

*“LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS”*

SILVIA PAOLA SOLANO CAMARGO

*UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA*

2005

*“LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS”*

SILVIA PAOLA SOLANO CAMARGO

*Trabajo de Grado para optar al título de
Especialista en Educación Matemática*

*DIRECTORA:
Ph. D. DIANA JARAMILLO*

*UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA*

2005

A mis padres, Justo José† y Beatriz,
quienes son la fuente de mi inspiración.

A Ricardo,
porque a pesar de la distancia y del tiempo,
me ha ofrecido su apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

*A Dios,
quien es la fortaleza de mi vida.
A Laura, Melissa, Indira, Martha y Diana,
quienes dieron sentido a esta experiencia educativa.
A Diana Jaramillo, mi directora
de proyecto, por su orientación,
paciencia y dedicación.
A la Escuela de Matemáticas
por permitirme crecer profesionalmente.
A mi madre, mis hermanos y mis sobrinos
por su apoyo y compañía.
A mis compañeros de Especialización,
William, Stella, Jenny, Cristian, Johanna y Edwin,
quienes hicieron esta experiencia
más agradable.
A Ricardo, por su amor y
sus palabras de aliento.*

TABLA DE CONTENIDO

	Página
ABRIENDO EL CAMINO	1
(RE)CORRIENDO PASO A PASO	5
ANALIZANDO LAS CATEGORÍAS	14
1. Construyendo los mapas conceptuales	14
2. Negociación de significados	52
3. Disquisiciones trigonométricas	71
EL CASO DE DIANA	84
CONCLUYENDO ESTA EXPERIENCIA	102
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. “Hello Kity” Mapa conceptual elaborado por	38
Figura 2. “El arco iris 2” mapa conceptual elaborado por Diana	39
Figura 3. “Tigger” Mapa conceptual elaborado por Indira	41
Figura 4. “Payaso” Mapa conceptual elaborado por Laura	42
Figura 5. “Vaca lechera” Mapa conceptual elaborado por Melissa	43
Figura 6. “Mickey Mouse” Mapa conceptual elaborado por Indira	46
Figura 7. “El avión” Mapa conceptual elaborado por Laura	47
Figura 8. “Un día de playa” Mapa conceptual elaborado por Melissa	49
Figura 9. “Hello Kity 2” Mapa conceptual elaborado por Martha	50
Figura 10. Triángulo rectángulo	57
Figura 11. Aparte del mapa conceptual elaborado por Indira	58
Figura 12. Aparte del mapa conceptual elaborado por Laura	59
Figura 13. Aparte del mapa conceptual elaborado por Martha	60
Figura 14. Aparte del mapa conceptual elaborado por Melissa	61
Figura 15. Aparte del mapa conceptual elaborado por Diana	61
Figura 16. Aparte del mapa conceptual elaborado por Melissa	63
Figura 17. Triángulo	64
Figura 18. Aparte del mapa conceptual elaborado por Indira	67
Figura 19. Aparte del mapa conceptual elaborado por Indira	68
Figura 20. Circunferencia unitaria	73
Figura 21. Segmentos trigonométricos	75
Figura 22. Aparte del mapa conceptual elaborado por Laura	79
Figura 23. Aparte del mapa conceptual elaborado por Martha	80
Figura 24. “El arco iris” Mapa conceptual elaborado por Diana	89
Figura 25. Aparte del mapa conceptual elaborado por Diana	93
Figura 26. “El arco iris 2” Mapa conceptual elaborado por Diana	98
Figura 27. Aparte del mapa conceptual elaborado por Diana	99

1. TÍTULO: LOS MAPAS CONCEPTUALES: UNA HERRAMIENTA/ESTRATEGIA EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS*.

2. AUTOR: SILVIA PAOLA SOLANO CAMARGO**

3. PALABRAS CLAVES:

Trigonometría.
Identidades Trigonómicas
Mapas Conceptuales
Aprendizaje Significativo
Matemáticas

4. DESCRIPCIÓN O CONTENIDO: En el tema de identidades trigonométricas los procesos de conceptualización son, en la mayoría de los casos, muy complejos y abstractos, los cuales se ven reflejados en el alto índice de mortalidad académica en este tema. Estas dificultades son corroboradas en mi experiencia cotidiana como docente del grado décimo, donde he detectado que el estudiante tiene confusión al relacionar las identidades trigonométricas y así resolver ejercicios que involucren el uso de ellas.

Esta confusión está asociadas, tal vez, al aprendizaje memorístico, de una forma mecánica y sin establecer las relaciones que existen entre las funciones trigonométricas, lo cual lleva, en la mayoría de los casos, a presentar dificultades en la solución de ejercicios y problemas que involucren identidades trigonométricas.

En el presente trabajo se exploraron los mapas conceptuales como una herramienta de aprendizaje para el estudio de las identidades trigonométricas.

Los mapas conceptuales surgen en el grupo de Novak y Gowin (Novak y Gowin, 1988) quienes lo consideran una estrategia sencilla pero poderosa para ayudar a los estudiantes a aprender y organizar los conceptos y las ideas básicas del aprendizaje. El mapa conceptual es una técnica que sirve para representar visualmente la estructura de la información y es considerada una buena estrategia de aprendizaje.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Especialización en Educación Matemática. JARAMILLO, Diana

1. TITLE: THE CONCEPTUAL MAPS: A HERRAMIENTA/ESTRATEGIA IN THE PROCESS OF LEARNING OF THE TRIGONOMETRICAL IDENTITIES^{*}

2. AUTHOR: SILVIA PAOLA SOLANO CAMARGO^{**}

3. KEY WORDS:

Trigonometry.
Trigonometrical identities
Conceptual maps
Significant learning
Mathematics

4. DESCRIPTION OR CONTENT: In the topic of trigonometrical identities the conceptualization processes are, in most of the cases, very complex and abstract, which are reflected in the high index of academic mortality in this topic. These difficulties are corroborated in my daily experience as educational of the grade tenth, where I have detected that the student has confusion when relating the trigonometrical identities and this way to solve exercises that involve the use of them.

This confusion is associate, perhaps, to the learning memorístico, in a mechanical way and without establishing the relationships that exist among the trigonometrical functions, that which takes, in most of the cases, to present difficulties in the solution of exercises and problems that involve trigonometrical identities.

Presently work the conceptual maps were explored as a learning tool for the study of the trigonometrical identities.

The conceptual maps arise in the group of Novak and Gowin (Novak and Gowin, 1988) who consider it a simple but powerful strategy to help the students to learn and to organize the concepts and the basic ideas of the learning. The conceptual map is a technique that is good to represent the structure of the information visually and a good learning strategy is considered.

^{*} Work of Grade

^{**} Ability of Sciences. Specialization in Mathematical Education. JARAMILLO, Diana

ABRIENDO EL CAMINO

En el estudio de las identidades trigonométricas los procesos de conceptualización son, en la mayoría de los casos, muy complejos y abstractos, los cuales se ven reflejados en el alto índice de mortalidad académica en este tema. Estas dificultades son corroboradas en mi experiencia cotidiana como docente del grado décimo, donde he detectado que el estudiante tiene confusión al relacionar las identidades trigonométricas y así resolver ejercicios que involucren el uso de ellas. Esta confusión está asociada, tal vez, al aprendizaje memorístico, de una forma mecánica y sin establecer las relaciones que existen entre las funciones trigonométricas, lo cual lleva, en la mayoría de los casos, a presentar dificultades en la solución de ejercicios y problemas que involucren identidades trigonométricas.

Esta fue la primera motivación que me llevó a considerar esta experiencia de aula, a partir de una dificultad que, tiempo atrás, había observado en mis estudiantes, como es la confusión al establecer las relaciones entre las identidades trigonométricas. La comprensión de esta dificultad no había sido abordada por mí hasta el momento. Surgió así una pregunta que se convirtió en la “inspiración” de esta experiencia de aula: **¿cómo los mapas conceptuales posibilitan que los estudiantes de décimo grado establezcan relaciones entre las identidades trigonométricas?** Para dar respuesta a esta pregunta, establecí el siguiente objetivo: **explorar los mapas conceptuales como una herramienta/estrategia en el proceso aprendizaje de las identidades trigonométricas.**

La experiencia de aula que presento a continuación se basó en una estrategia específica: los mapas conceptuales. El desarrollo de esta

estrategia se llevó a cabo a medida que las clases de trigonometría fueron avanzando y en las cuales tuve en cuenta la importancia de la construcción del conocimiento matemático para facilitar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Es preciso dejar claro que el objeto de estudio de este trabajo son los mapas conceptuales como herramienta de aprendizaje, aunque se tocaron elementos matemáticos de trigonometría que no son el tema de estudio.

Esta experiencia de aula la desarrollé con los tres grupos de décimo grado, para un total de 90 estudiantes, 86 mujeres y 4 hombres de una institución privada del municipio de Bucaramanga, en donde funcionan los grados transición a undécimo, en la jornada de la mañana. Sin embargo, para el análisis que presento en este trabajo solamente tomé la información de cinco estudiantes: Laura, Melissa, Indira, Martha y Diana, las cuales invité a hacer parte de esta experiencia de aula por medio de una carta y quienes aceptaron y además autorizaron que sus nombres reales aparecieran en el presente trabajo. Esta información fue recogida a partir de las clases realizadas, las entrevistas hechas a las estudiantes, los mapas conceptuales y los textos narrativos producidos por ellas, instrumentos estos que fueron evidenciando su acercamiento al objetivo. Tuve en cuenta, como criterio para la selección de los estudiantes, aquellos mapas que se acercaron a lo que es un mapa conceptual, desde la visión contemplada por Jaramillo (2003) que estudiaremos en el segundo capítulo del presente trabajo.

