muestra la señal de potencia instantánea correspondiente a las señales mostradas en las figuras 1.6 y 1.7. Aquí también se observa la aparición de frecuencias diferentes a la principal, 60Hz, durante la perturbación. Esto permite asociar que la variación en los parámetros de la distribución de Wigner de la señal tiene que ver con una perturbación producida en la señal, en este caso tiene que ver con la aparición de componentes frecuenciales distintas a la principal, 60Hz.

En los ejemplos antes descritos es posible también localizar la perturbación en el dominio del tiempo a partir de la distribución de Wigner. Además las señales de potencia dan la posibilidad de hacer el análisis de segmentación tanto en la parte que corresponde a potencia media como a la potencia oscilante.

Los ejemplos mostrados, son solo ejemplos de exploración de la distribución de Wigner sobre otros posibles temas de interés tal como es el de segmentación de señales registradas en sistemas eléctricos de distribución de energía. Esto se hace debido a que la segmentación constituye uno de los procedimientos principales para la evaluación y diagnóstico de la calidad de la energía eléctrica de perturbaciones de corta duración.

1.4. Definición integral de la transformación fraccionaria de Fourier

Se define la transformación de Fourier fraccionaria, basada en [11] como:

$$\mathfrak{F}_\alpha[f](x_\alpha) = F_\alpha(x_\alpha) = C_\alpha e^{i\pi x_\alpha^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\pi x^2 \cot \alpha} e^{-i2\pi x x_\alpha / \sin \alpha} dx, \quad (1.11)$$

donde $C_\alpha = \frac{e^{-i(\mathbb{S}(\sin \alpha)\pi/4 - \alpha/2)}}{\sqrt{\|\sin \alpha\|}}$. La función $\mathbb{S}(\sin \alpha)$, representa el signo de $\sin \alpha$.

Es importante resaltar, que la transformación de Fourier convencional definida como, $\mathfrak{F}[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-i2\pi x x'} dx'$, es un caso particular de la Ecuación 1.11, la cual se obtiene para $\alpha = \frac{\pi}{2}$, de modo que $F = \mathfrak{F}_{\pi/2}[f] = \mathfrak{F}[f]$. Se puede relacionar el parámetro angular α o el orden de transformación a , para relacionar el comportamiento fraccionario de la transformación, tal que $\alpha = a \frac{\pi}{2}$.

Entre las propiedades de la transformación de Fourier fraccionaria [3], cabe resaltar

$$W_{F_\alpha}(x, u) = W_f(x \cos \alpha - u \sin \alpha, x \sin \alpha + u \cos \alpha). \quad (1.12)$$

De la Ecuación 1.12, se deduce [3]:

$$|F_\alpha(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_{F_\alpha}(x, u) du = \int_{-\infty}^{\infty} W_f(x \cos \alpha - u \sin \alpha, x \sin \alpha + u \cos \alpha) du. \quad (1.13)$$

La Ecuación 1.13 se conoce como transformación de Radon–Wigner y representa la proyección de la distribución de Wigner de la función, $W_f(x, u)$, a lo largo del eje x_α que hace un ángulo α con el eje x , tal como se muestra en la Figura 1.9.

1.5. Operador traslación fraccionaria

El operador traslación fraccionaria [17] está definido como:

$$T_{\tau, \alpha}[f](x) = f(x - \tau) e^{-2i\pi\tau(x - \tau/2)\cot \alpha}, \quad (1.14)$$

tal que,

$$\mathfrak{F}_\alpha T_{\tau, \alpha}[f](x) = f_\alpha(x) e^{-\frac{i2\pi\tau x}{\sin \alpha}}. \quad (1.15)$$

Este operador recupera la invariancia del módulo de la transformada de Fourier fraccionaria bajo una traslación fraccionaria en el sentido que $\|\mathfrak{F}_\alpha T_{\tau, \alpha} f\| = \|\mathfrak{F}_\alpha f\|$.

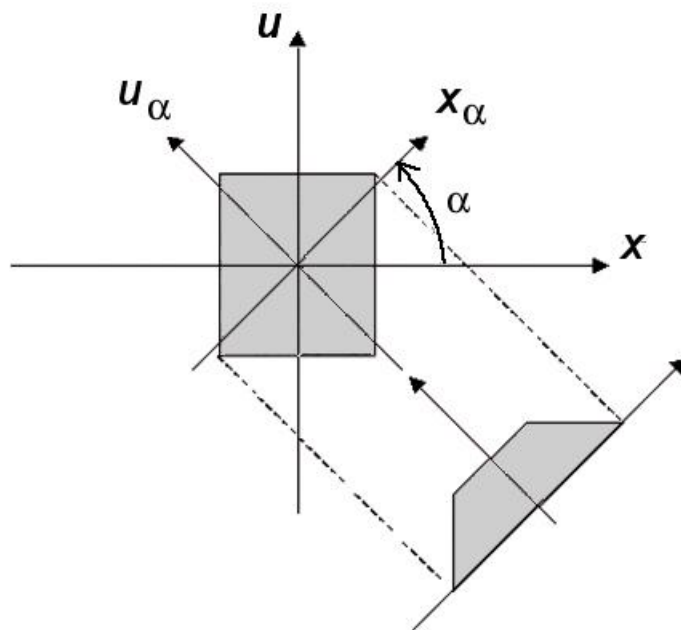


Figura 1.9: Proyección de la distribución de Wigner sobre un eje oblicuo. Fuente: [5].

Se puede observar también que, $T_{\tau; \pi/2} = T_{\tau}$, el operador traslación usual, tal que, $T_{\tau}[f](x) = f(x - \tau)$.

Para un α dado, la transformación $T_{\tau; \alpha} (\tau \in \mathbb{R})$ forma un grupo conmutativo, esto es:

$$T_{\tau'; \alpha} \circ T_{\tau; \alpha} = T_{\tau + \tau'; \alpha}. \tag{1.16}$$

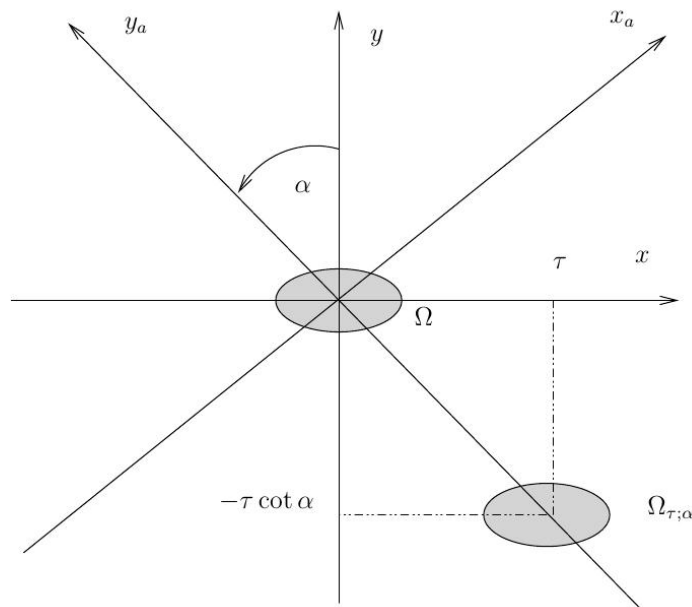


Figura 1.10: El efecto de la traslación fraccionaria sobre la distribución de Wigner-Ville de una función: Ω es el soporte de la DW de f , $\Omega_{\tau; \alpha}$ es el soporte de la DW de $T_{\tau; \alpha} f$. Fuente: [17].

1.6 Convolución fraccionaria

En la Figura 1.10 se muestra el efecto del operador traslación fraccionaria sobre la distribución de Wigner de una señal. En ella se representa de forma detallada que este operador produce una traslación de la distribución de Wigner de la señal a partir de los parámetros α y τ . Esta propiedad es la que permite definir el filtro variante en el tiempo, ya que con ella se pueden definir trayectorias curvas en el espacio de fase de señales, distribución de Wigner, posibilitando así el filtrado a través de éstas.

1.6. Convolución fraccionaria

Se define la convolución fraccionaria [17] como:

$$[f *_{\alpha} g](x) = C_{\alpha} \mathfrak{F}_{-\alpha} [\mathfrak{F}_{\alpha}[f](x') \mathfrak{F}_{\alpha}[g](x') e^{-i\pi x'^2 \cot \alpha}](x). \quad (1.17)$$

En su forma integral se expresa como:

$$\begin{aligned} [f *_{\alpha} g](x) &= C_{\alpha}^2 \int_{\mathbb{R}} f(u) \mathbb{T}_{u;\alpha}[g](x) e^{i\pi u^2 \cot \alpha} du \\ &= C_{\alpha}^2 \int_{\mathbb{R}} f(u) g(x-u) e^{-i2\pi u(x-u) \cot \alpha} du. \end{aligned} \quad (1.18)$$

De esta convolución se puede verificar que:

$$\mathbb{T}_{a;\alpha}[f *_{\alpha} g(x)] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{a;\alpha}[f](u) \mathbb{T}_{u;\alpha}[g](x) e^{i\pi u^2 \cot \alpha} du, \quad (1.19)$$

y

$$\mathbb{T}_{a;\alpha}[f *_{\alpha} g(x)] = \int_{\mathbb{R}} f(u) \mathbb{T}_{u+a;\alpha}[g](x) e^{i\pi u^2 \cot \alpha} du. \quad (1.20)$$

Estas ecuaciones expresan las propiedades de invariancia de la convolución fraccionaria ante el grupo de operadores de traslación fraccionaria, lo cual permite sintetizar las propiedades mostradas en las ecuaciones 1.19 y 1.20, como:

$$\mathbb{T}_{a;\alpha}[f *_{\alpha} g] = (\mathbb{T}_{a;\alpha} f) *_{\alpha} g = f *_{\alpha} (\mathbb{T}_{a;\alpha} g). \quad (1.21)$$

De la Ecuación 1.18 se ve que la convolución convencional es un caso particular de la convolución fraccionaria, la cual se da para $\alpha = \pi/2$ como se muestra en la Ecuación 1.22.

$$\begin{aligned}
 [f *_{\pi/2} g](x) &= C_{\pi/2}^2 \int_{\mathbb{R}} f(u) \mathbb{T}_{u;\pi/2}[g](x) e^{i\pi u^2 \cot \pi/2} du \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(u) g(x-u) du.
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Como un caso particular para un orden de 0,2 se tiene que la convolución fraccionaria entre dos señales corresponde a:

$$[f *_{0,2\pi/2} g](x) = C_{0,2\pi/2}^2 \int_{\mathbb{R}} f(u) g(x-u) e^{-i2\pi u(x-u) \cot 0,2\pi/2} du. \tag{1.23}$$

Dado que $\alpha = a\frac{\pi}{2}$, a representa el orden de la convolución.

Otra propiedad importante de la convolución fraccionaria consiste en:

$$W_{f *_{\alpha} g}(x, u) = W_f \overset{x \cos \alpha - u \sin \alpha}{*} W_g, \tag{1.24}$$

La cual indica que la distribución de Wigner de la convolución fraccionaria entre dos señales puede ser interpretada como la convolución de la distribución de Wigner de estas señales a través de un eje oblicuo en el espacio de fase. El espacio de fase hace referencia a una representación tiempo-frecuencia, en este caso la distribución de Wigner. El eje oblicuo sobre el cual se realiza la convolución corresponde al descrito por la ecuación $x \cos \alpha - u \sin \alpha$, dónde en un ejemplo típico x representaría el eje del tiempo y u el eje de la frecuencia. Este resultado es la base para la definición del filtro que se plantea en este trabajo. A continuación se presenta la demostración de esta importante propiedad.

$$\begin{aligned}
 W[f *_{\alpha} g](x, y) &= \int_{\mathfrak{R}} f *_{\alpha} g \left(x + \frac{\xi}{2} \right) \overline{f *_{\alpha} g \left(x - \frac{\xi}{2} \right)} e^{i2\pi y \xi} d\xi, \\
 f *_{\alpha} g(x) &= \int_{\mathfrak{R}} f(x') g(x-x') e^{-2\pi x'(x-x') \cot \alpha} dx', \\
 W[f *_{\alpha} g](x, y) &= \int_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{R}} f(x') g \left(x + \frac{\xi}{2} - x' \right) e^{-i2\pi x' \left(x + \frac{\xi}{2} - x' \right) \cot \alpha} dx' \\
 &\quad \times \int_{\mathfrak{R}} \overline{f(x'') g \left(x - \frac{\xi}{2} - x'' \right)} e^{i2\pi x'' \left(x - \frac{\xi}{2} - x'' \right) \cot \alpha} dx'' e^{i2\pi y \xi} d\xi, \\
 x' &= x''' + \frac{\xi}{2} \quad x'' = x''' - \frac{\xi}{2} \quad \xi = \xi' + \xi'' \\
 dx' &= \frac{1}{2} d\xi'' \quad dx'' = dx''' \quad d\xi = d\xi'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W[f *_{\alpha} g](x, y) &= \int_{\Re} \int_{\Re} \int_{\Re} f(x') \overline{f(x'')} g\left(x + \frac{\xi}{2} - x''\right) \overline{g\left(x - \frac{\xi}{2} - x''\right)} \\
 &\quad \times e^{-i2\pi x' \left(x + \frac{\xi}{2} - x''\right) \cot \alpha} e^{i2\pi x'' \left(x - \frac{\xi}{2} - x''\right) \cot \alpha} e^{i2\pi y \xi} dx' dx'' d\xi \\
 &= \int_{\Re} \int_{\Re} \int_{\Re} f\left(x''' + \frac{\xi''}{2}\right) \overline{f\left(x''' - \frac{\xi''}{2}\right)} g\left(x + \frac{\xi' + \xi''}{2} - x''' - \frac{\xi''}{2}\right) \\
 &\quad \times \overline{g\left(x - \frac{\xi' + \xi''}{2} - x''' + \frac{\xi''}{2}\right)} e^{-i2\pi \left(x''' + \frac{\xi''}{2}\right) \left(x + \frac{\xi' + \xi''}{2} - x''' - \frac{\xi''}{2}\right) \cot \alpha} \\
 &\quad \times e^{i2\pi \left(x''' - \frac{\xi''}{2}\right) \left(x - \frac{\xi' + \xi''}{2} - x''' + \frac{\xi''}{2}\right) \cot \alpha} e^{i2\pi y (\xi' + \xi'')} \frac{1}{2} d\xi'' dx''' d\xi' \\
 &= \int_{\Re} \int_{\Re} \int_{\Re} f\left(x''' + \frac{\xi''}{2}\right) \overline{f\left(x''' - \frac{\xi''}{2}\right)} g\left(x - x''' + \frac{\xi'}{2}\right) \overline{g\left(x - x''' - \frac{\xi'}{2}\right)} \\
 &\quad \times e^{-i2\pi \left(x''' + \frac{\xi''}{2}\right) \left(x - x''' + \frac{\xi'}{2}\right) \cot \alpha} e^{i2\pi \left(x''' - \frac{\xi''}{2}\right) \left(x - x''' - \frac{\xi'}{2}\right) \cot \alpha} e^{i2\pi y (\xi' + \xi'')} \frac{1}{2} d\xi'' dx''' d\xi'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W[f *_{\alpha} g](x, y) &= \int_{\Re} \int_{\Re} \int_{\Re} f\left(x''' + \frac{\xi''}{2}\right) \overline{f\left(x''' - \frac{\xi''}{2}\right)} g\left(x - x''' + \frac{\xi'}{2}\right) \overline{g\left(x - x''' - \frac{\xi'}{2}\right)} \\
 &\quad \times e^{-i2\pi x''' \xi' \cot \alpha} e^{-i2\pi x \xi'' \cot \alpha} e^{i2\pi x''' \xi'' \cot \alpha} e^{i2\pi y (\xi' + \xi'')} \frac{1}{2} d\xi'' dx''' d\xi' \\
 &= \int_{\Re} \int_{\Re} f\left(x''' + \frac{\xi''}{2}\right) \overline{f\left(x''' - \frac{\xi''}{2}\right)} e^{i2\pi \xi'' (y - x \cot \alpha + x''' \cot \alpha)} \frac{1}{2} d\xi'' \\
 &\quad \times \int_{\Re} g\left(x - x''' + \frac{\xi'}{2}\right) \overline{g\left(x - x''' - \frac{\xi'}{2}\right)} e^{i2\pi \xi' (y - x''' \cot \alpha)} d\xi' dx''' \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Re} W[f](x''', y - x \cot \alpha + x''' \cot \alpha) W[g](x - x''', y - x''' \cot \alpha) dx'''.
 \end{aligned}$$

Este último resultado demuestra que la convolución fraccionaria entre dos señales es la convolución de la distribución de Wigner de las señales a través de un eje oblicuo. Si se reduce el análisis a uno temporal, la variable x representaría el tiempo y la variable y la frecuencia.

En la Figura 1.11 se muestra la convolución fraccionaria entre dos señales rectangulares de igual duración a diferentes ordenes. Cabe resaltar que en la Figura 1.11, solo se representa la magnitud del resultado de la convolución fraccionaria. Como puede observarse en la Figura 1.11 cuando el orden de la convolución fraccionaria es 1, el resultado de la convolución fraccionaria es una figura triangular de duración igual al doble del ancho de la señal rectangular. En los otros casos no hay una interpretación directa sobre lo que esos resultados significan.

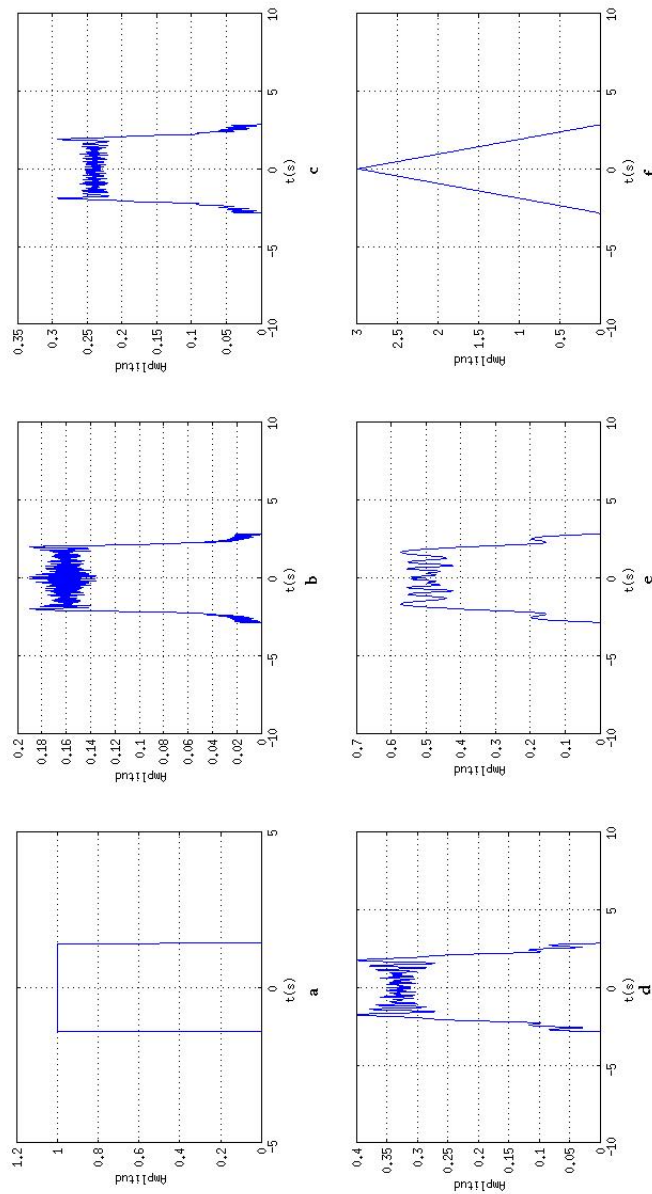


Figura 1.11: Convolución fraccionaria de dos funciones rectángulos a diferentes ordenes. a) Función rectángulo, b) Convolución a orden 0,2, c) Convolución a orden 0,4, d) Convolución a orden 0,6 e) Convolución a orden 0,8 f) Convolución a orden 1. Fuente: Autor.

