Secuencia de enseñanza para potenciar el proceso de demostración: Incorporación de las ideas de Fermat sobre derivadas

Ivón Valentina Delgado Angarita

Código: 2211370

Trabajo de grado para optar el título de Licenciada en Matemáticas

Director

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2025

Dedicatoria

A Beatriz Helena y Gerson Andrés. Son mi historia y el amor que me construyó. Todo lo que soy lleva su huella.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer profundamente a Dios por ser mi refugio, mi guía y mi fuerza.

A lo largo de este proceso recibí el apoyo de personas cuya ayuda fue invaluable. A todas ellas les expreso mi más sincero agradecimiento. En especial, a mi madre, por sostenerme en los peores momentos y ser siempre mi polo a tierra, y a mi padre, por su apoyo incondicional.

A *Hita*, por impulsarme constantemente y celebrar cada uno de mis logros.

A Juan Esteban, por el cariño, motivación y la manera tan genuina de acompañarme.

A mi leal y única amiga Tatiana, por tener siempre las palabras acertadas para cada situación.

Mi gratitud se extiende también a toda mi familia, por acompañarme, animarme y sostenerme de múltiples formas. De cada uno recibí una palabra, un gesto o un abrazo que me dio fuerza para continuar.

A mi director de tesis, le agradezco por creer en mí y por guiarme con paciencia y sabiduría en este proceso.

A mis profesores y compañeros, con quienes crecí personal y académicamente: gracias por cada enseñanza, cada conversación y cada experiencia compartida. De todos aprendí algo que me llevo en el corazón.

A todos ustedes, gracias por acompañarme en este camino.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

Título: Secuencia de enseñanza para potenciar el proceso de demostración: Incorporación de las ideas de Fermat sobre derivadas*

Autor: Ivón Valentina Delgado Angarita**

Palabras Clave: Conjeturas, demostración, razonamiento, derivada.

Descripción:

El desarrollo de habilidades para razonar, formular conjeturas, justificar estrategias y construir argumentos permite a los estudiantes dar sentido a las matemáticas y comprender críticamente los conceptos. Por ello, los programas educativos deben promover el planteamiento de conjeturas y la construcción de demostraciones (NCTM, 2003). No obstante, estudios señalan que los estudiantes presentan grandes dificultades, en parte por la falta de ambientes adecuados y oportunidades en el aula. Como resultado, suelen razonar de forma empírica, aceptando una afirmación como verdadera solo porque se cumple en algunos ejemplos, y mantienen esa idea errónea incluso tras recibir orientación docente (Stylianides et al. 2017). En particular, la comprensión de la derivada sigue siendo un desafío, pues la enseñanza suele priorizar procedimientos algorítmicos sobre una fundamentación conceptual, lo que limita la capacidad de los estudiantes para interpretarla en distintos contextos y aplicarla a la resolución de problemas (Artigue, 1995; Hitt, 2003). Frente a este panorama, se planteó el objetivo de diseñar, implementar y evaluar una unidad de enseñanza de la regla de la derivada de la función potencia y exponencial incorporando las ideas de Fermat en GeoGebra, dirigida a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, enfocándola al desarrollo de habilidades del proceso de demostración. La propuesta se llevó a cabo mediante la metodología de Experimentos de Enseñanza (Camargo, 2021) y se evidenció que, aunque los estudiantes se encuentren en un semestre avanzado, al enfrentarse a algo nuevo, como plantear sus propias conjeturas y construir sus propias demostraciones, sus intentos son principalmente empíricos, marcados por dificultades y errores alarmantes para su nivel de formación.

* Trabajo de Grado
** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. Doctor en Didáctica de las Matemáticas.

Abstract

Title: Teaching sequence to enhance the proof process: Incorporating Fermat's ideas on derivatives*

Author: Ivón Valentina Delgado Angarita[1]

Key Words: Conjectures, proof, reasoning, derivate.

Description:

The development of skills to reason, formulate conjectures, justify strategies, and construct arguments enables students to make sense of mathematics and to critically understand the concepts involved. Therefore, educational programs should promote both the formulation of conjectures and the construction of proofs (NCTM, 2003). Nevertheless, studies indicate that students face significant difficulties, partly due to the lack of appropriate environments and sufficient opportunities in the classroom. As a result, they tend to reason empirically, accepting a statement as true merely because it holds for some examples, and they maintain this misconception even after receiving teacher guidance (Stylianides et al. 2017).

In particular, understanding the derivative remains a persistent challenge, since instruction often prioritizes algorithmic procedures over solid conceptual foundations, which limits students' ability to interpret the derivative in different contexts and apply it to problem solving (Artigue, 1995; Hitt, 2003).

In light of this situation, the objective was to design, implement, and evaluate a teaching unit on the derivative rule of power and exponential functions, incorporating Fermat's ideas with the mediation of GeoGebra. This proposal was addressed to undergraduate mathematics education students and focused on fostering proof-related skills. The study was carried out using the Teaching Experiment methodology (Camargo, 2021), and the findings revealed that, although students were in advanced semesters, when confronted with new tasks such as formulating their own conjectures and constructing their own proofs, their attempts were mainly empirical and marked by difficulties and errors that are alarming for their level of preparation.

---

[*] Degree work

[**] Sciencie Faculty. Mathematics school. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. PhD in Mathematics Education.

Introducción

En un principio, el objetivo fundamental de la demostración era asegurar la certeza de las proposiciones; sin embargo, con el tiempo surge una nueva función: la demostración se enfoca en facilitar la comprensión. Así, el proceso de demostrar comienza a ser entendido, no solo como un medio para probar la validez de las afirmaciones, sino también como una herramienta para aclarar y hacer accesibles los conceptos (Góngora, 2024).

Las matemáticas, como una ciencia intrínsecamente demostrativa, requieren que su enseñanza y aprendizaje en las aulas se enfoquen en el desarrollo de habilidades para razonar, formular conjeturas, justificar estrategias y construir argumentos. Este proceso no solo permite a los estudiantes dar sentido a las matemáticas, sino que promueve una comprensión lógica y crítica que trasciende la mera memorización de reglas. Por ello, los programas educativos deben capacitar a los estudiantes en la formulación de conjeturas, el desarrollo de demostraciones y la aplicación de diversos tipos de razonamiento matemático (NCTM, 2003). Razonar en matemáticas implica no solo justificar procedimientos y estrategias, sino también formular hipótesis, buscar patrones y contraejemplos, y utilizar propiedades y relaciones para explicar hechos matemáticos. Así, el razonamiento y la demostración se convierten en herramientas esenciales para comprender las matemáticas como un campo lógico, fortaleciendo la capacidad de los estudiantes para pensar críticamente en lugar de limitarse a memorizar algoritmos y reglas (MEN, 1998).

A pesar de la relevancia de estos enfoques, Bell (1976) plantea que, aunque la deducción es esencial en matemáticas, solo los estudiantes más capaces suelen comprenderla, lo que refleja la dificultad que implica aprender y enseñar la demostración, debido a su complejidad, que involucra creencias, conocimientos, habilidades y factores socioculturales

(Camargo, 2010). Varios estudios indican que los estudiantes presentan grandes obstáculos en el aprendizaje del razonamiento y la demostración. Al respecto, Stylianides, et al. (2013) señalan que los estudiantes enfrentan dificultades debido a la falta de ambientes adecuados y oportunidades suficientes en el aula para el aprendizaje del razonamiento y la demostración. Este desafío se ve reflejado en un problema clave y persistente: los estudiantes tienden a aceptar una afirmación como verdadera simplemente porque se cumple para algunos ejemplos, y continúan manteniendo esta idea errónea incluso después de una instrucción explícita por parte del docente. Además, no consideran suficiente la existencia de un contraejemplo que refute una generalización matemática falsa (Stylianides et al. 2017).

De acuerdo con los documentos oficiales y con el objetivo de corroborar los hallazgos previos, se establece que, al ingresar a la vida universitaria, se espera que los estudiantes sean capaces de realizar demostraciones deductivas formales. Sin embargo, en el contexto local de la Universidad Industrial de Santander, investigaciones como la de Antonio (2020) han analizado los tipos de demostración empleados por los estudiantes en un curso de pre-cálculo, con el fin de profundizar en el proceso de demostración de aquellos que ingresan por primera vez a la universidad. Los resultados de dicho estudio, como era de esperar, indican que las demostraciones realizadas son de naturaleza empírica, lo cual pone de manifiesto que el proceso de enseñanza de la demostración formal no se está implementando adecuadamente en las etapas tempranas. Este hallazgo se alinea con el estudio de Riaño (2023), quien también identifica y examina los tipos de demostración utilizados por los estudiantes de nuevo ingreso en las carreras de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas en la misma universidad en un curso de Geometría Euclidiana.

En otro contexto, el aprendizaje inadecuado del pre-cálculo y la desconexión entre procedimientos y significados en cálculo, como la derivada, siguen siendo problemas persistentes. Artigue (1995) señala que, aunque los estudiantes logran dominar las técnicas algorítmicas, como las reglas de derivación; enfrentan dificultades al intentar conectar estas herramientas con una interpretación conceptual de la derivada, ya sea como límite del cociente incremental o como la pendiente de la recta tangente. Esto evidencia que el problema no radica únicamente en el manejo técnico, sino en la falta de integración entre procedimientos y significados, un desafío recurrente en el aprendizaje del cálculo.

En línea con lo anterior, Hitt (2003) subraya que los estudiantes a menudo desarrollan algoritmos sin una comprensión clara de su propósito o contexto, lo que limita su capacidad para aplicar estos conceptos de manera efectiva en situaciones más complejas.

En este sentido, se plantea el interrogante: *¿Cómo favorecer la comprensión de las reglas de derivación de la función potencia y la función exponencial en una secuencia de enseñanza que incorpora las ideas de Fermat con la mediación de GeoGebra?*

1. Justificación

En este capítulo se retoman los problemas identificados en la introducción. A partir de diversos referentes teóricos y estudios, se argumenta la pertinencia de diseñar una secuencia de enseñanza que incorpore las ideas de Fermat y el uso de GeoGebra, con el propósito de fortalecer la comprensión conceptual y el proceso de demostración.

G. Stylianides y A. Stylianides (2017) subrayan la necesidad urgente de contribuir al futuro, realizando investigaciones que respalden a los docentes en la mejora de la comprensión matemática de los estudiantes. Para ello, se requiere un enfoque centrado en estudios orientados a la intervención en el aula, que ofrezcan soluciones prácticas y efectivas para abordar estos problemas en el proceso de enseñanza de la demostración.

En cuanto al uso de Software de Geometría Dinámica (SGD), los estudios sugieren que este puede desempeñar un papel crucial en la mejora del aprendizaje de la demostración. Balacheff (2020) destaca que los entornos de aprendizaje mejorados con tecnología ofrecen a los estudiantes un campo de experiencia que fomenta la exploración, formulación de conjeturas y el desarrollo de demostraciones. Esto respalda la pertinencia de usar GeoGebra en un formato interactivo, ya que permite a los estudiantes visualizar propiedades geométricas, experimentar con configuraciones dinámicas y transitar hacia la la construcción de demostraciones deductivas.

La relación entre argumentación y visualización, esta última entendida "como el tipo de actividad de razonamiento basada en el uso de elementos visuales o espaciales, ya sean mentales o físicos, realizada para resolver problemas o demostrar propiedades" (Gutiérrez, 1996, p. 99) en el aprendizaje de la geometría también ha sido objeto de estudio. Blanco et al. (2024) investigan la articulación entre visualización y argumentación en la enseñanza de la geometría, concluyendo que, en tareas visuales, la argumentación permite abordar las dificultades derivadas del uso de representaciones, mientras que, en tareas de conjetura y demostración, las dificultades surgen principalmente de la visualización, ya que esta condiciona el razonamiento seguido para resolverlas. Estos hallazgos destacan la necesidad de integrar ambos procesos en el diseño de tareas educativas para facilitar el aprendizaje de la geometría y mejorar la comprensión de los estudiantes frente a la demostración.

Aunque los objetivos de este trabajo no se centran en el desarrollo de habilidades de visualización, sino en el proceso de demostración de algunas reglas de derivación, tendremos en cuenta las ideas anteriores, dado que resulta crucial crear ambientes de aprendizaje que combinen el razonamiento matemático con herramientas tecnológicas como GeoGebra. Además, es indispensable diseñar tareas que fomenten la formulación de conjeturas, la visualización y la argumentación, fortaleciendo así la capacidad de los estudiantes para construir argumentos matemáticos sólidos.

Por otro lado, Fiallo y Parada (2018) desarrollan un curso de Pre cálculo para el estudio dinámico del cambio y la variación, donde destacan que el enfoque tradicional de los libros de texto ha llevado a que los conceptos pierdan su razón de ser. Según estos autores, los problemas de cambio y variación suelen presentarse como simples ejemplos posteriores a la exposición de una teoría, por lo que plantean como alternativa el uso de las tecnologías digitales, ya que estas permiten que los estudiantes visualicen representaciones en pantalla que se alinean con su intuición, facilitando la comprensión de los conceptos. Para el caso del concepto de derivada, se propone el problema de encontrar el máximo rectángulo que se puede construir con un perímetro fijo y se orienta al estudiante a resolverlo a partir del método de la pseudoigualdad de Fermat para hallar máximos y mínimos, pero en un entorno de Geometría Dinámica que denominan *"el método de Fermat digitalizado"*. En esta línea, la actividad consiste en trabajar con el archivo *"caja sin tapa"* en GeoGebra para estudiar cómo varía el volumen de la caja en función de la altura. A través de la manipulación dinámica, los estudiantes identifican la altura que genera el volumen máximo, probando con distintos valores, redondeos y registros numéricos que muestran cómo alrededor de ese máximo la función apenas cambia, es decir, $f(A+E) \approx f(A)$. Este enfoque permite retomar las ideas originales de Fermat en un entorno interactivo, facilitando la exploración visual y empírica del comportamiento de las funciones y contribuyendo a la comprensión conceptual de la derivada y de las reglas de derivación para ciertas funciones.

En síntesis, en esta propuesta se tienen en cuenta las ideas de Fermat plasmadas en un entorno dinámico, esperando que la implementación de ésta contribuya de manera significativa a la comprensión de las reglas de derivación desde una perspectiva innovadora, mientras se fortalece simultáneamente el proceso de razonamiento y demostración. Para ello, se proponen los objetivos en el siguiente capítulo.

2. Objetivos

En este capítulo se presentan los objetivos que orientan el desarrollo de la presente investigación. Inicialmente, se establece el objetivo general, el cual define la meta central del estudio, y posteriormente se detallan los objetivos específicos que guían las acciones necesarias para alcanzarlo.

2.1. Objetivo general

Diseñar, implementar y evaluar una unidad de enseñanza de la regla de la derivada de la función potencia y exponencial incorporando las ideas de Fermat en GeoGebra, dirigida a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, enfocándola al desarrollo de habilidades del proceso de demostración.

2.2. Objetivos específicos

- Implementar un test diagnóstico sobre las reglas de derivación de la función potencia y la función exponencial con estudiantes de un curso de didáctica del cálculo de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS y analizar los tipos de demostración.
- Implementar una secuencia de enseñanza sobre las reglas de derivación de la función potencia y la función exponencial incorporando las ideas de Fermat en GeoGebra con estudiantes de un curso de didáctica del cálculo de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS y analizar los tipos de demostración emergentes.
- Caracterizar las dificultades y los errores de los estudiantes de un curso de didáctica del cálculo de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS en el proceso

de plantear conjeturas y construir demostraciones sobre las reglas de derivación de la función potencia y la función exponencial.

- Analizar los aportes de la secuencia de enseñanza en la construcción de demostraciones deductivas sobre las reglas de derivación de la función potencia y la función exponencial.
- Aportar información sobre el conocimiento didáctico y matemático de los profesores de matemáticas en formación en un curso de didáctica del cálculo.

3. Antecedentes

Se presentan los antecedentes que sustentan la propuesta. En primer lugar, se examina el tratamiento que algunos libros de texto universitarios dan a las demostraciones de las reglas de derivación, con el fin de evidenciar enfoques predominantes y posibles limitaciones. Posteriormente, se revisan estudios que abordan el proceso de demostración en entornos de Geometría Dinámica, destacando su potencial y sus desafíos en la enseñanza este proceso. Finalmente, se presentan investigaciones relacionadas con el uso de la subtangente y métodos históricos en combinación con herramientas digitales, los cuales aportan elementos conceptuales relevantes para el diseño de la secuencia didáctica que se propone en este trabajo.

3.1. Demostraciones de las reglas de derivación en libros de texto

De la revisión de los siguientes libros de cálculo diferencial más usados en la Universidad Industrial de Santander: “El cálculo”, séptima edición (Leithold, 1998), (L1); “Cálculo de una variable- Trascendentes tempranas”, cuarta edición (Zill y Wright, 2011), (L2); “Cálculo de una variable- Trascendentes tempranas”, séptima edición (Stewart, 2012), (L3) y "Cálculo- Trascendentes tempranas", quinta edición (Smith et al. 2018), (L4) con el objetivo de analizar el tratamiento que se da a la demostración de las reglas de derivación para funciones potencia y funciones exponenciales.

Se encontraron los siguientes enfoques dados al tema:

- Para las **funciones potencia** $\boldsymbol{f(x) = x^n, n} \in \mathbb{N}$**,** L1, L2 y L4, presentan una demostración usando para 4 pasos:

i. $f(x+h) = (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{(n-1)nx^{n-2}h^2}{2} + \cdots + nxh^{n-1} + h^n$

ii. $f(x+h) - f(x) = x^n + nx^{n-1}h + \frac{(n-1)nx^{n-2}h^2}{2} + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n$

$= nx^{n-1}h + \frac{(n-1)nx^{n-2}h^2}{2} + \cdots + nxh^{n-1} + h^n$

$= h(nx^{n-1} + \frac{(n-1)nx^{n-2}h}{2} + \cdots + nxh^n + h^{n-1})$

iii. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h(nx^{n-1} + \frac{(n-1)nx^{n-2}h}{2} + \cdots + nxh^n + h^{n-1})}{h}$

$$= nx^{n-1} + \frac{(n-1)nx^{n-2}h}{2} + \cdots + nxh^n + h^{n-1}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \frac{(n-1)nx^{n-2}h}{2} + \cdots + nxh^n + h^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Mientras que en L3, realizan la siguiente demostración:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

Si $f(x) = x^n$,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$= (a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$= (a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$= na^{n-1}.$$

- Para las **funciones potencia** $\boldsymbol{f(x) = x^n, n} \in \mathbb{Z}$, en L3 se propone como ejercicio, mientras que L1, L2 y L4 realizan la siguiente demostración:

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n \cdot \frac{d}{dx}1 - 1\frac{d}{dx}x^n}{(x^n)^2} = \frac{nx^{n-1}}{x^{2m}} = -nx^{-n-1}.$$

- Para las **funciones potencia** $\boldsymbol{f(x) = x^n, n} \in \mathbb{Q}$, L3 no presenta ninguna demostración; L2 y L4 presentan lo siguiente:

Sea $n = {}^{p}/_{q}$, donde p y q son enteros y $q \neq 0$.

Entonces la función $y = x^{p/q}$ proporciona $y^q = x^p$.

Luego, para $y \neq 0$, la diferenciación implícita

$\frac{d}{dx}y^q = \frac{d}{dx}x^p$ produce $qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}$.

Al despejar dy/dx en la última ecuación y simplificar con las leyes de los exponentes obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q}x^{p/q-1}.$$

Mientras que en L1 se procede de la siguiente manera:

Considere que $x \neq 0$, y $n = \frac{1}{q}$, donde q es un número entero positivo. Entonces $f(x) = x^{1/q}$.

Luego, por la definición de derivada, se tiene que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{1/q} - x^{1/q}}{h}$$

Ahora, se emplea la fórmula siguiente:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-1}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}),$$

donde $a = (x+h)^{1/q}, b = x^{1/q}$ y $n = q$. De modo que se multiplica el numerador y el denominador por

$$[(x+h)^{1/q}]^{(q-1)} + [(x+h)^{1/q}]^{(q-2)} x^{1/q} + \cdots + (x^{1/q})^{(q-1)}$$

Entonces

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^{1/q} - x^{1/q}][(x+h)^{\frac{q-1}{q}} + (x+h)^{\frac{q-2}{q}} x^{1/q} + \cdots + x^{\frac{q-1}{q}}]}{h[(x+h)^{(q-1)/q} + (x+h)^{(q-2)/q} x^{1/q} + \cdots + x^{(q-1)/q}]}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h[(x+h)^{(q-1)/q} + (x+h)^{(q-2)/q} \boldsymbol{x}^{1/q} + \cdots + x^{(q-1)/q}]}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(x+h)^{(q-1)/q} + (x+h)^{(q-2)/q} \boldsymbol{x}^{1/q} + \cdots + x^{(q-1)/q}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x^{(q-1)/q} + x^{(q-2)/q} \boldsymbol{x}^{1/q} + \cdots + x^{(q-1)/q}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{qx^{1-(\frac{1}{q})}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}.$$

Ahora, sea $n = \frac{p}{q}$, donde p es cualquier número entero diferente de cero y q es un entero positivo, entonces

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow f(x) = (x^{1/q})^p$$

De la regla de la cadena y de la regla de la potencia para números enteros, se tiene

$$f'(x) = p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$= \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1-\frac{1}{q}+\frac{1}{q}-1}$$

$$= \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

- Para las **funciones potencia $\boldsymbol{f(x) = x^n, n} \in \mathbb{R}$**, en L1 y L4 no se realiza la demostración; en L2 realizan lo siguiente:

Utiliza la identidad $x = e^{\ln x}$.

Se usa el siguiente hecho: para $x > 0, x^n$ se define para todos los números reales n. Luego, debido a la identidad $x = e^{\ln x}$.

$$x^n = (e^{\ln x})^n = e^{n \ln x}.$$

Así, $\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}e^{n \ln x} = e^{n \ln x}\frac{d}{dx}(n \ln x) = \frac{n}{x}e^{n \ln x}$.

Al sustituir $e^{n \ln x} = x^n$ en el último resultado se completa la demostración para $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{n}{x}x^n = nx^{n-1}.$$

La última fórmula de derivada también es válida para $x < 0$ cuando n es un número racional y q es un entero impar.

Y en L3 se demuestra de la siguiente manera:

Sea $y = x^n$. Utilizando la derivación logarítmica:

$$\ln|y| = \ln|x|^n, \qquad x \neq 0$$

Por tanto, $\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$

Así que, $y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$.

- Para las **funciones exponenciales $\boldsymbol{f(x) = a^x, a} \in \mathbb{R}$**, en L1 no se realiza la demostración, mientras que en L2, L3 y L4 usan la definición de derivada y un método de cuatro pasos:

$$f(x+h) = a^{x+h} = a^x a^h$$

$$f(x+h) - f(x) = a^x a^h - a^x = a^x(a^h - 1)$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\,\frac{(a^h-1)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0} a^x\,\frac{(a^h-1)}{h}=a^x\ \ln a.$$

De lo anterior se evidencia que las demostraciones presentadas en estos textos son estrictamente algebraicas, no se invita al estudiante a explorar, ni a conjeturar, ni a demostrar. Solo se muestran procesos algorítmicos, lo que confirma la necesidad de incorporar estrategias que contribuyan a la compresión y demostración de las reglas de derivación.

Por otro lado, se ha encontrado que Conejo et al. (2014), presentan un estudio descriptivo sobre el tratamiento de la justificación de las reglas y técnicas de derivación en algunos libros de texto de secundaria. Además, establecen que la mecanización de estas reglas, ignorando su justificación, podría ser una de las causas por las que no se alcanza la comprensión de este concepto. Este es un punto de vista con el que se coincide en este trabajo.

3.2. El proceso de demostración en SGD

Fiallo (2011) diseña, implementa y evalúa una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica, enfocándola hacia el desarrollo de las habilidades de demostración. Aquí analiza la existencia de unidad o ruptura cognitiva entre los procesos de argumentar y demostrar en el desarrollo por los estudiantes de demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas. Además, identifica y caracteriza los orígenes de las dificultades que se presentan en los procesos de planteamiento de conjeturas y de construcción de demostraciones en el contexto de aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica. Se concluye que los estudiantes lograron explorar conceptos empleando el Software de Geometría Dinámica (SGD), el cual facilitó la conexión entre la experimentación práctica y la argumentación teórica. Las herramientas del software permitieron validar las conjeturas formuladas por los alumnos, promoviendo tanto la generación de estas como el desarrollo de demostraciones. Aunque al inicio las demostraciones fueron principalmente inductivas, el progreso en las actividades llevó a una transición gradual hacia demostraciones predominantemente deductivas. Por otro lado, un aporte destacado del autor, es que advierte que el software puede convertirse en un obstáculo si el docente permite que los estudiantes basen sus argumentos únicamente en las verificaciones ofrecidas por la herramienta. En este sentido, el papel del docente resulta crucial, ya que debe actuar como mediador para garantizar que el uso del software complemente el pensamiento deductivo, en lugar de reemplazarlo.

Toro (2017) analiza cómo estudiantes de octavo grado desarrollan habilidades de argumentación matemática mediante el uso del software Cabri. Con un enfoque cualitativo, se implementó una propuesta de enseñanza basada en tareas colaborativas para explorar relaciones geométricas, plantear conjeturas y construir demostraciones. Los resultados muestran que los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) facilitaron la transición de la argumentación inductiva a la deductiva, promoviendo un aprendizaje profundo y habilidades de razonamiento. Asimismo, se resalta el rol clave del profesor en la gestión de la argumentación y la necesidad de diseñar tareas que promuevan la justificación y el pensamiento crítico. El estudio concluye que la incorporación de tecnología en el aula fomenta ambientes dinámicos, reflexivos y propicios para el desarrollo del pensamiento matemático.

Martínez (2020) llevó a cabo el diseño e implementación de una secuencia de problemas de construcción geométrica dentro de un entorno de geometría dinámica, con el objetivo de desarrollar habilidades de demostración en estudiantes de noveno grado. Los resultados de su investigación resaltan la importancia del software como un mediador interactivo, al permitir la exploración de propiedades invariantes que favorecen significativamente el desarrollo del pensamiento deductivo. Asimismo, el autor concluye que es posible fortalecer las habilidades de demostración en los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de construcción geométrica utilizando este tipo de herramientas tecnológicas.

Morales (2021) presenta un estudio descriptivo sobre cómo un grupo de estudiantes de bachillerato utiliza el software de geometría dinámica GeoGebra para justificar y construir teselados semirregulares mediante transformaciones isométricas. La percepción visual facilitada por GeoGebra fue clave para explorar y manipular construcciones geométricas, se evidenció que esta funcionó más como un argumento en sí mismo que como apoyo al razonamiento, por lo que se hace indispensable la guía del docente, quien debe mediar entre las herramientas tecnológicas y los conceptos matemáticos para que los estudiantes alcancen el aprendizaje esperado.

Los estudios revisados destacan el papel clave del Software de Geometría Dinámica (SGD) en el proceso de demostración. Estas herramientas tecnológicas facilitan la transición de la argumentación inductiva a la deductiva, permitiendo a los estudiantes explorar propiedades matemáticas, plantear conjeturas y validar resultados de manera interactiva. Sin embargo, también se advierte que el uso del software debe ser mediado cuidadosamente por el docente para evitar que los estudiantes se limiten a confiar en las verificaciones automáticas.

3.3. Estudios sobre el uso de la subtangente

En este apartado, se presentan estudios que respaldan la relevancia de recurrir a métodos antiguos, como el cálculo de la subtangente, definida como el segmento del eje x comprendido entre el punto de tangencia y el punto donde la recta tangente a la curva corta el eje x. Estos métodos, combinados con tecnologías digitales, pueden potenciar la enseñanza y el aprendizaje del concepto de derivada.

Font (2010) realiza un análisis didáctico de las nociones de derivada en un punto y de la función derivada, enfocándose en cómo las dificultades en su comprensión están relacionadas con el uso de definiciones basadas en límites. Busca mostrar alternativas didácticas que utilicen diversas representaciones y procesos de generalización, así como fomentar en los futuros profesores de secundaria la capacidad de realizar análisis didácticos de los procesos de instrucción matemática. Esto se hace con la intención de mejorar la enseñanza y aprendizaje de estos conceptos en contextos educativos.

En cuanto al uso de la subtangente, (concepto que se profundizará en el siguiente capítulo), este autor, en uno de los apartados titulado "Recuperación de técnicas antiguas gracias a los graficadores dinámicos", muestra un ejemplo donde se presenta un cuestionario diseñado para estudiantes de primer año de Bachillerato (17 años) como parte de una lección sobre la derivada. El objetivo es calcular la derivada de $f(x) = e^x$ sin recurrir a su definición formal basada en límites. Previamente, los estudiantes trabajaron con un software dinámico que les permitió analizar la representación gráfica de la función y descubrir que, en el caso de la función exponencial de base e, la longitud de todas las subtangentes es constante e igual a 1.

Para calcular la derivada, los estudiantes siguen una técnica que comienza con la elección de un punto específico de la función y su tangente. Utilizando software dinámico, identifican una condición común a todas las tangentes: la subtangente siempre mide 1. Esta condición se traduce en términos simbólicos aplicando la interpretación geométrica de la derivada, lo que permite generalizar el cálculo a cualquier punto y deducir la expresión simbólica de $f'(x)$. Esta técnica requiere combinar representaciones gráficas y simbólicas de la función exponencial, ya que su ausencia haría inviable el método. Históricamente, se sitúa entre el problema de la tangente y su inverso, que está basado en los procedimientos históricos empleados por matemáticos como Descartes y Barrow para construir tangentes y normales; y aunque su aplicación es limitada, resulta útil para funciones lineales, exponenciales y logarítmicas.

Pérez y Hernández (2010) presentan un diseño didáctico centrado en un tema del Cálculo dentro del currículo actual, respaldado por investigaciones socioepistemológicas que promueven un uso estratégico de la tecnología en el aula de matemáticas. Este enfoque facilita la reconstrucción de significados de conceptos matemáticos fundamentales, como la subtangente, para caracterizar el comportamiento de las curvas en contextos de variación, incluyendo aspectos clave como máximos, mínimos y puntos de inflexión. El diseño establece una relación entre la magnitud de la subtangente y el comportamiento de las curvas, utilizando la variación de las subtangentes para identificar características de la función. Además, se propone que la variación de la abscisa da lugar a nuevas magnitudes de la subtangente, y esta relación se expresa mediante una función en la que los conceptos de máximo y mínimo son esenciales para caracterizar los puntos de inflexión. El diseño también destaca la relevancia del enfoque gráfico-analítico presente en las obras de L'Hospital y Agnesi, subrayando su valor en la comprensión de estos conceptos.

Aunque en estos trabajos no se emplean directamente las ideas de Fermat para el cálculo de la subtangente, se destaca que los métodos antiguos pueden aportar significativamente al aprendizaje.

4. Marco referencial

En el presente apartado se presentan los elementos teóricos que posibilitan la concepción del problema de investigación, los objetivos y consolidación de los resultados. Este marco fue creado con el objetivo de ofrecer una fundamentación teórica acerca del proceso de razonamiento y demostración, y con ello, mostrar la manera en que las ideas de Fermat en cuanto al concepto de derivada pueden ser mediadas por el Software de Geometría dinámica GeoGebra para fomentar el desarrollo de las habilidades de este proceso.

4.1. Proceso de razonamiento y demostración

Existen diversas definiciones de demostración; sin embargo, teniendo en cuenta el objetivo de este trabajo, se adopta la siguiente concepción "la demostración es el proceso que incluye todos los intentos hechos por los estudiantes para explicar, verificar o justificar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática" (Fiallo, 2011, p. 85)

De esta definición, se caracterizan los tipos de demostración que surgen en las aulas de clase (Fiallo, 2011); demostraciones deductivas y demostraciones inductivas o empíricas.

1. **Demostraciones deductivas**: Ocurren cuando los estudiantes usan argumentos que apoyan una conclusión sobre una o varias premisas, donde usan teoremas, definiciones o propiedades. Existen dos categorías: experimento mental y deducción formal.

   1.1. ***Experimento mental**:* Se caracteriza por el uso de ejemplos para ayudar a organizar la demostración. Se divide en transformativo y estructural.

1.1.1. ***Experimento mental transformativo***: El estudiante transforma el problema inicial en uno equivalente. Usa ejemplos que le ayuden a escoger dicha transformación.

1.1.2. ***Experimento mental estructural***: Ocurre cuando el estudiante usa los ejemplos para ayudar a entender los pasos, que se basan en secuencias lógicas derivadas de datos y axiomas, definiciones y teoremas.

1.2 ***Deducción formal***: El estudiante realiza operaciones mentales sin la necesidad de ejemplos específicos. Se divide en transformativa y estructural.

1.2.1. ***Deducción formal transformativa***: El estudiante transforma el problema inicial en uno equivalente y los argumentos se basan en propiedades matemáticas generales.

1.2.2. ***Deducción formal estructural***: Cuando se organiza la deducción a partir de secuencias lógicas derivadas de axiomas, definiciones y teoremas, sin recurrir a ejemplos específicos.

1.3 ***Deducción informal:*** Consiste en procesos deductivos abstractos expresados de manera no rigurosa, donde se combinan explicaciones verbales con lenguaje matemático y se apoyan en afirmaciones consideradas evidentes. Este tipo de razonamiento se basa en operaciones mentales que pueden estar acompañadas de ejemplos concretos o no (Beltrán-Menue et al. 2024).

2. **Demostraciones inductivas:** Se basan en ejemplos como el principal o único elemento de convicción. En este tipo de razonamiento, los estudiantes aceptan la veracidad de una conjetura tras observar regularidades en ejemplos específicos. Estas demostraciones se dividen en varios tipos, de acuerdo con la forma de escoger los ejemplos: empirismo ingenuo inductivo, experimento crucial y ejemplo genérico.

2.1. ***Empirismo ingenuo:*** Los estudiantes usan sólo ejemplos sin ningún criterio específico.

2.1.1. ***Empirismo ingenuo perceptivo:*** Los argumentos se basan en elementos visuales o táctiles.

2.1.2. ***Empirismo ingenuo inductivo:*** Los argumentos se basan en generalizaciones inductivas sobre los enunciados.

2.2. ***Experimento crucial:*** Se escoge un ejemplo cuidadosamente que se presume representativo y la justificación se basa en la comprobación de dicho ejemplo. Incluye dos tipos:

2.2.1. ***Experimento crucial basado en ejemplo*** donde los estudiantes se basan en un único ejemplo o en la ausencia de contraejemplos.

2.1.2. ***Experimento crucial constructivo*** en el cual los argumentos son sustentados sobre el ejemplo o en la forma de conseguirlo.

2.3. ***Ejemplo genérico****:* El estudiante usa un ejemplo que represente un caso específico de una clase y permite la producción de razonamientos abstractos y propiedades generales válidas para esa clase. Se divide en dos tipos:

2.3.1 ***Ejemplo genérico analítico*** en el cual las justificaciones están basadas en propiedades y relaciones generales descubiertas en el ejemplo.

2.3.2 ***Ejemplo genérico intelectual*** donde los argumentos no son resultado de propiedades encontradas gracias al ejemplo, sino que se recuerdan.

4.2. Acercamientos históricos al concepto de derivada

En este apartado, se expone de manera muy resumida la construcción del concepto de derivada. Para esto, nos basamos en el estudio de Vracken y Engler (2013).

Mundo antiguo

En esta etapa, los aportes matemáticos se centraron en observaciones empíricas y métodos rudimentarios para estudiar fenómenos de cambio. En Mesopotamia, los babilonios desarrollaron tablas astronómicas y realizaron aproximaciones algebraicas para describir fenómenos como el movimiento de planetas. En Grecia, figuras como Euclides y los pitagóricos utilizaron proporciones y razonamientos geométricos para explorar magnitudes y relaciones entre cantidades. Aunque no se hablaba explícitamente de variables o funciones, estos conceptos comenzaron a tomar forma con intentos por relacionar magnitudes físicas, como en el caso de las proporciones estudiadas por los pitagóricos en la acústica. Un factor clave fue el limitado desarrollo del simbolismo, ya que las expresiones algebraicas aún no existían, excepto por los intentos de Diofanto, los cuales, aunque de manera retórica, abordaron conceptos relacionados con la dependencia funcional.

Edad media

En este periodo, se caracteriza por una larga etapa de oscuridad en Europa. Los árabes tomaron los avances de los griegos y su legado llegó a occidente.

Nicolás Oresme destacó con su enfoque geométrico para representar variaciones cualitativas y cuantitativas, particularmente en su tratado *De configurationibus qualitatum et motuum*. Oresme utilizó diagramas para analizar el movimiento y la intensidad de propiedades variables, anticipando la representación gráfica de funciones. En las universidades de Oxford y París, se realizaron grandes aportes al desarrollo en la noción de función. Estos avances marcaron un cambio hacia un análisis más cuantitativo y visual del cambio.

Siglos XV y XVI

Durante este periodo, François Viète revolucionó el álgebra al introducir notaciones simbólicas para representar cantidades y coeficientes, lo que facilitó la formulación de relaciones funcionales. Galileo Galilei retomó las ideas de Oresme y empleó métodos experimentales para analizar fenómenos físicos como la caída libre, estableciendo relaciones funcionales entre velocidad, aceleración y tiempo. Sus gráficos representaban magnitudes físicas y marcaron un paso clave hacia el desarrollo del cálculo diferencial. Además, se empezaron a considerar las funciones como relaciones entre conjuntos de números, más que entre cantidades, esto dio paso a la extensión del concepto de número, con la configuración de los números reales y la aparición de los números imaginarios.

Siglo XVII

Pierre de Fermat realizó contribuciones fundamentales al estudio de tangentes y extremos de funciones. En su obra *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, propuso un método para calcular tangentes mediante la transición de una secante a una tangente utilizando conceptos próximos a los infinitesimales. René Descartes desarrolló la geometría analítica, que permitió expresar relaciones entre variables de forma algebraica. Finalmente, Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz sistematizaron el cálculo infinitesimal de manera independiente. Newton abordó las cantidades variables desde un enfoque cinemático con sus fluentes y fluxiones, mientras que Leibniz introdujo la notación diferencial moderna y formuló el concepto de función de manera más general.

Siglos XVIII y XIX

Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange y Augustin-Louis Cauchy consolidaron el análisis matemático. Euler amplió el concepto de función y utilizó notaciones que hoy son estándar. Lagrange formalizó el cálculo sin recurrir a infinitesimales y centró su enfoque en expresiones algebraicas. Cauchy introdujo definiciones rigurosas de límite, continuidad y derivada, definiendo esta última como el límite de la razón de incrementos, lo que sentó las bases del análisis moderno.

Última etapa

En el siglo XX, matemáticos como David Hilbert y Stefan Banach trabajaron en el análisis funcional, ampliando las aplicaciones del cálculo diferencial a espacios abstractos. Además, la introducción de la teoría de conjuntos por Georg Cantor otorgó una base más precisa al concepto de función. Con la llegada de las tecnologías computacionales, herramientas gráficas y algebraicas renovaron el interés en la visualización, permitiendo una interacción más dinámica entre distintas formas de representación. Estos avances han transformado la manera en que se enseña y aprende la derivada, retomando la visualización como una herramienta clave.

Como es de nuestro interés, profundizamos en los aportes de Fermat, en los apartados siguientes.

4.3. Método de máximos y mínimos de Fermat

Pierre de Fermat formuló un método general para resolver problemas de máximos y mínimos, que posteriormente aplicó al cálculo de tangentes, sentando así uno de los fundamentos del cálculo diferencial. Este método, expuesto en su obra *Methodus*, en la primera sección titulada *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam*, se caracteriza por su enfoque algebraico y la introducción de la idea del incremento de una magnitud, un concepto que anticipa las bases del análisis matemático moderno (Toledano, 2017). A continuación, se ilustra el método de máximos y mínimos de Fermat (Tabla 1), con su interpretación en notación actual, conforme al análisis realizado por Toledano (2017).

Tabla 1

Método de máximos y mínimos de Fermat

Fermat	Notación actual
Sea $\boldsymbol{A}$ una incógnita cualquiera del problema (que tenga dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).	x es la variable independiente del problema de extremos.
Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de $\boldsymbol{A}$ en términos que pueden ser de cualquier grado.	$f(x)$ es la función a maximizar o minimizar.
Se sustituirá a continuación la incógnita original $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{e}$ y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de $\boldsymbol{A}$ y de $\boldsymbol{e}$, en términos que pueden ser de cualquier grado.	$f(x+e)$ es lo que se obtiene al sustituir en la función x por $x\ +E$.
Se adigualará, para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.	Adigualamos: $f(x) \sim f(x+e)$.
Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que en los dos miembros habrá términos afectados por $\boldsymbol{e}$ o una de sus potencias.	Eliminamos los términos comunes de ambos lados: $f(x)-f(x+e) \sim 0$
Se dividirán todos los términos por $\boldsymbol{e}$, o por alguna potencia superior de $\boldsymbol{e}$, de modo que desaparezca la $\boldsymbol{e}$ de, al menos, uno de los términos de uno cualquiera de los dos términos.	Dividimos por e: $\frac{f(x)-f(x+e)}{e} \sim 0$

Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparezca la $\boldsymbol{e}$ o una de sus potencias, y se igualará a lo que queda, o bien, si en uno de los dos miembros no queda nada, se igualará, lo que tiene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.	Hacemos $e = 0$
La resolución de esta última ecuación dará el valor de $\boldsymbol{A}$, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.	$\left(\frac{f(x) - f(x+e)}{e}\right)_{e=0} = 0$

Nota: Adaptado de "Los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes" (Toledano, 2017, p.77)

Los últimos apartados se podrían escribir en notación actual como:

$$\boldsymbol{\lim_{e \to 0} \left[\frac{f(x) - f(x+e)}{e}\right] = 0.}$$

Aunque en este procedimiento Fermat no empleaba el concepto de cantidades infinitesimales ni de función, sino que se trataba de un algoritmo puramente algebraico, su enfoque estaba claramente orientado a asegurar la funcionalidad del procedimiento, sin buscar una demostración formal rigurosa. En la secuencia de enseñanza que se presenta en este trabajo, se adaptan estas ideas al lenguaje matemático actual con la mediación de las tecnologías digitales y se reflejan en las actividades propuestas.

4.4. La subtangente

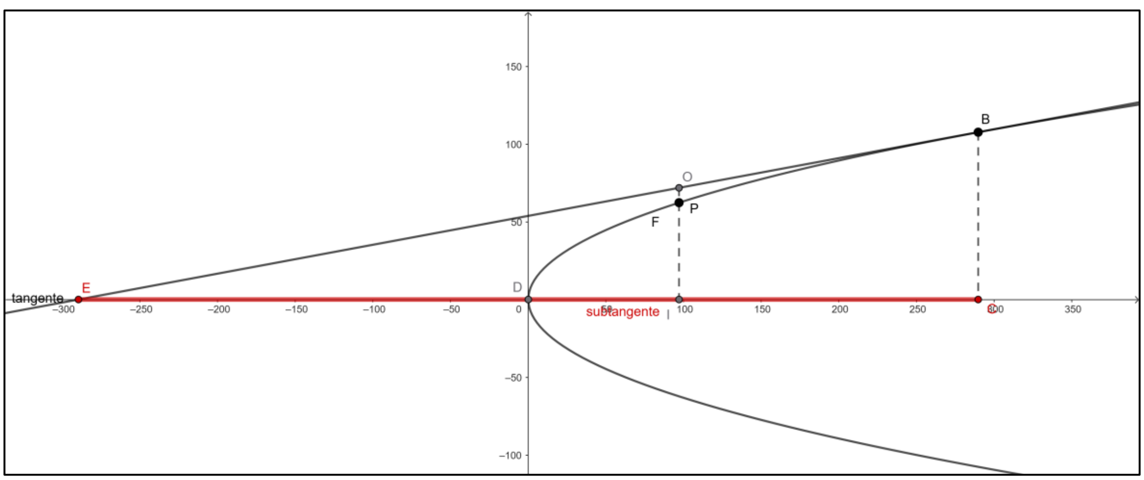
Una interpretación actual del método de Fermat para hallar la tangente, parte de la idea de suponer que la tangente a la curva existe y pasa por un punto sobre la curva; pero, para trazar una recta se necesitan dos puntos. En la actualidad, con el plano cartesiano, ese punto estará sobre el eje de las x. Para determinar este punto, basta encontrar la longitud del segmento del eje comprendido entre la abscisa del punto de tangencia y la abscisa del punto donde la tangente a la curva corta el eje x. Este segmento es llamado la **subtangente**.

Este método aparece en la segunda sección de su obra *Methodus*, titulada *De tangentibus linearum curvarum* como una aplicación del método de máximos y mínimos.

A continuación, se ilustra un ejemplo del cálculo de la subtangente a la parábola.