A continuación quiero hacer una breve descripción de las cinco estudiantes:

1. Laura tiene 16 años, se ha destacado por salir en el cuadro de honor durante todos sus años de escolaridad, le encantan las matemáticas y

siempre ha participado en las Olimpiadas Matemáticas¹ que se aplican en el Colegio, destacándose en los primeros puestos. En las clases siempre estuvo muy activa y atenta a los “puntos de bonificación”² que se dan por participación.

2. Melissa tiene 16 años y llegó en 2004 al Colegio. Venía de un colegio de Medellín y me comentó que su gusto por las matemáticas la heredó de su padre, quien es ingeniero y siempre hace énfasis en la importancia de esta materia en el desarrollo y desempeño del estudiante y futuro profesional.
3. Indira tiene 16 años, le gustan las matemáticas y, de igual forma que Laura, siempre se ha destacado entre los mejores estudiantes del colegio. Siempre quiere pasar al tablero a resolver los ejercicios propuestos en la clase para ganar “puntos de bonificación”.
4. Martha tiene 15 años. En repetidas ocasiones me ha preguntado “¿resolver identidades trigonométricas es muy difícil?” Pues según me comenta, sus amigos de otras instituciones le han infundido temor por la trigonometría, especialmente por el tema de identidades.
5. Diana tiene 17 años. Ella ha manifestado que las matemáticas no son “su mejor compañía”, siempre le han parecido difíciles y ahora que está en décimo grado no será la excepción, pues le han contado que la trigonometría es lo más complicado del mundo.

¹ Las Olimpiadas Matemáticas es una actividad que organiza la Universidad Antonio Nariño para estudiantes de bachillerato y universitarios a nivel municipal, departamental y nacional.

² Puntos de bonificación: son incentivos que se dan a los estudiantes por participar en la clase realizando los ejercicios y problemas que se plantean, además, sirven para incrementar la calificación al final del período.

El relato de esta experiencia de aula la hago en cuatro capítulos; de forma breve los presento a continuación:

En el primer capítulo, “**(Re)corriendo paso a paso**”, muestro el método que seguí para la construcción de este trabajo. Aquí describo las motivaciones que me llevaron a plantear esta experiencia de aula y la estrategia utilizada, cuál es el objetivo propuesto y cuál es la pertinencia e importancia del tema a desarrollar, entre otros aspectos. Este capítulo lo he denominado (re)corriendo paso a paso porque estoy corriendo y recorriendo cada paso de esta experiencia de aula.

En el segundo capítulo, “**Analizando las categorías**”, propongo tres grandes categorías que recogen toda la experiencia de aula, en cuyo análisis incluyo las voces de los estudiantes, los teóricos que ayudan a sustentar este trabajo, así como mis puntos de vista.

En el tercer capítulo, “**El caso de Diana**”, analizo el caso de una de las estudiantes: Diana, para así poder dejar más claro a los lectores de este trabajo cual fue el proceso de aprendizaje que se realizó con cada una de las estudiantes durante el toda la experiencia vivida.

Para finalizar, presento el capítulo cuarto, “**Concluyendo esta experiencia**”, donde muestro las conclusiones a las que pude llegar una vez finalizada esta experiencia de aula, así como algunas recomendaciones.

Concluyo esta introducción aclarando que el trabajo está escrito en primera persona, siendo esta la opción más apropiada para contar esta experiencia de aula, buscando generar un acercamiento entre el lector, la experiencia contada y mi propia vivencia.

(RE)CORRIENDO PASO A PASO

En algunas de las experiencias educativas, compartidas con colegas, se ha especulado acerca de las dificultades que presentan los estudiantes de décimo al identificar y resolver ejercicios y problemas que involucren identidades trigonométricas.

En los métodos tradicionales de enseñanza que presentan algunos libros y textos guías se ha pretendido lograr aprendizajes obligando a los estudiantes a interiorizar las identidades como dogma de fe, resolviendo una cantidad de ejercicios en forma mecánica y carente de significado, lo que probablemente ha generado una apatía y desinterés por el estudio de este tema.

La dificultad más común, en el estudio de este tema es, tal vez, deducir las identidades básicas, dado que el estudiante muy pocas veces establece una conexión entre lo que sabe, y cómo puede aplicarlo en el momento de resolver un problema o ejercicio. Por esto, al comprobar o verificar si una identidad es verdadera o no, no se tiene claro qué camino seguir o qué herramientas utilizar para resolver una demostración.

Esto resalta la importancia del aprendizaje significativo propuesto por Ausubel quien plantea que lo más importante es lo que el alumno ya sabe y, este, a su vez, debe relacionar ése conocimiento con los nuevos conceptos.

Según Ausubel citado por Novak y Gowin (1988, p.60)

“Si tuviera que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, diría lo siguiente: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averíguese esto y enséñese en consecuencia”.

A partir del modelo de Ausubel, surge la idea del mapa conceptual en el grupo de investigación Novak y Gowin (Novak y Gowin, 1988), quienes lo consideran una estrategia sencilla pero poderosa para ayudar a los estudiantes a aprender y organizar los conceptos y las ideas básicas del aprendizaje. Al respecto estos autores argumentan: “Los mapas conceptuales ayudan al que aprende a hacer más evidentes los conceptos clave o las proposiciones que se van a aprender, a la vez que sugieren conexiones entre los nuevos conocimientos y lo que ya sabe el alumno” (Novak y Gowin, 1988, p.41).

Lo anterior dio lugar a la pregunta fuente de inspiración de esta experiencia: **¿cómo los mapas conceptuales posibilitan que los estudiantes de décimo grado establezcan relaciones entre las identidades trigonométricas?** Entre otras cosas, porque los mapas conceptuales resultan muy útiles en la descripción del discurso matemático ya que, la estructura del contenido matemático no es lineal. De un lado, todo concepto se encuentra relacionado con otros conceptos y, en general, todo procedimiento está relacionado con uno o más conceptos y procedimientos adicionales. Por ejemplo, en la experiencia aquí planteada, los estudiantes no proporcionaban procedimientos claros al resolver algún tipo de demostración, pues mostraban que no sabían que camino seguir o que identidad o artificio matemático utilizar para resolver este tipo de ejercicios, tampoco establecían algún tipo de relación entre las identidades dejando la impresión de que el manejo de las fórmulas trigonométricas es puramente memorístico y mecánico.

De otro lado, en los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (The National Council of Teachers of Mathematics – NCTM) se plantea la importancia de incluir en el currículo de matemáticas el estudio de la trigonometría para que los estudiantes sean capaces de:

“Aplicar la trigonometría en la resolución de problemas donde aparezcan triángulos, explorar los fenómenos periódicos del mundo real usando las funciones trigonométricas, aplicar técnicas generales de representación gráfica a funciones trigonométricas, resolver ecuaciones trigonométricas y verificar identidades trigonométricas, conocer las conexiones existentes entre las funciones trigonométricas y las coordenadas polares, los números complejos y las series”. NCTM citado por Osorio (2002, p.38)

Lo anterior me llevó a proponer esta experiencia de aula cuya intención era que, a través de las clases de trigonometría y explorando los mapas conceptuales como una herramienta/estrategia de aprendizaje, los estudiantes pudieran establecer relaciones entre las identidades trigonométricas. Es importante tener en cuenta que otras personas también han explorado otras estrategias y han estudiado aspectos relacionados con estos temas de trigonometría. Por lo tanto, es necesario, en este momento, hacer mención de algunos de los trabajos que revisé antes de iniciar el trabajo en el aula, con el fin de (re)pensar algunos aspectos que fueran pertinentes para esta experiencia.

En la revisión bibliográfica hecha sobre el tema se nota una preocupación por el manejo de conceptos de las relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos al igual que por las identidades pitagóricas trigonométricas, y se proponen experiencias que orientan dichos aprendizajes.

Algunas de las propuestas que estudié, presentadas dentro del Programa de Especialización en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander, fueron:

- ♦ *Las relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos*, elaborado por Libia García Méndez en 1996. En esta propuesta la autora buscó una alternativa en la enseñanza de las relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos en 10º a través de unas secuencias de clases intencionalmente dirigidas. El objetivo de estas actividades era que el alumno pudiese modificar y reestructurar el conocimiento matemático, enfatizando en los procesos más que en los resultados y acentuando los aspectos dinámicos de las matemáticas. De esta forma, se generaría en las mentes de los alumnos las habilidades necesarias para recrear y manejar un conocimiento matemático. La autora basó su proyecto en la teoría constructivista (García, 1996). 0
- ♦ *Diseño metodológico para llegar a la conceptualización de identidades pitagóricas a partir de la aplicación de actividades pedagógicas que requieren de uso de material didáctico*, trabajo elaborado por Rodolfo E. Ortiz O. en 2000. El autor de este trabajo quiso cambiar los modelos pedagógicos que presentan los libros y los textos guías, donde se pretende que el estudiante memorice una serie de fórmulas para que las aplique en la solución de identidades y problemas donde se requiere o amerita el uso de estas. Haciendo uso del saber cotidiano del estudiante y del saber científico que posee y por medio de una actividad práctica, los estudiantes construyeron el concepto de identidades pitagóricas trigonométricas, utilizando como material didáctico el geoplano trigonométrico y los conceptos de ángulos entre paralelas, semejanza de triángulos, triángulos rectángulos y definición

de las funciones trigonométricas. Este autor basó su proyecto en las teorías del aprendizaje significativo propuesto por Ausubel (Ortíz, 2000).