Capítulo 2

HERRAMIENTAS CONVENCIONALES PARA EL TRATAMIENTO DE SEÑALES

En este capítulo se analizan las respuestas de filtros lineales e invariantes en el tiempo ante diferentes señales de entrada para mostrar como se afecta la respuesta de estos filtros cuando las señales de entrada son variantes.

2.1. Pautas para el diseño de filtros lineales e invariantes en el tiempo(LIT)

Convencionalmente se hace uso de de la teoría de Fourier para el diseño de filtros lineales e invariantes en el tiempo y todo parte de un esquema sencillo, mostrado en la Figura 2.1, donde la relación entrada salida en el tiempo esta dado por $y(t) = h(t) * f(t)$ y en frecuencia por: $Y(f) = H(f)F(f)$. Las funciones $f(t), y(t)$ y $h(t)$ son señales en el tiempo y $F(f), Y(f)$ y $H(f)$ son sus transformadas de Fourier respectivamente. Este modelado matemático es realizable sólo en sistemas lineales e invariantes en el tiempo dónde la respuesta al mpulso del sistema lo caracteriza completamente.

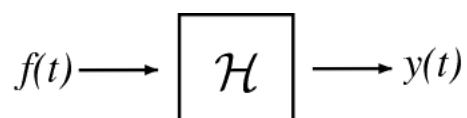


Figura 2.1: Diagrama qu representa la relación entrada salida mediante la respuesta al impulso H.
Fuente: Autor.

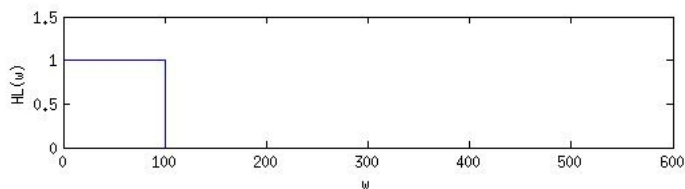
A partir del concepto de la respuesta al impulso de sistemas, se diseñan filtros lineales e invariantes en el tiempo, que se clasifican en: filtros pasabajas, filtros pasaaltas, filtros pasabandas y filtros supresores de banda. Su descripción ídeal en el dominio de la frecuencia es mostrada en la Figura 2.2. Dado que

2.1 Pautas para el diseño de filtros lineales e invariantes en el tiempo(LIT)

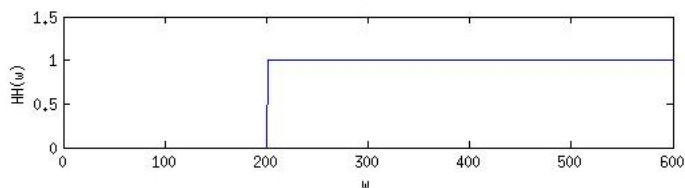
estos filtros son ideales, no hay forma de implementarlos, así que lo que se propone como solución son aproximaciones, tal es el caso de los filtros, Chebyshev, Butterworth entre otros. Estos filtros pueden ser implementados de forma analógica o digital.

El diseño de los filtros concebidos para sistemas lineales e invariantes en el tiempo se hace a partir del concepto de la función de transferencia (transformada de Laplace de la relación entre la señal de entrada y la señal de salida del sistema), dependiendo de las características que se quiera de filtrado como: frecuencias de corte, frecuencia de rechazo entre otras. Lo anterior define los polos y los ceros de la función de transferencia. Generalmente las características deseadas de este tipo de filtros se relacionan con los polos y ceros de la función de transferencia. Los polos son los valores de la variable s , variable de la transformada de Laplace, en los cuales la función de transferencia se hace infinita y los ceros donde la función de transferencia se hace cero. Así que grosso modo el diseño consiste en definir previamente las características que se quieren del filtro y luego asociarlas a la ubicación de polos y ceros de la función de transferencia en el dominio de Laplace.

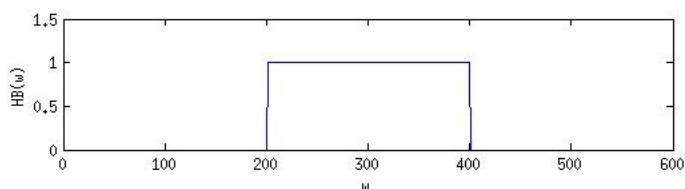
FILTRO PASA BAJA



FILTRO PASA ALTA



FILTRO PASA BANDA



FILTRO SUPRESOR DE BANDA

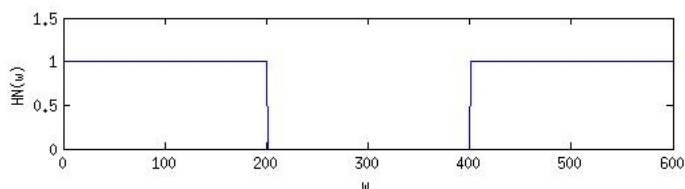
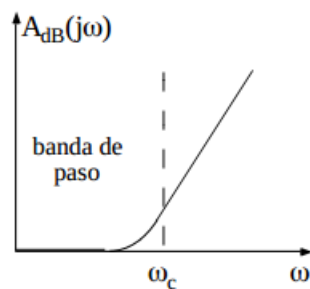


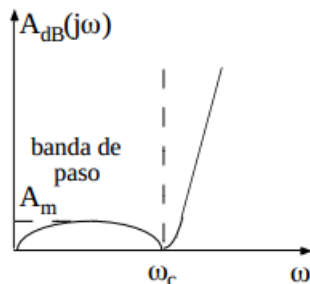
Figura 2.2: Filtros ideales. Fuente: Autor.

2.1 Pautas para el diseño de filtros lineales e invariantes en el tiempo(LIT)



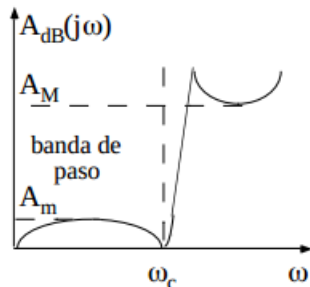
Respuesta Butterworth

La atenuación es mínima en la banda de paso, pero crece lentamente fuera de ella.



Respuesta Chebyshev

La atenuación crece más rápidamente fuera de la banda de paso, pero hay cierta atenuación (rizado) en ésta, con un valor máximo A_m .



Respuesta Cauer (elíptica)

La atenuación crece todavía más rápidamente fuera de la banda de paso, pero hay cierta atenuación (rizado) en esa zona, con un valor mínimo A_M .

Figura 2.3: Características en la respuesta de algunos filtros convencionales.

Fuente:[8]

El número de polos y ceros indica el orden del filtro y su valor determina la características del filtro, como su respuesta en frecuencia y estabilidad. El orden de un filtro describe el grado de aceptación o rechazo de frecuencias por arriba o por debajo, de la respectiva frecuencia de corte. Un filtro de primer orden, presentará una atenuación de 20dB/década. Un filtro de segundo orden tendría el doble de pendiente (representado en una escala logarítmica). Esto se relaciona con los polos y ceros: cada polo simple hace que la pendiente disminuya con 20dB/década y cada cero simple que crezca 20dB/década.

En la Figura 2.3 se muestran algunas características de los filtros convencionales, para un filtro pasabaja. Aquí Por ejemplo se ve que al querer aumentar la atenuación fuera de la banda de paso aparecen efectos no deseados, como es el rizado tanto en la banda de paso como fuera de esta, es decir, al querer mejorar una de las características del filtro se desmejora otra. Esto también es aplicable para los otros filtros: pasaalta, pasabanda y supresor de banda.

2.2. Respuesta de filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que no varían con el tiempo

El filtrado lineal e invariante en el tiempo resulta óptimo cuando la señal y el ruido no se superponen, ya sea en el dominio del tiempo o la frecuencia. Cuando la señal se superpone con el ruido en ambos dominios, tiempo y frecuencia, lo máximo que se logra es atenuar el ruido fuera de la banda de paso, aumentando la relación señal a ruido, pero no da la posibilidad de suprimirlo completamente.

A continuación se muestra un ejemplo en el cual el filtrado lineal e invariante en el tiempo ofrece resultados satisfactorios. En los procedimientos de filtrado mostrados de aquí en adelante, el espectro representado será el correspondiente al de la señal analítica de la señal (espectro en frecuencia solo para frecuencias positivas), esto con el fin de mejorar la visualización de los resultados y el procedimiento de filtrado.

Lo que se busca con este ejemplo es mostrar como se comporta el filtrado lineal e invariante en el tiempo al ser aplicado sobre una señal que consta de dos clases de ruidos, uno que se superpone a la señal, cuya amplitud no es considerable respecto de la señal, y otro que no se superpone a la señal en el dominio de la frecuencia, estos han sido los únicos criterios considerados a la hora de definir el ruido en esta señal. Con este ejemplo se intenta evaluar el comportamiento del filtrado lineal e invariante en el tiempo ante estas dos clases de ruido en particular, uno que se superpone a la señal y otro que no.

En la Figura 2.4 se muestra una señal (Señal 1) de la forma $\Re[e^{-20t^2} e^{i36\pi t}]$ con su espectro en frecuencia. En la Figura 2.6 se muestra la Señal 1 afectada por un ruido, la expresión de esta señal tiene la forma: $x_{in}(t) = \Re[e^{-20t^2} e^{i36\pi t} + e^{-40t^2} e^{i16\pi t} + e^{-30t^2} e^{i60\pi t} + n]$. Las componentes que acompañan a la Señal 1 representan el ruido donde n es una señal de valores aleatorios con distribución normal de media 0 y desviación standard de 0,05, generada con el algoritmo *randn* de matlab. La señal ruido se ilustra en la Figura 2.5 y en ella se aprecian dos tipos de ruido: uno coloreado a las frecuencias de 8Hz y 30Hz y otro aleatorio determinado por la función n .

En la Figura 2.7 se muestran los filtros utilizados para filtrar la señal de la Figura 2.6. Se utilizaron los algoritmos de matlab *chevy1* y *butter* para definir estos filtros. Los criterios de diseño fueron las frecuencias de corte, 15Hz y 21Hz, y que la atenuación creciera rápidamente fuera de la banda de paso, por eso se escogieron filtros de orden 6.

2.2 Respuesta de filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que no varían con el tiempo

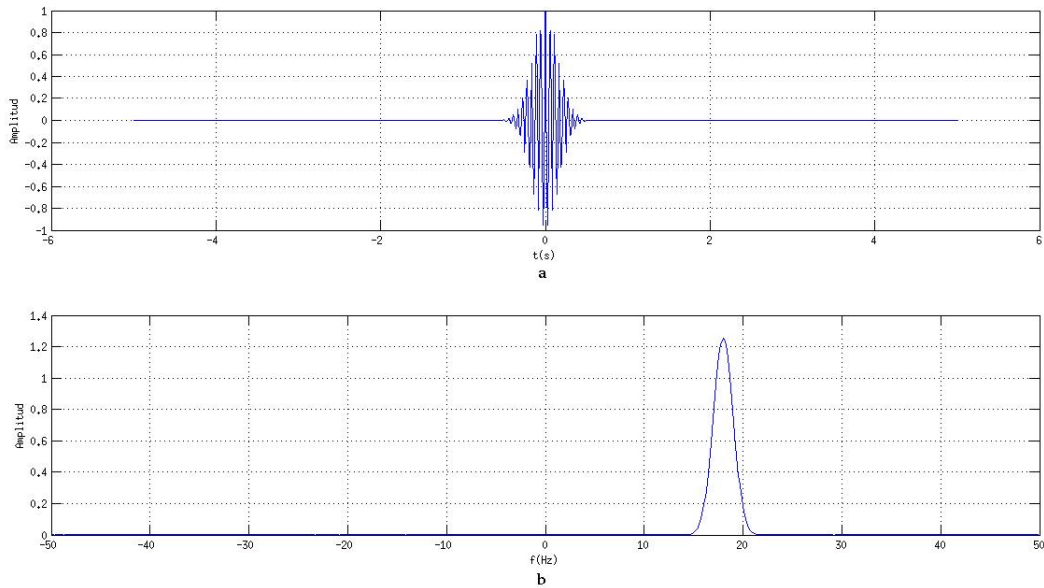


Figura 2.4: Características de la Señal 1 en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Señal real sin ruido en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. Fuente:Autor.

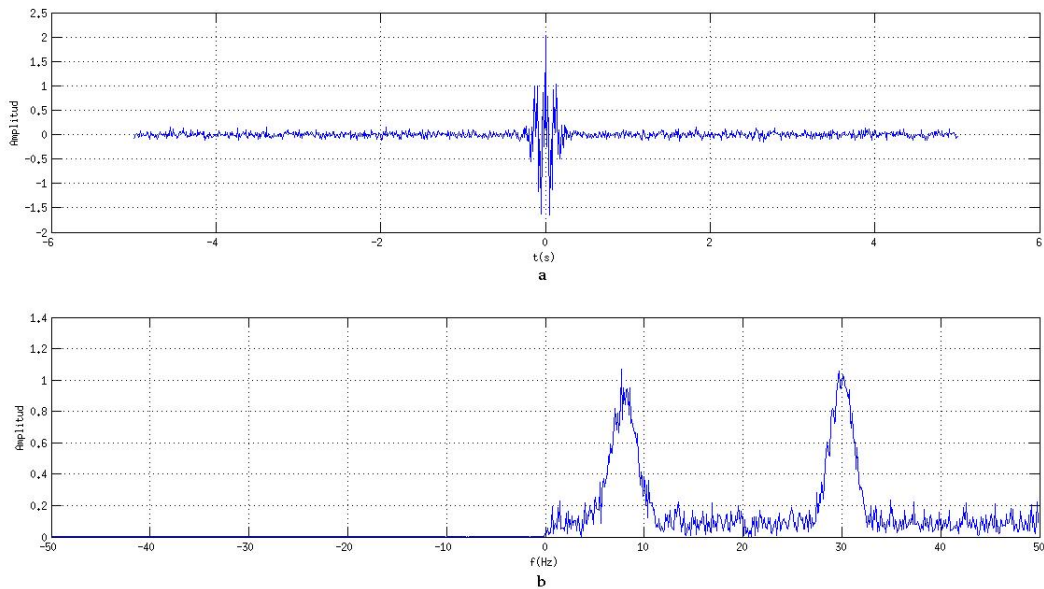


Figura 2.5: Características del ruido que se le adiciona a la Señal 1 en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Comportamiento del ruido en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal de ruido. Fuente:Autor.

2.2 Respuesta de filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que no varían con el tiempo

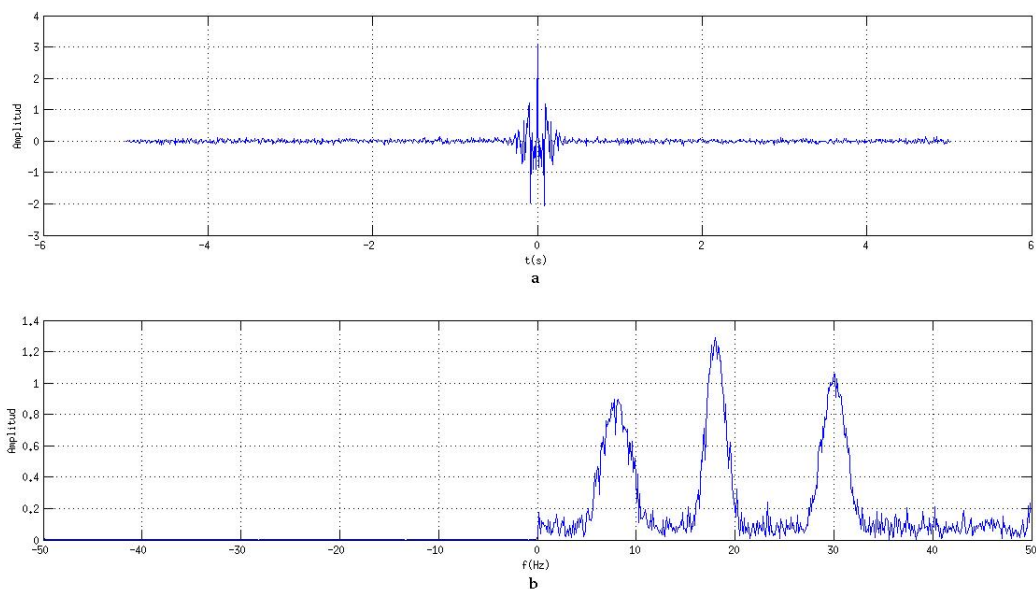


Figura 2.6: Características de la Señal 1 con ruido en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Señal real afectada por el ruido, en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal afectada por el ruido. Fuente:Autor.

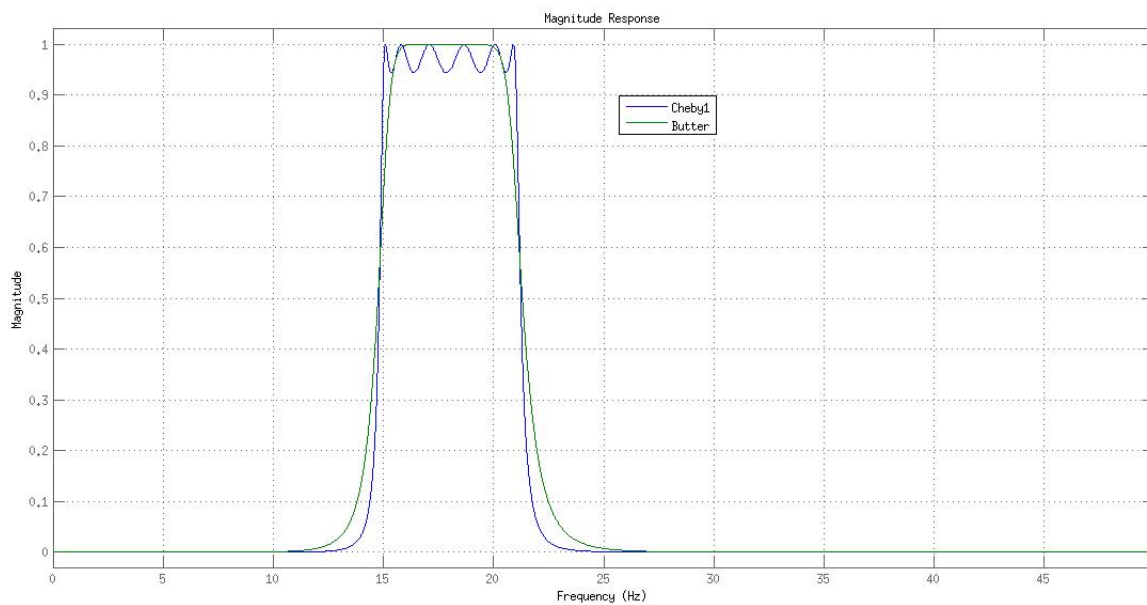


Figura 2.7: Respuesta en frecuencia de los filtros de Butterworth y Chebyshev tipo 1 de orden 6 utilizados para filtrar la señal mostrada en la Figura 2.6.Fuente:Autor.