Figura 1

Curva y subtangente

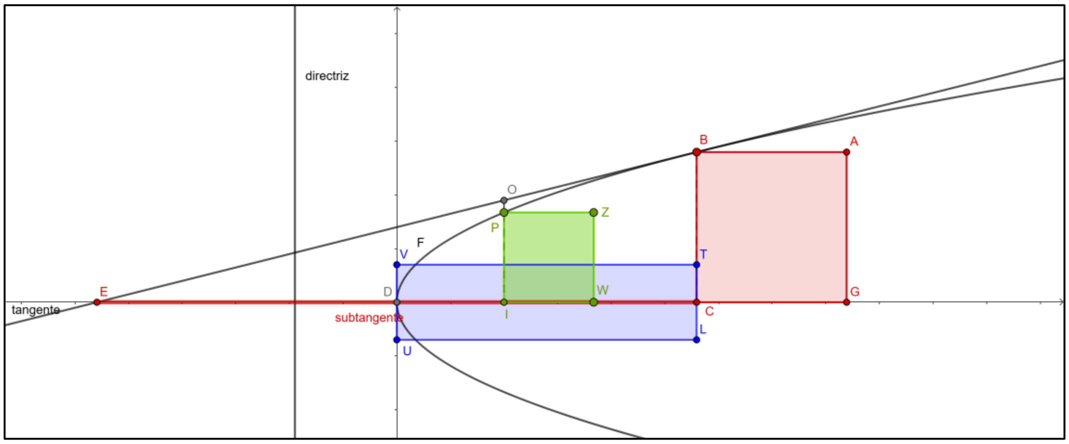


Nota. Adaptado de “Los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes” (Toledano, 2017, p.73)

Fermat usó la propiedad intrínseca de la parábola, propuesta por Apolonio, quien afirma que la parábola tiene la propiedad característica que, para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa x y el *latus rectum I* (Aldana et al. 2018), cuerda que pasa por el foco de la parábola y es perpendicular al eje de la parábola.

Figura 2

Propiedad característica de la Parábola



De ahí que $\frac{BC^2}{PI^2} = \frac{CD}{ID} \leftrightarrow \frac{BC^2}{CD} = \frac{PI^2}{ID}$, y como O es exterior a la parábola, entonces $\frac{CD}{ID} > \frac{BC^2}{OI^2}$ y, por semejanza de triángulos $\frac{BC}{CE} = \frac{OI}{IE}$, entonces $BC = \frac{OI}{IE}CE$.

Por tanto $\frac{CD}{ID} > \frac{CE^2}{IE^2}$. Ahora, se toma $CD = d, CE = a$ la subtangente y $CI = e$.

Entonces $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}$

$\leftrightarrow d(a-e)^2 > a^2(d-e)$

$\leftrightarrow d(a^2 - 2ae + e^2) > a^2d - a^2e$

Ahora, se aplica el método de máximos y mínimos:

Adigualando, dividiendo todo por e y eliminando términos comunes a ambos lados, se obtiene $de - 2da \sim -a^2$, haciendo $e = 0$,

$-2da \sim -a^2$, entonces $2d \sim a$. ■

Se ha probado que CE es el doble de CD, resultado que ya se conocía por Apolonio.

Aunque Fermat se limitó a buscar y determinar la longitud de la subtangente, sin mencionar explícitamente la pendiente de la recta tangente, no concebía la tangente como el límite geométrico de las secantes definidas por el punto de tangencia y los puntos cercanos en la recta (Toledano, 2017). Sin embargo, sus ideas han sido retomadas y reinterpretadas en el lenguaje matemático actual para comprender las reglas de derivación, procedimiento que se explica en el siguiente capítulo.

5. Metodología

Se presenta la metodología adoptada para el desarrollo de la investigación, detallando el enfoque, el tipo de estudio y los procedimientos empleados en el diseño, implementación y análisis de la secuencia. Se describe la población, el contexto educativo, las tareas propuestas y los distintos caminos de solución previstos, junto con los instrumentos utilizados para la recolección de datos y los criterios de análisis que permitieron interpretar los resultados.

La presente investigación se enmarca en el paradigma de investigación de diseño, y se desarrolla específicamente bajo la metodología de experimentos de enseñanza (Camargo, 2021). Esta metodología implica el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza estructurada con el propósito de poner a prueba una conjetura sobre un aprendizaje específico. En coherencia con ello, el objetivo de este trabajo es diseñar, implementar y evaluar una secuencia de enseñanza de la regla de la derivada de la función potencia y exponencial incorporando las ideas de Fermat en GeoGebra, dirigida a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, enfocándola al desarrollo de habilidades del proceso de demostración.

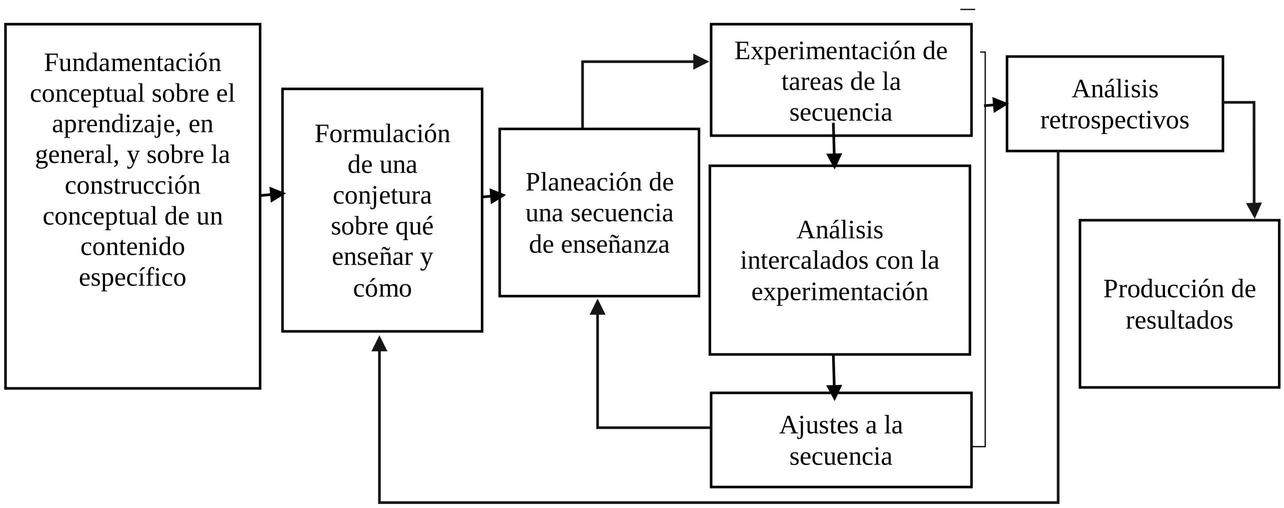
El interés que dio origen a esta investigación surgió de una experiencia significativa, cuando asistí a una conferencia sobre este tema, dictada por quien hoy es mi director de tesis. Me llamó la atención la forma en que analizaba e interpretaba los argumentos de sus estudiantes, así como la manera en que clasificaba los tipos de demostración que ellos utilizaban. Hasta entonces, mi concepción sobre las demostraciones era limitada a enfoques tradicionales; sin embargo, esa experiencia me permitió ver que detrás de una demostración hay mucho más que una estructura lógica: hay formas de argumentar, niveles de comprensión y procesos de construcción del conocimiento. Posteriormente, al coincidir con el profesor en la asignatura Didáctica del Cálculo, durante el semestre 2024-2, decidimos asumir el reto y embarcarnos en el desarrollo de mi trabajo de grado, motivada por mi interés no solo en aprender más sobre este tema, sino también en aportar a su comprensión y enseñanza en el ámbito educativo.

Inicialmente, nuestro puente era el Teorema de Pitágoras, pero decidimos enfocar la investigación en las reglas de derivación, ya que, durante el desarrollo del curso mencionado, se hizo evidente que, al abordar el tema de las derivadas, muchos estudiantes —a pesar de encontrarse en un semestre avanzado— no mostraban una comprensión sólida ni de los conceptos involucrados ni de la demostración. Esta situación puso de manifiesto la necesidad de diseñar actividades que no solo enseñen a aplicar reglas, sino que promuevan una comprensión profunda del concepto. Por ello, decidimos escoger el curso de Didáctica del cálculo, 2025-1 como escenario para la experimentación, con el propósito de identificar y realizar los ajustes necesarios antes de implementar la secuencia en los cursos de Cálculo I o en las tutorías asociadas a esta asignatura en una investigación posterior. Esta decisión respondió principalmente a consideraciones de tiempo.

A continuación, se presenta un esquema (figura 3) que resume el plan de ejecución para la estrategia de experimento de enseñanza.

Figura 3

Esquema Experimentos de enseñanza



Nota: Tomado de "Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática" (Camargo, 2021, p.89).

Este esquema plantea que la etapa de fundamentación conceptual sobre el aprendizaje es la que alimenta y, a su vez, se retroalimenta de la formulación de una conjetura sobre qué enseñar y cómo. Esta conjetura guía la planeación de una secuencia de enseñanza, la cual será puesta a prueba en la fase de experimentación de tareas. A medida que se lleva a cabo dicha experimentación, se realizan análisis intercalados, que implican examinar lo ocurrido después de cada sesión, valorar las respuestas de los estudiantes, verificar si se alcanzaron los objetivos previstos y si las tareas diseñadas funcionaron adecuadamente.

En caso de ser necesario, se realizan ajustes a la secuencia, generando así un bucle entre experimentación, análisis y ajustes, el cual puede repetirse varias veces, dando lugar a un proceso de refinamiento progresivo (Camargo, 2021).

Una vez finalizado todo este ciclo, se realizan los análisis retrospectivos, en los que se estudian en profundidad los datos obtenidos durante todo el proceso, y finalmente se pasa a la producción de resultados, donde se comunican los hallazgos y conclusiones de la investigación.

A continuación, se presenta la planeación del experimento de enseñanza correspondiente al desarrollo de este trabajo.

5.1. Fundamentación conceptual

En el capítulo 3 se presentó una revisión de la literatura sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en el cálculo. Se analizó el tratamiento de las reglas de derivación en algunos libros de texto, el método de máximos y mínimos, el método de cálculo de tangentes de Fermat, el uso de la subtangente como vía de aproximación a la derivada y la incorporación del SGD en la enseñanza de la demostración. Este análisis, además de delimitar la problemática, permitió diseñar una secuencia orientada a la comprensión y demostración de las reglas de derivación para ciertas funciones.

5.2. Formulación de una conjetura sobre qué enseñar y cómo

El **qué** enseñar se definió en el interés manifestado en la sección anterior, es decir, se trabajará sobre la demostración de las reglas de derivación de la función potencia y de la función exponencial, las cuales se pueden estudiar de manera dinámica desde un enfoque analítico en un entorno dinámico como GeoGebra, dando lugar al planteamiento de conjeturas y a la construcción de diferentes tipos de demostración.

Para el **cómo** enseñar, se plantea como conjetura inicial que “la incorporación de las ideas de Fermat en el diseño de un libro en el Aula Virtual de GeoGebra, guiado por la exploración, conjeturación y argumentación, coadyuva a comprender y demostrar las reglas de derivación de la función potencia y de la función exponencial en estudiantes de un curso de didáctica del cálculo de la Licenciatura en Matemáticas".

5.3. Planeación de la secuencia de enseñanza

Se diseñó una prueba diagnóstica con el propósito de evaluar los conocimientos previos de los estudiantes respecto a la demostración de las reglas de derivación para identificar los tipos de demostración emergentes. Se espera que los estudiantes recurran, en su mayoría, a demostraciones de tipo empírico y se apoyen fundamentalmente en procedimientos algebraicos.

Enunciado 1: Demuestre que la derivada de $f(x) = x^{-3}$ es $f(x) = -3x^{-4}$.

Se espera que los estudiantes usen la definición de derivada como límite del cociente incremental, mostrando dominio algebraico al enfrentarse al cubo de un binomio y exponentes negativos.

Enunciado 2: Demuestre que la derivada de $f(x) = e^{x}$ es $f(x) = e^{x}$.

Se espera que los estudiantes usen la definición de derivada como límite del cociente incremental. En el procedimiento, aparece un límite especial (indeterminado) para el cual se espera que los estudiantes lo recuerden o encuentren una manera de resolverlo.

Se diseñó la secuencia de enseñanza en el Aula Virtual de GeoGebra, en formato de libro titulado *Un viaje en el tiempo: Fermat y las reglas de derivación*, (Link de acceso al libro: https://www.geogebra.org/m/ne8c9ruc) y se estructura en tres capítulos (Figura 4).

Figura 4

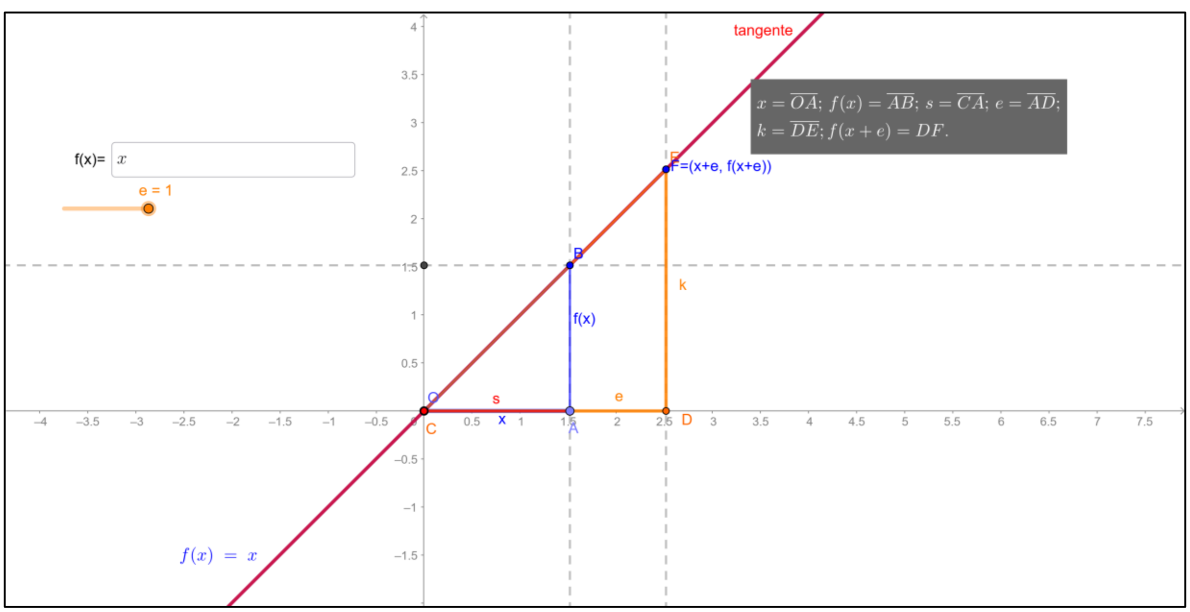
Un viaje en el tiempo: Fermat y las reglas de derivación

El **Capítulo 1**, *Explorando las ideas de Fermat*, se compone de dos subcapítulos: *Hablemos de Fermat*, que presenta una breve introducción a una interpretación actual del método de Fermat para hallar la tangente a una curva, y *Exploración*, donde se invita al estudiante a interactuar con funciones de la forma $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, para analizar patrones y relaciones que permitan hallar el valor de la subtangente.

Exploración

Figura 5

Applet para $\boldsymbol{f(x) = x}$



Está compuesto por tres tareas:

Tarea 2. ¿Qué relación existe entre el triángulo CDE y el triángulo CAB?, ¿por qué?

Se espera que los estudiantes encuentren que los dos triángulos son semejantes porque comparten el $\measuredangle DCE$; $\measuredangle EDC \cong \measuredangle BAC = 90°$, lo que implica que $\measuredangle CBA \cong \measuredangle CED$. Además, se espera que planteen la relación de semejanza $\frac{CD}{CA} = \frac{DE}{AB}$, que es lo mismo que $\frac{s+e}{s} = \frac{k}{f(x)}$.

Tarea 3. ¿Qué relación existe entre k y $f(x+e)$ cuando $e \to 0$?

Se espera que los estudiantes arrastren controladamente e hasta 0.01, observen que $k \to f(x+e)$, y trasladen esta nueva información a la relación de semejanza $\frac{s+e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)}$.

Tarea 4. Encuentre s en función de x cuando $e \to 0$ y justifique su respuesta.

Se espera que los estudiantes despejen s de la relación de semejanza, así: como $e \to 0$; entonces: $\frac{s+e}{s} = \frac{k}{f(x)} \Longrightarrow \frac{s+e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)} \Longrightarrow s = \frac{ef(x)}{f(x+e)-f(x)}$. Si esto no ocurre, se espera que exploren para diferentes funciones de la forma $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, y encuentren s en función de x utilizando las herramientas de GeoGebra, como medir los segmentos o realizar construcciones auxiliares.

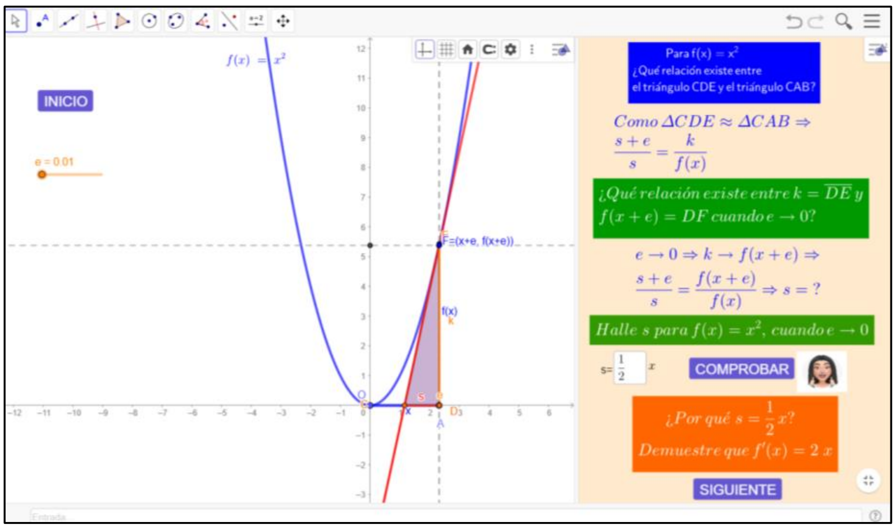
En estas tareas, es fundamental que los estudiantes exploraran libremente y se familiaricen con el applet, que ellos mismos logren plantear sus propias conjeturas sin una guía establecida.

El **Capítulo 2**, *Funciones potencia*, se divide en cuatro subcapítulos: *Funciones potencia con n natural*, *Funciones recíprocas*, *Funciones potencia con n racional* y *Funciones potencia con n real*. En cada uno se propone al estudiante un procedimiento de tipo inductivo para determinar la subtangente de diferentes funciones. Para ello, se ofrecen espacios interactivos donde los estudiantes pueden ingresar sus respuestas, recibir retroalimentación inmediata en caso de error, y posteriormente se les solicita demostrar las derivadas correspondientes. A partir de esta experiencia, se espera que el estudiante pueda conjeturar una regla general para la subtangente y, en consecuencia, demostrar la derivada de manera general.

Funciones potencia con n natural

Figura 6

Applet para $\boldsymbol{f(x) = x^2}$



Este subcapítulo, que corresponde a la tarea 5, inicia con la orientación: *Mueva A y el deslizador e con la flecha izquierda del computador y analice las relaciones entre los objetos matemáticos del applet y vaya respondiendo las preguntas en su hoja de trabajo*. Como se muestra en la figura, a medida que el estudiante avanza, aparecen las mimas preguntas que en el capítulo anterior e información adicional. Luego, se invita a hallar el valor de s para esta función, cuando $e \to 0$. Si los estudiantes introducen un valor incorrecto, el applet arroja algunas retroacciones: *Inténtelo de nuevo. Mueva el punto A y e controladamente y Revise todo el proceso desde el inicio. Mueva el punto A y el deslizador e. Analice la relación entre* $s = CA$ *y* $x = OA$*, que los invitan a explorar nuevamente los objetos.* Si el estudiante introduce la respuesta correcta, aparece la pregunta por qué, que lo invita a buscar otros elementos para validar sus hallazgos. Además, aparece una tarea de demostrar la derivada para $f(x) = x^2$. Este mismo proceso ocurre para la función $f(x) = x, f(x) = x^3$ y $f(x) = x^4$ progresivamente y, se espera que inicialmente los estudiantes por medio de la visualización de los elementos del applet, encuentren que si $n = 1, s = \frac{1}{1}x$; $n = 2, s = \frac{1}{2}x$; $n = 3, s = \frac{1}{3}x$ y si $n = 4, s = \frac{1}{4}x$ por medio de estrategias métricas o geométricas.

Relación entre s y x:

Los estudiantes pueden demostrar esta relación así:

$$\frac{s+e}{s} = \frac{k}{f(x)}, \text{ como } e \to 0 \Longrightarrow \frac{s+e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)} \Longrightarrow s = \frac{ef(x)}{f(x+e)-f(x)}$$

Tabla 2

Relación entre s y x para n natural

Exponente	Relación entre s y x
$n = 1$	$s = \frac{ex}{x+e-x} = \frac{ex}{e} = x$
$n = 2$	$s = \frac{ex^2}{(x+e)^2 - x^2} = \frac{ex^2}{x^2 + 2xe + e^2 - x^2} = \frac{x^2}{2x+e} = \frac{1}{2}x$
$n = 3$	$s = \frac{ex^3}{(x+e)^3 - x^3} = \frac{ex^3}{x^3 + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 - x^3}$ $= \frac{x^3}{3x^2 + 3xe + e^2} = \frac{1}{3}x$
$n = 4$	$s = \frac{ex^4}{(x+e)^4 - x^4} = \frac{ex^4}{x^4 + 4x^3e + 6x^2e^2 + 4xe^3 + e^4 - x^4}$ $= \frac{x^4}{4x^3 + 6x^2e + 4xe^2 + e^3} = \frac{1}{4}x$

Mediante este proceso inductivo, se espera que los estudiantes encuentren un patrón y logren plantear una conjetura sobre la subtangente de manera general ($s = \frac{1}{n}x$), que les servirá en las tareas posteriores de demostración de la regla de derivación.

Derivada de $f(x)$ para funciones particulares:

Se espera que los estudiantes usen diferentes estrategias para construir la demostración de la derivada:

- **Definición de derivada como límite del cociente incremental**

Tabla 3

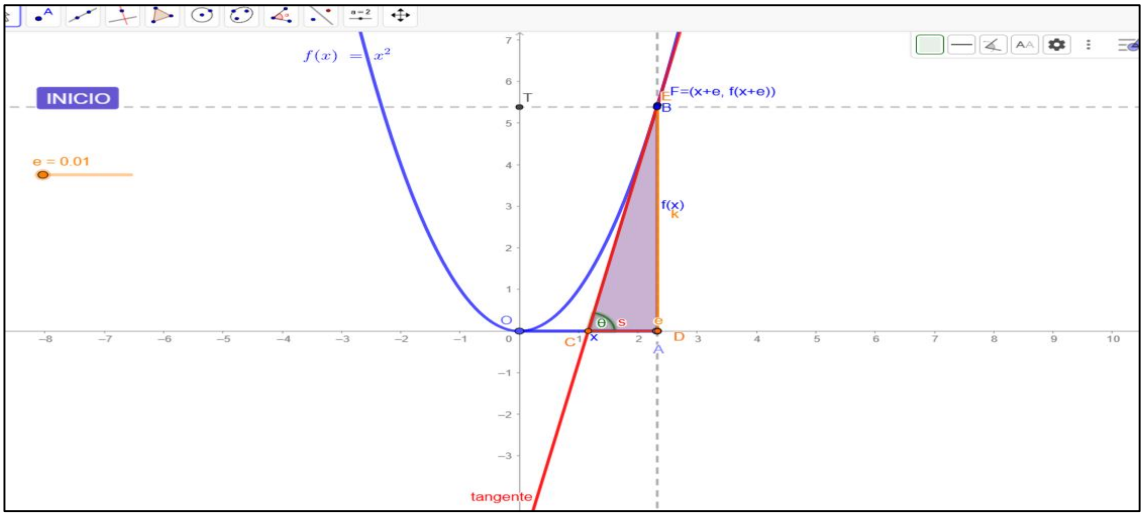
Demostración mediante la derivada como límite para n natural

Exponente	$\lim\limits_{e\to 0}\frac{f(x+e)-f(x)}{e}$
$n = 1$	$\lim\limits_{e\to 0}\frac{(x+e)-x}{e} = \frac{e}{e} = 1$
$n = 2$	$\lim\limits_{e\to 0}\frac{(x+e)^2-x^2}{e} = \lim\limits_{e\to 0}\frac{x^2+2xe+e^2-x^2}{e}$ $\lim\limits_{e\to 0}\frac{2xe+e^2}{e} = \lim\limits_{e\to 0}\frac{e(2x+e)}{e} = \lim\limits_{e\to 0}2x+e = 2x$
$n = 3$	$\lim\limits_{e\to 0}\frac{(x+e)^3-x^3}{e} = \lim\limits_{e\to 0}\frac{x^3+3x^2e+3xe^2+e^3-x^3}{e}$ $\lim\limits_{e\to 0}\frac{3x^2e+3xe^2+e^3}{e} = \lim\limits_{e\to 0}\frac{e(3x^2+3xe+e^2)}{e} = \lim\limits_{e\to 0}3x^2+3xe+e^2$ $= 3x^2$
$n = 4$	$\lim\limits_{e\to 0}\frac{(x+e)^4-x^4}{e} = \lim\limits_{e\to 0}\frac{x^4+4x^3e+6x^2e^2+4xe^3+e^4-x^4}{e}$ $\lim\limits_{e\to 0}\frac{4x^3e+6x^2e^2+4xe^3+e^4}{e} = \lim\limits_{e\to 0}\frac{e(4x^3+6x^2e+4xe^2+e^3)}{e}$ $= \lim\limits_{e\to 0}4x^3+6x^2e+4xe^2+e^3 = 4x^3$

- **Relación de los catetos del triángulo rectángulo**

Figura 7

Triángulo rectángulo CAB



Dado que el triángulo CAB es rectángulo, podemos relacionar sus catetos para determinar la tangente al ángulo $\theta = \measuredangle ACB$, que corresponde a la pendiente de la recta tangente.

Tabla 4

Demostración de derivadas para n natural mediante el triángulo CAB

Exponente	$\tan(\boldsymbol{\theta})$
$\boldsymbol{n = 1}$	$\tan(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{f(x)}{s} = \frac{x}{\frac{1}{1}x} = 1$
$\boldsymbol{n = 2}$	$\tan(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}x} = 2x$
$\boldsymbol{n = 3}$	$\tan(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^3}{\frac{1}{3}x} = 3x^2$
$\boldsymbol{n = 4}$	$\tan(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^4}{\frac{1}{4}x} = 4x^3$

- **Ecuación punto pendiente.**

Tomando como referencia los puntos $(x_1, y_1) = C = (x - s, 0)$ y $(x_2, y_2) = B = \left(x, f(x)\right)$:

Tabla 5

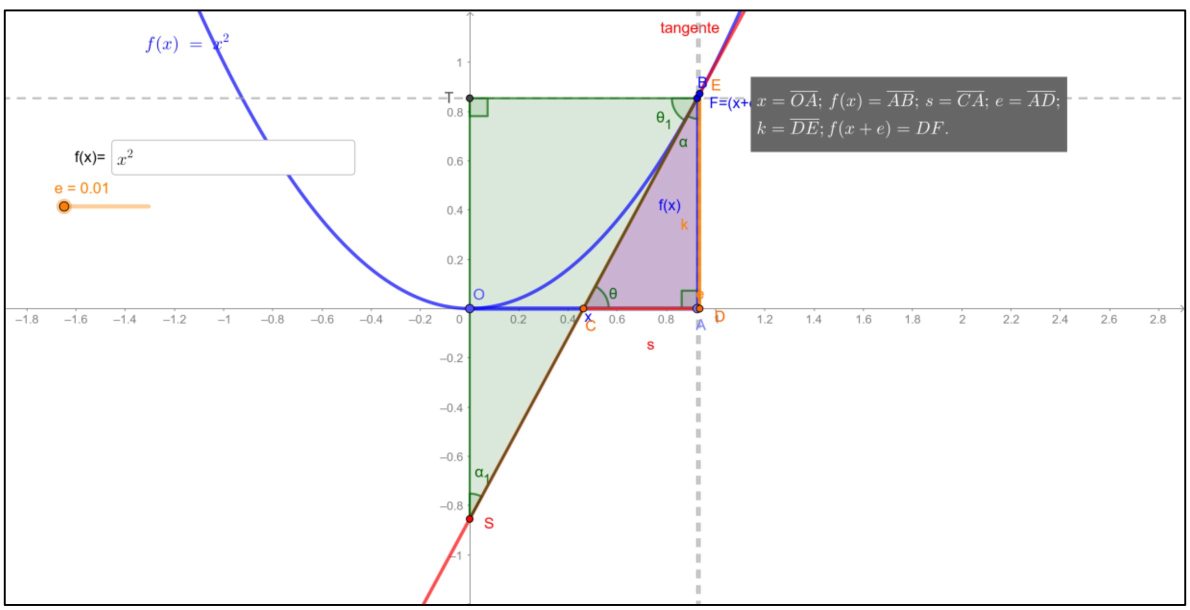
Demostración de derivadas para n natural mediante la pendiente

Exponente	$\boldsymbol{m}$
$\boldsymbol{n = 1}$	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x) - 0}{x - (x - s)} = \dfrac{x}{\frac{1}{1}x} = 1$
$\boldsymbol{n = 2}$	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x) - 0}{x - (x - s)} = \dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x} = 2x$
$\boldsymbol{n = 3}$	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x) - 0}{x - (x - s)} = \dfrac{x^3}{\frac{1}{3}x} = 3x^2$
$\boldsymbol{n = 4}$	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x) - 0}{x - (x - s)} = \dfrac{x^4}{\frac{1}{4}x} = 4x^3$

- **Relación mediante otros triángulos semejantes.**

Figura 8

Triángulos semejantes para n natural



Puede ser que los estudiantes identifiquen otros triángulos semejantes en la construcción y establezcan relaciones entre ellos; por ejemplo, tomando los triángulos STB y

CAB, se observa que $\measuredangle BAC = \measuredangle STB = 90°$. Como $ST \parallel AB$, y SB es una transversal, entonces $\alpha_1 = \alpha$, y como TB ∥ OA, entonces $\theta_1 \cong \theta$. Esto implica que los triángulos son semejantes, ya que sus ángulos son congruentes.

De la semejanza de triángulos, se obtiene la relación de proporcionalidad

$$\frac{ST}{TB} = \frac{AB}{CA}$$

Sustituyendo las expresiones correspondientes, para hallar ST, se obtiene que

$\frac{ST}{x} = \frac{f(x)}{s}$, entonces $ST = \frac{f(x)x}{s} = \frac{x^n x}{\frac{1}{n}x} = nx^n$.

Ahora, tomando $\measuredangle TBS$, podemos establecer la relación entre los catetos del triángulo para encontrar la tangente a ese ángulo, así:

$$\tan(\theta_1) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{ST}{x} = \frac{nx^n}{x}.$$

Tabla 6

Demostración de derivadas para n natural mediante el triángulo STB

Exponente	$\mathbf{tan(\theta_1)}$
$\boldsymbol{n = 1}$	$\tan(\theta_1) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{nx^n}{x} = \frac{1x^1}{x} = 1$
$\boldsymbol{n = 2}$	$\tan(\theta_1) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{nx^n}{x} = \frac{2x^2}{x} = 2x$
$\boldsymbol{n = 3}$	$\tan(\theta_1) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{nx^n}{x} = \frac{3x^3}{x} = 3x^2$
$\boldsymbol{n = 4}$	$\tan(\theta_1) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{nx^n}{x} = \frac{4x^4}{x} = 4x^3$

Si bien el uso de la derivada como límite del cociente incremental no emplea la subtangente, es posible que los estudiantes exploren este enfoque para verificar los resultados. Sin embargo, se espera que recurran a las otras estrategias cuando los cálculos se tornen extensos y complejos.

Tarea 6: Para $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, demuestre que $f'^{(x)} = nx^{n-1}$

Tabla 7

Demostración general de la derivada para n natural

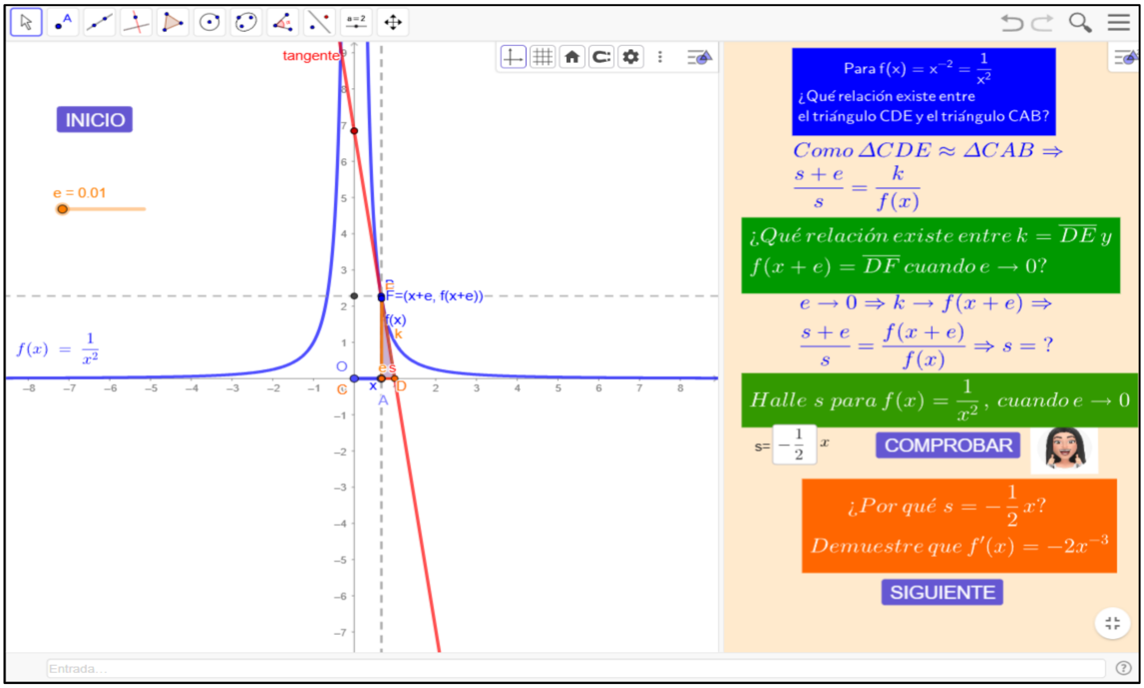
Estrategia	Demostración
Definición de derivada como límite del cociente incremental	$\lim_{e\to 0}\frac{(x+e)^n - x^n}{e}$ $= \lim_{e\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}e + \frac{(n-1)nx^{n-2}e^2}{2} + \frac{(n-2)(n-1)nx^{n-3}e^3}{6} + \cdots + nxe^{n-1} + e^n - x^n}{e}$ $= \lim_{e\to 0}\frac{nx^{n-1}e + \frac{(n-1)nx^{n-2}e^2}{2} + \frac{(n-2)(n-1)nx^{n-3}e^3}{6} + \cdots + nxe^{n-1} + e^n}{e}$ $= \lim_{e\to 0}\frac{e\left(nx^{n-1} + \frac{(n-1)nx^{n-2}e}{2} + \frac{(n-2)(n-1)nx^{n-3}e^2}{6} + \cdots + nxe^{n-2} + e^{n-1}\right)}{e} = \lim_{e\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{(n-1)nx^{n-2}e}{2} + \frac{(n-2)(n-1)nx^{n-3}e^2}{6} + \cdots + nxe^{n-2} + e^{n-1}\right) = nxn^{-1}.$
Relación de los catetos del triángulo rectángulo	$\tan(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^n}{\frac{1}{n}x} = nx^n x^{-1} = nx^{n-1}.$
Ecuación punto pendiente	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x) - 0}{x - (x - s)} = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^n}{\frac{1}{n}x} = nx^n x^{-1} = nx^{n-1}.$
Relación mediante otros	$\tan(\theta_1) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{nx^n}{x} = nx^n x^{-1} = nx^{n-1}.$

triángulos
semejantes

Funciones recíprocas

Figura 9

Applet para $\boldsymbol{f(x) = x^{-2}}$



Este subcapítulo, que corresponde a la tarea 7, es análogo al de *funciones potencia con n natural* y se compone por las mismas preguntas, orientaciones y retroacciones, como se muestra en la figura. Este mismo proceso ocurre para la función $f(x) = x^{-1}, f(x) = x^{-3}$ y $f(x) = x^{-4}$ progresivamente y, se espera que inicialmente los estudiantes por medio de la visualización de los elementos del applet, encuentren que si $n = -1, s = -\frac{1}{1}x$; $n = -2, s = -\frac{1}{2}x$; $n = -3, s = -\frac{1}{3}x$ y si $n = -4, s = -\frac{1}{4}x$ por medio de estrategias métricas o geométricas.

Relación entre $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$:

Los estudiantes pueden demostrar esta relación mediante el siguiente procedimiento:

$$\frac{s+e}{s} = \frac{k}{f(x)}, \text{ como } e \to 0 \Longrightarrow \frac{s+e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)} \Longrightarrow s = \frac{ef(x)}{f(x+e)-f(x)}$$

Tabla 8

Relación entre s y x para funciones recíprocas

Exponente	Relación entre $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{n = -1}$	$s = \dfrac{e\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+e} - \frac{1}{x}} = \dfrac{\frac{e}{x}}{\frac{-e}{x(x+e)}} = \dfrac{ex(x+e)}{-ex} = \dfrac{x}{-1} = -x$
$\boldsymbol{n = -2}$	$s = \dfrac{e\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{(x+e)^2} - \frac{1}{x^2}} = \dfrac{\frac{e}{x^2}}{\frac{-2xe-e^2}{x^2(x+e)^2}} = \dfrac{(x+e)^2}{-2x-e} = \dfrac{x^2}{-2x} = -\dfrac{1}{2}x$
$\boldsymbol{n = -3}$	$s = \dfrac{e\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{(x+e)^3} - \frac{1}{x^3}} = \dfrac{\frac{e}{x^3}}{\frac{-3x^2e-3xe^2-e^3}{x^3(x+e)^3}} = \dfrac{(x+e)^3}{-3x^2-3xe-e^2}$ $= \dfrac{x^3}{-3x^2} = -\dfrac{1}{3}x$
$\boldsymbol{n = -4}$	$s = \dfrac{e\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{(x+e)^4} - \frac{1}{x^4}} = \dfrac{\frac{e}{x^3}}{\frac{-4x^3e-6x^2e^2-4xe^3-e^4}{x^4(x+e)^4}}$ $= \dfrac{(x+e)^4}{-4x^3-6x^2e-4x^2-e^3} = \dfrac{x^4}{-4x^3} = -\dfrac{1}{4}x$

Un detalle fundamental a resaltar es cómo se espera que los estudiantes justifiquen el signo de s. Esto se puede explicar mediante el uso de vectores: de manera general, la subtangente corresponde al segmento CA, es decir, el vector con punto inicial en C y punto final en *A.* Sin embargo, en este caso particular, *s* es el segmento *AC*, lo que implica que se ha invertido la dirección de ese vector y, por ello, $s = -\frac{1}{n}x$.

Derivada de $f(x)$ para funciones particulares:

Para construir la demostración de las derivadas, se pueden usar las mismas estrategias que en el caso de *n natural:*

- **Definición de derivada como límite del cociente incremental**

Tabla 9

Demostración mediante la derivada como límite para n entero

Exponente	$\lim\limits_{e\to 0}\frac{f(x+e)-f(x)}{e}$
$n=-1$	$\lim\limits_{e\to 0}\frac{\frac{1}{x+e}-\frac{1}{x}}{e} = \lim\limits_{e\to 0}\frac{\frac{x-(x+e)}{(x+e)x}}{e} = \lim\limits_{e\to 0}\frac{\frac{x-x-e}{(x+e)x}}{e} = \lim\limits_{e\to 0}\frac{-e}{ex(x+e)}$ $= \lim\limits_{e\to 0}\frac{-1}{x(x+e)} = -\frac{1}{x^2}$
$n=-2$	$\lim\limits_{e\to 0}\frac{\frac{1}{(x+e)^2}-\frac{1}{x^2}}{e} = \lim\limits_{e\to 0}\frac{\frac{x^2-x^2-2xe-e^2}{x^2(x+e)^2}}{e} = \lim\limits_{e\to 0}\frac{e(-2x-e)}{ex^2(x+e)^2} =$ $= \lim\limits_{e\to 0}\frac{-2x-e}{x^2(x^2+2xe+e^2)} = -\frac{2x}{x^4} = -2x^{-3}$
$n=-3$	$\lim\limits_{e\to 0}\frac{\frac{1}{(x+e)^3}-\frac{1}{x^3}}{e} = \lim\limits_{e\to 0}\frac{\frac{-3x^2e-3xe^2-e^3}{x^3(x+e)^3}}{e}$ $= \lim\limits_{e\to 0}\frac{e(-3x^2-3xe-e^2)}{ex^3(x+e)^3}$ $= \lim\limits_{e\to 0}\frac{-3x^2-3xe-e^2}{x^3(x^3+3x^2e+3xe^2+e^3)} = -\frac{3x^2}{x^6} = -3x^{-4}$

$\boldsymbol{n=-4}$

$$\lim_{e\to 0}\frac{\frac{1}{(x+e)^4}-\frac{1}{x^4}}{e}=\lim_{e\to 0}\frac{\frac{-4x^3e-6x^2e^2-4xe^3-e^4}{x^4(x+e)^4}}{e}$$

$$=\lim_{e\to 0}\frac{e(-4x^3-6x^2e-4xe^2-e^3)}{ex^4(x+e)^4}$$

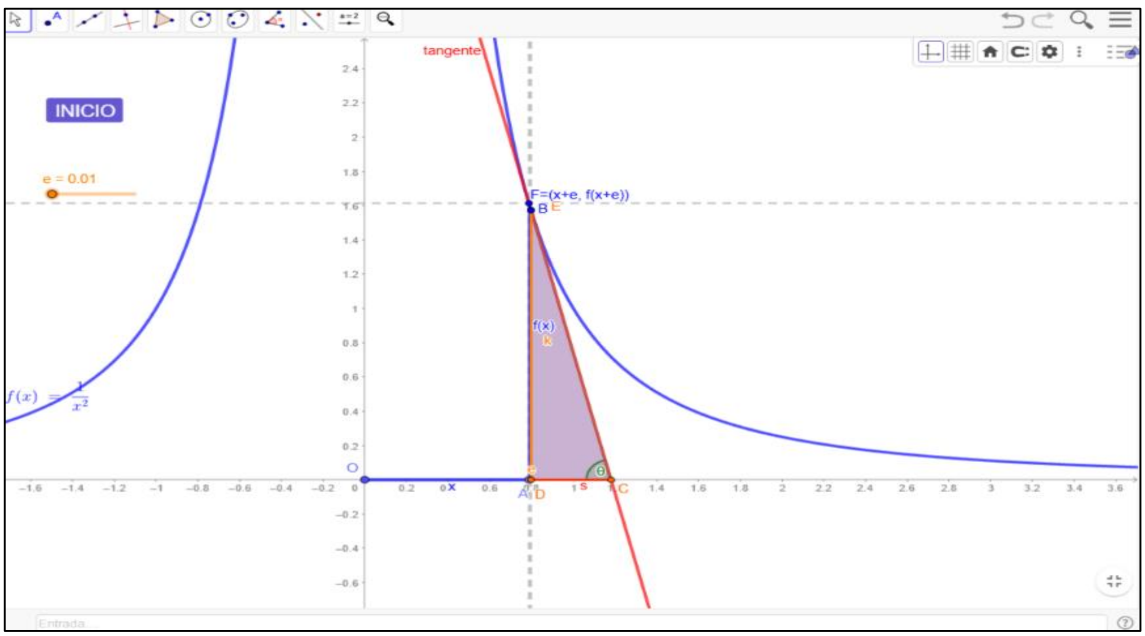
$$=\lim_{e\to 0}\frac{-4x^3-6x^2e-4xe^2-e^3}{x^4(x^4+4x^3e+6x^2e^2+4xe^3+e^4)}=-\frac{4x^3}{x^8}$$

$$=-4x^{-5}$$

- **Relación de los catetos del triángulo rectángulo**

Figura 10

Triángulo rectángulo ACB



Dado que el triángulo ACB es rectángulo, podemos relacionar sus catetos para determinar la tangente al ángulo $\theta = \measuredangle BCA$, que corresponde a la pendiente de la recta tangente.