También estudié algunas propuestas que han abordado el tema de mapas conceptuales, estas fueron:

- ♦ *(Re)constituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica*, trabajo elaborado por Diana Jaramillo en el 2003. En este trabajo, la autora aborda en uno de sus capítulos el tema de mapas conceptuales. Allí, entre otros aspectos, la autora resalta la importancia de la utilización de los mapas en el salón de clase, ya que se pueden constituir en un instrumento para ayudar a los estudiantes y a los profesores a captar el “significado” de los temas que se van a aprender (Jaramillo, 2003).
- ♦ *Los mapas cognitivos como representaciones de la acción*, trabajo elaborado por Cristina Moral Santaella en 1992. En este trabajo la autora considera los mapas conceptuales como una técnica que consiste en representar gráficamente los conceptos y las relaciones jerárquicas entre los conceptos que se producen, teniendo como punto de partida un tema dado. También señala la autora que los mapas se constituyen en estrategias metacognitivas que propician el aprendizaje, pues este aprendizaje metacognitivo ocurre cuando una persona adquiere alguna estrategia general que facilite su aprendizaje o la comprensión sobre algún conocimiento específico. La autora muestra como los mapas ayudan a adquirir esta estrategia y por tanto se les considera una buena herramienta de aprendizaje (Moral, 1992).

- ♦ *Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas*, trabajo elaborado por Pedro Gómez y Cristina Carulla en 2001. En este documento los autores proponen dos herramientas que pueden aportar a una mayor comprensión de las matemáticas escolares y a la construcción de estrategias para abordar los problemas a los que se ven enfrentados los docentes en el aula de clase de matemáticas, se trata de los sistemas de representación y los mapas conceptuales. Los autores describen las principales ideas de mapa conceptual como medio de representación del conocimiento matemático y algunas de las características de los mapas conceptuales que buscan describir un contenido matemático particular (Gómez y Carulla, 2001)
- ♦ *Experiencia de trabajo con mapas conceptuales en Matemáticas*, trabajo elaborado por Francisco José Anillo Ramos en 1991. El autor utilizó la técnica de mapas conceptuales para estudiar temas tales como triángulos, historia de las matemáticas y para la resolución de problemas (Anillo, 1991)

Conocidos algunos de los antecedentes que tuve en cuenta para la realización de esta experiencia, así como algunas de las motivaciones que me llevaron a ella, quiero referirme a la metodología que implementé para el desarrollo de esta experiencia.

En “Abriendo el camino” ya había hecho algunos comentarios generales respecto a la metodología, indicando que esta experiencia de aula se basó en una estrategia específica y a medida que iban transcurriendo las clases, los estudiantes iban construyendo sus mapas conceptuales, estos se realizaron en tres fases. La primera fase correspondió a la “etapa de

construcción del primer mapa” en la cual el estudiante se vio enfrentado a tratar de construir un mapa conceptual para matemáticas. Es de anotar que esta herramienta es utilizada en la institución por los estudiantes en asignaturas tales como español, sociales, filosofía y ciencias políticas, pero nunca había sido considerada para matemáticas. Esta estrategia buscó propiciar, en los estudiantes, algunas acciones como la representación, la comunicación, la abstracción y la construcción entre otras, los cuales corresponden a elementos de gran importancia para el aprendizaje de las identidades trigonométricas.

La segunda fase se refiere al cambio que los estudiantes dieron a sus mapas una vez que se discutieron las ideas centrales acerca de lo que era un mapa y lo que no era, dado que muchos estudiantes tenían concepciones erradas acerca de los mapas conceptuales. Esta fase buscaba motivar a los estudiantes y facilitarles la comprensión de los conceptos relacionados en esta experiencia.

Por último, la puesta en marcha de un último mapa que encerraba todos los temas relacionados con las identidades trigonométricas e incluía la elaboración de un texto narrativo que permitiera una mayor comprensión de los mapas construidos por cada uno de ellos.

Debo aclarar que durante todo el proceso, y en forma continua, evaluamos —los estudiantes y yo— el trabajo y los logros alcanzados.

Una vez realizados los mapas por parte de los estudiantes inicié el análisis de los mismos. Para el análisis de la información revisé varias veces los datos y registros que había obtenido de los estudiantes, a través de la realización de diferentes mapas conceptuales, los textos narrativos, las

entrevistas realizadas a cada uno, los aportes de la clase y los datos registrados en mi diario de campo. Este proceso no fue fácil, requirió de una revisión constante de los registros descritos anteriormente, tratando de recoger la información más relevante. A partir de dicha revisión establecí tres categorías de análisis que recogieron la mayor parte de la información de los estudiantes. Estas categorías fueron:

- ♦ Construyendo los mapas conceptuales: en esta categoría de análisis se incluyen las experiencias de los estudiantes en la realización de cada uno de los mapas. Aquí aparecen las apreciaciones y observaciones que los estudiantes indicaron a partir de la construcción de los mapas, algunas de las frases que expresaron, los obstáculos que se les presentaron y como los vencieron, entre otros aspectos.
- ♦ Negociación de significados: esta categoría de análisis recoge la información de los estudiantes que está relacionada con el significado que, a partir de los mapas conceptuales, dieron a las identidades trigonométricas.
- ♦ Disquisiciones trigonométricas: esta categoría de análisis recoge, de los mapas conceptuales, todos los elementos que están relacionados con el proceso de aproximación que hicieron los estudiantes hacia el aprendizaje de las identidades trigonométricas. Aquí establezco cómo las estudiantes fueron interpretando las relaciones entre las funciones trigonométricas y las operaciones en los ángulos. Al igual que en las otras categorías, aquí aparecen unas frases textuales de los estudiantes así como partes exactas de los trabajos que presentaron.

*LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS*

Con cada una de las categorías mencionadas anteriormente, se hizo una triangulación entre tres tipos de información: la información recogida de los estudiantes, la información leída sobre algunos autores y, finalmente, mis propias ideas, suposiciones y conclusiones.

ANALIZANDO LAS CATEGORÍAS

1. Construyendo los mapas conceptuales.

Generalmente la trigonometría se ha convertido para los estudiantes de décimo grado en un dolor de cabeza y por esto muchos de ellos no quieren saber nada de ella, les horroriza la idea de estudiar trigonometría, la ven difícil. Esto ha llevado a que generación tras generación se transmita la idea de que la trigonometría es “el terror de décimo grado” y que sólo los más inteligentes puedan entenderlas y aprenderlas.

El aprendizaje es un proceso de desarrollo de estructuras significativas. El aprendizaje se identifica con “conocer” definido como “comprensión del significado”. De ahí que cuando existen una vacilación o duda en el aprendizaje no se ha comprendido plenamente.

La formación y desarrollo de la estructura cognitiva depende del modo como percibe una persona los aspectos psicológicos del mundo personal, físico y social. Las motivaciones, incluso, dependen de la “estructura cognitiva”, por tanto, el cambio de motivación implica un cambio de estructura cognitiva. Por medio del aprendizaje se producen los cambios de las estructuras significativas o comprensión interna de la situación y su significado. Los cambios que se producen en la estructura cognitiva provienen del cambio en la misma estructura y por la fuerza que tienen en el “aquí y ahora” las necesidades, motivaciones, deseos, tensiones, aspiraciones,...(Ontoria, 1999).

Dentro de la concepción de Ausubel es importante clarificar el concepto de *estructura cognitiva*. Ella se define como construcción hipotética, es decir, entidades supuestamente hipotéticas que tanto deben explicar la unidad, cierre y homogeneidad individual, como las semejanzas y coincidencias de determinados modos de comportamiento. Las estructuras cognitivas son utilizadas por Ausubel para designar el conocimiento de un tema determinado y su organización clara y estable, y están en conexión con el tipo de conocimiento, su amplitud y su grado de organización (Ontoria, 1999).

Los aspectos psicológicos de tipo social, afectivo y pedagógico inciden en el aprendizaje y en particular en el de las matemáticas. El aspecto social, por ejemplo, fue uno de los que predominó en el caso de los estudiantes que participaron en la presente experiencia, Martha expresó:

“mis amigos me han contado que la trigonometría de décimo grado es super-difícil, especialmente el tema de las identidades trigonométricas, ya que nadie las entiende”

(Entrevista, octubre 15 de 2004)

Melissa, por el contrario, habló de que su papá era ingeniero y siempre le había recalcado la importancia que tienen las matemáticas,

“mi papá siempre ha hecho énfasis en la importancia de esta materia ya que de esto depende el buen desarrollo y desempeño del estudiante y futuro profesional”

(Entrevista, octubre 15 de 2004)

Diana, en cambio, recuerda que las matemáticas no han sido su mejor aliada durante su vida escolar, al respecto ella comenta:

“las matemáticas no han sido mi mejor compañía durante mi vida escolar, además, los profesores que he tenido no han realizado una buena labor conmigo, ya que ellos, en la mayoría de los casos, se han preocupado por cumplir un currículo y se han ocupado de los estudiantes a los que se les facilita esta materia, dejando a un lado a aquellos a los que nos cuesta mas trabajo entenderla”

(Entrevista, octubre 15 de 2004)

La frase anterior está mostrando el determinante pedagógico, que también tiene gran incidencia en la forma cómo los estudiantes demuestran su interés por la asignatura. En muchas ocasiones los docentes, nos hemos preocupado por cumplir un currículo establecido en las instituciones donde laboramos y nos olvidamos de que el estudiante no es solamente un receptor de conocimiento, sino un ser humano, por esto hemos tenido algunos estudiantes que al preguntarles cuál o cuáles son las materias que más les gustan, dejan por fuera de la lista a la matemática. El problema radica en que existen unas percepciones, no sólo en los estudiantes sino también en los mismos docentes, de lo que es la matemática, de cómo se enseña y de cómo se aprende, que interfieren en el aprendizaje y enseñanza de la misma.