2.2 Respuesta de filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que no varían con el tiempo

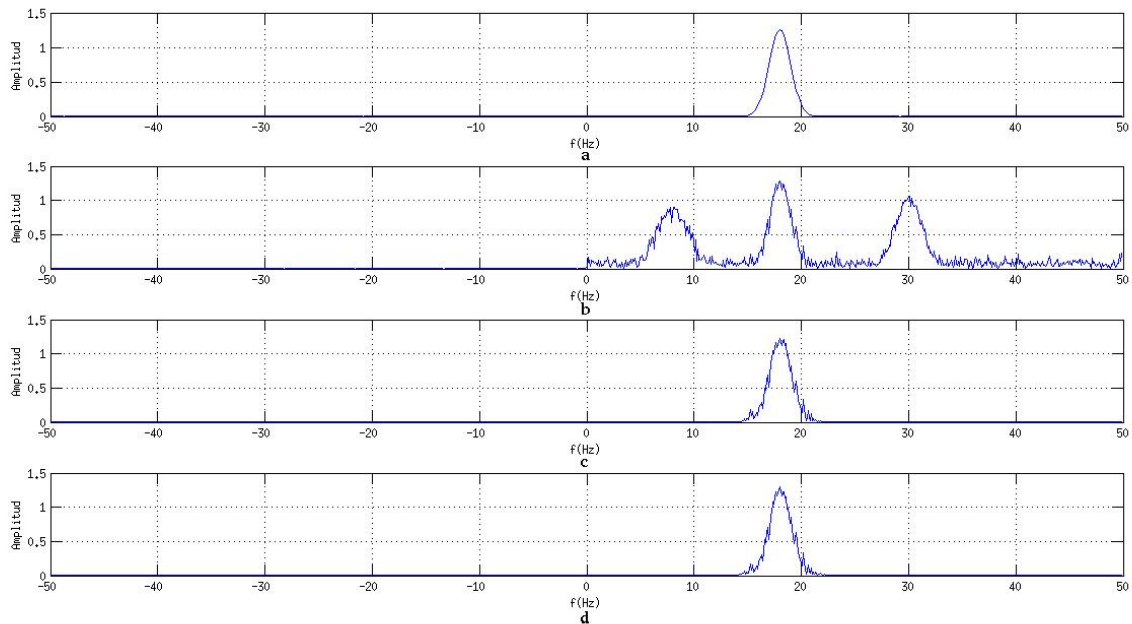


Figura 2.8: Respuesta en el dominio de la frecuencia de las señales de entrada y salida a los filtros de Butterworth y Chebyshev1. a) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. b) Espectro en frecuencia de la señal con ruido. c) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Chebyshev tipo 1 de orden 6 para la señal de entrada con ruido. d) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Butterworth de orden 6 para la señal de entrada con ruido. Fuente:Autor.

En las figuras 2.8 y 2.9 se muestran los resultados del filtrado en el dominio de la frecuencia y el tiempo respectivamente. Se observa de estas figuras que el resultado obtenido es óptimo en cuanto a que se logra separar las componentes de ruido que no se superponen a la señal, pero en lo que tiene que ver con el ruido que se superpone a la señal (señal aleatoria), lo máximo que se logró fue una atenuación de este fuera de la banda de paso del filtro.

Este ejemplo deja claro como es el comportamiento de los filtros lineales e invariantes en el tiempo ante dos tipos particulares de ruido, uno que se superpone a la señal y otro que no, en el dominio de la frecuencia. En el caso en que no se superpone el ruido con la señal esta técnica ofrece la posibilidad de separar muy eficazmente el ruido de la señal y en el caso que se superpone el ruido con la señal, lo máximo que ofrece esta técnica de filtrado es una atenuación del ruido, algo conveniente ya que aumentaría la razón señal a ruido.

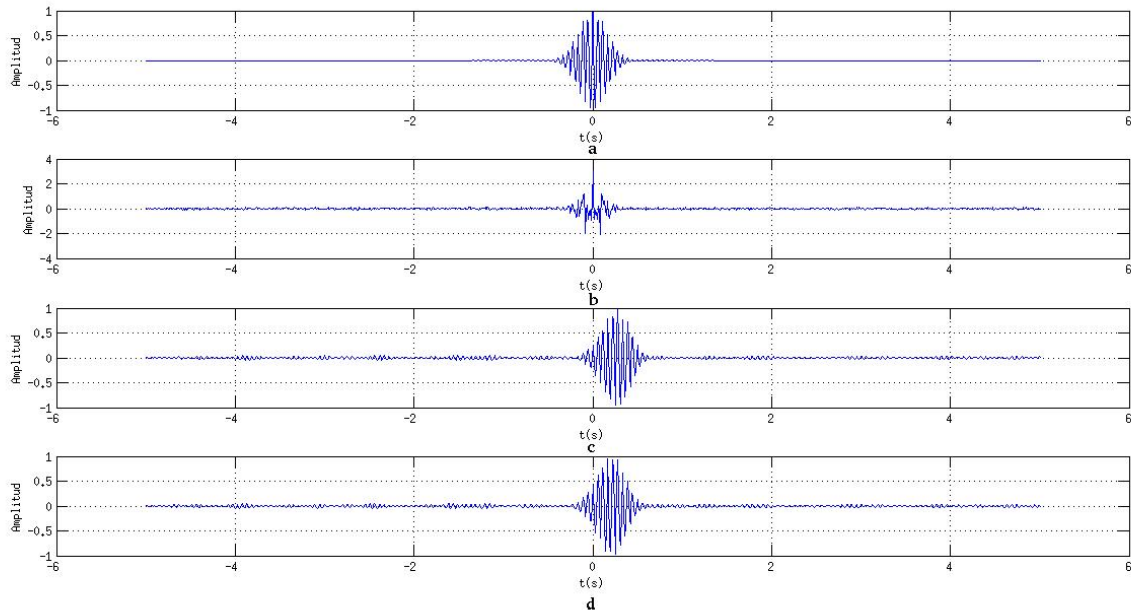


Figura 2.9: Respuesta en el dominio del tiempo de las señales de entrada y salida a los filtros de Butterworth y Chebyshev1. a) Señal sin ruido en el dominio del tiempo. b) Señal con ruido en el dominio del tiempo. c) Señal de salida del filtro de Chebyshev tipo 1 de orden 6 para la señal de entrada con ruido, en el dominio del tiempo. d) Señal de salida del filtro de Butterworth de orden 6 para la señal de entrada con ruido, en el dominio del tiempo. Fuente:Autor.

2.3. Respuesta de los filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que varían en el tiempo

A continuación se muestran algunos ejemplos en los cuales los filtros lineales e invariantes en el tiempo, como el filtro de Chebyshev y Butterworth, no ofrecen resultados satisfactorios. Los ruidos tratados en los ejemplos a continuación tienen unas características bien específicas, diferentes por ejemplo a las del ruido blanco, coloreado o gaussiano, para mostrar con unos ejemplos como las técnicas de filtrado lineal e invariante en el tiempo no ofrecen resultados satisfactorios, cuando las señales a filtrar son variantes en el tiempo.

En la Figura 2.10 se muestra una señal chirp (Señal 2), de la forma $\text{sen}(5\pi t^2)$ con su espectro en frecuencia. En la Figura 2.12 se muestra la Señal 2 afectada por un ruido, la expresión de la señal tiene la forma:

$$x_{in}(t) = \text{sen}(5\pi t^2) + \mathfrak{F}_{0,5\pi/2}[e^{-80(t-3)^2}] + \mathfrak{F}_{0,1\pi/2}[e^{-80(t-3)^2}] + \mathfrak{F}_{-0,5\pi/2}[e^{-80(t-3)^2}] + \mathfrak{F}_{-0,1\pi/2}[e^{-80(t-3)^2}],$$

donde $\mathfrak{F}_{a\pi/2}$ representa la transformación de Fourier fraccionaria de orden a . Las componentes que acompañan a la expresión $\text{sen}(5\pi t^2)$ representan el ruido. El ruido presente en esta señal es definido de forma tal que se superpone a la señal en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia de manera

2.3 Respuesta de los filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que varían en el tiempo

que cambia drásticamente la morfología de la señal pero que en el espacio de fase, distribución tiempo-frecuencia, la señal no se superpone al ruido. Estas son las características bajo las cuales se definió el ruido que se adiciona a la Señal 2. Este ruido se ilustra en la Figura 2.11, en ella se puede ver como este ruido varía en el dominio del tiempo.

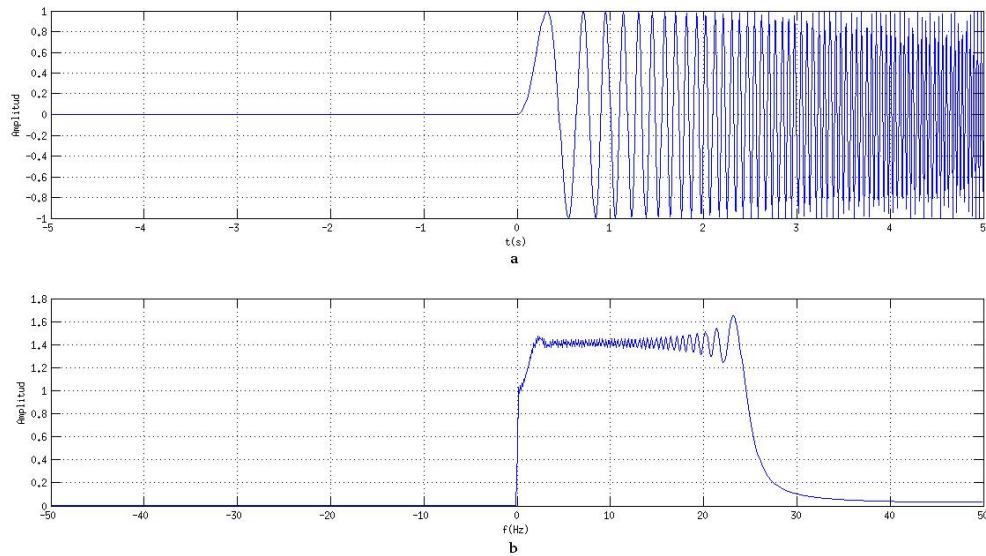


Figura 2.10: Características de la Señal 2 en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Señal real en el dominio del tiempo sin ruido. b) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. Fuente: Autor.

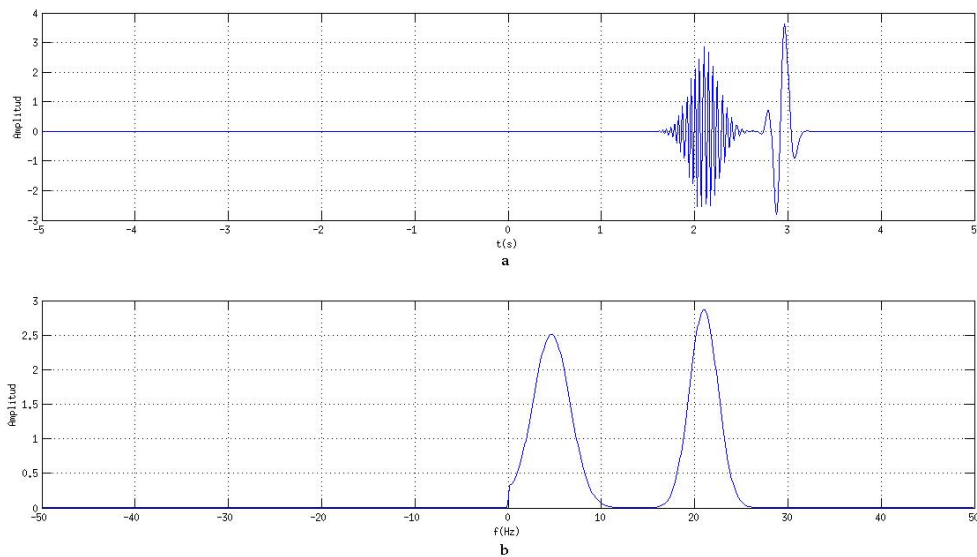


Figura 2.11: Características del ruido que se le adiciona a la Señal 2 en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Comportamiento del ruido en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal de ruido. Fuente: Autor.

2.3 Respuesta de los filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que varían en el tiempo

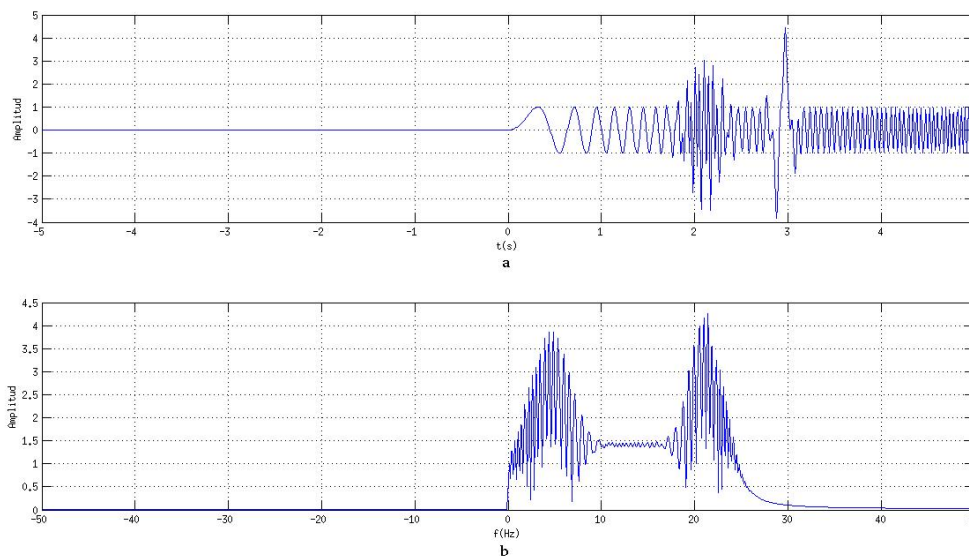


Figura 2.12: Características de la Señal 2 con ruido en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Señal real afectada por el ruido, en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal afectada por el ruido. Fuente: Autor.

Para intentar separar el ruido de la señal, se utilizarán técnicas de filtrado lineales e invariantes en el tiempo, en este caso el filtro de Chebyshev tipo 1 y el filtro de Butterworth. Dado que la señal se superpone con el ruido en todo el espectro, sobre todo en los extremos, como se ve en la Figura 2.12, parte b, se decide atenuar estas componentes ya que no se pueden retirar de la señal debido a que esta parte del espectro contiene información de la señal. Para ello se plantean un filtro de Chebyshev tipo 1 y un filtro de Butterworth, ambos de orden 2. Estos filtros se obtienen a partir de los algoritmos de matlab *chevy1* y *butter*. Los filtros utilizados se muestran en la Figura 2.13. Para el diseño de estos filtros solo se considero las frecuencias de corte, de 7,5Hz y 15Hz, que se obtuvieron a partir del espectro de la señal y se seleccionó el orden 2 para que el decaimiento fuese débil y no abrupto, permitiendo así atenuar las componentes en las cuales el ruido distorsiona considerablemente el espectro de la señal.

Ya en las figuras 2.14 y 2.15, se muestran los resultados de aplicar los filtros desarrollados a la señal afectada por el ruido. Se muestran los resultados obtenidos en frecuencia y en el tiempo Figura 2.14 y Figura 2.15 respectivamente. Estas figuras muestran que los resultados obtenidos al aplicar filtros lineales e invariantes en el tiempo, a este problema en particular, no son los mejores, claramente los filtros no ofrecen una estimación apropiada de la señal. Esto pone en evidencia que el comportamiento de filtros lineales e invariantes en el tiempo ante ruidos como los descritos en este ejemplo no es el deseado, la técnica presenta dificultades para atenuar estas componentes.

Tengase en cuenta que aquí no se ha sido riguroso en el diseño de los filtros utilizados, pero dada la característica del ruido los resultados no pueden ser mejorados substancialmente respecto a los aquí mostrados.

2.3 Respuesta de los filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que varían en el tiempo

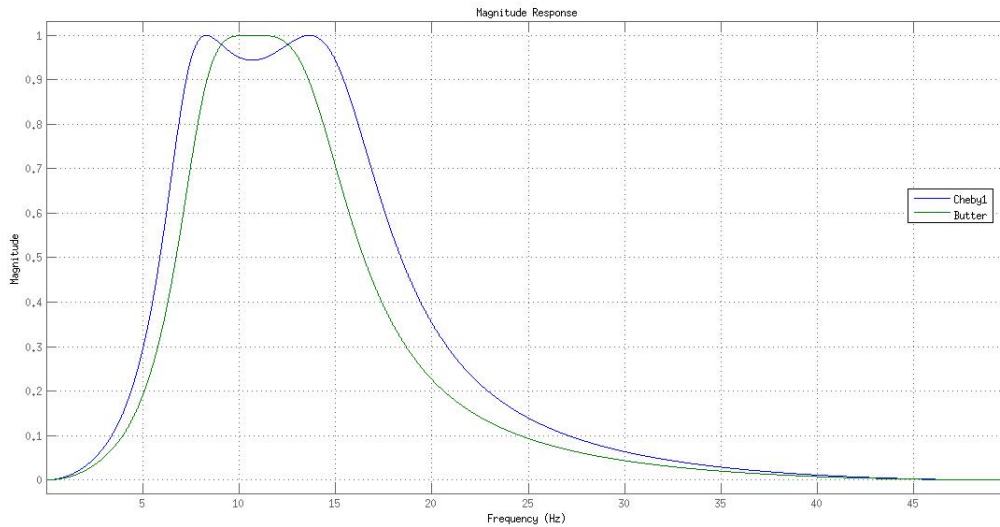


Figura 2.13: Respuesta en frecuencia de los filtros de Butterworth y Chebyshev tipo 1 de orden 2 utilizados para filtrar la señal mostrada en la Figura 2.12. Fuente: Autor.

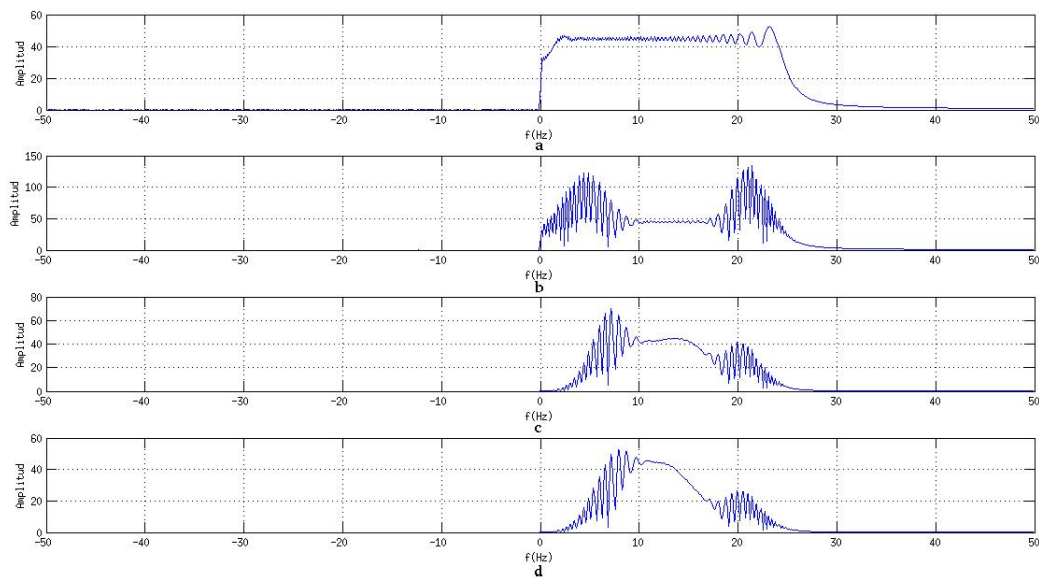


Figura 2.14: Respuesta en el dominio de la frecuencia de las señales de entrada y salida a los filtros de Chebyshev y Butterworth. a) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. b) Espectro en frecuencia de la señal con ruido. c) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Chebyshev tipo 1 de orden 2 para la señal de entrada con ruido. d) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Butterworth de orden 2 para la señal de entrada con ruido. Fuente: Autor.

2.3 Respuesta de los filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que varían en el tiempo

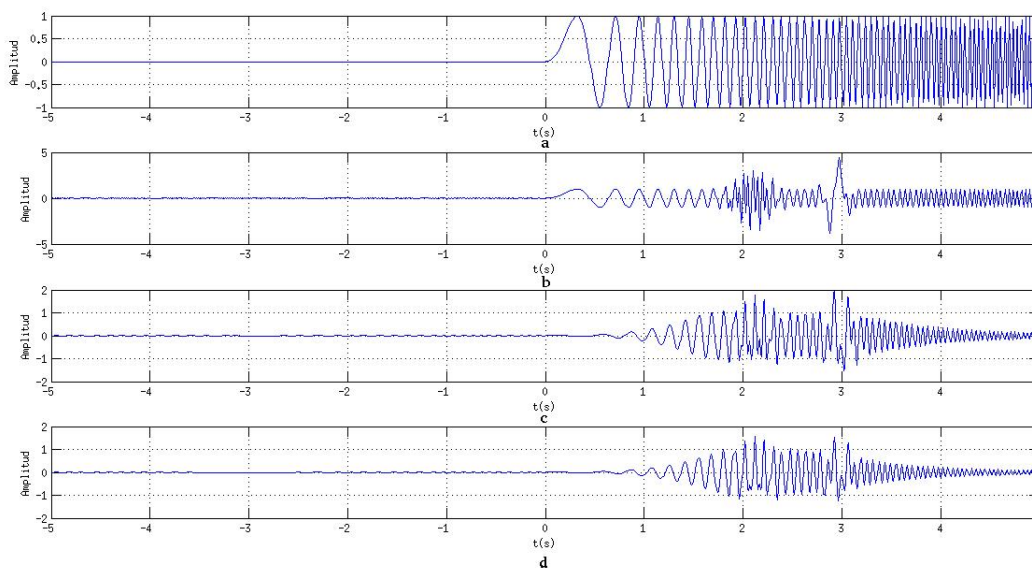


Figura 2.15: Respuesta en el dominio del tiempo de las señales de entrada y salida a los filtros de Chebyshev y Butterworth. a) Señal sin ruido en el dominio del tiempo. b) Señal con ruido en el dominio del tiempo. c) Señal de salida en el dominio del tiempo del filtro de Chebyshev tipo 1 de orden 2 para la señal de entrada con ruido. d) Señal de salida en el dominio del tiempo del filtro de Butterworth de orden 2 para la señal de entrada con ruido. Fuente:Autor.