Tabla 10

Demostración de derivadas para $\boldsymbol{n}$ entero mediante el triángulo ACB

Exponente	$\tan(\boldsymbol{\theta})$
$\boldsymbol{n=-1}$	$\tan(\theta)=\dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}=\dfrac{f(x)}{s}=\dfrac{x^{-1}}{-\frac{1}{1}x}=-x^{-2}$
$\boldsymbol{n=-2}$	$\tan(\theta)=\dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}=\dfrac{f(x)}{s}=\dfrac{x^{-2}}{-\frac{1}{2}x}=-2x^{-3}$
$\boldsymbol{n=-3}$	$\tan(\theta)=\dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}=\dfrac{f(x)}{s}=\dfrac{x^{-3}}{-\frac{1}{3}x}=-3x^{-4}$
$\boldsymbol{n=-4}$	$\tan(\theta)=\dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}=\dfrac{f(x)}{s}=\dfrac{x^{-4}}{-\frac{1}{4}x}=-4x^{-5}$

- **Ecuación punto pendiente.**

Tomando como referencia los puntos $(x_1,y_1)=C=(x-s,0)$ y $(x_2,y_2)=B=\big(x,f(x)\big)$:

Tabla 11

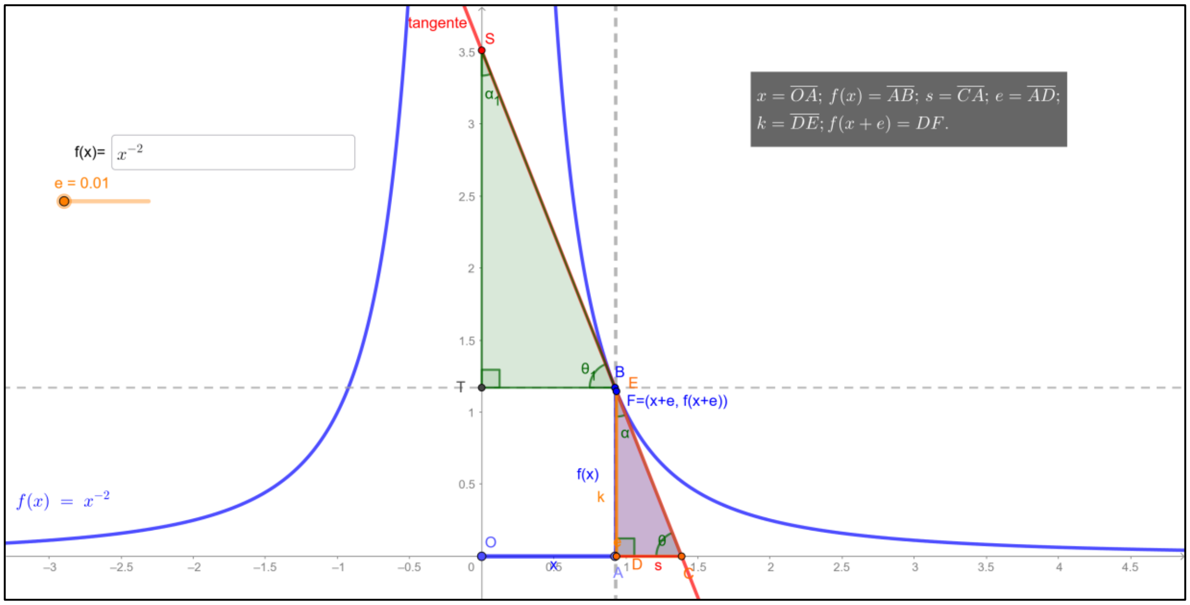
Demostración de derivadas para n entero mediante la pendiente

Exponente	$\boldsymbol{m}$
$\boldsymbol{n=-1}$	$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{f(x)-0}{x-(x-s)}=\dfrac{x^{-1}}{-\frac{1}{1}x}=-x^{-2}$
$\boldsymbol{n=-2}$	$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{f(x)-0}{x-(x-s)}=\dfrac{x^{-2}}{-\frac{1}{2}x}=-2x^{-3}$
$\boldsymbol{n=-3}$	$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{f(x)-0}{x-(x-s)}=\dfrac{x^{3}}{-\frac{1}{3}x}=-3x^{-4}$
$\boldsymbol{n=-4}$	$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{f(x)-0}{x-(x-s)}=\dfrac{x^{4}}{-\frac{1}{4}x}=-4x^{-5}$

- **Relación mediante otros triángulos semejantes.**

Figura 11

Triángulos semejantes TSB y ACB



Puede ser que los estudiantes identifiquen otros triángulos semejantes en la construcción y establezcan relaciones entre ellos; por ejemplo, tomando los triángulos TSB y ACB, se observa que $\measuredangle CAB = \measuredangle BTS = 90°$. Como $ST \parallel AB$, y SC es una transversal, entonces $\alpha = \alpha_1$, y como $TB \parallel OA$, entonces $\theta_1 = \theta$. Esto implica que los triángulos son semejantes, ya que sus ángulos son congruentes.

De la semejanza de triángulos, se obtiene la relación de proporcionalidad

$$\frac{TS}{TB} = \frac{AB}{AC}$$

Sustituyendo las expresiones correspondientes, para hallar ST, se obtiene que

$$\frac{TS}{x} = \frac{f(x)}{s}, \text{ entonces } TS = \frac{f(x)x}{s} = \frac{x^n x}{-\frac{1}{n}x} = -nx^n.$$

Ahora, tomando $\measuredangle SBT$, podemos establecer la relación entre los catetos del triángulo para encontrar la tangente a ese ángulo, así:

$$\tan(\theta_1) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{TS}{x} = \frac{-nx^n}{x}.$$

Tabla 12

Demostración de derivadas para n entero mediante el triángulo TSB

Exponente	$\mathbf{tan(\theta_1)}$
$\boldsymbol{n=-1}$	$\tan(\theta_1)=\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}=\frac{-nx^n}{x}=\frac{-1x^{-1}}{x}=-x^{-2}$
$\boldsymbol{n=-2}$	$\tan(\theta_1)=\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}=\frac{nx^n}{x}=\frac{-2x^{-2}}{x}=-2x^{-3}$
$\boldsymbol{n=-3}$	$\tan(\theta_1)=\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}=\frac{nx^n}{x}=\frac{-3x^{-3}}{x}=-3x^{-4}$
$\boldsymbol{n=-4}$	$\tan(\theta_1)=\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}=\frac{nx^n}{x}=\frac{-4x^{-4}}{x}=-4x^{-5}$

Tarea 8: Para $f(x)=x^n, n\in\mathbb{Z}^-$, demuestre que $f'^{(x)}=-nx^{-n-1}$

Tabla 13

Demostración general de la derivada para n entero

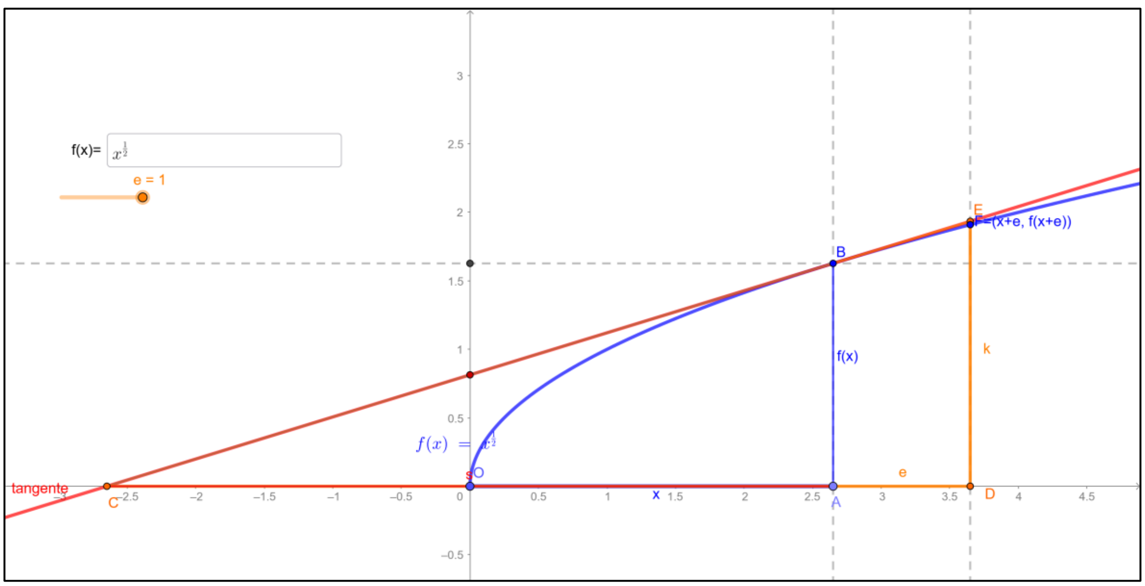
Estrategia	**Demostración**
Definición de derivada como límite del cociente incremental	$\lim_{e\to 0}\frac{(x+e)^{-n}-x^{-n}}{e}=\lim_{e\to 0}\frac{\frac{1}{(x+e)^n}-\frac{1}{x^n}}{e}$ $=\lim_{e\to 0}\frac{\frac{1}{x^n+nx^{n-1}e+\frac{(n-1)nx^{n-2}e^2}{2}+\frac{(n-2)(n-1)nx^{n-3}e^3}{6}+\cdots+nxe^{n-1}+e^n}-\frac{1}{x^n}}{e}$ $=\lim_{e\to 0}\frac{\frac{\boldsymbol{x^n}-\left(x^n+nx^{n-1}e+\frac{(n-1)nx^{n-2}e^2}{2}+\frac{(n-2)(n-1)nx^{n-3}e^3}{6}+\cdots+nxe^{n-1}+e^n\right)}{x^n\left(x^n+nx^{n-1}e+\frac{(n-1)nx^{n-2}e^2}{2}+\frac{(n-2)(n-1)nx^{n-3}e^3}{6}+\cdots+nxe^{n-1}+e^n\right)}}{\boldsymbol{e}}$ $\lim_{e\to 0}\frac{-nx^{n-1}e-\frac{(n-1)nx^{n-2}e^2}{2}-\frac{(n-2)(n-1)nx^{n-3}e^3}{6}-\cdots-nxe^{n-1}-e^n}{ex^n\left(x^n+nx^{n-1}e+\frac{(n-1)nx^{n-2}e^2}{2}+\frac{(n-2)(n-1)nx^{n-3}e^3}{6}+\cdots+nxe^{n-1}+e^n\right)}$ $=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{n-1}x^{-2n}=-nx^{-n-1}.$
Relación de los catetos del triángulo rectángulo	$\tan(\theta)=\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}=\frac{f(x)}{s}=\frac{x^{-n}}{-\frac{1}{n}x}=-nx^{-n}x^{-1}$ $=-nx^{-n-1}.$

Ecuación punto pendiente	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x) - 0}{x - (x - s)} = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^{-n}}{-\frac{1}{n}x} = -nx^{-n}x^{-1}$ $= -nx^{-n-1}.$
Relación mediante otros triángulos semejantes	$\tan(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{-nx^{-n}}{x} = -nx^{-n}x^{-1}$ $= -nx^{-n-1}.$

Funciones potencia con n racional

Figura 12

Applet para $\boldsymbol{f(x) = x^{1/2}}$



Este subcapítulo, que corresponde a la tarea 9, inicia con la instrucción Explore digitando diferentes funciones de la forma $x^n, n \in \mathbb{Q}$. (Por ejemplo, $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ o $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$). Mueva A y el deslizador "e" hasta $e = 0.01$ de manera controlada. Luego, analice las relaciones entre los objetos matemáticos del applet y responda las preguntas en su hoja de trabajo. En este applet y en los siguientes, ya no se presentan informaciones adicionales, acciones ni retroacciones, pues se espera que el estudiante logre relacionar lo descubierto en las tareas anteriores con este nuevo tipo de funciones, evitando así la repetición. En su lugar, se le brinda la posibilidad de explorar libremente distintas funciones ingresándolas en la casilla de entrada. Se espera que inicialmente los estudiantes por medio de la visualización de los elementos del applet, encuentren que si $n = \frac{1}{2}, s = 2x$; $n = \frac{2}{3}, s = -\frac{3}{2}x$ y en general, $n = \frac{p}{q}, s = -\frac{q}{p}x$ por medio de estrategias métricas o geométricas. Finalmente, se espera que usen estas ideas para demostrar la derivada de manera general.

Relación entre s y x:

Los estudiantes pueden demostrar esta relación mediante el siguiente procedimiento:

$$\frac{s+e}{s} = \frac{k}{f(x)}, \text{ como } e \to 0 \Longrightarrow \frac{s+e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)} \Longrightarrow s = \frac{ef(x)}{f(x+e)-f(x)}$$

Tabla 14

Demostración de la derivada para n racional

Tarea	Demostración
Tarea 10. Para $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, ¿cuál es la relación entre s y x cuando $e \to 0$?, ¿por qué?	$s = \frac{ex^{1/2}}{(x+e)^{1/2} - x^{1/2}} = \frac{e\sqrt{x}}{\sqrt{x+e}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+e}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+e}+\sqrt{x}}$ $= \frac{e\left(\sqrt{x}\sqrt{x+e}+x\right)}{x+e-x} = \sqrt{x}\sqrt{x+e} + x = x + x = 2x$

Tarea 11. Para $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{x^{\frac{2}{3}}}$, ¿cuál es la relación entre $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$ cuando $\boldsymbol{e} \to \mathbf{0}$?, ¿por qué?	$s = \frac{ex^{2/3}}{(x+e)^{2/3} - x^{2/3}} \cdot \frac{(x+e)^{\frac{4}{3}} + (x+e)^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}}{(x+e)^{\frac{4}{3}} + (x+e)^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}}$ $= \frac{e\left(x^{\frac{2}{3}}(x+e)^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \cdot (x+e)^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}}\right)}{(x+e)^2 + x^2}$ $= \frac{e\left(x^{\frac{2}{3}}(x+e)^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{4}{3}} \cdot (x+e)^{\frac{2}{3}} + x^2\right)}{e(2x+e)}$ $= \frac{x^{\frac{2}{3}}(x+e)^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{4}{3}} \cdot (x+e)^{\frac{2}{3}} + x^2}{2x+3} = \frac{x^2 + x^2 + x^2}{2x}$ $= \frac{3}{2}x$
Tarea 12. Para $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{x^{\frac{p}{q}}}$, ¿cuál es la relación entre $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$ cuando $\boldsymbol{e} \to \mathbf{0}$?, ¿por qué?	$s = \frac{ex^{p/q}}{(x+e)^{p/q} - x^{p/q}}$ $= \frac{ex^{p/q}}{(x+e)^{p/q} - x^{p/q}} \cdot \frac{\left((x+e)^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1} + \left((x+e)^{\frac{p}{q}}\right)^{q-2} + \cdots + \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}{\left((x+e)^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1} + \left((x+e)^{\frac{p}{q}}\right)^{q-2} + \cdots + \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}$ $= \frac{ex^{\frac{p}{q}}\left[\left((x+e)^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1} + \left((x+e)^{\frac{p}{q}}\right)^{q-2} + \cdots + \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}\right]}{(x+e)^p - x^p} = \frac{qx^p}{px^{p-1}}$ $= \frac{q}{p}x^p x^{-p} x^1 = \frac{q}{p}x.$

Tarea 13. Para $\boldsymbol{f(x) = x^{\frac{p}{q}}}$, demuestre que $\boldsymbol{f'(x) = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}}$.

Tabla 15

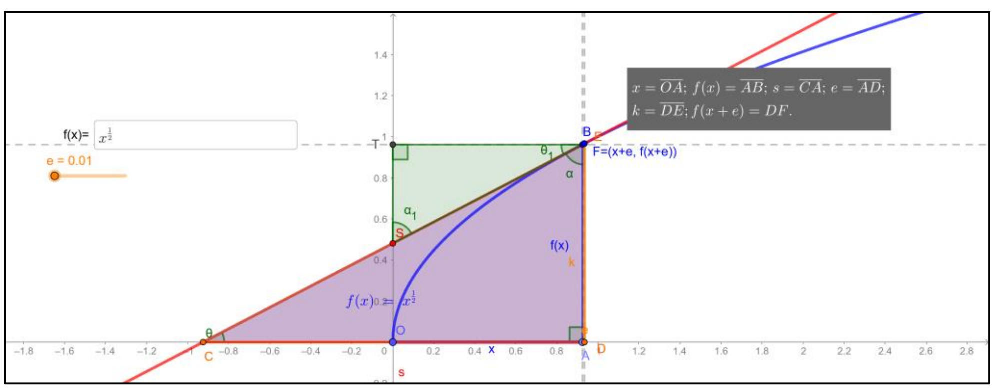
Demostración de la derivada general para n racional

Estrategia	Demostración

Definición de derivada como límite del cociente incremental	$\lim_{e \to 0} \frac{(x+e)^{p/q} - x^{p/q}}{e}$ $= \frac{\left((x+e)^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1} + \left((x+e)^{\frac{p}{q}}\right)^{q-2} + \cdots + \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}{\left((x+e)^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1} + \left((x+e)^{\frac{p}{q}}\right)^{q-2} + \cdots + \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}$ $= \frac{(x+e)^p - x^p}{e\left(\left((x+e)^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1} + \left((x+e)^{\frac{p}{q}}\right)^{q-2} + \cdots + \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}\right)} = \frac{px^{p-1}}{qx^{p-\frac{p}{q}}}$ $= \frac{px^p x^{-1} x^{-p} x^{p/q}}{q} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$
Relación de los catetos del triángulo rectángulo	$\tan(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^{p/q}}{\frac{q}{p}x} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$
Ecuación punto pendiente	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x) - 0}{x - (x - s)} = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^{p/q}}{\frac{q}{p}x} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$
Relación mediante otros triángulos semejantes	$\tan(\theta_1) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{\frac{p}{q}x^{p/q}}{x} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$

Figura 13

Otros triángulos semejantes para n racional



Para las estrategias usando triángulos, dado que ACB es rectángulo, podemos relacionar sus catetos para determinar la tangente al ángulo $\theta = \measuredangle ACB$, que corresponde a la pendiente de la recta tangente.

Puede ser que los estudiantes identifiquen otros triángulos semejantes en la construcción y establezcan relaciones entre ellos; por ejemplo, tomando los triángulos TSB y ACB, se observa que $\measuredangle BAC = \measuredangle STB = 90°$. Como $ST \parallel AB$, y SC es una transversal, entonces $\alpha = \alpha_1$, y como $TB \parallel OA$, entonces $\theta_1 = \theta$. Esto implica que los triángulos son semejantes, ya que sus ángulos son congruentes.

De la semejanza de triángulos, se obtiene la relación de proporcionalidad

$$\frac{TS}{TB} = \frac{AB}{AC}$$

Sustituyendo las expresiones correspondientes, para hallar ST, se obtiene que

$$\frac{TS}{x} = \frac{f(x)}{s}, \text{ entonces } TS = \frac{f(x)x}{s} = \frac{x^{p/q}x}{\frac{p}{q}x} = \frac{p}{q}x^{p/q}.$$

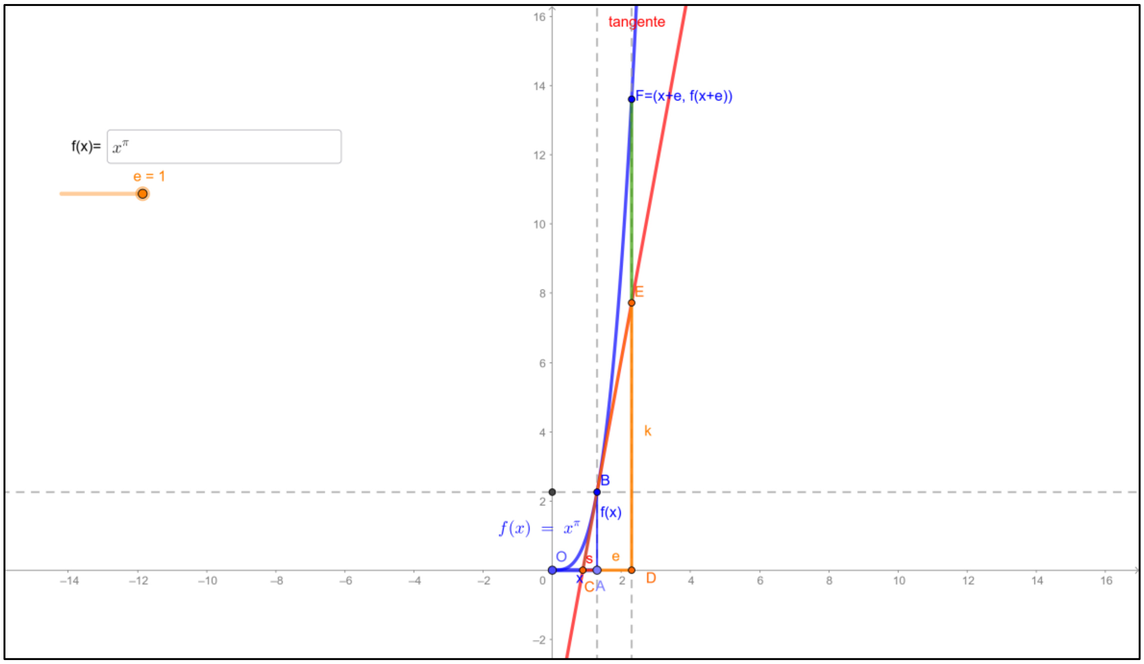
Ahora, tomando $\measuredangle SBT$, podemos establecer la relación entre los catetos del triángulo para encontrar la tangente a ese ángulo, así:

$$\tan(\theta_1) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{TS}{x} = \frac{\frac{p}{q}x^{p/q}}{x}.$$

Funciones potencia con n real

Figura 14

Applet para $\boldsymbol{f(x) = x^{\pi}}$



Este applet corresponde a la tarea 14 e inicia con la instrucción *Explore digitando diferentes funciones de la forma* $x^r, r \in \mathbb{R}$. *Mueva A y el deslizador "e" hasta* $e = 0.01$ *de manera controlada. Luego, analice las relaciones entre los objetos matemáticos del applet y responda las preguntas en su hoja de trabajo.* Se espera que el estudiante explore libremente distintas funciones ingresándolas en la casilla de entrada e inicialmente, por medio de la visualización de los elementos del applet, encuentren que si $r = \pi, s = \frac{1}{\pi}x$; $r = \mathrm{e}, s = \frac{1}{\mathrm{e}}x$ y en general, $r \in \mathbb{R}, s = \frac{1}{r}x$ por medio de estrategias métricas o geométricas. Finalmente, se espera que usen estas ideas para demostrar la derivada de manera general.

Relación entre s y x:

Los estudiantes pueden demostrar esta relación:

Tabla 16

Demostración de la derivada para n real

Tarea	Demostración

Tarea 15. Para $\boldsymbol{f(x) = x^{\pi}}$, ¿cuál es la relación entre $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$ cuando $\boldsymbol{e} \rightarrow \mathbf{0}$?, ¿por qué?	Para estas tareas, la demostración algebraica exige el uso de diversas reglas e identidades, por lo que no se espera que los estudiantes elaboren una demostración deductiva, salvo que la recuerden de manera explícita. En este contexto, el applet funciona principalmente como una herramienta de validación numérica, métrica o geométrica, de modo que se prevé que los estudiantes recurran a estas estrategias.
Tarea 16. Para $\boldsymbol{f(x) = x^{e}}$, ¿cuál es la relación entre $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$ cuando $\boldsymbol{e} \rightarrow \mathbf{0}$?, ¿por qué?	
Tarea 17. Para $\boldsymbol{f(x) = x^{r}, r} \in \mathbb{R}$, ¿cuál es la relación entre $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$ **cuando** $\boldsymbol{e} \rightarrow \mathbf{0}$?, ¿por qué?	

Tarea 18. Para $\boldsymbol{f(x) = x^{r}, r} \in \mathbb{R}$, demuestre que $\boldsymbol{f'(x) = rx^{r-1}}$.

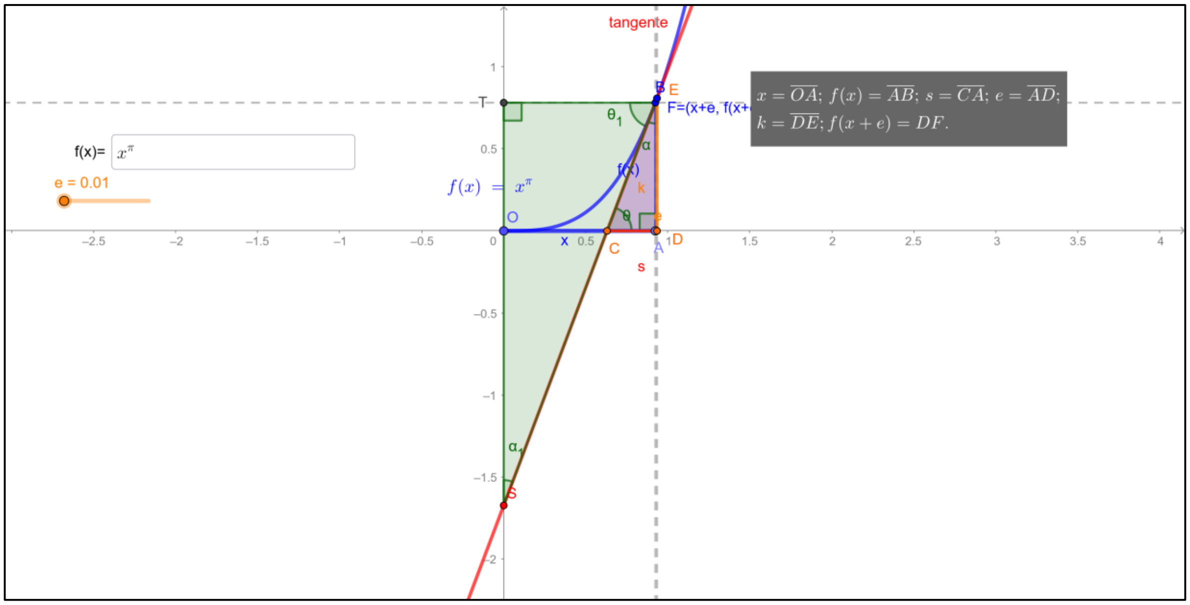
Tabla 17

Demostración de la derivada general para n real

Estrategia	Demostración
Relación de los catetos del triángulo rectángulo	$\tan(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^r}{\frac{1}{r}x} = rx^{r-1}.$
Ecuación punto pendiente	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x) - 0}{x - (x - s)} = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^r}{\frac{1}{r}x} = rx^{r-1}.$
Relación mediante otros triángulos semejantes	$\tan(\theta_1) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{rx^r}{x} = rx^{r-1}.$

Figura 15

Otros triángulos semejantes para n real



En las estrategias usando triángulos, dado que ACB es rectángulo, podemos relacionar sus catetos para determinar la tangente al ángulo $\theta = \measuredangle ACB$, que corresponde a la pendiente de la recta tangente.

Puede ocurrir que los estudiantes identifiquen otros triángulos semejantes en la construcción y establezcan relaciones entre ellos; por ejemplo, tomando los triángulos STB y CAB, se observa que $\measuredangle BAC = \measuredangle TSB = 90°$. Como $ST \parallel AB$, y SB es una transversal, entonces $\alpha_1 = \alpha$, y como TB ∥ OA, entonces $\theta_1 \cong \theta$. Esto implica que los triángulos son semejantes, ya que comparten todos sus ángulos.

De la semejanza de triángulos, se obtiene la relación de proporcionalidad

$$\frac{ST}{TB} = \frac{AB}{CA}$$

Sustituyendo las expresiones correspondientes, para hallar ST, se obtiene que

$\frac{ST}{x} = \frac{f(x)}{s}$, entonces $ST = \frac{f(x)x}{s} = \frac{x^r x}{\frac{1}{r}x} = rx^r$.

Ahora, tomando $\measuredangle TBS$, podemos establecer la relación entre los catetos del triángulo para encontrar la tangente a ese ángulo, así:

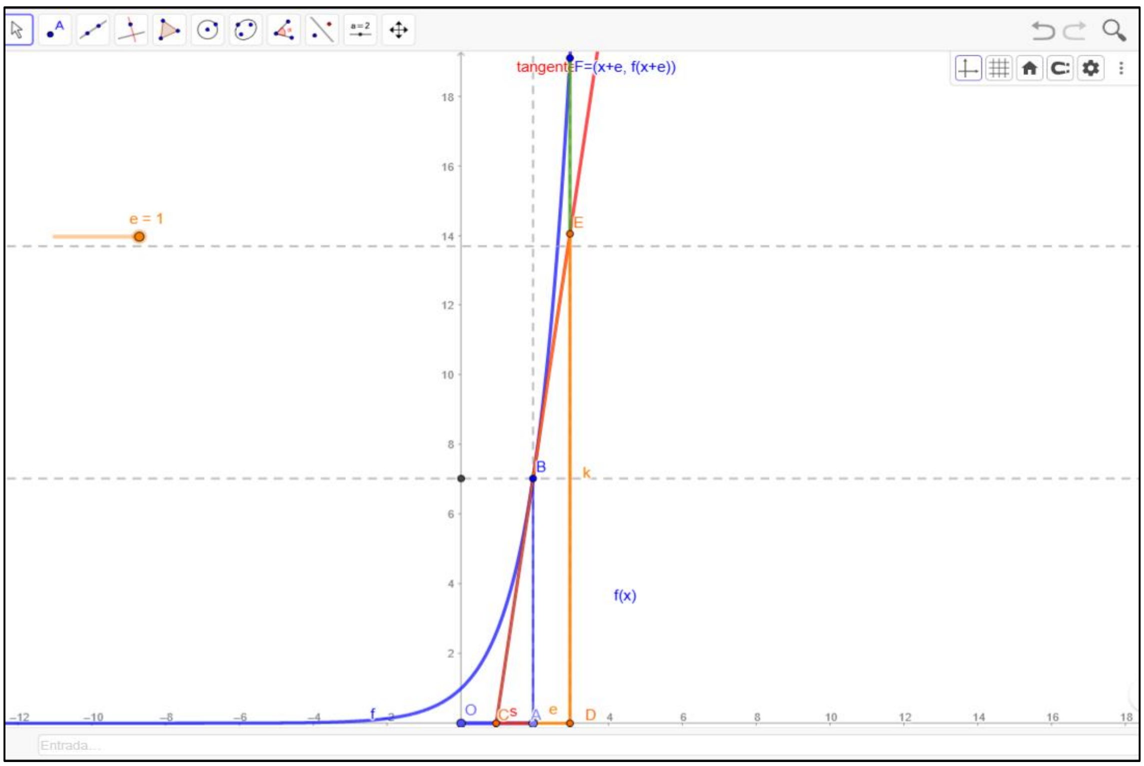
$$\tan(\theta_1) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{ST}{x} = \frac{rx^r}{x}.$$

Finalmente, el **Capítulo 3**, *Funciones exponenciales*, se subdivide en *Función exponencial natural* y *Generalización de funciones exponenciales*. Ambos subcapítulos están orientados a la identificación de la subtangente en este tipo de funciones y a la demostración de sus respectivas derivadas.

Función exponencial natural

Figura 16

Applet para $f(x) = \boldsymbol{e^x}$



El applet corresponde a la tarea 19 e inicia con la instrucción: *Función* $f(x) = e^x$. *Mueva A y el deslizador "e" hasta* $e = 0.01$ *de manera controlada. Luego, analice las relaciones entre los objetos matemáticos del applet y responda las preguntas en su hoja de trabajo.* Se espera que los estudiante inicialmente, por medio de la visualización de los elementos del applet, encuentren que $s = 1$ por medio de estrategias métricas o geométricas. Finalmente, se espera que usen estas ideas para demostrar la derivada de manera general.

Relación entre s y x:

Los estudiantes pueden demostrar esta relación mediante el siguiente procedimiento:

$$\frac{s+e}{s} = \frac{k}{f(x)}, \text{ como } e \to 0 \Longrightarrow \frac{s+e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)} \Longrightarrow s = \frac{ef(x)}{f(x+e)-f(x)}$$

Se tomará el incremento infinitesimal e como h para evitar que se presente alguna confusión.

Tabla 18

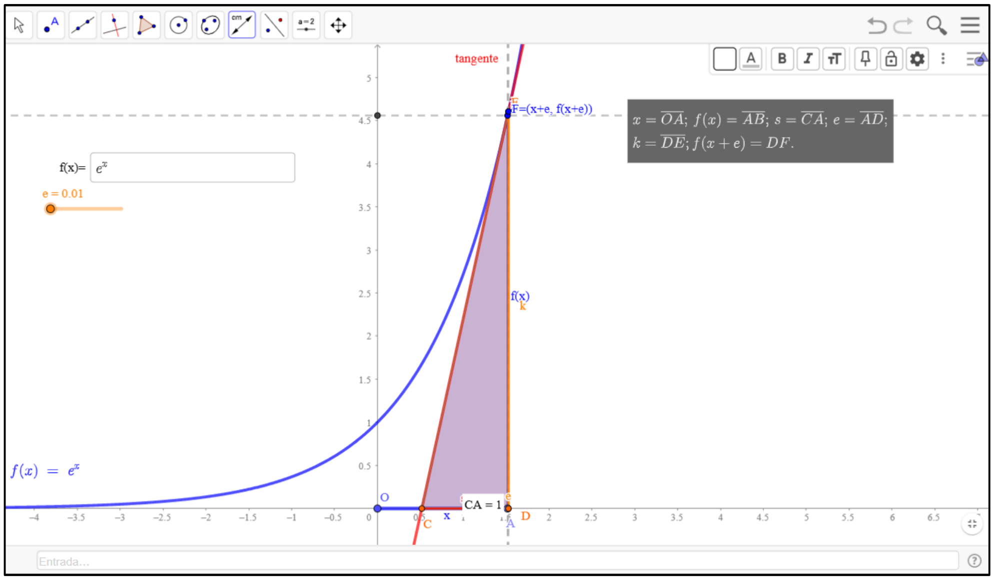
Demostración subtangente para $\boldsymbol{f(x) = e^x}$

Tarea	Demostración
Tarea 20. Para $\boldsymbol{f(x) = e^x}$, ¿cuál es la relación entre $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$ cuando $\boldsymbol{e \to 0}$?, ¿por qué?	$s = \dfrac{he^x}{e^{x+h} - e^x} = \dfrac{he^x}{e^x h - e^x} = \dfrac{he^x}{e^x(h-1)} = \dfrac{h}{(e^h - 1)} = 1.$

Este resultado también puede verificarse utilizando las herramientas de GeoGebra. Una manera consiste en el uso de la herramienta *distancia o longitud*: al arrastrar el punto A, es decir, para cualquier valor de x dentro del dominio, se observa que esta distancia permanece constante (Figura 17).

Figura 17

Subtangente para $\boldsymbol{f(x) = e^x}$



Para demostrar la derivada, se proponen las siguientes estrategias que el estudiante puede considerar, y que el applet permite explorar:

Tarea 21. Para $\boldsymbol{f(x) = e^x}$, demuestre que $\boldsymbol{f'(x) = e^x}$

Tabla 19

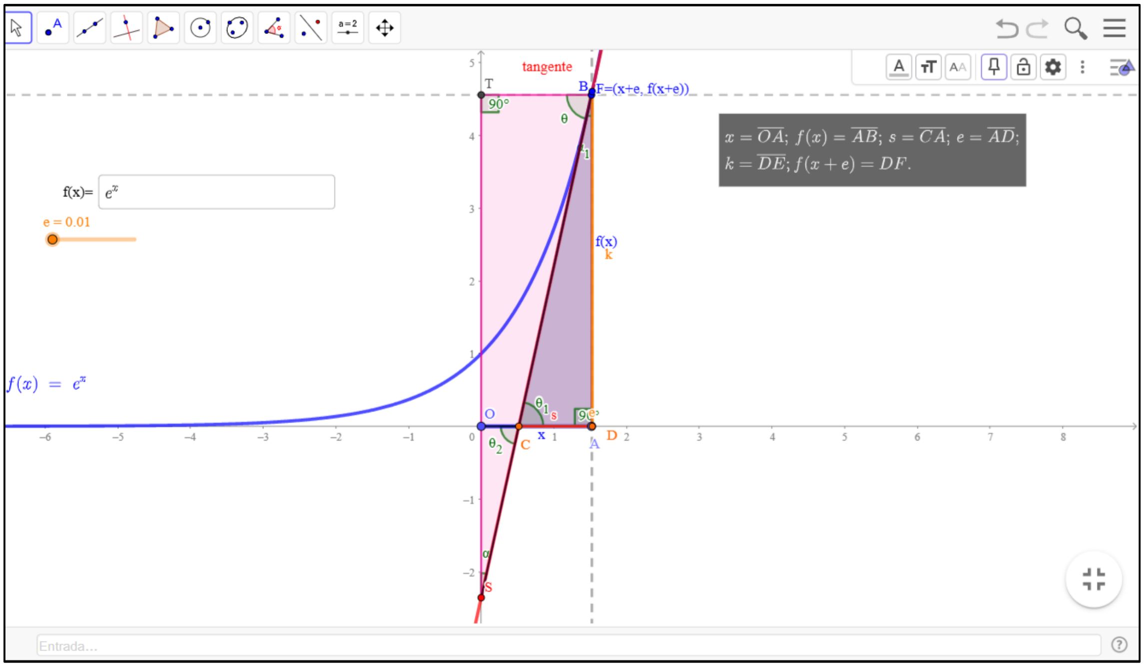
Demostración de la derivada para $\boldsymbol{f(x) = e^x}$

Estrategia	Demostración
Definición de derivada como límite del cociente incremental	$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{(x+h)} - e^x}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^x h - e^x}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(e^h - 1)}{h} = e^x(1) = e^x.$
Relación de los catetos del triángulo rectángulo	$\tan(\theta) = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \dfrac{f(x)}{s} = \dfrac{e^x}{1}$ $= e^x.$
Ecuación punto pendiente	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x) - 0}{x - (x-1)} = \dfrac{e^x}{1} = e^x.$

Relación mediante otros triángulos semejantes	$\tan(\theta) = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \dfrac{ST}{TB} = \dfrac{xe^x}{x} = e^x.$

Figura 18

Otros triángulos semejantes para $\boldsymbol{f(x) = e^x}$



En la relación mediante otros triángulos semejantes (Figura 18), se consideraron los triángulos STE y CDE, se observa que $\measuredangle BDC = \measuredangle BTS = 90°$. Dado que $ST \parallel DF$, y SB es una transversal, se cumple que $\alpha_1 = \alpha$. Además, como TB ∥ OD, también se tiene que $\theta_1 = \theta$. Esto implica que los triángulos son semejantes, ya que todos sus ángulos correspondientes son congruentes.

De la semejanza de triángulos, se obtiene la relación de proporcionalidad

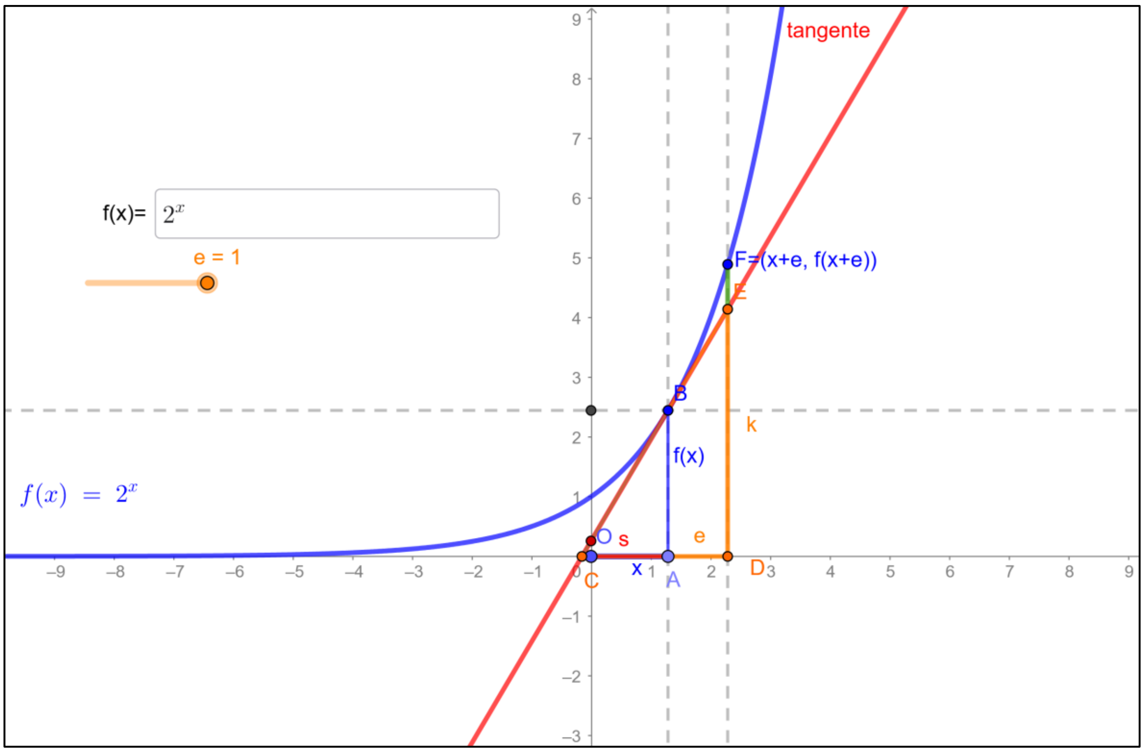
$$\frac{ST}{TB} = \frac{AB}{CA}$$

Sustituyendo las expresiones correspondientes, para hallar ST, se obtiene que $\frac{ST}{x} = \frac{f(x)}{s}$, lo mismo que $\frac{ST}{x} = \frac{e^x}{1}$, entonces $ST = xe^x$.

Generalización funciones exponenciales

Figura 19

Applet para $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$



En la tarea 22, correspondiente al applet (Figura 19) aparece la instrucción: *Explore digitando diferentes funciones de la forma* $a^x, a \in \mathbb{R}$*. Mueva A y el deslizador "e" hasta* $e = 0.01$ *de manera controlada. Luego, analice las relaciones entre los objetos matemáticos del applet y responda las preguntas en su hoja de trabajo.* Para este caso, se pide al estudiante que demuestre la derivada para este tipo de funciones y se le da información sobre la subtangente, $s = \frac{1}{\ln(a)}$, debido a la complejidad de encontrar esta relación de una manera intuitiva. Se espera que explore para distintas funciones; compruebe la relación y use lo descubierto en las tareas anteriores para demostrar la derivada de manera general.

Tarea 23. Para $\boldsymbol{f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}, s = \frac{1}{ln\,(a)}}$. Demuestre que $\boldsymbol{f'(x) = a^x\; ln(a)}$.

Tabla 20

Demostración de la derivada para funciones exponenciales

Estrategia	Demostración
Relación de los catetos del triángulo rectángulo	$\tan(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{f(x)}{s} = \frac{a^x}{\frac{1}{\ln(a)}} = a^x\ ln(a).$
Ecuación punto pendiente	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x) - 0}{x - \left(x - \frac{1}{\ln(a)}\right)} = \frac{a^x}{\frac{1}{\ln(a)}} = a^x\ ln(a).$
Relación mediante otros triángulos semejantes	$\tan(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{ST}{TB} = \frac{xa^x \ln(a)}{x} = a^x\ ln(a).$

En la relación mediante otros triángulos semejantes, se pueden considerar los mismos triángulos que para $f(x) = e^x$: STE y CDE. Como son semejantes, se obtiene la relación de proporcionalidad $\frac{ST}{TA} = \frac{AB}{CA}$. Sustituyendo las expresiones correspondientes, para hallar ST, se obtiene que $\frac{ST}{x} = \frac{f(x)}{s}$, lo mismo que $\frac{ST}{x} = \frac{a^x}{\frac{1}{\ln(a)}}$, entonces $\frac{ST}{x} = \frac{a^x \ln(a)}{1}$, de ahí que

$$ST = xa^x \ln(a).$$

5.4. Implementación de la secuencia de enseñanza

Para lograr la versión final de la secuencia, se realizaron dos pilotajes, la primera versión se experimentó en noviembre de 2024 con 10 estudiantes del curso de Didáctica del Cálculo 2024-2 de la UIS y la segunda versión, en febrero de 2025, con 3 estudiantes de la Maestría en Educación Matemática 2025-1 de la UIS.

En la ***primera versión***, los estudiantes lograron establecer la relación entre la subtangente $\boldsymbol{s}$ y la variable x, apoyándose en las herramientas digitales disponibles, las cuales facilitaron la identificación de ciertas propiedades clave. A partir de estas observaciones, siguieron un proceso de tipo inductivo para avanzar en sus conjeturas. Aunque las preguntas estaban orientadas a encontrar y demostrar la relación entre s y la función, y no directamente a demostrar la derivada, la mayoría de los estudiantes utilizaron dicha relación como base para deducir la expresión de la derivada. Solo dos estudiantes intentaron una demostración formal utilizando la definición clásica de derivada. Si bien lograron identificar el patrón buscado, este fue reformulado por ellos como un problema geométrico enfocado en hallar la medida de un segmento. Además, algunos estudiantes emplearon directamente el valor de la derivada para sustentar sus respuestas. También se identificaron algunos errores en la construcción de los applets, tales como la asignación incorrecta de etiquetas a ciertos puntos o segmentos, así como elementos que no permanecían fijos en la vista gráfica, lo cual dificultaba la interacción fluida por parte de los estudiantes.

Figura 20

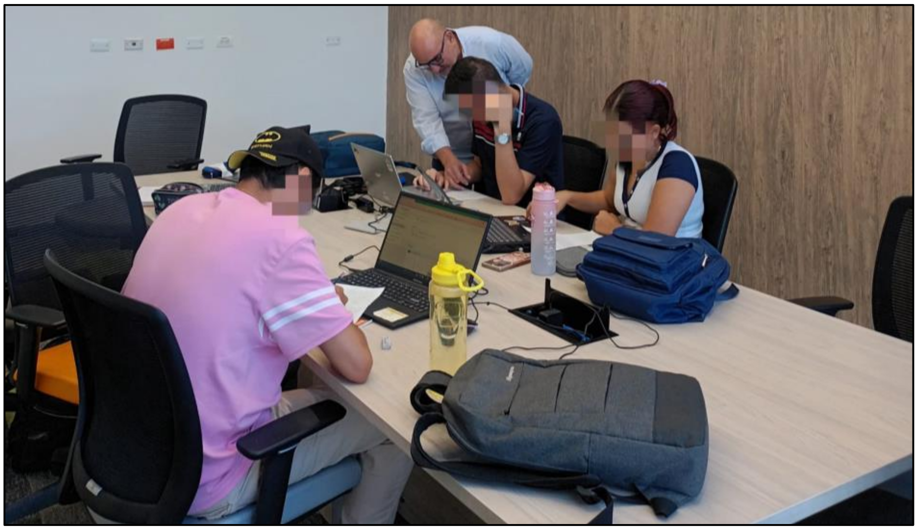
Implementación primera versión de la secuencia

Dado que los resultados obtenidos inicialmente no respondieron completamente a los objetivos propuestos, se decidió incorporar nuevas preguntas orientadas específicamente a la demostración de la derivada. Si bien el hallazgo y la justificación del valor de la subtangente continúan siendo un eje central de la secuencia, también lo es la comprensión de las reglas de derivación. En consecuencia, se procedió al rediseño de los applets, con el fin de mejorar la experiencia de exploración y orientar de manera más efectiva a los estudiantes hacia dicho propósito.