Entonces, vemos como a partir de estas percepciones, estudiantes y maestros construyen, alrededor de la matemática, múltiples consideraciones. Consideraciones que suelen ser, en la mayoría de los casos, bastante negativas y que hacen ver esta ciencia como inalcanzable, difícil y alejada de la vida cotidiana. Estas percepciones deben ser cambiadas, tanto en estudiantes como en docentes, si realmente deseamos que haya un aprendizaje significativo en nuestros estudiantes y ellos sean capaces de crear, decidir e intervenir en la solución de problemas cotidianos, como lo sugieren los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998). Así como las demás áreas del conocimiento, la matemática debe ser significativa para los estudiantes, los conceptos matemáticos aislados no tienen ningún sentido

para los estudiantes, entonces se trata de utilizar estrategias que permitan la integración de los conceptos y faciliten el aprendizaje de los mismos.

Al analizar la realidad escolar, Ausubel se dio cuenta que predominaba un *aprendizaje memorístico*, caracterizado por la adquisición de los conocimientos a través de unos procedimientos repetitivos. Ante esta situación se planteó la alternativa del *aprendizaje por descubrimiento*, en la cual el alumno adquiere los conocimientos por sí mismo, es decir, los redescubre, sin darles una organización previa.

Ausubel cuestionó que el aprendizaje por descubrimiento fuese la alternativa adecuada al aprendizaje memorístico. Para él, la distinción entre aprendizaje memorístico y aprendizaje significativo es más importante, pues se apoya en criterios de contraposición más coherentes. De un lado, el *aprendizaje memorístico o repetitivo* se produce cuando “la tarea de aprendizaje consta de puras asociaciones arbitrarias (números, listas, pares asociados, etc.)” (Ausubel, Novak y Hanesian, 1989, p.37). En este tipo de aprendizaje, en la asociación de los conceptos no hay una relación sustancial y con significado lógico.

“En el aprendizaje memorístico, la información nueva no se asocia con los conceptos existentes en la estructura cognitiva y, por lo tanto, se produce una interacción mínima o nula entre la información recientemente adquirida y la información ya almacenada” Novak citado por Ontoria (1999, p.16).

En este aprendizaje el alumno no tiene intención de asociar el nuevo conocimiento con la estructura de conceptos que ya posee en su estructura cognitiva. Se produce, pues, una memorización mecánica o repetitiva de los datos, hechos o conceptos.

De otro lado, el *aprendizaje significativo*, por el contrario, tiene lugar cuando se intenta dar sentido o establecer relaciones entre los nuevos conceptos o nueva información y los conceptos y conocimientos existentes ya en el alumno, o con alguna experiencia anterior. Hay aprendizaje significativo cuando la nueva información “puede relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe” (Ausubel citado por Ontoria, 1999, p.16). De esta manera, el alumno construye su propio conocimiento y, además, está interesado y decidido a aprender.

Las diferencias entre ambos tipos de aprendizaje son las siguientes:

- a) *En el aprendizaje significativo*, la nueva información se incorpora de forma sustantiva, no arbitraria, a la estructura cognitiva del alumno. Hay una intencionalidad de relacionar los nuevos conocimientos con los de nivel superior más inclusivos, ya existentes en la estructura cognitiva. Se relaciona con la experiencia, hechos u objetos. Hay una implicación afectiva al establecer esta relación, al manifestar una disposición positiva ante el aprendizaje.
- b) *En el aprendizaje memorístico*, la incorporación de los nuevos conocimientos se produce de forma arbitraria. No hay intención de integrarlos en la estructura cognitiva. No se relaciona con la experiencia, hechos u objetos. No hay implicación afectiva en dicha relación al no mostrar una disposición positiva ante el aprendizaje.

Sin embargo, Ausubel no concibe estas dos clases de aprendizaje como contrapuestos radicalmente, todo o nada, sino que los presenta como *un continuo*. Tanto el aprendizaje repetitivo como el significativo puede ser *por descubrimiento*, según el proceso que se utilice en la aplicación

metodológica. En este sentido, el aprendizaje escolar dependerá del grado en que el nuevo aprendizaje sea significativo (Ontoria, 1999, p.17)

En ese sentido, Indira, por ejemplo, en la construcción del primer mapa conceptual de trigonometría comentó a sus compañeras lo siguiente:

“Nunca me imaginé que se podía realizar un mapa conceptual para matemáticas, al principio me pareció una idea descabellada de la profesora, pero después me di cuenta que era una herramienta muy útil, ya que me permitió descubrir fortalezas y debilidades que tenía con respecto a las identidades”

(Elaboración primer mapa, octubre 1 de 2004)

Suele suceder, en la mayoría de los casos, cuando se quiere realizar una actividad diferente o innovar en nuestra práctica pedagógica nos veamos enfrentados a las miradas atónitas de los estudiantes y compañeros de trabajo. Esto se debe a que tradicionalmente se llega a clase con un esquema o rutina ya establecido y no se permite salir de lo planeado porque se alteraría el orden.

A partir de lo anterior, un día decidí plantearles a las estudiantes que realizaran un mapa conceptual con lo que se había estudiado durante el tercer período académico. Al principio algunos me miraron atónitos, pues la idea les pareció un poco “descabellada”, sin embargo, dejé que iniciaran su trabajo de clase. A algunas chicas no se les ocurría nada, miraban y revisaban sus apuntes de clases, así como también la guía de trabajo que se utiliza en el colegio y no le encontraban ningún sentido a la actividad que estaban realizando. Ese día se terminó la clase y la mayoría no había realizado nada, pues no encontraban ninguna relación o no tenían claros los conceptos estudiados, entonces di algunas indicaciones generales al grupo y dejé que terminaran el trabajo en casa.

En la siguiente clase algunos estudiantes llegaron protestando con la “tarea” que se les había dejado, pues no se les había ocurrido nada, mientras que otros hicieron el intento y me mostraron lo que habían realizado. Después de haber revisado los mapas que me habían entregado procedí a escoger los estudiantes que participarían en la presente experiencia. Posteriormente, les sugerí a estos estudiantes que me regalaran unos minutos del descanso para que charlaran conmigo acerca de sus experiencias en la construcción de cada uno de sus mapas. Les pregunté ¿cómo se sintieron en la realización del primer mapa? ¿Cuáles fueron las dificultades que se les presentaron y cómo lograron superarlas?

Indira expresó un poco de incapacidad en la elaboración de la tarea, dado que ella consideraba que sabía realizar mapas conceptuales:

“Bueno, realmente, como ya te comenté en encuentros informales que tuvimos en el corredor, en el descanso y al finalizar la clase, me sentía algo así como... “impotente” por decirlo de alguna manera, pues yo creía que sabía hacer mapas conceptuales, y se me facilitaba para las clases de español, sociales y ciencias políticas, pero nunca lo había hecho para matemáticas, además por que son muchas fórmulas, no sabía como acomodarlas”.

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

Mientras que la experiencia de Laura en la elaboración del primer mapa resultó ser más fácil de lo que ella se imaginó inicialmente:

“Realmente el trabajo no fue tan difícil como lo imaginé al principio, pues tenía los conceptos claros, pensé en la relación que tenían unos conceptos con otros y simplemente establecí las conexiones que existen entre cada uno de ellos. Me gustó hacer este ejercicio, ya que me permitió ver que realmente la trigonometría era una fortaleza que tenía”.

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

Martha, por su parte, expresó la confusión que tenía en los conceptos que se habían trabajado en clase:

“Inicialmente no se me ocurría nada, la verdad me sentía muy confundida con los conceptos trigonométricos, tuve que leer y (re) leer los apuntes de clase y la guía de trabajo para poder aclarar y superar los vacíos que tenía, me sentía muy confundida debido a que tenía muchas fórmulas “en el aire” y no encontraba como relacionarlas, pero una vez establecí las relaciones entre las identidades tuve mas claro lo que debía hacer y así procedí a construir el mapa”.

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

Melissa, por el contrario, sí tenía claros los conceptos, pero tenía una confusión al expresar las relaciones trigonométricas por medio de un mapa conceptual:

“Primero que todo tengo que contarte que no se me ocurría nada para iniciar la elaboración del presente mapa. Creo que me estaba complicando mucho, es decir, me estaba enredando en la forma cómo debía establecer las diferentes relaciones y cómo plasmarlas a través de un mapa. El mapa que entregué no fue el primero y único que realicé. No, por el contrario, realicé muchos intentos y gasté muchas hojas elaborando el mapa y después de muchos intentos resultó lo que está ahí plasmado”.

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

Diana expresó cierta incertidumbre por el trabajo que había realizado pensando, tal vez, en que este sería valorado como bien o mal hecho:

“Realmente no sé si lo que hice esta bien hecho, o no, pero inicialmente saqué aparte todas las fórmulas que hemos estudiado en clase y luego comencé a “conectar”, por decir de alguna manera, las fórmulas y ha establecer las relaciones que existen entre ellas. Una vez tenía todo relacionado, realicé el

mapa, pero el problema que yo veo es que esta muy pequeño comparado con lo que mis compañeras realizaron.”