A continuación se muestra otro ejemplo de filtrado haciendo uso de las herramientas convencionales.

En la Figura 2.16 se muestra la señal $x(t) = \Re\{T_{2,5;-0,6\pi/2}\{e^{-5t^2}\}\}$ (Señal 3), con su espectro en frecuencia, donde $T_{2,5;-0,6\pi/2}$ representa el operador traslación fraccionaria definido previamente. En la Figura 2.18 se muestra la señal $x(t)$ afectada por un ruido y su espectro, la expresión de esta señal corresponde a:

$x_{in}(t) = \Re[\Re\{T_{2,5;-0,6\pi/2}e^{-5t^2} + n(t-1) + n(t-4)\}]$, con $n(t) = 20e^{i30tLn(t+4)}$, donde $\Re[\dots]$ representa el operador señal analítica y $\Re[\dots]$ parte real. Las componentes $n(t-1)$ y $n(t-4)$ representan el ruido de la señal y la expresión $T_{2,5;-0,6\pi/2}\{e^{-5t^2}\}$ representa la señal analítica de la señal sin ruido. Las características de este ruido son similares a las definidas para la Señal 2, se busca que el ruido se superponga a la señal en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia cambiando drásticamente su morfología pero que en una distribución tiempo-frecuencia, espacio de fase, la señal y el ruido no se superpongan. La Figura 2.17 muestra las características de la señal de ruido en los dominios del tiempo y la frecuencia, donde se aprecia la variación de esta señal con el tiempo.

Como se observa de la Figura 2.18, en este ejemplo el ruido se superpone a la señal en ambos dominios, por lo que el comportamiento del filtro debe ser tal que presente un decaimiento lo más pronunciado posible, es decir que la respuesta del filtro sea tan parecida como se pueda a la de un filtro ideal, de forma que al aplicar el filtro solo pasen las componentes que están en el rango de frecuencias de la señal original. A partir de estas consideraciones se seleccionaron las frecuencias de cortes, 5,5Hz y 8,5Hz, para

2.3 Respuesta de los filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que varían en el tiempo

el diseño de los filtro, los cuales se plantearón como filtro de Chevyshev tipo 1 y Butterworth de orden 6, cuya respuesta en frecuencia se muestra en la Figura 2.19.

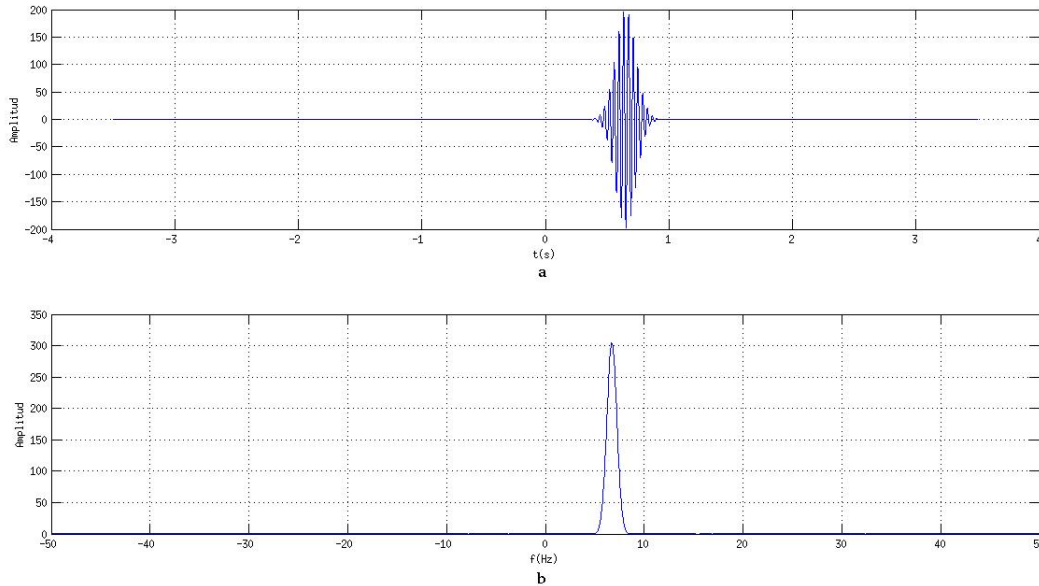


Figura 2.16: Características de la Señal 3 en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Señal real en el dominio del tiempo sin ruido. b) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. Fuente:Autor. Fuente:Autor.

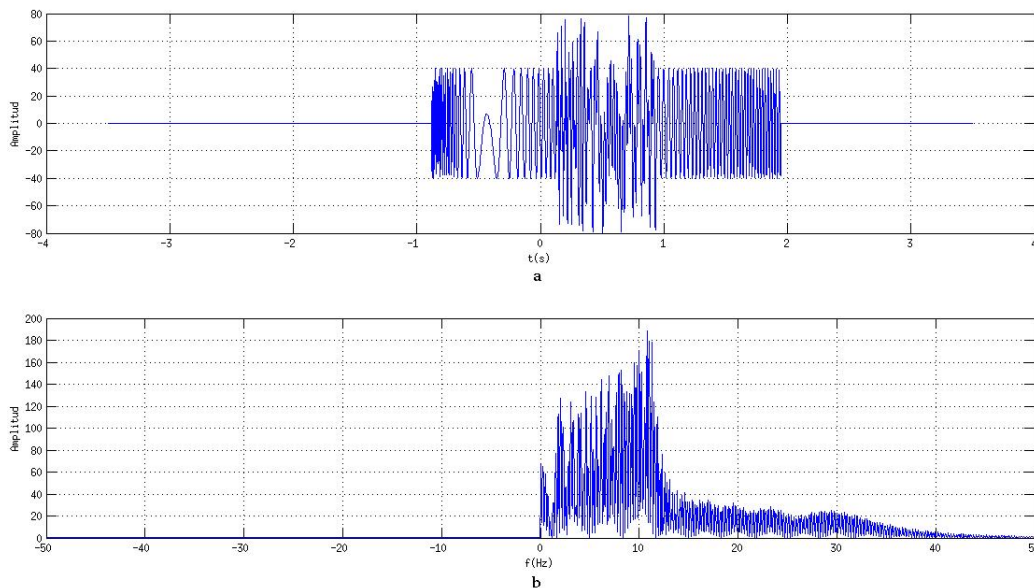


Figura 2.17: Características del ruido que se le adiciona a la Señal 3 en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Comportamiento del ruido en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal de ruido. Fuente:Autor.

2.3 Respuesta de los filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que varían en el tiempo

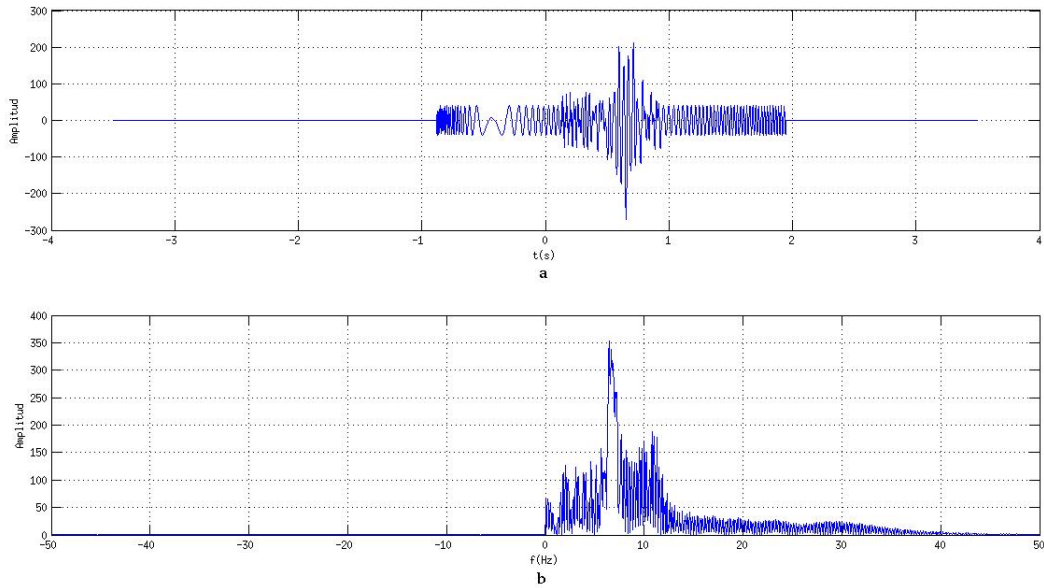


Figura 2.18: Características de la Señal 3 con ruido en los dominios del tiempo y la frecuencia. a) Señal real afectada por el ruido, en el dominio del tiempo. b) Espectro en frecuencia de la señal afectada por el ruido. Fuente: Autor.

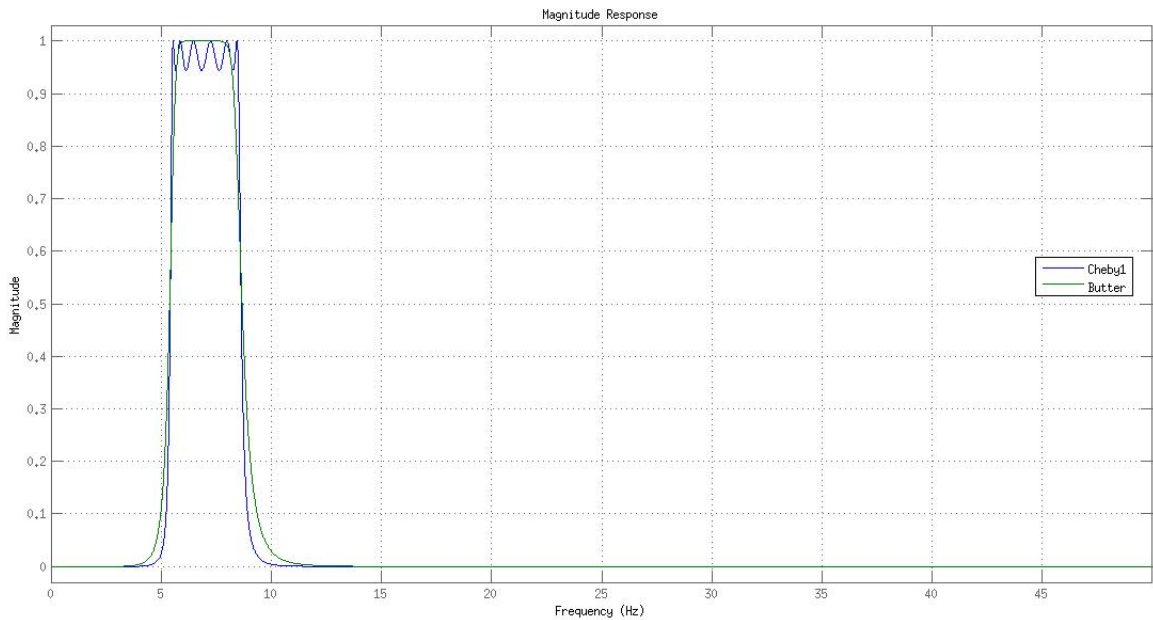


Figura 2.19: Respuesta en frecuencia de los filtros de Butterworth y Chebyshev tipo 1 de orden 6 utilizados para filtrar la señal mostrada en la Figura 2.18. Fuente: Autor.

2.3 Respuesta de los filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que varían en el tiempo

En las Figuras 2.20 y 2.21, se muestran los resultados de aplicar los filtros desarrollados a la señal afectada por el ruido. Se muestran los resultados obtenidos en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo Figura 2.20 y Figura 2.21 respectivamente. Estos resultados también evidencian que el comportamiento de los filtros lineales e invariantes en el tiempo ante la señal con ruido aquí mostrada se aleja de lo que sería el comportamiento deseado, ya que el resultado del filtrado no arroja una estimación aceptable de la señal sin ruido.

De los resultados de filtrado obtenidos para las señales ejemplo, se ve que debido a que la señal y el ruido se superponen en el dominio del tiempo y la frecuencia, los resultados obtenidos mediante técnicas convencionales de filtrado lineal e invariante en el tiempo no son satisfactorios, ya que ninguno de estos filtros, definidos mediante la teoría convencional permite separar el ruido de la señal de una forma eficaz, para el caso de los ejemplos aquí presentados. El objetivo del desarrollo de estos ejemplos era mostrar que el comportamiento de los filtros lineales e invariantes en el tiempo ante señales con ruido como las mostradas aquí, figuras 2.12 y 2.18, no es el deseado y se alejan de lo que pudiese considerarse como un resultado aceptable.

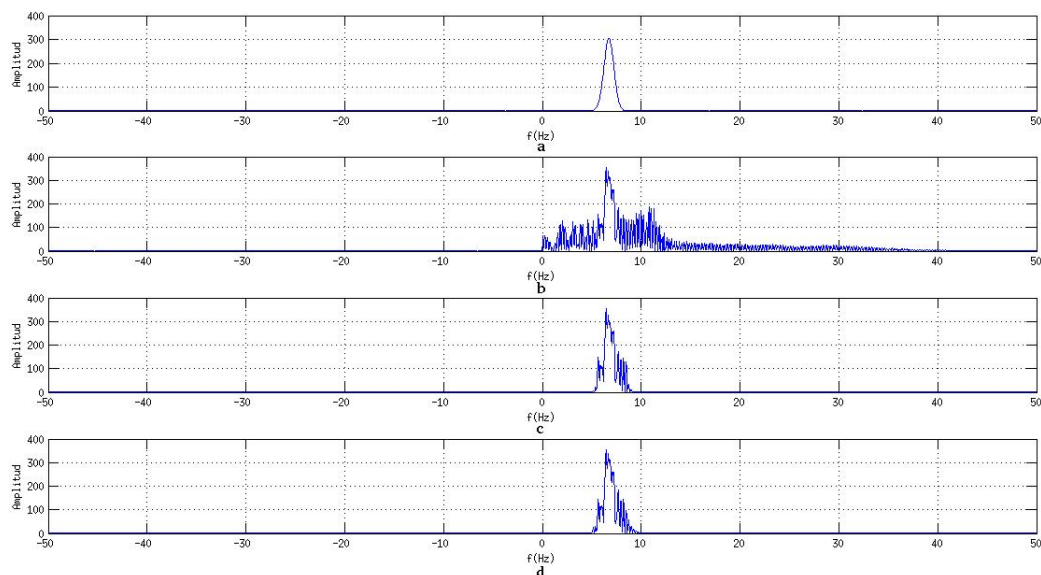


Figura 2.20: Respuesta en el dominio de la frecuencia de las señales de entrada y salida a los filtros de Chebyshev y Butterworth. a) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. b) Espectro en frecuencia de la señal con ruido. c) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Chebyshev tipo 1 de orden 6 para la señal de entrada con ruido. d) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Butterworth de orden 6 para la señal de entrada con ruido. Fuente: Autor.

2.3 Respuesta de los filtros lineales e invariantes en el tiempo a señales que varían en el tiempo

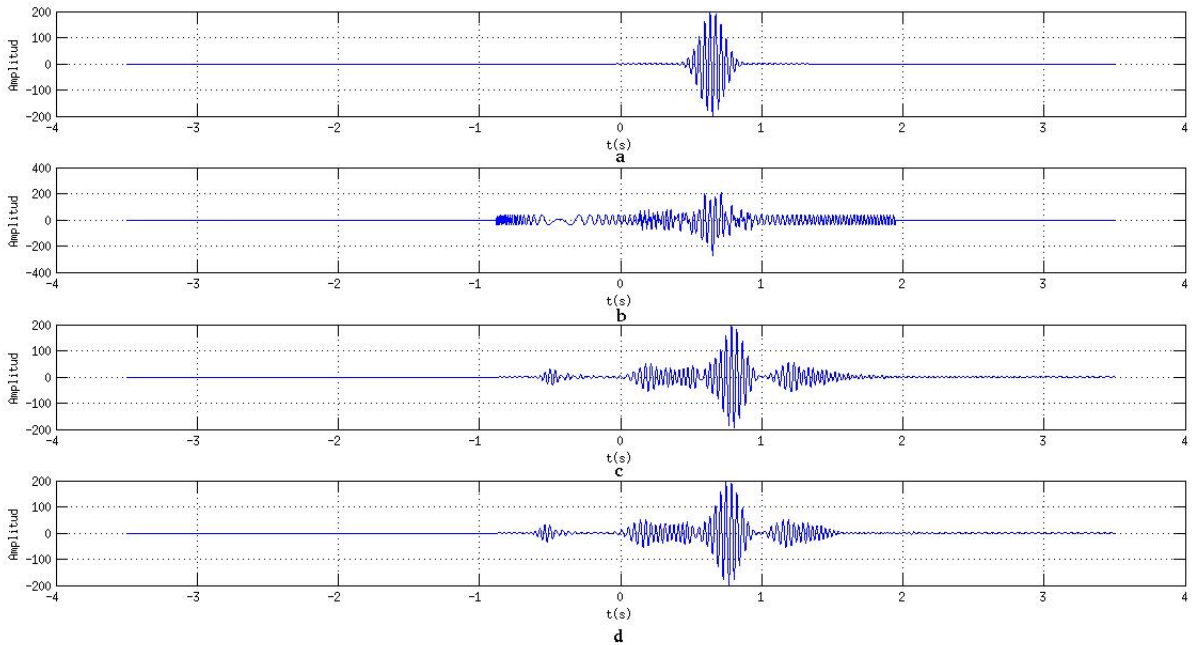


Figura 2.21: Respuesta en el dominio del tiempo de las señales de entrada y salida a los filtros de Chebyshev y Butterworth. a) Señal sin ruido en el dominio del tiempo. b) Señal con ruido en el dominio del tiempo. c) Señal de salida en el dominio del tiempo del filtro de Chebyshev tipo 1 de orden 6 para la señal de entrada con ruido. d) Señal de salida en el dominio del tiempo del filtro de Butterworth de orden 6 para la señal de entrada con ruido. Fuente: Autor.

En el siguiente capítulo se presentará la descripción de una técnica de filtrado alternativa haciendo uso de la convolución fraccionaria, y se abordaran las mismas señales ejemplo tartadas aqui, mostrando mejores resultados respecto a los obtenidos con técnicas convencionales.

Capítulo 3

DESCRIPCIÓN DE UN FILTRADO VARIANTE EN EL TIEMPO HACIENDO USO DE LA CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA

El planteamiento del filtrado variante en el tiempo se realiza con base en la convolución fraccionaria y el operador traslación fraccionaria. A partir de la definición del operador traslación fraccionaria, se pueden describir trayectorias curvas en la distribución de Wigner(espacio de fase de señales).

Dado que el operador traslación fraccionaria, $T_{\tau;\alpha}$ depende de dos parametros, τ y α , si τ varia de forma creciente y para cada valor posible de τ se le asocia un valor de α esto producira una traslación de la señal sobre la distribución de Wigner, en la dirección que indique α y τ . Es de esta forma que se pueden lograr trayectorias curvas sobre la distribución de Wigner, se le asocia un valor de α para cada valor de la variable τ , que luego al aplicarse el operador traslación fraccionaria producira una traslación de la señal a través de la curva descrita por α y τ . A continuación se mostraran unos ejemplos con el objetivo de ilustrar como puede ser utilizado el operador traslación fraccionaria para trasladar una señal sobre la distribución de Wigner.