En la ***segunda versión***, se evidenció que los estudiantes tardaron un tiempo considerable en la fase de exploración, especialmente en la actividad orientada a hallar el valor de la subtangente y justificarlo. Se observó que los estudiantes no recurrieron a la semejanza de triángulos para encontrar el valor de s, por ello, no lograron aplicar este valor en casos particulares, lo que evidenció una comprensión limitada de su significado.

Figura 21

Implementación segunda versión de la secuencia



Estos hallazgos sugirieron la necesidad de reformular la secuencia, ya que las preguntas iniciales no eran lo suficientemente específicas. Se propuso, entonces, orientar a los estudiantes a que encuentren explícitamente s en función de x y que determinen su valor en el caso en que e tiende a 0, con el objetivo de facilitar una mejor visualización y comprensión de la proporcionalidad involucrada.

A partir de estos ajustes, se elaboró la ***versión final*** de la secuencia, la cual fue implementada con 16 estudiantes del curso *Didáctica del Cálculo* durante el primer semestre de 2025, hacia finales del mes de febrero. Esta implementación se desarrolló a lo largo de tres sesiones, en un total de 7 horas.

5.5. Recolección de datos

Para la recolección de datos, se contemplarán diversas fuentes:

- Hojas de trabajo de los estudiantes y casillas de entrada en el AVG (Aula Virtual de GeoGebra)

Al inicio de cada sesión, se entregaba a cada estudiante hojas en blanco para que desarrollaran las tareas (incluido el test diagnóstico). Estas hojas se recogieron al final de cada clase. Los estudiantes también podían complementar sus respuestas en las casillas de entrada del aula virtual de GeoGebra y sus construcciones auxiliares quedaban guardadas automáticamente. Esta información se usó para tomar algunos ejemplos y realizar un análisis cualitativo del procedimiento realizado por cada estudiante: planteamiento de conjeturas, tipos de demostración emergentes, dificultades, errores, conocimiento del contenido matemático y obstáculos didácticos.

- Videos de seguimiento

Se tomaron 51 registros de video cortos de las preguntas e intervenciones más controversiales e interesantes de los estudiantes. Este material se usó para transcribir las interacciones entre estudiantes y profesor-estudiante, con el fin de complementar la información registrada en las hojas de trabajo y en el AVG en cuanto al planteamiento de conjeturas, tipos de demostración emergentes, dificultades, errores, conocimiento del contenido matemático y obstáculos didácticos.

- Apuntes del investigador

Se apuntaron algunos sucesos importantes como dificultades presentaban los estudiantes, preguntas, dudas, sugerencias y errores del applet, para complementar el procedimiento de los estudiantes y hacer recomendaciones y mejoras a la secuencia de enseñanza.

5.6. Producción de resultados

Finalmente, para responder a los objetivos, se describirán, analizarán y categorizarán los registros de video, notas de observación y respuestas de los estudiantes para reportar información sobre: Tipos de demostración emergentes en la prueba diagnóstica; Tipos de demostración emergentes en la secuencia de enseñanza; Errores y dificultades emergentes al plantear conjeturas y construir demostraciones; Información sobre el conocimiento didáctico y matemático sobre los docentes en formación. Finalmente, se compararán los resultados del test diagnóstico para determinar los avances en la comprensión de las reglas de derivación y se realizarán ajustes y recomendaciones para futuras implementaciones de la secuencia de enseñanza.

6. Resultados

En este capítulo se presenta el análisis de la versión final de la secuencia de enseñanza en el Aula Virtual de GeoGebra y aplicada a 16 estudiantes del curso *Didáctica del Cálculo* durante el segundo semestre académico de 2025 en la Universidad Industrial de Santander. Se exponen los tipos de demostración identificados, así como los errores y dificultades emergentes a lo largo de las diferentes tareas que conforman la secuencia.

La sección 6.1 aborda los tipos de demostración presentes en el test diagnóstico inicial, analizando los procedimientos utilizados por los estudiantes y justificando la clasificación asignada para cada una de las dos tareas incluidas.

Luego, se establecen las categorías de errores y dificultades que orientan el análisis posterior. En las siguientes secciones, además de clasificar los tipos de demostración, también se tienen en cuenta los errores y las dificultades emergentes: En la sección 6.2 se examinan las tareas 2, 3 y 4. La sección 6.3 se centra en las Funciones potencia con n natural, analizando las tareas relacionadas con la identificación de la relación entre s y x, la demostración de la derivada para funciones particulares, y la tarea 8, correspondiente a la demostración general de la regla de derivación. La sección 6.4 aborda las funciones recíprocas a partir de tareas análogas: la relación entre s y x, la demostración para casos particulares y la demostración general de la regla de derivación.

En la sección 6.5 se presenta el análisis del subcapítulo dedicado a funciones potencia con n racional, que incluye las tareas 10, 11, 12 y 13. Finalmente, la sección 6.6 examina las funciones potencia con n real a partir del análisis de la tarea 15.

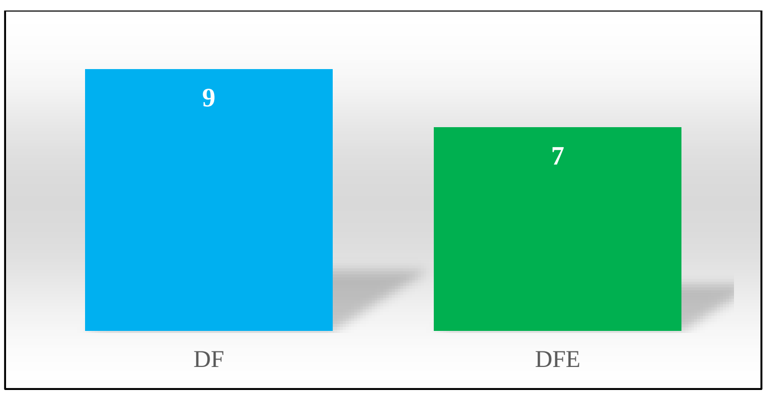
6.1. Tipos de demostración emergentes en el test diagnostico

Se analizan los tipos de demostración que emergen en las dos tareas del test diagnóstico aplicado antes de la implementación del libro *Un viaje en el tiempo: Fermat y las reglas de derivación*. El propósito de este análisis es caracterizar las estrategias iniciales de los estudiantes al abordar la demostración de algunas reglas de derivación, así como identificar sus concepciones previas, errores recurrentes y formas de argumentación predominantes.

- **Tipos de demostración emergentes en la primera tarea**

Figura 22

Tipos de demostración en la tarea 1 del test diagnóstico

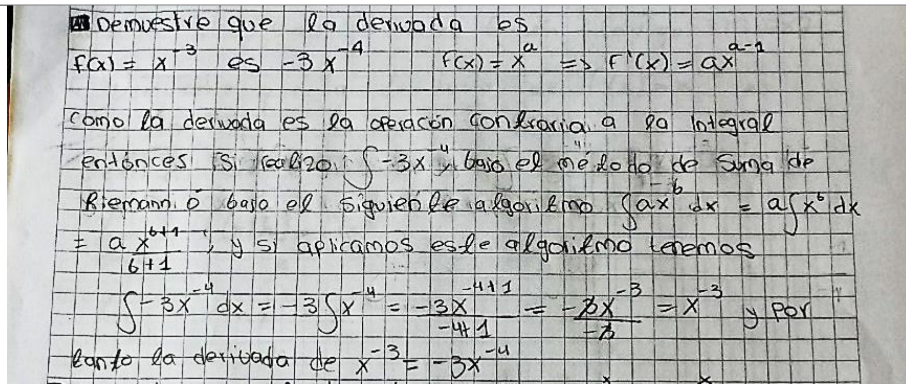


Los intentos que se clasifican como demostraciones de tipo **deductiva fallida (DF)** se caracterizan porque los estudiantes recuerdan la definición de derivada como límite del cociente incremental, pero presentan fallas en la manipulación algebraica que no le permiten concluir el resultado. También se destacan los estudiantes que intentan transformar el problema en uno equivalente, pero fracasan. Por ejemplo:

Tabla 21

Análisis para E2 en la tarea 1 test diagnóstico

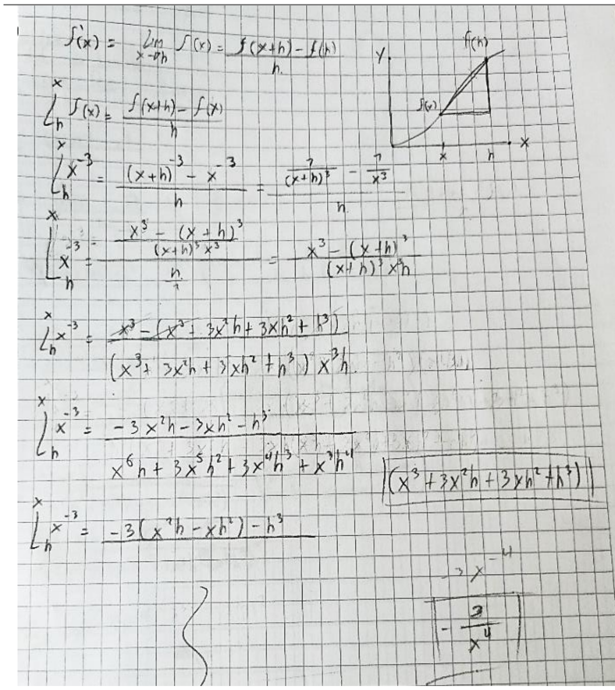
Respuesta de E2


Demuestre que la derivada es
$f(x) = x^{-3}$ es $-3x^{-4}$ $f(x) = x^{a} \Rightarrow f'(x) = ax^{a-1}$
como la derivada es la operación contraria a la Integral entonces si realizo $\int -3x^{-4}$ bajo el método de Suma de Riemann o bajo el siguiente algoritmo $\int ax^{b}dx = a\int x^{b}dx = a\frac{x^{b+1}}{b+1}$, y si aplicamos este algoritmo tenemos
$\int -3x^{-4}dx = -3\int x^{-4} = \frac{-3x^{-4+1}}{-4+1} = \frac{-3x^{-3}}{-3} = x^{-3}$ y por tanto la derivada de $x^{-3} = -3x^{-4}$

El estudiante sostiene que al integrar la derivada se obtiene la función primitiva, aludiendo al Teorema Fundamental del Cálculo. Sin embargo, se intuye que no comprende la derivada como ni límite, pendiente de la recta tangente o velocidad. Dado que no puede recurrir al algoritmo de la derivada para demostrarlo (pues aplicar una regla no es una demostración), opta por usar el algoritmo de la integración. Intenta construir una demostración deductiva formal transformativa, pero en realidad sólo encadena manipulaciones algebraicas sin justificar los fundamentos teóricos de cada paso. Aunque menciona las sumas de Riemann, no las emplea realmente, sino que introduce términos técnicos para aparentar formalidad. Además, no justifica por qué integrando se obtiene ese resultado, lo que debilita su intento de demostración. Por esto, se clasifica como deductiva formal transformativa fallida.

Tabla 22

Análisis respuesta E14 en la tarea 1 test diagnóstico

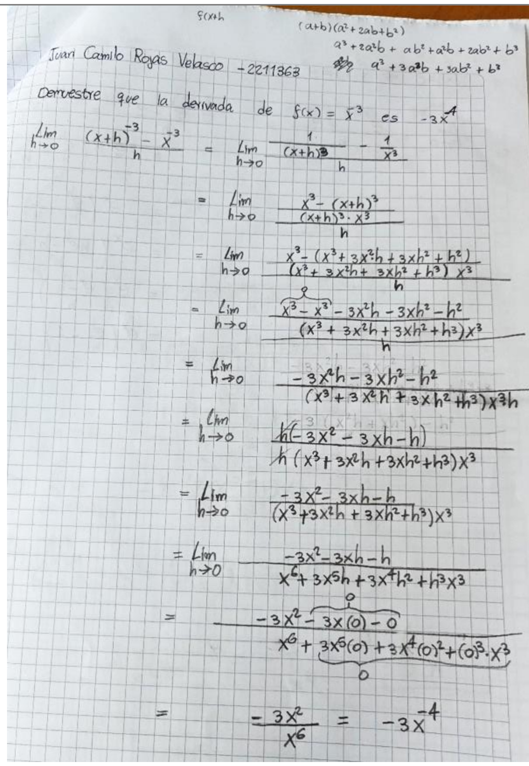
Respuesta de E14	
	El estudiante utiliza la definición de derivada como límite, pero presenta dificultades en el desarrollo algebraico, especialmente en la factorización, lo que le lleva a cometer errores. Además, no identifica el momento en que la indeterminación desaparece y puede reemplazar el valor del límite. Estos errores dificultan la simplificación de la expresión e impiden obtener la derivada esperada. Por ello, su demostración se clasifica como deductiva formal estructural fallida.

Las demostraciones de tipo **deductiva formal estructural (DFE)** se destacan por usar la definición de derivada como límite del cociente incremental y presentar un buen manejo algebraico. Por ejemplo:

Tabla 23

Análisis respuesta E15 en la tarea 1 test diagnóstico

Respuesta de E15



$f(x+h$

$(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Juan Camilo Rojas Velasco - 2211363

Demuestre que la derivada de $f(x)=x^{-3}$ es $-3x^{-4}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{-3}-x^{-3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^3}-\frac{1}{x^3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^3-(x+h)^3}{(x+h)^3\cdot x^3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^3-(x^3+3x^2h+3xh^2+h^2)}{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)\,x^3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\overbrace{x^3-x^3}^{0}-3x^2h-3xh^2-h^2}{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)x^3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3x^2h-3xh^2-h^2}{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)x^3h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-3x^2-3xh-h)}{\cancel{h}(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)x^3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3x^2-3xh-h}{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)x^3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3x^2-3xh-h}{x^6+3x^5h+3x^4h^2+h^3x^3}$$

$$=\frac{-3x^2\overbrace{-3x(0)-0}^{0}}{x^6+\underbrace{3x^5(0)+3x^4(0)^2+(0)^3\cdot x^3}_{0}}$$

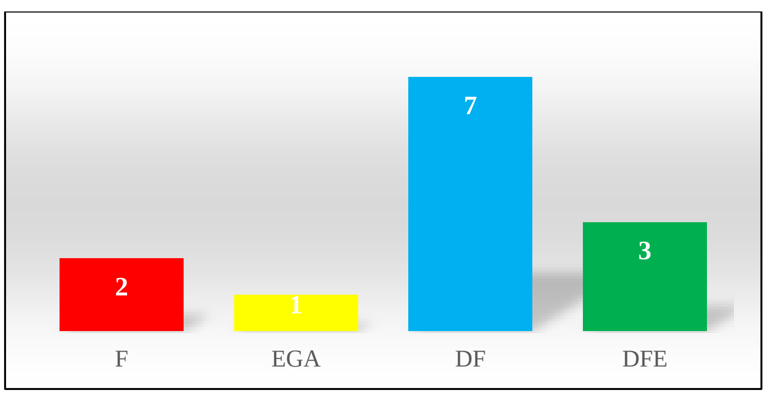
$$=\frac{-3x^2}{x^6}=-3x^{-4}$$

El estudiante conoce la definición de derivada y la aplica correctamente, siguiendo un procedimiento algebraico adecuado. Desarrolla el binomio al cubo de manera precisa y realiza las factorizaciones necesarias que le permiten simplificar la expresión y obtener el resultado esperado, demostrando un buen manejo de las técnicas algebraicas involucradas.

- **Tipos de demostración emergentes en la segunda tarea:**

Figura 23

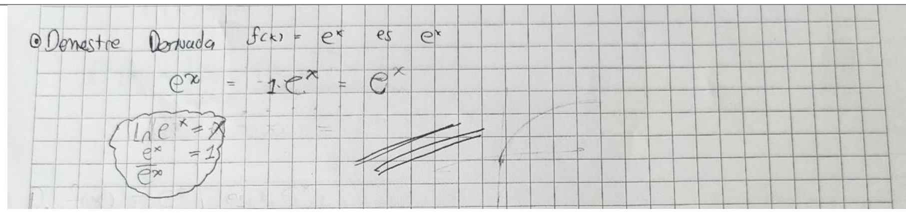
Tipos de demostración en la tarea 2 del test diagnóstico



Los intentos de tipo **fallido (F)** se reconocen porque no presentan ningún razonamiento que permita justificar el resultado. Por ejemplo:

Tabla 24

Análisis respuesta E9 en la tarea 2 test diagnóstico

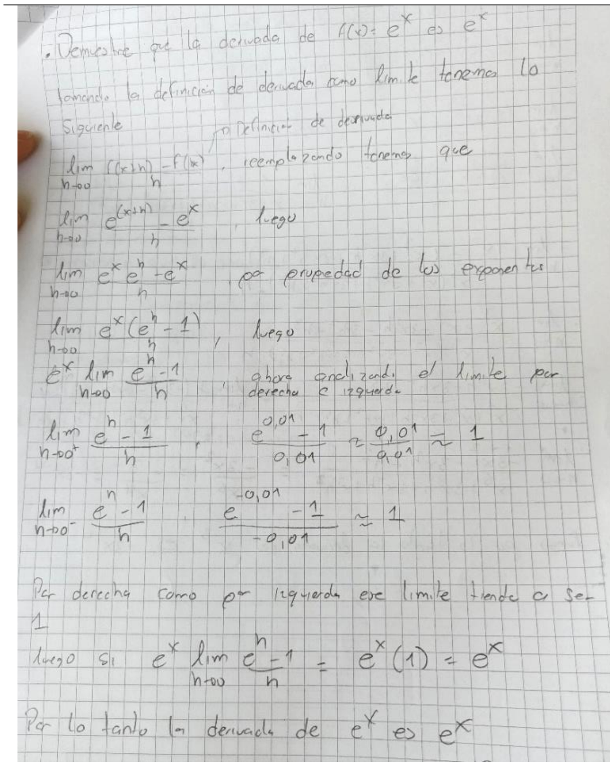
Respuesta de E9

El estudiante escribe una serie de equivalencias que no conducen a ninguna conclusión válida, lo que refleja una comprensión nula del concepto de derivada. No presenta ningún razonamiento que permita justificar el resultado, ni sigue un camino lógico para demostrarlo, limitándose a escribir expresiones sin sentido estructural.

El estudiante que construyó un **ejemplo genérico analítico (EGA)**, utiliza un ejemplo para calcular el límite, que le permite generalizar el resultado:

Tabla 25

Análisis respuesta E3 en la tarea 2 test diagnóstico

Respuesta de E3



Demuestre que la derivada de $f(x)=e^x$ es e^x

Tomando la definición de derivada como límite tenemos lo siguiente

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ por definición de derivada, reemplazando tenemos que

$\lim_{h\to 0}\frac{e^{(x+h)}-e^x}{h}$, luego

$\lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h-e^x}{h}$, por propiedad de los exponentes

$\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}$, luego

$e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$, ahora analizando el límite por derecha e izquierda

$\lim_{h\to 0^+}\frac{e^h-1}{h}$, $\frac{e^{0,01}-1}{0,01}=\frac{0,01}{0,01}\approx 1$

$\lim_{h\to 0^-}\frac{e^h-1}{h}$, $\frac{e^{-0,01}-1}{-0,01}\approx 1$

Por derecha como por izquierda ese límite tiende a ser 1

luego si $e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x(1)=e^x$

Por lo tanto la derivada de e^x es e^x

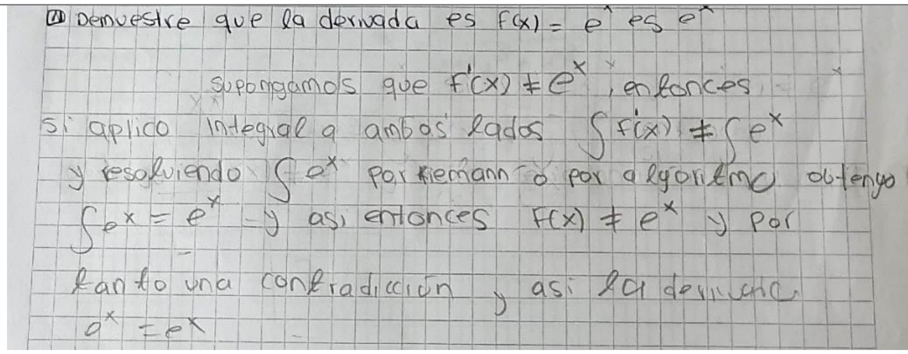
El estudiante utiliza la definición de derivada y desarrolla correctamente el procedimiento algebraico. Al obtener el nuevo límite, emplea la calculadora para evaluar el valor cuando h se aproxima a 0 desde la izquierda y la derecha. Sin embargo, solo realiza este cálculo para dos valores y, al obtener en ambos casos un resultado cercano a 1, concluye que el límite es 1. No obstante, evaluar únicamente un par de valores a cada lado no es suficiente para demostrar rigurosamente el resultado. Por ello, su razonamiento es empírico.

Las demostraciones de tipo **deductiva fallida (DF), c**omo en la tarea anterior, se distinguen porque los estudiantes recuerdan la definición de derivada como límite del cociente incremental, pero presentan fallas en la manipulación algebraica que no le permiten concluir el resultado. También se destacan los estudiantes que intentan transformar el problema en uno equivalente, pero fracasan. Por ejemplo:

Tabla 26

Análisis respuesta E2 en la tarea 2 test diagnóstico

Respuesta de E2



① Demuestre que la derivada es $f(x) = e^x$ es e^x

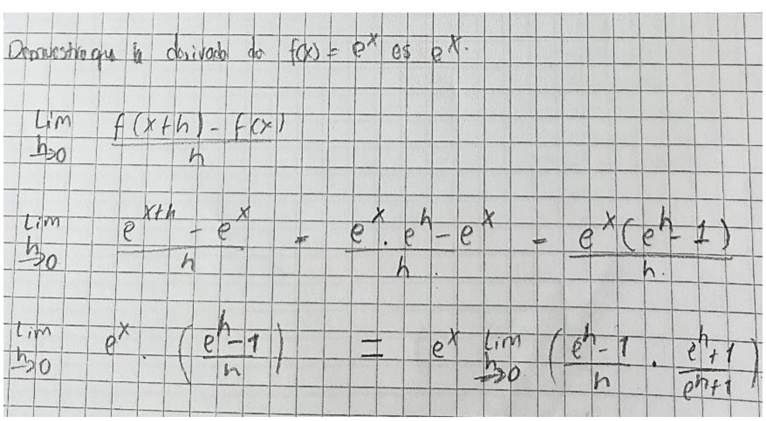
Supongamos que $f'(x) \neq e^x$, entonces si aplico integral a ambos lados $\int f'(x) \neq \int e^x$ y resolviendo $\int e^x$ por Riemann o por algoritmo obtengo $\int e^x = e^x$ y así entonces $f(x) \neq e^x$ y por tanto una contradicción y así la derivada $e^x = e^x$

El estudiante intenta hacer una demostración por contradicción, lo cual no es pertinente en este contexto. Supone que la derivada de la función no es igual al valor dado y luego integra ambos lados, pero esto no justifica la derivada. Además, menciona la integral "por Riemann o por algoritmo" sin una justificación formal y no genera una contradicción válida. El tipo de demostración es deductiva formal transformativa fallida, dado que no hace uso de ejemplos e intenta transformar el problema y "nombrar" reglas teóricas para construir su demostración, sin éxito.

Tabla 27

Análisis respuesta E15 en la tarea 2 test diagnóstico

Respuesta de E12



Demuestre que la derivada de $f(x) = e^x$ es e^x.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} e^x \cdot \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) = e^x \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} \cdot \frac{e^h + 1}{e^h + 1}\right)$$

El estudiante recurre a la definición de derivada como límite, realiza procedimientos algebraicos correctos, pero no logra encontrar el valor del nuevo límite especial.

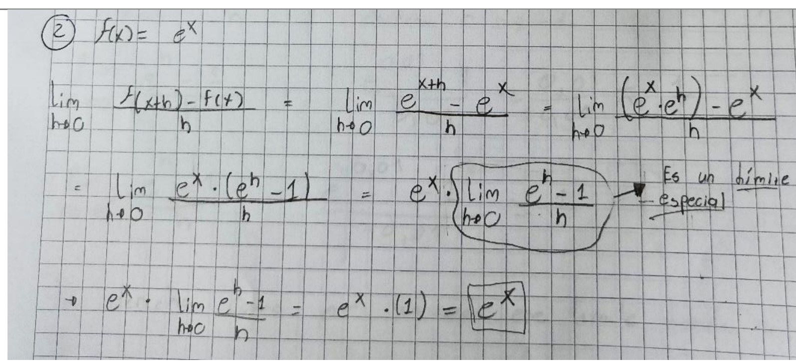
	Su intento se clasifica como deductiva formal estructural fallida.

Las demostraciones de tipo **deductiva formal estructural (DFE),** se destacan porque los estudiantes utilizan correctamente la definición de derivada como límite del cociente incremental. Por ejemplo:

Tabla 28

Análisis respuesta E6 en la tarea 2 test diagnóstico

Respuesta de E6



El estudiante utiliza la definición de derivada y desarrolla correctamente el procedimiento algebraico, además de aplicar adecuadamente el límite especial, lo que le permite concluir la demostración.

Para el análisis de las respuestas en las tareas del libro, se establecen las definiciones de error *y* dificultad, junto con la clasificación adoptada en este trabajo para cada una de estas categorías.

Un error es una respuesta o procedimiento incorrecto para una cuestión matemática. (Rico, 1998). Para clasificar los errores de los estudiantes en la secuencia de enseñanza se tomó como referencia la propuesta de Mosvshovitz et al. (1987), quienes en una investigación sobre errores cometidos por alumnos de secundaria en Matemática elaboran una clasificación empírica basada en un análisis constructivo de las soluciones de los estudiantes realizado por expertos:

I. **Datos mal utilizados**: Se presentan cuando existe una incoherencia entre la información del enunciado y la manera en que el estudiante la utiliza. Esto puede deberse a que introduce datos que no corresponden, omite información necesaria, responde a algo distinto de lo solicitado, asigna significados erróneos a ciertos elementos del enunciado, confunde variables al usar sus valores numéricos o realiza una lectura equivocada del problema.

II. **Interpretación incorrecta del lenguaje**: Corresponden a fallos que surgen al traducir de manera inadecuada un hecho matemático expresado en un lenguaje simbólico a otro, generando así representaciones incorrectas.

III. **Inferencias no válidas lógicamente:** Son aquellos errores asociados a deficiencias en el razonamiento, que no dependen directamente del contenido matemático trabajado, sino de la manera en que se encadenan las ideas.

IV. **Teoremas o definiciones deformados:** Se producen cuando el estudiante altera o interpreta de forma incorrecta un principio, regla, teorema o definición, modificando su sentido original.

V. **Falta de verificación en la solución**: Ocurren cuando los procedimientos aplicados en la resolución son correctos en cada paso, pero el resultado final no responde a la pregunta planteada, debido a la ausencia de una revisión adecuada.

VI. **Errores técnicos:** Incluyen equivocaciones en cálculos, en la lectura de datos de una tabla, en la manipulación de expresiones algebraicas o en la aplicación de algoritmos.

En cuanto a las dificultades, se definen como cualquier obstáculo que el alumno encuentra y que le impide avanzar hacia los objetivos previstos (Socas, 1997). El autor sostiene que en el aprendizaje de las matemáticas pueden tener distintos orígenes: algunas están asociadas a la propia disciplina, vinculadas con los objetos matemáticos y los procesos de pensamiento; otras se relacionan con los procesos de enseñanza, los procesos cognitivos de los estudiantes o incluso con la ausencia de una actitud racional hacia las matemáticas. Aunque el propósito no es indagar en el origen de las dificultades, se retoma y adapta la tipología propuesta para aportar información sobre las barreras que enfrentan los estudiantes al formular conjeturas y construir demostraciones en torno a las reglas de derivación de la función potencia y la función exponencial.

I. **Complejidad de los objetos matemáticos:** Hace referencia a las dificultades que se originan en la naturaleza abstracta, formal y simbólica del lenguaje matemático. Los estudiantes suelen tener problemas al interpretar signos, símbolos y términos propios de la disciplina, sobre todo cuando estos contrastan o entran en conflicto con el lenguaje cotidiano.

II. **Procesos de pensamiento matemático:** Se adopta esta categoría a partir de los procesos generales (MEN 1998): razonamiento; resolución y planteamiento de problemas; comunicación; modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. A estos se suma el estándar de representación (NCTM, 2003), con el fin de ampliar el marco de análisis de las dificultades identificadas.

III. **Procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas:** Son las dificultades que surgen a partir de la forma en que se enseña la matemática, ya sea por la organización de los contenidos, las metodologías pedagógicas empleadas, la carencia de recursos o el uso de un lenguaje docente que no se ajusta al nivel de comprensión de los estudiantes.

IV. **Actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas:** Dificultades relacionadas con el componente emocional del aprendizaje, tales como la ansiedad, el temor al error, la desmotivación o las creencias negativas respecto a la matemática, factores que inciden en la disposición del estudiante para aprender.

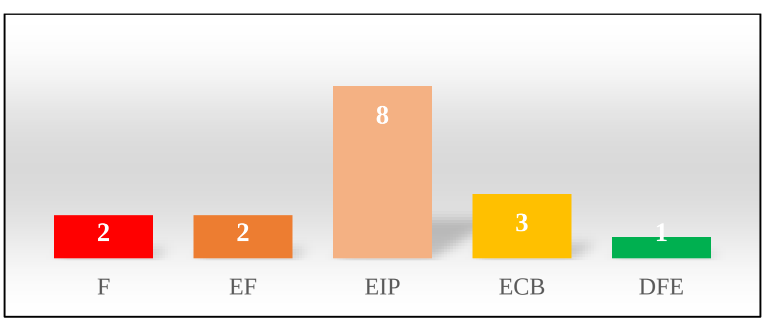
6.2. Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en las tareas del subcapítulo *Exploración*

Se presenta el análisis de las producciones correspondientes a las tareas 2, 3 y 4, las cuales constituyen el núcleo inicial del trabajo con el applet. El análisis integra tres dimensiones: los tipos de demostración construidos, los errores cometidos y las dificultades emergentes.

- **Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en la tarea 2**

Figura 24

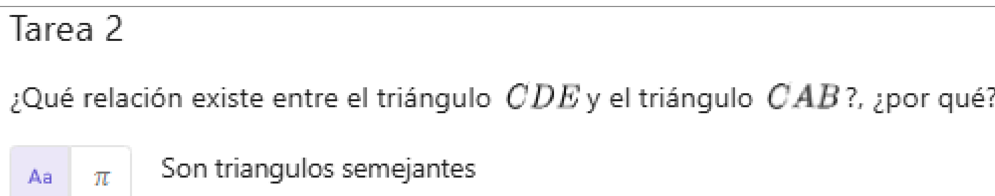
Tipos de demostración en la tarea 2



Aquellos estudiantes que intentaron construir demostraciones de tipo F, EF, EIP y ECB, presentan dificultades relacionadas con los **procesos de pensamiento matemático (PPM)**, que se originan en los modos de razonamiento característicos de las matemáticas, como el pensamiento lógico, deductivo, generalizador y estructurado. En su lugar, su razonamiento es empírico y, aunque logran identificar la relación de semejanza, no la justifican adecuadamente o, si lo intentan, sus argumentos no se basan en propiedades matemáticas generales, resultan inválidos o son insuficientes.

Tabla 29

Respuesta de E3 y E10 en la tarea 2

Respuesta de E3 y E10

Los estudiantes E3 y E10 plantean una conjetura correcta, pero no intentaron justificar o validar de ninguna manera la relación entre los dos triángulos. Por ello, se clasifica como una demostración fallida (F).

Los intentos de tipo **empirismo fallido (EF)** evidencian un razonamiento empírico, plantean una conjetura correcta a partir de la visualización, pero no se intenta demostrar o, si se intenta, se hacen manipulaciones algebraicas, numéricas o en el applet sin sentido para “acomodar” la respuesta.

Tabla 30

Respuesta de E9 en la tarea 2

Respuesta de E9

Tarea 2

¿Qué relación existe entre el triángulo CDE y el triángulo CAB?, ¿por qué?

Aa π Son semejantes, se mantiene una razón proporcional en sus lados según la variación de "e"

E9 afirma que los triángulos son semejantes, porque existe una proporcionalidad entre sus lados según la variación de $\boldsymbol{e}$. Si bien reconoce que en la relación de semejanza los lados deben ser proporcionales, no especifica cuáles ni por qué.

Las demostraciones de tipo **empirismo ingenuo perceptivo (EIP)** se basan en ejemplos escogidos sin ningun criterio especifico y la justificacion se realiza bajo la visualización de los elementos del applet. Por ejemplo:

Tabla 31

Respuesta de E6 en la tarea 2

Respuesta de E6
Tarea 2 ¿Qué relación existe entre el triángulo CDE y el triángulo CAB?, ¿por qué? Aa π Los triangulos CDE y CAB son triangulos semejantes. Como B y E son puntos sobre la misma recta tangente, entonces los segmentos AB y DE son paralelos, creando así triangulos semejantes. Cuando e tiende a 0 BE tiende a 0 y ambos triangulos CDE y CAB pasan a ser congruentes.
E6 intenta probar que los triángulos son semejantes, afirmando que, dado que los puntos *B* y *E* están sobre la misma recta, entonces *AB* y *DE* son paralelos, evidenciando así un error de tipo teoremas o definiciones deformados (TD), pues esto no es correcto, ni suficiente para probar dicha relación entre los dos segmentos. Se sospecha que, por la visualización en el applet, identificó el paralelismo de estos segmentos y luego buscó una justificación para respaldarlo. Aunque sus argumentos intentan ser generales, se basan en la visualización, por ello, no son suficientes para validar su hallazgo.

Tabla 32

Respuesta de E15 en la tarea 2

Respuesta de E15
Tarea 2 ¿Qué relación existe entre el triángulo CDE y el triángulo CAB?, ¿por qué? Aa π Son triángulos proporcionales ya que el ángulo BCA es el mismo que ECD y CA es a CD como BA es a ED
El estudiante logra plantear una conjetura de manera correcta sobre la semejanza de triángulos, afirmando que $\measuredangle \boldsymbol{BCA} = \measuredangle \boldsymbol{ECD}$, con ello, plantea la conjetura de que se cumple el criterio $\boldsymbol{LAL}$, aludiendo a un error de tipo teoremas o definiciones deformados (TD), porque, aunque encuentra que los triángulos tienen un ángulo igual, los lados que afirma son proporcionales, deben ser los homólogos que conforman dicho ángulo. En este caso, sería válido plantear que $\frac{\boldsymbol{CB}}{\boldsymbol{CE}} = \frac{\boldsymbol{CA}}{\boldsymbol{CD}}$. O bien, tomar los ángulos rectos, que sí se forman con los lados que menciona el estudiante.

Los estudiantes que construyeron demostraciones de tipo **experimento crucial basado en ejemplo (ECB)**, manipulan el applet y, aunque plantean conjeturas sobre la semejanza de los triángulos, su intento de validarlas no es suficiente, pues generalizan sobre un caso extremo. Ejemplo:

Tabla 33

Respuesta de E8 en la tarea 2

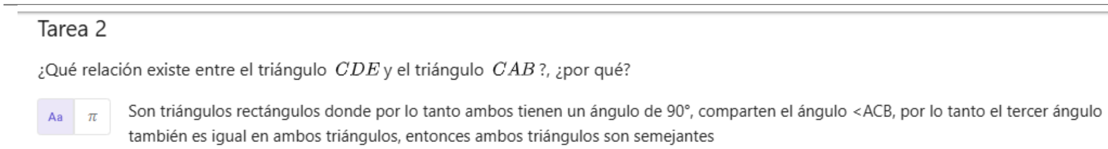
Respuesta de E8
Tarea 2 ¿Qué relación existe entre el triángulo CDE y el triángulo CAB?, ¿por qué? Aa π En e=0.01 los triángulos son semjantes, ademas son triangulos rectangulos y sus hipotenusa tinden a ser tangentes a la funcion x a la n, por tanto existe un relacion de proporcionalidad entre sus lados.

E8 analiza la relación de semejanza únicamente para $e = 0.01$, argumentando que, dado que la hipotenusa de ambos triángulos se encuentra sobre la recta tangente, debe existir una relación de proporcionalidad entre sus lados, cometiendo un error de tipo teoremas o definiciones deformados (TD), al asumir que compartir segmentos implica proporcionalidad. Este razonamiento revela una comprensión parcial del concepto de semejanza, los criterios que la rigen y otras propiedades fundamentales que podrían haberle permitido validar su conjetura.

La demostración que se ha clasificado como **deductiva formal estructural (DFE)** se destaca porque no se requieren ejemplos y sus argumentos no se basan en la visualización sino en propiedades generales.

Tabla 34

Respuesta de E16 en la tarea 2

Respuesta de E16
 Tarea 2 ¿Qué relación existe entre el triángulo CDE y el triángulo CAB?, ¿por qué? Aa π Son triángulos rectángulos donde por lo tanto ambos tienen un ángulo de 90°, comparten el ángulo <ACB, por lo tanto el tercer ángulo también es igual en ambos triángulos, entonces ambos triángulos son semejantes
Basándose en el criterio AAA, utiliza el applet e identifica que ambos triángulos son rectángulos, por lo que cada uno tiene un ángulo de $90°$. Además, identifica que comparten un ángulo, lo que implica que el tercer ángulo también debe ser congruente.

- **Respuestas en la tarea 3**

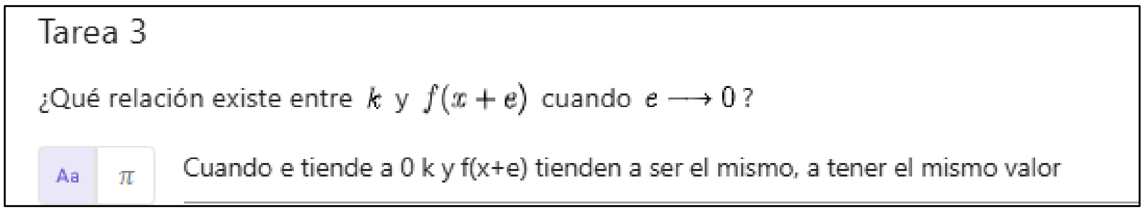
En esta tarea, no se esperaba que los estudiantes construyeran ningún tipo de demostración, sino que observaran los elementos de la construcción para concluir lo que ocurría cuando

$e \to 0$. Bajo esta premisa, casi todos lograron identificar la relación entre los segmentos: algunos lo hicieron de manera empírica o apoyándose únicamente en la visualización del applet (E1, E2, E3, E4, E8, E9, E11, E13), por ejemplo:

Respuesta de E4:

Figura 25

Respuesta de E4 en la tarea 3

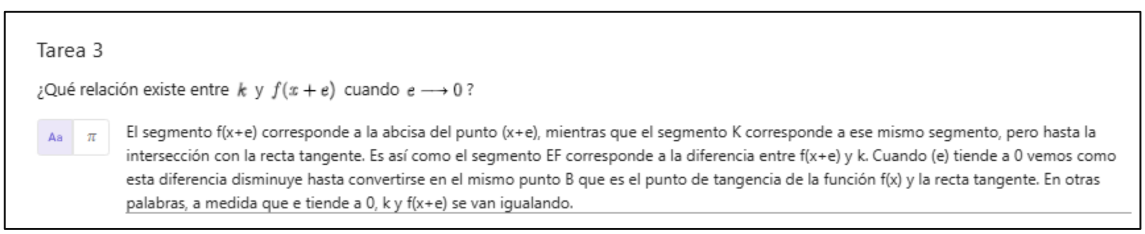


Mientras que otros consiguieron justificarla con mayor solidez, conectándola con la semejanza de triángulos o con ideas ligadas a la derivada, aunque no era necesario (E5, E6, E7, E10, E14, E16). Por ejemplo:

Respuesta de E6:

Figura 26

Respuesta de E6 en la tarea 3



Solo un estudiante (E12) presentó confusiones al establecer la relación y en la selección de los segmentos relevantes.

Respuesta de E12:

Figura 27

Respuesta de E12 en la tarea 3

Tarea 3

¿Qué relación existe entre k y $f(x+e)$ cuando $e \longrightarrow 0$?

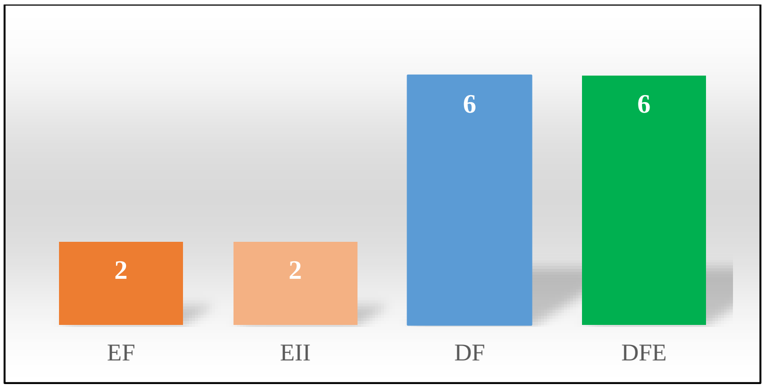
Aa π

Por la tarea 2 es una razón, observo que cuando e tiende a 0, k se aproxima f(x), coordenadas en el mismo punto B. Y obtengo la subtangente más reducible, es decir terminé comparando los segmentos (k y f(x)) y encuentro la misma longitud del segmento f(x)=k.

- **Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en la tarea 4**

Figura 28

Tipos de demostración en la tarea 4

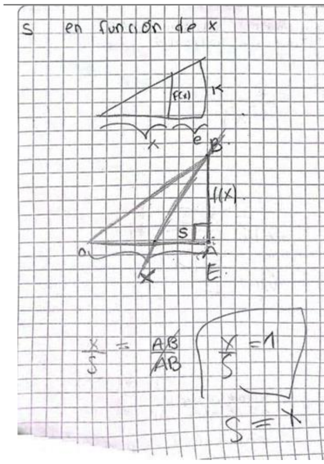


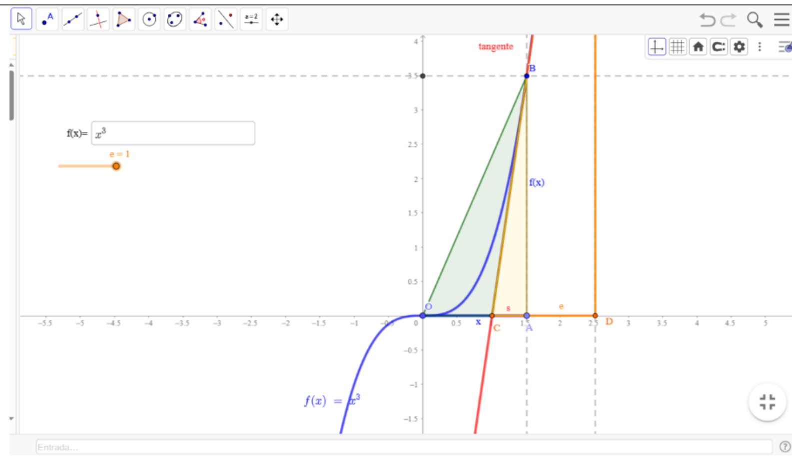
Los estudiantes que han construido una demostración de tipo **empirismo fallido (EF)** se destacan porque no comprenden la relación encontrada en la tarea 2 y 3, lo que les impide trasladar esta información a esta tarea, lo cual los lleva a realizar manipulaciones sin sentido para acomodar la respuesta. Por ejemplo:

Tabla 35

Respuesta de E2 y E13 en la tarea 4

Respuesta de E2 y E13





Aunque lograron plantear la relación de semejanza en la tarea 2, en la ilustración se evidencia nuevamente que no comprendieron lo que estaban afirmando, pues tomaron el triángulo $\boldsymbol{OCB}$ y $\boldsymbol{CAB}$, y, asumieron que $\frac{\boldsymbol{OA}}{\boldsymbol{CA}} = \frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{AB}}$, de lo que obtienen que $\frac{\boldsymbol{OA}}{\boldsymbol{CA}} = \mathbf{1}$, es decir, $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{s}} = \mathbf{1}$, entonces $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{s}$, que casualmente coincide cuando $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

Se evidencia un error grave de tipo inferencias no válidas lógicamente (INV), al asumir que $\boldsymbol{OCB}$ y $\boldsymbol{CAB}$ son triángulos semejantes y datos mal utilizados (DMU) al hacer manipulaciones algebraicas que carecen de sentido. Esto muestra dificultades relacionadas con los procesos de pensamiento matemático (PPM), en cuanto al proceso de representación ya que los estudiantes no logran entender ni identificar los triángulos semejantes en la construcción ni la subtangente.

