EL ESPACIO DE KALTON-PECK

JEISON ARLEY MORENO CARRILLO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

EL ESPACIO DE KALTON-PECK

JEISON ARLEY MORENO CARRILLO

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Michael Alexánder Rincón Villamizar
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a Dios por haber estado siempre en todo este proceso y darme todo para llevarlo a cabo. A mi familia, que siempre estuvo para apoyarme y ayudarme en todo lo que necesité. También, agradecer al profesor Michael Rincón por su apoyo, enseñanza, acompañamiento y paciencia en la elaboración de este proyecto. Y por último, estoy profundamente agradecido con todos los docentes y compañeros que hicieron de estos años una experiencia inolvidable, en mi desarrollo académico, profesional e integral.

CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO: EL ESPACIO DE KALTON-PECK *

AUTOR: JEISON ARLEY MORENO CARRILLO **

PALABRAS CLAVE: F-ESPACIOS, SUMAS TORCIDAS, PROPIEDADES 3-ESPACIOS, ESPACIOS CUASINORMADOS, ESPACIO DE KALTON-PECK.

DESCRIPCIÓN:

Un F*-espacio* es un espacio vectorial topológico completamente metrizable. Un F-espacio Z es una *suma torcida* de dos F-espacios X y Y si Z contiene un subespacio X_0 isomorfo a X y tal que Z/X_0 es isomorfo a Y. Si una propiedad P definida en espacios cuasinormados cumple que se verifica para X siempre que se verifique para X_0 y Z/X_0 se denomina *propiedad 3-espacios*. En este trabajo estudiamos el proceso que Kalton y Peck llevaron a cabo para responder al problema 3-espacios para espacios de Hilbert formulado por Palais de la siguiente manera: ¿Si Y y X/Y son espacios de Hilbert, X debe ser isomorfo a un espacio de Hilbert? Recolectamos los elementos básicos de los espacios cuasinormados. También, presentamos algunos resultados obtenidos por Kalton y Peck en la teoría de sumas torcidas, y utilizamos argumentos originales para detallar el proceso con el que se construye el Espacio de Kalton-Peck. Obtenemos formas de simplificar la construcción de sumas torcidas usando aplicaciones cuasilineales, cuasiaditivas, Lipschitz y posteriormente aplicamos estos resultados para el caso de espacios de sucesiones, donde luego definimos el Espacio de Kalton-Peck como suma torcida de dos espacios de sucesiones.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Michael Alexánder Rincón Villamizar, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: THE KALTON-PECK SPACE [*]

AUTHOR: JEISON ARLEY MORENO CARRILLO [**]

KEYWORDS: F-SPACES, TWISTED SUMS, 3-SPACE PROPERTIES, QUASINORMED SPACES, KALTON-PECK SPACE.

DESCRIPTION:

An F*-space* is a completely metrizable topological vector space. An F-space Z is a *twisted sum* of two F-spaces X and Y if Z contains a subspace X_0 isomorphic to X and such that Z/X_0 is isomorphic to Y. If a property P defined on quasinormed spaces satisfies that it is verified for X whenever it is verified for X_0 and Z/X_0 it is called a 3-space property. In this paper we study the process that Kalton and Peck carried out to answer the 3-spaces problem for Hilbert spaces formulated by Palais as follows: If Y and X/Y are Hilbert spaces, must X be isomorphic to a Hilbert space? We collect the basic elements of quasinormed spaces. Also, we present some results obtained by Kalton and Peck in the theory of twisted sums, and use original arguments to detail the process by which the Kalton-Peck Space is constructed. We obtain ways to simplify the construction of twisted sums using quasilinear, quasiadditive, Lipschitz applications and then apply these results to the case of sequence spaces, where we then define the Kalton-Peck Space as a twisted sum of two sequence spaces.

---

[*] Bachelor Thesis

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Michael Alexánder Rincón Villamizar, Doctor en Matemáticas.

Introducción

Dada una propiedad P para espacios normados, X un espacio normado con un subespacio cerrado Y tal que Y y X/Y tienen la propiedad P, nos preguntamos: ¿Esto implica necesariamente que X tenga la propiedad P? Si la respuesta es positiva, decimos que P es una propiedad 3-espacios. Problemas de esta naturaleza también se le conocen como problemas 3-espacios. Uno de los primeros problemas 3-espacios conocidos en el que este concepto pudiera tener sus orígenes se encuentra en el problema de PALAIS [1], que plantea la siguiente pregunta: ¿Si Y y X/Y son espacios de Hilbert, X debe ser isomorfo a un espacio de Hilbert? Esta pregunta es la que motiva nuestro trabajo. Sin embargo, fue hasta la mitad de la década de los setenta cuando, cronológicamente, se empiezan a conocer resultados acerca de estos problemas (salvo el trabajo de KREIN y SMULLIAN, quienes alrededor de 1940 prueban que la reflexividad es una propiedad 3-espacios). Es conocido que propiedades como la *inyectividad*, *proyectividad*, *tener dimensión finita*, B*-convexidad* son 3-espacios. Por otro lado, también hay propiedades que no son 3-espacios. Contraejemplos surgen con la solución de ENFLO, LINDENSTRAUSS Y PISIER al problema de Palais en [2], donde responden de manera negativa a su pregunta, mostrando que existe un espacio no Hilbert X y un subespacio Y de X tales que Y y X/Y son ambos espacios de Hilbert.

Recordemos que si Y y Z son espacios normados, el producto $Y \oplus Z := Y \times Z$ con las operaciones de suma y multiplicación usuales, admite una estructura de espacio normado (considere por ejemplo la norma $\|\cdot\|\colon (y,z) \in Y \times Z \mapsto \|y\| + \|z\|$). Lo anterior sugiere un método para construir ejemplos de propiedades que no sean 3-espacios: es suficiente encontrar dos espacios Y y Z con la propiedad dada tales que $Y \oplus Z$ no la tenga. Una limitación de esta idea es que los espacios Y y Z resultan ser complementados en $Y \times Z$. De tal suerte que este método no sirve para mostrar que la propiedad de ser Hilbert no es 3-espacios puesto que todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert es complementado.
A pesar que la idea anterior no da luces sobre el problema de Palais, en [3] Kalton modificó

[1] Joram LINDENSTRAUSS y H. P. ROSENTHAL. *The $\mathcal{L}_p$ spaces*. Israel Journal of Mathematics, 7, 325-349, 1969.

[2] Per ENFLO, Joram LINDENSTRAUSS y Gilles PISIER. *On the “Three space problem”*. Mathematica Scandinavica, 36(2), 199-210, 1975.

[3] Nigel J. KALTON y N. T. PECK. *Twisted sums of sequence spaces and the three space problem*.

tal construcción considerando el caso en que la norma con que dotamos a $Y \times Z$ esté "torcida"por alguna aplicación homogénea $F\colon Z \to Y$ de la siguiente forma $\|\cdot\|_F\colon (y,z) \in Y \times Z \mapsto \|z\| + \|y - F(z)\|$. Esta aplicación define una cuasinorma en $Y \times Z$, y bajo ciertas condiciones resulta ser equivalente a una norma (ver página 2 en [4], y Teorema 1.6.k en [5]). El espacio $Y \times Z$ junto con la cuasinorma $\|\cdot\|_F$ es llamado *suma torcida de* Y *y* Z. A partir del desarrollo en la teoría de sumas torcidas, Kalton y Peck en 1979 dan una solución alternativa al problema de Palais, construyendo un espacio que es suma torcida de los espacios ℓ_2 y que no es isomorfo a un espacio de Hilbert. Este espacio es conocido actualmente como el *espacio de Kalton-Peck*. En palabras de Kalton, el enfoque de sumas torcidas "parece una construcción más global y algo más simple" al enfoque dado por Enflo, Lindenstrauss y Pisier. El objetivo de esta tesis es estudiar la construcción del espacio de Kalton-Peck como solución al problema 3-espacios de Palais con base en la teoría de sumas torcidas, y a su vez, detallamos con exhaustividad y con algunos argumentos originales los detalles en los resultados que en muchas ocasiones Kalton omite en el artículo estudiado.

Resumimos aquí la organización de este trabajo. En el primer capítulo recolectamos los elementos y conceptos básicos en espacios cuasinormados y propiedades 3-espacios que necesitamos para la comprensión del resto del trabajo. En el Capítulo 2, mostramos que las sumas torcidas no triviales son identificadas por unas aplicaciones llamadas "cuasilineales". Posteriormente, aplicamos los resultados del Capítulo 2 para presentar, en el Capítulo 3, el espacio de Kalton-Peck.

Transactions of the American Mathematical Society, 255, 1-15, 1979.

[4] Felix C. SANCHEZ y Jesus M. F. CASTILLO. *Report on twisted sums of Banach spaces*. Extracta mathematicae, 11(2), 384-387, 1996.

[5] Jesús CASTILLO y Manuel GONZÁLEZ. *Three-space problems in Banach space theory*. Vol. 1667. Springer Science & Business Media, 2010.

1. Preliminares

En este capítulo hacemos una revisión de los principales elementos y conceptos que utilizaremos en el resto del trabajo. En la primera sección mostramos algunas definiciones y ciertos resultados en la teoría de espacios cuasinormados. En la segunda sección introducimos las propiedades 3-espacios y mostramos algunos ejemplos.

1.1. Definiciones y resultados básicos

Definición 1.1. Una *cuasinorma* sobre un espacio vectorial real X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisface:

1. $\|x\| > 0$ para todo $x \in X$ con $x \neq \mathbf{0}$;
2. $\|tx\| = |t|\|x\|$ para todo $x \in X$ y $t \in \mathbb{R}$;
3. Existe $C \geq 1$ tal que $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$ para todo $x, y \in X$.

El par $(X, \|\cdot\|)$ es llamado *espacio cuasinormado*. La constante C es llamada *módulo de concavidad*.

Observación 1.2. Si $\|\cdot\|$ es una cuasinorma en X, entonces $\|\cdot\|$ induce una topología vectorial sobre X, en la que la base de vecindades de cada $a \in X$ está dada por los conjuntos $\mathcal{N}_a = \{N \subseteq X :$ existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq N\}$. Una prueba de este resultado puede consultarse en [6], página 55.

Definición 1.3. Un subconjunto B de un espacio vectorial topológico X es *acotado* si dada cualquier vecindad del cero U tenemos que $B \subseteq nU$ para algún entero n.

Definición 1.4. Se dice que un espacio vectorial topológico es *localmente acotado* si posee una vecindad acotada del cero.

El siguiente teorema tomado de [7], página 159 (1), expone una equivalencia entre los espacios localmente acotados y los espacios cuasinormados. En virtud de este teorema, podemos suponer que cuando estemos tratando con espacios localmente acotados, ya estos estarán dotados de una cuasinorma.

---

[6] Albert WILANSKY. *Modern methods in topological vector spaces*. Courier Corporation, 2013.

[7] Gottfried KÖTHE. *Topological Vector Spaces I*. Grundlehren der Math. Wissenschaften, 1969.

Teorema 1.5. *La topología de un espacio vectorial topológico E es dada por una cuasinorma si E es localmente acotado. Recíprocamente, un espacio cuasinormado siempre es localmente acotado.*

Definición 1.6. Sea X un espacio vectorial. Si $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones $1,\ 2$ de la Definición 1.1, y además $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$ (propiedad llamada p-subaditividad) para todo $x, y \in X$, diremos que $\|\cdot\|$ es una *p-norma*.

Es fácil ver que toda p-norma en X es una cuasinorma, pues basta observar que si $x, y \in X$, entonces

$$\|x+y\| = (\|x+y\|^p)^{1/p} \leq (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} \leq 2^{1/p} \max\{\|x\|, \|y\|\} \leq 2^{1/p}(\|x\| + \|y\|).$$

A continuación presentamos un resultado muy útil que usaremos a lo largo de este trabajo, seguido de un teorema de Aoki y Rolewicz que muestra que toda cuasinorma es equivalente a una p-norma.

Lema 1.7. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio cuasinormado con módulo de concavidad K. Si $p > 0$ es tal que $K = 2^{1/p-1}$, entonces para todo $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ se tiene que*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leq 4^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{1/p}.$$

Demostración. Sea $C = 2K$. Note que si $x, y \in X$, entonces $\|x+y\| \leq K(\|x\| + \|y\|) \leq C \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Afirmamos que para cada $x_1, ..., x_n \in X$ se tiene que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} C^k \|x_k\|.$$

Usaremos inducción sobre n. Para $n = 2$ es claro. Suponemos que la fórmula es válida para $n \geq 2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|x_1 + \cdots + x_{n+1}\| &\leq C \max\{\|x_1\|,\ \|x_2 + \cdots + x_{n+1}\|\} \\
&\leq C \max\left\{\|x_1\|,\ \max_{1 \leq k \leq n} C^k \|x_{k+1}\|\right\} \\
&= \max_{1 \leq k \leq n+1} C^k \|x_k\|,
\end{aligned}$$

completando el paso inductivo. Definamos $H\colon X \to \mathbb{R}$ por

$$H(x) = \begin{cases} 2^{n/p}, & \text{si } 2^{(n-1)/p} < \|x\| \leq 2^{n/p} \text{ con } n \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{si } x = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Por tanto, $\|x\| \leq H(x) \leq 2^{1/p}\|x\|$ para todo $x \in X$. Veamos ahora que

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq 2^{1/p}(H(x_1)^p + \cdots + H(x_n)^p)^{1/p}, \quad \text{si } x_1, \ldots, x_n \in X.$$

Lo anterior probará el lema puesto que si $x_1, \ldots, x_n \in X$, entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leq 2^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} H(x_i)^p\right)^{1/p} \leq 2^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} 2\|x_i\|^p\right)^{1/p} = 4^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{1/p}.$$

Procedemos por inducción sobre n. Para $n = 1$ es claro. Suponga que la desigualdad vale para m. Sean $x_1, \ldots, x_{m+1} \in X$, y supongamos que $\|x_1\| \geq \|x_2\| \geq \cdots \geq \|x_{m+1}\|$. Examinemos dos casos.

1. Los elementos del conjunto $\{H(x_i) : 1 \leq i \leq m+1\}$ son todos distintos. Considere $H(x_i) = 2^{n/p}$ y $H(x_{i-1}) = 2^{m/p}$ donde $n, m \in \mathbb{Z}$ y $1 < i \leq m+1$. Si sucede que $\|x_{i-1}\| \leq 2^{n/p}$, entonces $\|x_i\| \leq \|x_{i-1}\| \leq 2^{n/p}$, y así $H(x_i) = H(x_{i-1})$, pero esto no puede ser. Por tanto $H(x_i) = 2^{n/p} < \|x_{i-1}\| \leq H(x_{i-1}) = 2^{m/p}$. Así, $m > n$, o bien $m \geq n+1$. En consecuencia,

   $$\frac{H(x_i)}{H(x_{i-1})} = \frac{2^{n/p}}{2^{m/p}} = 2^{(n-m)/p} \leq 2^{-1/p} \Rightarrow H(x_i) \leq 2^{-1/p}H(x_{i-1}).$$

   Como i fue arbitrario, se tiene que $H(x_i) \leq 2^{-1/p}H(x_{i-1}) \leq 2^{-2/p}H(x_{i-2}) \leq \cdots \leq 2^{(1-i)/p}H(x_1)$, con $1 \leq i \leq m+1$. Por lo tanto, $C^i\|x_i\| \leq C^i H(x_i) = 2^{i/p}H(x_i) \leq 2^{i/p}2^{(1-i)/p}H(x_1) = 2^{1/p}H(x_1) \leq 2^{1/p}(H(x_1)^p + \cdots + H(x_{m+1})^p)^{1/p}$. De lo anterior, $\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq \text{máx}_{1\leq k\leq n} \ C^k\|x_k\| \leq 2^{1/p}(H(x_1)^p + \cdots + H(x_n)^p)^{1/p}$.

2. Si $H(x_i) = H(x_j)$ para algunos i, j distintos. Suponga $i > j$. Entonces existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{(r-1)/p} < \|x_i\| \leq \|x_{i-1}\| \leq \cdots \leq \|x_j\| \leq 2^{r/p}$. Luego $2^{(r-1)/p} \leq \|x_{j+1}\| \leq \|x_j\| \leq 2^{r/p}$. De esta manera,

   $$\begin{aligned} \|x_j + x_{j+1}\| &\leq C\,\text{máx}\{\|x_j\|, \|x_{j+1}\|\} \leq 2^{(r+1)/p} \\ &\Rightarrow H(x_j + x_{j+1})^p \leq 2^{r+1} = H(x_j)^p + H(x_{j+1})^p. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la hipótesis inductiva encontramos que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{m+1} x_i\right\|^p \leq 2\left(\sum_{i\neq j,j+1} H(x_i)^p + H(x_j+x_{j+1})^p\right) &\leq 2\sum_{i=1}^{m+1} H(x_i)^p \\ &\leq 4\sum_{i=1}^{m+1} \|x_i\|^p.\end{aligned}$$

Esto completa la prueba del teorema. □

Teorema 1.8 (Teorema de Aoki-Rolewicz [8]). *Si* $\|\cdot\|$ *es una cuasinorma en* X*, entonces existen* $C > 0$*,* $0 < p \leq 1$ *y una p-norma* $|||\cdot|||$ *en* X *tales que* $\|x\|/C \leq |||x||| \leq \|x\|$ *para cualquier* $x \in X$*.*

Demostración. Sea p como en la prueba del lema anterior, es decir, $K = 2^{1/p-1} \geq 1$. Note que $0 < p \leq 1$. Sea $|||\cdot|||\colon X \to \mathbb{R}$ dada por

$$|||x||| = \inf\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p\right)^{1/p} : x = \sum_{j=1}^{n} x_j\right\}, \quad x \in X.$$

Es claro que $|||x||| \leq \|x\|$. Además, si $(x_j)_{j=1}^n \subseteq X$ es tal que $x = \sum_{j=1}^n x_j$, entonces $\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\| \leq 4^{1/p}\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p}$. De manera que

$$\|x\| \leq 4^{1/p} \inf\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p\right)^{1/p} : x = \sum_{j=1}^{n} x_j\right\} = 4^{1/p}|||x|||,$$

y por tanto, $\|x\|/4^{1/p} \leq |||x|||$. Veamos ahora que $|||\cdot|||$ es una p-norma. Si $C = 4^{1/p}$, tenemos que $\|x\|/C \leq |||x||| \leq \|x\|$ para cada $x \in X$. Así, $|||x||| > 0$ si $x \neq 0$ y $|||x||| = 0$ si $x = \mathbf{0}$. Ahora, si $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned}|||tx||| &= \inf\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p\right)^{1/p} : tx = \sum_{j=1}^{n} x_j\right\} \\ &= \inf\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} \|ty_j\|^p\right)^{1/p} : x = \sum_{j=1}^{n} y_j\right\} = |t|\,|||x|||.\end{aligned}$$

---

[8] Stefan ROLEWICZ. *Metric linear spaces*. 1972.