En la Figura 3.1 se muestra una trayectoria tal que el parámetro α es constante, para el ejemplo $\alpha = -0,6\frac{\pi}{2}$. En la Figura 3.2 se muestra una trayectoria tal que e parámetro α varía en el tiempo en la forma $\alpha = -\frac{\pi}{2}(0,4 + \frac{\tau}{5})$. En la Figura 3.3 se muestra otro ejemplo de una trayectoria tal que el parámetro α varía en el tiempo, $\alpha = -\frac{\pi}{2}[1 - Ln(0,4 + \tau)]$. En la Figura 3.4 se muestra una trayectoria tal que el parámetro α varía como: $\alpha = -\frac{\pi}{2}e^{-0,2-\tau}$. Cada una de las graficas se generan a partir de la ecuación $T_{\tau;\alpha}[f(t)]$ con $f(t) = e^{-100t^2}$ (señal Gaussiana), donde $f(t)$ es seleccionada de modo tal que sea una señal

CAPÍTULO 3. DESCRIPCIÓN DE UN FILTRADO VARIANTE EN EL TIEMPO HACIENDO USO DE LA CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA

de soporte compacto, es decir, este limitada en el tiempo y la frecuencia, simplemente porque esta característica permite ilustrar mejor la traslación. La variable τ varía de 0s a 5s con pasos de 0,01s para cada uno de los ejemplos y el parámetro α es el descrito para cada uno de los casos. De las figuras se observa que lo que permite las diferentes trayectorias es el parámetro angular de la traslación, α . Si este es constante se obtienen trayectorias lineales, tal como se muestra en la Figura 3.1, y si este parámetro angular varía en el tiempo se describen trayectorias curvas como es lo que se observa en las figuras 3.2, 3.3 y 3.4.

En las figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, solo se muestra el resultado de la traslación para ciertos valores de τ suficientemente espaciados como para poder ver el efecto de la traslación fraccionaria sobre la señal $f(t)$, ya que si se representaran todos los posibles resultados no se vería claramente el efecto de la traslación fraccionaria ya que entre un valor de τ y otro hay solo una diferencia de 0,01s.

El algoritmo utilizado para generar estas gráficas es *TrasFrac3*, el cual se detalla en el Anexo A y fue programado por el autor de este trabajo. Las ecuaciones del parámetro α relacionadas fueron planteadas al azar, sin seguir ningún criterio en particular, con el único propósito de ilustrar el efecto de la traslación fraccionaria aplicada a una señal, sobre la distribución de Wigner, en casos en los cuales el parámetro α permanecía constante o variaba respecto de τ , donde τ representa una de las variables de la traslación fraccionaria.

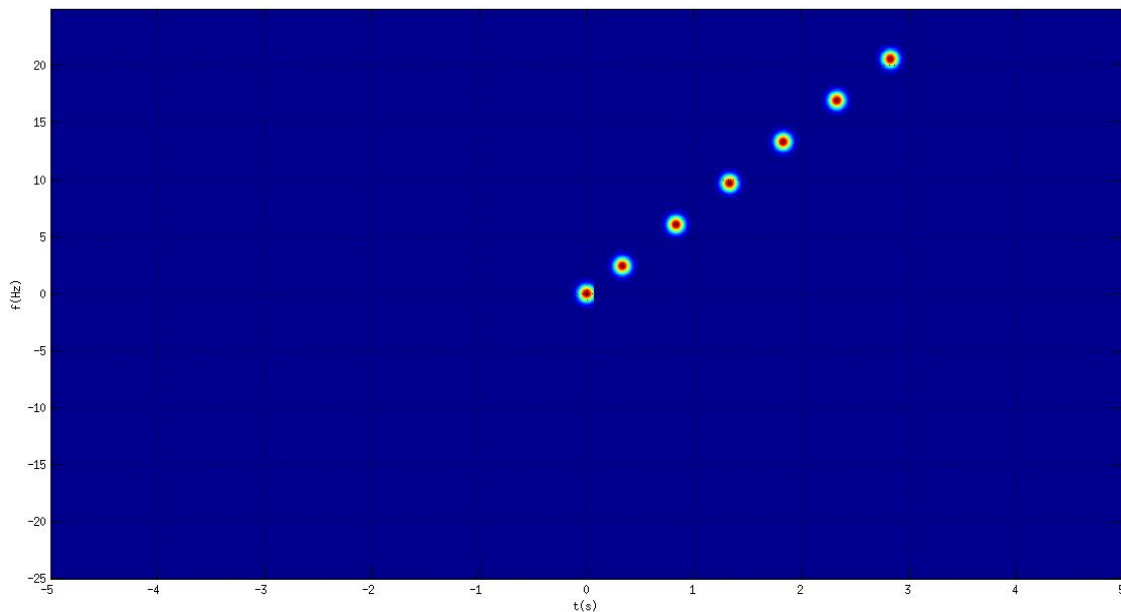


Figura 3.1: DW de una Gaussiana trasladada en el espacio de fase a través de una línea recta mediante el operador traslación fraccionaria. Fuente:Autor.

CAPÍTULO 3. DESCRIPCIÓN DE UN FILTRADO VARIANTE EN EL TIEMPO HACIENDO USO DE LA CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA

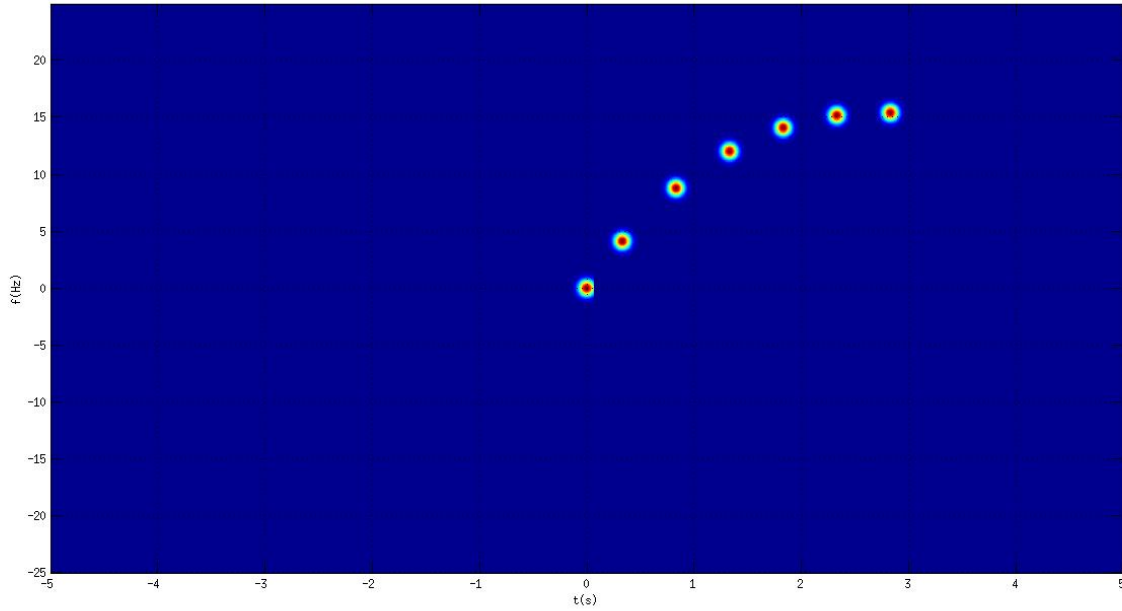


Figura 3.2: DW de una Gaussiana trasladada en el espacio de fase a través de una trayectoria curva mediante el operador traslación fraccionaria. Fuente:Autor.

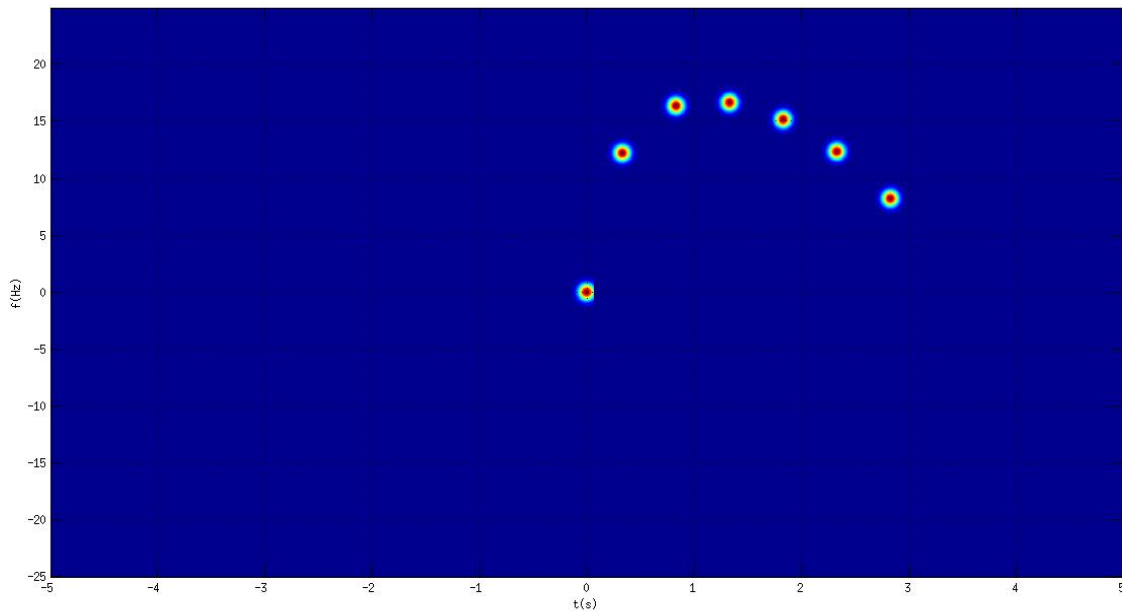


Figura 3.3: DW de una Gaussiana trasladada en el espacio de fase a través de una trayectoria curva mediante el operador traslación fraccionaria. Fuente:Autor.

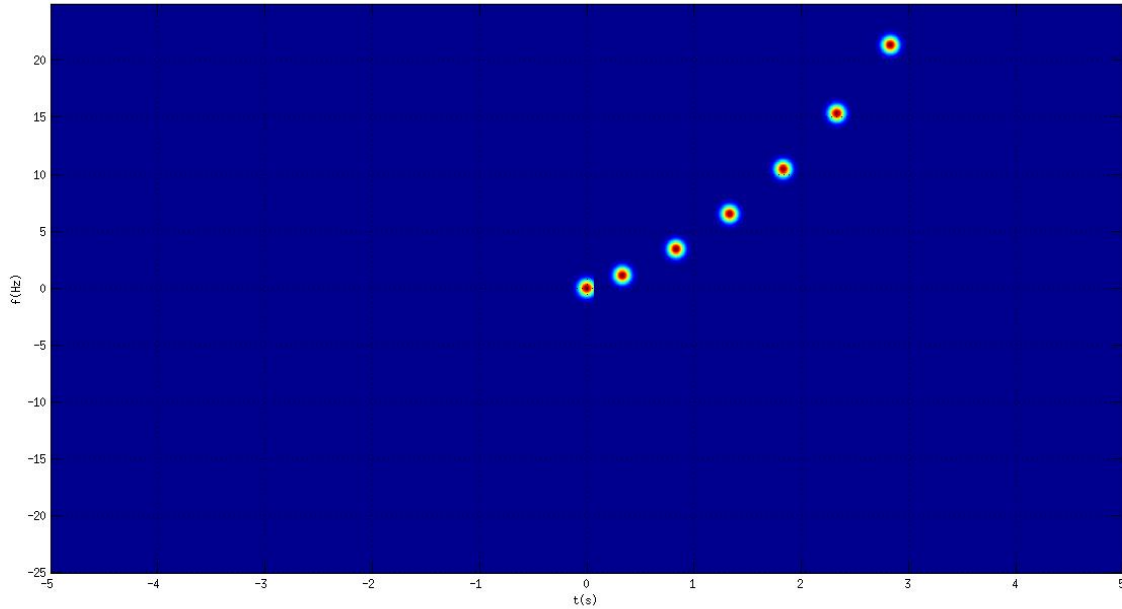


Figura 3.4: DW de una Gaussiana trasladada en el espacio de fase a través de una trayectoria curva mediante el operador traslación fraccionaria. Fuente:Autor.

Dado que la convolución fraccionaria puede ser escrita como:

$$[f *_{\alpha} g](x) = C_{\alpha}^2 \int_{\mathbb{R}} f(u) T_{u;\alpha}[g](x) e^{i\pi u^2 \cot \alpha} du. \quad (3.1)$$

De la Ecuación 1.24, se puede interpretar de forma directa que esto corresponde a una convolución a través de una trayectoria curva en el espacio de fase, brindando así la posibilidad de desarrollar filtrados a través de este tipo de trayectorias, siempre y cuando puedan ser parametrizadas mediante el parámetro α . Es justo de esta manera que se define el filtrado variante en el tiempo en este trabajo.

La Ecuación 3.1 es el soporte principal acerca de la idea de realizar filtrados a través de trayectorias curvas en el espacio de fase. Además las variables x y u son variables que representan el tiempo en el caso particular en que se trabaje con señales en el tiempo, justo lo que se hace en este trabajo.

Una característica importante de la herramienta aquí mostrada, es que el desarrollo se realiza en el dominio del tiempo y no en el espacio de fase. El espacio de fase (distribución de Wigner) es utilizado solo como representación de la idea y el procedimiento, pero los cálculos mediante los cuales se obtienen los resultados de la convolución fraccionaria se realizan en el dominio del tiempo. Es importante aclararlo debido a que esto garantiza que los resultados no violan el principio de incertidumbre. Esto no es una preocupación ya que el tratamiento se hace directamente en el dominio del tiempo.

3.1. Algunas aplicaciones

A continuación se mostrará sobre señales sintéticas, el resultado de usar un filtro a través de una trayectoria curva haciendo uso de los algoritmos elaborados. Las señales sobre las cuales se mostrara el filtrado que se propone en este trabajo, corresponden a la señal 2 y señal 3, con ruido, descritas en el capítulo anterior, para las cuales se mostro que el filtrado lineal e invariante en el tiempo no tiene un comportamiento óptimo respecto a la atenuación del ruido que esta presente en estas señales.

Recuerdese que en los siguientes ejemplos, la representación y el tratamiento se hará sobre la señal analítica y no sobre la señal real. Entiendase señal analítica como aquella señal que contiene solo el espectro correspondiente a las frecuencias positivas de la señal real, es decir solo se utilizará el espectro de la señal correspondiente a las frecuencias positivas, para mayor facilidad del procedimiento y la ilustración.

En la Figura 3.5 se muestra una señal chirp de la forma $sen(5\pi t^2)$ afectada por un ruido. La expresión matemática para la señal mostrada en la parte *b* de la Figura 3.5 es:

$$x_{in}(t) = sen(5\pi t^2) + \mathfrak{F}_{0,5\pi/2}[e^{-80(t-3)^2}] + \mathfrak{F}_{0,1\pi/2}[e^{-80(t-3)^2}] + \mathfrak{F}_{-0,5\pi/2}[e^{-80(t-3)^2}] + \mathfrak{F}_{-0,1\pi/2}[e^{-80(t-3)^2}].$$

Las componentes que acompañan a la expresión $sen(5\pi t^2)$ representa el ruido. Ya en el capítulo anterior se refirió que representaba cada una de las componentes del ruido en esta señal.

En la parte *a* de la Figura 3.5 se muestra la distribución de Wigner(DW) de la señal analítica de la señal x_{in} , $\mathcal{Q}[x_{in}]$ y en la parte *c* de la misma figura, el espectro en frecuencia de la señal analítica de la señal x_{in} .

En la Figura 3.6 se muestra la señal chirp sin ruido, Señal 2, esta representaría la señal deseada. La expresión matemática para la señal mostrada en la parte *b* de la Figura 3.6 corresponde a: $sen(5\pi t^2)$, en la parte *a* se muestra la distribución de Wigner de la señal analítica de la señal sin ruido y en parte *c* el espectro en frecuencia de la señal analítica de la señal sin ruido.

De las figuras 3.5 y 3.6 se nota que el ruido se superpone a la señal tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia, de modo que el filtrado lineal e invariante en el tiempo(LIT), que consiste en productos y convoluciones en el tiempo, no permiten separar el ruido en esta señal de forma efectiva, tal y como se mostro en el capítulo anterior. El filtrado LIT no resulta efectivo en este caso, a causa que el ruido se superpone a la señal en ambos dominios, tiempo y frecuencia, en una forma que cambia drásticamente el aspecto de la señal.

3.1 Algunas aplicaciones

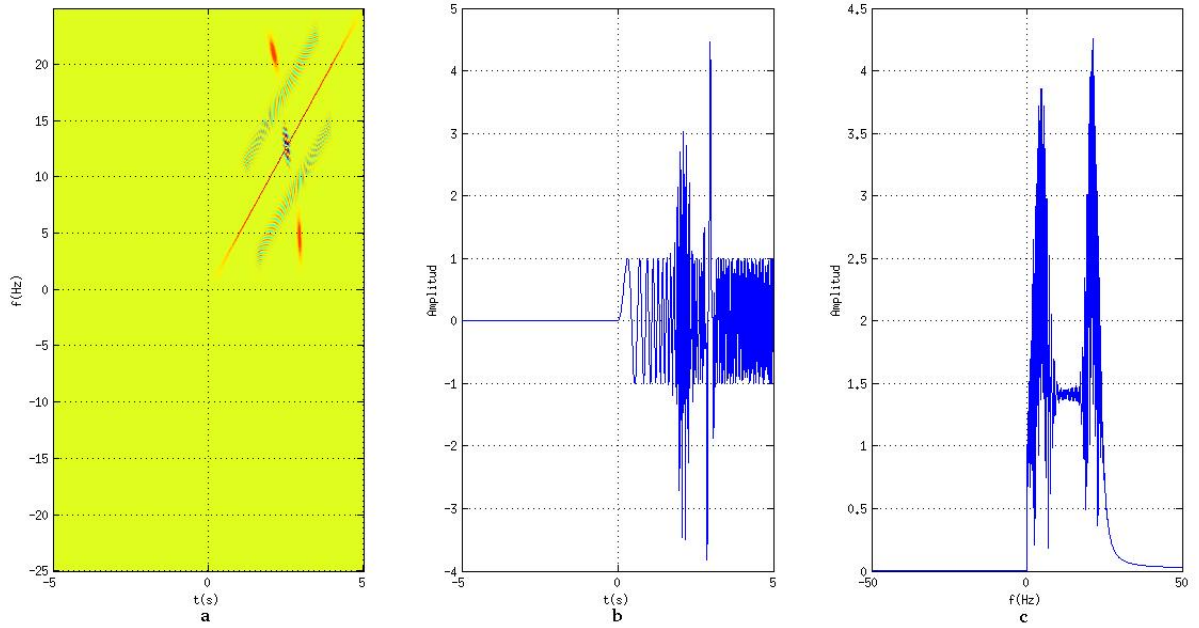


Figura 3.5: Características de la Señal 2 con ruido en los dominios del tiempo y la frecuencia y distribución de Wigner(DW) de esta señal. a) DW de la señal analítica de la señal afectada por el ruido. b) Señal real afectada por el ruido, en el dominio del tiempo. c) Espectro en frecuencia de la señal afectada por el ruido. Fuente:Autor.