Los intentos clasificados como **empirismo ingenuo inductivo (EII)** se deben a que los estudiantes no utilizan la relación de semejanza, sino que su único elemento de convicción es un ejemplo específico, en el que modifican el exponente de la función y observan la relación en el applet. Para ello, emplean la herramienta –*distancia o longitud*- para comparar los segmentos $CA = s$ y $OA = x$, o simplemente hacen estimaciones visuales. Por ejemplo:

Figura 29

Respuesta de E8 en la tarea 4

Tarea 4

Encuentre s en función de x cuando $e \longrightarrow 0$ y justifique su respuesta.

Aa π

Cuando e tiende a cero para f(x)=x, x=s, para f(x)=x a la 2, x= 2s, para f(x)= x a la 3, x = 3s, y al parecer de acá en adelante se mantiene esta relación, es decir para cuando f(x)= x a la n entonces x = ns, todos estos datos que tome los observe haciendo exploración en geogebra, cambiando de exponente a la función

Tabla 36

Respuesta de E9 en la tarea 4

Respuesta de E9

s en función de x cuando $e \to 0$

$x = \overline{OA}$ $\quad f(x) = \overline{AB}$

$\frac{x}{2} = s = \overline{CA}$

$\frac{x}{2} = \overline{CA}$

Para $f(x) = x^2$

Con Geogebra notamos que $s = \frac{x}{2}$ y manteniendo x y $f(x)$, tenemos $s = \frac{x}{2}$ y $f(s) = f(\frac{x}{2})$

Para $f(x) = x^3$

Notamos que $s = \frac{x}{3}$ $\quad f(s) = f(\frac{x}{3})$

Para $f(x) = x^4$

Notamos que $s = \frac{x}{4}$ $\quad f(s) = f(\frac{x}{4})$

Es decir que para cualquier x^n, $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $s = \frac{x}{n}$ y $f(s) = f(\frac{x}{n})$.

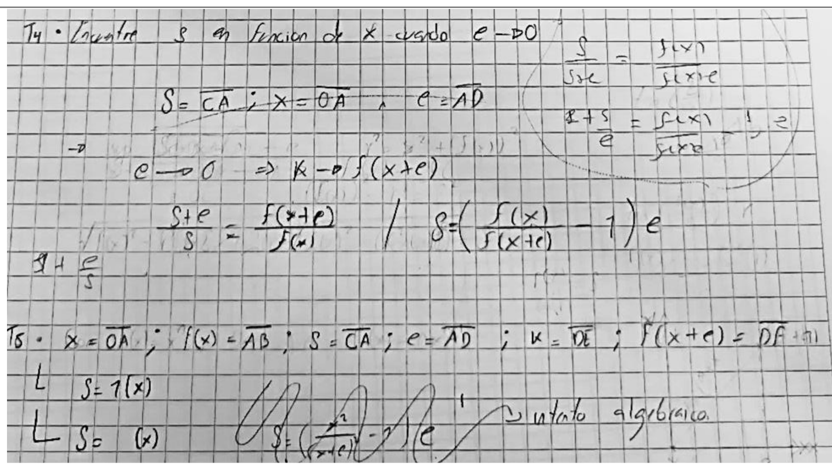
Las respuestas muestran que el applet les permite recopilar datos al explorar distintas funciones, pero su único elemento de validación es lo evidenciado en GeoGebra. A partir de este procedimiento inductivo aplicado a algunas funciones, conjeturan que si $\boldsymbol{f(x) = x^n}$, entonces $\boldsymbol{x = ns}$ ***o*** $\boldsymbol{s = \frac{1}{n}x}$. Estos casos confirman que la manipulación del applet y el uso de herramientas como distancia facilitan la identificación de patrones y la formulación de conjeturas mediante un enfoque inductivo. Se evidencian dificultades de tipo procesos de pensamiento matemático (PPM) en cuanto a la comprensión de los elementos y conceptos del applet: no logran integrar diferentes representaciones, pues encuentran que los triángulos son semejantes de manera geométrica, pero no logran establecer la proporción entre sus lados, lo que les impide despejar el valor de $\boldsymbol{s}$ de manera algebraica. Prueba de ello, es el error de tipo datos mal utilizados (DMU) de E9 al hacer manipulaciones algebraicas que carecen de sentido cuando afirma que $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}}$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}}\right)$.

Las demostraciones de tipo **deductiva fallida (DF)** son intentos por despejar la subtangente, pero los estudiantes presentan dificultades de tipo **procesos de pensamiento matemático (PPM)** en la ejercitación, comparación y ejecución de procedimientos en cuanto a la manipulación algebraica. Por ejemplo:

Tabla 37

Respuesta de E4 en la tarea 4

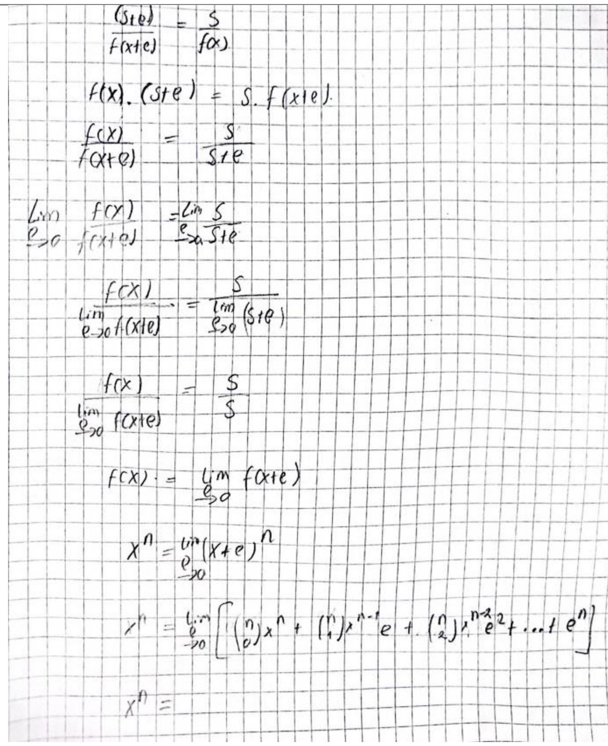
Respuesta de E4



Este estudiante no logra despejar $\boldsymbol{s}$ de manera correcta, mostrando poco dominio en operaciones algebraicas. Prueba de ello, es asumir que si $\frac{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{s}} = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e})}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$ entonces $\boldsymbol{s} = \left(\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e})} - \mathbf{1}\right)\boldsymbol{e}$. Se evidencia un error de tipo errores técnicos (ET) en la manipulación algebraica.

Tabla 38

Respuesta de E12 en la tarea 4

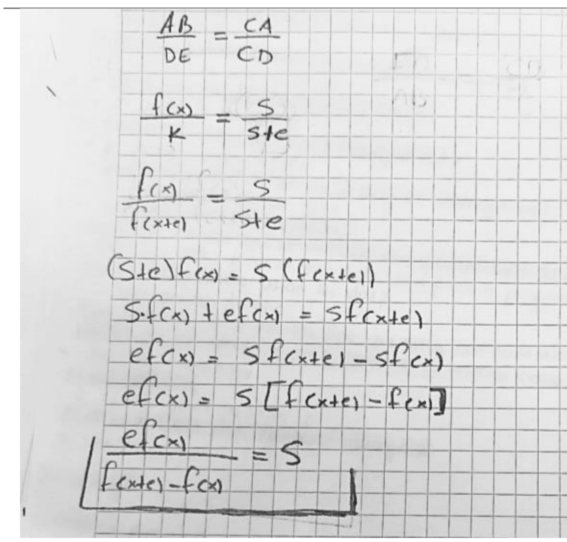
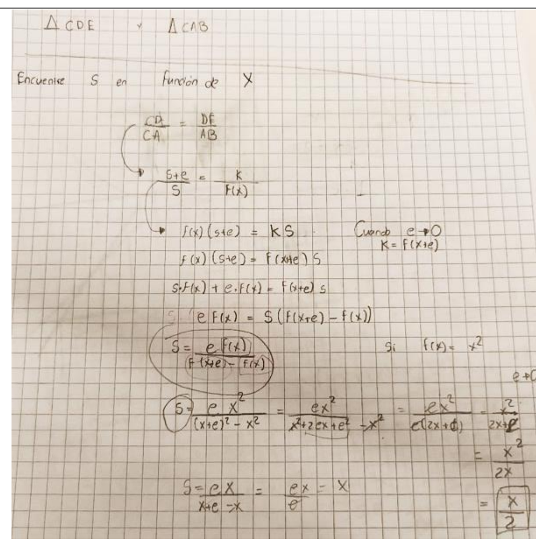
Respuesta de E12

E12, al plantear la semejanza, toma de manera incorrecta los lados de los triángulos $\frac{s}{f(x)} = \frac{e}{f(x+e)}$, evidenciando así un error de tipo teoremas o definiciones deformadas (TD). Aunque más adelante logra corregirlo, inicialmente intenta despejar s de forma general sin éxito, evidenciando **dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos (COM)**, en cuanto al concepto de límite, al no comprender cuándo hacer que el valor infinitesimal tienda a cero y asociadas a los procesos de pensamiento matemático (PPM) en la ejercitación, comparación y ejecución de procedimientos al presentar problemas en la manipulación algebraica. Su objetivo era despejar la subtangente, pero termina usando

otros recursos como el teorema del binomio de Newton, que no lo conducen a la conclusión que buscaba.

Las demostraciones de tipo **deductiva formal estructural (DFE)** se caracterizan porque los estudiantes lograron responder de manera correcta en la tarea 2 y 3, y trasladaron adecuadamente esa información a esta tarea. Además, despejaron correctamente el valor de la subtangente, mostrando una buena coordinación entre lo geométrico y lo algebraico. Por ejemplo:

Tabla 39

Respuesta de E1 y E6 en la tarea 4

Respuesta de E1	*Respuesta de E6*
	

Complemento de E6

Tarea 4

Encuentre s en función de x cuando $e \longrightarrow 0$ y justifique su respuesta.

A partir de la semejanza de triangulos planteamos la proporcionalidad CD/CA =DE/AB al reescribirlo queda (s+e)/s = k/f(x) , al momento de despejar obtenemos la s de la siguiente manera:

s=e*f(x)/k-f(x);)cuando e tiende a 0 k=f(x+e) entonces s=e*f(x)/f(x+e)-f(x)

Como f(x) =x^2 entonces s=e*(x^2)/(x+e)^2 - (x^2) al resolver la suma de cuadrados y operar términos obtenemos

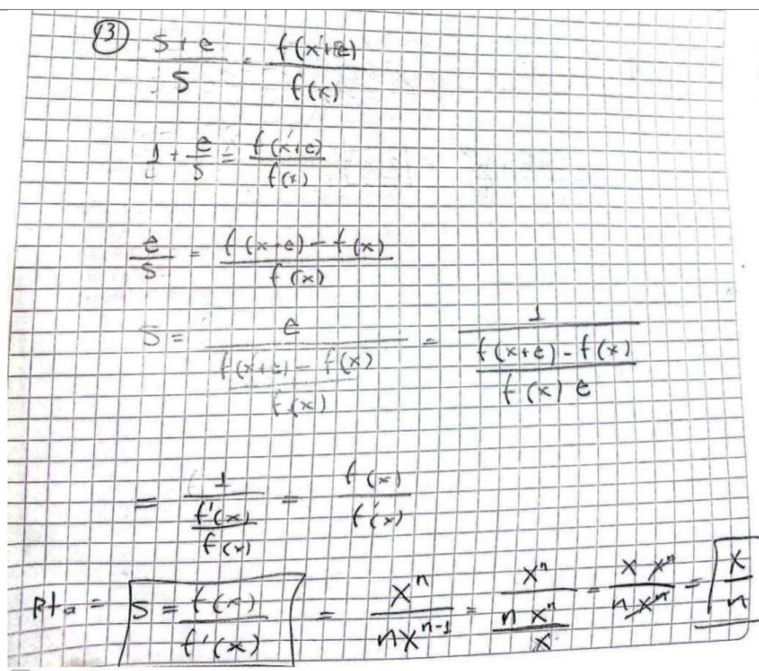
s=x^2/2x+e, nuevamente como e tiende a 0 S=x^2/2x s= x/2.

E6, además de despejar el valor de la subtangente de manera general, lo usa en un caso específico para $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.

Tabla 40

Respuesta de E16 en la tarea 4

Respuesta de E16



(13) $\frac{s+e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)}$

$\frac{s}{s} + \frac{e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)}$

$\frac{e}{s} = \frac{f(x+e) - f(x)}{f(x)}$

$s = \frac{e}{\frac{f(x+e) - f(x)}{f(x)}} = \frac{1}{\frac{f(x+e) - f(x)}{f(x)\, e}}$

$= \frac{1}{\frac{f'(x)}{f(x)}} = \frac{f(x)}{f'(x)}$

Rta = $\boxed{s = \frac{f(x)}{f'(x)}} = \frac{x^n}{n x^{n-1}} = \frac{x^n}{\frac{n x^n}{x}} = \frac{x\, \cancel{x^n}}{n \cancel{x^n}} = \boxed{\frac{x}{n}}$

E16 logra despejar de manera general el valor de la subtangente y, aunque no se pedía como tarea, descubre una relación con la definición de derivada como límite del cociente incremental, mediante manipulación algebraica. Con ello, plantea que $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})}$ y, generaliza que $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}}$ para $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$.

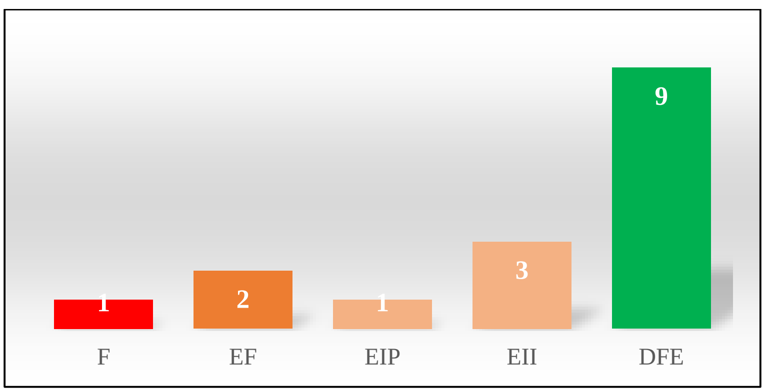
6.3. Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en las tareas del subcapítulo *Funciones potencia con n natural*

Se presenta el análisis de las producciones correspondientes a las tareas asociadas al caso n natural. Este análisis articula tres dimensiones: los tipos de demostración construidos por los estudiantes, los errores que emergen durante el desarrollo de los procedimientos y las dificultades.

- **Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en las tareas de encontrar y demostrar la relación entre s y x para n natural**

Figura 30

Tipos de demostración en la relación entre s y x para n natural



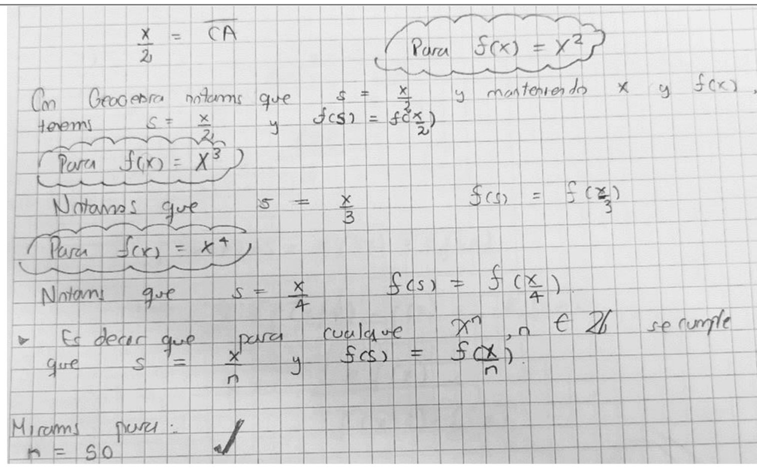
El estudiante que no plantea conjeturas ni construye ningún tipo de demostración para la relación entre s y x, se clasifica en la categoría de demostraciones **fallidas (F).**

Los estudiantes que construyeron demostraciones de tipo **empirismo fallido (EF)**, se destacan por plantear una conjetura correcta, pero no hay evidencia de haber encontrado los valores por un proceso propio, posiblemente ya conocían la respuesta o la encontraron por prueba y error y el software se la validó. Luego, al intentar justificar, realizan manipulaciones sin sentido o procesos algebraicos mal hechos para acomodar la respuesta, lo que evidencia que no comprendieron ni plantearon correctamente la relación de semejanza. Por ejemplo:

Tabla 41

Respuesta de E9 para la subtangente con n natural

Respuesta de E9



$\frac{x}{2} = \overline{CA}$

Para $f(x) = x^2$

Con Geogebra notamos que $s = \frac{x}{2}$ y manteniendo x y $f(x)$, tenemos $s = \frac{x}{2}$ y $f(s) = f(\frac{x}{2})$

Para $f(x) = x^3$

Notamos que $s = \frac{x}{3}$ $f(s) = f(\frac{x}{3})$

Para $f(x) = x^4$

Notamos que $s = \frac{x}{4}$ $f(s) = f(\frac{x}{4})$

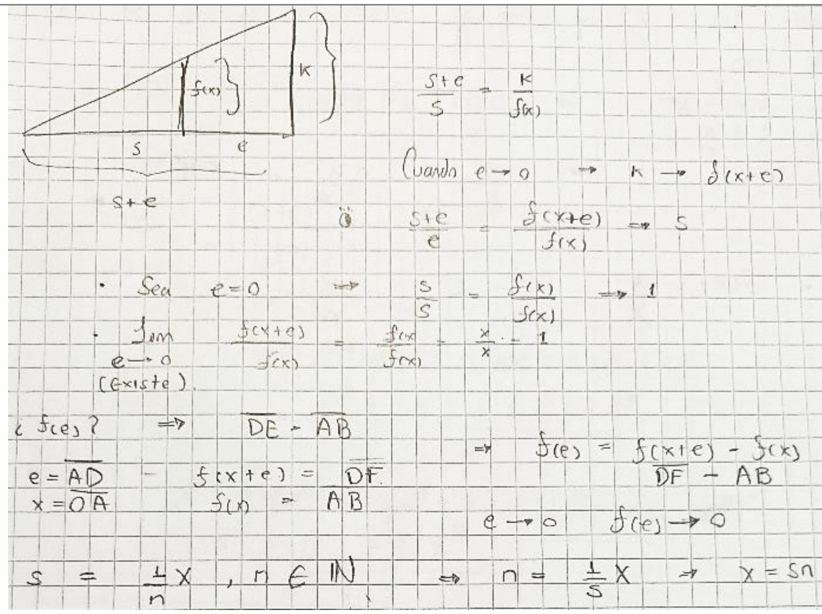
Es decir que para cualquier x^n, $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $s = \frac{x}{n}$ y $f(s) = f(\frac{x}{n})$.

Miramos para:
$n = 50$

Encuentre s en función de x cuando $e \longrightarrow 0$ y justifique su respuesta.

Aa π

s=x/n , para n que pertenece a los N
f(s)=f(x/n)
Notamos que cuando tiende a 0 se mantiene el segmento CA y podemos mirar la proporcionalidad de esos segmento con x



En tareas anteriores, el estudiante plantea una conjetura correcta, mediante un razonamiento inductivo visualizando la relación para distintos casos de $\boldsymbol{n}$. En esta tarea, intenta justificar su conjetura, pero sólo realiza manipulaciones algebraicas como *"sea* $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \ \rightarrow \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{s}} = \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{f(x)}} \rightarrow \boldsymbol{1}$*"* para encontrar una manera de acomodar la relación y obtener que $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{1}$, que es la respuesta al validar en la casilla de entrada pero, la relacion que debia obtener es $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{1x}$ para el caso de $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{x}$. Esto revela errores de tipo datos mal utilizados (DMU), al incluir datos extraños y realizar manipulaciones que carecen de sentido. Se evidencian dificultades de tipo complejidad de los objetos matemáticos (COM) en la comprensión de la subtangente y en cuanto al concepto de límite al aplicarlo antes de terminar de despejar la expresión. Aunque esto lo lleva a obtener casualmente el valor correcto para la casilla de entrada, este enfoque podría generar dificultades al aplicar el procedimiento a otras funciones; y de tipo procesos de pensamiento matemático (PPM) en

la elaboracion, comparacion y ejercitacion de procedimientos al no lograr despejar el valor de $\boldsymbol{s}$.

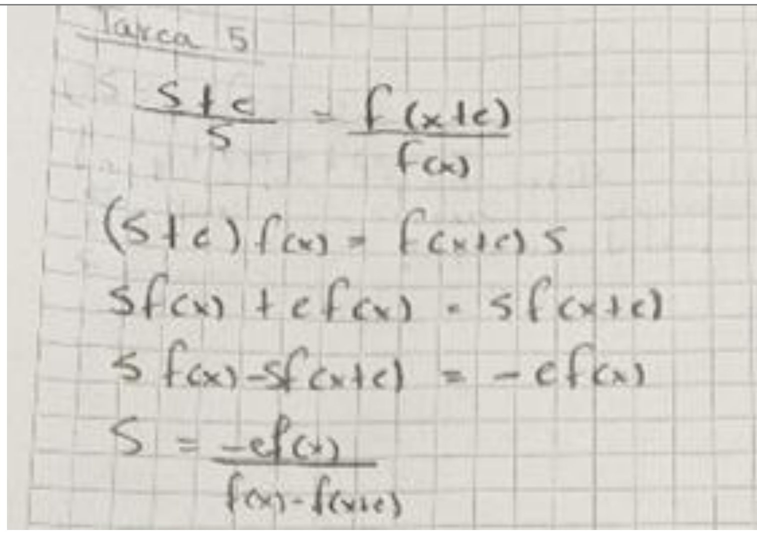
Las demostraciones de tipo **empirismo ingenuo inductivo (EII),** se destacan por plantear una conjetura correcta, usando valores particulares tomados del applet, pero sin justificar formalmente su hallazgo. Por ejemplo:

Tabla 42

Respuesta de E1 y E14 para la subtangente con n natural

Interacción entre el investigador, E1 y E14:
P: cuando $\boldsymbol{e}$ tiende a 0, ¿qué sucede? E1: $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{s}$ son iguales. P: En algunos casos, vamos a encontrar que hay una relación, por ejemplo, ¿ahí qué función es? (señala el applet) E14: $\boldsymbol{x^5}$ P: ¿Y la relación entre $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$ cuál es? E14: Yo vi que, por ejemplo, cuando nos pedían $\boldsymbol{f(x) = x}$, yo vi que $\boldsymbol{s = x}$, para $\boldsymbol{f(x) = x^2, s = \frac{1}{2}x}$, entonces es el recíproco, ¿no? P: Sí. E14: Con $\boldsymbol{x^5}$ sería $\boldsymbol{s = \frac{1}{5}x}$. P: Exactamente.
En el diálogo, se evidencia que los estudiantes encuentran de manera empírica dicha relación, pero en sus notas no registran si usaron esto para alguna función particular y mucho menos de manera general. Se destaca una dificultad de tipo procesos de

pensamiento matemático (PPM) en cuanto al concepto de subtangente, al no lograr establecer una conexión entre lo geométrico y lo algebraico, pues mostraron habilidades algebraicas al lograr despejar $\boldsymbol{s}$ (ver imagen), pero sin comprender el significado de este tratamiento.



Los estudiantes que construyen demostraciones de tipo **empirismo ingenuo perceptivo (EIP)**, plantean una conjetura correcta a partir de lo que observan en el applet. Su justificación se apoya únicamente en lo que "ven" o en mediciones y comparaciones realizadas. Por ejemplo:

Tabla 43

Respuesta de E12 para la subtangente con n natural

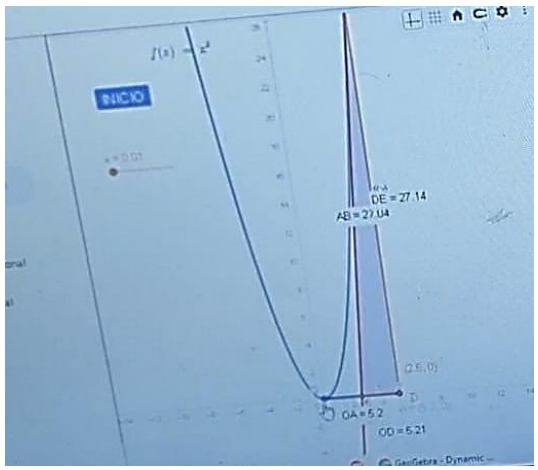
Interacción de E12 y el investigador para s de $\boldsymbol{f(x) = x^2}$
E12: Para $\boldsymbol{f(x) = x^2, s = x}$ P: ¿Seguro?, pero ahí están preguntando por $\boldsymbol{s}$. ¿Cuánto es $\boldsymbol{s}$? mueva sin miedo el punto A, ¿qué ve? (E12 mueve A)

P: ¿No encuentra ninguna relación entre $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$? Llévelo hasta 0.01 y atienda las preguntas que hay.

E12: "Halle s para $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ cuando $\boldsymbol{e \to 0}$", ¿será que ese es el punto medio de ese segmento?

P: ¿Sospecha eso?

(E12 observa que $\boldsymbol{x = OA = 5{,}2}$ y $\boldsymbol{s = CA = 2{,}6}$ usando la herramienta –*distancia o longitud*-)

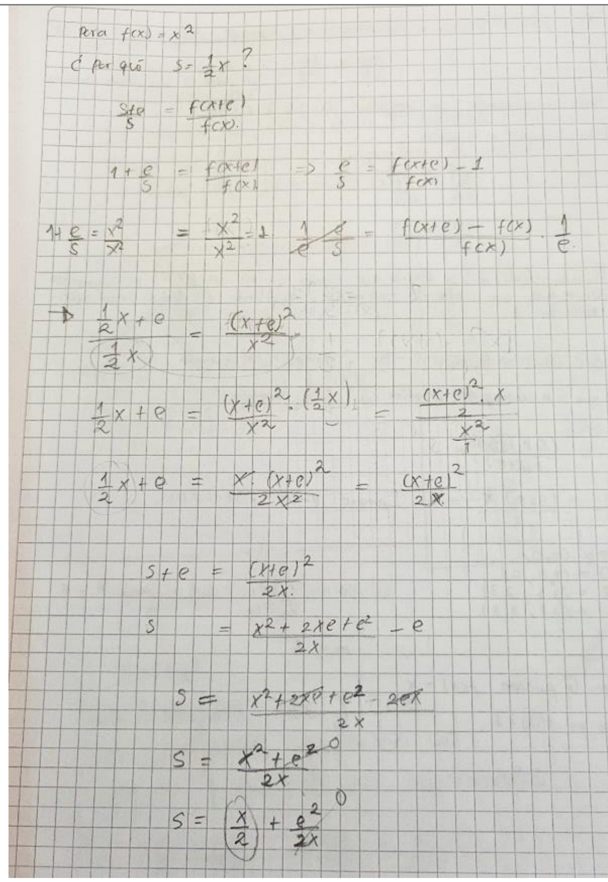


E12: Esta distancia cuando $\boldsymbol{e}$ tiende a cero, es la mitad de $\boldsymbol{x}$. (lo coloca en la barra de entrada y comprueba)

P: ¿Y por qué eso será $\boldsymbol{1/2}$?

(E12 mueve el punto A para ver el triángulo)

P: ¿Qué de lo que encontró antes, le sirve para asegurar completamente que $\boldsymbol{s = \frac{1}{2}x}$? Entonces escriba eso, ¿usted qué respondería a eso?



Para $f(x) = x^2$

¿Por qué $s = \frac{1}{2}x$?

$$\frac{s+e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)}$$

$$1 + \frac{e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)} \Rightarrow \frac{e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)} - 1$$

$$1 + \frac{e}{s} = \frac{x^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - 1 \quad \frac{1}{\cancel{e}} \frac{\cancel{e}}{s} = \frac{f(x+e) - f(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{e}$$

$$\frac{\frac{1}{2}x + e}{\frac{1}{2}x} = \frac{(x+e)^2}{x^2}$$

$$\frac{1}{2}x + e = \frac{(x+e)^2}{x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{\frac{(x+e)^2 \cdot x}{2}}{\frac{x^2}{1}}$$

$$\frac{1}{2}x + e = \frac{x \cdot (x+e)^2}{2x^2} = \frac{(x+e)^2}{2\cancel{x}}$$

$$s + e = \frac{(x+e)^2}{2x}$$

$$s = \frac{x^2 + 2xe + e^2}{2x} - e$$

$$s = \frac{x^2 + \cancel{2xe} + e^2 - \cancel{2ex}}{2x}$$

$$s = \frac{x^2 + e^2}{2x}$$

$$s = \frac{x}{2} + \frac{e^2}{2x}$$

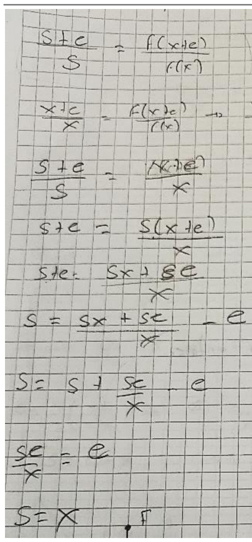
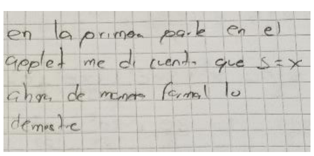
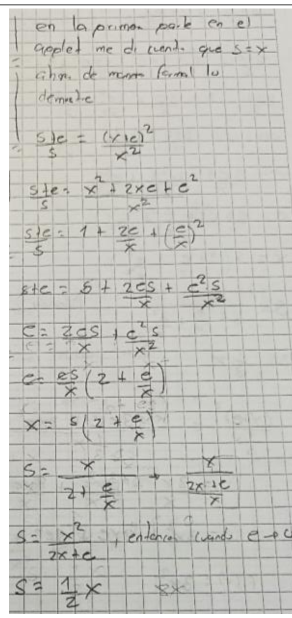
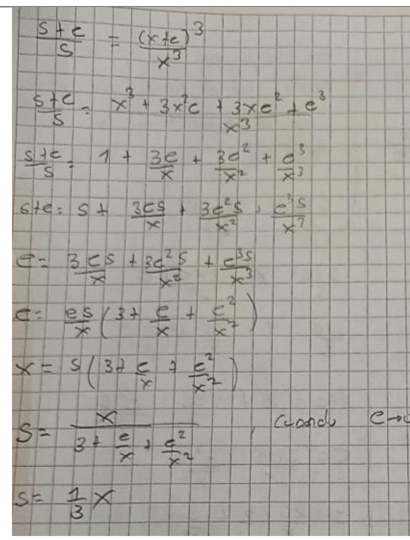
El estudiante, orientado por el investigador, encuentra la relación entre s y x, a paritr de un único caso particular visualizado en el applet, mediante la herramienta *distancia o longitud*. Luego, al intentar justificar esto, utiliza la relación de semejanza, pero comete errores técnicos (ET) en la ejecución del algoritmo para despejar s. Su razonamiento sigue siendo empírico, porque lo que hace finalmente es acomodar la expresión usando el valor conocido de la subtangente, para asimismo llegar a obtenerlo. Se evidencia una dificultad asociada a procesos de pensamiento matemático (PPM) en cuanto la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Y una dificultad asociada a complejidad de los objetos matemáticos (COM) al no lograr reestructurar el saber previo para posibilitar la construcción del nuevo concepto de subtangente.

Las demostraciones de tipo **deductiva formal estructural (DFE)** son construidas por estudiantes que lograron coordinar representaciones geométricas y algebraicas, usando la relación de semejanza para despejar el valor de la subtangente. Por ejemplo:

Respuesta de E3:

Tabla 44

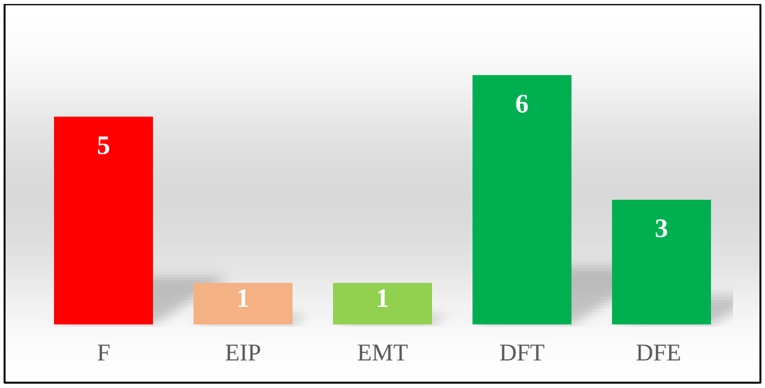
Respuesta de E3 para la subtangente con n natural

$\boldsymbol{s}$ para $\boldsymbol{f(x) = x}$	$\boldsymbol{s}$ para $\boldsymbol{f(x) = x^2}$	$\boldsymbol{s}$ para $\boldsymbol{f(x) = x^3}$
 		
El applet le permite descubrir que $\boldsymbol{s = x}$ para $\boldsymbol{f(x) = x}$, y lo demuestra utilizando la relación de proporcionalidad entre los triángulos semejantes. Realiza el mismo procedimiento para $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ y para $\boldsymbol{f(x) = x^3}$.		

- **Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en las tareas de demostración de la derivada para casos particulares de $\boldsymbol{n}$ natural**

Figura 31

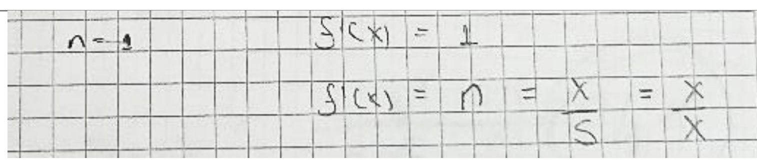
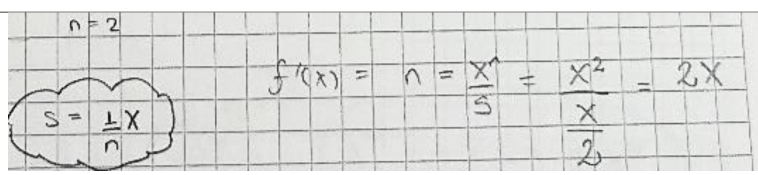
Tipos de demostración para las derivadas particulares con n natural

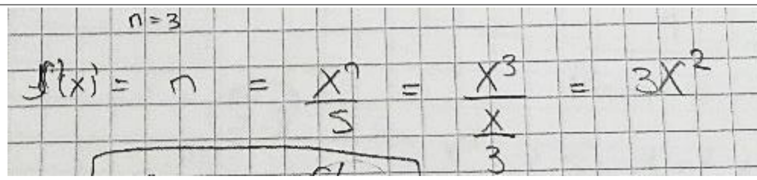


Los intentos que se clasifican como **fallidos (F)** se distinguen porque los estudiantes no plantean conjeturas ni construyen demostraciones. En el caso de que planteen conjeturas, no se evidencia ningún tipo de razonamiento. Al conocer el resultado al que deben llegar, realizan manipulaciones algebraicas, algunas sin sentido, acomodando los elementos para obtener la respuesta (E9 y E13). Por ejemplo:

Tabla 45

Respuesta de E9 en las derivadas con n natural

Respuesta de E9
$f'(x)$ *para* $f(x) = x$

$f'(x)$ *para* $f(x) = x^2$

$f'(x)$ *para* $f(x) = x^3$



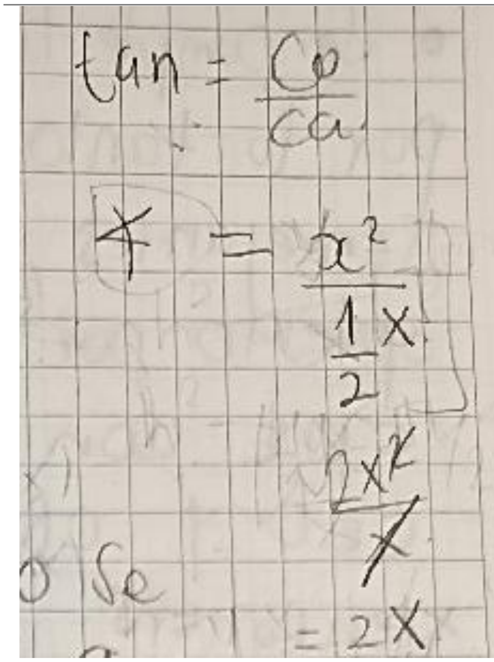
E9 usa $\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{s}}$ para encontrar la derivada de algunas funciones particulares, pero no queda claro de dónde surge esa afirmación, lo que debilita su intento de demostración. Además, afirma que $\boldsymbol{f'(x) = n = \frac{x^n}{s}}$, un error de tipo datos mal utilizados (DMU) al asignar a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado.

Al no justificar en sus notas este hallazgo, se sospecha que las respuestas del estudiante son influenciadas por las interacciones de sus compañeros. Por ello, se refleja una dificultad de tipo procesos de pensamiento matemático (PPM) al no lograr conectar lo geométrico con lo algebraico.

Tabla 46

Respuesta de E13 en las derivadas con n natural

Respuesta de E13



E13 intenta usar la razón tangente en el triángulo rectángulo para construir la demostración de la regla de derivación, pero se evidencia que no comprende la diferencia entre la tangente de un ángulo y el ángulo al escribir erróneamente que para $f(x) = x^2$, $\measuredangle = \frac{x^2}{\frac{1}{2}x}$, lo que demuestra que no comprende en su totalidad el procedimiento llevado a cabo, sino que todo ha sido producto de la ayuda o del procedimiento de sus compañeros. Se revela un grave error de tipo teoremas o definiciones deformadas (TD) al escribe que tan$=\measuredangle$. Esto demuestra una dificultad de tipo complejidad de los objetos matemáticos (COM) en las razones trigonométricas, al no comprender qué significa la razón tangente en un triángulo rectángulo.

El intento clasificado como **empirismo ingenuo perceptivo (EIP)** se destaca porque el estudiante plantea una conjetura de manera correcta, pero su justificación se basa únicamente en la visualización de los elementos del applet. Por ejemplo:

Tabla 47

Respuesta de E12 en las derivadas con n natural

Interacción entre el investigador y E12

P: ¿***s*** no les sirve para encontrar la pendiente, si sabe que *s* es *x*?

E13: Con teorema de Pitágoras, es un triángulo rectángulo.

P: *s* es una distancia, ya la tiene. Además, en este caso particular ya tiene la otra distancia, ¿cuál es?

E13: 3.3

P: Cuando *e* tiende a cero, en general para cualquier punto, no importa dónde esté, ¿cuánto vale ese segmento?

E13: Lo mismo que *x*, ¿o sea 1, como la comparación de esas dos magnitudes?

P: ¿Será que no pueden usar esa comparación? La pendiente de una recta, ¿cómo se puede hallar?

E13: Dados dos puntos, tomando las coordenadas y, las resta, digamos, también termina siendo una razón de estas coordenadas.

P: ¿y en ese caso particular?, ¿cuánto mide ese segmento?

E13: 3.3

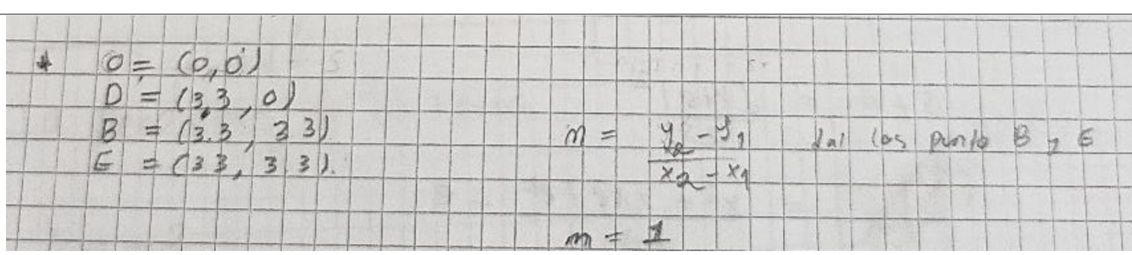
P: En general, ¿cuánto mide ese segmento? Muevan y verán que eso no importa.

(E13 mueve *e*)

P: No, mueva el punto *A*, ¿qué es lo que ve ahí?

E13: Es claro que esos segmentos son iguales, es 1.

Respuesta de E12



Mediante la exploración del applet para $\boldsymbol{f(x) = x}$, el estudiante se da cuenta que la derivada es igual a 1, pero al preguntársele por qué es este valor, toma la longitud de $\boldsymbol{s = 3.3}$ y manifiesta que el otro segmento también mide lo mismo. En la intervención con el investigador, se le cuestiona si esa relación es igual para cualquier valor de A y el estudiante menciona el Teorema de Pitágoras, que no tiene sentido en este contexto, reflejando un error de tipo inferencias no válidas lógicamente (INV).

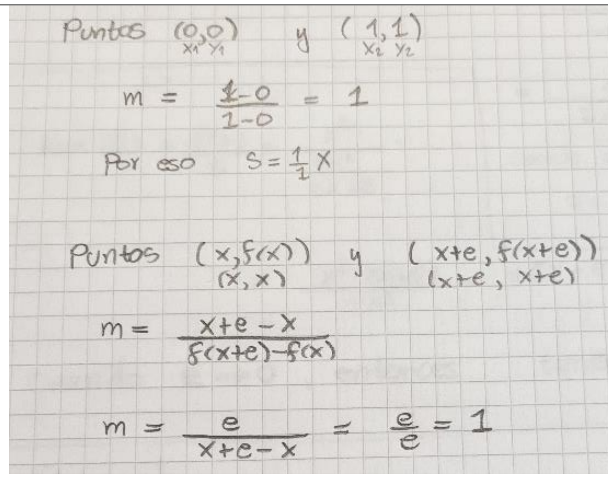
Guiado por preguntas orientadoras por parte del investigador, concluye que puede usar la pendiente de la recta tangente para su demostración, pero recurre a la fórmula tradicional de encontrar la pendiente a una recta por dos puntos, lo cual no era necesario porque ya tenía los valores de manera general. Para encontrar la pendiente, usa los mismos valores particulares (ver imagen). Se evidencian dificultades asociadas a procesos de pensamiento matemático (PPM) al no lograr coordinar representaciones geométricas, métricas y algebraicas.

El **experimento mental transformativo (EMT)** se caracteriza porque el estudiante usa un ejemplo particular mediante la ecuación punto- pendiente y luego lo abandona, con el fin de organizar los pasos de su demostración:

Tabla 48

Respuesta de E15 en las derivadas con n natural

Respuesta de E15



Puntos $(0,0)$ y $(1,1)$

$x_1\ y_1 \qquad x_2\ y_2$

$m = \frac{1-0}{1-0} = 1$

Por eso $S = \frac{1}{1}x$

Puntos $(x, f(x))$ y $(x+e, f(x+e))$

$(x, x) \qquad (x+e, x+e)$

$m = \frac{x+e-x}{f(x+e)-f(x)}$

$m = \frac{e}{x+e-x} = \frac{e}{e} = 1$

Para $\boldsymbol{f(x) = x}$, E15 utiliza un ejemplo con la ecuación punto- pendiente tomando los puntos $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$, procedimiento que le ayuda a entender y organizar los pasos de su demostración. Así, abandona este ejemplo particular y constuye su demostración.