Por último, veamos que $|||\cdot|||$ es p-subaditiva. Note que

$$\left\{\sum_{j=1}^{s} \|z_j\|^p : \sum_{j=1}^{s} z_j = x+y\right\} \supseteq \left\{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p + \sum_{j=1}^{m} \|y_j\|^p : \sum_{j=1}^{n} x_i = x,\ \sum_{j=1}^{m} y_i = y\right\}$$

Para ver esto, sean $x, y \in X$, con $\sum_{j=1}^{n} x_j = x$ y $\sum_{j=1}^{m} y_j = y$ y defina $(z_j)_{j=1}^{n+m} \subseteq X$ de la siguiente manera:

$$z_j = \begin{cases} x_j, & \text{si } 1 \leq j \leq n; \\ y_{j-n}, & \text{si } n+1 \leq j \leq m+n. \end{cases}$$

Así,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p + \sum_{j=1}^{m} \|y_j\|^p = \sum_{j=1}^{n} \|z_j\|^p + \sum_{j=n+1}^{m+n} \|z_j\|^p = \sum_{j=1}^{m+n} \|z_j\|^p, \quad \text{y} \\ \sum_{j=1}^{m+n} z_j = \sum_{j=1}^{n} z_j + \sum_{j=n+1}^{m+n} z_j = \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{m} y_j = x+y. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} |||x+y|||^p &= \inf \left\{\sum_{j=1}^{s} \|z_j\|^p : \sum_{j=1}^{s} z_i = x+y\right\} \\ &\leq \inf \left\{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p + \sum_{j=1}^{m} \|y_j\|^p : \sum_{j=1}^{n} x_i = x,\ \sum_{j=1}^{m} y_i = y\right\} \\ &= \inf \left\{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p : \sum_{j=1}^{n} x_i = x\right\} + \inf \left\{\sum_{j=1}^{m} \|y_j\|^p : \sum_{j=1}^{m} y_i = y\right\} \\ &= |||x|||^p + |||y|||^p. \end{aligned}$$

$\square$

Observación 1.9. Es sencillo verificar que toda p-norma induce una métrica. Si $\|\cdot\|$ es una p-norma sobre un espacio vectorial X, entonces $d(x,y) = \|x-y\|^p$, $x, y \in X$ define una métrica.

Definición 1.10. Un *espacio p-Banach* es un espacio p-normado que es completo con la métrica inducida por la p-norma.

Definición 1.11. Un espacio localmente acotado completo es llamado *espacio cuasi-Banach*.

Definición 1.12. Un espacio localmente acotado X es *localmente p-convexo* (o solo p-convexo), $0 < p \leq 1$, si tiene una vecindad acotada V de $\mathbf{0}$ tal que $\alpha x + \beta y \in V$ siempre que $x, y \in V$ y $|\alpha|^p + |\beta|^p \leq 1$.

Observación 1.13. Tal como un espacio normado induce una norma sobre el cociente entre este y un subespacio cerrado, se puede definir de una manera análoga una p-norma para el cociente entre un espacio p-normado y un subespacio cerrado de él.

En virtud del teorema anterior, podemos decir dada una cuasinorma $\|\cdot\|$, la p-norma $|||\cdot|||$ genera la misma topología de $\|\cdot\|$. En adelante denotaremos por $|||\cdot|||$ a la p-norma equivalente a la cuasinorma $\|\cdot\|$ en cuestión.

Definición 1.14. Un F-espacio es un espacio vectorial topológico que es completamente metrizable.

Ejemplo 1.15.

1. Los espacios de Banach y los espacios vectoriales topológicos Hausdorff de dimensión finita son F-espacios.
2. ℓ_p con $0 < p < 1$ es un F-espacio con la métrica dada por $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p$ si $x, y \in \ell_p$. Sin embargo, ℓ_p con la topología inducida por esta métrica no es un espacio de Banach.

Algunos otros ejemplos de F-espacios que no son Banach se estudian en [9], página 85. El siguiente resultado ha sido tomado de [9], página 170.

Teorema 1.16 (Teorema de la aplicación abierta)**.** *Sean E, F dos F-espacios. Toda aplicación lineal continua y sobreyectiva de E en F es abierta.*

Finalizamos esta sección presentando una variación del teorema de extensión lineal continua para espacios p-normados, y un segundo teorema más especializado relacionado al problema de selección, que siguiendo la demostración para el caso de espacios de Banach en [10], Proposición 7.2, puede mostrarse para espacios p-Banach.

Teorema 1.17. *Sean Z y Y espacios p-Banach, y $T\colon Z_0 \to Y_0$ un operador lineal y continuo entre dos subespacios densos $Z_0 \subset Z$ y $Y_0 \subset Y$. Entonces T tiene una extensión $\hat{T}\colon Z \to Y$ lineal y continua. Más aún, si T es abierta y sobreyectiva, y $\ker(T)$ es denso en $\ker(\hat{T})$, entonces $\hat{T}$ también es sobreyectiva.*

---

[9] François TREVES. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Acad. Press New York, 1967.

[10] Ernest MICHAEL. *Continuous Selections. I*. Annals of Mathematics, 63(2), 361-382, 1956.

Demostración. La demostración de existencia de la extensión es análoga al caso para espacios métricos, donde $\hat{T}$ es definida por

$$\begin{aligned} \hat{T} \colon Z &\to Y \\ z &\mapsto \lim_{n\to\infty} T(z_n), \quad \text{si } (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z_0^{\mathbb{N}} \text{ es tal que } z_n \longrightarrow z. \end{aligned}$$

De manera que nos enfocaremos ahora en mostrar la sobreyectividad de $\hat{T}$. Supongamos que T es sobreyectiva, abierta y $\overline{\ker(T)} = \ker(\hat{T})$. Sea $S\colon Y_0 \to Z_0/\ker(T)$ dada por $S(y) = w_0 + \ker(T)$ si $w_0 \in Z_0$ es tal que $T(w_0) = y$ y denotemos por $\hat{S}\colon Y_0 \to Z/\ker(\hat{T})$ al operador dado por $\hat{S}(y) = w + \ker(\hat{T})$ si $w \in Z$ es tal que $\hat{T}(w) = y$. Observe que $S^{-1}(z + \ker T) = Tz$ para cada $z \in Z_0$, y como T es abierta, se sigue que S es continua. Veamos que $\hat{S}$ es también continua. Si $y \in Y_0$, entonces $\hat{S}(y) = z + \ker(\hat{T})$ donde $z \in Z_0$ con $\hat{T}(z) = y$. Luego,

$$\begin{aligned} \left|\!\left|\!\left| z + \ker(\hat{T}) \right|\!\right|\!\right|^p &= \inf\{|\!|\!| z - k |\!|\!|^p : \ k \in \ker(\hat{T})\} \\ &\leq \inf\{|\!|\!| z - k |\!|\!|^p : \ k \in \ker(T)\} \\ &= |\!|\!| z + ker(T) |\!|\!|^p = |\!|\!| S(y) |\!|\!|^p \leq M |\!|\!| y |\!|\!|^p, \end{aligned}$$

para alguna $M > 0$. De esta forma, se tiene que $\hat{S}$ es continua. Para mostrar la sobreyectividad, sean $y \in Y$ dado y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y_0^{\mathbb{N}}$ tal que $y_n \longrightarrow y$. Así, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y como $\hat{S}$ es lineal y continua, la sucesión $(\hat{S}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy. Además, por la continuidad de $\hat{T}$ y la completitud de Z, tenemos que $Z/\ker(\hat{T})$ es completo, por lo que $\hat{S}(y_n) \longrightarrow z + \ker(\hat{T})$ para algún $z \in Z$. Sea $x_1 \in T^{-1}(y_1)$. Entonces existe $k_1^* \in \ker(\hat{T})$ tal que $|\!|\!| (x_1 - z) + k_1^* |\!|\!|^p \leq \left|\!\left|\!\left| (x_1 - z) + \ker(\hat{T}) \right|\!\right|\!\right|^p + 2^{-1}$. Como $\ker(T)$ es denso en $\ker(\hat{T})$, podemos tomar $k_1 \in \ker(T)$ de manera que $|\!|\!| k_1^* - k_1 |\!|\!|^p \leq \left|\!\left|\!\left| (x_1 - z) + \ker(\hat{T}) \right|\!\right|\!\right|^p$. Así, obtenemos

$$|\!|\!| (x_1 - z) + k_1 |\!|\!|^p \leq |\!|\!| (x_1 - z) + k_1^* |\!|\!|^p + |\!|\!| k_1 - k_1^* |\!|\!|^p \leq 2 \left|\!\left|\!\left| (x_1 - z) + \ker(\hat{T}) \right|\!\right|\!\right|^p + 2^{-1}.$$

Definimos $z_1 = x_1 + k_1$. Para $x_2 \in T^{-1}(y_2)$, existe $k_2^* \in \ker(\hat{T})$ tal que $|\!|\!| (x_2 - z) + k_2^* |\!|\!|^p \leq \left|\!\left|\!\left| (x_2 - z) + \ker(\hat{T}) \right|\!\right|\!\right|^p + 2^{-2}$, y nuevamente podemos escoger $k_2 \in \ker(T)$ tal que $|\!|\!| k_2 - k_2^* |\!|\!|^p \leq \left|\!\left|\!\left| (x_2 - z) + \ker(\hat{T}) \right|\!\right|\!\right|^p$, de donde

$$|\!|\!| (x_2 - z) + k_2 |\!|\!|^p \leq |\!|\!| (x_2 - z) + k_2^* |\!|\!|^p + |\!|\!| k_2 - k_2^* |\!|\!|^p \leq 2 \left|\!\left|\!\left| (x_2 - z) + \ker(\hat{T}) \right|\!\right|\!\right|^p + 2^{-2}.$$

Defina $z_2 = x_2 + k_2$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, dado $x_n \in T^{-1}(y_n)$ existe $k_n \in \ker(T)$ tal que

$$|||z_n - z|||^p \leq 2\left|\left|\left|(x_n - z) + \ker(\hat{T})\right|\right|\right|^p + 2^{-n},$$

donde $z_n = x_n + k_n$. De esta forma construimos las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Z_0. Observe que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Claramente, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z_0^{\mathbb{N}}$ y $\lim_{n\to\infty} T(z_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y$. Luego $\hat{T}(z) = y$ y $\hat{T}$ es sobreyectiva, completando así la prueba. □

El siguiente resultado será de utilidad en el trabajo. Para una prueba vea [10], Proposición 7.2.

Teorema 1.18. *Sean E y F espacios de p-Banach, y sea u una aplicación lineal continua de E sobre F. Entonces, para todo $\lambda > 1$, existe una aplicación continua $f : F \to E$ tal que, para todo $x \in F$,*

1. $f(x) \in u^{-1}(x)$,
2. $|||f(x)|||^p \leq \lambda \inf\{|||y|||^p : y \in u^{-1}(x)\}$,
3. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ *para todo escalar* α.

1.2. Propiedades 3-espacios

Como ya mencionamos anteriormente, las propiedades 3-espacios contemplan la estructura de un espacio dado desde el punto de vista de sus subespacios y cocientes, y dan un camino para probar que un espacio tenga alguna propiedad. En esta corta sección, nos referimos a ellas nuevamente y presentamos algunos ejemplos clásicos de las propiedades 3-espacios.

Definición 1.19. Sea P una propiedad definida para espacios cuasinormados. Decimos que P es una *propiedad* 3-*espacios* en la categoría de los espacios cuasinormados si todo espacio cuasinormado X posee la propiedad P, siempre que exista un subespacio cerrado M tal que M y X/M satisfagan la propiedad P.

Ejemplo 1.20. La completitud es una propiedad 3-espacios en la clase de los espacios p-normados.

Demostración. Sean $(X, |||\cdot|||)$ un espacio p-normado, y Y un subespacio cerrado. Supongamos que Y y X/Y son completos. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Como $|||(x_n - x_m) + Y|||^p \leq |||x_n - x_m|||^p$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$, la sucesión $(x_n + Y)_n$ es de Cauchy en X/Y y por tanto converge a algún $y + Y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escoja $z_n \in Y$

tal que $\|\!|x_n - y + z_n|\!\|^p < \|\!|(x_n - y) + Y|\!\|^p + 2^{-n}$. Luego, si $y_n = x_n - y + z_n$, entonces $\lim y_n = 0$. Por otro lado, $(z_n)_n$ es de Cauchy en Y puesto que

$$\begin{aligned}\|\!|z_n - z_m|\!\|^p &= \|\!|(x_n - y + z_n) - (x_m - y + z_m) + x_m - x_n|\!\|^p \\ &= \|\!|y_n - y_m + x_m - x_n|\!\|^p \leq \|\!|y_n - y_m|\!\|^p + \|\!|x_n - x_m|\!\|^p, \quad m, n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Por la completitud de Y, $z_n \longrightarrow z$ para algún $z \in Y$. De lo anterior, se tiene que $\lim x_n = \lim y_n + y - z_n = y - z$. Por lo tanto, X es completo. □

Ejemplo 1.21. La propiedad de tener dimensión finita es 3-espacios.

Demostración. Sean X un espacio cuasinormado y M un subespacio cerrado de X tal que M y X/M tienen dimensión finita. Entonces existen $m_1, \ldots, m_r \in M$ y $x_1, \ldots, x_s \in X$ tal que $\{m_1, \ldots, m_r\}$ es una base para M y $\{x_1 + M, \ldots, x_s + M\}$ es una base para X/M. Afirmamos que $\{m_1, \ldots, m_r, x_1, \ldots, x_s\}$ es una base para X.
Supongamos que $\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_r m_r + \alpha_{r+1} x_1 + \cdots + \alpha_{r+s} x_s = \mathbf{0}$ para algunos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s} \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha_{r+1} x_1 + \cdots + \alpha_{r+s} x_s = -(\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_r m_r) \in M$, y de esto

$$\alpha_{r+1}(x_1 + M) + \cdots + \alpha_{r+s}(x_s + M) = \mathbf{0}.$$

Como $\{x_1 + M, \ldots, x_s + M\}$ es linealmente independiente, tenemos que $\alpha_{r+1} = \cdots = \alpha_{r+s} = 0$. Ahora, $\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_r m_r = \mathbf{0}$. De la independencia lineal de $\{m_1, \ldots, m_r\}$, concluimos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{r+s} = 0$.
Finalmente, si $x \in X$, existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ tales que $x + M = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k (x_k + M)$. Así, $x - \sum_{k=1}^{s} \alpha_k x_k \in M$. Luego, existen escalares $\beta_1, \ldots, \beta_r$ tales que $x - \sum_{k=1}^{s} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{r} \beta_k m_k$. Se sigue entonces que $x = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{r} \beta_k m_k$. De lo anterior, X es generado por $\{m_1, \ldots, m_r, x_1, \ldots, x_s\}$. □

Ejemplo 1.22. La separabilidad es una propiedad 3-espacios.

Demostración. Sean X un espacio cuasinormado con módulo de concavidad $C \geq 1$ y M un subespacio de X tal que M y X/M son separables. Supongamos que $\{m_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{x_n + M : n \in \mathbb{N}\}$ son conjuntos densos numerables de M y X/M, respectivamente. Mostraremos que $\{x_i + m_j\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ es denso en X.
Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ dados. Entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\|(x - x_i) + M\| < \varepsilon/3C$. Podemos tomar $y \in X$ de forma que $y + M = (x - x_i) + M$ y $\|y\| \leq \|(x - x_i) + M\| + \varepsilon/3C$. Como $x - x_i - y \in M$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_i - y - m_j\| < \varepsilon/3C$. Por tanto

$$\|x - (x_i + m_j)\| \leq C(\|x - x_i - y - m_j\| + \|y\|) < \varepsilon.$$

□

Ejemplo 1.23. La reflexividad es una propiedad 3-espacios en la clase de los espacios de Banach. Una prueba de este ejemplo puede consultarse en [11], página 105.

Al contrario de las anteriores, existen propiedades que no son 3-espacios. En el Capítulo 3 mostraremos que la propiedad de ser Hilbert no es una propiedad 3-espacios. Para más ejemplos véase [5], página 232.

[11] Robert E. MEGGINSON. *An introduction to Banach space theory*. Vol. 183. Springer Science & Business Media, 2012.

2. Sumas torcidas

En este capítulo abordamos la teoría de sumas torcidas, su construcción y la relación que comparten con las aplicaciones cuasilineales. En particular, veremos que toda aplicación cuasilineal induce una suma torcida y toda suma torcida es equivalente a una inducida por una aplicación cuasilineal. Veremos también bajo diferentes condiciones, cómo determinar que dos sumas torcidas son equivalentes (Sección 2.2). También veremos cómo a partir de una función cuasiaditiva se construye una aplicación cuasilineal (Sección 2.3).

2.1. Preliminares de sumas torcidas

Definición 2.1. Sean X, Y y Z F-espacios. Diremos que Z es una suma torcida de X y Y si existe una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \to X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y \to 0,$$

donde j y q son aplicaciones lineales continuas tales que $\ker q = \operatorname{im} j$.

Observación 2.2. Por definición de sucesión exacta tenemos que $\{\mathbf{0}\} = \ker(j)$, esto significa que j es inyectiva. Además, la imagen bajo q de Z es el kernel de la aplicación nula definida en Y. Por tanto, $q(Z) = Y$ y q es sobreyectiva. Por el Teorema 1.16, la aplicación inversa a j definida sobre $j(X)$ es continua. Por otro lado, si denotamos por $\bar{q}$ a la aplicación canónica de $Z/j(X)$ en Y y dado que q es lineal, continua y sobreyectiva, del teorema de la aplicación abierta q es homomorfismo, y de [12], Proposición 1.2 de la página 75, se tiene que $\bar{q}$ es un isomorfismo. Por tanto, j y $\bar{q}$ definen isomorfismos entre X y $j(X) \subset Z$, y $Z/j(X)$ y Y respectivamente.
Recíprocamente, si X_0 es un subespacio de Z tal que $j : X \to X_0$ y $S : Z/X_0 \to Y$ son isomorfismos lineales, entonces $0 \to X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y \to 0$ define una suma torcida, donde $q(z) = S(z + X_0)$. En otras palabras, Z es suma suma torcida de X y Y si, y solo si, Z contiene un subespacio X_0 isomorfo a X y tal que Z/X_0 es isomorfo a Y.

De la observación anterior, podemos obtener los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.3.
- $\mathbb{R}$ es suma torcida de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

[12] H. SCHAEFER y M. P. H. WOLFF. *Topological Vector Spaces.* Alemania: Springer New York, 1999.

- ℓ_∞ es suma torcida de c_0 y ℓ_∞/c_0.