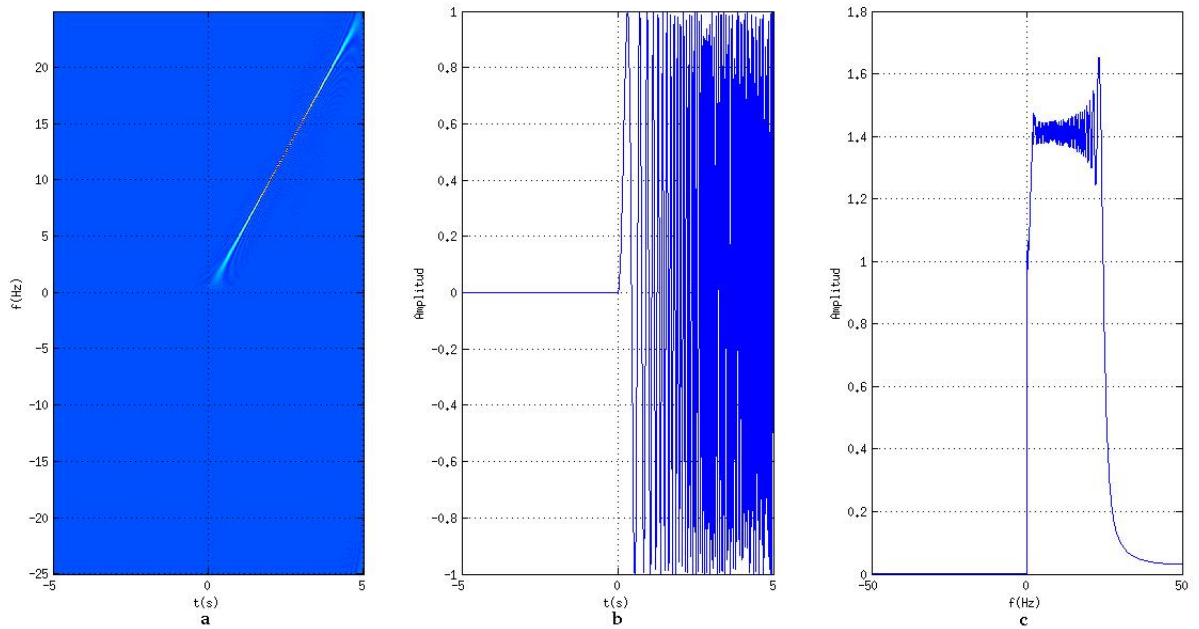


Figura 3.6: Características de la Señal 2 en los dominios del tiempo y la frecuencia y distribución de Wigner(DW) de esta señal. a) DW de la señal analítica de la señal sin ruido. b) Señal real sin ruido, en el dominio del tiempo. c) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. Fuente:Autor.

3.1 Algunas aplicaciones

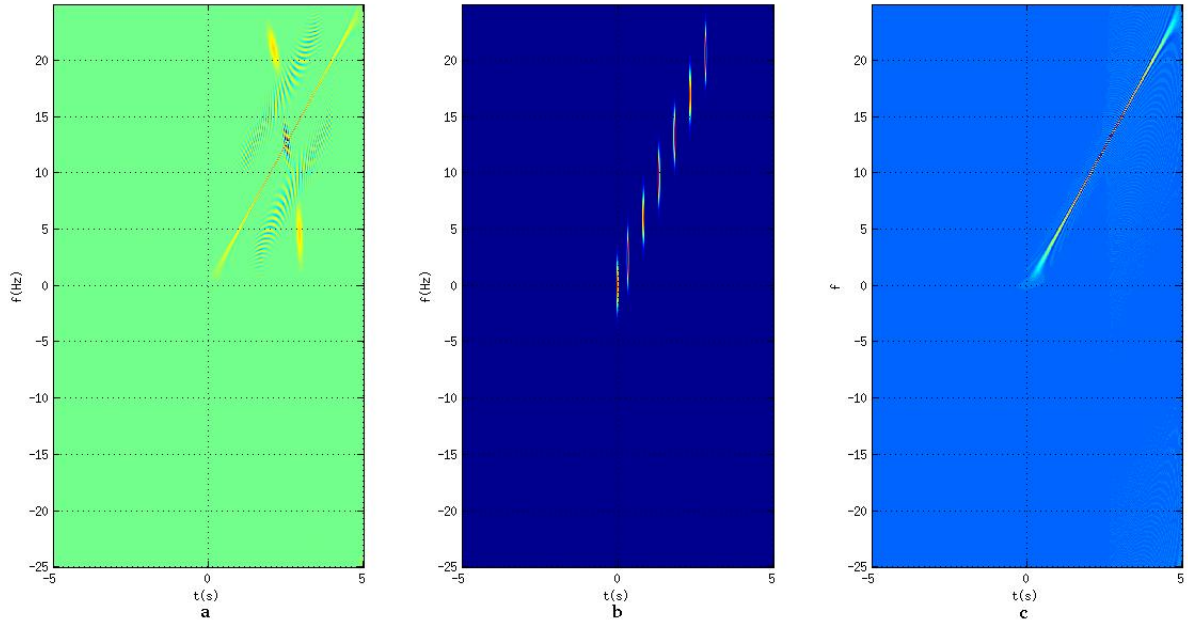


Figura 3.7: Descripción del filtrado variante en el tiempo sobre la Señal 2 con ruido. a) DW de la señal analítica de la señal afectada por el ruido. b) Trayectoria que sigue el filtro representada en la distribución de Wigner. c) DW de la señal obtenida después del filtrado. Fuente:Autor.

Ahora, según el modelo teórico mostrado en capítulos anteriores, mediante la convolución fraccionaria existe la posibilidad, en este caso, de separar la señal del ruido que a diferencia del filtrado LIT, los resultados serán más satisfactorios. En la Figura 3.7 se muestra el procedimiento llevado a cabo para realizar el filtrado de la señal mediante la convolución fraccionaria. Primero se representa la señal a procesar en el espacio de fase de señales, distribución de Wigner, parte *a* de la Figura 3.7, a partir de esta representación se estima la trayectoria a través de la cual se desarrollara el filtrado mediante la convolución fraccionaria, el filtro usado es una señal Gaussiana descrita en la forma: $h(t) = e^{-80t^2}$ y la trayectoria que sigue este filtro es la ilustrada en la parte *b* de la Figura 3.7. Esta trayectoria consiste en un $\alpha = -0,6\frac{\pi}{2}$, es decir el parámetro angular en todo punto de la convolución es el mismo. Se selecciona un filtro Gaussiano sin ningún criterio en particular, simplemente se utiliza para representar la idea del filtrado que se propone en este trabajo. Debido a esto no se asegura que los resultados mostrados aquí sean óptimos, ya que no es propósito de este trabajo hacer un cálculo de optimización para llegar al filtro más adecuado, dependiendo de la señal a filtrar.

Al desarrollar el filtrado mediante la convolución fraccionaria, que es entendido como tomar la señal mostrada en la parte *a* de la Figura 3.7 y convolucionarla con $h(t)$ a través de la trayectoria descrita en la parte *b* de la Figura 3.7, se obtiene la señal mostrada en la parte *c*. Claramente este desarrollo logra lo que la teoría convencional no permitiría, y es separar el ruido de la señal para este caso particular.

3.1 Algunas aplicaciones

En la de la Figura 3.8, se muestra comparativamente la señal sin ruido con la obtenida al desarrollar el filtrado. La parte *a* de la Figura 3.8 es la señal sin ruido en el tiempo, la parte *b* de la Figura 3.8 es la señal en el tiempo obtenida a partir del filtrado realizado mediante la convolución fraccionaria. La parte *c* de la Figura 3.8 corresponde al espectro de la señal analítica de la señal sin ruido y la parte *d* de la Figura 3.8 corresponde al espectro de la señal analítica de la señal obtenida a partir del filtrado realizado mediante la convolución fraccionaria. Como se muestra en esta figura, la señal recuperada es similar a la Señal 2, es decir, el filtrado realizado permitió separar la Señal 2 de la señal de ruido y de esta forma recuperar adecuadamente la señal original.

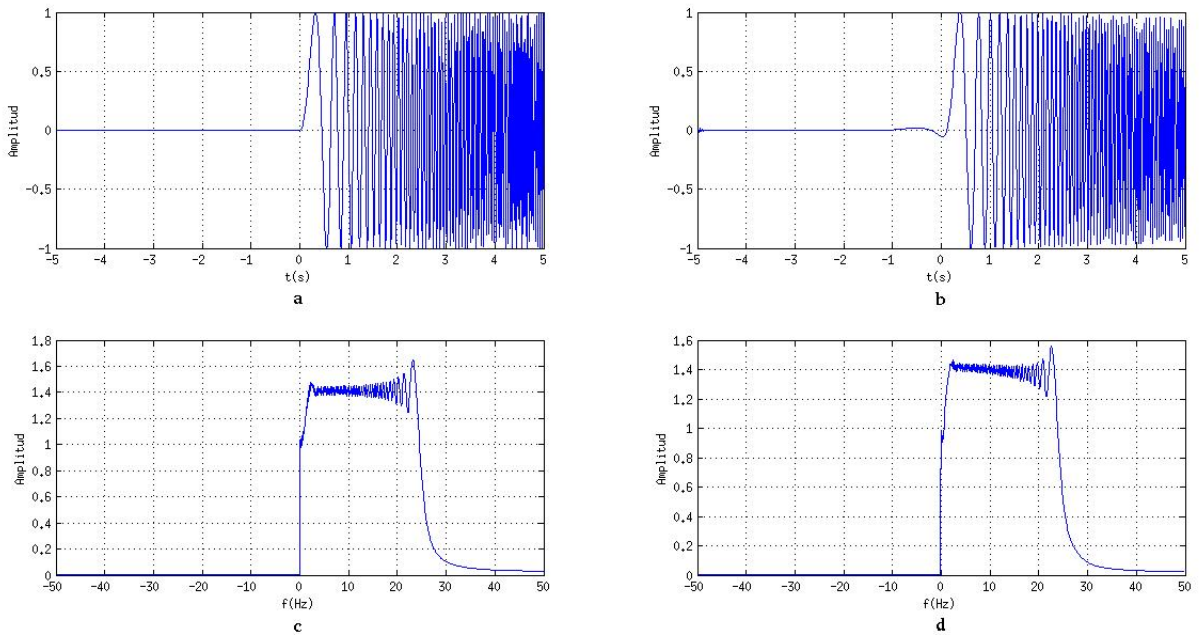


Figura 3.8: Respuesta en el dominio del tiempo y la frecuencia del filtrado variante en el tiempo. a) Señal sin ruido, en el dominio del tiempo. b) Señal obtenida después del filtrado, en el dominio del tiempo. c) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. d) Espectro en frecuencia de la señal obtenida después del filtrado. Fuente: Autor.

A continuación se mostrará el desarrollo de otro ejemplo, dónde se hará uso de la misma metodología. El ejemplo a continuación corresponde a la Señal 3 con ruido, definida en el capítulo anterior.

Se tiene una señal cuya representación matemática es: $n(t) = 20e^{i30tLn(t+4)}$, a partir de esta se define la señal sintética afectada por un ruido cuya representación matemática es:

$x_{in}(t) = \Re\{\Re\{T_{2,5;-0,6\pi/2}e^{-5t^2} + n(t-1) + n(t-4)\}\}$. Las componentes $n(t-1), n(t-4)$ representan el ruido de la señal y la expresión $\Re\{T_{2,5;-0,6\pi/2}\{e^{-5t^2}\}$ representa la señal sin ruido, Señal 3. Cada una de las componentes del ruido de esta señal fueron descritas en el capítulo anterior. Como se observa, la señal $x_{in}(t)$ es una señal compleja, esta representa la señal analítica de la señal afectada por el ruido.

3.1 Algunas aplicaciones

Las partes *a*, *b*, *c* de la Figura 3.9 corresponden a la distribución de Wigner de la señal $x_{in}(t)$, parte real en el tiempo de $x_{in}(t)$ y espectro de la señal $x_{in}(t)$ respectivamente. En las partes *a*, *b*, *c* de la Figura 3.10 se muestra la distribución de Wigner de la señal analítica de la señal sin ruido, señal real en el dominio del tiempo y espectro en frecuencia de la señal analítica de la señal sin ruido respectivamente. Al comparar las señales mostradas en las Figuras 3.9 y 3.10 se muestra que este ruido en particular se superpone a la señal tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo. En este caso si se quiere separar la señal del ruido, las técnicas de filtrado lineales e invariantes en el tiempo(LIT) no darían los mejores resultados (entiendase técnicas de filtrado LIT, productos y convoluciones en el tiempo), tal y como se mostro en el capítulo anterior para la Señal 3, que corresponde a esta misma señal. El filtrado LIT no resulta eficiente en este caso, ya que este ruido cambia drásticamente la morfología de la señal en el tiempo y en la frecuencia.

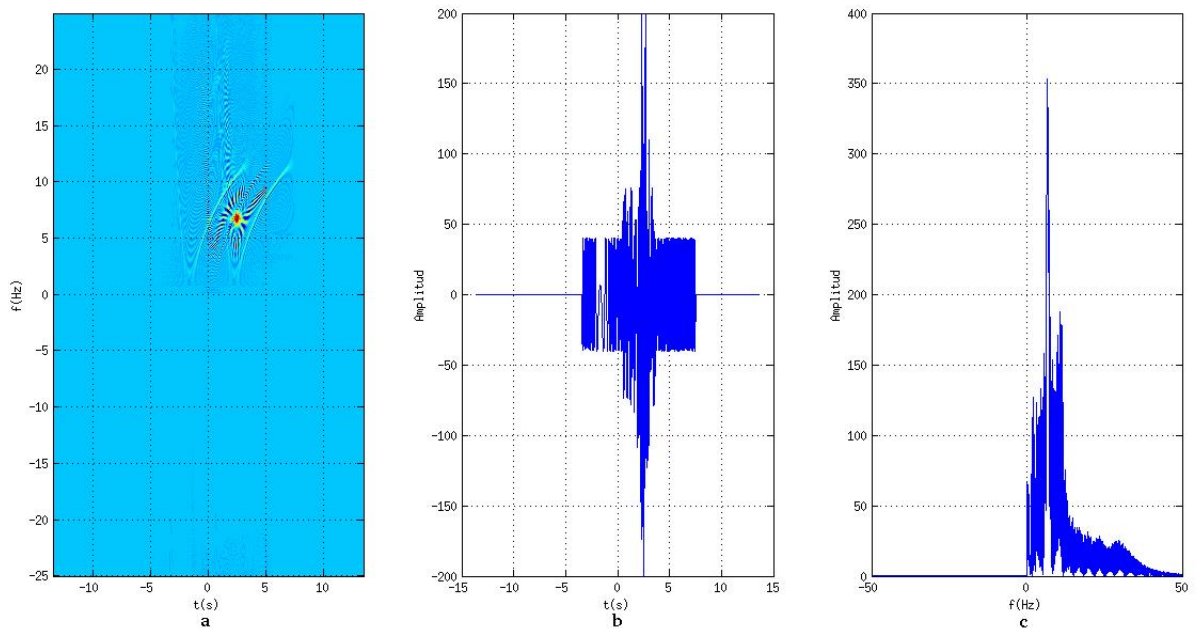


Figura 3.9: Características de la Señal 3 con ruido en los dominios del tiempo y la frecuencia y distribución de Wigner(DW) de esta señal. a) DW de la señal analítica de la señal afectada por el ruido. b) Señal real afectada por el ruido, en el dominio del tiempo. c) Espectro en frecuencia de la señal afectada por el ruido. Fuente: Autor.

3.1 Algunas aplicaciones

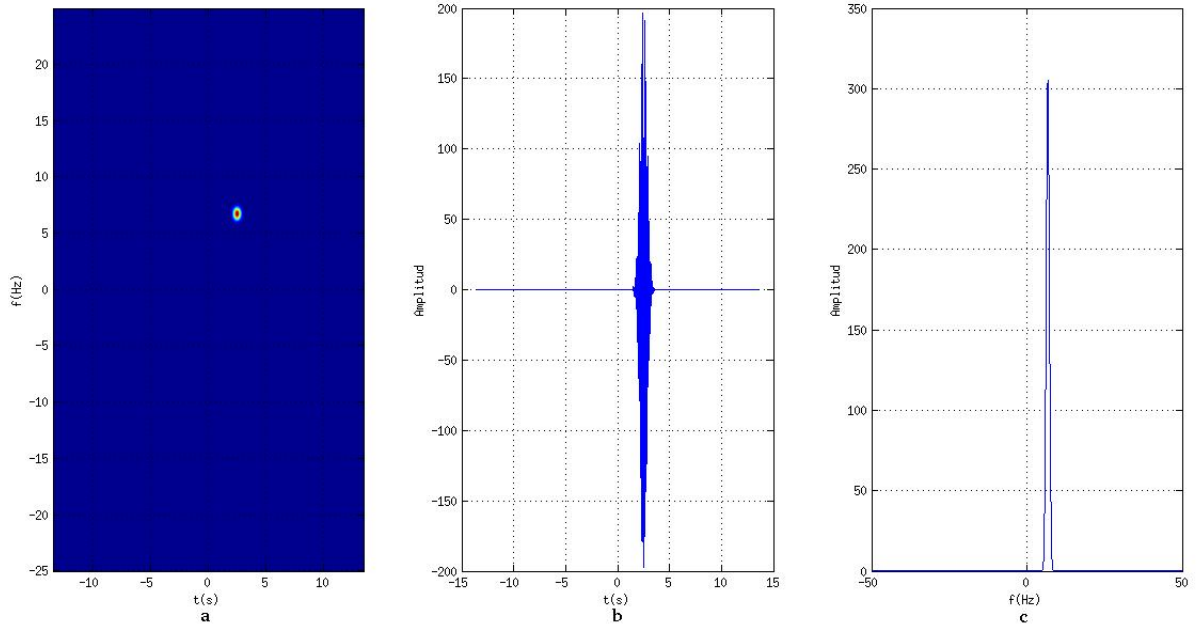


Figura 3.10: Características de la señal 3 en los dominios del tiempo y la frecuencia y distribución de Wigner(DW) de esta señal. a) DW de la señal analítica de la señal sin ruido. b) Señal real sin ruido, en el dominio del tiempo. c) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. Fuente:Autor.

Hasta aquí se pretende dejar claro que las técnicas de filtrado LIT no ofrecen resultados satisfactorios a la hora de separar el ruido de la señal en el ejemplo antes descrito, Figura 3.9, así que se hará uso de la metodología propuesta en este trabajo para llevar a cabo el filtrado de ésta señal para mostrar que esta ofrece mejores resultados que las técnicas de filtrado LIT.

El primer paso es obtener la trayectoria mediante la cual se lleva a cabo el filtrado de la señal, parte *b* de la Figura 3.11, esta se obtiene a partir de la distribución de Wigner de la señal $x_{in}(t)$, parte *a* de la Figura 3.11. Luego se lleva a cabo la convolución fraccionaria entre la señal mostrada en la parte *a* de la Figura 3.11 y el filtro que está representado por la ecuación $h(t) = e^{-80t^2} e^{i4\pi t}$ a través de la trayectoria mostrada en la parte *b* de la Figura 3.11. Esta trayectoria corresponde a un $\alpha = a(t) \frac{\pi}{2}$ donde $a(t)$ corresponde a un vector de valores igualmente espaciados logaritmicamente entre $10^{-0,3}$ y $10^{-0,1}$, obtenido con el algoritmo *logspace* de matlab. El resultado de este filtrado es el mostrado en la parte *c* de la Figura 3.11. Cabe aclarar que la parte *b* de la Figura 3.11 representa la trayectoria que sigue la señal $h(t)$ cuando se lleva a cabo la convolución fraccionaria. Esto muestra que este procedimiento de filtrado, al igual que en el ejemplo anterior, consiste en un filtrado variante en el tiempo, ya que las trayectorias descritas por los filtros en el espacio de fase así lo permiten interpretar, porque de éstas se observa que las componentes frecuenciales del filtro varían en el tiempo.