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

Con estas frases de Diana me parece pertinente en este momento comentar cuando se produce el aprendizaje significativo propuesto por Ausubel.

Para Ausubel, lo fundamental del aprendizaje significativo como proceso consiste en que los pensamientos, expresados simbólicamente de modo no arbitrario y objetivo, se unen con los conocimientos ya existentes en el sujeto. Este proceso, pues, es *un proceso activo y personal*.

- *Activo*, porque depende de la asimilación deliberada de la tarea de aprendizaje por parte del alumno.
- *Personal*, porque la significación de toda la tarea de aprendizaje depende de los recursos cognitivos que utilice cada alumno.

“La clave del aprendizaje significativo está en relacionar el nuevo material con las ideas ya existentes en la estructura cognitiva del alumno”(Ausubel citado por Ontoria, 1999, p.18). Por consiguiente, la eficacia de este aprendizaje está en función de su significatividad, no de las técnicas memorísticas (aprendizaje memorístico). Para ello, los prerequisites básicos son:

- a) Que el material sea potencialmente significativo, es decir, que permita establecer una relación sustantiva con conocimientos e ideas ya existentes.
- b) La tendencia del alumno al aprendizaje significativo, es decir, una disposición en el alumno que indica interés por dedicarse a un

aprendizaje en el que intenta dar un sentido a lo que aprende (Ontoria, 1999, p.18)

El aprendizaje significativo presupone tres condiciones para que se produzca:

1. Los nuevos materiales o información a aprender deben ser potencialmente significativos, para poder ser relacionados con las ideas relevantes que posee el alumno.
2. La estructura cognitiva previa del alumno debe poseer las necesarias ideas relevantes para que puedan relacionarse con los nuevos conocimientos.
3. El alumno debe tener disposición significativa hacia el aprendizaje, lo cual exige una actitud *activa* (*Ibíd. p.20*).

Ausubel distingue tres tipos básicos de aprendizaje significativo en función del grado creciente de complejidad: aprendizaje de representaciones, aprendizaje de conceptos y aprendizaje de proposiciones.

a) Aprendizaje de representaciones

El aprendizaje de representaciones consiste “en hacerse del significado de símbolos solos (generalmente palabra) o de lo que éstos representan” (Ausubel citado por Ontoria, 1999, p.20). Se trata, pues, de aprender lo que significan las palabras aisladas o los símbolos. “Significa aprender los símbolos particulares que representan o son significativamente equivalentes a los referentes específicos”. (*Ibíd.*), Este tipo de aprendizaje se vincula con la adquisición del vocabulario. En el proceso de aprendizaje de representaciones hay que distinguir dos aspectos:

- Uno, el aprendizaje antes de los conceptos;
- Otro, después de la formación de conceptos.

En el primero, las palabras representan objetos o sucesos reales. La palabra es igual a la imagen concreta y específica de lo que tales referentes significan. A medida que el individuo se desarrolla, aprende nuevo vocabulario para representarlos.

b) Aprendizaje de conceptos

Es el segundo tipo de aprendizaje significativo. Ausubel define el concepto como “objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterio comunes y que se designan mediante algún símbolo o signo” (*Ibíd.*). Los conceptos también representan símbolos y palabras individuales, pero hay un mayor grado de abstracción en función de unos *atributos de criterio comunes*. Surgen, pues, de relacionar determinados objetos, sucesos, etc. con atributos comunes a todos ellos. Ausubel presenta dos formas para el aprendizaje de los conceptos: una, *formación de conceptos* a partir de las experiencias concretas, similar al aprendizaje de representaciones, y, otra, *la asimilación de conceptos* consistente en relacionar los nuevos conceptos con los existentes ya en el alumno formando estructuras conceptuales.

c) Aprendizaje de proposiciones

Consiste en captar el significado de nuevas ideas expresadas en forma de proposiciones, es decir, el significado expresado en una frase u oración que contiene varios conceptos. Utilizando una metáfora un tanto tosca, las proposiciones son “moléculas” a partir de las que se construye el significado y los conceptos son los “átomos” del significado. Este tipo de aprendizaje

puede hacerse, según Ausubel, combinando o relacionando palabras individuales entre sí, cada una con referente distinto, y combinándolas de tal manera que el resultado (la proposición) es más que la suma de los significados de las palabras individuales. Lógicamente, el aprendizaje de proposiciones supone conocer el significado de los conceptos que la integran. En los dos tipos de aprendizaje anteriores se trata de representaciones o conceptos *unitarios*, mientras que en el aprendizaje de proposiciones intervienen varios conceptos que se relacionan entre sí y con la estructura cognitiva del alumno para producir un nuevo significado *compuesto*. Al implicar la relación de conceptos, la adquisición de las proposiciones sólo puede hacerse a través de la *asimilación* (Ontoria, 1999, p.21).

El aprendizaje como proceso de comprensión y asimilación. Cuando se habla de que los alumnos “comprendan”, estamos diciendo que intenten dar sentido a aquello con lo que entran en contacto y mediante lo cual se forman las representaciones y los esquemas cognitivos. Se trata, pues, de una asimilación activa, consistente en captar o adquirir lo que está implicado en el proceso de aprendizaje, que va desde las características sensoriales hasta las características más abstractas.

Para facilitar la comprensión y asimilación, cada persona tiene sus estrategias, pero se puede afirmar que la familiarización con el material tiene un efecto positivo mayor que con el desconocido. Utilizar estos materiales familiares para establecer relaciones, clasificaciones, categorías, esquemas, facilita un aprendizaje más eficaz.

La asimilación de significados y sus modalidades. La teoría de la *asimilación* es el punto central del planteamiento de Ausubel sobre el

aprendizaje significativo, de tal manera que la mayor parte de este aprendizaje consiste en la asimilación de nueva información. Explica dicha teoría diciendo que “la nueva información es vinculada a los aspectos *relevantes y preexistentes* en la estructura cognitiva, y en el proceso se modifican la información recientemente adquirida y la estructura preexistente” (Ausubel citado por Ontoria, 1999, p. 22).

“La adquisición de información nueva depende en alto grado de las ideas pertinentes que ya existen en la estructura cognitiva y el aprendizaje significativo de los seres humanos ocurre a través de una *interacción* de la nueva información con las ideas pertinentes que existen en la estructura cognitiva. El resultado de la intención que tiene lugar entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognitiva existente constituye una *asimilación* de significados nuevos y antiguos para formar una estructura cognitiva altamente diferenciada” Ausubel citado por Ontoria (*Ibíd.*)

El proceso de asimilación se lleva a cabo mediante tres formas de modalidades diferentes:

a) Aprendizaje subordinado. La nueva idea o concepto se halla jerárquicamente subordinada a otra ya existente. Se produce cuando las nuevas ideas se relacionan subordinadamente con ideas relevantes (inclusores) de mayor nivel de abstracción, generalidad e inclusividad. Se genera, pues, una *diferenciación progresiva* de los conceptos existentes en varios de nivel inferior de abstracción. La subordinación de los conceptos puede hacerse sin que la nueva información modifique los atributos del concepto inclutor (son ejemplificaciones), ni cambie el significado de concepto inclutor.

En el proceso de enseñanza, la diferenciación progresiva consiste en partir de las ideas más generales para llegar a las más concretas, desglosando progresivamente los conceptos en subconceptos.

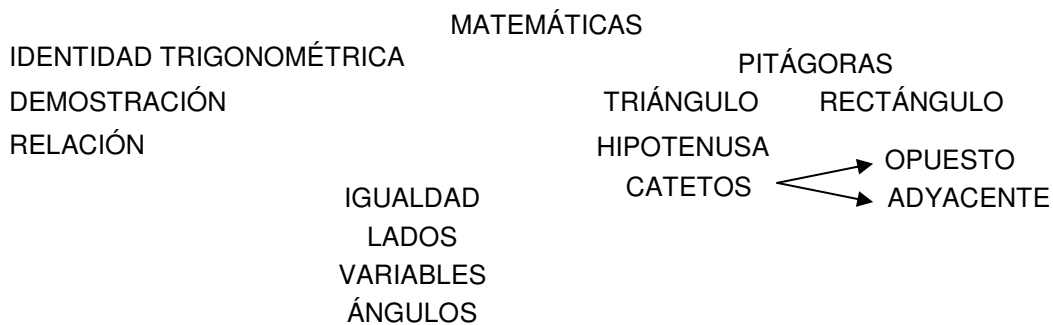
b) Aprendizaje supraordenado. El proceso es inverso al subordinado o proceso de diferenciación progresiva, en el que los conceptos relevantes (inclusores) existentes en la estructura cognitiva son de menor grado de abstracción, generalidad e inclusividad que los nuevos a aprender. Con la información adquirida, los conceptos ya existentes se reorganizan y adquieren nuevo significado. Suele ser un proceso que va de abajo – arriba y se produce una *reconciliación integradora* entre los rasgos o atributos de varios conceptos que da lugar a otro más general (supraordenado). Cuando se buscan diferencias, comparaciones y semejanzas entre los conceptos, se facilita esta reconciliación conceptual. Cuando un concepto se integra bien en otro concepto más general posee una **consonancia cognitiva o una reconciliación integradora**. Se obtiene una disonancia cognitiva, cuando aparecen dos conceptos contradictorios o no integrados adecuadamente.

c) Aprendizaje combinatorio. Consiste en la relación, *de una forma general*, de nuevos conceptos con la estructura cognitiva ya existente, pero sin producirse la *inclusión* (subordinación o supraordenación). Se apoya en la búsqueda de elementos comunes entre las ideas, pero sin establecer relación de supra o de subordinación.