Definición 2.4. Sean X, Y y Z F-espacios cuasinormados, y supongamos que Z es suma torcida de X y Y, esto es,

$$0 \to X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y \to 0.$$

Si $\|jx\| = \|x\|$ para cada $x \in X$ y $\|y\| = \operatorname{ínf}\{\|z\| : qz = y\}$ para cada $y \in Y$, diremos que Z es una *suma torcida isométrica* de X y Y.

Observación 2.5. Si Z es una suma torcida isométrica de X y Y, entonces Z tiene un subespacio $j(X)$ isométrico a X y tal que el cociente $Z/j(X)$ es isométrico a Y. En efecto, si $y = qz$, entonces

$$\begin{aligned}\|y\| = \operatorname{ínf}\{\|w\| : qw = y\} &= \operatorname{ínf}\{\|z+u\| : qu = \mathbf{0}\}\\ &= \operatorname{ínf}\{\|z+u\| : u \in j(X)\} = \|z + j(X)\|.\end{aligned}$$

Definición 2.6. Sean X, Y F-espacios y Z_1, Z_2 dos sumas torcidas de X y Y.

1. Diremos que Z_1 y Z_2 son *equivalentes* si existe una aplicación lineal continua $T : Z_1 \to Z_2$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "i_X"] & Z_1 \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "T"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "i_Y"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j_2"] & Z_2 \arrow[r, "q_2"] & Y \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

   Aquí i_X denota la aplicación identidad sobre el espacio X.

2. Diremos que Z_1 y Z_2 son *proyectivamente equivalentes* si existe una aplicación lineal continua $T : Z_1 \to Z_2$ y escalares no nulos α y β tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\beta i_X"] & Z_1 \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "T"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\alpha i_Y"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j_2"] & Z_2 \arrow[r, "q_2"] & Y \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Observación 2.7. En 1 y en 2, gracias al Lema de los cinco [13] (Lema 7.1 de la página 184), podemos decir que T es necesariamente inyectiva y sobreyectiva. Por el Teorema 1.16, T es un isomorfismo.

Desde ahora restringiremos nuestro estudio de sumas torcidas a F-espacios localmente acotados (ver Teorema 1.5). Un resultado de Roelcke presentado a continuación muestra que la suma torcida de F-espacios localmente acotados es un F-espacio localmente acotado, esto es, ser localmente acotado es una propiedad 3-espacios. Una prueba puede ser consultada en [14], Teorema 1.1.

Teorema 2.8. *Sea X un F-espacio y $Y \subset X$ un subespacio cerrado localmente acotado. Si X/Y es localmente acotado, entonces X es localmente acotado.*

Dados dos F-espacios X y Y, la forma más simple de construir una suma torcida entre estos es tomando su suma directa $X \oplus Y$ dotándolo con las operaciones y la topología usual. Una suma torcida Z de X y Y que sea equivalente a $X \oplus Y$ la llamaremos *trivial*.

Teorema 2.9. *Suponga que X y Y son espacios p-Banach y que Z es una suma torcida de X y Y cuasinormada por p-norma. Entonces Z es proyectivamente equivalente a una suma torcida isométrica de X y Y.*

Demostración. Sean $j\colon X \to Z$ y $q\colon Z \to Y$ las aplicaciones que inducen la suma torcida. La Observación 2.2 conlleva por la continuidad a que existan constantes α y $\beta > 0$ tales que $\|x\| \leq \beta\|jx\|$ para cada $x \in X$, y $\inf_{x\in X} \|z - jx\| \leq \alpha\|qz\|$ para cada $z \in Z$. Defina

$$\|z\|_0 = \inf_{x\in X}(\|z - jx\|^p + \beta^{-p}\|x\|^p)^{1/p}, \quad \text{y}$$
$$\|z\|_1 = \max(\alpha\|qz\|,\ \|z\|_0)$$

si $z \in Z$. Como $\|z\|_0 \leq \|z\|$ y $\alpha\|qz\| \leq \alpha\|q\|\|z\|$ para todo $z \in Z$, tenemos que $\|z\|_1 \leq \max(\alpha\|q\|,\ 1)\|z\|$ si $z \in Z$. Afirmamos que $\|\cdot\|_1$ es una p-norma en Z. Dados $z, w \in Z$ y $\varepsilon > 0$, existen $x_0, x_1 \in X$ tales que

$$\varepsilon + \|z\|_1^p \geq \|z - jx_0\|^p + \beta^{-p}\|x_0\|^p, \quad \text{y}$$
$$\varepsilon + \|w\|_1^p \geq \|w - jx_1\|^p + \beta^{-p}\|x_1\|^p.$$

---

[13] William S. MASSEY. *A basic course in algebraic topology, Graduate texts in mathematics*. 3.ª ed. Vol. 127. Springer, ISBN 978-0-387-97430-9, 2012.

[14] Nigel J KALTON. *The three space problem for locally bounded F-spaces*. Compositio Mathematica, 37(3), 243-276, 1978.

Se sigue que

$$\begin{aligned}
2\varepsilon + \|z\|_1^p + \|w\|_1^p &> \|z - jx_0\|^p + \|w - jx_1\|^p + \beta^{-p}\|x_0\|^p + \beta^{-p}\|x_1\|^p \\
&\geq \|z + w - j(x_0 + x_1)\|^p + \beta^{-p}\|x_0 + x_1\|^p \\
&\geq \|z + w\|_1^p.
\end{aligned}$$

De lo anterior, $\|z + w\|_1^p \leq \|z\|_1^p + \|w\|_1^p$. Ahora, si $z \in Z \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $z \notin j(X)$, entonces $qz \neq \mathbf{0} \Rightarrow \|qz\| > 0$, de donde $\|z\|_1 = \text{máx}(\alpha\|qz\|,\ \|z\|_0) \geq \alpha\|qz\| > 0$. Por otro lado, si $z \in j(X)$, $z = jx'$ para algún $x' \in X$ con $x' \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\|z\|_0 = \inf_{x \in X}(\|j(x' - x)\|^p + \beta^{-p}\|x\|^p)^{1/p} \geq \inf_{x \in X}(\beta^{-p}\|x' - x\|^p + \beta^{-p}\|x\|^p)^{1/p} \geq \beta^{-1}\|x'\| > 0.$$

Así, $\|z\|_1 = \text{máx}(\alpha\|qz\|,\ \|z\|_0) \geq \|z\|_0 > 0$. Sea ahora $t \in \mathbb{R}$. Si $t = 0$, $\|tz\|_1 = \|\mathbf{0}\|_1 = \text{máx}(0,\ \|\mathbf{0}\|_0) = 0$. En caso contrario, la aplicación $x \longmapsto tx$ de X en X es biunívoca. Por lo que $\{(\|tz - ju\|^p + \beta^{-p}\|u\|^p)^{1/p} :\ u \in X\} = \{(\|tz - jtx\|^p + \beta^{-p}\|tx\|^p)^{1/p} :\ x \in X\}$. Así,

$$\begin{aligned}
\|tz\|_0 &= \inf_{u \in X}(\|tz - ju\|^p + \beta^{-p}\|u\|^p)^{1/p} \\
&= \inf_{x \in X}(\|tz - jtx\|^p + \beta^{-p}\|tx\|^p)^{1/p} \\
&= |t| \inf_{x \in X}(\|z - jx\|^p + \beta^{-p}\|x\|^p)^{1/p} \\
&= |t|\|z\|_0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\|tz\|_1 = \text{máx}(\alpha\|qtz\|,\ \|tz\|_0) = |t|\,\text{máx}(\alpha\|qz\|,\ \|z\|_0) = |t|\|z\|_1$. Sean Z_1 el espacio cuasinormado $(Z, \|\cdot\|_1)$, y $T\colon Z \to Z_1$ la aplicación identidad. Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta^{-1}i_X"] & Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "T"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\alpha i_Y"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\beta j"] & Z_1 \arrow[r, "\alpha q"] & Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, para ver que Z_1 es suma torcida isométrica de X y Y, sea $x \in X$. Tenemos que $\alpha\|q\beta jx\| = \alpha\beta\|qjx\| = 0$, pues $j(X) = \ker(q)$. Luego,

$$\|\beta jx\|_1 = \text{máx}\{\alpha\|q\beta jx\|,\ \|\beta jx\|_0\} = \text{máx}\{0,\ \|\beta jx\|_0\} = \|\beta jx\|_0.$$

Por otra parte, por definición $\|\beta jx\|_0 = \inf_{x' \in X}(\|j(\beta x - x')\|^p + \beta^{-p}\|x'\|^p)^{1/p}$. Como $\beta\|ju\| \geq$

$\|u\|$ para todo $u \in X$ y $\|\cdot\|$ es p-subaditiva, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\beta jx\|_0 = \inf_{x'\in X}(\|j(\beta x - x')\|^p + \beta^{-p}\|x'\|^p)^{1/p} &\geq \inf_{x'\in X}(\beta^{-p}\|\beta x - x'\|^p + \beta^{-p}\|x'\|^p)^{1/p} \\ &= \beta^{-1}\inf_{x'\in X}(\|\beta x - x'\|^p + \|x'\|^p)^{1/p} \\ &\geq \beta^{-1}\inf_{x'\in X}\|\beta x - x' + x'\| = \|x\|.\end{aligned}$$

Además, $\inf_{x'\in X}(\beta^{-p}\|\beta x - x'\|^p + \beta^{-p}\|x'\|^p)^{1/p} \leq \|x\|$. Así, $\|\beta jx\|_0 = \|x\|$. Concluimos que βj es una isometría. Veamos ahora que $\|y\| = \inf\{\|z\|_1 : \alpha qz = y\}$. Si $y \in Y$ y $qz = y$, entonces $\|z\|_1 = \max\{\alpha\|qz\|, \|z\|_0\} \geq \alpha\|y\|$. Así, $\inf\{\|z\|_1 :\ qz = y\} \geq \alpha\|y\|$. Para ver la desigualdad contraria, sea $\varepsilon > 0$ dado. Entonces existe $x_0 \in X$ tal que $\|z - jx_0\| \leq \inf_{x\in X}\|z - jx\| + \varepsilon\|\alpha qz\|$. Ahora,

$$\inf_{x\in X}\|z - jx\| + \varepsilon\|\alpha qz\| \leq \alpha\|qz\| + \varepsilon\|\alpha qz\| = (1+\varepsilon)\alpha\|y\|.$$

Como $q(z - jx_0) = qz$ y $\|z - jx_0\|_0 \leq \|z - jx_0\| \leq (1+\varepsilon)\alpha\|y\|$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|z - jx_0\|_1 = \max\{\alpha\|q(z - jx_0)\|,\ \|z - jx\|_0\} &\leq \max\{\alpha\|qz\|,\ (1+\varepsilon)\alpha\|y\|\} \\ &= \max\{\alpha\|y\|,\ (1+\varepsilon)\alpha\|y\|\}.\end{aligned}$$

La arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ implica que $\alpha\|y\| \geq \inf\{\|z\|_1 :\ qz = y\}$. Por lo tanto, $\alpha\|y\| = \inf\{\|z\|_1 :\ qz = y\}$. Si $y' = y/\alpha$, entonces $\alpha\|y'\| = \inf\{\|z\|_1 :\ qz = y'\}$, y se sigue que $\alpha\|y/\alpha\| = \inf\{\|z\|_1 :\ qz = y/\alpha\}$. Luego, $\|y\| = \inf\{\|z\|_1 :\ \alpha qz = y\}$.
Ya que la completitud es una propiedad 3-espacios en la clase de los espacios p-normados (Ejemplo 1.20), y X y Y son p-Banach, entonces Z_1 es completo. Además, $\|Tz\|_1^p = \|z\|_1^p \leq \max(\alpha\|q\|, 1)^p\|z\|^p = M\|z\|^p$ para cada $z \in Z$, donde $M = \max(\alpha\|q\|, 1)^p$. En consecuencia, T es continua. De lo anterior, se concluye que Z_1 es una suma torcida isométrica de X y Y proyectivamente equivalente a Z. $\square$

En el teorema anterior hemos supuesto inicialmente que Z está cuasinormada por una cuasinorma p-subaditiva. Sin embargo, como se expresa en [15], páginas 6 y 7, basta que Z sea p-convexa para que esto ocurra.

---

[15] Nigel J. KALTON, N. T. PECK y James W. ROBERTS. *An F-space sampler*. Vol. 89. CUP Archive, 1979.

2.2. Sumas torcidas a partir de aplicaciones cuasilineales

Definición 2.10. Sean X, Y espacios cuasinormados. Diremos que $F\colon Y \to X$ es cuasilineal si:

1. $F(ty) = tF(y)$ para todo $y \in Y$ y $t \in \mathbb{R}$.
2. Existe $M \geq 0$ tal que $\|F(y_1 + y_2) - F(y_1) - F(y_2)\| \leq M(\|y_1\| + \|y_2\|)$ para todo $y_1, y_2 \in Y$.

Ejemplo 2.11.

- Todo operador lineal es cuasilineal.
- Sea $f\colon c_{00} \to c_{00}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n \operatorname{sen} - \ln \frac{|x_n|}{\|x\|} \right) e_n, & \text{si } x \neq \mathbf{0}; \\ 0, & \text{si } x = \mathbf{0}, \end{cases} \quad \text{si } x = (x_n) \in c_{00},$$

  donde $x \operatorname{sen} - \ln x := 0$ si $x = 0$. Entonces f es cuasilineal.
- La aplicación de Kalton-Peck es cuasilineal (ver sección 3.2).

Dada una aplicación cuasilineal entre dos F-espacios X y Y (localmente acotados), es posible construir una suma torcida a partir de la aplicación, como lo mostramos en el próximo resultado.

Proposición 2.12. *Sean X y Y espacios cuasi-Banach, y $F\colon Y \to X$. Definamos*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_F\colon X \times Y &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \|(x, y)\|_F = \|y\| + \|x - F(y)\| \end{aligned}$$

Entonces $\|\cdot\|_F$ es una cuasinorma en el espacio vectorial $X \oplus_F Y := X \times Y$, y las aplicaciones

$$j\colon x \in X \mapsto (x, \mathbf{0}) \in X \oplus_F Y, \quad \text{y} \quad q\colon (x, y) \in X \oplus_F Y \mapsto y \in Y,$$

son lineales, continuas, con j inyectiva, q sobreyectiva, y $\operatorname{Im} j = \ker q$. Más aún, $X \oplus_F Y$ es cuasi-Banach.

Demostración. Veamos que $\|\cdot\|_F$ es una cuasinorma. En efecto, $\|(\mathbf{0}, \mathbf{0})\|_F = \|\mathbf{0}\| + \|\mathbf{0} - F(\mathbf{0})\| = 0$ y $\|(x, y)\|_F = 0$ implica $\|y\| = 0$ y $\|x - F(y)\| = 0$, o sea, $y = \mathbf{0}$ y $x = F(y) =$

$F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Si $(x,y) \in X \oplus_F Y$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces $\|t(x,y)\|_F = \|ty\| + \|tx - F(ty)\| = |t|(\|y\| + \|x - F(y)\|) = |t|\|(x,y)\|_F$. Por último, sean $C_1,\ C_2$ módulos de concavidad para las cuasinormas en X y Y respectivamente. Si $(x,y),(x',y') \in X \oplus_F Y$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|(x,y) + (x',y')\|_F \\
&= \|y + y'\| + \|x + x' - F(y + y')\| \\
&\leq C_1(\|y\| + \|y'\|) + C_2(\|x + x' - F(y) - F(y')\| + \|F(y + y') - F(y) - F(y')\|) \\
&\leq C_1(\|y\| + \|y'\|) + C_2^2(\|x - F(y)\| + \|x' - F(y')\|) + M(\|y\| + \|y'\|) \\
&= (C_1 + M)(\|y\| + \|y'\|) + C_2^2(\|x - F(y)\| + \|x' - F(y')\|) \\
&\leq L(\|y\| + \|x - F(y)\| + \|y'\| + \|x' - F(y')\|) \\
&= L(\|(x,y)\|_F + \|(x',y')\|_F),
\end{aligned}$$

donde $L = \text{máx}\{C_1 + M,\ C_2^2\}$. Es sencillo ver que las aplicaciones j y q son lineales y continuas. Es claro que j es inyectiva, q es sobreyectiva y $\operatorname{Im} j = \ker q$. Finalmente, como la completitud es una propiedad 3-espacios, $X \oplus_F Y$ es completo, de donde se sigue que $X \oplus_F Y$ es una suma torcida de X y Y. $\square$

La pregunta natural que aparece aquí es si toda suma torcida aparece como en la proposición anterior. El siguiente teorema muestra que toda suma torcida es equivalente a una generada por una aplicación cuasilineal. Así, podemos decir que existe una correspondencia entre las sumas torcidas y las aplicaciones cuasilineales.

Teorema 2.13. *Sean X y Y espacios cuasi-Banach. Si Z es una suma torcida de X y Y, entonces existe una aplicación cuasilineal $F\colon Y \to X$ tal que Z es equivalente a $X \oplus_F Y$.*

Demostración. Sean C un módulo de concavidad para las cuasinormas en $X,\ Y$ y Z, y $0 \to X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y \to 0$ la sucesión exacta que define la suma torcida. Vamos a construir una aplicación lineal (no necesariamente continua) $\theta\colon Y \to Z$ con la propiedad de que $q\theta(y) = y$ para todo $y \in Y$. Sea B una base algebraica para Y. Como q es sobreyectiva, para cada $b \in B$, podemos escoger $z_b \in q^{-1}(b)$. Definamos $\theta(b) = z_b$ y si $y \in Y$ y $y = \sum_{b \in F} a_b \cdot b$ con $F \subseteq B$ finito,

$$\theta(y) := \sum_{b \in F} a_b \cdot z_b.$$

No es difícil ver que θ es lineal, y justamente por su definición tenemos que $q\theta(y) = y$ para cada $y \in Y$.