3.1 Algunas aplicaciones

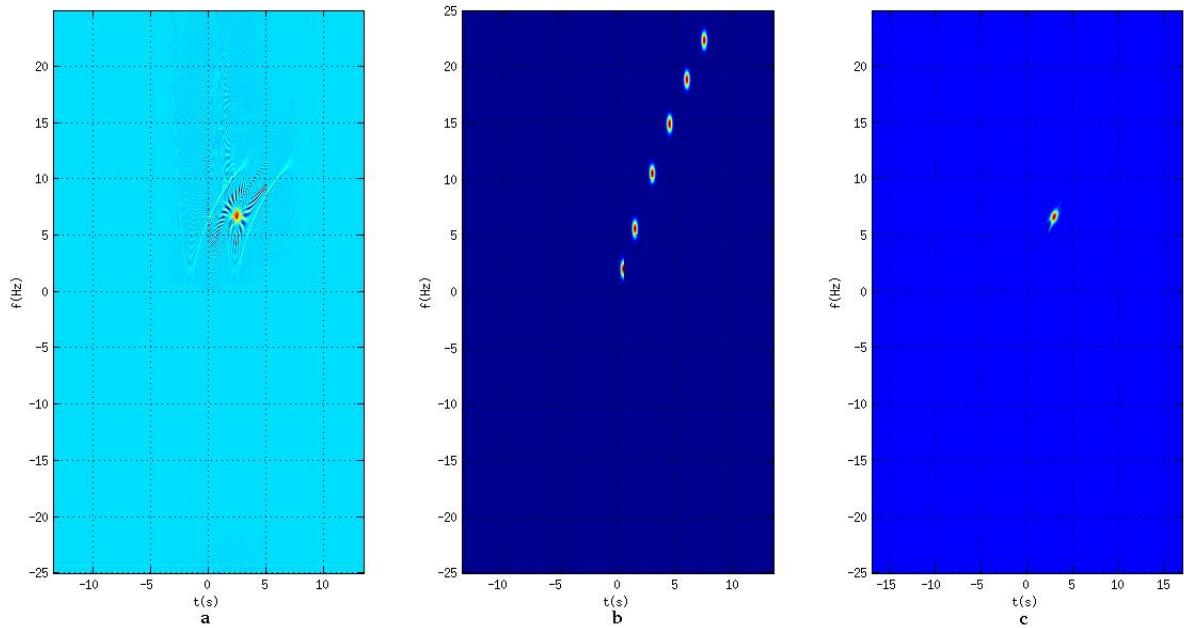


Figura 3.11: a) DW de la señal analítica de la señal afectada por el ruido. b) Trayectoria que sigue el filtro representada en el espacio de fase de señales. c) DW de la señal obtenida después del filtrado. Fuente: Autor.

Se escoge un filtro Gaussiano sin ningún criterio en particular, simplemente se utiliza para representar la idea del filtrado que se propone en este trabajo. Debido a esto no se asegura que los resultados mostrados aquí sean óptimos, ya que no es propósito de este trabajo hacer un cálculo de optimización para llegar al filtro más adecuado, dependiendo de la señal a filtrar.

En la Figura 3.12, se muestra comparativamente la señal sin ruido con la obtenida al desarrollar el filtrado mediante la convolución fraccionaria. La parte *a* de la Figura 3.12 es la señal sin ruido en el tiempo, la parte *b* de la Figura 3.12 es la señal en el tiempo obtenida a partir del filtrado realizado mediante la convolución fraccionaria. La parte *c* de la Figura 3.12 corresponde al espectro de la señal analítica de la señal sin ruido y la parte *d* de la Figura 3.12 corresponde al espectro de la señal analítica de la señal obtenida a partir del filtrado realizado mediante la convolución fraccionaria. Como se observa en estas figuras, este filtrado no logró separar completamente la señal del ruido, a la señal le acompañan algunos vestigios del ruido. Esto podría deberse a un error numérico o a que la trayectoria escogida no permite separar completamente el ruido.

3.1 Algunas aplicaciones

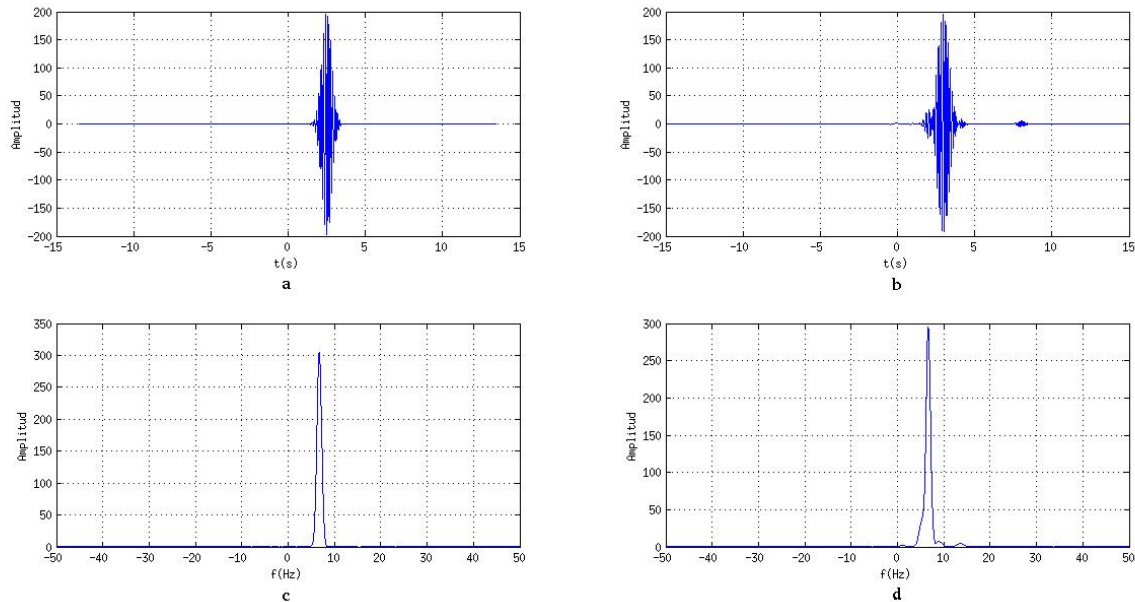


Figura 3.12: Respuesta en el dominio del tiempo y la frecuencia del filtrado variante en el tiempo aplicado sobre la Señal 3 con ruido. a) Señal sin ruido en el dominio del tiempo. b) Señal obtenida después del filtrado en el dominio del tiempo. c) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. d) Espectro en frecuencia de la señal obtenida después del filtrado. Fuente: Autor.

El hecho que la señal no haya sido separada completamente del ruido, en este caso no representa mayor problema, ya que como se ve de la Figura 3.12, la esencia de la señal es recuperada y esas componentes del ruido son fácilmente separables de la señal mediante una técnica de filtrado LIT. Justamente esto es lo que se lleva a cabo y es mostrado en la Figura 3.14, la parte *a* de la Figura 3.14 representa el espectro de la señal deseada, la parte *b*, de la misma figura, corresponde al espectro de la señal recuperada mediante la convolución fraccionaria. La parte *c* representa el espectro de la señal que resulta al pasar la señal mostrada en *b* a través de un filtro de Chebyshev tipo 1 de orden 6. En este resultado se observa que la señal se recupera de forma satisfactoria.

El algoritmo utilizado para diseñar el filtro *chevy1* de matlab y su respuesta en frecuencia del filtro se muestra en la Figura 3.13. Los criterios de diseño que se tuvieron en cuenta fueron: frecuencias de corte, 5,5Hz y 8,5 Hz, y de orden 6 para que la respuesta fuese lo más parecida a la ideal.

3.1 Algunas aplicaciones

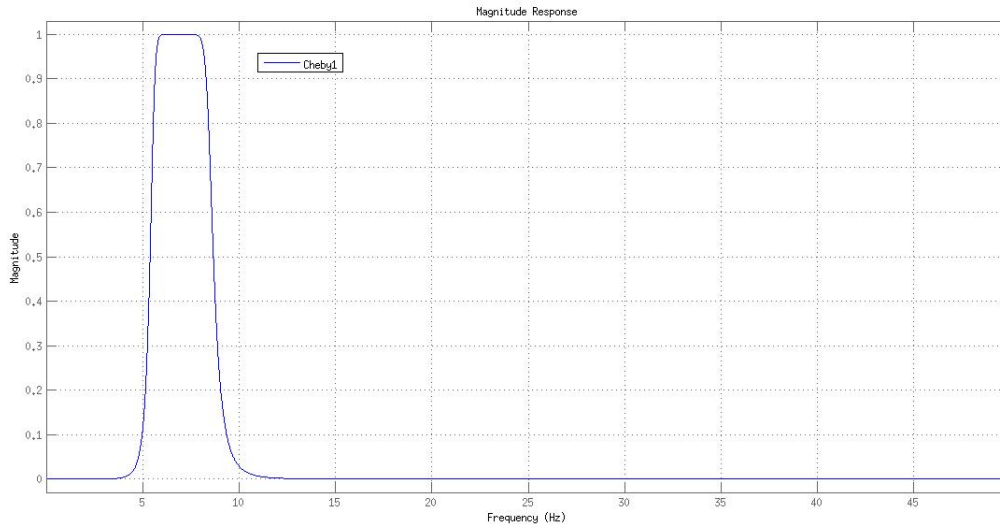


Figura 3.13: Respuesta en frecuencia de un filtro de Chebishev tipo 1 de orden 6, utilizado para mejorar el resultado de la convolución fraccionaria, descrito en la Figura 3.14. Fuente:Autor.

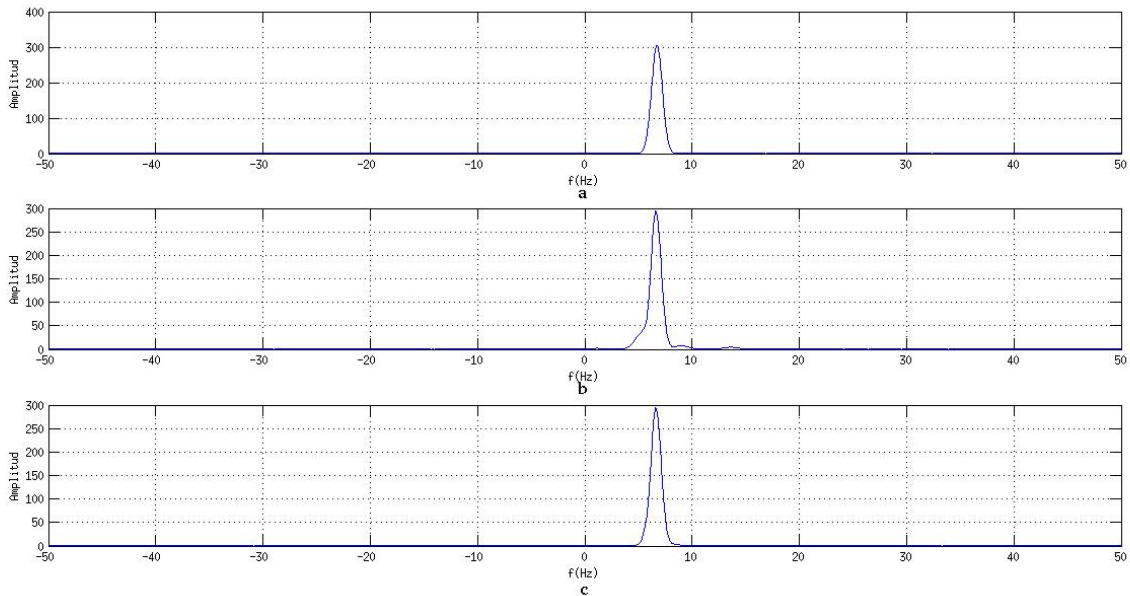


Figura 3.14: Respuesta en el dominio de la frecuencia de las señales de entrada y salida al filtro de Chebyshev. a) Espectro en frecuencia de la señal sin ruido. b) Espectro en frecuencia de la señal recuperada mediante la convolución fraccionaria. c) Espectro en frecuencia de la señal de salida del filtro de Chebyshev donde la señal de entrada es la mostrada en b. Fuente:Autor.

3.1 Algunas aplicaciones

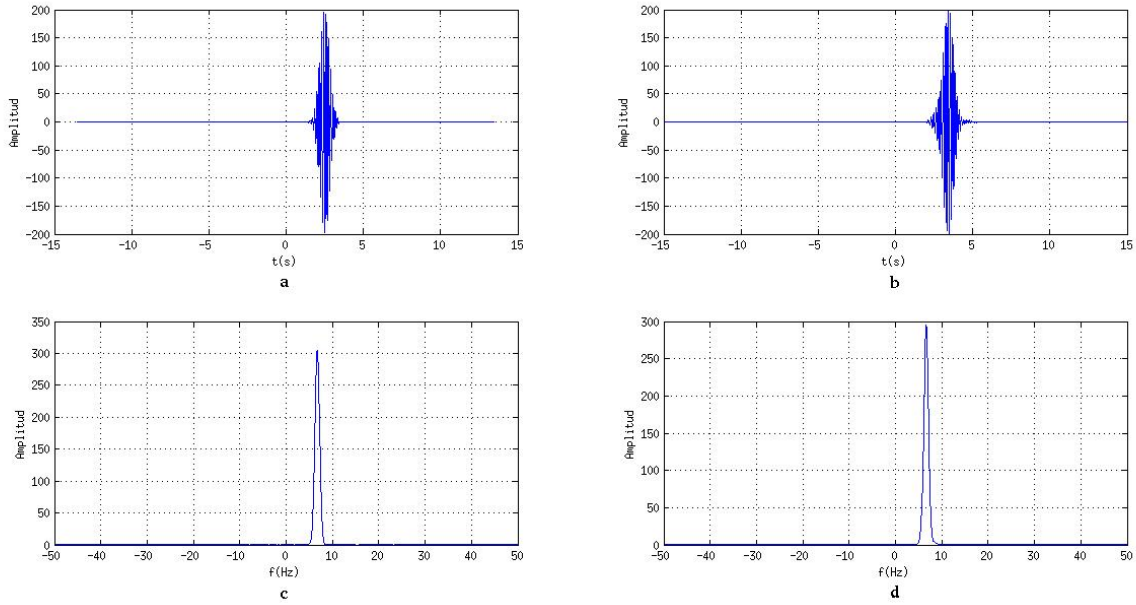


Figura 3.15: Respuesta en el dominio del tiempo y la frecuencia obtenida mediante un filtrado variante en el tiempo seguido de un filtrado LIT aplicado sobre la Señal 3 con ruido. a) Señal sin ruido en el dominio del tiempo. b) Señal en el dominio del tiempo recuperada haciendo uso de la convolución fraccional y luego filtrada mediante un filtro de Chebyshev. c) Espectro en frecuencia de la señal analítica de la señal sin ruido. d) Espectro en frecuencia de la señal analítica de la señal recuperada haciendo uso de la convolución fraccional y luego filtrada mediante un filtro de Chebyshev. Fuente:Autor.

En la Figura 3.15, se muestra comparativamente la señal sin ruido con la obtenida al desarrollar el filtrado mediante la combinación de la convolución fraccional y un procedimiento de filtrado LIT descrito en el párrafo anterior. La parte *a* de la Figura 3.15 es la señal sin ruido en el tiempo, la parte *b* de la Figura 3.15 es la señal en el tiempo obtenida a partir del filtrado realizado mediante la convolución fraccional seguido del filtro de Chebyshev. La parte *c* de la Figura 3.15 corresponde al espectro de la señal analítica de la señal sin ruido y la parte *d* de la Figura 3.15 corresponde al espectro de la señal analítica de la señal obtenida a partir del filtrado realizado mediante la convolución fraccional seguido del filtro de Chebyshev. Ya en estas gráficas se observa un mejor resultado si lo comparamos con el mostrado en la Figura 3.15.

Cabe resaltar que el algoritmo desarrollado realiza el filtrado en el dominio del tiempo y no en el espacio de fase, el espacio de fase solo es utilizado como representación del procedimiento, por lo que en este caso no es un problema cumplir con el principio de incertidumbre, ya que el tratamiento de las señales se realiza en el dominio del tiempo.

3.2. Resumen del procedimiento de filtrado variante en el tiempo propuesto en este trabajo

Este tipo de filtrados tiene aplicación directa sobre señales que tienen perfiles curvos en el espacio de fase, tal es el caso de la señal de radar (Figura 3.16), y el caso de la señal sísmica (Figura 3.17), que corresponde a una traza sísmica. En la figura 3.17 se ilustra la trayectoria que permitiría obtener la señal deseada, claramente presenta un perfil curvo.

Básicamente el procedimiento para llevar a cabo el filtrado que se propone en este trabajo, consiste primero en representar la señal en el espacio de fase mediante la distribución de Wigner. A partir de esta representación obtener la trayectoria curva en términos del parámetro α . Con la descripción de la trayectoria en términos del parámetro α se lleva a cabo la convolución fraccionaria en el tiempo y de esta forma se desarrolla el filtrado. Este es en resumen el procedimiento que se plantea en este trabajo para llevar a cabo el filtrado.

Se mostro mediante algunos ejemplos que el filtrado antes descrito presenta un buen desempeño ante señales con ruido, tal que el ruido no se superpone a la señal en el espacio de fase de señales, distribución de Wigner, pero si la señal se superpone al ruido en el espacio de fase de señales, lo que se podría buscar en este caso es una atenuación de este ruido, tal y como se hace en el filtrado LIT. Ante esta característica del ruido las técnicas no difieren, pero bajo el filtrado que se propone en este trabajo tocaría resolver el problema de determinar la trayectoria óptima y el filtro óptimo para llevar a cabo el filtrado de la señal, tal y como lo plantea Wiener en el caso estacionario. Pero este problema de optimización no es abordado en este trabajo, se deja planteado como un tabajo futuro haciendo evidente las potencialidades de esta herramienta.

En este trabajo no se pretende dar un planteamineto que resulte eficaz a la hora de abordar un problema práctico, el objetivo principal de este trabajo es ilustrar una alternativa con el soporte matemático correspondiente, proponiendo un procedimiento diferente a los ya existentes, mostrando para un caso sencillo que efectivamente el procedimiento se puede llevar a cabo, pero para que pueda ser aplicado a problemas prácticos, a esta idea le faltan desarrollos adicionales.

3.2 Resumen del procedimiento de filtrado variante en el tiempo propuesto en este trabajo

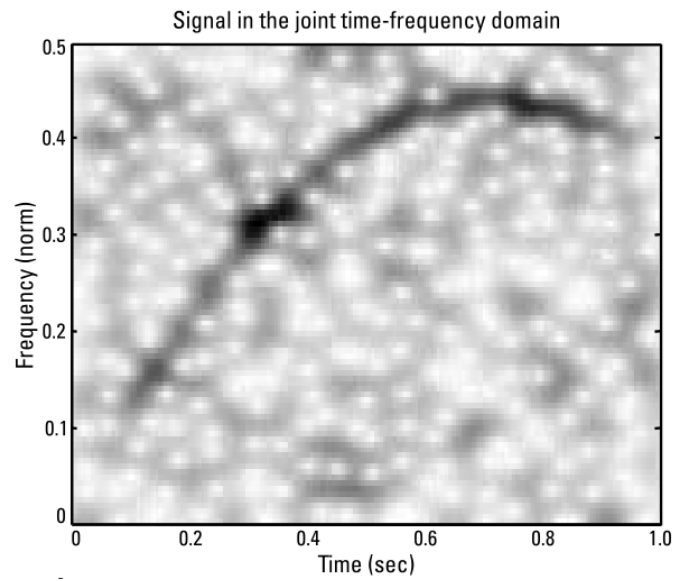


Figura 3.16: Distribución tiempo–frecuencia de una señal de radar. Fuente: [18].

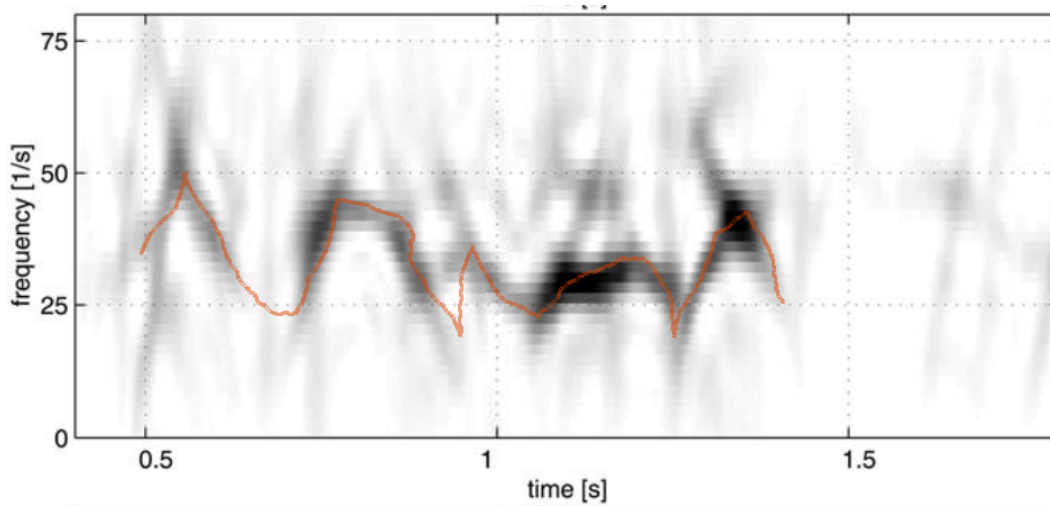


Figura 3.17: Distribución tiempo–frecuencia de una traza sísmica. Fuente: [18].