Ausubel considera que la estructura cognitiva está organizada jerárquicamente respecto al nivel de abstracción, generalidad e inclusividad de las ideas o conceptos. En el aprendizaje subordinado y supraordenado existe una relación jerárquica, mientras que no se produce en el aprendizaje combinatorio.

Después de haber escuchado las apreciaciones de las estudiantes, recordé un taller que realicé en la Especialización en el módulo de Didáctica con la profesora Diana Jaramillo, donde ella nos entregó algunas palabras y nos pidió que las acomodáramos como mejor nos pareciera, conservando una relación entre los conceptos y una vez finalizada la actividad ella nos dio algunas indicaciones sobre los mapas conceptuales.

Así, quise realizar una experiencia similar y de esta manera escogí las siguientes palabras relacionadas con la trigonometría: **TRIGONOMETRÍA, RELACIONES, IGUALDAD, IDENTIDAD, TRIÁNGULO, RECTÁNGULO, OPUESTO, HIPOTENUSA, ADYACENTE, CATETOS, DEMOSTRACIÓN, PITÁGORAS, MATEMÁTICAS, VARIABLE, LADOS, ÁNGULOS**. Con base en estas palabras les sugerí que individualmente las organizaran como cada una quisiera, siempre y cuando existiera alguna relación entre los conceptos. Una vez organizadas las palabras, cada una de las estudiantes explicó el porqué de la organización de ellas. Me llamó la atención la organización de Melissa, pues ella fue la que relacionó de una forma más concreta e integral todas las palabras. La organización que ella hizo de las palabras fue la siguiente:



Cuando hizo su exposición, comentó lo siguiente:

“Las matemáticas son una ciencia y en general abarca todas las palabras, por esto lo ubiqué en la parte superior, por un lado las identidades se estudian en trigonometría y en ellas hay que hacer demostraciones y existen relaciones entre estas identidades. Por otro lado se encuentra Pitágoras y su teorema que se cumple para todos los triángulos rectángulos, que tienen una hipotenusa y dos catetos: adyacente y opuesto. Por último se encuentran las igualdades que tienen lados, tienen variables y para nuestro caso las variables son ángulos y funciones trigonométricas”.

(Taller mapas conceptuales, Octubre 8 de 2004)

Después de que cada estudiante comentara la organización de sus palabras, procedí a contarles que esta actividad tenía como fin aclararles lo que era un mapa conceptual y explicarles que la organización que cada una realizó no era una mapa conceptual en el sentido de Novak y Gowin (1988) o de Jaramillo(2003), sino por el contrario, lo que ellas elaboraron fueron esquemas, pues hacía falta en ellos las palabras de enlace o conectores que son muy importantes, pues sin estos no sería un mapa conceptual.

A partir del modelo de Ausubel, surge la idea del mapa conceptual en el grupo de investigación de Novak y Gowin (Novak y Gowin, 1988) quienes lo consideran como “estrategia”, “método” y “recurso esquemático”.

1. *Estrategia*: “Procuraremos poner ejemplo de estrategias sencillas, pero poderosas en potencia, para ayudar a los estudiantes a aprender y para ayudar a los educadores a organizar los materiales objeto de este aprendizaje” (Novak y Gowin, 1988, p.19).

Estoy de acuerdo con este autor en este sentido, ya que el mapa conceptual permite organizar la información que se tiene y que, en la mayoría de los casos, por no tener un orden o una organización no se puede interpretar correctamente.

2. *Método*: “La construcción de los mapas conceptuales (...), que es un método para ayudar a estudiantes y educadores a captar el *significado* de los materiales que se van a aprender” (Novak y Gowin, 1988, p.19).

Cabe resaltar en este momento que en la construcción de los mapas conceptuales se da la oportunidad al individuo que lo este elaborando a pensar y (re)pensar sobre el significado que tiene el material de estudio que se quiere aprender.

3. *Recurso*: “Un mapa conceptual es un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones” (Novak y Gowin, 1988, p.33).

Efectivamente es un recurso que permite no sólo representar un conjunto de significados, sino también leer y (re)leer la información que se ha estudiado sin necesidad de recurrir nuevamente al texto original.

También los autores argumentan lo siguiente:

“Los mapas conceptuales ayudan al que aprende a hacer más evidentes los conceptos clave o las proposiciones que se van a aprender, a la vez que sugieren las conexiones entre los nuevos conocimientos y lo que ya sabe el alumno.” (Novak y Gowin, 1988, p. 41).

La identificación del mapa conceptual como técnica podría dar pie para pensar que se trata de una fórmula de inmediata aplicación, un tema eminentemente práctico. Conviene, por lo tanto, enmarcarlo en un contexto más amplio de carácter teórico, un modelo o concepción global de la educación, para captar su sentido profundo, para valorarlo en sus justos términos y para aprovechar todas sus virtualidades.

Novak y Gowin (1988, p. 32) explicitan los fundamentos teóricos del mapa conceptual cuando aclaran que se trata de una proyección práctica de la teoría del aprendizaje de Ausubel. Desde la perspectiva más amplia del modelo o teoría general de la educación, el mapa conceptual concuerda con un estilo de educación:

- a) Centrado en el alumno y no en el profesor.
- b) Que atiende el desarrollo de destrezas y no se conforme sólo con la repetición memorística de la información por parte del alumno.
- c) Que pretende el desarrollo armónico de todas las dimensiones de la persona, no solamente intelectuales.

Las dos primeras características se desprenden de las notas que definen el aprendizaje significativo según Ausubel (citado por Ontoria, 1999, p. 32). La tercera característica requiere una cierta explicación: el uso del mapa conceptual como técnica de enseñanza aprendizaje tiene importantes repercusiones en el ámbito afectivo – relacional de la persona, ya que el protagonismo que se otorga al alumno, la atención y aceptación que se presta a sus aportaciones y el aumento de su éxito en el aprendizaje, favorece el desarrollo de la autoestima. Su uso en la negociación de significados, como lo explicaré mas adelante, mejora las habilidades sociales y desarrolla actitudes acordes con el trabajo en equipo y la sociedad democrática.

Novak y Gowin(1988), en el prefacio de su obra, llaman la atención sobre el tema de la autoestima. Escribo aquí sus propias palabras:

“A buen seguro que todos los lectores de este libro han sufrido alguna vez en su vida escolar el efecto demoledor de experiencias que hirieron su autoestima (...). En nuestros estudios de investigación hemos encontrado de forma recurrente que las prácticas educativas que no hacen que el alumno capte el significado de la tarea de aprendizaje, no son capaces normalmente de darle confianza a sus capacidades ni de incrementar su sensación de dominio sobre los acontecimientos” (Novak y Gowin, 1988).

De acuerdo con la definición de estos autores, el mapa conceptual contiene tres *elementos fundamentales*:

1. *Concepto*: se entiende por concepto “una regularidad en los acontecimientos o en los objetos que se designa mediante algún término” Novak y Gowin (1988, p.22). Los conceptos hacen referencia a *acontecimientos* que son cualquier cosa que sucede o puede provocarse y a *objetos* que son cualquier cosa que existe y se puede observar. Los conceptos son, según los autores, desde la perspectiva del individuo, las imágenes mentales que provocan en nosotros las palabras o signos con los que expresamos *regularidades*. Estas imágenes mentales tienen elementos comunes en todos los individuos y matices personales, es decir, nuestros conceptos no son exactamente iguales, aunque usemos las mismas palabras. “Los significados son idiosincráticos por naturaleza” (*Ibíd.* p. 169). Este carácter idiosincrático se explica por la forma peculiar de cada uno de captar inicialmente el significado de un término, la experiencia acumulada sobre la realidad a la que alude, los sentimientos que provoca, etc.

Un número reducido de conceptos se adquiere pronto mediante el descubrimiento. La mayor parte de los significados asignados a la palabras

se aprende a través de proposiciones que incluyen el nuevo concepto, aunque la ayuda empírica facilite este aprendizaje.

2. *Proposición*: consta de dos o más términos conceptuales (*conceptos*) unidos por palabras (*palabras – enlace*) para formar una unidad semántica. Es la unidad semántica más pequeña que tiene valor de verdad, puesto que se afirma o niega algo de un concepto; va más allá de su denominación.
3. *Palabras – enlace*: son las palabras que sirven para unir los conceptos y señalar el tipo de relación existente entre ambos.

Aunque he hablado de los elementos más simples de los mapas conceptuales y de su contenido, esto no basta para identificarlos. Hay que referirse a la vertiente más importante del mapa conceptual, la interna, pues el gráfico sólo es la manifestación de una estructura mental de conceptos y proposiciones. Esta vertiente es la que permite calificar el mapa conceptual como técnica cognitiva y relacionarlo con el aprendizaje significativo.

Señalare *tres características o condiciones propias de los mapas*, según Novak y Gowin(1988), que los diferencian de otros recursos gráficos y de otras estrategias o técnicas cognitivas:

- *Jerarquización*: en los mapas conceptuales los conceptos están dispuestos por orden de importancia o “inclusividad”. Los conceptos más inclusivos ocupan los lugares superiores de la estructura gráfica y los ejemplos se sitúan en último lugar.

- *Selección:* los mapas constituyen una síntesis o resumen que contiene lo más importante o significativo de un mensaje, tema o texto. Previamente a la construcción del mapa hay que elegir los términos que hagan referencia a los conceptos en los que conviene centrar la atención.
- *Impacto visual:* esta característica se apoya en la anterior. En palabras de Novak y Gowin:

“un buen mapa conceptual es conciso y muestra las relaciones entre las ideas principales de un modo simple y vistoso, aprovechando la notable capacidad humana para la representación visual” (*Ibíd*, p.106)

Se aconseja no dar por definitivo el primer mapa que hayamos trazado, sino tomarlo como borrador y repetirlo para mejorar su presentación.