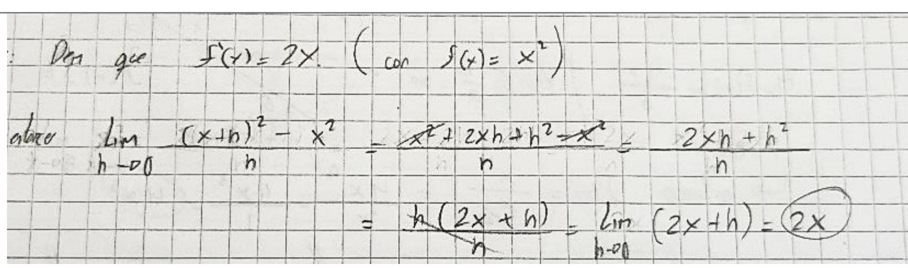
Las demostraciones de tipo **deductiva formal transformativa (DFT)** se reconocen porque los estudiantes transforman el problema de demostrar la derivada usando las ideas de Fermat, en uno equivalente, como la definición de derivada com límite del cociente incremental. Por ejemplo:

Tabla 49

Respuesta de E4 en las derivadas con n natural

Respuesta de E4

$\boldsymbol{f'(x)}$ *para* $\boldsymbol{f(x) = x^2}$:

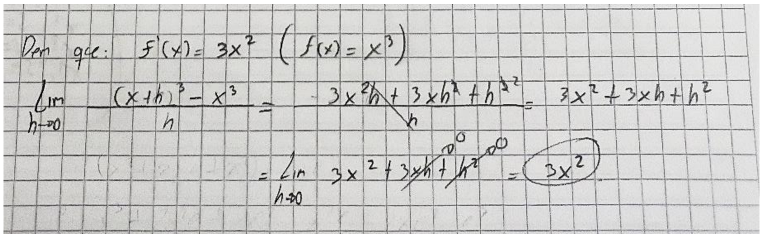


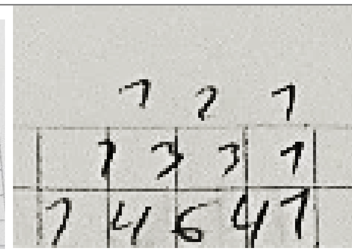
Dem que $f'(x) = 2x$ (con $f(x) = x^2$)

ahora $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \frac{2xh + h^2}{h}$

$= \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$

$\boldsymbol{f'(x)}$ *para* $\boldsymbol{f(x) = x^3}$:





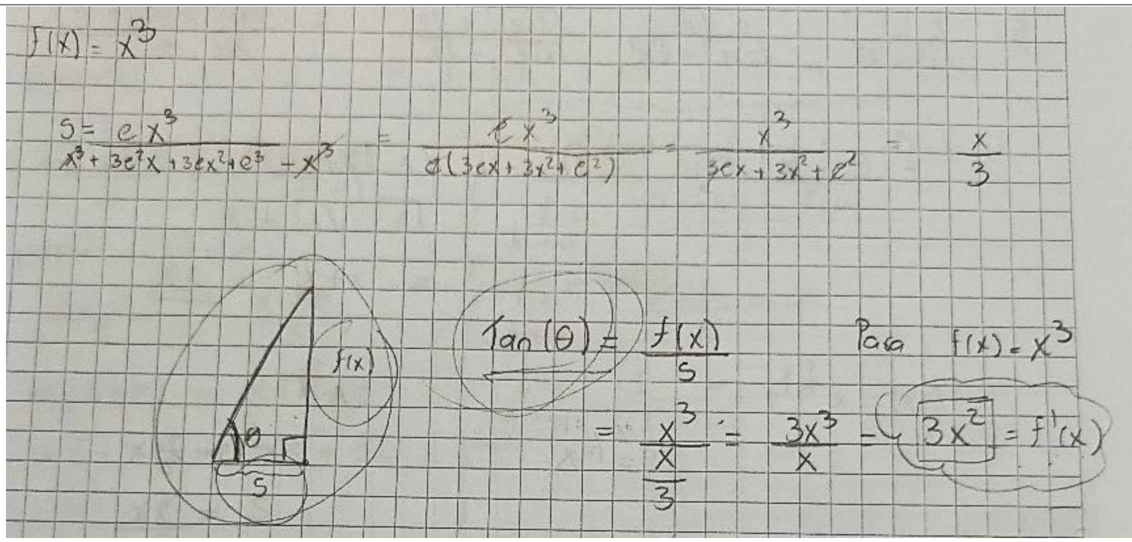
Para $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ ***y*** $\boldsymbol{f(x) = x^3}$, el estudiante construye la demostración de la derivada usando la definición como límite del cociente incremental, porque es lo que conoce, transformando el problema en uno equivalente, pues en este caso, se toman dos puntos sobre la curva y no sobre la tangente, como lo suponía Fermat. Aunque la demostración se puede categorizar como dedcutiva, este hecho muestra una dificultad asociada complejidad de los objetos matemáticos (COM) dado que no logra reestructurar el saber previo para posibilitar la construcción de un nuevo conocimiento: acercase a la derivada mediante las ideas de Fermat. En este procedimiento también se destaca el uso del triángulo de Pascal, que le ayuda a expandir los binomios.

Los estudiantes que han construido demostraciones de tipo **deductiva formal estructural (DFE)** se reconocen por usar la relación entre los catetos del triángulo rectángulo mediante la $\tan\theta$ para construir su demostración. Por ejemplo:

Tabla 50

Respuesta de E6 en las derivadas con n natural

Respuesta de E6

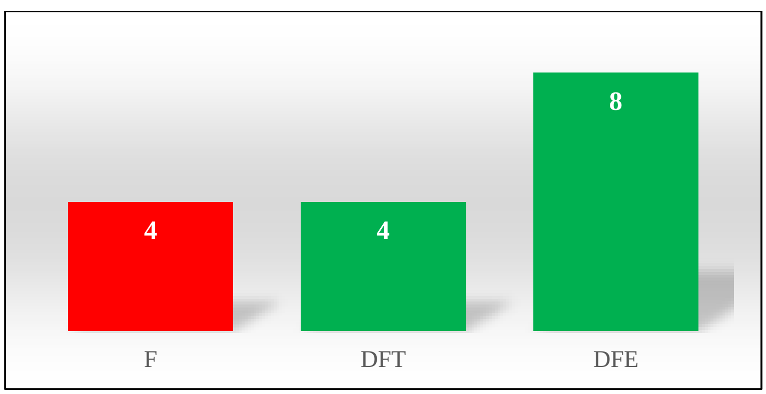


E6 toma uno de los triángulos rectángulos para encontrar la derivada de $\boldsymbol{f(x) = x^3}$, así: $\tan \boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{s}}$, haciendo uso de la subtangente, uno de los principales objetivos de las tareas propuestas,

- **Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en la tarea 6**

Figura 32

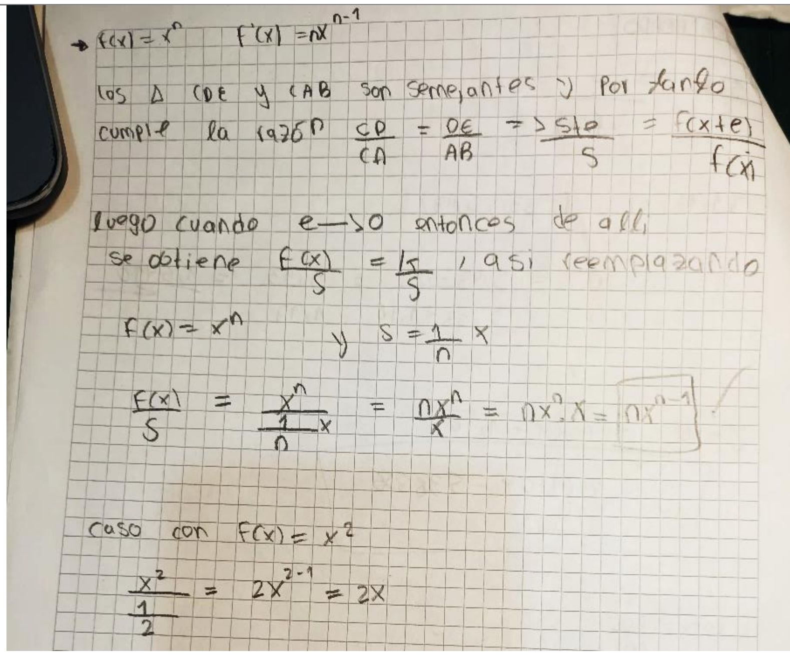
Tipos de demostración en la tarea 6



Se clasifica como demostracion **fallida (F)** cuando no existe ningun intento por validar la conjetura encontrada, o cuando no se plantea ninguna conjetura. O si existe un intento, éste no evidencia ningún tipo de razonamiento (E2 y E9). Por ejemplo:

Tabla 51

Respuesta de E2 en la tarea 6

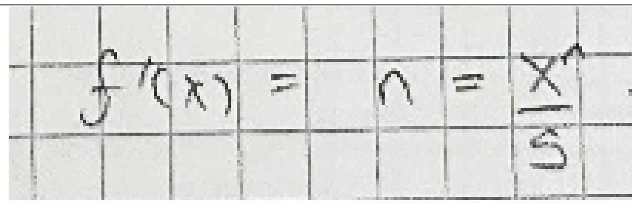
Respuesta de E2

No se evidencia que la estudiante plantee una conjetura para el valor de la subtangente. E2 intenta reformular lo que ha descubierto en tareas anteriores para darle validez y formalidad a su afirmación, pero no comprende correctamente lo que hace. Comete errores de tipo inferencias no válidas lógicamente (INV), al asumir que de la relación de semejanza se cumple algo cuando $\boldsymbol{e}$ no tiende a 0 y luego afirmar que, cuando $\boldsymbol{e}$ tiende a 0, se cumple $\frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{s}} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{s}}$, reemplazando posteriormente para obtener $\frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{s}} = \frac{\boldsymbol{x^n}}{\frac{1}{n}\boldsymbol{x}}$, expresión que en realidad surge de considerar $\tan\boldsymbol{\theta}$ en ese triángulo rectángulo. A pesar de haber trabajado con funciones particulares, no utiliza esos casos, ni organiza correctamente la información proporcionada por el applet. El estudiante no lee adecuadamente, no interpreta correctamente, y no se evidencia ningún tipo de razonamiento, lo que hace que su demostración se clasifique como fallida. Se observan dificultades en los procesos de

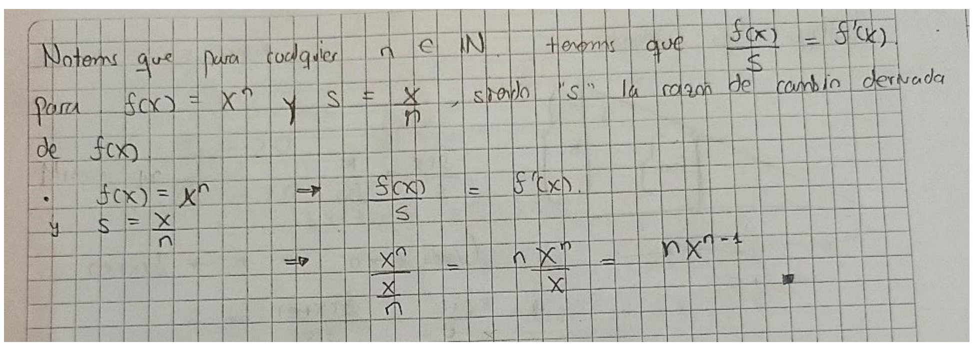
pensamiento matemático (PPM) al intentar conectar elementos geométricos con representaciones algebraicas y en la elaboracion, comparacion y ejercitacion de procedimientos.

Tabla 52

Respuesta de E9 en la tarea 6

Respuesta de E9





Como se ha analizado en la tarea anterior, para demostrar las derivadas particulares, E9 usa $\boldsymbol{f'(x) = \frac{f(x)}{s}}$, pero no queda claro de dónde surge esa afirmación, lo que debilita su intento de demostración. Además, afirma que $\boldsymbol{f'(x) = n = \frac{x^n}{s}}$, un error de tipo datos mal utilizados (DMU) al asignar a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado.

Al no justificar en sus notas este hallazgo, se sospecha que las respuestas del estudiante son influenciadas por las interacciones de sus compañeros. Por ello, se refleja una dificultad de tipo procesos de pensamiento matemático (PPM) al no lograr conectar lo geométrico con lo algebraico. A pesar de estas dificultades y errores, el estudiante logró construir la demostración de la derivada de manera general; pero no se evidencia ningún tipo de razonamiento para llegar allí, por eso, su intento se clasifica como fallido.

Las demostraciones de tipo **deductiva formal transformativa (DFT)** se destacan porque los estudiantes transforman el problema de demostrar la derivada usando las ideas de Fermat, en uno equivalente, como tomando dos puntos sobre la curva y no sobre la recta tangente. Por ejemplo:

Tabla 53

Respuesta de E1 y E14 en la tarea 6

Interacción entre el investigador, E1 y E14:
E1: Un profesor nos enseñó el machetazo que hacían en esa época de cómo encontrar la derivada. P: ¿Por qué machetazo? E1: Así lo decía el profesor, que todo lo que quedaba al final con Δx tendía a cero. P: Ah, lo hicieron de manera general. ¿Ya lo habían hecho para los casos particulares? E1: Sí. P: Bueno, eso sirve, ¿y por qué el profesor decía que eso es machetazo? E1: No sé, decía que lo que quedaba con Δx tendía a cero, entonces ese era como el machetazo y ya. P: Eso no es ningún machetazo. E1: ¿Cierto?, eso estábamos hablando.

P: Eso lo usó Fermat.

E1: Sí, para escribir una explicación, pero eso es lo que nos dijeron, que era un machetazo.

P: Pero, ¿qué tiene de particular ese $\Delta\boldsymbol{x}$? Y en el applet, ¿ese $\Delta\boldsymbol{x}$ quién es?

E1: Ese sería $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e})$ que siempre va a tender a cero.

P: ¿Quién tiende a cero?

E14: La *e*.

P: Eso ocurre porque $\boldsymbol{e} \to \boldsymbol{0}$, entonces para entender mejor el machetazo, si usando lo que el profesor de física les decía, ¿qué significa eso que ustedes tienen ahí? ($\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})$)

E14: El $\Delta\boldsymbol{x}$ era el pedacito de más que tenía…

P: Según el applet, ¿qué letra sería?

E14: *s*.

P: No.

E14: ¿$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e})$?

P: Sí, y si tiene la función $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$, ¿a qué es igual $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e})$?

E14: A $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}$.

P: No, usted tiene $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$, ¿a qué es igual $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e})$?

E14: ¿*s*?

P: No, escriba. ¿El $\Delta\boldsymbol{x}$ quién sería?

E14: El *e*.

P: O sea, ese Δx tal vez es un machete si el profesor no aclara que ese Δx es un valor pequeño, pero prácticamente es lo mismo, en términos de lo que está en el applet, y la demostración que ustedes hicieron que es correcta, ¿qué pasa si reemplazan Δx por e?

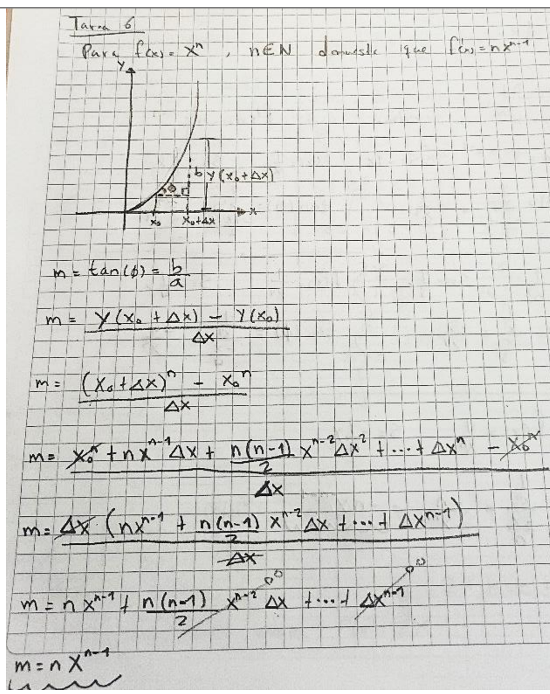
E14; ¿ Δx por e?, es lo mismo, ¿no?

P: Es lo mismo, pero en el denominador en lugar de Δx, ¿quién sería?

E1: *e*, era lo mismo como cuando uno hacía el límite,¿no?

P: Ahí estamos haciendo limites dinámicos en el applet.

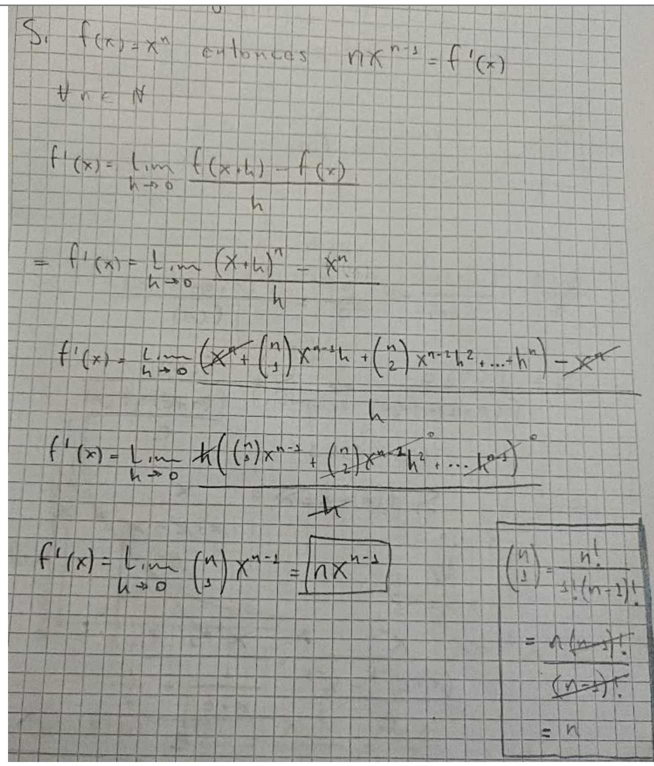
Respuesta de E1 y E14



Los estudiantes no usan lo encontrado en tareas anteriores, sino que transforman el problema en uno equivalente, dado que usan el enfoque de calcular la pendiente de la tangente a través de la pendiente de la recta secante, pues consideran los dos puntos sobre la curva, y no sobre la recta tangente, como lo suponía Fermat. Realizan procedimientos algebraicos y aplican el binomio de Newton. Demuestran una dificultad asociada a Procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas (EAM) pues su razonamiento es resultado de la forma como uno de sus profesores decidió abordar la derivada.

Tabla 54

Respuesta de E16 en la tarea 6

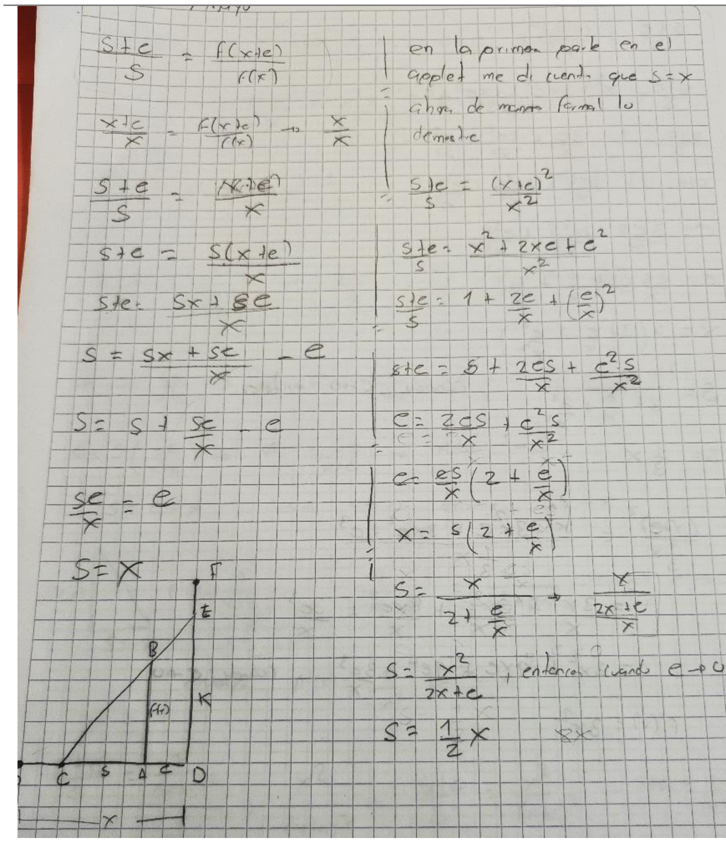
Respuesta de E16

Para construir la demostración de la derivada, usa la definición de derivada como límite del cociente incremental, transformando el problema en uno equivalente, dado que usa el enfoque de calcular la pendiente de la tangente a través de la pendiente de las secante, porque que considera los dos puntos sobre la curva, y no sobre la recta tangente, como lo suponía Fermat.

Quienes construyeron demostraciones de tipo **deductiva formal estructural (DFE)** se distinguen por usar la relación entre los catetos del triángulo rectángulo mediante la $\tan\theta$ para construir su demostración. Por ejemplo:

Tabla 55

Respuesta de E3 en la tarea 6

Respuesta de E3



$\frac{s+e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)}$

$\frac{x+e}{x} = \frac{f(x+e)}{f(x)} \rightarrow \frac{x}{x}$

$\frac{s+e}{s} = \frac{x+e}{x}$

$s+e = \frac{s(x+e)}{x}$

$s+e = \frac{sx+se}{x}$

$s = \frac{sx+se}{x} - e$

$s = s + \frac{se}{x} - e$

$\frac{se}{x} = e$

$s = x$

en la primera parte en el geoplet me di cuenta que $s = x$ ahora de manera formal lo demuestro

$\frac{s+e}{s} = \frac{(x+e)^2}{x^2}$

$\frac{s+e}{s} = \frac{x^2+2xe+e^2}{x^2}$

$\frac{s+e}{s} = 1 + \frac{2e}{x} + \left(\frac{e}{x}\right)^2$

$s+e = s + \frac{2es}{x} + \frac{e^2 s}{x^2}$

$e = \frac{2es}{x} + \frac{e^2 s}{x^2}$

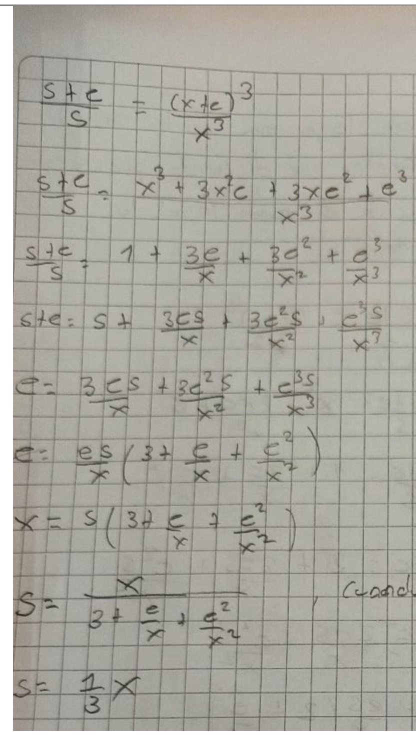
$e = \frac{es}{x}\left(2 + \frac{e}{x}\right)$

$x = s\left(2 + \frac{e}{x}\right)$

$s = \frac{x}{2+\frac{e}{x}} \rightarrow \frac{x}{\frac{2x+e}{x}}$

$s = \frac{x^2}{2x+e}$, entonces cuando $e \rightarrow 0$

$s = \frac{1}{2}x$



$\frac{s+e}{s} = \frac{(x+e)^3}{x^3}$

$\frac{s+e}{s} = \frac{x^3+3x^2e+3xe^2+e^3}{x^3}$

$\frac{s+e}{s} = 1 + \frac{3e}{x} + \frac{3e^2}{x^2} + \frac{e^3}{x^3}$

$s+e = s + \frac{3es}{x} + \frac{3e^2 s}{x^2} + \frac{e^3 s}{x^3}$

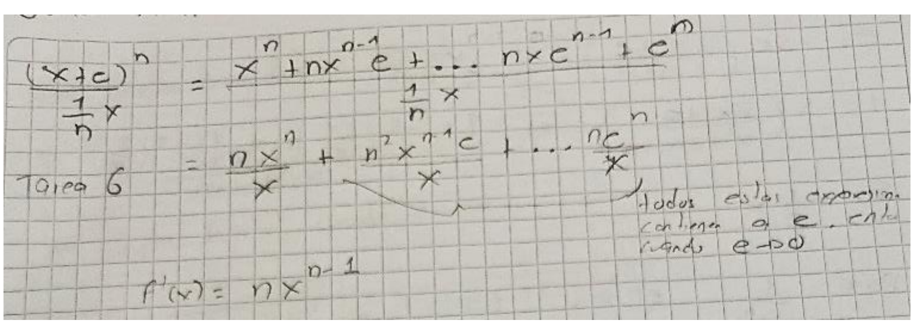
$e = \frac{3es}{x} + \frac{3e^2 s}{x^2} + \frac{e^3 s}{x^3}$

$e = \frac{es}{x}\left(3 + \frac{e}{x} + \frac{e^2}{x^2}\right)$

$x = s\left(3 + \frac{e}{x} + \frac{e^2}{x^2}\right)$

$s = \frac{x}{3+\frac{e}{x}+\frac{e^2}{x^2}}$, cuando

$s = \frac{1}{3}x$



$\frac{(x+e)^n}{\frac{1}{n}x} = \frac{x^n + nx^{n-1}e + \dots nxe^{n-1} + e^n}{\frac{1}{n}x}$

Tarea 6 $= \frac{nx^n}{x} + \frac{n^2x^{n-1}e}{x} + \dots \frac{ne^n}{x}$

todos estos expresiones contienen a e. cuando cuando $e \rightarrow 0$

$f'(x) = nx^{n-1}$

Como se analizó en la tarea de encontrar la relación entre $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$, E3 utiliza la relación de semejanza para despejar $\boldsymbol{s}$ en funciones particulares, lo cual le permite plantear una conjetura de manera general para la subtangente, que usa en esta demostración. Tiene en cuenta el triángulo $\boldsymbol{CDE}$ y toma $\frac{f(x+e)}{s}$ cuando $\boldsymbol{e} \to \boldsymbol{0}$ para hallar la tangente del triángulo y, con ello, encuentra $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x})$ de manera general, realizando correctamente procedimientos algebraicos.

El proceso que se presenta a continuación evidencia que, con la orientación del docente, fue posible guiar al estudiante hacia la comprensión de los elementos del applet y conceptos involucrados, así como hacia la construcción de demostraciones deductivas.

Tabla 56

Respuesta de E5

Interacción entre E5 y el investigador
Momento 1: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}$ P: ¿Qué pasó?, ¿sí es $\boldsymbol{s} = \frac{x}{2}$? E5: No. P: ¿Por qué no? E5: ¿No debería ser $\boldsymbol{2x}$? P: ¿Por qué $\boldsymbol{2x}$?, ¿quién es $\boldsymbol{s}$? (E5 señala la subtangente) P: ¿Y quién es $\boldsymbol{x}$? (E5 señala y se da cuenta que $\boldsymbol{x}$ es más grande que $\boldsymbol{s}$, luego introduce el valor en la casilla para comprobar)

P: ¿Por qué $\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}$?

E5: No profe, no me pregunte. Tengo que pensar.

P: Pero, ¿por qué pensar algo que…

E5: Profe, explíqueme.

P: No, yo no le puedo explicar, está prohibido, yo le puedo dar pistas como ahorita. Lo que encontró, o sea, ¿cómo supo que $\boldsymbol{s}$ era $\frac{1}{2}\boldsymbol{x}$?

E5: Pues eso (señala los segmentos)

P: ¿Y ahí, entonces, qué es lo que duda?

E5: Que no entiendo.

P: ¿No entiende qué?

E5: Como funciona realmente, ¿qué es $\boldsymbol{s}$?

P: $\boldsymbol{s}$ es la distancia desde el corte de la tangente hasta el punto A. ahora, ¿qué pasa cuando $\boldsymbol{e}$ tiende a 0? Pues que esos dos triángulos…

E5: Son semejantes.

P: Sí, prácticamente se vuelven el mismo cuando $\boldsymbol{e}$ tiende a 0, son semejantes. Entonces ¿qué es lo que no entiende?, ¿cuál es la duda?, ¿en el applet hay alguna duda de que $\boldsymbol{s}$ sea la mitad de $\boldsymbol{x}$?

E5: No.

P: Entonces, ¿cuál es la duda?

E5: Siento que hay algo que no estoy entendiendo.

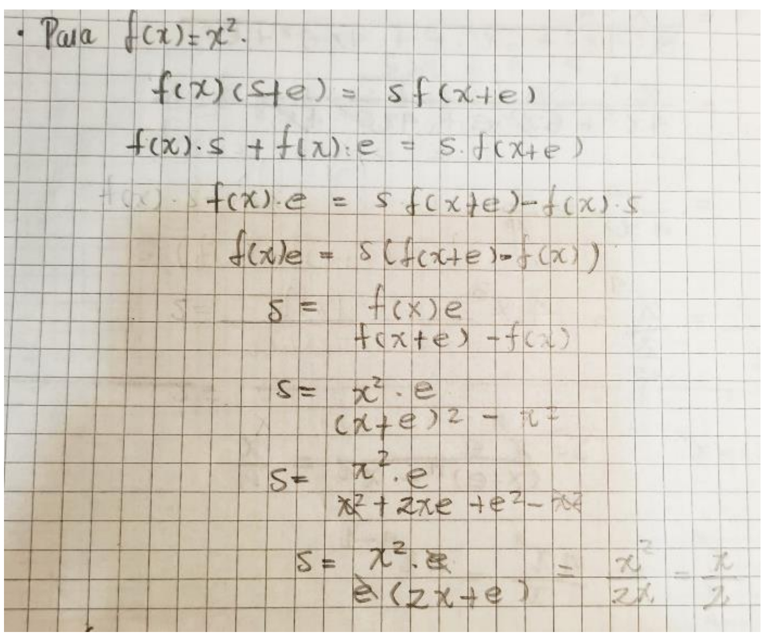
P: Bueno, o sea, póngalo hasta cero ($\boldsymbol{e}$), hasta casi cero. Ahí ya usted escribió que $\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}$ y entonces viene una pregunta y una demostración. La pregunta es: ¿por qué $\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}$?, usted puede responder esa pregunta.

E5: Eso es lo que no entiendo.

P: ¿Por qué no puede responder?

E5: Pues sí, algebraicamente lo entiendo, pero en el concepto de derivada siento que hay algo que no termino de entender.

P: Ahí solamente encontró la subtangente, no ha encontrado la derivada. O sea, ahora lo que hacía Fermat era encontrar la subtangente y usarla para encontrar la derivada. Entonces, ¿cómo usa la subtangente ahí para encontrar la derivada?, ¿hay alguna forma?



(E5 niega con la cabeza)

E5: Tengo que volver explorar la unidad, porque yo ahorita lo hice otra vez con el límite y no había usado eso.

P: Pues vuelva y revise las primeras ideas.

(E5 lee la introducción)

E5: Pues sí, ahí dice que se halla la subtangente, que es lo que yo tengo acá.

P: Ya encontró la subtangente, vuelva donde estaba trabajando. Entonces ahí ya usted encontró este valor (señala s) y ¿qué es la derivada geométricamente o cómo puede usted usar eso que acaba de encontrar?

E5: Ya tengo el tamaño.

P: Exactamente, ya sabe qué eso, ¿cuánto es?

E5: $\frac{1}{2}x$. Necesito es este (señala la recta tangente)

P: ¿Cuál?, ¿qué necesita?

E5: Pues la tangente.

P: La tangente, ¿cómo halla la tangente de ese ángulo?, ¿A qué sería igual la tangente de eso?

E5: O sea, ¿ahí yo podría usar Pitágoras?

P: ¿Para qué necesita Pitágoras?

(E5 señala los catetos)

P: O sea, ¿para encontrar esto? (señala los catetos) ¿y eso para qué le sirve para hallar la tangente?

E5: La derivada en ese punto.

P: ¿Qué es la derivada geométricamente?

E5: La pendiente de la recta tangente.

P: ¿Ahí cuál es la recta tangente?

(E5 señala la recta tangente)

P: Esa. ¿Usted teniendo esos datos que tiene, no puede encontrar esa pendiente?

E5: Sí.

P: ¿Cuál sería o cómo hallaría la pendiente?

E5: Me siento bruto.

P: No, le asusta la cámara, pero mire, no la estoy filmando a usted sino la pantalla para que no se asuste.

E5: La pendiente de esa recta.

P: Sí, ¿cuál es? Ahora, usted necesita hallar la pendiente de esa recta con lo que hay ahí. Si quiere mueva el punto $\boldsymbol{A}$ y eso es en cualquier caso, ¿sí? Inclusive puede pasar a los negativos sin miedo. Entonces, usted necesita encontrar la pendiente de esa recta, ¿cómo encuentra la pendiente de esa recta, para cualquier punto $\boldsymbol{x}$?

E5: Sería hallar dos puntos, ¿no?

P: ¿Qué es la pendiente en una recta?

E5: La razón de cambio.

P: ¿De qué?

E5: Pero es que no entiendo cómo podría yo usar puntos para hallar la pendiente.

P: No, es la pendiente de la recta. O sea, usted ya sabe qué es esto ($\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$) y qué es esto ($\boldsymbol{s}$). O sea, porque necesitaría usted encontrar dos puntos para hallar…

E5: Para hallar la razón de cambio, pero sí, pero ¿entonces esto, lo de s?, ¿para qué me sirve este tamaño entonces? Si yo puedo usar por lo menos estos dos puntos.

P: Pero eso ya de alguna manera lo usó para encontrar $\boldsymbol{s}$ y se dio cuenta que cuando $\boldsymbol{e}$ tiende a 0, ¿qué pasa aquí entre $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e})$?

E5: Tienden al mismo.

P: Sí, y eso le sirvió para encontrar $\boldsymbol{s}$, y ahora el problema ya lo tiene en parte resuelto. Geométricamente, entonces usted lo que necesita encontrar ahora la pendiente de esta recta, ¿sí? La roja, ¿cómo encuentra con lo que tiene ahí o a qué sería igual viendo ahí lo que está en el applet, la pendiente de esa recta tangente?

E5: No profe, no me da la cabeza.

P: ¿Qué es la pendiente de una recta?

E5: Es la razón e cambio, digamos que con estos dos puntos, yo podría hallarla.

P: ¿Con cuáles puntos?

(E5 señala el punto de corte de la tangente con el eje $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{E}$)

P: Bueno, pero usted de alguna manera sí los conoce, pero ¿no ve ahí?...

E5: No veo cómo puedo usar eso.

P: La razón, ¿la razón de cambio de qué? cuando usted dice la pendiente es la razón de cambio, ¿es la razón de cambio de qué?, ¿esa razón cómo se expresa? Si quiere escriba: $\boldsymbol{m} =$ a qué?

E5: ¿Con eso? $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e})\ldots$

P: Podría ser… ¿menos cuánto?

E5: 0, ¿no?

P: ¿Por qué 0?

(E5 señala en $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$)

P: Ahora sobre..

E5: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}-\boldsymbol{x}$

P: ¿Por qué?, ¿qué es $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}$?

(E5 señala)

P: De aquí hasta aquí (señala) es $\boldsymbol{x+e\ -0}$, listo, pero, ¿por qué le resta $\boldsymbol{x}$?

E5: Porque lo estaba haciendo con este punto ($\boldsymbol{x-s}$), pero no.

P: Por eso, o sea, es la diferencia en $\boldsymbol{y}$, la distancia que hay de acá hasta acá ($\boldsymbol{x}$) menos esta distancia ($\boldsymbol{s}$).

E5: Ah, es $\boldsymbol{\frac{x}{2}}$.

P: Termina siendo $\boldsymbol{\frac{x}{2}}$, pero realmente, de aquí hasta aquí hay $\boldsymbol{x}$ y de aquí hasta aquí, ¿cuánto hay?

E5: $\boldsymbol{\frac{x}{2}}$.

P: Entonces, ¿de aquí hasta aquí (que es lo que necesita) cuánto hay? $\boldsymbol{\frac{x}{2}}$, entonces l denominador es $\boldsymbol{\frac{x}{2}}$, todo.

E5: Ah sí, es la diferencia. Ah bueno, sí. Entonces al evaluar todo eso, me va a terminar dando la derivada.

P: Pero ¿a qué es igual $\boldsymbol{f(x+e)}$ cuando e tiende a 0?

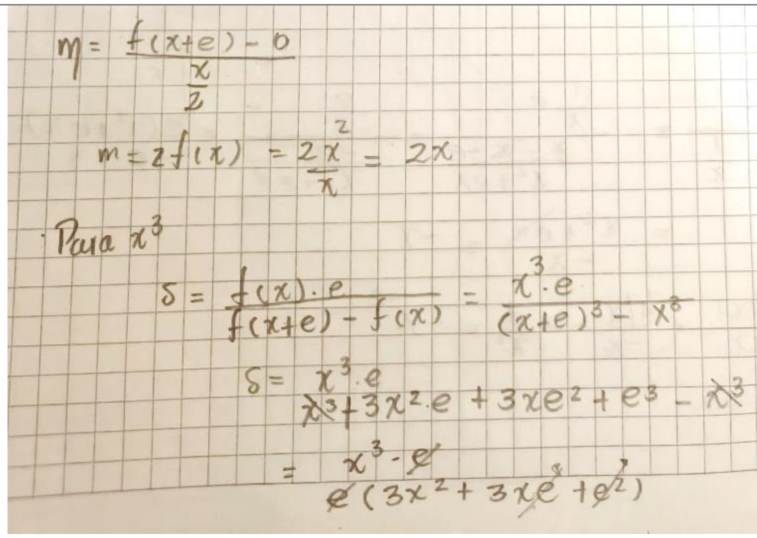
E5: Eso ya lo tenía.

P: Explore en el applet.

E5: A $\boldsymbol{f(x)}$.

P: Entonces sí puede poner eso, y ¿cuánto es $\boldsymbol{f(x)}$?

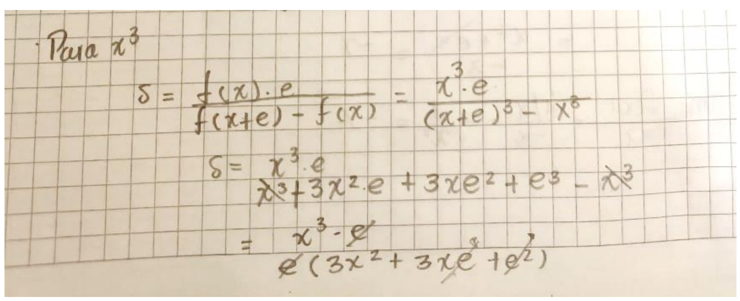
E5: $\boldsymbol{x^2}$. Genial, ahora sí.

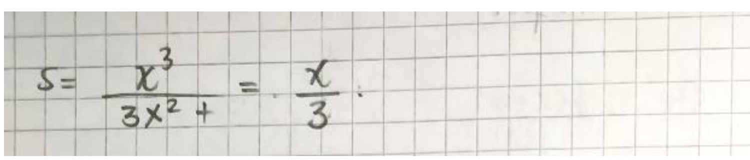


Segundo momento: $\boldsymbol{f(x) = x^3}$

P: ¿Por qué $\boldsymbol{s = \frac{1}{3}x}$?

E5: O sea, es una pregunta profunda, ¿no es sólo porque hice esto?





P: ¿Y por qué no puede ser eso? o sea, ¿sí es o no es?

E5: Sí es, por los cálculos sí es y según la imagen se nota.

P: ¿Se nota qué?

E5: Que el tamaño de s es $\boldsymbol{\frac{1}{3}x}$. Tiene sentido.

P: Tiene sentido, bueno, ¿y entonces?

E5: Ya puedo hallar la pendiente, $\boldsymbol{f(x+e)}$ lo puedo dejar como $\boldsymbol{f(x)}$.

P: Sí.

E5: Y la razón de cambio de $\boldsymbol{x}$.

P: ¿Quién es la razón de cambio de $\boldsymbol{x}$?

E5: De este punto C, hasta A. O sea, es $\boldsymbol{\frac{1}{3}x}$.

P: O sea, $\boldsymbol{s}$. ¿Por qué se dio cuenta que era $\boldsymbol{\frac{1}{3}x}$?

E5: Porque termina siendo la longitud de $\boldsymbol{s}$.

P: Entonces …

(E5 calcula la pendiente)

$$m = \frac{f(x)}{\frac{x}{3}} = \frac{3x^3}{x} = 3x^2$$

E5: Qué genial entender la derivada desde la pendiente, de esta forma sí se entiende cómo es, no sólo la definición.

P: Bueno, mire cómo le va entonces ahí. ¿Ya tiene sospechas?

E5: Para $\boldsymbol{f(x) = x^4}$, ¿eso va a ser una cuarta parte?

P: ¿Y por qué sospecha que va a ser eso?

E5: Eso lo sospecho por la gráfica y por los ejercicios que he hecho.

P: Mire a ver.

(E5 intenta calcular algebraicamente)

E5: Uy no, profe, pero esto ya no me lo sé.

P: ¿Qué pasa?

E5: Esto yo ya no me lo sé (el cuádruple del binomio)

P: ¿Qué pasa cuando uno no sabe?

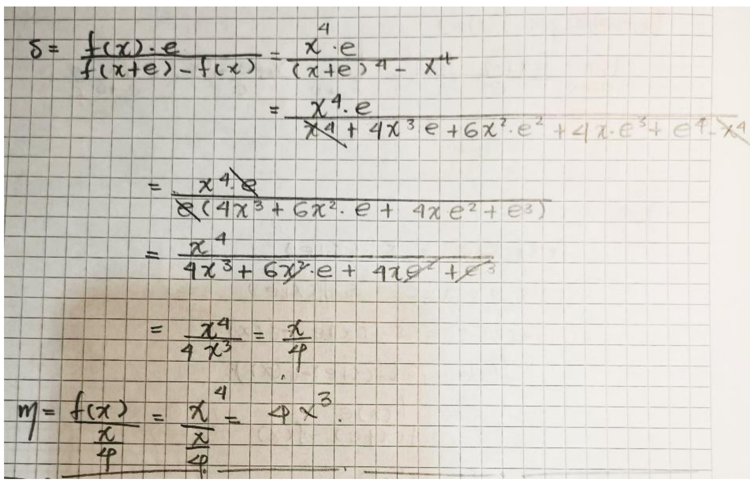
E5: Busca.

(E5 consulta en google)

P: Bueno, ahí ya sabe adónde va a llegar.

E5: A $\frac{x}{4}$.

P: Bueno, ahí lo dejo.



El estudiante, aunque inicialmente construye una demostración deductiva formal estructural (DFE) para $\boldsymbol{f(x) = x}$, no comprende qué es la subtangente, ni cómo utilizarla. Con la orientación del docente, logra interpretar las ideas presentadas en el applet y avanzar en la construcción de demostraciones deductivas formales estructurales con mayor comprensión. Se evidencian dificultades relacionadas con los procesos de pensamiento matemático (PPM), en particular en la coordinación de distintas representaciones; con la complejidad de los objetos matemáticos (COM), especialmente en torno al concepto de subtangente; y con las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas (AAE),

manifestadas al pedir ayuda, expresar frustración y dirigirse a sí mismo de manera negativa por no comprender.

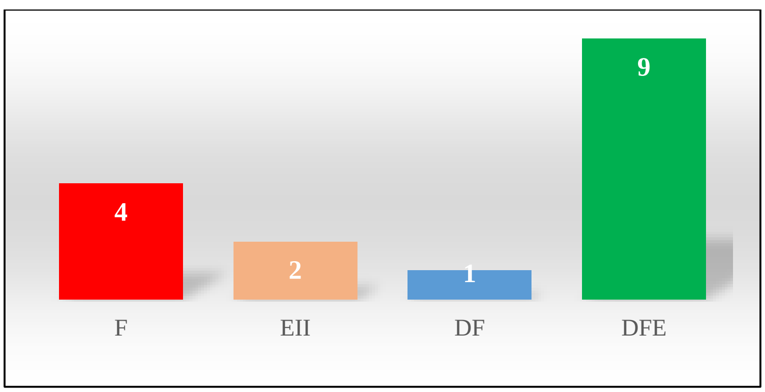
6.4. Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en las tareas del subcapítulo *Funciones recíprocas*

Se expone el análisis de las producciones correspondientes a las tareas relacionadas con el caso de las funciones recíprocas, el cual integra tres ejes: los tipos de demostración elaborados por los estudiantes, los errores que se manifiestan durante la resolución y las dificultades que surgen en el proceso.

- **Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en las tareas de encontrar y demostrar la relación entre s y x para funciones recíprocas**

Figura 33

Tipos de demostración en la relación entre s y x para n entero

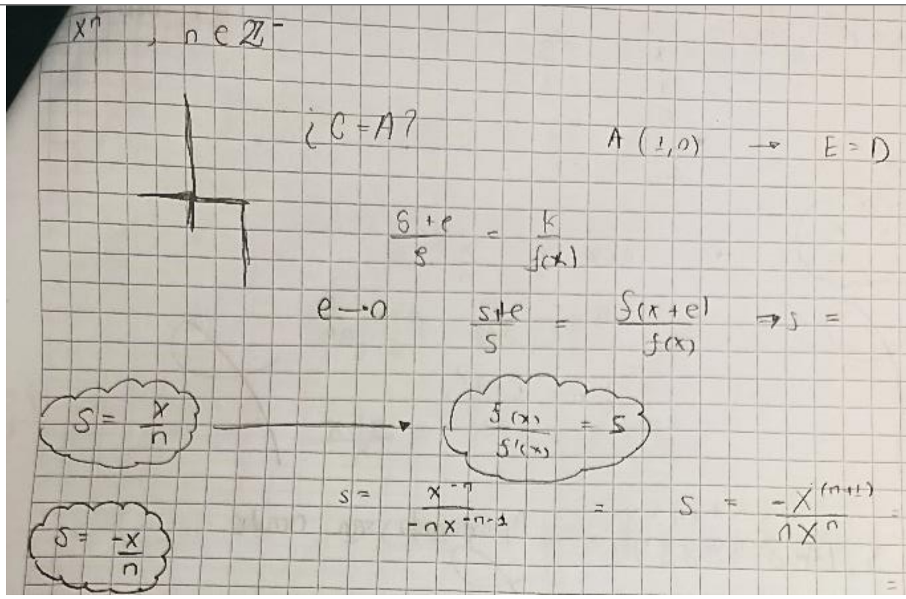


Los estudiantes que no plantean conjeturas ni construyen ningún tipo de demostración para la relación entre s y x, o bien, si lo intentan no se evidencia ningún tipo de razonamiento, se clasifican en la categoría de demostraciones **fallidas (F).**

Tabla 57

Respuesta de E9 para la subtangente con n entero

Respuesta de E9



El estudiante escribe el valor de la subtangente de manera general y plantea relaciones sin coherencia para acomodar esta respuesta, pero no se evidencia una exploración de los casos particulares ni ningún tipo de razonamiento para llegar allí. Existen errores de tipo datos mal utilizados (DMU) al hacer manipulaciones sin sentido y dificultades originadas en los procesos de pensamiento matemático (PPM) al coordinar diferentes representaciones y en la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos al no lograr despejar s.