Capítulo 4

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este capítulo se presentan las conclusiones del trabajo realizado así como los posibles futuros trabajos que podrían realizarse.

4.1. CONCLUSIONES

Este trabajo se realizó con el fin de plantear un filtrado variante en el tiempo utilizando la convolución fraccionaria, como alternativa a los procedimientos existentes para el tratamiento de señales no estacionarias. Se pretende con esto establecer un aporte a la teoría de procesamiento de señales, siendo una herramienta aún en proceso de desarrollo.

Los objetivos planteados en este trabajo se cumplieron plenamente como se resume a continuación.

Se demostró que la convolución fraccionaria entre dos señales es una convolución a través de ejes oblicuos en el espacio de fase de señales, distribución de Wigner. Es esta propiedad la que permite llevar a cabo el filtrado planteado en este trabajo.

En este trabajo se plantea un algoritmo para implementar cada una de las definiciones propuestas: traslación fraccionaria y convolución fraccionaria en el lenguaje de Matlab.

También se demostró que para ordenes fraccionarios variantes en el tiempo, el operador de traslación fraccionaria describe trayectorias curvas de filtrado en el espacio de fase de señales, distribución de Wigner, lo cual corresponde a filtros variantes en el tiempo.

Con el desarrollo teórico descrito y los algoritmos realizados en este trabajo, se ha propuesto un filtrado variante en el tiempo con base en la convolución y traslación fraccionaria lo cual representa un aporte a la teoría de filtrado. Profundizando un poco más en su desarrollo podría llegar a representar una

4.2 TRABAJO FUTURO

alternativa más a la hora de tratar situaciones que impliquen tratamiento de señales no estacionarias.

A partir de los ejemplos simulados, se mostro que mediante el filtrado variante en el tiempo propuesto en este trabajo se obtienen mejores resultados que los obtenidos a partir de una técnica de filtrado lineal e invariante en el tiempo, para algunos ejemplos concretos.

Otro aspecto que se demostro fue que la convolución convencional es un caso particular de la convolución fraccionaria, por lo que el filtrado lienal e invariante en el tiempo es un caso particular del filtrado variante en el tiempo propuesto en este trabajo de grado.

Una de las características importantes de este trabajo es que el filtrado propuesto se realiza en el tiempo por lo que no hay violación del principio de incertidumbre.

Finalmente los resultados mostrados tiene un soporte teórico bien fundamentado lo cual permite ver de forma bien detallada en que consiste la técnica de filtrado, por ende se pueden entender mejor sus alcances y sus posibles falencias.

4.2. TRABAJO FUTURO

Lo que seguiría a este trabajo sería la definición de un filtro óptimo, el cual estime la trayectoria en términos del parámetro α , de modo que se obtenga la mayor relación señal a ruido posible, sería este un filtro adaptativo en términos del parámetro *alpha*.

Se propone la exploración de filtrados híbridos, es decir utilizar la técnica de filtrado propuesta en este trabajo de grado junto con técnicas de filtrados lineales e invariantes en el tiempo.

También se propone revisar los algoritmos que permiten implementar cada definición propuesta, e intentar mejorarlos en el sentido de permitir análisis de señales más complejas de una forma que sea práctica.

Explorar la posibilidad de utilizar la distribución de Wigner para segmentación de señales variantes en el tiempo, lo cual permitiría caracterizar los problemas de calidad de la energía eléctrica debido a perturbaciones transitorias y de corta duración.

Bibliografía

- [1] OLCAY AKAY. Linear fractional shift invariant (lfsi) systems. *IEEE* páginas 585—588 (2003).
- [2] RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS. “Tratamiento de señales por transformación de Fourier Fraccionaria. Aplicaciones a la holografía y al filtrado óptico”. Tesis Doctoral, Universidad Industrial de Santander (2010).
- [3] BOUALEM BOASHASH. “Time Frequency Signal Analysis and Processing”. ELSEVIER (2003).
- [4] JHON B. MOORE BRIAN D.O. ANDERSON. “Optimal Filtering”. Prentice Hall (1979).
- [5] SEBASTIEN COETMELLE. Fractional Fourier Transform. Disponible en http://www.optique-ingenieur.org/en/courses/opi_ang_m02_c09/co/contenu033.html.
- [6] LEON COHEN. “TIME-FREQUENCY ANALYSIS”. Prentice Hall PTR (1995).
- [7] F.B HILDEBRAND. “Advanced Calculus for Engineers”. New York: Prentice-Hall (1949).
- [8] [HTTP://WWW.ESCET.URJC.ES/~MATEMATI/TCTS/TRANSPARENCIAS%20SOBRE%20FILTROS.PDF](http://www.escet.urjc.es/~MATEMATI/TCTS/TRANSPARENCIAS%20SOBRE%20FILTROS.PDF).
- [9] GERALD KAISER. “A Friendly Guide Wavelets”. Birkhauser (1994).
- [10] ORHAN ARIKAN LEVENT ONURAL M. ALPER KUTAY, HALDUM M. OZAKTAS. Optimal Filtering In Fractional Fourier Domains. *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING* **45**, 1129—1143 (1997).
- [11] VICTOR NAMIAS. The fractional order transform and its application to quantum mechanics. *Institute of Mathematics and its Applications* **25**(3), 241–265 (1980).
- [12] G. FAYE BOUDREAUX—BARTELS OLCAY AKAY. Fractional Convolution and Correlation via Operator Methods and an Application to Detection of Linear FM Signals. *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING* **49**, 979—993 (2001).
- [13] HALDUM M. OZAKTAS. Wigner distributions, linear canonical transforms, and phase-space optics. Informe t’ecnico, Bilkent University (2000).
- [14] ANTONIA PAPANDREOU—SUPPAPPOLA. “APPLICATIONS IN TIME—FREQUENCY SIGNAL PROCESSING”. CRC PRESS (2003).

BIBLIOGRAFÍA

- [15] JAIRO BLANCO SOLANO. Diseño de una metodología para la evaluación de eventos causados por fallas de red e inserción de bancos de condensadores en sistemas eléctricos de distribución. Proyecto Fin de Carrera, Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. UIS. (2012).
- [16] JIAN—JIUN DING SOO—CHANG PEI. Relations between fractional operations and time—frequency distributions, and their applications. *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING* **49** (2001).
- [17] RAFAEL TORRES, PIERRE PELLAT-FINET Y YEZID TORRES. Fractional convolution, fractional correlation and their translation invariance properties. *Signal Processing* **90**, 1976—1984 (2010).
- [18] HAO LING VICTOR C. CHEN. “Time—Frequency Transforms for Radar Imaging and Signal Analysis”. Artech House (2002).

ANEXO A

A continuación se presentan los algoritmos desarrollados para llevar a cabo la convolución fraccionaria, la traslación fraccionaria entre otros. Cabe aclarar que estos algoritmos fueron propuestos en el language de programación Matlab.

A1 Algoritmo para obtener la convolución fraccionaria(*convat2*)

```
function convfrac=convat2(f,g,a)

% Funcion que realiza la convolución fraccionaria
% entre las señales f y g pero a un orden que varia en el tiempo.
%
% convat2(f,g,a)
%
% f,g->señales a convolucionar,
%
% a-> vector que representa el orden de la convolución.
%
%
%
%

alpha=a*pi/2;
Ng=length(g);
Nf=length(f);
deltaxf = sqrt(Nf);
deltaxg =1/sqrt(Nf+Ng);

if mod(Nf,2)==0
xf = [-(Nf/2):(Nf/2)-1]/deltaxf;
```

ANEXO A

```
else
    xf = [-(Nf-1)/2:(Nf-1)/2]/deltaxf;
end

f_aux=f.*exp(2i*pi*xf.*xf.*cot(alpha));
g_aux=zeros(Nf,Ng+Nf-1);
convfrac=zeros(1,Nf+Ng-1);

for i=1:Nf

    g_aux(i,:)=zeros(1,i-1) g zeros(1,Nf-i)];
end

j=1;
for i=-(Nf+Ng)/2:(Nf+Ng)/2-2

    convfrac(j)=f_aux.*exp(-2i*pi*deltaxg*i*xf.*cot(alpha))*g_aux(:,j);
    j=j+1;
end
```

A2 Algoritmo para obtener la traslación fraccionaria representada en el espacio de fase, distribución de Wigner (*TrasFrac*)

```
function Trasfracf=TrasFrac(x,tau,a,Ts)

% Funcion que produce la traslación fraccionaria de una señal x
%
% x--> señal a trasladar
% tau--> parametro temporal de la traslación fraccionaria
% a--> orden angular de la traslación fraccionaria
% Ts--> tiempo de muestreo de la señal de entrada
%

x_new=[zeros(1,1000) x zeros(1,1000)];
x_new_tras=[zeros(1,1000+tau) x zeros(1,1000-tau)];
N=length(x_new);
n=linspace(-N/2,N/2,N);
Trasfracf=x_new_tras.*exp((-2i*pi*tau*n*cot(a*pi/2))/N).*exp((1i*pi*cot(a*pi/2)*tau^2)/N);

wvd(Trasfracf,1,1024,Ts);grid on;
```

A3 Algoritmo para describir la trayectoria, en la distribución de Wigner, del filtro propuesto(*TrasFrac3*)

```

function wd=TrasFrac3(x,a,Ts)
% Funcion que produce la traslacion fraccionaria de una señal x.
%
% A diferencia de TrasFrac, TrasFrac3 superpone varias traslaciones,
% haciendo psible describir la taryectoria que describe el filtro.
%
%
% x--> señal a trasladar
% tau--> parametro temporal de la traslación fraccionaria
% a--> orden angular de la traslación fraccionaria
% Ts--> tiempo de muestreo de la señal de entrada
%
% Se supone que la señal empieza en el tiempo 0.

x_new=[zeros(1,1000) x zeros(1,1000)];
N=length(x_new);
wd=wvd(x_new,1,1024,0.01);

if length(a)>1
alpha=0.5*pi*linspace(a(1),a(length(a)),N);
else alpha=0.5*pi*a*ones(1,N);
end
y=alpha/(0.5*pi);

for tau=100:150:800
x_new_tras=[zeros(1,1000+tau) x zeros(1,1000-tau)];
n=linspace(-N/2,N/2,N);
Trasfracf=x_new_tras.*exp((-2i*pi*tau*n*cot(alpha(tau)))/N).*exp((1i*pi*cot(alpha(tau))*tau
wd_aux=wvd(Trasfracf,1,1024,Ts);
wd(:,N/2+tau-40:N)=wd_aux(:,N/2+tau-40:N);

end

```

```
t=Ts*(-N/2:N/2-1);  
fs=1/Ts;  
f=(fs/2)*[-N/2:N/2-1]/N;  
imagesc(t,f,real(wd));xlabel('t(s)');ylabel('f(Hz)');  
axis('xy');
```

```
grid on
```

A4 Algoritmo para obtener la distribución de Wigner(*wvd*)

```
function [y,tmin, tmax] = wvd(z, res, fa, Ts)

%WVD Wigner-Ville time-frequency distribution.

% USAGE:    y=wvd(x,res,fa)
%           or
%           [y,min_t,max_t]=tfd(...)
% INPUT:
% z        - Complex input signal (column- or row vector).
%           If signal is real use hilbert(x).
% res     - Number of samples between the windows.
%           Good value: res=1
% fa      - Length of frequency axis.
%           (Default value: half the signal length.)
% Ts      - Sampling time of input signal
% OUTPUT:
% y        - Contains the distribution. Each row represents
%           a frequency, each column a time instant.
% min_t    - first time-instant of distribution
% max_t    - final time-instant of distribution

%
%           /
% Author:   Rene Laterveer, R.Laterveer@fel.tno.nl
% Ref:     - B. Boashash, "Time- Frequency Signal Analysis, methods and
%           applicatoions", Chapter 7, Wiley Halsted Press (1992)

% This software may be freely used and modified for research and development
% purposes. If you wish to use it for commercial gain please contact me.
% I provide absolutely NO WARRANTY for this software.
%
%           /
% Copyright: Rene Laterveer
```

ANEXO A

```
nplts = floor(length(z)/res);

% make even for two transforms at once
nplts = floor(nplts/2)*2;

% make window length nearest odd integer to fa
lwin = 2*floor((fa-1)/2)+1;
hlf = (lwin+1)/2-1;

tmin = 1;
tmax = length(z);

% zero padding to remove wrap around problems
z = [zeros(1,lwin-1), z, zeros(1,lwin-1)];

y = zeros(nplts,fa);

R = zeros(1, fa);
idx = 1:hlf;

for n=0:nplts/2-1

    t = 2*n*res+lwin;
    R(1) = z(t)*conj(z(t)) + 1i*z(t+res)*conj(z(t+res));
    v1 = z(t+idx).*conj(z(t-idx));
    v2 = z(t+res+idx).*conj(z(t+res-idx));
    R(idx+1) = v1+1i*v2;
    R(fa-idx+1) = conj(v1)+1i*conj(v2);

    RF = fft(R, fa);

    y(2*n+1,:) = real(RF);
    y(2*n+2,:) = imag(RF);

end
y = fftshift(y',1);
```

ANEXO A

```
t=Ts*(-nplts/2:nplts/2-1);
```

```
fs=1/Ts;
```

```
imagesc(t,0.5*fs*[-fa/2:fa/2-1]/fa,real(y));
```

```
axis('xy')
```

A5 Algoritmo para obtener la transformación de Fourier fraccionaria(*fracf*)

```

%FAST COMPUTATION OF THE FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM
%by M. Alper Kutay, September 1996, Ankara
%Copyright 1996 M. Alper Kutay
%This code may be used for scientific and educational purposes
%provided credit is given to the publications below:
%
%Haldun M. Ozaktas, Orhan Arikan, M. Alper Kutay, and Gozde Bozdagi,
%Digital computation of the fractional Fourier transform,
%IEEE Transactions on Signal Processing, 44:2141--2150, 1996.
%Haldun M. Ozaktas, Zeev Zalevsky, and M. Alper Kutay,
%The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and
%Signal Processing, Wiley, 2000, chapter 6, page 298.
%
%The several functions given below should be separately saved
%under the same directory. fracF(fc,a) is the function the user
%should call, where fc is the sample vector of the function whose
%fractional Fourier transform is to be taken, and 'a' is the
%transform order. The function returns the samples of the a'th
%order fractional Fourier transform, under the assumption that
%the Wigner distribution of the function is negligible outside a
%circle whose diameter is the square root of the length of fc.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function[res]=fracf(fc,a)

% This function operates on the vector fc which is assumed to
% be the samples of a function, obtained at a rate 1/deltax
% where the Wigner distribution of the function f is confined
% to a circle of diameter deltax around the origin.
% (deltax^2 is the time-bandwidth product of the function f.)
% fc is assumed to have an even number of elements.
% This function maps fc to a vector, whose elements are the samples
% of the a'th order fractional Fourier transform of the function f.
% The lengths of the input and output vectors are the same if the
% input vector has an even number of elements, as required.

```

ANEXO A

```
% Operating interval: -2 <= a <= 2
% This function uses the 'core' function corefrmod2.m

N = length(fc);
if fix(N/2) ~= N/2
    error('Length of the input vector should be even');
end;
fc = fc(:);

fc = bizinter(fc);
fc = [zeros(N,1); fc ; zeros(N,1)];

flag = 0;

if (a>0) && (a<0.5)
    flag = 1;
    a = a-1;
end;
if (a>-0.5) && (a<0)
    flag = 2;
    a = a+1;
end;

if (a>1.5) && (a<2)
    flag = 3;
    a = a-1;
end;

if (a>-2) && (a<-1.5)
    flag = 4;
    a = a+1;
end;

res = fc;

if (flag==1) || (flag==3)
    res = corefrmod2(fc,1);
end;
```

ANEXO A

```
if (flag==2) || (flag==4)
    res = corefrmod2(fc,-1);
end;

if (a==0)
    res = fc;
else
if (a==2) || (a==-2)
    res = flipud(fc);
else
    res = corefrmod2(res,a);
end;
end;

res = res(N+1:3*N);
res = bizdec(res);
res(1) = 2*res(1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function[res]=corefrmod2(fc,a)

% Core function for computing the fractional Fourier transform.
% Valid only when 0.5 <= abs(a) <= 1.5
% Decomposition used:
%   chirp mutiplication - chirp convolution - chirp mutiplication

deltax = sqrt(length(fc));

phi = a*pi/2;
N = fix(length(fc));
deltax1 = deltax;
alpha = 1/tan(phi);
beta = 1/sin(phi);

x = [-ceil(N/2):fix(N/2)-1]/deltax1;
fc = fc(:);
fc = fc(1:N);
```

ANEXO A

```
f1 = exp(-1i*pi*tan(phi/2)*x.*x); %multiplication by chirp!
f1 = f1(:);
fc      = fc.*f1;
x = x(:);
clear x;
t =[-N+1:N-1]/deltax1;
hlptc =exp(1i*pi*beta*t.*t);
clear t;
hlptc = hlptc(:);

N2 = length(hlptc);
N3 = 2^(ceil(log(N2+N-1)/log(2)));
hlptcz = [hlptc;zeros(N3-N2,1)];
fcz = [fc;zeros(N3-N,1)];
Hcfft = ifft(fft(fcz).*fft(hlptcz)); % convolution with chirp
clear hlptcz;
clear fcz;
Hc = Hcfft(N:2*N-1);
clear Hcfft;
clear hlptc;
Aphi = exp(-1i*(pi*sign(sin(phi))/4-phi/2))/sqrt(abs(sin(phi)));
xx = [-ceil(N/2):fix(N/2)-1]/deltax1;
f1 = f1(:);
res = (Aphi*f1.*Hc)/deltax1; % multiplication by chirp!

if (fix(N/2) ~=N/2)
    res2(1:N-1) = res(2:N);
    res2(N)     = res(1);
    res      = res2;
end;

res = res(:);

clear f1
clear Hc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

ANEXO A

```
function xint=bizinter(x)

N=length(x);
im = 0;
if sum(abs(imag(x)))>0
    im = 1;
    imx = imag(x);
    x = real(x);
end;

x2=x(:);
x2=[x2.'; zeros(1,N)];
x2=x2(:);
xf=fft(x2);
if rem(N,2)==1 %N = odd
N1=fix(N/2+1); N2=2*N-fix(N/2)+1;
xint=2*real(ifft([xf(1:N1); zeros(N,1) ;xf(N2:2*N)].'));
else
xint=2*real(ifft([xf(1:N/2); zeros(N,1) ;xf(2*N-N/2+1:2*N)].'));
end;
if ( im == 1)
    x2=imx(:);
    x2=[x2.'; zeros(1,N)];
    x2=x2(:);
    xf=fft(x2);
    if rem(N,2)==1 %N = odd
N1=fix(N/2+1); N2=2*N-fix(N/2)+1;
xmint=2*real(ifft([xf(1:N1); zeros(N,1) ;xf(N2:2*N)].'));
    else
xmint=2*real(ifft([xf(1:N/2); zeros(N,1) ;xf(2*N-N/2+1:2*N)].'));
    end;
    xint = xint + 1i*xmint;
end;

xint = xint(:);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

ANEXO A

```
function xdec=bizdec(x)
```

```
k = 1:2:length(x);
```

```
xdec = x(k);
```

```
xdec = xdec(:);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function F2D=fracF2D(f2D,ac,ar)
```

```
[M,N] = size(f2D);
```

```
F2D = zeros(M,N);
```

```
if ac == 0
```

```
    F2D = f2D;
```

```
else
```

```
    for k = 1:N
```

```
        F2D(:,k) = fracf(f2D(:,k),ac);
```

```
    end;
```

```
end;
```

```
F2D = conj(F2D');
```

```
if ar ~= 0
```

```
for k = 1:M
```

```
    F2D(:,k) = fracf(F2D(:,k),ar);
```

```
end;
```

```
end;
```

```
F2D = conj(F2D');
```