Por otro lado, como q es lineal, continua y sobreyectiva entre dos espacios p-Banach, del Teorema 1.18 tenemos que existe una aplicación continua $\phi : Y \to Z$ tal que para todo $y \in Y$ y todo escalar α, $q\phi(y) = y$ y $\phi(\alpha y) = \alpha\phi(y)$. Como ϕ es continua, existe una constante K tal que $\|\phi(y)\| \leq K\|y\|$ para todo $y \in Y$.
Sea $F\colon Y \to X$ dada por $F(y) = j^{-1}(\phi(y) - \theta(y))$. Observe que si $y \in Y$, $q(\phi(y) - \theta(y)) = q\phi(y) - q\theta(y) = \mathbf{0}$. Luego, $\phi(y) - \theta(y) \in \ker q = j(X)$. Por la Observación 2.2 sabemos que j es isomorfismo de X en $j(X) \subset Z$. Por tanto, F está bien definida.
Sea $L > 0$ tal que $\|j^{-1}z\| \leq L\|z\|$ para todo $z \in j(X)$. Entonces para cada $y_1, y_2 \in Y$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\|F(y_1 + y_2) - F(y_1) - F(y_2)\| \\
&= \|j^{-1}(\phi(y_1 + y_2) - \theta(y_1 + y_2)) - j^{-1}(\phi(y_1) - \theta(y_1)) - j^{-1}(\phi(y_2) - \theta(y_2))\| \\
&= \|j^{-1}(\phi(y_1 + y_2)) - j^{-1}(\phi(y_1)) - j^{-1}(\phi(y_2)\| \\
&= \|j^{-1}(\phi(y_1 + y_2) - \phi(y_1) - \phi(y_2))\| \\
&\leq L\|\phi(y_1 + y_2) - \phi(y_1) - \phi(y_2)\| \\
&\leq LC(\|\phi(y_1 + y_2)\| + \|\phi(y_1) + \phi(y_2)\|) \\
&\leq LC(\|\phi(y_1 + y_2)\| + C(\|\phi(y_1)\| + \|\phi(y_2)\|)) \\
&\leq C^2L(\|\phi(y_1 + y_2)\| + \|\phi(y_1)\| + \|\phi(y_2)\|) \\
&\leq C^2L(KC(\|y_1\| + \|y_2\|) + K\|y_1\| + K\|y_2\|) \\
&= C^3KL(\|y_1\| + \|y_2\|) + C^2KL(\|y_1\| + \|y_2\|) \\
&\leq 2C^3KL(\|y_1\| + \|y_2\|).
\end{aligned}
$$

Ahora, si $y \in Y$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces $F(ty) = j^{-1}(\phi(ty) - \theta(ty)) = tj^{-1}(\phi(y) - \theta(y)) = tF(y)$, con $t \in \mathbb{R}$. De modo que F es cuasilineal. Defina $T\colon Z \to X \oplus_F Y$ por $Tz = (j^{-1}(z - \theta qz),\ qz)$ si $z \in Z$. Notemos que $j^{-1}(z - \theta qz)$ tiene sentido, pues $q(z - \theta qz) = qz - q\theta qz = qz - qz = \mathbf{0}$, es decir, $z - \theta qz \in \ker(q) = j(X)$, de manera que $(j^{-1}(z - \theta qz),\ qz) \in X \oplus_F Y$ para todo $z \in Z$. Si $z \in Z$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|Tz\| &= \|(j^{-1}(z-\theta qz),\ qz)\| \\
&= \|j^{-1}(z-\theta qz) - F(qz)\| + \|qz\| \\
&= \|j^{-1}(z-\theta qz) - j^{-1}(\phi(qz)-\theta(qz))\| + \|qz\| \\
&= \|j^{-1}(z-\phi(qz))\| + \|qz\| \\
&\leq L\|z-\phi(qz)\| + \|qz\| \\
&\leq CL(\|z\| + \|\phi(qz)\|) + \|qz\| \\
&\leq CL\|z\| + CLK\|q\|\|z\| + \|q\|\|z\| \\
&= (CL + CLK\|q\| + \|q\|)\|z\|.
\end{aligned}
$$

Por tanto, T es continua. Adicionalmente, T es lineal. Para ver esto, sean $z_1, z_2 \in Z$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
T(tz_1 + z_2) &= (j^{-1}(tz_1 + z_2 - \theta q(tz_1 + z_2)),\ q(tz_1 + z_2)) \\
&= (j^{-1}(tz_1 + z_2 - t\theta q(z_1) - \theta q(z_2)),\ tq(z_1) + q(z_2)) \\
&= (tj^{-1}(z_1 - \theta q(z_1)) + j^{-1}(z_2 - \theta q(z_2)),\ tq(z_1) + q(z_2)) \\
&= t(j^{-1}(z_1 - \theta q(z_1)),\ q(z_1)) + (j^{-1}(z_2 - \theta q(z_2)),\ q(z_2)) \\
&= tT(z_1) + T(z_2).
\end{aligned}
$$

Por último, veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & Z & \xrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_Y} & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j'} & X \oplus_F Y & \xrightarrow{q'} & Y & \longrightarrow & 0.
\end{array}
$$

Dados $x \in X$ y $z \in Z$, tenemos que $T(jx) = (j^{-1}(jx - \theta qjx), qjx) = (j^{-1}jx, \mathbf{0}) = (x, \mathbf{0}) = j'x$ y $q'T(z) = q'(j^{-1}(z - \theta qz), qz) = qz$. Del Lema de los cinco, concluimos que T es un isomorfismo, y por tanto Z es equivalente a $X \oplus_F Y$. $\square$

Definición 2.14. Diremos que dos aplicaciones cuasilineales $F, G \colon Y \to X$ son (proyectivamente) equivalentes si las sumas torcidas $X \oplus_F Y$ y $X \oplus_G Y$ son (proyectivamente) equivalentes.

Observación 2.15. Note que si F es la aplicación nula en Y, entonces induce la suma directa topológica ordinaria $X \oplus Y$. Diremos que F es *trivial* si es equivalente a la aplicación nula. En tal caso, la sucesión exacta corta $0 \to X \xrightarrow{j} X \oplus_F Y \xrightarrow{q} Y \to 0$ *se escinde*, esto es, $X \oplus_F Y$ es equivalente a $X \oplus Y$.

Lema 2.16. *Sean X y Y F-espacios, y $F, G\colon Y \to X$ aplicaciones cuasilineales. Sea Y_0 un subespacio denso de Y y suponga que $F \restriction Y_0$ y $G \restriction Y_0$ son equivalentes. Entonces F y G son equivalentes.*

Demostración. Por definición, existe un operador lineal continuo $T\colon X \oplus_{F\restriction Y_0} Y_0 \to X \oplus_{G\restriction Y_0} Y_0$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & X \oplus_{F\restriction Y_0} Y_0 & \xrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle i_X} & & \big\downarrow{\scriptstyle T} & & \big\downarrow{\scriptstyle i_Y} & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & X \oplus_{G\restriction Y_0} Y_0 & \xrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Afirmamos que $\overline{X \oplus_{F\restriction Y_0} Y_0} = X \oplus_F Y$. Sea $(x, y) \in X \oplus_F Y$. Como Y_0 es denso en Y, existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y_0 tal que $y_n \longrightarrow y$. Consideremos la sucesión $(F(y_n - y) + x, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X \oplus_{F\restriction Y_0} Y_0$. Mostraremos que esta sucesión converge a (x, y). Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > N$, $\|y_m - y\| < \varepsilon$. Así, para $m > N$, tenemos que $\|(F(y_m-y)+x, y_m)-(x, y)\| = \|(F(y_m-y), y_m-y)\| = \|F(y_m-y)-F(y_m-y)\|+\|y_m-y\| = \|y_m - y\| < \varepsilon$. Por el Teorema 1.17, T tiene una extensión $\hat{T}\colon X \oplus_F Y \to X \oplus_G Y$ lineal y continua. Probaremos que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & X \oplus_F Y & \xrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle i_X} & & \big\downarrow{\scriptstyle \hat{T}} & & \big\downarrow{\scriptstyle i_Y} & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & X \oplus_G Y & \xrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

donde $q(x, y) = y$ si $y \in Y$, es conmutativo. En efecto, si $x \in X$, $\hat{T}(jx) = \hat{T}(x, \mathbf{0}) = T(x, \mathbf{0}) = j(i_X(x))$. Ahora, si $(x, y) \in X \oplus_F Y$ y $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $X \oplus_{F_0} Y_0$ tal que $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$, entonces

$$\begin{aligned} q(\hat{T}(x, y)) &= q(\lim_{n\to\infty} T(x_n, y_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} q(T(x_n, y_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} i_Y(q(x_n, y_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n. \end{aligned}$$

Ya que $\lim_{n\to\infty} T(x_n, y_n)$ no depende de la sucesión $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que se tome con límite en (x, y), podemos tomar una de manera que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ (como vimos $(F(y_n - y) +$

$x, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una de ellas). Así, $q(\hat{T}(x,y)) = y = i_Y(q(x,y))$, es decir, el diagrama conmuta. Por lo tanto, F es equivalente a G. $\square$

El próximo resultado caracteriza la equivalencia entre dos aplicaciones cuasilineales.

Teorema 2.17. *Sean X y Y espacios cuasinormados y $F, G\colon Y \to X$ aplicaciones cuasilineales.*

1. *F y G son equivalentes si, y solo si, existe una constante $M > 0$ y una aplicación lineal $A\colon Y \to X$ tal que*

$$\|F(y) - G(y) - A(y)\| \leq M\|y\|, \quad \textit{para cada } y \in Y.$$

2. *F y G son proyectivamente equivalentes si, y solo si, existen constantes $M > 0$, $\alpha \neq 0$, y una aplicación lineal $A\colon Y \to X$ tal que*

$$\|F(y) - G(\alpha y) - A(y)\| \leq M\|y\|, \quad \textit{para cada } y \in Y.$$

3. *F es trivial si, y solo si, F es proyectivamente equivalente a la aplicación nula.*

Demostración. 1. $\Longrightarrow$) Si F y G son equivalentes, existe una aplicación $T : X \oplus_F Y \to X \oplus_G Y$ lineal y continua tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & X \oplus_F Y & \xrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle i_X} & & \downarrow{\scriptstyle T} & & \downarrow{\scriptstyle i_Y} & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & X \oplus_G Y & \xrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmuta. Observemos que para $(x, y) \in X \oplus_F Y$ se tiene que

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x,\mathbf{0}) + T(\mathbf{0},y) \\ &= T(jx) + T(\mathbf{0},y) \\ &= jx + T(\mathbf{0},y) \\ &= (x,\mathbf{0}) + T(\mathbf{0},y). \end{aligned}$$

Escribamos $(w_y, z_y) = T(\mathbf{0}, y)$. Entonces $q(T(\mathbf{0}, y)) = q(w_y, z_y) = z$, y la conmutatividad del diagrama nos da que $q(T(\mathbf{0}, y)) = q(\mathbf{0}, y) = y$, con lo cual $z_y = y$. Luego, $T(\mathbf{0}, y) = (w_y, y)$. Definamos $A\colon Y \to X$ dada por $A(y) = -\pi_1(T(\mathbf{0}, y))$, donde π_1 es la proyección sobre la primera coordenada. Así, por la linealidad de T y π_1, A es lineal, y de esta manera $w_y = \pi_1(w_y, y) = \pi_1(T(\mathbf{0}, y)) = -A(y)$. Por lo tanto, $T(x,y) = (x,\mathbf{0}) + T(\mathbf{0},y) = (x,\mathbf{0}) + (w_y, y) = (x,\mathbf{0}) + (-A(y), y) = (x - A(y), y)$. Ahora bien, por la continuidad de T, existe una constante M tal que para cada $(x,y) \in X \oplus_F Y$ vale que $\|T(x,y)\| \leq M\|(x,y)\|$. En particular, si $y \in Y$, entonces

$$\|(F(y) - Ay, y)\| = \|F(y) - G(y) - Ay\| + \|y\| = \|T(F(y)), y)\| \leq M\|(F(y), y)\| = M\|y\|.$$

En consecuencia, $\|F(y) - G(y) - Ay\| \leq M\|y\|$ para cada $y \in Y$.
$\Longleftarrow$) Si F, G y A satisfacen las hipótesis, defina $T\colon X \oplus_F Y \to X \oplus_G Y$ por $T(x,y) = (x - Ay, y)$ si $(x,y) \in X \oplus_F Y$. Claramente T es lineal. Probemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & X \oplus_F Y & \xrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_Y} & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & X \oplus_G Y & \xrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

En efecto, $T(jx) = T(x,\mathbf{0}) = (x,\mathbf{0}) = j(i_X(x))$ para cada $x \in X$ y $i_Y(q(x,y)) = y = q(x - Ay, y) = q(T(x,y))$ para cada $y \in Y$. Por último, veamos que T es continua. Sea C un módulo de concavidad para la cuasinorma en X. Entonces

$$\begin{aligned}
\|T(x,y)\| &= \|(x - Ay, y)\| \\
&= \|x - Ay - G(y)\| + \|y\| \\
&= \|x - F(y) + F(y) - Ay - G(y)\| + \|y\| \\
&\leq C(\|x - F(y)\| + \|F(y) - Ay - G(y)\|) + \|y\| \\
&\leq C\|x - F(y)\| + CM\|y\| + \|y\| \\
&= C\|x - F(y)\| + (CM + 1)\|y\| \\
&\leq L(\|x - F(y)\| + \|y\|) \\
&= L\|(x,y)\|,
\end{aligned}$$

donde $L = \text{máx}\{C, CM + 1\}$. Finalmente, el Lema de los cinco demuestra que T es un isomorfismo.

2. $\Longrightarrow$) Como F y G son proyectivamente equivalentes, existen constantes α y β no nulas y una aplicación lineal continua $T\colon X \oplus_F Y \to X \oplus_G Y$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\ j\ } & X \oplus_F Y & \xrightarrow{\ q\ } & Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha i_X} & & \downarrow{\scriptstyle T} & & \downarrow{\scriptstyle \beta i_Y} & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\ j\ } & X \oplus_G Y & \xrightarrow{\ q\ } & Y & \longrightarrow & 0.
\end{array}
$$

Siguiendo el argumento del inciso anterior, para cada $(x, y) \in X \oplus_F Y$ tenemos que $T(x, y) = T(x, \mathbf{0}) + T(\mathbf{0}, y) = T(jx) + T(\mathbf{0}, y) = j(\alpha i_X(x)) + T(\mathbf{0}, y) = (\alpha x, \mathbf{0}) + T(\mathbf{0}, y)$. También, si $T(\mathbf{0}, y) = (w_y, z_y)$, entonces $\beta i_Y(q(\mathbf{0}, y)) = q(T(\mathbf{0}, y))$. Luego, $\beta y = q(w_y, z_y) = z_y$. Se sigue que $T(\mathbf{0}, y) = (w_y, \beta y)$. Sea $A\colon Y \to X$ dada por $A(y) = -(1/\alpha)\pi_1(T(\mathbf{0}, y))$ si $y \in Y$. La aplicación A es lineal y si $y \in Y$, vale que $w_y = \pi_1(w_y, \beta y) = \pi_1(T(\mathbf{0}, y)) = -\alpha A(y)$. Así,

$$
\begin{aligned}
T(x, y) = (\alpha x, \mathbf{0}) + T(\mathbf{0}, y) = (\alpha x, \mathbf{0}) + (w_y, \beta y) &= (\alpha x, \mathbf{0}) + (-\alpha A(y), \beta y) \\
&= (\alpha x - \alpha A(y),\ \beta y).
\end{aligned}
$$

Por la continuidad de T, existe $M' > 0$ tal que $\|T(F(y), y)\| \leq M' \|(F(y), y)\|$ si $y \in Y$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\|T(F(y), y)\| = \|(\alpha F(y) - \alpha A(y), \beta y)\| &= \|\alpha F(y) - \alpha A(y) - G(\beta y)\| + \|\beta y\| \\
&\leq M' \|y\|, \quad y \in Y.
\end{aligned}
$$

De modo que $\|\alpha F(y) - \alpha A(y) - G(\beta y)\| \leq M'\|y\|$ para cada $y \in Y$. Por consiguiente

$$
\|F(y) - A(y) - G(\gamma y)\| \leq M\|y\|, \quad y \in Y,
$$

donde $\gamma = \beta/\alpha$ y $M = M'/|\alpha|$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que existe una aplicación lineal $A\colon Y \to X$ y constantes $M > 0$ y $\alpha \neq 0$ tales que para todo $y \in Y$, $\|F(y) - G(\alpha y) - A(y)\| \leq M\|y\|$. Sea $T\colon X \oplus_F Y \to X \oplus_G Y$ definida por $T(x, y) = (x - Ay, \alpha y)$, $(x, y) \in X \oplus_F Y$. La aplicación T es lineal. Para ver que T es continua, tomemos $(x,y) \in X \oplus_F Y$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|T(x,y)\| &= \|(x - Ay, \alpha y)\| \\
&= \|x - Ay - G(\alpha y)\| + \|\alpha y\| \\
&= \|x - Ay - F(y) + F(y) - G(\alpha y)\| + \|\alpha y\| \\
&\leq C(\|x - F(y)\| + \|F(y) - G(\alpha y) - Ay\|) + \|\alpha y\| \\
&\leq C\|x - F(y)\| + CM\|y\| + \|\alpha y\| \\
&= C\|x - F(y)\| + (CM + |\alpha|)\|y\| \\
&\leq (C + CM + |\alpha|)(\|x - F(y)\| + \|y\|) \\
&= (C + CM + |\alpha|)\|(x,y)\|.
\end{aligned}$$

Ahora, si $x \in X$ y $y \in Y$, tenemos que $T(jx) = T(x,\mathbf{0}) = (x,\mathbf{0}) = j(i_X(x))$ y $\alpha i_Y(q(x,y)) = \alpha y = q(x - Ay, \alpha y) = q(T(x,y))$. Esto demuestra que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i_X"] & X \oplus_F Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "T"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\alpha i_Y"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j"] & X \oplus_G Y \arrow[r, "q"] & Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

3. Por definición, F es trivial si, y solo si, F es equivalente a la aplicación nula. Del inciso 1 tenemos que F es trivial si, y solo si, $\|F(y) - A(y)\| \leq M\|y\|$ para todo $y \in Y$ y alguna aplicación $A\colon Y \to X$ lineal. De modo que F es trivial si, y solo si, F es proyectivamente equivalente a la aplicación nula. □

Del teorema anterior y del Lema 2.16 se deduce el próximo resultado.