Los intentos clasificados como **empirismo ingenuo inductivo (EII)** se destacan porque los estudiantes usan el applet para encontrar la relación, pero no se evidencia ningún intento por validarla. Por ejemplo:

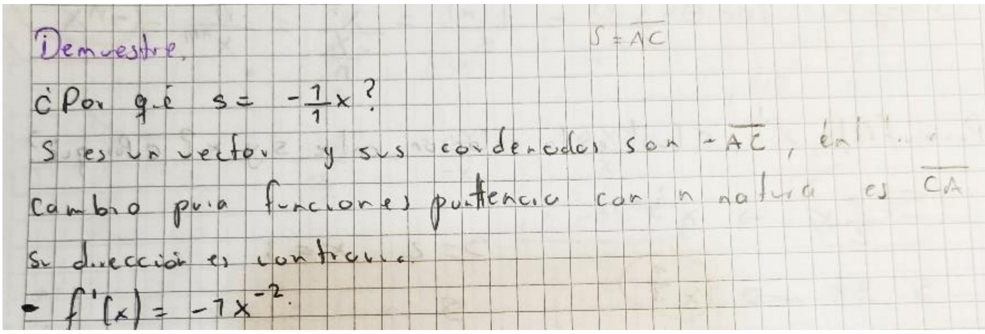
Tabla 58

Respuesta de E8 para la subtangente con n entero

Respuesta de E8

Encuentre s en función de x cuando $e \longrightarrow 0$ y justifique su respuesta.

Cuando e tiende a cero para f(x)=x, x=s, para f(x)=x a la 2, x= 2s, para f(x)= x a la 3, x = 3s, y al parecer de acá en adelante se mantiene esta relación, es decir para cuando f(x)= x a la n entonces x = ns, todos estos datos que tome los observe haciendo exploración en geogebra, cambiando de exponente a la función



Demuestre.

$S = \overline{AC}$

¿Por qué $s = -\frac{1}{1}x$?

S es un vector y sus coordenadas son $-\overline{AC}$, en cambio para funciones potencia con n natural es $\overline{CA}$ su dirección es contraria.

$f'(x) = -1x^{-2}$.

El estudiante, mediante la visualización de distintos valores de $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$ en el applet para funciones potencia con $\boldsymbol{n}$ natural, encuentra esta relación y usa este mismo razonamiento inductivo para funciones recíprocas, explicando que $\boldsymbol{s}$ es un vector y por eso es la misma longitud, pero en dirección contraria. Se evidencian dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático (PPM) en la coordinación de las representaciones geométricas y algebraicas, porque la visualización del applet le permite plantear una conjetura correcta pero no logra establecer relaciones para justificar esto de manera algebraica.

El intento clasificado como **deductiva fallida (DF)** porque se usa la relación de semejanza para despejar la relación, pero se presentan errores en la manipulación algebraica. Por ejemplo:

Tabla 59

Respuesta de E10 para la subtangente con n entero

Interacción entre el investigador y E10
Primer momento P: ¿Cuál es el lío?

E10: Es sobre el despeje.

P: ¿Cuánto le dio?

E10: Es que yo consideré otro triangulo.

P: ¿Cuál?

E10: Este, es lo mismo, ¿no?

P: Sí, porque son semejantes.

Pero yo no entiendo cuál es la duda.

(E10 señala)

E10: A mí me dio esto. Yo siento que algo está mal.

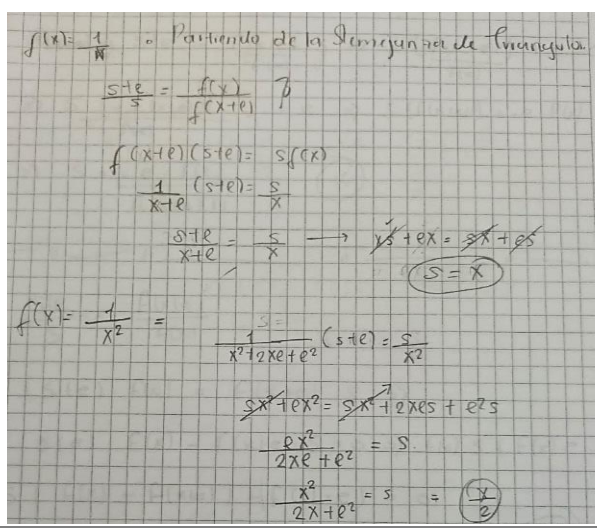
P: ¿Por qué?

E10: Si considero que $\boldsymbol{e}$ tiende a cero cuando $\boldsymbol{f(x) = x}$, entonces $\boldsymbol{s}$ me da 1.

P: Cuando e tiende a cero, ¿s sería 1 para el caso de $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$?

E10: Sí.

P: ¿Y está teniendo en cuenta los signos? No sería 1, será que el despeje… Bueno, veamos el applet. Por eso, ahí usted puso 1 y no funcionó, ¿seguro?, ¿hizo bien el despeje?, a ver, ¿cómo hizo? La función es $\boldsymbol{\frac{1}{x}}$, pero ojo, aquí solamente escribió $\boldsymbol{f(x+e)}$, ¿dónde está $\boldsymbol{f(x)}$?



(E10 explica el procedimiento de la imagen)

P: Tiene que hacer el producto porque todavía no ha calculado el límite. Despeje s. ¿Qué pasó?

E10: $\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{x}$. Es que aquí se ve en el applet que es 1, pero ¿por qué es -1?

P: Como la idea es usar lo que hizo Fermat, él solamente ponía un punto en la curva y asumía que existía la tangente y buscaba el otro punto abajo, entonces esta idea surge después como "oiga por que no suponemos los dos puntos sobre la curva" y usted tiene razón, mueva $\boldsymbol{e}$, pero ahí no es la recta tangente sino la recta secante.

E10: Es que me parece que así lo enseñan.

P: Sí, así lo vieron, pero aquí la idea es respetar las ideas de Fermat de acercarnos por la subtangente y no por la secante. Las dos cosas funcionan pero necesariamente funcionan cuando $\boldsymbol{e}$ tiende a cero. Fíjese que cuando $\boldsymbol{e}$ tiende a cero lo que es la recta secante, termina prácticamente siendo la misma recta tangente.

Segundo momento

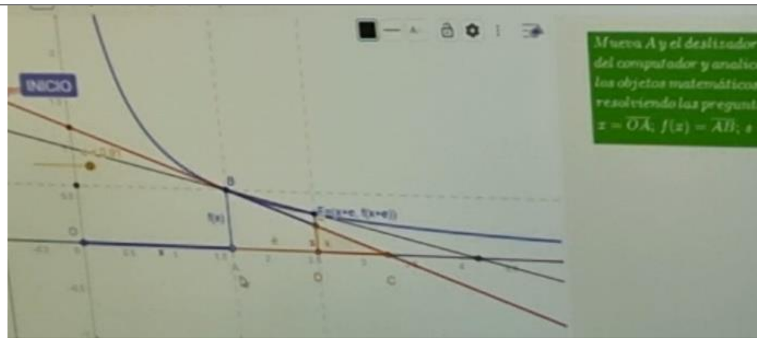
E10: Digamos en magnitud es igual, pero por qué el signo menos, es como la inquietud. ¿$\boldsymbol{s}$ de dónde a dónde va?

P: $\boldsymbol{s}$ va desde A hasta C. ¿Así se definió al principio? Ponga e en 1 y mire la información. ¿Quién es $\boldsymbol{s}$?

E10: CA

P: ¿Entonces qué es lo que pasa?

E10: no entiendo por qué en el applet no se consideró en lugar de este triángulo de acá, el que se forma así. (Ver imagen)



P: También, hay muchos triángulos que se pueden usar. De hecho, la idea que haya unos puntos visibles, es que usted pueda escoger el triángulo que quiera.

E10: Me parece como más difícil este, y es más intuitivo ver el de acá.

P: Pero el problema es que ese triángulo de ahí, sí se puede tomar, pero entonces… ¿cuál triángulo sería? Ese no sería semejante.

E10: Es semejante con este (señala en el applet)

P: Ese no sería semejante. Entonces eso ya es otro triángulo y otra semejanza que tal vez no va a servir porque no se relaciona con $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e})$.

E10: Sí, ponga cuando e tiende a cero, entonces ahí pasa eso y fíjese que es el mismo.

E10: Es que me parece que este es como más fácil, como más intuitivo.

P: Es que ese sería cuando uno se acerca a la pendiente de la recta tangente desde la secante, ahí es como si usted estuviera trazando la recta secante, pero lo que pasa es que Fermat no ponía los dos puntos en la curva.
El estudiante intenta relacionar el applet con su conocimiento sobre la derivada a partir de la recta secante. Sin embargo, este enfoque no le permite comprender la idea de la subtangente ni su signo. Aunque verifica en la casilla de entrada que el valor es negativo, no logra interpretarlo debido a errores en la manipulación algebraica. En particular, se evidencian errores técnicos (T) al no poder despejar correctamente el valor de s, ya que aplicó el límite antes de realizar el despeje, lo que le impidió llegar a la respuesta correcta. Asimismo, se observan dificultades derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos (COM), relacionadas con la comprensión de la subtangente y la necesidad de reestructurar el saber previo para posibilitar la construcción de este nuevo conocimiento. También se identifican dificultades vinculadas a los procesos de pensamiento matemático (PPM) en la coordinación de diferentes tipos de representación y en la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos en la manipulación algebraica y al no saber en qué momento calcular el límite. Este intento es una demostración deductiva fallida, porque el estudiante pretende transformar el problema en uno equivalente, pero sus errores no le permiten concluir la respuesta.

Las demostraciones de tipo **deductiva formal estructural (DFE)** se distinguen porque los estudiantes utilizan la relación de semejanza (E7) o establecen relaciones entre otros triángulos (E16) para obtener el valor de la subtangente, mostrando coordinación entre lo algebraico, geométrico y métrico. Por ejemplo:

Tabla 60

Respuesta de E7 para la subtangente con n entero

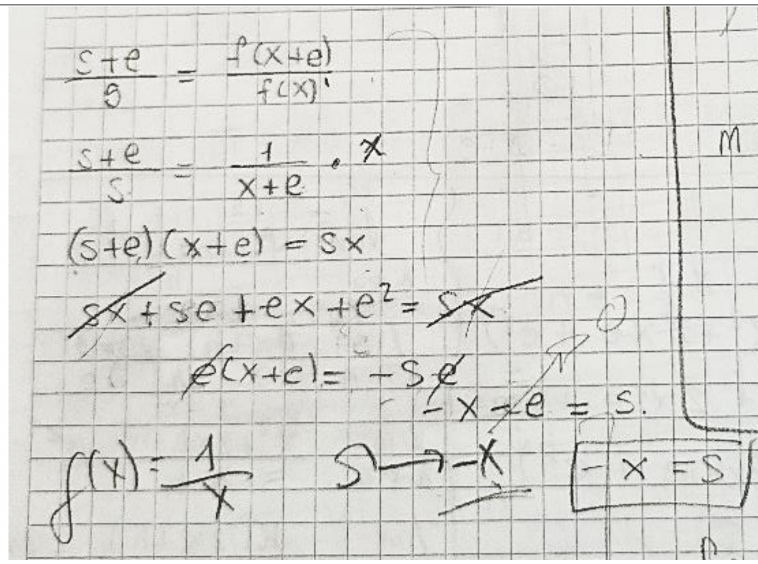
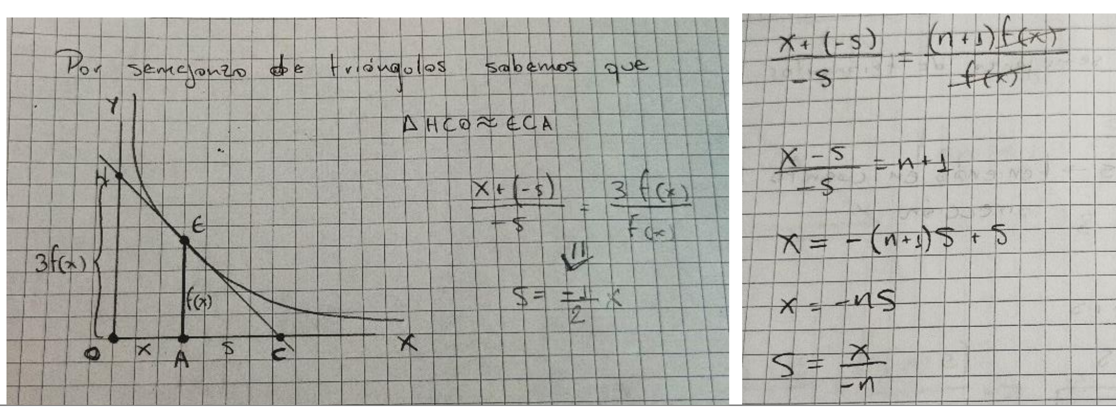
Respuesta de E7

El estudiante utiliza la relación de semejanza correctamente para despejar el valor de la subtangente.

Tabla 61

Respuesta de E16 para la subtangente con n entero

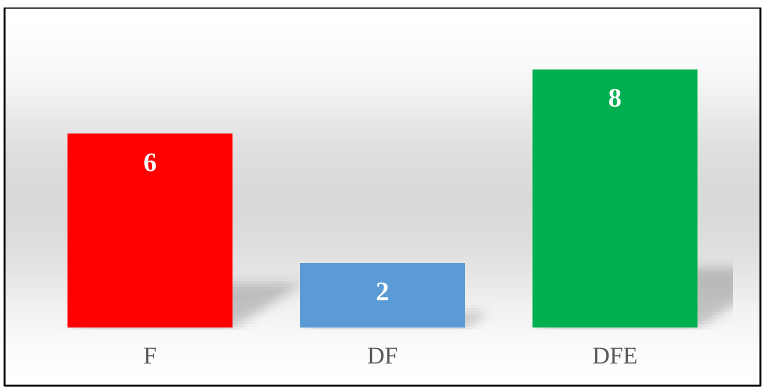
Respuesta de E16


El estudiante construye la demostración despejando $\boldsymbol{s}$ de la relación de semejanza tomando los triángulos $\boldsymbol{AEC}$ y $\boldsymbol{OSC}$. En el caso general, lo obtiene utilizando el mismo procedimiento: $\frac{\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{s})}{-\boldsymbol{s}}=\frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$. Por la visualización del applet, el estudiante notó mediante un procedimiento inductivo que $\boldsymbol{OS}=(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, y así logró concluir los resultados.

- **Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en las tareas de demostración de la derivada para casos particulares de funciones recíprocas**

Figura 34

Tipos de demostración para las derivadas (n entero)



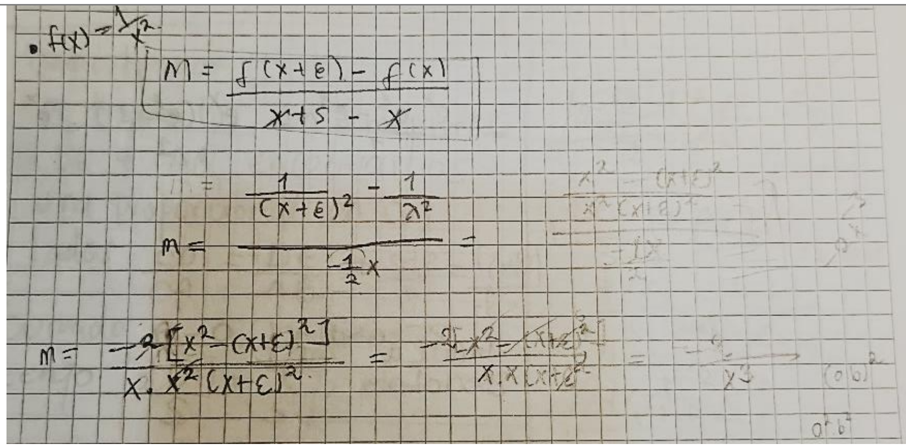
Las demostraciones clasificadas como **fallidas (F)** se caracterizan porque los estudiantes no intentaron plantear conjeturas ni construir demostraciones.

En la demostración clasificada como **deductiva fallida (DF)** el estudiante intenta obtener la derivada utilizando la ecuación punto pendiente, pero comete errores que no lo conducen a la respuesta esperada. Por ejemplo:

Tabla 62

Respuesta de E1 para las derivadas (n entero)

Respuesta de E12



E12 intenta demostrar la derivada de $\boldsymbol{f(x) = x^{-2}}$ usando la ecuación punto pendiente, pero comete un error de tipo interpretación incorrecta del lenguaje (IIL) al traducir símbolos del lenguaje geométrico al algebraico, pues al interpretar el procedimiento del estudiante, él toma los puntos $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f(x)})$ y $(\boldsymbol{x+s}, \boldsymbol{f(x+e)})$, con esto obtiene $\boldsymbol{m = \frac{f(x+e)-f(x)}{(x+s)-x}}$ considerando erróneamente $\boldsymbol{x_2 - x_1 = s}$. Aunque aparentemente obtiene la respuesta esperada, no es una implicación de su procedimiento.

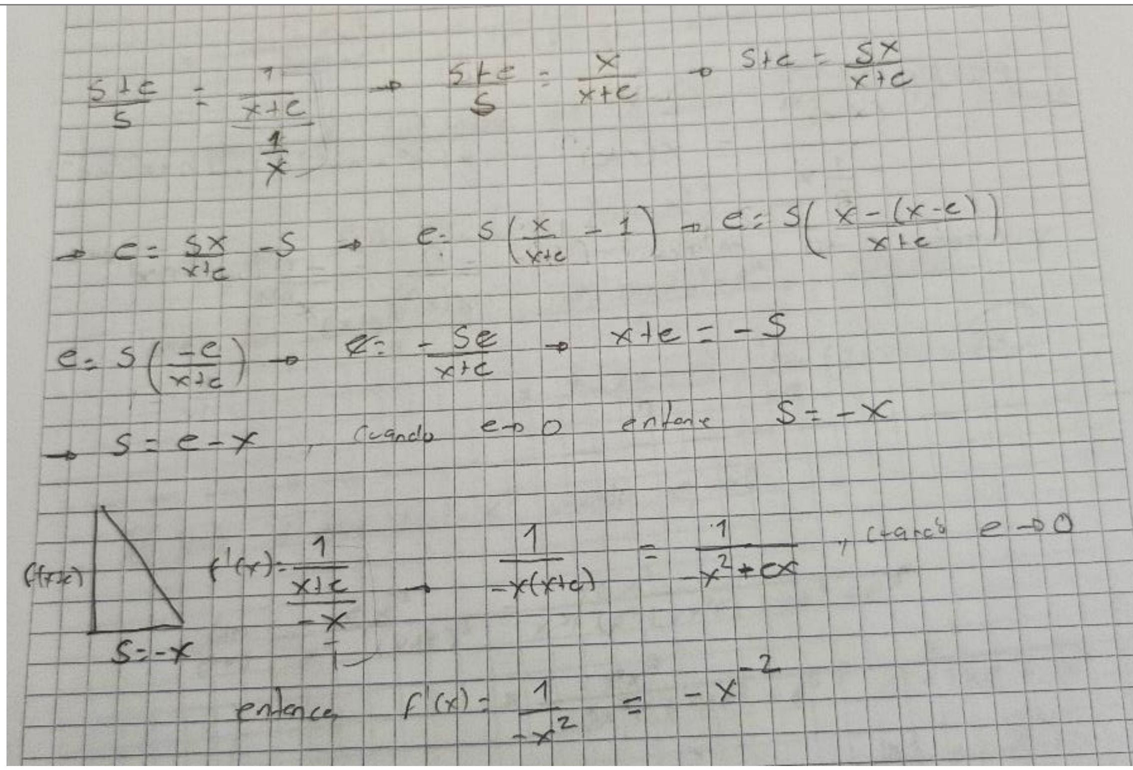
Esto evidencia una dificultad asociada a procesos de pensamiento matemático (PPM) al no lograr integrar diferentes representaciones.

Las demostraciones de tipo **deductiva formal estructural (DFE)** se caracterizan porque los estudiantes utilizan la subtangente para demostrar la regla de derivación, mostrando coordinación entre lo geométrico, métrico y algebraico. Por ejemplo:

Tabla 63

Respuesta de E3 para las derivadas (n entero)

Respuesta de E3

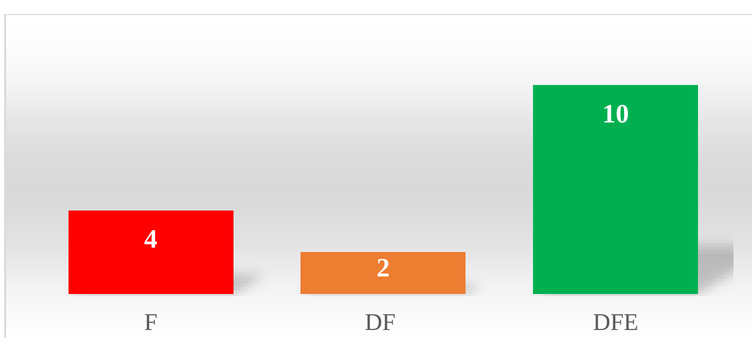


El estudiante obtiene el valor de la subtangente a partir de la relación de semejanza y lo usa en su demostración de la derivada. Para ello, utiliza la relación entre los catetos del triángulo rectángulo con el fin de calcular $\tan\theta$ en el caso particular de las funciones recíprocas.

- **Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en la tarea 8**

Figura 35

Tipos de demostración en la tarea 8



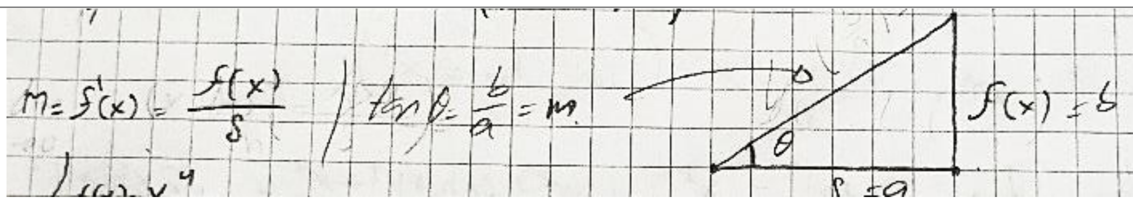
Las demostraciones que se clasificaron como **fallidas (F)** se caracterizan porque los estudiantes no plantearon conjeturas ni construyeron ningún tipo de demostración.

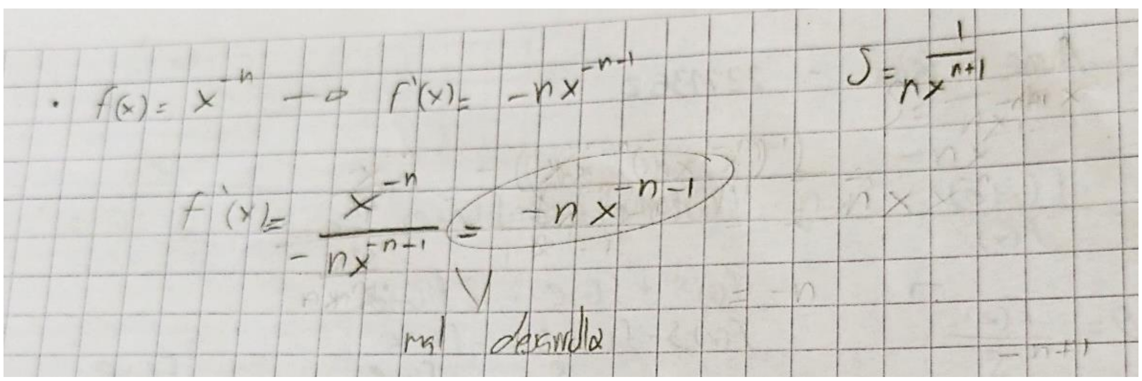
Los intentos de tipo **deductiva fallida (DF)** se destacan porque los estudiantes plantean una conjetura correcta, no usan ejemplos y en los pasos de su demostración cometen errores que no les permite concluir el resultado. Por ejemplo:

Tabla 64

Respuesta de E4 para la tarea 8

Respuesta de E4





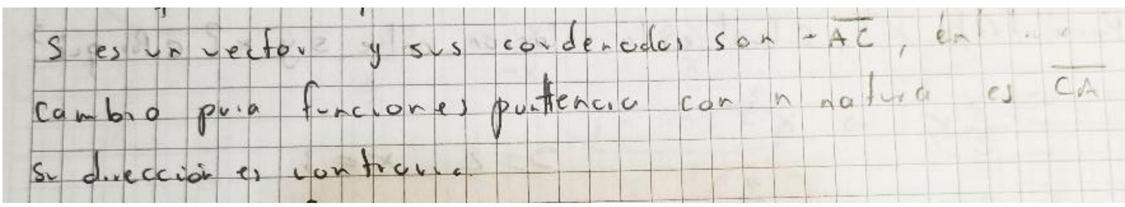
El estudiante intenta usar la relación que encontró en tareas anteriores sobre $\boldsymbol{f'(x) = \frac{f(x)}{s}}$, pero comete un error de tipo inferencias no válidas lógicamente (INV) al establecer el valor de la subtangente y esto no le permite concluir el procedimiento. Aunque reconoce que está *mal desarrollado,* no intenta corregirlo.

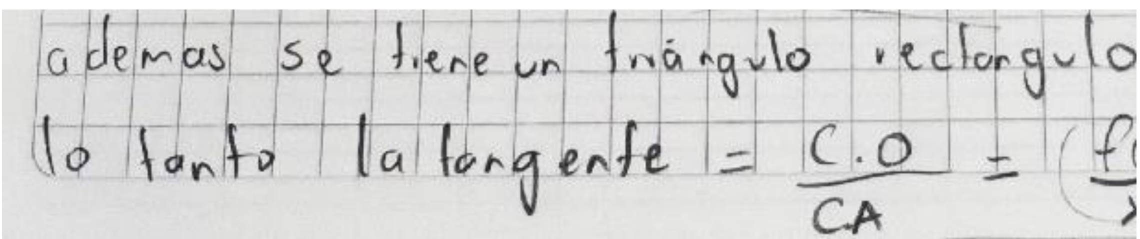
Las demostraciones de tipo **deductiva formal estructural (DFE)** son construidas por estudiantes que muestran coordinación entre lo geométrico, métrico y algebraico, utilizando la subtangente para demostrar la regla de derivación, Por ejemplo:

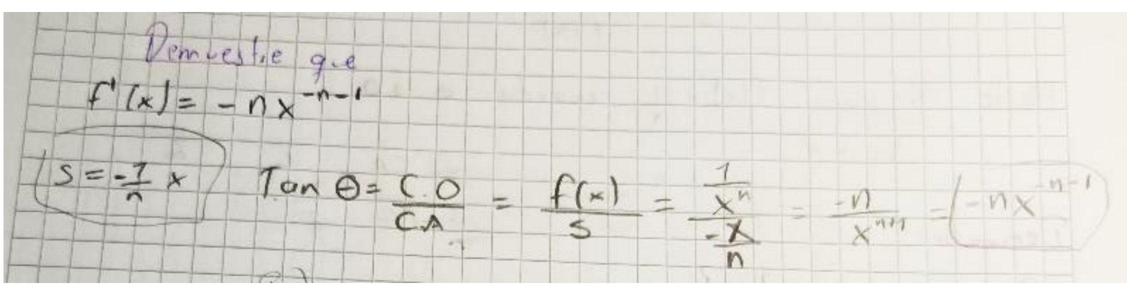
Tabla 65

Respuesta de E8 para la tarea 8

Respuesta de E8
Encuentre s en función de x cuando $e \longrightarrow 0$ y justifique su respuesta.
Aa π Cuando e tiende a cero para f(x)=x, x=s, para f(x)=x a la 2, x= 2s, para f(x)= x a la 3, x = 3s, y al parecer de acá en adelante se mantiene esta relación, es decir para cuando f(x)= x a la n entonces x = ns, todos estos datos que tome los observe haciendo exploración en geogebra, cambiando de exponente a la función







En tareas anteriores, E8 recurre a la visualización de distintos valores en el applet para funciones potencia con exponente natural y, posteriormente, para funciones recíprocas. A partir de este análisis inductivo, plantea una conjetura general sobre la subtangente. Con esta conjetura. Este proceso le permite plantear una conjetura para el valor de la subtangente de manera general, que logra usar en la demostración de la derivada, tomando $\tan\boldsymbol{\theta} = \frac{f(x)}{s}$.

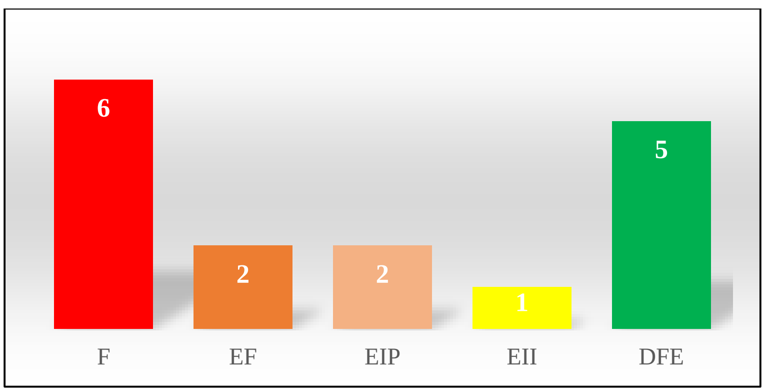
6.5. Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en las tareas del subcapítulo *Funciones potencia con n racional*

En este apartado se presenta el análisis de las producciones correspondientes a las tareas 10, 11, 12 y 13 que conforman el caso de n racional. Se consideran tres aspectos: los tipos de demostración construidos por los estudiantes, los errores que surgen durante sus procedimientos y las dificultades que se evidencian a lo largo del proceso.

- **Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en la tarea 10**

Figura 36

Tipos de demostración en la tarea 10



Los intentos de tipo **empirismo fallido (EF)** se caracterizan porque el estudiante plantea una conjetura de manera correcta, mediante un razonamiento empírico y no intenta validar y, si lo hace, acomoda los elementos para obtener el resultado esperado, o describe lo que observa en el applet para darle formalidad a su demostración. Por ejemplo:

Tabla 66

Respuesta de E1 en la tarea 10

Respuesta de E1
Tarea 10 Para $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, ¿Cuál es la relación entre s y x ?, ¿por qué? Aa π Al explorar el applet y darle en este caso el valor de f(x)=X^1/2, podemos observar que la relación entre S y X es que S=2X, porque al mover el punto A y el deslizador e hasta e=0.01 vemos que se sigue manteniendo una relación de semejanza
El estudiante encuentra la relación entre $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$ al mover el punto $\boldsymbol{A}$, pero su único elemento de validación es la visualización, pues intenta justificar describiendo la construcción y el funcionamiento del applet, lo cual no es suficiente para demostrar dicha relación.

Quienes han construido demostraciones de tipo **empirismo ingenuo perceptivo (EIP)**, plantean una conjetura correcta basada en la visualización del applet y la justifican en lo que "ven" o en lo que midieron y compararon, sin intentar justificar su afirmación. Por ejemplo:

Tabla 67

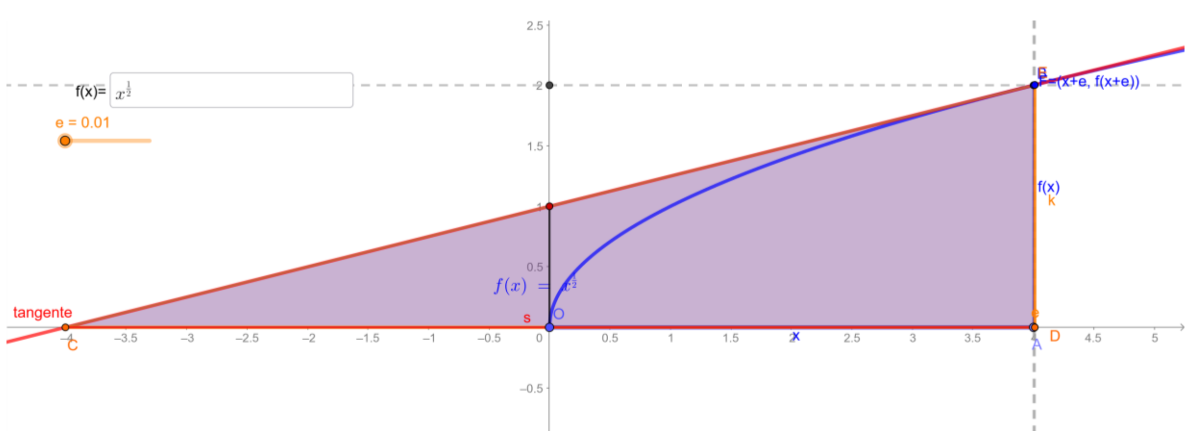
Respuesta de E8 en la tarea 10

Respuesta de E8

Tarea 10

Para $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, ¿Cuál es la relación entre s y x ?, ¿por qué?

Aa π Al mover el punto A y ver la distancia de s y x, podemos observar que s = 2x, es decir la relación entre s y x depende la potencia de x

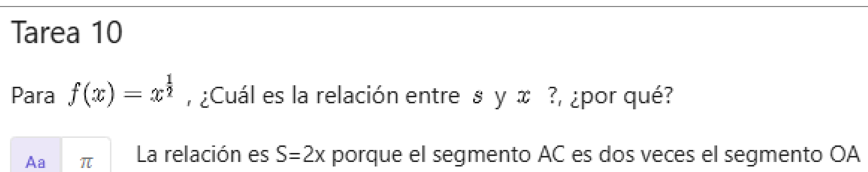


En la gráfica, se puede apreciar que el estudiante ubica el punto $\boldsymbol{A}$ en $(\mathbf{4}, \mathbf{0})$ y observa que $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ y $\boldsymbol{s} = \mathbf{4}$, lo que le permite plantear correctamente su conjetura, pero no hay ningún intento de validación teórico, más que la visualización y comparación para esos valores particulares.

El intento de tipo **empirismo ingenuo inductivo (EII)** se caracteriza porque el estudiante observa algunos casos en el applet que le permiten realizar algunas generalizaciones. Por ejemplo:

Tabla 68

Respuesta de E11 y E15en la tarea 10

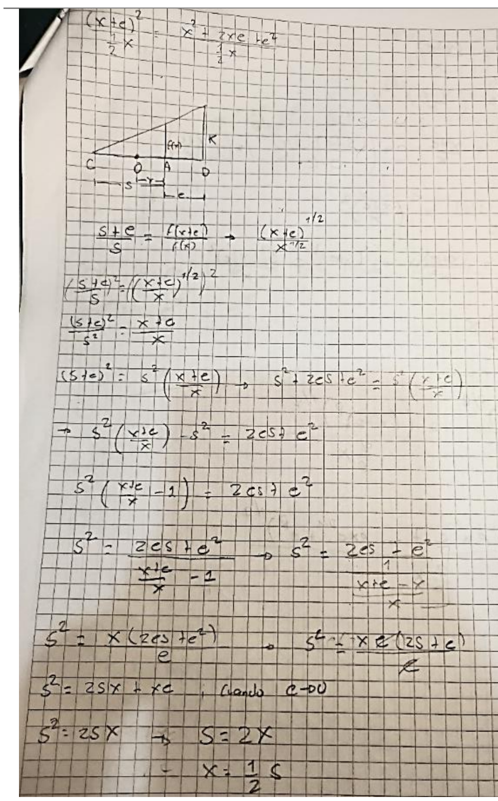
Interacción entre E11, E15 y la investigadora
E11: El $\boldsymbol{s}$ que nosotros estamos trabajando viene siendo el mismo que para las funciones anteriores. I: ¿Seguros? Mírenlo ahí. Hagan que $\boldsymbol{e}$ tienda a 0, ¿cuánto vale $\boldsymbol{x}$ ahí? E15: En este caso $\boldsymbol{x}$ vale $\mathbf{2}$ y $\boldsymbol{s}$ vale $-\mathbf{4}$. I: Entonces revisen en otros casos. Por ejemplo, cuando $\boldsymbol{x}$ vale $\mathbf{1}$… E15: $\boldsymbol{s}$ vale $-\mathbf{2}$. I: ¿Entonces? E11: Básicamente $\boldsymbol{s}$ va a ser el doble de la distancia de $\boldsymbol{x}$.
Respuesta de E15
 Tarea 10 Para $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, ¿Cuál es la relación entre s y x ?, ¿por qué? Aa π La relación es S=2x porque el segmento AC es dos veces el segmento OA

El estudiante encuentra la relación mediante la visualización para algunos ejemplos de $\boldsymbol{x}$, usando los elementos del applet para plantear correctamente la conjetura. Aunque logra hacer una generalización, su único elemento de validación es el applet.

En las demostraciones de tipo **deductiva formal estructural (DFE)** los estudiantes despejaron la subtangente de la relación de semejanza, mostrando una buena manipulación algebraica y coordinación entre diferentes sistemas de representación. Por ejemplo:

Tabla 69

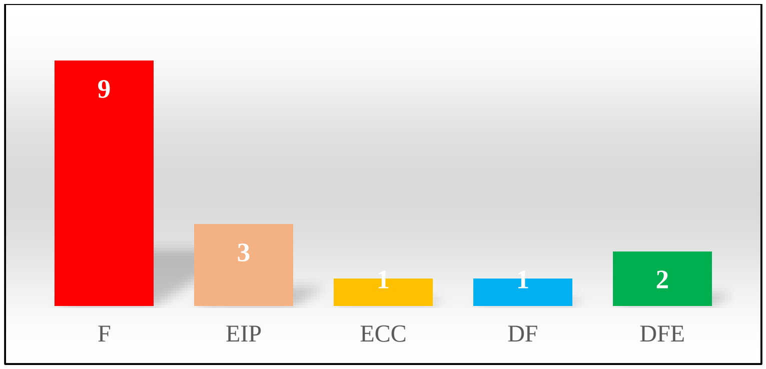
Respuesta de E3 en la tarea 10

Respuesta de E3	
	El estudiante plantea la relación de semejanza y la utiliza para construir la demostración del valor de s en función de x. En todo el procedimiento opera con el e y al final hace que éste tienda a cero, lo que evidencia comprensión del incremento infinitesimal.

- **Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en la tarea 11**

Figura 37

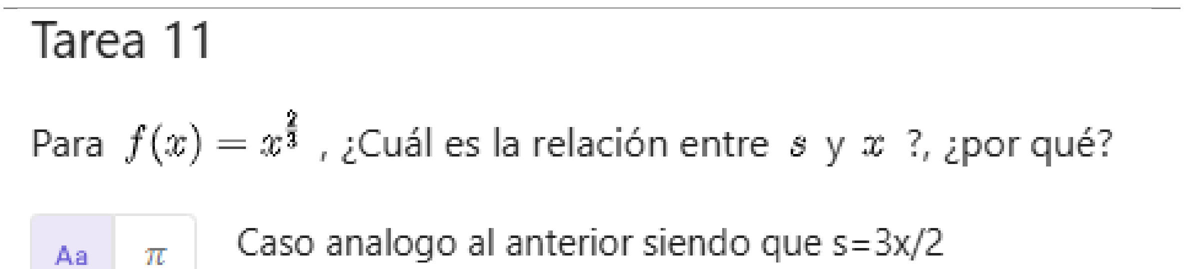
Tipos de demostración en la tarea 11



Los estudiantes que plantean conjeturas correctas, pero no se evidencia ningún tipo de razonamiento para llegar a ellas; no intentan justificar; optan por dejar la tarea en blanco o plantean una conjetura pero no se evidencia ningún tipo de razonamiento para llegar a ésta (E16), se ubican en las demostraciones de tipo **fallida (F)**. Por ejemplo:

Tabla 70

Respuesta de E16 en la tarea 11

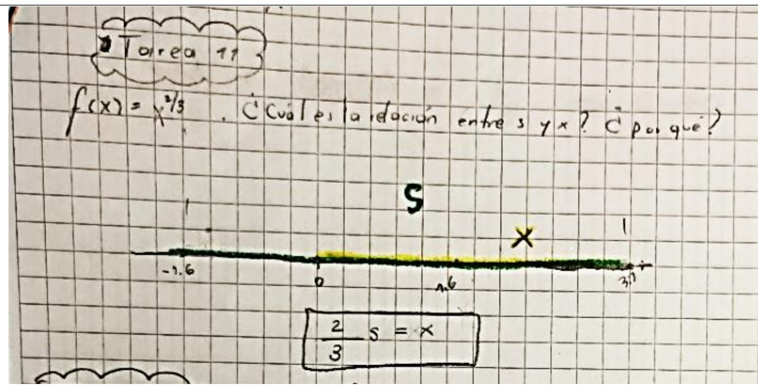
Respuesta de E16

El estudiante se vale de lo realizado en la tarea anterior para plantear la conjetura del valor de ***s***, pero, no se evidencia los argumentos utilizados para el descubrimiento de la conjetura ni para la construcción de una demostración.

Las demostraciones de tipo **empirismo ingenuo perceptivo (EIP)**, se destacan porque los estudiantes plantean una conjetura correcta basada en la visualización del applet y la justifican en lo que “ven” o en lo que midieron y compararon, sin intentar justificar su afirmación. Por ejemplo:

Tabla 71

Respuesta de E14 en la tarea 11

Respuesta de E14



Tarea 11

Para $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, ¿Cuál es la relación entre s y x ?, ¿por qué?

Aa π

Haciendole zoom al applet para ver los numeros decimales de la recta numerica, encontré que el segmento "s" va desde un poco mer de -1.6 hasta un poco más de 3.2. y el segmento de "x" va desde 0 hasta un poco más de 3.2, entonces encuentro la relación de que 2 = x. (Hoja) y esto se sigue garantizando por la semejanza de triangulos al mover e=0.01.

El estudiante se vale de un ejemplo particular (para un valor de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{s}$) para plantear una conjetura correcta y para justificar su demostración. Intenta usar una representacion estática de los segmentos en la recta numérica y asignarles variables x y s para justificar la relación, pero soportada en en los valores numéricos que se ven en el applet o en el dibujo.

Tabla 72

Respuesta de E15 en la tarea 11

Interacción entre E15 y la investigadora

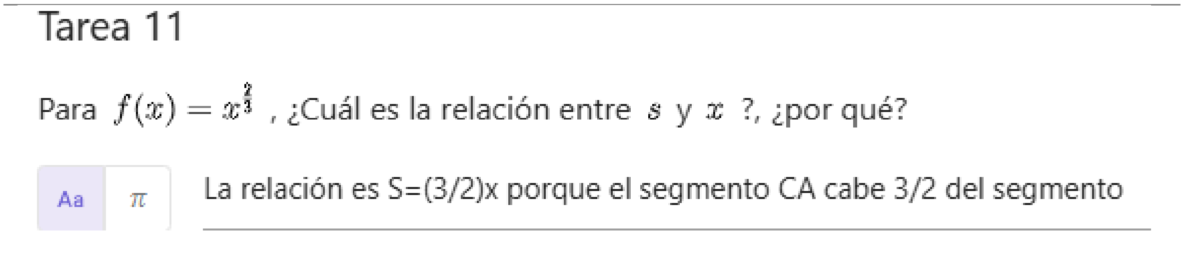
I: ¿En cuántas partes puede dividir $\boldsymbol{s}$?

E15: $\boldsymbol{s}$ es 1 y 3… bueno, en 2 unidades.

I: ¿Y $\boldsymbol{x}$?

E15: Pero el $\boldsymbol{x}$ va de 0 a 3, lo puedo partir en 3 unidades. En este caso nuestro $\boldsymbol{s}$, será exactamente $\frac{2}{3}\boldsymbol{x}$.

Respuesta de E15



El estudiante encuentra la relación mediante la visualización de un único ejemplo. Logra hacer una generalización, pero su único elemento de validación es el applet.

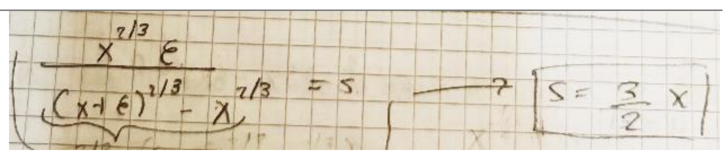
En el tipo **experimento crucial constructivo (ECC)** el estudiante se basa en la construcción de un ejemplo para validar su conjetura. Por ejemplo:

Tabla 73

Respuesta de E10 y E14 en la tarea 11

Interacción del investigador, E10 y E14

P: ¿Ese es para $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{x^{2/3}}$, no?, entonces ¿qué pasa ahí con ese despeje?



E10: Pues más o menos tengo la idea intuitiva de que $\boldsymbol{s} = \frac{3}{2}\boldsymbol{x}$, ¿no? Pero entonces tocaría probarlo acá algebraicamente.

P: ¿Y qué, no se acuerda cómo resolver eso?

E10: No.

P: Pues busque. Ahí hay información, ¿o qué podría usted decir o concluir?

E10: Que en la gráfica no se ve mucha información de la misma función.

(mira en applet y plantea la relación de semejanza)

P: ¿Usted sospecha que es cuánto?

E10: $\boldsymbol{s} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$

P: ¿Y ahí no se ve que es $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$?