De estas tres características de los mapas conceptuales que definen los autores, no comparto la primera: jerarquización, ya que desde mi experiencia en la elaboración de mapas, no es necesario que se de esta condición pues los conceptos se pueden relacionar para cada autor del mapa de formas diferentes sin necesariamente atender a las jerarquías propias del saber específico.

El taller de mapas conceptuales sirvió para dar algunas indicaciones al primer esquema que ellas realizaron, pues todos carecían de las palabras de enlace, eran simples esquemas, sin embargo, tenían una buen aproximación a la idea de mapa conceptual, podría asegurar que lo único que les hacía falta a estos mapas eran los conectores.

De esta forma dimos finalizada esta sesión de mapas y les pude mostrar varias cosas, entre ellas, lo que es un mapa conceptual y el mapa que quería que ellas elaboraran basados en la concepción de Jaramillo (2003).

Jaramillo (2003) concibe el mapa conceptual de la siguiente forma:

“Una organización pictórica o una representación visual de un tema, producido por uno o varios individuos, el cual debe presentar un concepto central, otros subconceptos, conexiones o palabras de enlace entre estos conceptos, ejemplos y características sobre este tema específico. Es fundamental destacar que el objetivo de esta organización pictórica o representación visual es posibilitar la liberación, en el (los) autor(es) –a medida que está construyendo el mapa- de diferentes aspectos cognitivos, intelectuales y emocionales frente a un determinado tópico” (Jaramillo, 2003, p.63).

Jaramillo (2003) también resalta el papel fundamental que desempeñan las palabras de enlace, al respecto la autora dice:

“Ellas muestran las relaciones que el autor del mapa está estableciendo entre los diferentes conceptos, posibilitando así, tanto para el autor como para el lector del mapa, respectivamente, construir y comprender el discurso que se quiere emitir. O sea, estas palabras permiten establecer una continua dinámica de construcción entre los diferentes conceptos que el autor posee”. (*Ibíd.* p. 64)

También, durante la actividad que se estaba desarrollando, se pudo ver lo que no es un mapa conceptual y les mostré algunos mapas que fueron elaborados por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Industrial de Santander³. Estos ejemplos sirvieron para romper los esquemas que ellas tenían en la elaboración de los mapas y darle paso a la imaginación.

³ Estos mapas fueron realizados por estudiantes de las asignaturas Matemática y Sociedad y Fundamentación Didáctica.

En este “primer esquema” se incluían las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, y las identidades pitagóricas, ya que fueron los temas que se habían trabajado en el tercer período académico. Luego el siguiente paso era transformar este primer esquema en un mapa conceptual, de esta manera, y con una visión más clara de este tema, las estudiantes procedieron a cambiar su primer intento de mapa.

La realización de este trabajo resultó para ellas más sencillo, pues ya habían roto los esquemas y además tenían más claro que era lo que se quería lograr. Al respecto Indira comentó lo siguiente:

“Como ya habíamos hecho el primer ejercicio, para la clase, me quedó fácil realizar este mapa, pues ya tenía organizadas las palabras en un esquema para mirar la jerarquía de los conceptos. Luego busqué un dibujo en el que pudiera relacionar conceptos, colores, palabras de enlace y que se relacionara con el tema”.

(Elaboración segundo mapa, Octubre 15 de 2004.)

Pero no a todas las niñas se les facilitó este trabajo, pues Melissa, con gran preocupación me contó sus fracasos en la realización de esta tarea:

“Primero no tenía ni idea de qué hacer y me preguntaba ¿Dios mío, cómo hago esto?, y me dio pereza. Al otro día busqué algunos dibujos que tenía de primaria y me gustaron todos, pero igual no encontraba cómo organizarlos.

(Elaboración segundo mapa, Octubre 15 de 2004)

Realmente quedé muy impresionada al ver el trabajo que cada una realizó, ya que se notó el interés y la dedicación que cada una le puso a su mapa conceptual. Aunque no fue tarea fácil, pues para Melissa y Laura, fueron

muchas los borradores que realizaron antes de su versión final, al respecto Laura argumentó lo siguiente:

“Realicé tres intentos antes de la versión final, primero dibujé un globo, luego una flor – exactamente un girasol – y por último el payaso y sus juegos”.

(Elaboración segundo mapa, Octubre 15 de 2004)

Martha pensó en *Hello Kitty*, ya que es su dibujo animado preferido, y buscó los gustos que tiene este dibujo como las flores y los globos.

“Revisé el primer mapa que construí y con base en él pensé en Hello Kitty y su gusto por las flores e hice una similitud con el gusto que siente una persona por las matemáticas”.

(Aparte del texto narrativo, Octubre 20 de 2004)

Antes de continuar con los trabajos de las estudiantes, es necesario retomar los comentarios de la autora Jaramillo (2003) con respecto a los textos narrativos que deben acompañar cada mapa conceptual:

“Es muy importante que esos mapas estén siempre acompañados de textos narrativos (orales o escritos), sea a partir del discurso espontáneo del autor, o, sea a partir de la intervención de otras personas que induzca a la construcción de esos textos. Estos textos, en primer lugar, posibilitan que la estructura que representa el mapa conceptual se amplíe y remodele a través de la introducción de nuevas informaciones que van siendo recogidas durante la exposición del texto” (Jaramillo, 2003, p.64)

A continuación se presenta el mapa conceptual (figura 1) elaborado por Martha:

LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

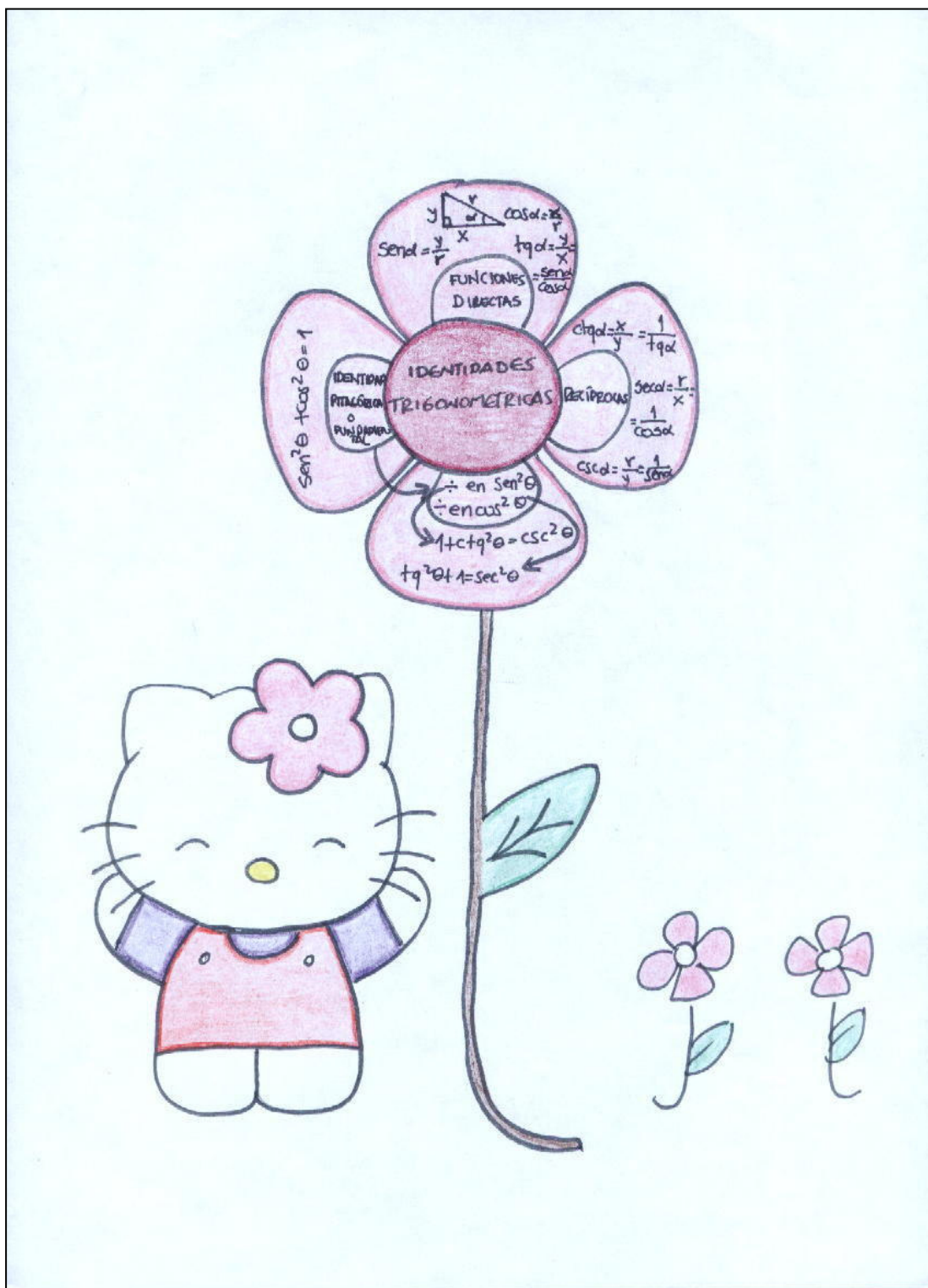


Figura 1. "Hello Kity". Mapa Conceptual elaborado por Martha

LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Mientras que Diana fue un poco más a la naturaleza y pensó en el arco iris (figura 2) que se forma cuando cae la lluvia y luego aparece el sol.