Corolario 2.18. *Sean X y Y F-espacios, $F, G\colon Y \to X$ aplicaciones cuasilineales, y Y_0 un subespacio denso de Y. Si $F \restriction Y_0$ y $G \restriction Y_0$ son proyectivamente equivalentes, entonces F y G son proyectivamente equivalentes.*

Demostración. Si $F \restriction Y_0$ y $G \restriction Y_0$ son proyectivamente equivalentes, existen $\alpha \neq 0$ y una aplicación lineal $A\colon Y_0 \to X$ tal que $\|F(y) - \alpha G(y) - Ay\| \leq M\|y\|$ para cada $y \in Y_0$. Si definimos a $H\colon Y \to X$ por $H(y) = G(\alpha y)$, $y \in Y$, entonces H es cuasilineal y $\|F(y) - H(y) - Ay\| \leq M\|y\|$ para todo $y \in Y_0$, o sea, $F \restriction Y_0$ y $H \restriction Y_0$ son equivalentes. Por el Lema 2.16, F y H son equivalentes. Nuevamente por el anterior teorema, existen $M' > 0$ y una aplicación $A'\colon Y \to X$ lineal tales que $\|F(y) - H(y) - A'y\| \leq M'\|y\|$ para todo $y \in Y$. Así, $\|F(y) - G(\alpha y) - A'y\| \leq M'\|y\|$ para todo $y \in Y$. Por lo tanto, F y G son proyectivamente equivalentes. □

Teorema 2.19. *Sean X y Y F-espacios cuasinormados y Y_0 es un subespacio denso de Y. Supongamos que $F_0\colon Y_0 \to X$ es una aplicación cuasilineal. Entonces*

1. *Existe una aplicación cuasilineal $F\colon Y \to X$ tal que $F(y) = F_0(y)$ para cada $y \in Y_0$.*

2. *Si $G\colon Y \to X$ es una aplicación cuasilineal tal que $G(y) = F_0(y)$ para cada $y \in Y_0$, entonces G y F son equivalentes.*

Demostración. Considere el espacio $X \oplus_{F_0} Y_0$ junto con la cuasinorma dada por $\|(x, y)\| = \|x - F_0(y)\| + \|y\|$, $(x, y) \in X \oplus_{F_0} Y_0$. Sea Z un completado de este espacio. Afirmamos que Z es una suma torcida de X y Y. Para ver esto, defina $j\colon X \to X \oplus_{F_0} Y_0$ por $j(x) = (x, \mathbf{0})$ si $x \in X$ y $q\colon X \oplus_{F_0} Y_0 \to Y_0$ por $q(x, y) = y$ si $(x, y) \in X \oplus_{F_0} Y_0$. Sea $\hat{j}\colon X \to Z$ con $\hat{j}(x) = \overline{j(x)}$, $x \in X$ (aquí $\bar{\cdot}$ es la isometría canónica de $X \oplus_{F_0} Y$ en Z). Claramente, $\hat{j}$ es inyectiva y lineal. Además, para todo $x \in X$ tenemos que $\|\hat{j}(x)\| = \|j(x)\| = \|(x, \mathbf{0})\| = \|x\|$. Esto prueba que $\hat{j}$ es continua. Por otro lado, por el Teorema 1.17 tenemos que q se extiende a una aplicación continua $\hat{q}$ de Z en Y, donde $\hat{q}$ es definida como sigue:

$$
\begin{aligned}
&\hat{q}\colon Z \to Y \\
&z \in Z \mapsto \lim_{n\to\infty} q(x_n, y_n),
\end{aligned}
$$

donde $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $X \oplus_{F_0} Y_0$ tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = z$. Veamos que $\ker(q)$ es denso en $\ker(\hat{q})$ y que $\ker(\hat{q}) = \hat{j}(X)$. Si $x \in X$, $\hat{q}(jx) = \hat{q}(x, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Entonces $\hat{j}(X) \subseteq \ker(\hat{q})$. Ahora, sean $z \in \ker(\hat{q})$ y $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X \oplus_{F_0} Y_0$ que converge a z. Se tiene que $q(x_n, y_n) = y_n \longrightarrow \hat{q}(z) = \mathbf{0}$. Observe que $(F_0(y_n), y_n) \longrightarrow \mathbf{0}$, ya que $\|(F_0(y_n), y_n)\| = \|F_0(y_n) - F_0(y_n)\| + \|y_n\| = \|y_n\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $\lim_{n\to\infty}(x_n - F_0(y_n), \mathbf{0}) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) - \lim_{n\to\infty}(F_0(y_n), y_n) = z$. El argumento anterior demuestra que $z \in \overline{\hat{j}(X)}$. Como X es completo y $\hat{j}$ es una isometría, concluimos que $z = \hat{j}(x_0)$ para algún $x_0 \in X$. Se sigue que $\ker(\hat{q}) \subseteq \hat{j}(X)$.
Consideremos la aplicación cociente inducida por q, esto es,

$$
\tilde{q}\colon (x, y) + \ker q \in X \oplus_{F_0} Y_0/\ker(q) \mapsto y \in Y_0.
$$

Sea $S = \tilde{q}^{-1}$. Si $y \in Y_0$, entonces $\|\!|S(y)|\!\| = \|\!|(F_0(y), y) + ker(q)|\!\| \leq \|\!|(F_0(y), y)|\!\| \leq \|(F_0(y), y)\| = \|y\| \leq C\|\!|y|\!\|$ (vea el Teorema 1.8). Por consiguiente, S es continua. Por tanto, tenemos que S^{-1} es abierta, y así q es abierta. Como $\ker(q)$ es denso en $\ker(\hat{q})$ y q es sobreyectiva y abierta, del Teorema 1.17 deducimos que $\hat{q}$ es sobreyectiva y por consiguiente se concluye que Z es suma torcida de X y Y. Por el Teorema 2.13, Z es equivalente a $X \oplus_H Y$ para alguna aplicación $H\colon Y \to X$ cuasilineal, esto es, existe

$T\colon Z \to X \oplus_H Y$ continua y lineal tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & Z & \xrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle i_X} & & \big\downarrow{\scriptstyle T} & & \big\downarrow{\scriptstyle i_Y} & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j'} & X \oplus_H Y & \xrightarrow{q'} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es conmutativo. En particular, considerando $X \oplus_{F_0} Y_0,\ X \oplus_{H|_{Y_0}} Y_0$ y las restricciones en los dominios de T, q y q', tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & X \oplus_{F_0} Y_0 & \xrightarrow{\hat{q}} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle i_X} & & \big\downarrow{\scriptstyle \hat{T}} & & \big\downarrow{\scriptstyle i_Y} & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j'} & X \oplus_{H|_{Y_0}} Y_0 & \xrightarrow{\hat{q}'} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde $\hat{T} = T \restriction (X \oplus_{F_0} Y_0)$ y $\hat{q}' = q' \restriction (X \oplus_{H \restriction Y_0} Y_0)$. Por lo visto en el Teorema 2.17, $\hat{T}$ es de la forma $\hat{T}(x, y) = (x - Ay, y)$ donde $A\colon Y_0 \to X$ es lineal. Entonces $\hat{T}(x, y) \in X \oplus_{H \restriction Y_0} Y_0$ siempre que $(x, y) \in X \oplus_{F_0} Y_0$. De esto, F_0 y $H \restriction Y_0$ son equivalentes, y de nuevo por el Teorema 2.17 existe $J > 0$ tal que

$$\|F_0(y) - A(y) - H(y)\| \leq J\|y\|, \quad y \in Y_0.$$

Sea $\bar{A}\colon Y \to X$ lineal tal que $\bar{A} \restriction Y_0 = A$ (la existencia de esta extensión se sigue del hecho que todo espacio vectorial tiene una base). Finalmente, defina $F\colon Y \to X$ por

$$F(y) = \begin{cases} H(y) - \bar{A}(y), & \text{si } y \notin Y_0; \\ F_0(y), & \text{si } y \in Y_0. \end{cases}$$

Veamos que F es una extensión cuasilineal de F_0. Por definición, tenemos que $F(y) = F_0(y)$ para todo $y \in Y_0$. Para mostrar la cuasilinealidad de F, sean $x, y \in Y$ y consideremos tres casos.

1. Si $x, y \in Y_0$, entonces

$$\|F(x + y) - F(x) - F(y)\| = \|F_0(x + y) - F_0(x) - F_0(y)\| \leq M(\|x\| + \|y\|),$$

donde M_1 es la constante que da la cuasilinealidad de F_0.

2. Si $x \in Y_0$ y $y \notin Y_0$, entonces $x+y \notin Y_0$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\|F(x+y)-F(x)-F(y)\| &= \|H(x+y)-\bar{A}(x+y)-F_0(x)-H(y)+\bar{A}(y)\| \\
&\leq D(\|H(x+y)-H(x)-H(y)\|+\|H(x)-\bar{A}(x)-F_0(x)\|) \\
&\leq DG(\|x\|+\|y\|)+DJ\|x\| \\
&\leq (DG+DJ)(\|x\|+\|y\|)=M_2(\|x\|+\|y\|),
\end{aligned}$$

donde $M_2 = DG + DJ$.

3. Si $x, y \notin Y_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\|F(x+y)-F(x)-F(y)\| &= \|H(x+y)-\bar{A}(x+y)-H(x)+\bar{A}(x)-H(y)+\bar{A}(y)\| \\
&= \|H(x+y)-H(x)-H(y)\| \\
&\leq J(\|x\|+\|y\|).
\end{aligned}$$

Así, para todo $x, y \in Y$ tenemos que $\|F(x+y)-F(x)-F(y)\| \leq M(\|x\|+\|y\|)$, donde $M = \max\{M_1, M_2, J\}$. Como H, $\bar{A}$ y F_0 son homogéneas, se sigue que F es cuasilineal. Finalmente, si $G\colon Y \to X$ es cuasilineal y $G(y) = F_0(y)$ para todo $y \in Y_0$, es claro que G y F son equivalentes en Y_0 y por el Lema 2.16, G y F son equivalentes. □

2.3. Sumas torcidas a partir de aplicaciones cuasiaditivas

El Teorema 2.19 nos da una simplificación en la construcción de aplicaciones cuasilineales y por tanto de sumas torcidas (basta construirlas en subespacios densos). Veremos ahora que existe otra posibilidad de obtener aplicaciones cuasilineales removiendo el requerimiento de la homogeneidad.

Definición 2.20. Sean X, Y espacios cuasinormados. Diremos que $f\colon Y \to X$ es cuasiaditiva si:

1. Existe $K \geq 0$ tal que $\|f(y_1+y_2)-f(y_1)-f(y_2)\| \leq K(\|y_1\|+\|y_2\|)$ para todo $y_1, y_2 \in Y$.
2. $\lim_{t\to 0} f(ty) = \mathbf{0}$ si $y \in Y$.
3. $f(-y) = -f(y)$ para todo $y \in Y$.

La constante K es llamada *constante de cuasiaditividad*. En tal caso, diremos que f es cuasiaditiva de orden K.

Antes de presentar ejemplos de funciones cuasiaditivas, mostraremos unos lemas que nos permitirán dar ejemplos concretos de tales funciones.

Lema 2.21. *Sean X y Y espacios cuasinormados. Existen $r, L > 0$ tales que si $f \colon Y \to X$ es cuasiaditiva de orden K, entonces*

$$\left\| f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \right\| \leq KL \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^r\right)^{1/r}$$

para todo $y_1, \ldots, y_n \in Y$.

Demostración. Sea $0 < p \leq 1$ como en el Teorema 1.8. Dados $y_1, y_2 \in Y$ se tiene que

$$\begin{aligned} |||f(y_1 + y_2) - f(y_1) - f(y_2)||| &\leq \|f(y_1 + y_2) - f(y_1) - f(y_2)\| \\ &\leq K(\|y_1\| + \|y_2\|) \\ &\leq CK(|||y_1||| + |||y_2|||) \\ &\leq CK(|||y_1|||^p + |||y_2|||^p)^{1/p}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Afirmamos que si $n \in \mathbb{N}$ y $y_1, \ldots, y_n \in Y_0$, entonces

$$\left|\left|\left| f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \right|\right|\right| \leq CK \left(\sum_{i=1}^{n} i|||y_i|||^p\right)^{1/p}. \tag{2.2}$$

Procedemos por inducción sobre n. El caso $n = 2$ se obtiene de (2.1). Ahora supongamos que (2.2) vale para $n - 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \left|\left|\left| f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \right|\right|\right|^p &= \left|\left|\left| f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - f\left(\sum_{i=2}^{n} y_i\right) + f\left(\sum_{i=2}^{n} y_i\right) - \sum_{i=2}^{n} f(y_i) - f(y_1) \right|\right|\right|^p \\ &\leq \left|\left|\left| f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - f\left(\sum_{i=2}^{n} y_i\right) - f(y_1) \right|\right|\right|^p + \left|\left|\left| f\left(\sum_{i=2}^{n} y_i\right) - \sum_{i=2}^{n} f(y_i) \right|\right|\right|^p. \end{aligned}$$

De la hipótesis inductiva tenemos que

$$\left|\left|\left| f\left(\sum_{i=2}^{n} y_i\right) - \sum_{i=2}^{n} f(y_i) \right|\right|\right|^p \leq C^p K^p \sum_{i=2}^{n} (i-1)|||y_i|||^p.$$

De (2.1) se tiene que

$$\left\|\left| f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - f\left(\sum_{i=2}^{n} y_i\right) - f(y_1) \right|\right\|^p \leq C^p K^p \left(\left\|\left| \sum_{i=2}^{n} y_i \right|\right\|^p + |||y_1|||^p \right).$$

Combinando las ecuaciones anteriores, encontramos que

$$\begin{aligned}
\left\|\left| f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \right|\right\|^p &\leq C^p K^p \left(\left\|\left| \sum_{i=2}^{n} y_i \right|\right\|^p + |||y_1|||^p \right) + C^p K^p \sum_{i=2}^{n} (i-1) |||y_i|||^p \\
&= C^p K^p \left(\left\|\left| \sum_{i=2}^{n} y_i \right|\right\|^p + |||y_1|||^p + \sum_{i=2}^{n} (i-1) |||y_i|||^p \right) \\
&\leq C^p K^p \left(\sum_{i=2}^{n} |||y_i|||^p + |||y_1|||^p + \sum_{i=2}^{n} (i-1) |||y_i|||^p \right) \\
&= C^p K^p \left(\sum_{i=2}^{n} i |||y_i|||^p + |||y_1|||^p \right) \\
&= C^p K^p \sum_{i=1}^{n} i |||y_i|||^p.
\end{aligned}$$

Sea $r = p/2$. Dados $y_1, \ldots, y_n \in Y$ con $|||y_1||| \geq |||y_2||| \geq \cdots \geq |||y_n|||$ e $i = 1, \ldots, n$, tenemos que $|||y_i|||^r |||y_1|||^r \geq |||y_i|||^r |||y_2|||^r \geq \cdots \geq |||y_i|||^{2r}$. Esto implica que $|||y_i|||^{2r} \leq |||y_i|||^r |||y_j|||^r$ para todo $j = 1, \ldots, i$. Luego,

$$i |||y_i|||^{2r} \leq \sum_{j=1}^{i} |||y_i|||^r |||y_j|||^r \leq \sum_{j=1}^{n} |||y_i|||^r |||y_j|||^r.$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} i |||y_i|||^{2r} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |||y_i|||^r |||y_j|||^r.$$

De la ecuación anterior se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\vert\!\left\vert\!\left\vert f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\right\vert\!\right\vert\!\right\vert^p &\leq C^p K^p \sum_{i=1}^{n} i \vert\!\vert\!\vert y_i \vert\!\vert\!\vert^p \\
&\leq C^p K^p \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vert\!\vert\!\vert y_i \vert\!\vert\!\vert^r \vert\!\vert\!\vert y_j \vert\!\vert\!\vert^r \\
&= C^p K^p \sum_{i=1}^{n} \left(\vert\!\vert\!\vert y_i \vert\!\vert\!\vert^r \sum_{j=1}^{n} \vert\!\vert\!\vert y_j \vert\!\vert\!\vert^r \right) \\
&= C^p K^p \left(\sum_{i=1}^{n} \vert\!\vert\!\vert y_i \vert\!\vert\!\vert^r \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \vert\!\vert\!\vert y_j \vert\!\vert\!\vert^r \right) \\
&= C^p K^p \left(\sum_{i=1}^{n} \vert\!\vert\!\vert y_i \vert\!\vert\!\vert^r \right)^2 .
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\left\vert\!\left\vert\!\left\vert f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\right\vert\!\right\vert\!\right\vert &\leq CK \left(\sum_{i=1}^{n} \vert\!\vert\!\vert y_i \vert\!\vert\!\vert^r \right)^{2/p} \\
&= CK \left(\sum_{i=1}^{n} \vert\!\vert\!\vert y_i \vert\!\vert\!\vert^r \right)^{1/r} .
\end{aligned}$$

De modo que la desigualdad anterior vale para cualquier $y_1, \ldots, y_n \in Y$ pues basta hacer una reordenación de los términos. Concluimos que

$$\left\| f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\right\| \leq C^2 K \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^r \right)^{1/r}, \quad y_1, \ldots, y_n \in Y.$$

□

Lema 2.22. *Sea X un espacio cuasinormado. Entonces existe una constante $B_X > 0$ tal que si $f\colon \mathbb{R} \to X$ es cuasiaditiva de orden K, entonces*

$$\|f(t) - tf(1)\| \leq B_X K, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Demostración. Afirmamos que podemos suponer $f(1) = 0$ sin pérdida de generalidad. En efecto, definamos $g(t) = f(t) - tf(1)$ si $t \in \mathbb{R}$. Note que $g(1) = 0$. Veamos que g es cuasiaditiva de orden K. Si $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\|g(t_1+t_2)-g(t_1)-g(t_2)\| &= \|f(t_1+t_2)-(t_1+t_2)f(1)-f(t_1)+t_1f(1)-f(t_2)+t_2f(1)\| \\ &= \|f(t_1+t_2)-f(t_1)-f(t_2)\| \leq K(\|t_1\|+\|t_2\|).\end{aligned}$$

Además, $\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} f(t) - tf(1) = \lim_{t\to 0} f(t) = \mathbf{0}$. Finalmente, si $t \in \mathbb{R}$, tenemos $g(-t) = f(-t) + tf(1) = -f(t) + tf(1) = -g(t)$.
Continuando con la prueba, de la cuasiaditividad de f se tiene que

$$\|f(2^{-n}) - 2f(2^{-(n+1)})\| \leq K2^{-n}.$$

Por tanto

$$\|2^n f(2^{-n}) - 2^{n+1} f(2^{-(n+1)})\| \leq K. \tag{2.3}$$

Ahora, podemos escoger constantes L y r que satisfagan simultáneamente los Lemas 1.7 y 2.21, es decir,

$$\left\| f\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) - \sum_{i=1}^n f(y_i)\right\| \leq KL\left(\sum_{i=1}^n \|y_i\|^r\right)^{1/r}, \quad y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{R}; \tag{2.4}$$

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| \leq L\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^r\right)^{1/r}, \quad x_1,\ldots,x_n \in X.$$

De (2.4),

$$\begin{aligned}\|2^n f(2^{-n})\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n-1}\left(2^k f(2^{-k}) - 2^{k+1} f(2^{-(k+1)})\right)\right\| \\ &\leq L\left(\sum_{k=0}^{n-1}\|2^k f(2^{-k}) - 2^{k+1} f(2^{-(k+1)})\|^r\right)^{1/r}.\end{aligned}$$

Por (2.3), $\|2^k f(2^{-k}) - 2^{k+1} f(2^{-(k+1)})\| \leq K$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$L\left(\sum_{k=0}^{n-1}\|2^k f(2^{-k}) - 2^{k+1} f(2^{-(k+1)})\|^r\right)^{1/r} \leq LKn^{1/r}.$$