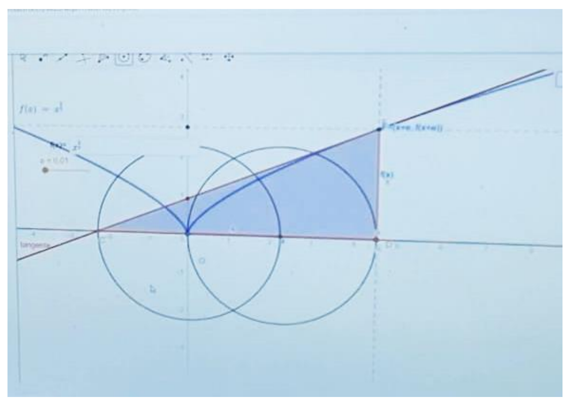
E10: No lo veo.

P: ¿Por qué no?

E10: O bueno…

P: Acuérdese que $\boldsymbol{e}$ tiende a 0 y está mirando esa distancia ($\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{x}$)

E10: Sería dividir este segmento en 3…



(E14 le hace una sugerencia de construir circunferencias para confirmar la sospecha)

P: ¿Sí?, ¿más o menos la sospecha es válida?

E10: Sí.

P: Entonces ahí, ¿qué estamos viendo?

E10: Que s es $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}.$

P: Ahora, ¿cuál es el problema, digamos ahí con esa función?

E10: Los negativos.

P: No, me refiero a que usted acá, como que dijo “uy no, espere”.

E10: Sí, en el despeje porque sólo lo vi algebraicamente, no lo vi de esta forma.

P: Entonces ya resolver eso algebraicamente, ahí ya es complicado, pero fíjese que ahí ya hay como una evidencia de que la cosa va por buen camino. Ahora, pues, mejor dicho, usted ya sabe que ¿a dónde debe llegar?, ¿ese s cuánto tiene que dar?

E10: A $\frac{3}{2}\boldsymbol{x}$.

P: ¿Cuál es el lío ahí?

E10: Que el argumento…

P: No, el argumento no, ya usted está seguro de lo que hizo, ¿no?

E10: Sí, el argumento, digamos uno ya lo puede generalizar para $\frac{p}{q}$, ¿no? Y uno tiene como la idea de que va a ser $\frac{q}{p}\boldsymbol{x}$.

P: Sí. Pero entonces, ¿cuál es el lío?

E10: ¿Cómo lo demostraría?

P: ¿Cuál es el lío ahí?, que esos despejes son difíciles, por ejemplo, si fuera $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{7/5}$, ponga ahí $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{7/5}$. ¿Cuál es la sospecha, que s cuánto va a ser?

E10: $\frac{5}{7}\boldsymbol{x}$.

P: Ahí usando el applet y usando las herramientas de GeoGebra, pero si eso lo vamos a hacer algebraicamente, ¿qué pasa?

E10: Es muy difícil.

P: Ya toca tirar mucha álgebra. Entonces, un poco la idea es que se puedan ir haciendo esas conexiones entre lo geométrico y lo algebraico y de alguna manera pues ya esto se vuelve un proceso pues tedioso, pero pues, uno podría ya concluir algo, tratar de buscar una generalización.

Tarea 11

Para $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, ¿Cuál es la relación entre s y x ?, ¿por qué?

Aa π Utilizando un argumento geométrico se da cuenta que la relación de s con respecto a x es S=(3,

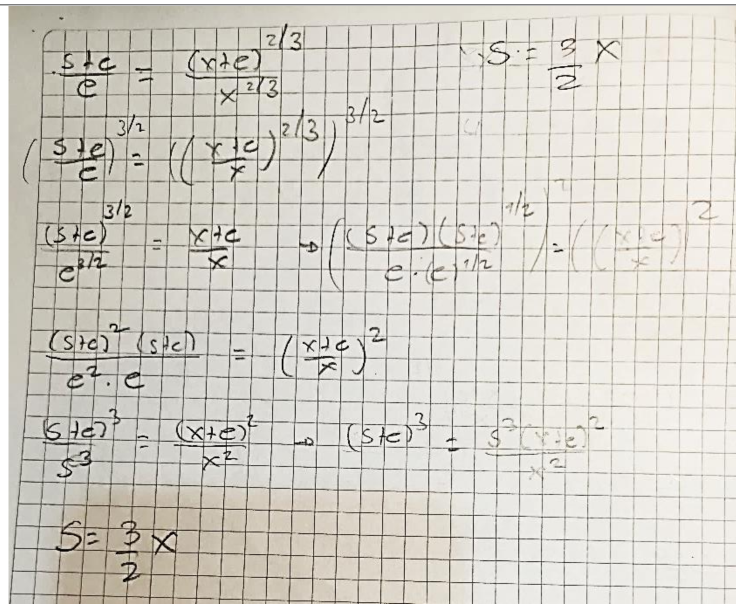
El estudiante intenta usar la ecuación de la subtangente y, aunque ya conoce hacia dónde debe llegar, no logra operar para obtener el valor esperado, ya que presenta dificultades asociadas a procesos de pensamiento matemático (PPM) en la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos al trabajar con un exponente racional. Además, no estaba del todo convencido de que el applet le ofreciera la respuesta correcta, por lo que requirió la orientación del profesor y de uno de sus compañeros. Con su ayuda, continuó el trabajo construyendo circunferencias de radio ***s***, lo que le permitió visualizar la relación que estaba buscando y acercarse, a partir de la exploración empírica, al valor que ya intuía desde el inicio.

Quienes construyeron demostraciones de tipo **deductiva fallida (DF)** usan la relación de semejanza, pero cometen errores o su procedimiento no implica la respuesta obtenida. Por ejemplo:

Tabla 74

Respuesta de E3 en la tarea 11

Respuesta de E3



Tarea 11

Para $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, ¿Cuál es la relación entre s y x ?, ¿por qué?

Aa π s es 3/2 de x haciendo el mismo procedimiento del punto anterio

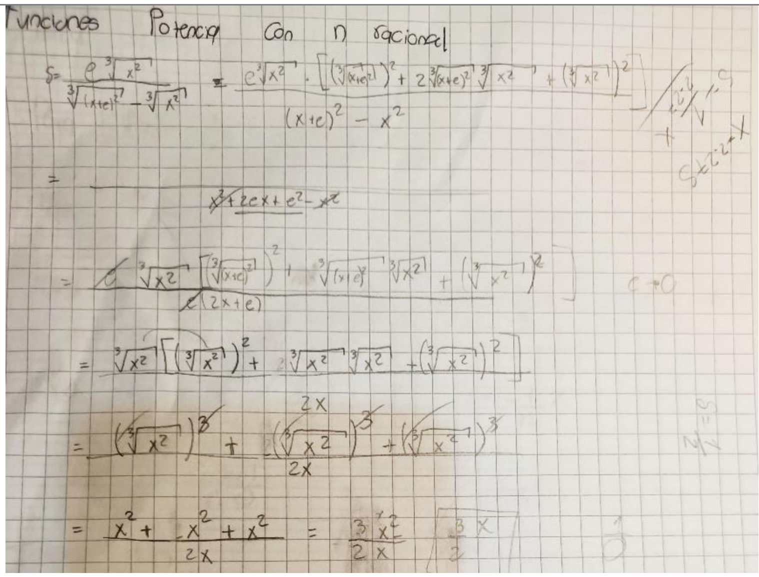
El estudiante plantea incorrectamente la relación de semejanza, cometiendo un error de tipo teoremas o definiciones deformados (TD), por ello, no logra obtener la respuesta, y finalmente asume el valor de s.

En las demostraciones de tipo **deductiva formal estructural (DFE)**, los estudiantes utilizaron la relación de semejanza, mostrando una coordinación entre lo geométrico y lo algebraico. Por ejemplo:

Tabla 75

Respuesta de E6 en la tarea 11

Respuesta de E6

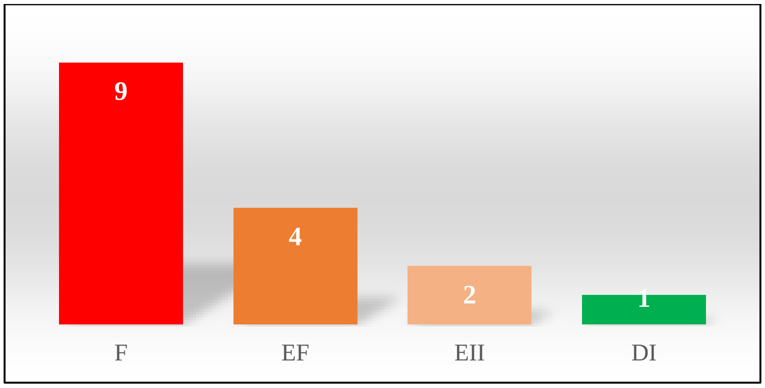


El estudiante utiliza el valor de ***s*** que encontró por la relación de semejanza y realiza procedimientos correctos que le permiten concluir el valor de la subtangente.

- **Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en la tarea 12**

Figura 38

Tipos de demostración en la tarea 12

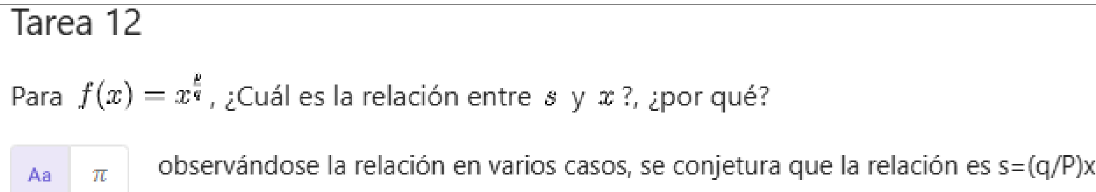


Los intentos de tipo **empirismo fallido (EF)** se destacan porque los estudiantes plantean una conjetura de manera correcta mediante el uso de los ejemplos particulares de las *tareas 10 y 11*, pero no buscan otra estrategia de validación. Por ejemplo:

Tabla 76

Respuesta de E10 en la tarea 12

Respuesta de E10



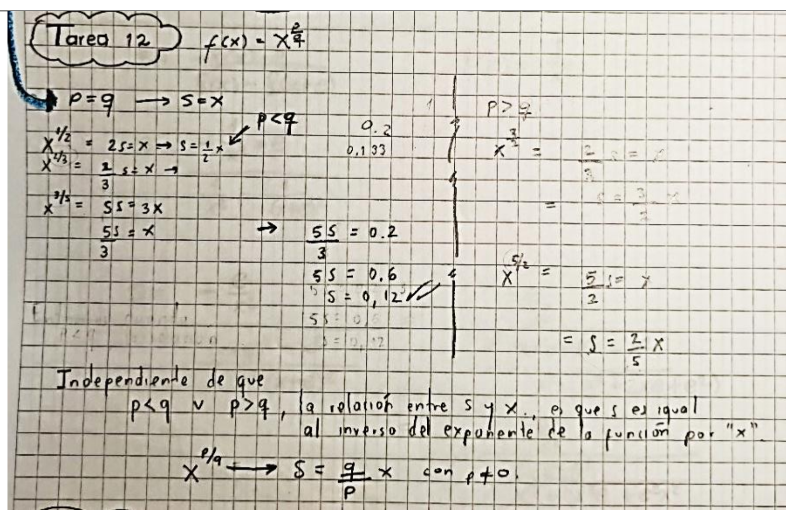
Valiéndose de los casos anteriores, el estudiante plantea una conjetura para el valor de s, pero hay ningún intento de validación.

En las demostraciones de tipo **empirismo ingenuo inductivo (EII)**, los estudiantes utilizan ejemplos particulares que les permiten hacer generalizaciones. Por ejemplo:

Tabla 77

Respuesta de E14 en la tarea 12

Respuesta de E14



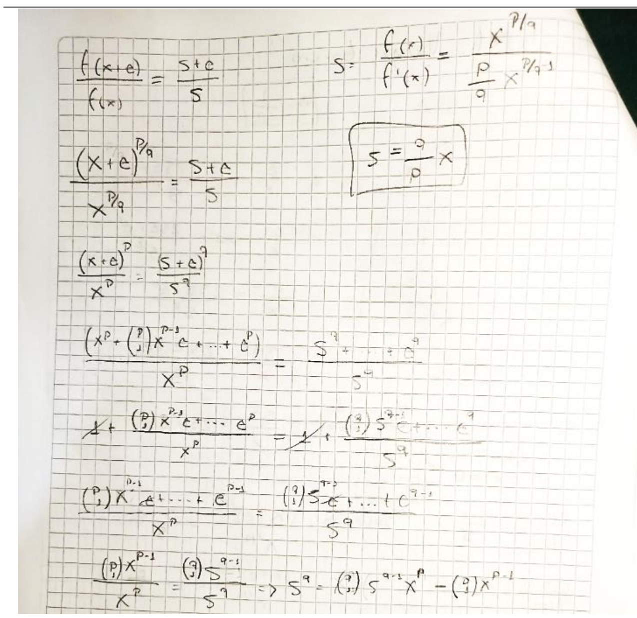
El estudiante analiza los tres casos posibles para p en relación a q, y a partir de la exploración empírica en cada uno, concluye que, independientemente de dicha relación, s

corresponde al inverso del exponente de la función multiplicado por x. Esta conclusión surge de un proceso inductivo, en el que observa un patrón común en los distintos casos particulares. A partir de estas regularidades, el estudiante llega a una generalización que asume como válida en todos los casos.

Las demostraciones de tipo **deductiva informal (DI)** se distinguen porque los estudiantes usan la relación de semejanza, pero asumen como verdaderos algunos pasos algebraicos que le ayudan a explicar mejor la respuesta. Por ejemplo:

Tabla 78

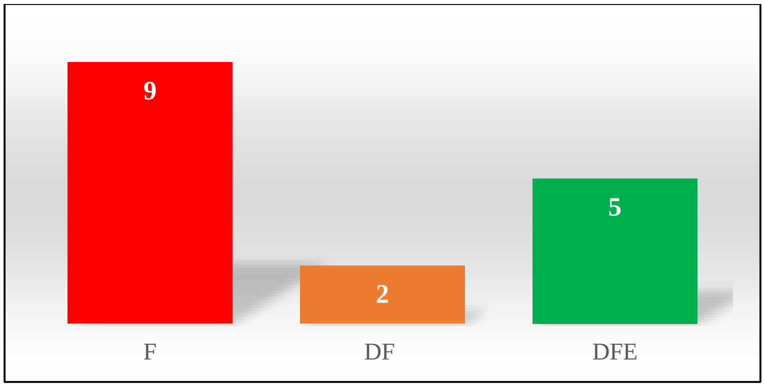
Respuesta de E16 en la tarea 12

Respuesta de E16	
	Se evidencia un razonamiento deductivo, pues en el procedimiento empleado logra generalizar patrones que ha encontrado en los casos particulares, usando la idea de los infinitesimales y el teorema del binomio. Aunque su procedimiento no implique el resultado, el estudiante asume como verdaderos algunos pasos para obtener la respuesta esperada.

- **Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en la tarea 13**

Figura 39

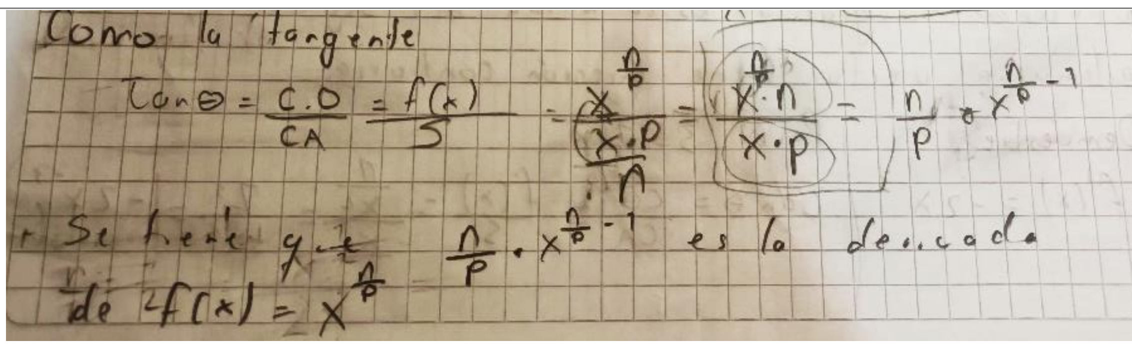
Tipos de demostración en la tarea 13



Los intentos de **deductiva fallida (DF)** se destacan porque los estudiantes no utilizan ejemplos en su demostración, sino propiedades generales como tan ∡ (E8) o la definición de derivada como límite (E12), pero cometen errores que no le permiten obtener la respuesta esperada.

Tabla 79

Respuesta de E8 en la tarea 13

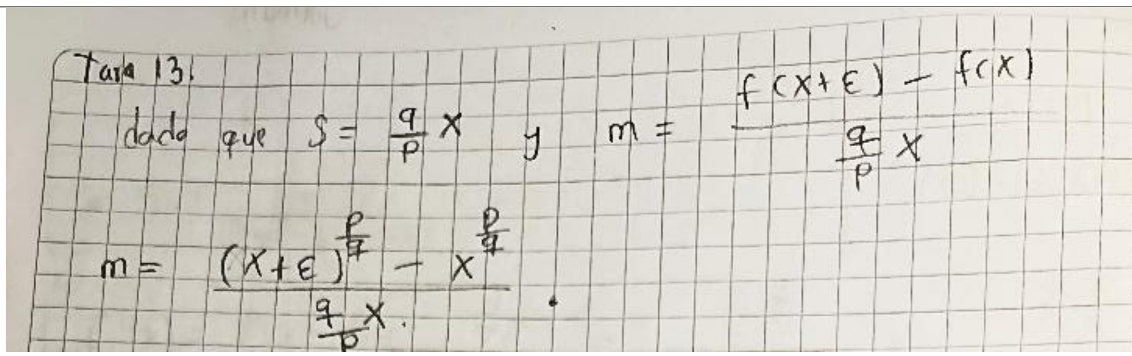
Respuesta de E8

El estudiante intenta usar $\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{s}}$ para construir la demostración, pero toma $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}$, pero la función que se presenta en este caso es $\boldsymbol{f(x) = x^{p/q}}$. Es decir $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$, un error de tipo inferencias no válidas lógicamente (INV) al asumir este valor para la subtangente. Esto no le permite concluir el resultado de manera correcta, porque realiza manipulaciones

algebraicas para acomodar la respuesta. Se concluye que no centró su atención en las indicaciones del applet, y no comprendió los elementos que se presentaban, por ello, hizo deducciones erróneas y a la ligera.

Tabla 80

Respuesta de E12 en la tarea 13

Respuesta de E12



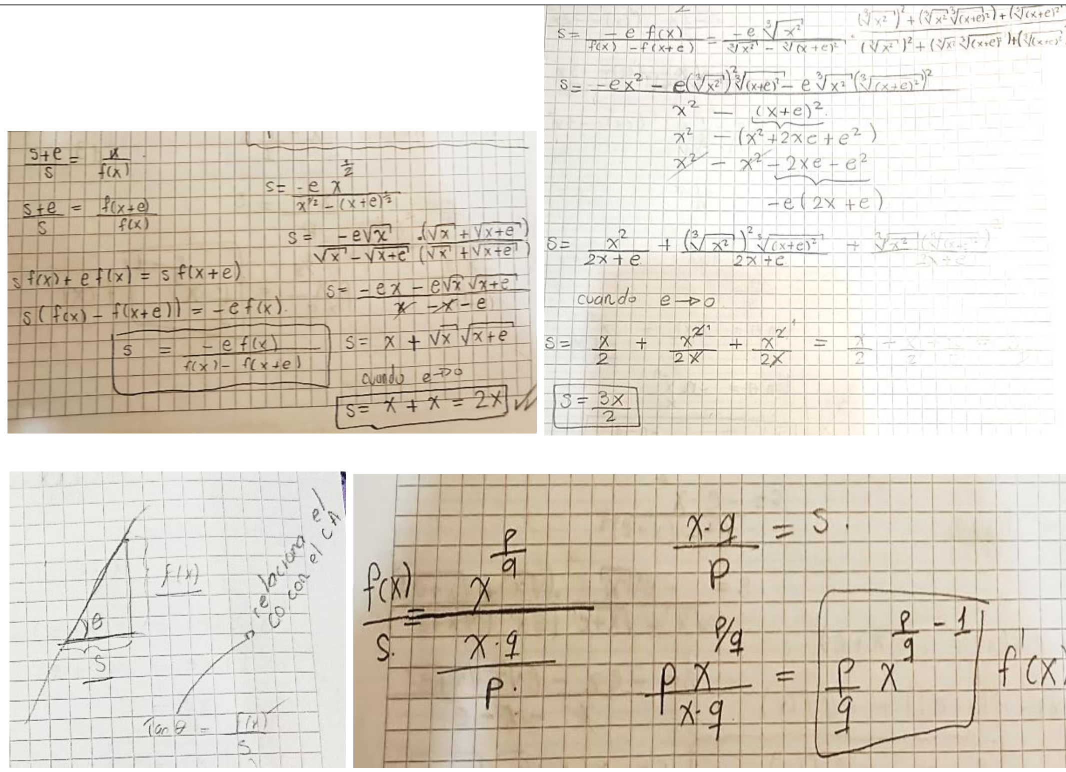
El estudiante plantea la ecuación de la derivada tomando dos puntos sobre la curva, pero de manera errónea, pues escoge $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ y $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}))$, considerando $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{s}$, y no construye ningún tipo de demostración.

Las demostraciones de tipo **deductiva formal estructural (DFE)**, se distinguen porque los estudiantes utilizan la relación entre el triángulo rectángulo, mostrando una coordinación entre lo geométrico y lo algebraico. Por ejemplo:

Tabla 81

Respuesta de E7 en la tarea 13

Respuesta de E7



E7 despeja la subtangente de la relación de semejanza en tareas anteriores, lo que le permite plantear una conjetura de manera general y usarla para construir la demostración de la regla de derivación de manera general usando $\tan \theta$.

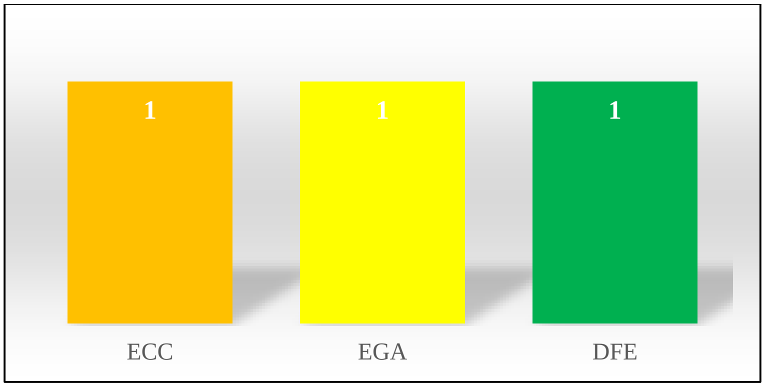
6.6. Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en las tareas del subcapítulo *Funciones potencia con n real*

En este apartado se presenta el análisis de las producciones correspondientes a la tarea 15 que conforma el caso de n real. Se consideran tres aspectos: los tipos de demostración construidos por los estudiantes, los errores que surgen durante sus procedimientos y las dificultades que se evidencian a lo largo del proceso.

- **Tipos de demostración, errores y dificultades emergentes en la tarea 15**

Figura 40

Tipos de demostración en la tarea 15

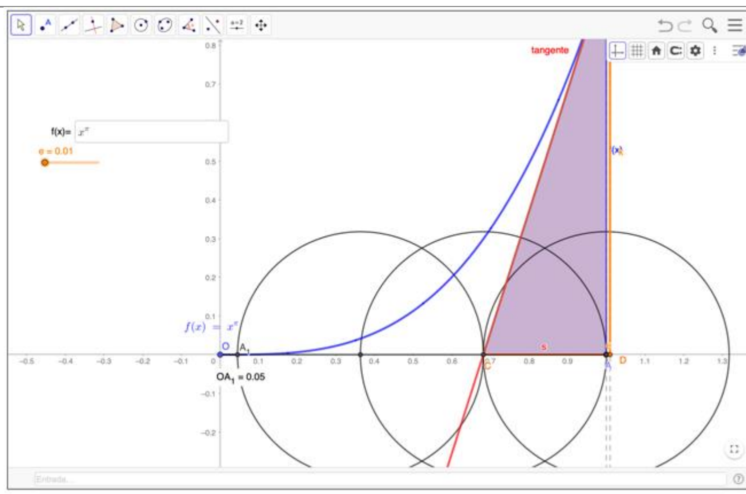


Sólo 3 estudiantes trabajaron esta tarea, los 13 restantes no lo intentaron por cuestiones de tiempo.

En el **experimento crucial constructivo (ECC)**, el estudiante realiza una construcción auxiliar como ejemplo para justificar su conjetura, y ese es su único elemento de validación. Por ejemplo:

Tabla 82

Respuesta de E6 en la tarea 15

Respuesta de E6


Para $f(x) = x^{\pi}$, ¿Cuál es la relación entre s y x ?, ¿por qué?

Aa π De manera Geometrica podemos observar en el caso de x^pi como s "cabe 3 veces" y quedan 0.05, que podemos estimar de manera inexacta que x=π*s; es decir s=x/π

El estudiante usa un argumento geométrico para plantear una conjetura, construyendo circunferencias de radio $\boldsymbol{s}$, y concluye que $\boldsymbol{x = \pi s}$ porque “cabe 3 veces y quedan 0.05”, este es su ejemplo crucial, porque lleva x hasta 1, y muestra que s cabe 3 veces y un poquito mas, pero si se analizan otros casos de $\boldsymbol{x}$, este valor que “queda” no es constante.

La estrategia del estudiante es acomodar los elementos de la construcción, intentando buscar argumentos para justificar la conjetura.

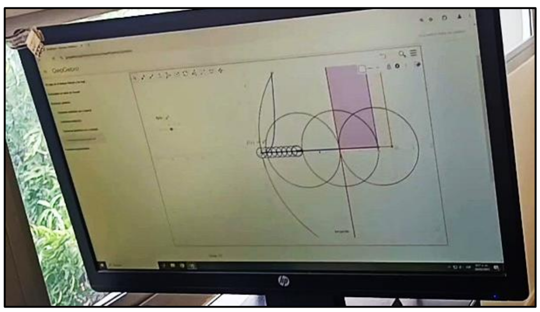
En el intento de tipo **ejemplo genérico analítico (EGA),** el estudiante toma varios ejemplos que le permiten realizar algunas generalizaciones. Por ejemplo:

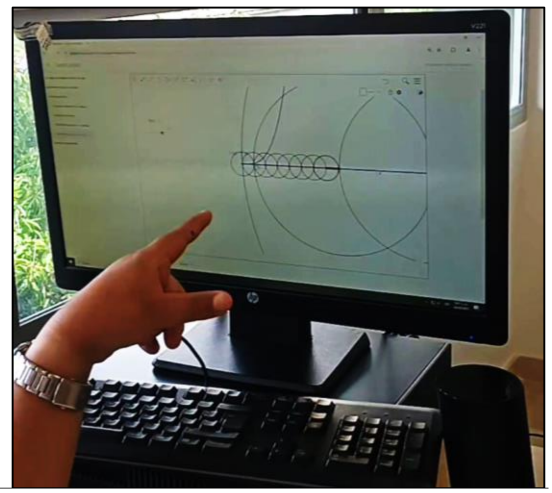
Tabla 83

Respuesta de E9 en la tarea 15

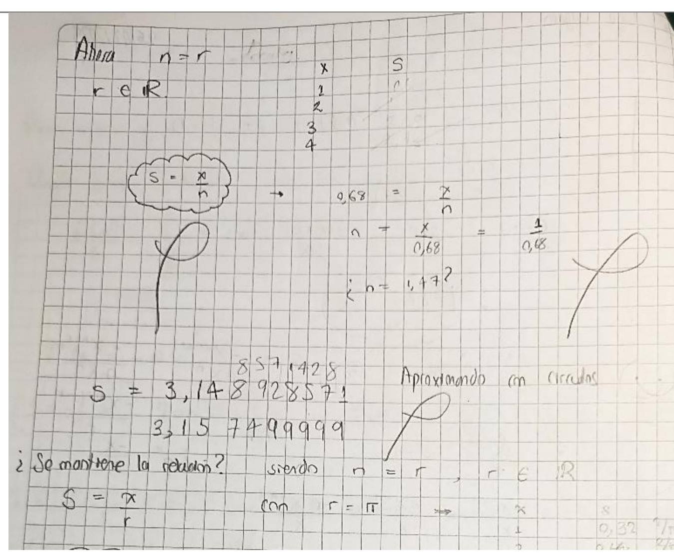
E9 explicando su demostración

E9: No, pues me puse a mirar, como estamos trabajando con $\boldsymbol{\pi}$, me puse a trabajar con círculos, entonces me puse a mirar cuántos $\boldsymbol{s}$ cabían desde acá hasta acá, o sea, cuantos $\boldsymbol{s}$ cabían en $\boldsymbol{x}$, entonces, me fui de círculo en círculo y de aquí hasta aquí iban por ahora 3, entonces estaba anotando, después dije, “bueno, en esta medida, ¿cuántas veces caben en un $\boldsymbol{s}$? Entonces empecé a medirlo, a medirlo y me sobra este espacio chiquito, entonces yo dije “bueno, acá caben más o menos 7 veces en 1 unidad de $\boldsymbol{s}$", entonces lo que hice fue dividir 10 en 7 me dio 14, entonces 3, 14, y me puse a mirar este chiquito, empecé a medirlo y en el segmento ese de 14 decimales, por decir así, y me llegó hasta el otro, o sea…





Respuesta de E9



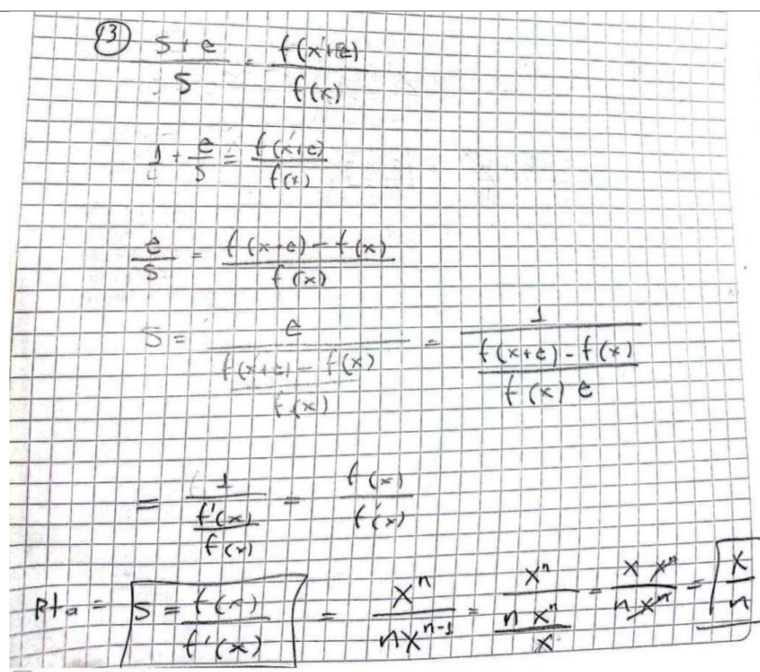
El estudiante llevó a cabo un procedimiento empírico para aproximar la relación, explorando con circunferencias cómo una cabía en la otra mediante mediciones sucesivas. Observó que $\boldsymbol{s}$ cabía aproximadamente tres veces en $\boldsymbol{x}$, con un pequeño sobrante. Luego dividió 10 entre 7, obteniendo aproximadamente 1,428, identificando así de forma intuitiva la aparición del número π. Aunque no utilizó herramientas formales, el estudiante construyó una estimación de la razón entre las magnitudes, lo que le permitió plantear una conjetura que es verdadera para cualquier valor de $\boldsymbol{x}$.

En la demostración **deductiva formal estructural (DFE)** el estudiante usa un hecho demostrado en tareas anteriores donde la subtangente es la razón entre la función y la derivada. Por ejemplo:

Tabla 84

Respuesta de E16 en la tarea 15

Respuesta de E16



13

$$\frac{s+e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)}$$

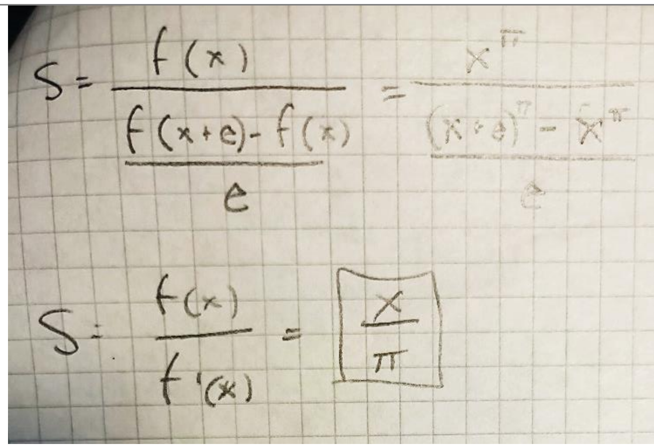
$$1 + \frac{e}{s} = \frac{f(x+e)}{f(x)}$$

$$\frac{e}{s} = \frac{f(x+e) - f(x)}{f(x)}$$

$$s = \frac{e}{\frac{f(x+e) - f(x)}{f(x)}} = \frac{1}{\frac{f(x+e) - f(x)}{f(x)\, e}}$$

$$= \frac{1}{\frac{f'(x)}{f(x)}} = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\text{Rta} = \boxed{s = \frac{f(x)}{f'(x)}} = \frac{x^n}{n x^{n-1}} = \frac{x^n}{\frac{n x^n}{x}} = \frac{x\, \cancel{x^n}}{n \cancel{x^n}} = \boxed{\frac{x}{n}}$$



El estudiante intenta construir la demostración usando la relación de semejanza, pero encuentra el procedimiento complicado y decide utilizar lo demostrado anteriormente $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})}$.

Por razones asociadas a la gestión del tiempo, no fue posible implementar el capítulo 3 del libro: funciones exponenciales.

7. Conclusiones

El trabajo de investigación desarrollado ha permitido analizar y plantear algunas reflexiones y conclusiones a la luz del marco referencial y de los objetivos propuestos:

Teniendo en cuenta que la mayoría de las demostraciones identificadas en el test diagnóstico fueron deductivas fallidas, se evidenciaron desde un principio, dificultades en la comprensión, tanto del concepto de la derivada como del proceso de demostración. Se encontró que el único recurso de los estudiantes para construir demostraciones de las reglas de derivación, fue la definición de derivada como límite del cociente incremental, siempre que lograron recordarla. Quienes la recordaron, pero no lograron concluir el resultado, presentaron errores técnicos (ET) en la manipulación algebraica al expandir el cubo de un binomio en el denominador. En la demostración de la función exponencial natural, plantearon el límite del cociente incremental y realizaron algunos procedimientos algebraicos correctos, pero no fueron capaces de calcular o recordar el $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$. Entre los que intentaron otras estrategias o procedimientos para la demostración, usaron argumentos no pertinentes como el Teorema Fundamental del Cálculo o prueba por contrarrecíproca, evidenciando errores de tipo teoremas o definiciones deformadas (TD). Esto evidencia dificultades asociadas a procesos de pensamiento matemático (PPM) en el proceso de razonamiento y demostración y el proceso de ejercitación, comparación y ejecución de procedimientos. Estos resultados ponen en evidencia la necesidad y pertinencia de fortalecer la comprensión y demostración de las reglas de derivación a través de enfoques que integren representaciones métricas, geométricas y algebraicas.

Respecto a la implementación de la secuencia de enseñanza, en las tareas de exploración y la demostración de la regla de derivación para funciones con n real, se evidenció que los estudiantes soportaron sus argumentos principalmente en la descripción de lo que "veían" en el applet y no en el uso de argumentos teóricos para validar matemáticamente sus afirmaciones. En las tareas de demostración de la regla de derivación para la función potencia con n racional, la mayoría de los estudiantes soportaron sus argumentos en reglas teóricas encontradas o recordadas durante la exploración del applet, en procedimientos algebraicos correctos, algunos de ellos apoyados en un dibujo geométrico o en la representación dinámica del applet. Solo se evidenció en un estudiante el uso de un par de triángulos semejantes distintos a los que estaban explícitos en la configuración dada en el applet, en la demostración para un n particular. Otros factores externos que influyeron en la comprensión y la demostración de las reglas de derivación, fue el poco tiempo que se tuvo para la implementación (tres sesiones de clase de dos horas) y la inasistencia a algunas sesiones, impidiendo que se abordaran la mayoría de las tareas de demostración de las reglas de derivación para las funciones potencia con n irracional y las funciones exponenciales.

En el análisis de los tipos de demostración, considerando las 13 tareas abordadas, se encontró que el $59{,}49\%$ correspondió a demostraciones inductivas o empíricas, mientras que el $40{,}51\%$ fueron demostraciones deductivas. De ello se concluye que el razonamiento inductivo o empírico sigue siendo persistente, lo cual resulta llamativo, dado que los estudiantes cursan un semestre avanzado y han aprobado asignaturas de carácter estrictamente demostrativo; una causa para ello, consiste en que los estudiantes no están familiarizados con tareas que exijan el planteamiento de conjeturas y la construcción sus propias demostraciones.

Con relación a los errores, se identificaron datos mal utilizados (DMU) en estudiantes que, a partir de un razonamiento empírico, planteaban conjeturas y, al intentar justificarlas, recurrían a manipulaciones algebraicas sin sentido, añadiendo elementos extraños o incorrectos con el fin de obtener la respuesta esperada. También surgieron errores de interpretación incorrecta del lenguaje (IIL), cuando no lograban traducir una situación geométrica al lenguaje algebraico; inferencias no válidas lógicamente (INV), al afirmar de manera incorrecta, que una propiedad o relación implicaba otra, o al formular conjeturas erróneas; teoremas o definiciones deformados (TD) al atribuir propiedades falsas a partir de lo que observaban en el applet y errores técnicos (ET) asociados a fallas en la manipulación algebraica y en la ejecución de algoritmos. Estos errores evidencian dificultades relacionadas con:

- Los procesos de pensamiento matemático (PPM), en el de razonamiento y demostración, para quienes no lograron construir demostraciones deductivas; en el de representación al no poder coordinar las representaciones geométricas, métricas y algebraicas y dificultades en el de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, en particular en la manipulación algebraica.
- La complejidad de los objetos matemáticos (COM), especialmente en torno a las razones trigonométricas y a la subtangente, cuya dificultad radicó en la necesidad de reestructurar el saber previo: pasar de concebir la derivada como el límite de la recta secante que pasa por dos puntos sobre la curva a comprenderla como la razón entre la función y la subtangente como lo planteó Fermat.
- Los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas (EAM), provenientes de la forma en que el docente decidió abordar el concepto de derivada.
- Las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas (AAE), en donde se observó en varios estudiantes un sentimiento de frustración al no lograr comprender los elementos trabajados, lo que obstaculizó su aprendizaje.

Respecto a los aportes de la secuencia de enseñanza sobre las reglas de derivación de la función potencia incorporando las ideas de Fermat en GeoGebra, se concluye que algunos estudiantes no lograron avances significativos, dado que el applet se convirtió en un obstáculo más que en una herramienta de apoyo, llegando incluso a asumir las retroalimentaciones automáticas como demostraciones, Sin embargo, en aquellos estudiantes que sí lograron coordinar las representaciones métricas, geométricas y algebraicas, la secuencia les ayudó a descubrir o recordar propiedades de los triángulos y relaciones de semejanza para construir la demostración de la subtangente, validar conjeturas sobre la relación entre s y x de manera numérica, métrica, y con construcciones auxiliares; además de reconocer la relación entre los catetos del triángulo rectángulo como estrategia para determinar la pendiente de la recta tangente. Estos estudiantes no solo mejoraron la comprensión de la derivada, sino que también lograron construir sus “propias” demostraciones deductivas, mostrando incluso manifestaciones de satisfacción por lo aprendido.

En cuanto al conocimiento matemático, entendiéndolo como el saber especializado que el profesor posee acerca de los objetos, estructuras, prácticas y lenguajes propios de la matemática; y el conocimiento didáctico- matemático como el saber especializado del profesor sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Carillo-Yañez et al. 2018), se concluye, que los estudiantes presentan deficiencias aunque estén cursando semestres avanzados, lo cual genera inquietud respecto a su futura labor docente, dado que las limitaciones en su formación pueden trasladarse a su práctica profesional.

8. Recomendaciones

Para futuras implementaciones, se sugiere tener más tiempo disponible, dado que la mayoría de estudiantes no alcanzó a abordar las funciones potencia con n real y las funciones exponenciales. Es necesario tener un momento de discusión de las ideas después de cada subcapítulo, con el fin de aclarar cualquier duda o inquietud emergente, lo que permitirá avanzar mejor en la comprensión y construcción de demostraciones deductivas.

Como se evidenció en el proceso de E5 (pág. 125), es posible, mediante preguntas orientadoras y sugerencias, acompañar al estudiante en la comprensión de los elementos del applet y en la construcción de demostraciones deductivas. En esta línea, una posible adaptación consiste en incorporar retroacciones automáticas y orientaciones que promuevan una exploración más profunda de las ideas y que motiven al estudiante a justificar sus hallazgos.

Para las funciones con n real, es necesario reformular las preguntas, pues no se espera que los estudiantes demuestren la relación entre s y x de manera general, debido a la complejidad de los cálculos, lo que se espera es que exploren empírica o inductivamente para casos particulares de n. También se debería preguntar por la derivada para estos casos.

Con las adaptaciones, se espera obtener una nueva versión para aplicarla en futuras investigaciones con estudiantes que estén cursando la asignatura de Cálculo I.

Referencias bibliográficas

Antonio, M. (2020). Tipos de demostraciones que realizan los estudiantes en un curso de Precálculo.

Alarcón, S. A., Suescún, C. M., & de la Torre, A. (2005). El método de las tangentes de Fermat. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, *13*(2), 101-123.

Aldana-Bermúdez, E., & López-Mesa, J. H. (2018). Estudio histórico-epistemológico y didáctico de la parábola. Praxis & Saber, 9(19), 63-88.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 97–140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Balacheff, N. (2020). The transition from mathematical argumentation to mathematical proof, a learning and teaching challenge (invited lecture). In *The 14th International Congress on Mathematical Education*.

Bell, A. W. (1976). A study of pupil's proof- explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics* , 7(1), 23-40.

Beltrán-Meneu, M. J., Ramírez-Uclés, R., Ribera-Puchades, J. M., Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2024). A Case Study of Proving by Students with Different Levels of Mathematical Giftedness. *Mathematics Teaching Research Journal*, *16*(2), 119-145.

Blanco, T., Camargo, L., & Sequeiros, P. (2024). How visualization and argumentation are articulated in research on teaching and learning geometry. *ZDM- Mathematics Education*.

Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia.

Camargo, L. U. (2021). Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Universidad de Antioquia.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Conejo, L., Arce, M., Ortega, O. (2014). Justificación de las reglas de derivación en libros de texto de cuatro editoriales desde LGE hasta LOE.

Fiallo, J. (2011). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica (Doctoral dissertation, Universitat de València).

Fiallo, J., Parada, S. (2018). Estudio dinámico del cambio y la variación. Curso de precálculo mediado por GeoGebra.

Font, V. (2010). Análisis didáctico de objetos y procesos matemáticos. La derivada como contexto de reflexión. Working Paper. Barcelona: Universidad de Barcelona. IX Conferencia Argentina de Educación Matemática.

Gutiérrez, A. (1996). Visualización en geometría tridimensional: En busca de un marco. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), Actas de la 20.ª Conferencia de PME (Vol. 1, págs. 3-19). Universidad de Valencia.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico).*

Leithold, L. (1998). *El cálculo* (7ª ed.). Oxford University Press.

Martínez Aparicio, S. A., & Fiallo Leal, J. E. (2020). Acercamiento al proceso de demostración en el grado noveno en un ambiente de geometría dinámica [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio Noesis.

MEN (1998). Lineamientos Curriculares del área de Matemáticas. Bogotá.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 75-88.

Morales-Ramírez, G., & Rubio Goycochea, N. (2021). Esquemas de argumentación de estudiantes de bachillerato al usar GeoGebra en el contexto de teselados. *Uniciencia*, 35(2), 253-274.

Movshovitz -Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in mathematics Education*, *18*(1), 3-14.

NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Perez, A. & Hernández, H. (2010) El uso de la subtangente para caracterizar una curva.

Pérez Trujillo, A. R., & Hernández Pérez, H. (2010). El uso de la subtangente para caracterizar una curva. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23, 795-802.

Riaño, Á. (2023). Tipos de demostración que realizan estudiantes de nuevo ingreso al curso de geometría euclidiana en las carreras de matemáticas y licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez & L. Rico (Eds.), *Educación matemática: Primer Simposio Internacional de Educación Matemática* (pp. 69-104). Bogotá: una empresa docente.

Samper, C., & Toro Uribe, J. A. (2015). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 1(44), 224-229.

Smith, R. T., Minton, R. B., & Rafhi, Z. A. (2018). Cálculo: Trascendentes tempranas (5ª ed.). McGraw-Hill.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. In: L. Rico (Coord.), La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria, Barcelona: ICE Universitat de Barcelona/HORSORI, 125-154.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective teachers'challenges in teaching reasoning-and-proving. International Journal of Science and Mathematics Education, 11, 1463-1490.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. Educational Studies in Mathematics, 96, 119-127.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (7ª ed.). Cengage Learning.

Vrancken, S., & Engler, A. (2013). Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 53-70.*

Zill, D. G., & Wright, W. S. (2011). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (4ª ed.). Cengage Learning.