De donde,

$$\|2^n f(2^{-n})\| \leq LKn^{1/r}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Sea $t \in (0,1)$ y supongamos que $2^{-n} \leq t < 2^{1-n}$ para algún entero n. La representación diádica de t viene dada entonces por

$$t = 2^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^{-k}, \quad \text{donde } \varepsilon_0 = 1 \text{ y } \varepsilon_k \in \{0, 1\}.$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, sea $t_m = 2^{-n} \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k 2^{-k}$. Notemos que para todo $k \in \mathbb{N}$, $f(\varepsilon_k 2^{-(k+n)}) = \varepsilon_k f(2^{-(k+n)})$. De (2.4) encontramos que

$$\begin{aligned} \left\| f(t_m) - \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) \right\| &= \left\| f(t_m) - \sum_{k=0}^{m} f(\varepsilon_k 2^{-(n+k)}) \right\| \\ &\leq KL \left(\sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k^r 2^{-(n+k)r} \right)^{1/r} \\ &\leq KL \left(\sum_{k=0}^{m} 2^{-(n+k)r} \right)^{1/r} \\ &\leq KL \left(\frac{1}{1 - 2^{-r}} \right)^{1/r}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por otra parte, de (2.4) tenemos que

$$\|f(t_m)\| \leq L \left(\left\| f(t_m) - \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) \right\|^r + \left\| \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) \right\|^r \right)^{1/r} \quad \text{y}$$

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) \right\| \leq L \left(\sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k^r \|f(2^{-(n+k)})\|^r \right)^{1/r}.$$

Lo anterior junto con (2.6) nos da que

$$\begin{aligned} \|f(t_m)\| &\leq L \left(\left\| f(t_m) - \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) \right\|^r + \left\| \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) \right\|^r \right)^{1/r} \\ &\leq L \left(K^r L^r \frac{1}{1 - 2^{-r}} + L^r \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k^r \left\| f(2^{-(n+k)}) \right\|^r \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

De (2.5), $\|f(2^{-(n+k)})\| \leq 2^{-(n+k)}LK(n+k)^{1/r}$, y por tanto

$$\begin{aligned} &L\left(K^r L^r \frac{1}{1-2^{-r}} + L^r \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k^r \left\|f(2^{-(n+k)})\right\|^r\right)^{1/r} \\ &\leq L\left(K^r L^r \frac{1}{1-2^{-r}} + L^r \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k^r \left(2^{-(n+k)}\right)^r L^r K^r (n+k)\right)^{1/r}. \end{aligned}$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \|f(t_m)\| &\leq KL^2\left(\frac{1}{1-2^{-r}} + L^r \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k^r \left(2^{-(n+k)}\right)^r (n+k)\right)^{1/r} \\ &\leq KL^2\left(\frac{1}{1-2^{-r}} + L^r \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kr} k\right)^{1/r} \\ &= L^* K, \end{aligned}$$

donde L^* es una constante. Finalmente,

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(t_m) - f(t-t_m)\| &\leq K(|t_m| + |t-t_m|) \\ &= K(t_m + t - t_m) = Kt < K, \end{aligned}$$

ya que $t, t_m \in \mathbb{R}^+$, $t > t_m$ para todo m. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|f(t)\| &= \|f(t) - f(t_m) - f(t-t_m) + f(t_m) + f(t-t_m)\| \\ &\leq \left(\|f(t) - f(t_m) - f(t-t_m)\|^r + \|f(t_m)\|^r + \|f(t-t_m)\|^r\right)^{1/r} \\ &\leq L\left(K^r + L^{*r}K^r + \|f(t-t_m)\|^r\right)^{1/r}. \end{aligned}$$

Haciendo $m \longrightarrow \infty$ y teniendo en cuenta que $t - t_m \longrightarrow 0$, y $f(t-t_m) \longrightarrow 0$, concluimos que

$$\|f(t)\| \leq KL\left(L^{*r} + 1\right)^{1/r} =: KB_X.$$

□

Vimos en la sección anterior la posibilidad de construir sumas torcidas a partir de aplicaciones cuasilineales. El siguiente teorema nos da una útil herramienta para construir a partir de funciones cuasiaditivas aplicaciones cuasilineales y por tanto sumas torcidas.

Teorema 2.23. *Sean X y Y espacios cuasinormados. Si $f\colon Y \to X$ es cuasiaditiva, entonces $F\colon Y \to X$ definida por*

$$F(y) = \begin{cases} \|y\| f(y/\|y\|), & \textit{si } y \neq \mathbf{0}; \\ \mathbf{0}, & \textit{si } y = \mathbf{0} \end{cases}$$

es cuasilineal.

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$. Si $y = \mathbf{0}$ o $t = 0$, es claro que $F(ty) = F(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = ty = tF(y)$. Si $y \neq \mathbf{0}$ y $t \neq 0$, entonces

$$F(ty) = \|ty\| f\left(\frac{ty}{\|ty\|}\right) = |t|\|y\| f\left(\frac{ty}{\|y\||t|}\right) = t\|y\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = tF(y).$$

Fijemos $y \in Y$ tal que $0 < \|y\| \leq 1$ y supongamos que f es cuasiaditiva de orden K. Definimos $\bar{f}\colon \mathbb{R} \to X$ por $\bar{f}(t) = f\left(t\frac{y}{\|y\|}\right)$, entonces $\bar{f}$ es cuasiaditiva de orden K. Para ver esto notemos que

$$\begin{aligned} \|\bar{f}(t_1 + t_2) - \bar{f}(t_1) - \bar{f}(t_2)\| &= \left\| f\left((t_1 + t_2)\frac{y}{\|y\|}\right) - f\left(t_1\frac{y}{\|y\|}\right) - f\left(t_2\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \\ &\leq K\left(\left\|t_1\frac{y}{\|y\|}\right\| + \left\|t_2\frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \\ &= K(|t_1| + |t_2|). \end{aligned}$$

Como f es cuasiaditiva, $\lim_{t\to 0} f(tw) = 0$ para cada $w \in Y$. Así, $\lim_{t\to 0} \bar{f}(t) = \lim_{t\to 0} f\left(t\frac{y}{\|y\|}\right) = 0$. Por último, $\bar{f}(-t) = f\left(-t\frac{y}{\|y\|}\right) = -f\left(t\frac{y}{\|y\|}\right) = -\bar{f}(t)$ si $t \in \mathbb{R}$. Por el Lema 2.22 tenemos que existe una constante $B_X > 0$ tal que $\|\bar{f}(t) - t\bar{f}(1)\| \leq B_X K$ para cada $t \in [0, 1]$. Por tanto,

$$\|f(y) - F(y)\| \leq B_X K.$$

Sea C un módulo de concavidad de X. Dados $x, y \in Y$ con $\|x\| + \|y\| \leq 1/C$, tenemos que $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|) \leq 1$. Por tanto $\|F(x + y) - f(x + y)\| \leq B_X K$. Notemos que en este caso, $\|x\| \leq 1$ y $\|y\| \leq 1$. Así,

$$
\begin{aligned}
&\|F(x+y)-F(x)-F(y)\| \\
&= \|F(x+y)-f(x+y)-F(x)+f(x)-F(y)+f(y)+f(x+y)-f(x)-f(y)\| \\
&\leq C(\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|+\|F(x+y)-f(x+y)-F(x)+f(x)-F(y)+f(y)\|) \\
&\leq C(\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|+C(\|F(x+y)-f(x+y)\|+C(\|F(x)-f(x)\|+\|F(y)-f(y)\|))) \\
&= C(\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|+C\|F(x+y)-f(x+y)\|+C^2\|F(x)-f(x)\|+C^2\|F(y)-f(y)\|) \\
&\leq C(K(\|x\|+\|y\|)+CB_XK+C^2B_XK+C^2B_XK) \\
&\leq C(K+3C^2B_XK).
\end{aligned}
$$

De manera que si $w,z \in Y$ (donde $w \neq \mathbf{0}$ o $z \neq \mathbf{0}$), sean $x = \frac{z}{2C(\|z\|+\|w\|)}$ y $y = \frac{w}{2C(\|z\|+\|w\|)}$. Como $\|x\|+\|y\| = \left\|\frac{z}{2C(\|z\|+\|w\|)}\right\| + \left\|\frac{w}{2C(\|z\|+\|w\|)}\right\| = \frac{1}{2C} < \frac{1}{C}$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\|F(x+y)-F(x)-F(y)\| \\
&= \left\|F\left(\frac{z}{2C(\|z\|+\|w\|)}+\frac{w}{2C(\|z\|+\|w\|)}\right)-F\left(\frac{z}{2C(\|z\|+\|w\|)}\right)-F\left(\frac{w}{2C(\|z\|+\|w\|)}\right)\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{2C(\|z\|+\|w\|)}F(z+w)-\frac{1}{2C(\|z\|+\|w\|)}F(z)-\frac{1}{2C(\|z\|+\|w\|)}F(w)\right\| \\
&= \frac{1}{2C(\|z\|+\|w\|)}\|F(z+w)-F(z)-F(w)\| \\
&\leq C(K+3C^2B_XK).
\end{aligned}
$$

Luego $\|F(z+w)-F(z)-F(w)\| \leq 2C^2(K+3C^2B_XK)(\|z\|+\|w\|)$. Concluimos F es cuasilineal. $\square$

En adelante denotamos por B a la constante $B_{\mathbb{R}}$ que satisface la desigualdad del Lema 2.22.

Lema 2.24. *Si $f,g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son cuasiaditivas de orden K y*

$$|f(2^n)-g(2^n)| \leq M\cdot 2^n, \quad n\in\mathbb{Z},$$

entonces

$$|f(t)-g(t)| \leq (M+4BK)|t|, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Demostración. Como

$$|f(-t)-g(-t)| = |-f(t)+g(t)| = |f(t)-g(t)| \leq (M+4BK)|t| = (M+4BK)|-t|,$$

sin pérdida de generalidad podemos tomar $t \in \mathbb{R}^+$. Sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{n-1} \leq t < 2^n$ y definamos $f^{(n)}(r) = f(2^n r)$ y $g^{(n)}(r) = g(2^n r),\ r \in \mathbb{R}$. Las funciones $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ son cuasiaditivas de orden $2^n K$. Para ver esto, notemos que $f^{(n)}(-r) = f(-2^n r) = -f(2^n r) = -f^{(n)}(r)$. También, $\lim_{r\to 0} f^{(n)}(r) = \lim_{r\to 0} f(2^n r) = 0$. Si $r, s \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} |f(n)(r+s) - f^{(n)}(r) - f^{(n)}(s)| &= |f(2^n(r+s)) - f(2^n r) - f(2^n s)| \\ &\leq K(|2^n r| + |2^n s|) = 2^n K(|r| + |s|). \end{aligned}$$

Análogamente se muestra que $g^{(n)}$ es cuasiaditiva de orden $2^n K$. Como$2^{-n}t < 1$, del Lema 2.22 se sigue que

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(2^{-n}t) - 2^{-n}tf^{(n)}(1)| &\leq 2^n BK, \quad \text{y} \\ |g^{(n)}(2^{-n}t) - 2^{-n}tg^{(n)}(1)| &\leq 2^n BK. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &= |f(t) - 2^{-n}tf(2^n) + 2^{-n}tg(2^n) - g(t) + 2^{-n}tf(2^n) - 2^{-n}tg(2^n)| \\ &\leq |f(t) - 2^{-n}tf(2^n)| + |g(t) - 2^{-n}tg(2^n)| + 2^{-n}t|f(2^n) - g(2^n)| \\ &= |f^{(n)}(2^{-n}t) - 2^{-n}tf^{(n)}(1)| + |g^{(n)}(2^{-n}t) - 2^{-n}tg^{(n)}(1)| + 2^{-n}t|f(2^n) - g(2^n)| \\ &\leq 2^{n+1}BK + 2^{-n}t|f(2^n) - g(2^n)|. \end{aligned}$$

Por hipótesis $|f(2^n) - g(2^n)| \leq M \cdot 2^n$ y $2^{n+1} \leq 2^2 t$. Por lo tanto,

$$|f(t) - g(t)| \leq 4BKt + Mt = (4BK + M)t.$$

Esto demuestra el lema. $\square$

El siguiente resultado quizás es conocido. Para conveniencia del lector, incluimos una prueba propia aquí.

Lema 2.25. *Sea $A\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ una aplicación Lipschitz con constante K. Entonces existe una aplicación Lipschitz $\tilde{A}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con constante K tal que $\tilde{A} \restriction \mathbb{Z} = A$.*

Demostración. Definamos

$$\begin{aligned} &\tilde{A}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \in \mathbb{R} \mapsto \tilde{A}(x) = (A(\lfloor x \rfloor + 1) - A(\lfloor x \rfloor))(x - \lfloor x \rfloor) + A(\lfloor x \rfloor), \end{aligned}$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la parte entera. Es claro que $\tilde{A}(n) = A(n)$ si $n \in \mathbb{Z}$. Veamos que $\tilde{A}$ es Lipschitz con constante de Lipschitz K.
Sean $x, y \in \mathbb{R}$ dados y supongamos que $x > y$. Entonces $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor + r$ para algún $r \in \mathbb{Z}$ con $r \geq 0$. Para probar el resultado usaremos inducción sobre r. Si $r = 0$, entonces

$$\begin{aligned}|\tilde{A}(x) - \tilde{A}(y)| = |A(\lfloor x \rfloor + 1) - A(\lfloor x \rfloor))(x - \lfloor x \rfloor)& \\ + A(\lfloor x \rfloor) - (\tilde{A}(\lfloor x \rfloor + 1) - \tilde{A}(\lfloor x \rfloor))(y - \lfloor x \rfloor) - \tilde{A}(\lfloor x \rfloor))|& \\ = |\tilde{A}(\lfloor x \rfloor + 1) - \tilde{A}(\lfloor x \rfloor)||x - y|& \\ \leq K|x - y|.&\end{aligned}$$

Supongamos que $|\tilde{A}(x) - \tilde{A}(y)| \leq K|x - y|$ siempre que $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor + s$ donde $s \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que $|\tilde{A}(x) - \tilde{A}(y)| \leq K|x - y|$ si $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor + (s + 1)$. Sea $\varepsilon \in (0, 1)$ dado. Entonces

$$|\tilde{A}(x) - \tilde{A}(y)| \leq |\tilde{A}(x) - \tilde{A}(\lfloor x \rfloor - \varepsilon)| + |\tilde{A}(\lfloor x \rfloor - \varepsilon) - \tilde{A}(y)|.$$

Observe que $\lfloor \lfloor x \rfloor - \varepsilon \rfloor = \lfloor x \rfloor - 1$. Así, $\lfloor \lfloor x \rfloor - \varepsilon \rfloor - \lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor - 1 - \lfloor y \rfloor = s$. Por la hipótesis inductiva tenemos que $|\tilde{A}(\lfloor x \rfloor - \varepsilon) - \tilde{A}(y)| \leq K|\lfloor x \rfloor - \varepsilon - y|$. En consecuencia,

$$|\tilde{A}(x) - \tilde{A}(y)| \leq |\tilde{A}(x) - \tilde{A}(\lfloor x \rfloor - \varepsilon)| + K|\lfloor x \rfloor - \varepsilon - y|.$$

Tomando $\varepsilon \longrightarrow 0$ y teniendo en cuenta que $\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{A}(\lfloor x \rfloor - \varepsilon) = \tilde{A}(\lfloor x \rfloor)$ se sigue de lo anterior que

$$\begin{aligned}|\tilde{A}(x) - \tilde{A}(y)| &\leq |\tilde{A}(x) - \tilde{A}(\lfloor x \rfloor)| + K|\lfloor x \rfloor - y| \\ &\leq K|x - \lfloor x \rfloor| + K|\lfloor x \rfloor - y|.\end{aligned}$$

Como $x \geq \lfloor x \rfloor$ y $\lfloor y \rfloor + 1 > y$, $\lfloor x \rfloor - y = \lfloor y \rfloor + (s + 1) - y > -1 + s + 1 = s \geq 0$. De modo que

$$\begin{aligned}|\tilde{A}(x) - \tilde{A}(y)| &\leq K(x - \lfloor x \rfloor) + K(\lfloor x \rfloor - y) \\ &= K(x - y).\end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $|\tilde{A}(x) - \tilde{A}(y)| \leq K|x - y|$ y por tanto que $\tilde{A}$ es Lipschitz con constante K. $\square$

Lema 2.26. *Si $t, s > 0$, entonces*

$$\frac{s}{s+t}\ln\frac{s+t}{s} + \frac{t}{s+t}\ln\frac{s+t}{t} \leq \ln 2.$$

Demostración. Sea $h\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = t\ln\frac{1}{t} + (1-t)\ln\frac{1}{1-t}$ si $0 < t < 1$. Note que $h'(1/2) = 0$ y $h''(t) = -\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{t}\right) < 0$ para todo $t \in (0,1)$. De modo que h alcanza su máximo absoluto en $1/2$. Se sigue que $h(t) \leq h(1/2) = \ln 2$ para todo $t \in (0,1)$, o sea,

$$t\ln\frac{1}{t} + (1-t)\ln\frac{1}{1-t} \leq \ln 2, \qquad 0 < t < 1.$$

Si tomamos $u = \frac{s}{s+t}$, entonces $u \in (0,1)$ y por lo que probamos

$$\frac{s}{s+t}\ln\frac{s+t}{s} + \frac{t}{s+t}\ln\frac{s+t}{t} \leq \ln 2.$$

□

Finalmente presentamos un teorema que exhibe ejemplos de funciones cuasiaditivas.

Teorema 2.27. *1. Si $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz, entonces*

$$f(t) = \begin{cases} t\theta(\ln|1/t|), & \textbf{\textit{si}}\ t \neq 0; \\ 0, & \textbf{\textit{si}}\ t = 0, \end{cases}$$

es cuasiaditiva de orden $L\ln(2)$ donde L es la constante de Lipschitz de θ.

2. Si f es cuasiaditiva, entonces existe una función Lipschitz $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{0<t<\infty}\left|\frac{f(t)}{t} - \theta\left(\ln\left|\frac{1}{t}\right|\right)\right| < \infty.$$

Demostración. *1.* Claramente $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. También, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}|f(t)| &= \lim_{t\to 0}|t||\theta(\ln|1/t|)| \\
&= \lim_{t\to 0}|t||\theta(\ln|1/t|) - \theta(0) + \theta(0)| \\
&\leq \lim_{t\to 0}(|t||\theta(\ln|1/t|) - \theta(0)| + |t||\theta(0)|) \\
&\leq \lim_{t\to 0}|t|L|\ln|1/t|| + \lim_{t\to 0}|t||\theta(0)| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$. Veamos la última condición para que f sea cuasiaditiva. Si $t_1, t_2 > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(t_1+t_2)-f(t_1)-f(t_2)}{t_1+t_2}\right| \\
&= \left|\frac{t_1+t_2}{t_1+t_2}\theta\left(\ln\frac{1}{t_1+t_2}\right) - \frac{t_1}{t_1+t_2}\theta\left(\ln\frac{1}{t_1}\right) - \frac{t_2}{t_1+t_2}\theta\left(\ln\frac{1}{t_2}\right)\right| \\
&= \left|\frac{t_1}{t_1+t_2}\left(\theta\left(\ln\frac{1}{t_1+t_2}\right) - \theta\left(\ln\frac{1}{t_1}\right)\right) + \frac{t_2}{t_1+t_2}\left(\theta\left(\ln\frac{1}{t_1+t_2}\right) - \theta\left(\ln\frac{1}{t_2}\right)\right)\right| \\
&\le \frac{t_1}{t_1+t_2}\left|\theta\left(\ln\frac{1}{t_1+t_2}\right) - \theta\left(\ln\frac{1}{t_1}\right)\right| + \frac{t_2}{t_1+t_2}\left|\theta\left(\ln\frac{1}{t_1+t_2}\right) - \theta\left(\ln\frac{1}{t_2}\right)\right| \\
&\le L\frac{t_1}{t_1+t_2}\left|\ln\frac{t_1}{t_1+t_2}\right| + L\frac{t_2}{t_1+t_2}\left|\ln\frac{t_2}{t_1+t_2}\right| \\
&= L\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}\ln\frac{t_1+t_2}{t_1} + \frac{t_2}{t_1+t_2}\ln\frac{t_1+t_2}{t_2}\right),
\end{aligned}$$

donde L es la constante de Lipschitz de θ. Luego

$$|f(t_1+t_2)-f(t_1)-f(t_2)| \le L\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}\ln\frac{t_1+t_2}{t_1} + \frac{t_2}{t_1+t_2}\ln\frac{t_1+t_2}{t_2}\right)(t_1+t_2).$$

De lo anterior y el Lema 2.26 concluimos que

$$|f(t_1+t_2)-f(t_1)-f(t_2)| \le L\ln 2(|t_1|+|t_2|).$$

Para el caso en que $t_1, t_2 < 0$,

$$\begin{aligned}
|f(t_1+t_2)-f(t_1)-f(t_2)| &= |f(-t_1-t_2)-f(-t_1)-f(-t_2)| \\
&\le L\ln 2(|-t_1|+|-t_2|) \\
&= L\ln 2(|t_1|+|t_2|).
\end{aligned}$$

Finalmente si $t_1 > 0$ y $t_2 < 0$, consideramos dos casos.

1. Si $t_1 + t_2 \ge 0$,

$$|f(t_1+t_2)-f(t_1)-f(t_2)| = |f(t_1)-f(t_1+t_2)-f(-t_2)| \le L\ln 2|t_1| < L\ln 2(|t_1|+|t_2|).$$

2. Si $t_1 + t_2 < 0$,

$$|f(t_1+t_2)-f(t_1)-f(t_2)| = |f(-t_2)-f(-t_1-t_2)-f(t_1)| \le L\ln 2|-t_2| < L\ln 2(|t_1|+|t_2|).$$

Se sigue que f es cuasiaditiva de orden $L \ln 2$.
2. Si f es cuasiaditiva de orden K, entonces

$$|f(2^{n+1}) - 2f(2^n)| \leq K 2^{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto

$$\left| \frac{f(2^{n+1})}{2^{n+1}} - \frac{f(2^n)}{2^n} \right| \leq K, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

Por el Lema 2.25 existe una aplicación Lipschitz $\theta \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(n) = 2^n f(2^{-n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora definamos $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) = \begin{cases} t\theta(-\ln|t|/\ln 2), & \text{si } t \neq 0; \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Notemos que para todo $g(-t) = -g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. También,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} |g(t)| &= \lim_{t \to 0} \; |t\theta(-\ln|t|/\ln 2)| \\ &\leq \lim_{t\to 0} \; (|t||\theta(-\ln|t|/\ln 2) - \theta(0)| + |t||\theta(0)|) \\ &\leq K \lim_{t\to 0} \; |t||\ln|t|/\ln 2| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, siguiendo un argumento análogo al visto con f en el inciso 1 encontramos que $|g(t_1 + t_2) - g(t_1) - g(t_2)| \leq K(|t_1| + |t_2|)$ si $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, g es cuasiaditiva de orden K. Observe que $g(2^n) = 2^n\theta(-\ln 2^n/\ln 2) = 2^n\theta(-n) = 2^n 2^{-n} f(2^n) = f(2^n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Deducimos del Lema 2.24, $|f(t) - g(t)| \leq 4BK|t|$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Si $t \neq 0$, entonces $\left|\frac{f(t)}{t} - \frac{g(t)}{t}\right| \leq 4BK$, es decir,

$$\left| \frac{f(t)}{t} - \theta\left(\frac{-\ln|t|}{\ln 2} \right) \right| \leq 4BK, \quad t \neq 0.$$

Por último, si definimos $\tilde{\theta} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\tilde{\theta}(x) = \theta(x/\ln 2)$ si $x \in \mathbb{R}$, es fácil ver que $\tilde{\theta}$ es cuasiaditiva. Así,

$$\left| \frac{f(t)}{t} - \tilde{\theta}\left(\ln\left|\frac{1}{t}\right| \right) \right| \leq 4BK, \quad t \neq 0,$$

de donde el resultado se sigue. $\square$

2.4. Sumas torcidas de espacios de sucesiones

En esta sección usaremos lo visto en las dos secciones anteriores para construir aplicaciones cuasilineales entre espacios de sucesiones, y estudiaremos algunas condiciones sobre estos espacios para los que existe una suma torcida $E \oplus_F E$ que no es trivial.

Nota 2.28. Si $x = (x_n)$ y (y_n) son sucesiones en $\mathbb{R}$, definimos $x \leq y$ si $x_n \leq y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.29. Un FK-*espacio cuasinormado sólido* es un espacio cuasinormado de sucesiones $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que satisface:

1. $c_{00} \subset E$ es denso en E, donde c_{00} denota el conjunto de sucesiones eventualmente nulas.

2. La cuasinorma $\|\cdot\|$ en E satisface:

    a) $\|sx\| \leq \|s\|_\infty \|x\|$, para todo $x \in E$ y toda $s \in l_\infty$, donde sx denota el producto coordenada a coordenada entre s y x.

    b) $\|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde e_n es el vector base con 1 en la n-ésima coordenada y 0 en las demás.

    c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|$ para todo $x \in E$.

    d) El orden $\leq$ satisface las siguientes propiedades

    - si $x, y, z \in E$ y $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$;
    - si $a \geq 0$ y $x \geq y$, entonces $ax \geq ay$;
    - si $x, y \in E$, entonces $x \vee y := \sup\{x, y\}$ y $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ existen en E;
    - si $|x| \leq |y|$, entonces $\|x\| \leq \|y\|$ para todo $x, y \in E$, donde $|\cdot|$ es la función *módulo* definida como $|x| = x \vee (-x)$ para cada $x \in E$.

Observación 2.30. No es difícil mostrar que si $x \in E$, entonces $\||x|\| = \|x\|$ para cada $x \in E$.

Los siguientes son ejemplos de FK-espacios. En todos estos, el orden viene dado como en la Nota 2.28.

Ejemplo 2.31. c_{00} es FK-espacio cuasinormado sólido.

Ejemplo 2.32. Verificaremos que para cada $p > 0$ tenemos que ℓ_p es un FK-espacio cuasinormado sólido. La condición b) de la definición se cumple trivialmente. Probemos ahora que c_{00} es denso en ℓ_p. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ dado. Dado $n \in \mathbb{N}$, defina $s_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p$. Si $\varepsilon > 0$ es dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - s_m\|^p = \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon$ si $m > N$. Como $s_n \in c_{00}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $x \in \overline{c_{00}}$. Esto prueba la afirmación. Ahora bien, si $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ y $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ entonces

$$\begin{aligned}
\|sx\| &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |s_k x_k|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sup_l |s_l|\right)^p |x_k|^p\right)^{1/p} \\
&= \|s\|_\infty \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \\
&= \|s\|_\infty \|x\|.
\end{aligned}$$

Note que si $x \in \ell_p$, tenemos que $|x_n| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $\sup_n |x_n| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$, es decir, $\|x\|_\infty \leq \|x\|$. Por otro lado, es claro que el orden $\leq$ en ℓ_p cumple las dos primeras propiedades del inciso d). Ahora, si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, entonces $x \vee y = z \in \ell_p$ y $x \wedge y = w \in \ell_p$, donde $z_n = \max\{x_n, y_n\}$ y $w_n = \min\{x_n, y_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, si $|x| \leq |y|$, tenemos que $|x_n| \leq |y_n|$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De esto se deduce que $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p}$, osea, $\|x\| \leq \|y\|$.

A seguir, describimos el método de Kalton para construir una aplicación cuasilineal entre espacios de sucesiones a partir de una función Lipschitz.

Teorema 2.33. *Sean E un FK-espacio cuasinormado sólido y $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz tal que $\phi(t) = 0$ para todo $t \leq 0$. Definamos $f\colon c_{00} \to c_{00}$ por*

$$f(x)(k) = \begin{cases} x(k)\phi(-\ln|x(k)|), & \textit{si } x(k) \neq 0; \\ 0, & \textit{si } x(k) = 0. \end{cases}$$

Entonces f es cuasiaditiva.

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in c_{00}$ dados. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos por el Teorema 2.27 que

$$|f(x_1 + x_2)(k) - f(x_1)(k) - f(x_2)(k)| \leq L \ln 2(|x_1(k)| + |x_2(k)|),$$

donde L es la constante de Lipschitz de ϕ. De esto,

$$|f(x_1+x_2)-f(x_1)-f(x_2)| \leq L\ln 2(|x_1|+|x_2|).$$

De las propiedades de la Definición 2.29 obtenemos que

$$\begin{aligned}\|f(x_1+x_2)-f(x_1)-f(x_2)\| &\leq L\ln 2(\||x_1|+|x_2|\|)\\ &\leq CL\ln 2(\||x_1|\|+\||x_2|\|)\\ &= CL\ln 2(\|x_1\|+\|x_2\|),\end{aligned}$$

donde C es un módulo de concavidad de $\|\cdot\|$. Ahora, sean $x \in c_{00}$ y $k \in \mathbb{N}$ dados. Si $x(k)=0$, claramente $f(-x)(k)=-f(x)(k)$. Si $x(k)\neq 0$, entonces $f(-x)(k) = -x(k)\phi(-\ln|-x(k)|) = -x(k)\phi(-\ln|x(k)|) = -f(x)(k)$. De modo que $f(-x)=-f(x)$. Finalmente, dado $t\in\mathbb{R}$, tenemos $\|f(tx)\| = \|\sum_{k=1}^n f(tx)(k)e_k\|$ para algún $n\in\mathbb{N}$, pues $f(tx)\in c_{00}$. Del Lema 1.7 tenemos que $\|\sum_{k=1}^n f(tx)(k)e_k\| \leq M\left(\sum_{k=1}^n \|f(tx)(k)e_k\|^r\right)^{1/r}$ para algunas constantes $M,r>0$. Como $\|e_k\|=1$ para todo $k\in\mathbb{N}$, entonces $M\left(\sum_{k=1}^n \|f(tx)(k)e_k\|^r\right)^{1/r} = M\left(\sum_{k=1}^n |f(tx)(k)|^r\right)^{1/r}$. Por la cuasiaditividad de $f(x)(k)$ tenemos que $\lim_{t\to 0}\left(\sum_{k=1}^n |f(tx)(k)|^r\right)^{1/r}=0$, de donde se sigue que $\lim_{t\to 0}\|f(tx)\|=0$ y $\lim_{t\to 0}\|\|f(tx)\|\|=0$. De lo anterior, concluimos que $\lim_{t\to 0} f(tx)=\mathbf{0}$. Por tanto f es cuasiaditiva. $\square$

De lo anterior y los Teoremas 2.23 y 2.19 tenemos la siguiente consecuencia.

Corolario 2.34. *Sea $f\colon c_{00}\to c_{00}$ definida como en el Teorema 2.33. Entonces la aplicación $F_0\colon c_{00}\to c_{00}$ dada por*

$$F_0(x) = \begin{cases} \|x\|f(x/\|x\|), & \textit{si } x\neq \mathbf{0};\\ \mathbf{0}, & \textit{si } x=\mathbf{0}\end{cases}$$

es cuasilineal. Más aún, F_0 puede ser extendida a una aplicación cuasilineal $F\colon E\to E$.

Ahora nos enfocaremos el estudio a las sumas torcidas del tipo $E\oplus_F E$. Denotaremos por $\mathcal{L}$ a la clase de las funciones Lipschitz $\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que $\phi(t)=0$ para todo $t\leq 0$.

Observación 2.35. Notemos que no se gana generalidad al quitar la restricción $\phi(t)=0$ para $t\leq 0$, pues si ϕ es Lipschitz, la aplicación

$$\bar{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t)-\phi(0), & \text{si } t\geq 0;\\ 0, & \text{si } t\leq 0\end{cases}$$

continúa siendo Lipschitz. Más aún, $\bar{\phi}$ induce una suma torcida equivalente a $E \oplus_F E$ donde $F\colon E \to E$ es la aplicación cuasilineal generada por ϕ. Para ver esto, denotemos por $F'\colon E \to E$ a la aplicación cuasilineal generada por $\bar{\phi}$. Entonces, si $x \in c_{00}$ con $x \neq \mathbf{0}$,

$$|F(x) - F'(x)|(k) = \left| \|x\| f_\phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)(k) - \|x\| f_{\bar{\phi}}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)(k) \right|$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, donde f_ϕ y $f_{\bar{\phi}}$ son las aplicaciones cuasiaditivas generadas por ϕ y $\bar{\phi}$, respectivamente. Luego,

$$\begin{aligned}
|F(x) - F'(x)|(k) &= \left| \|x\| \left(\frac{x(k)}{\|x\|}\phi\left(-\ln\left|\frac{x(k)}{\|x\|}\right|\right) - \frac{x(k)}{\|x\|}\bar{\phi}\left(-\ln\left|\frac{x(k)}{\|x\|}\right|\right)\right)\right| \\
&= \left| \|x\| \left(\frac{x(k)}{\|x\|}\phi\left(-\ln\left|\frac{x(k)}{\|x\|}\right|\right) - \frac{x(k)}{\|x\|}\phi\left(-\ln\left|\frac{x(k)}{\|x\|}\right|\right) + \frac{x(k)}{\|x\|}\phi(0)\right)\right| \\
&= |x(k)||\phi(0)|.
\end{aligned}$$

Así, $|F(x) - F'(x)| = |x||\phi(0)|$ para cada $x \in c_{00}$. Y de esta manera,

$$\|F(x) - F'(x)\| = \|x\||\phi(0)|, \quad \text{para todo } x \in c_{00}.$$

En consecuencia, por el Teorema 2.17 tenemos que F y F' son equivalentes en c_{00}, y del Lema 2.16 obtenemos que F y F' son equivalentes.

Nota 2.36. Para $\phi \in \mathcal{L}$, $E(\phi)$ denotará la suma torcida $E \oplus_F E$, donde F es la aplicación cuasilineal generada por ϕ.

Recordemos que si E y F son espacios cuasinormados, y (e_n) y (f_n) son sucesiones básicas de E y F, respectivamente, entonces (e_n) y (f_n) se dice que son *equivalentes* si existe un isomorfismo $T\colon \overline{\operatorname{span}\{e_n :\ n \in \mathbb{N}\}} \to \overline{\operatorname{span}\{f_n :\ n \in \mathbb{N}\}}$ tal que $Te_n = f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
El próximo resultado da una condición necesaria y suficiente para que dos sumas torcidas de la forma $E(\phi)$ sean equivalentes.

Teorema 2.37. *Sea E un FK-espacio cuasinormado sólido y supongamos que ninguna subsucesión de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base de vectores unitarios de c_0. Sean $\phi,\ \psi \in \mathcal{L}$. Entonces*

1. *Las sumas torcidas $E(\phi)$ y $E(\psi)$ son equivalentes si, y solo si,*

$$\sup_{0<t<\infty} |\phi(t) - \psi(t)| < \infty;$$

2. $E(\phi)$ *y* $E(\psi)$ *son proyectivamente equivalentes si, y solo si, para algún* $\alpha \neq 0$*,*

$$\sup_{0<t<\infty} |\phi(t) - \alpha\psi(t)| < \infty;$$

3. $E(\phi)$ *es trivial si, y solo si,* ϕ *es acotada.*

Demostración. Supongamos que ϕ y ψ inducen las aplicaciones cuasiaditivas f_ϕ y f_ψ. Supongamos también que f_ϕ y f_ψ inducen las aplicaciones cuasilineales $F\colon E \to E$ y $G\colon E \to E$, respectivamente (como en el Teorema 2.23).

1. Si $\sup_{0<t<\infty} |\phi(t) - \psi(t)| < \infty$, entonces para todo $y \in c_{00}$ con $y \neq \mathbf{0}$ y $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |F(y) - G(y)|(k) &= \left| \|y\| f_\phi\left(\frac{y}{\|y\|}\right)(k) - \|y\| f_\psi\left(\frac{y}{\|y\|}\right)(k) \right| \\ &= \|y\| \left| \frac{y(k)}{\|y\|}\phi\left(-\ln\left|\frac{y(k)}{\|y\|}\right|\right) - \frac{y(k)}{\|y\|}\psi\left(-\ln\left|\frac{y(k)}{\|y\|}\right|\right) \right| \\ &= |y(k)| \left| \phi\left(-\ln\left|\frac{y(k)}{\|y\|}\right|\right) - \psi\left(-\ln\left|\frac{y(k)}{\|y\|}\right|\right) \right|. \end{aligned}$$

De la hipótesis tenemos que $\left|\phi\left(-\ln\left|\frac{y(k)}{\|y\|}\right|\right) - \psi\left(-\ln\left|\frac{y(k)}{\|y\|}\right|\right)\right| \leq M$ para algún $M > 0$ y para todo $k \in \mathbb{N}$. De esta manera,

$$|F(y) - G(y)|(k) \leq M|y(k)|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De esto último encontramos que $|F(y) - G(y)| \leq M|y|$ para cada $y \in c_{00}$. En consecuencia,

$$\|F(y) - G(y)\| \leq M\|y\|, \quad y \in c_{00}.$$

Se sigue del Teorema 2.16 que F y G son equivalentes en c_{00}, y así concluimos que $E(\phi)$ y $E(\psi)$ son equivalentes. Para la implicación contraria, véanse los detalles en [5], Proposición 3.1.a.

2. Usaremos la notación F_f para la aplicación cuasilineal inducida por una función $f \in \mathcal{L}$. Supongamos que $E(\phi)$ y $E(\psi)$ son proyectivamente equivalentes. Por el Teorema 2.17 existen $a \neq 0$, $M \geq 0$ y $A\colon E \to E$ lineal tales que $\|F_\phi(x) - aF_\psi(x) - Ax\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$. Notemos que para todo $x \in c_{00}\backslash\{\mathbf{0}\}$ y toda $k \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
F_\psi(ax)(k) &= \|ax\| f_\psi\left(\frac{ax}{\|ax\|}\right)(k) \\
&= \|ax\|\frac{ax(k)}{\|ax\|}\psi\left(-\ln\left|\frac{ax(k)}{\|ax\|}\right|\right) \\
&= ax(k)\psi\left(-\ln\left|\frac{x(k)}{\|x\|}\right|\right) \\
&= F_{a\psi}(x)(k).
\end{aligned}
$$

De manera que $F_\psi(ax) = F_{a\psi}(x)$ para toda $x \in c_{00}$. De lo anterior, $\|F_\phi(x) - F_{a\psi}(x) - Ax\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in c_{00}$. Esto prueba que F_ϕ es equivalente a $F_{a\psi}$ en c_{00}. Del Teorema 2.16, obtenemos F_ϕ y $F_{a\psi}$ son equivalentes. Del inciso anterior deducimos que

$$\sup_{0<t<\infty} |\phi(t) - a\psi(t)| < \infty.$$

Recíprocamente, si $\sup_{0<t<\infty} |\phi(t) - a\psi(t)| < \infty$, entonces F_ϕ y $F_{a\psi}$ son equivalentes por el inciso 1. Así, existen $A\colon E \to E$ lineal y $M \geq 0$ tales que $\|F_\phi(x) - F_{a\psi}(x) - Ax\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$. Reescribiendo lo anterior tenemos que $\|F_\phi(x) - F_\psi(ax) - Ax\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in c_{00}$. Por tanto, F_ϕ y F_ψ son proyectivamente equivalentes en c_{00}. El Corolario 2.18 implica que F_ϕ y F_ψ son proyectivamente equivalentes. Así, $E(\phi)$ y $E(\psi)$ son proyectivamente equivalentes por el Teorema 2.17.

3. Por definición, $E(\phi)$ es trivial si, y solo si, $E(\phi)$ es equivalente a $E \oplus E$. Del inciso 1, $E(\phi)$ es equivalente a $E(\mathbf{0})$ si, y solo si, $\sup_{0<t<\infty} |\phi(t)| < \infty$, es decir, si, y solo si, ϕ es acotada. $\square$

3. El espacio de Kalton-Peck

Es importante destacar que el último teorema del capítulo anterior nos permitirá obtener sumas torcidas no triviales de espacios de Hilbert iniciando con cualquier función real Lipschitz no acotada. El objetivo de este capítulo es mostrar tal construcción.

3.1. Consecuencias

En esta sección aplicamos la teoría de sumas torcidas que hemos mostrado en el capítulo anterior para el caso particular del espacio $E = \ell_p$ con $0 < p < \infty$. Recordemos que $\mathcal{L}$ es la clase de las funciones Lipschitz $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\phi(t) = 0$ para todo $t \leq 0$.

Definición 3.1. Diremos que un par de F-espacios (X, Y) *se escinde* si toda suma torcida de X y Y es trivial.

Como una consecuencia del Teorema 2.37 tenemos:

Corolario 3.2. *Sea E un FK-espacio cuasinormado sólido tal que ninguna subsucesión de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base usual de c_0. Entonces (E, E) no se escinde.*

Demostración. Si tomamos $\phi \in \mathcal{L}$ no acotada, entonces $E(\phi)$ no es trivial por el inciso 3 del Teorema 2.37. Por lo tanto, (E, E) no se escinde. □

Corolario 3.3. *El par (ℓ_p, ℓ_p) no se escinde para $0 < p < \infty$.*

Demostración. Ya vimos ℓ_p con la cuasinorma usual es un FK-espacio cuasinormado. Para ver que cumple las condiciones del Corolario 3.2 debemos mostrar que ninguna subsucesión de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base usual de c_0. Si esto no fuera así, sea $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ equivalente a la base canónica de c_0. Por MEGGINSON, *An introduction to Banach space theory*, Teorema 4.3.7 existe una constante $M > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n e_{k_n} \right\| \leq M \max_{1\leq n\leq m} |\alpha_n|,$$

siempre que $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. En particular, si $m \in \mathbb{N}$ es dado, haciendo $\alpha_n = 1$ para cada $n = 1, \ldots, m$, obtenemos que $m^{1/p} \leq M$. Esto es un absurdo. □

Definición 3.4. Sea X un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$. Diremos que X es B-convexo si para algún $\varepsilon > 0$ y algún número natural n, se cumple que si $x_1, \ldots, x_n$ son elementos de la bola cerrada unitaria de X, existe una elección de signos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{-1, 1\}$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \leq (1-\varepsilon)n.$$

Teorema 3.5 ([14] Teorema 2.6)**.** *Sea X un F-espacio con un subespacio cerrado Y tal que X/Y y Y son ambos isomorfos a un espacio de Banach B-convexo. Entonces X es isomorfo a un espacio de Banach B-convexo.*

Teorema 3.6. *Si $1 < p < \infty$ y $\phi \in \mathcal{L}$, entonces $\ell_p(\phi)$ es isomorfo a un espacio de Banach. En particular, $\ell_p(\phi)$ puede ser renormado de tal forma que sea proyectivamente equivalente a una suma isométrica de ℓ_p y ℓ_p.*

Demostración. De [16], Ejemplo 2.20 de la página 33, y [17], Ejemplo 2 de la página 38, tenemos que ℓ_p es B-convexo, pues todo espacio uniformemente convexo es B-convexo y ℓ_p es uniformemente convexo. Por tanto, del Teorema 3.5, $\ell_p(\phi)$ es isomorfo a un espacio de Banach B-convexo, y después de renormarlo es un espacio de Banach B-convexo. En particular, por el Teorema 2.9 $\ell_p(\phi)$ es proyectivamente equivalente a una suma torcida isométrica de ℓ_p y ℓ_p. □

Corolario 3.7. *Existe una suma isométrica de espacios de Banach*

$$0 \to \ell_2 \to Z \to \ell_2 \to 0$$

que no se escinde.

Demostración. De los Corolarios 3.2 y 3.3 se sigue que si $\phi \in \mathcal{L}$ es no acotada, entonces $0 \to \ell_2 \to \ell_2(\phi) \to \ell_2 \to 0$ no se escinde. Del teorema anterior, $\ell_2(\phi)$ es proyectivamente equivalente a una suma isométrica de ℓ_2 y ℓ_2. Esta última no se escinde, pues de lo contrario $\ell_2(\phi)$ sería proyectivamente equivalente a $\ell_2 \oplus \ell_2$, y por lo tanto equivalente a $\ell_2 \oplus \ell_2$. □

Lema 3.8. *Sea $0 \to X \xrightarrow{j'} Z \xrightarrow{q'} Y \to 0$ una suma torcida de espacios de Banach. Entonces Z es trivial si, y sólo si, $j'(X)$ es complementado en Z.*

---

[16] Diana HERNANDEZ. “El módulo de convexidad y la constante de James”. Trabajo de grado. Universidad Industrial de Santander, 2019. URL: https://noesis.uis.edu.co/items/091d0fd9-2dd7-44f5-9188-0368801ec4f0.

[17] Wilson A. C CUELLAR. “Um espaço de Banach não isomorfo ao conjugado complexo”. Tesis doct. Instituto de Matemática y Estatística, Universidad de São Paulo, São Paulo, 2011.

Demostración. $\Longleftarrow$) Supongamos que $X' := j'(X)$ es complementado en Z. Notemos que X' es cerrado en Z, pues $j'(X) = ker(q') = q'^{-1}(\{\mathbf{0}\})$. Por definición, existe un subespacio cerrado W de Z de manera que $X' \cap W = \{\mathbf{0}\}$ y $X' + W = Z$. Entonces todo $z \in Z$ puede ser escrito de manera única como $z = x + w$ con $x \in X'$ y $w \in W$. De [18], página 38, tenemos que los operadores proyección $P_1\colon Z \to X'$ donde $P_1(z) = x$ y $P_2\colon Z \to W$ donde $P_2(z) = w$ son operadores lineales continuos. Definamos $T\colon Z \to X \oplus Y$ por $T(z) = (j'^{-1}(P_1(z)), q'(P_2(z)))$ y veamos que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "i_X"] & Z \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "T"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "i_Y"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j"] & X \oplus Y \arrow[r, "q"] & Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Sean $x \in X$ y $z \in Z$. Tenemos que $P_1(j'x) = j'x$ y $P_2(j'x) = \mathbf{0}$. Entonces $T(j'x) = (j'^{-1}(P_1(j'x)), q'(P_2(j'(x)))) = (j'^{-1}(j'x), q'(\mathbf{0})) = (x, \mathbf{0}) = jx$. Por otra parte, $q(T(z)) = q(j'^{-1}(P_1(z)), q'(P_2(z))) = q'(P_2(z))$. Como $z = P_1(z) + P_2(z)$, $P_1(z) \in X'$ y por tanto $q'(P_2(z)) = q'(z)$. Así, $q(T(z)) = q'(z)$.
Claramente, por la continuidad de $P_1,\ P_2,\ j'^{-1}$ y q', tenemos que T es continua. Ahora, afirmamos que T es lineal. Sean $z_1, z_2 \in Z$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces z_1 y z_2 se pueden escribir de manera única como $z_1 = x_1 + w_1$ y $z_2 = x_2 + w_2$ para algunos $x_1, x_2 \in X'$ y algunos $w_1, w_2 \in W$. De esto,

$$\begin{aligned}
T(\alpha z_1 + z_2) &= (j'^{-1}(P_1(\alpha z_1 + z_2)), q'(P_2(\alpha z_1 + z_2))) \\
&= (j'^{-1}(P_1(\alpha x_1 + x_2 + \alpha w_1 + w_2)),\ q'(P_2(\alpha x_1 + x_2 + \alpha w_1 + w_2))) \\
&= (j'^{-1}(\alpha x_1 + x_2),\ q'(\alpha w_1 + w_2)) \\
&= (\alpha j'^{-1}(x_1) + j'^{-1}(x_2),\ \alpha q'(w_1) + q'(w_2)) \\
&= \alpha(j'^{-1}(x_1),\ q'(w_1)) + (j'^{-1}(x_2),\ q'(w_2)) \\
&= \alpha(j'^{-1}(P_1(z_1)),\ q'(P_2(z_1))) + (j'^{-1}(P_1(z_2)),\ q'(P_2(z_2))) \\
&= \alpha T(z_1) + T(z_2).
\end{aligned}$$

Por definición, concluimos que Z es suma torcida trivial de X y Y.
$\Longrightarrow$) Supongamos ahora que Z es trivial. Entonces existe una aplicación $T\colon Z \to X \oplus Y$ lineal y continua tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

---

[18] Haim BREZIS. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j'} & Z & \xrightarrow{q'} & Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_Y} & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & X \oplus Y & \xrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Sean $X' = j'(X)$, $W = T^{-1}(\{\mathbf{0}\} \times Y)$ y denotemos por π_1 y π_2 a las proyecciones de $X \oplus Y$ sobre X y de $X \oplus Y$ sobre Y, respectivamente. Ya que T es isomorfismo (Observación 2.7), $W = T^{-1}(\pi_1^{-1}(\{\mathbf{0}\}))$ y X' son subespacios cerrados en Z. Sea $x' \in X' \cap W$. Como $x' \in X'$, existe $x \in X$ tal que $j'x = x'$. Por la conmutatividad del diagrama tenemos que $T(j'x) = jx = (x, \mathbf{0})$. Por otro lado, ya que $x' \in W$, $T(x') = (\mathbf{0}, y)$ para algún $y \in Y$. Entonces, $(x, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, y)$ y por lo tanto, $x' = j'x = j'\mathbf{0} = \mathbf{0}$. De esto, $X' \cap W = \{\mathbf{0}\}$.
Por último, veamos que $Z = X' + W$. Si $z \in Z$, entonces $z = T^{-1}(T(z)) = T^{-1}(\pi_1(T(z)), \pi_2(T(z))) = T^{-1}(\pi_1(T(z)), \mathbf{0}) + T^{-1}(\mathbf{0}, \pi_2(T(z)))$. Por la conmutatividad del diagrama, $T(j'(\pi_1(z))) = j(\pi_1(T(z))) = (\pi_1(T(z)), \mathbf{0})$, de manera que $j'(\pi_1(z)) = T^{-1}(\pi_1(T(z)), \mathbf{0})$. Luego, $T^{-1}(\pi_1(T(z)), \mathbf{0}) \in j'(X) = X'$. Además, claramente $T^{-1}(\mathbf{0}, \pi_2(T(z))) \in W$, pues $T^{-1}(\mathbf{0}, \pi_2(T(z))) \in T^{-1}(\{\mathbf{0}\} \times Y)$. Así, por definición concluimos que W es un complemento de X'. $\square$

3.2. El espacio de Kalton-Peck Z_2

En esta sección aplicamos lo que hemos expuesto hasta el momento para el caso particular en que $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\phi(t) = t$, y $E = \ell_2$. Observe que ϕ es Lipschitz y no acotada. Note que para este caso, el espacio E es un espacio de Hilbert.
Siguiendo el trabajo de la Sección 2.4, vemos que la aplicación $f\colon c_{00} \to c_{00}$ dada por

$$f(x)(k) = \begin{cases} -x(k)\ln|x(k)|, & \text{si } x(k) \neq 0; \\ 0, & \text{si } x(k) = 0 \end{cases}$$

es cuasiaditiva para la norma de ℓ_2. Por tanto, la aplicación $F_0\colon c_{00} \to c_{00}$ definida por

$$F_0(x) = \begin{cases} \|x\| f(x/\|x\|), & \text{si } x \neq \mathbf{0}; \\ \mathbf{0}, & \text{si } x = \mathbf{0} \end{cases}$$

es cuasilineal. Por el Corolario 2.34 podemos extender F_0 a una aplicación cuasilineal KP: $\ell_2 \to \ell_2$. KP es llamada *aplicación de Kalton-Peck*. El espacio de Kalton-Peck es definido como

$$Z_2 := \ell_2(\phi) = \ell_2 \oplus_{\mathsf{KP}} \ell_2.$$

Notemos que KP: $c_{00} \to c_{00}$ es dada por

$$\mathsf{KP}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-x_n \ln \frac{|x_n|}{\|x\|} \right) e_n, & \text{si } x \neq \mathbf{0}; \\ 0, & \text{si } x = \mathbf{0}, \end{cases} \quad \text{si } x = (x_n) \in c_{00},$$

donde convenimos que $x \ln x := 0$ si $x = 0$. Observe también que la cuasinorma asociada a esta aplicación es dada por

$$\begin{aligned} \|(x,y)\|_{Z_2} &= \|x - KP(y)\|_{\ell_2} + \|y\|_{\ell_2} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[x_n + y_n \ln \frac{|y_n|}{\|y\|} \right]^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 \right)^{1/2}, \quad \text{si } x, y \in c_{00}. \end{aligned}$$

Proposición 3.9. *EL espacio Z_2 no es isomorfo a un espacio de Hilbert.*

Demostración. Como Z_2 es una suma torcida no trivial de ℓ_2 y ℓ_2, por el Lema 3.8 $\ell_2 \times \{\mathbf{0}\}$ no es complementado en Z_2. Y como en un espacio de Hilbert todo subespacio cerrado admite un complemento [18] (página 39), concluimos que Z_2 no es isomorfo a un espacio de Hilbert. $\square$

Para finalizar el trabajo, sabemos que el enfoque de Kalton y Peck dan respuesta al problema 3-espacios para espacios de Hilbert. Con esto en mente, Castillo y Yost en [5] se formulan la siguiente pregunta:

Pregunta 3.10. ¿Es la propiedad de ser una suma torcida de espacios de Hilbert una propiedad 3-espacios?

Bibliografía

BREZIS, Haim. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010 (vid. págs. 57, 59).

CASTILLO, Jesús y Manuel GONZÁLEZ. *Three-space problems in Banach space theory*. Vol. 1667. Springer Science & Business Media, 2010 (vid. págs. 8, 18, 53, 59).

CUELLAR, Wilson A. C. "Um espaço de Banach não isomorfo ao conjugado complexo". Tesis doct. Instituto de Matemática y Estatística, Universidad de São Paulo, São Paulo, 2011 (vid. pág. 56).

ENFLO, Per, Joram LINDENSTRAUSS y Gilles PISIER. *On the "Three space problem"*. Mathematica Scandinavica, 36(2), 199-210, 1975 (vid. pág. 7).

HERNANDEZ, Diana. "El módulo de convexidad y la constante de James". Trabajo de grado. Universidad Industrial de Santander, 2019. URL: `https://noesis.uis.edu.co/items/091d0fd9-2dd7-44f5-9188-0368801ec4f0` (vid. pág. 56).

KALTON, Nigel J. *The three space problem for locally bounded F-spaces*. Compositio Mathematica, 37(3), 243-276, 1978 (vid. págs. 21, 56).

KALTON, Nigel J. y N. T. PECK. *Twisted sums of sequence spaces and the three space problem*. Transactions of the American Mathematical Society, 255, 1-15, 1979 (vid. pág. 7).

KALTON, Nigel J., N. T. PECK y James W. ROBERTS. *An F-space sampler*. Vol. 89. CUP Archive, 1979 (vid. pág. 23).

KÖTHE, Gottfried. *Topological Vector Spaces I*. Grundlehren der Math. Wissenschaften, 1969 (vid. pág. 9).

LINDENSTRAUSS, Joram y H. P. ROSENTHAL. *The $\mathcal{L}_p$ spaces*. Israel Journal of Mathematics, 7, 325-349, 1969 (vid. pág. 7).

MASSEY, William S. *A basic course in algebraic topology, Graduate texts in mathematics*. 3.ª ed. Vol. 127. Springer, ISBN 978-0-387-97430-9, 2012 (vid. pág. 21).

MEGGINSON, Robert E. *An introduction to Banach space theory*. Vol. 183. Springer Science & Business Media, 2012 (vid. págs. 18, 55).

MICHAEL, Ernest. *Continuous Selections. I*. Annals of Mathematics, 63(2), 361-382, 1956 (vid. págs. 14, 16).

ROLEWICZ, Stefan. *Metric linear spaces*. 1972 (vid. pág. 12).

SANCHEZ, Felix C. y Jesus M. F. CASTILLO. *Report on twisted sums of Banach spaces*. Extracta mathematicae, 11(2), 384-387, 1996 (vid. pág. 8).

SCHAEFER, H. y M. P. H. WOLFF. *Topological Vector Spaces*. Alemania: Springer New York, 1999 (vid. pág. 19).

TREVES, François. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Acad. Press New York, 1967 (vid. pág. 14).

WILANSKY, Albert. *Modern methods in topological vector spaces*. Courier Corporation, 2013 (vid. pág. 9).