“Escogí el sol porque me parece que es muy importante para el hombre, una nube con agua y de allí la lluvia, porque de una u otra forma siempre necesitamos el agua para poder vivir y el arco iris que es el producto de la unión del sol y la lluvia”.

(Aparte del texto narrativo, Octubre 20 de 2004)

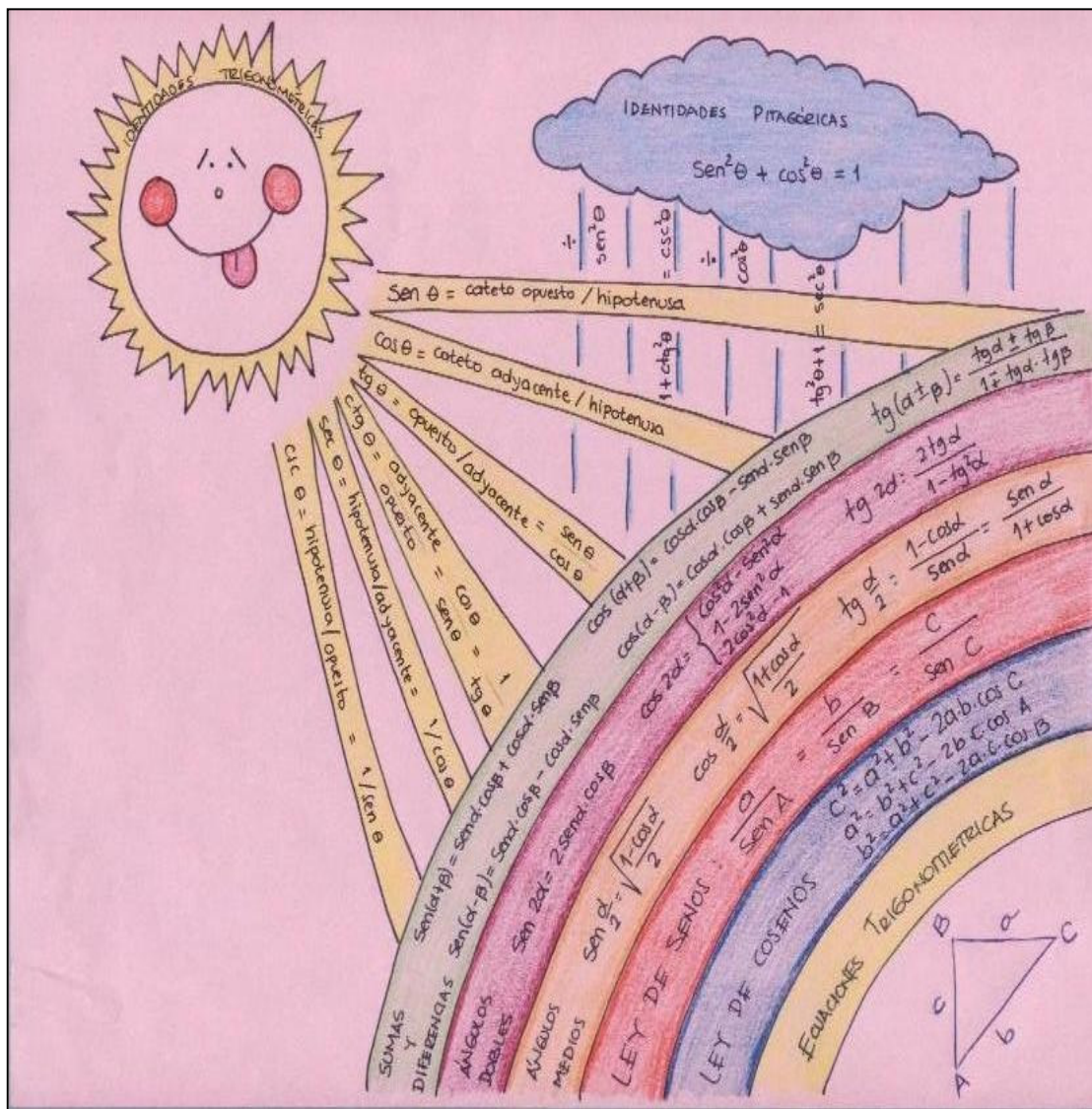


Figura 2 "El arco iris 2". Mapa conceptual elaborado por Diana

Indira pensó en *Tigger* (figura 3), pues es su muñeco preferido y lo tiene en todas partes en su cuarto:

“Dibuje a Tigger porque es un muñeco que con su astucia y alegría nos invita a aprender y entender fácilmente las identidades trigonométricas. Tigger es un muñeco que no tiene mucho que ver con matemáticas, no existe ninguna relación entre ellos, pero me parece que es una buena forma de representar las identidades ya que tanto él como cualquier persona que lea este mapa conceptual lo podrá entender, por su fácil explicación y por la forma tan fácil que el nos ofrece para comprenderlo”.

(Aparte del texto narrativo, Octubre 20 de 2004)

LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

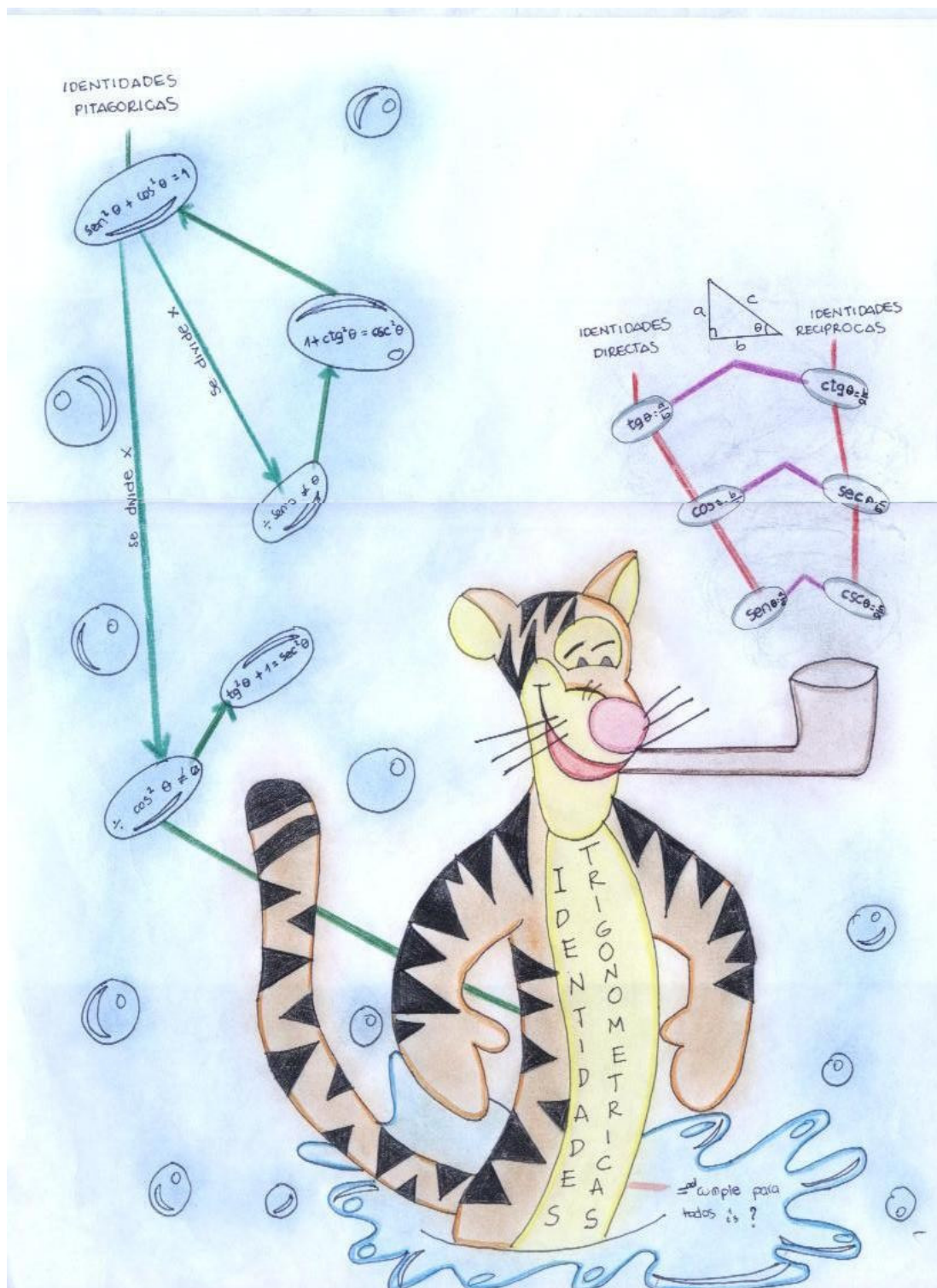


Figura 3. "Tigger" Mapa conceptual elaborado por Indira

Laura, después de sus intentos se decidió por el Payaso (figura 4) y las maromas que realiza para divertir a chicos y grandes.

“El payaso es un personaje que representa alegría, jocosidad y por eso interés y agrado. Yo escogí esta figura porque me parece importante e interesante reconocer las matemáticas y por consiguiente la trigonometría e identidades trigonométricas como un tema sencillo y agradable para trabajar”.

(Aparte del texto narrativo, Octubre 20 de 2004)

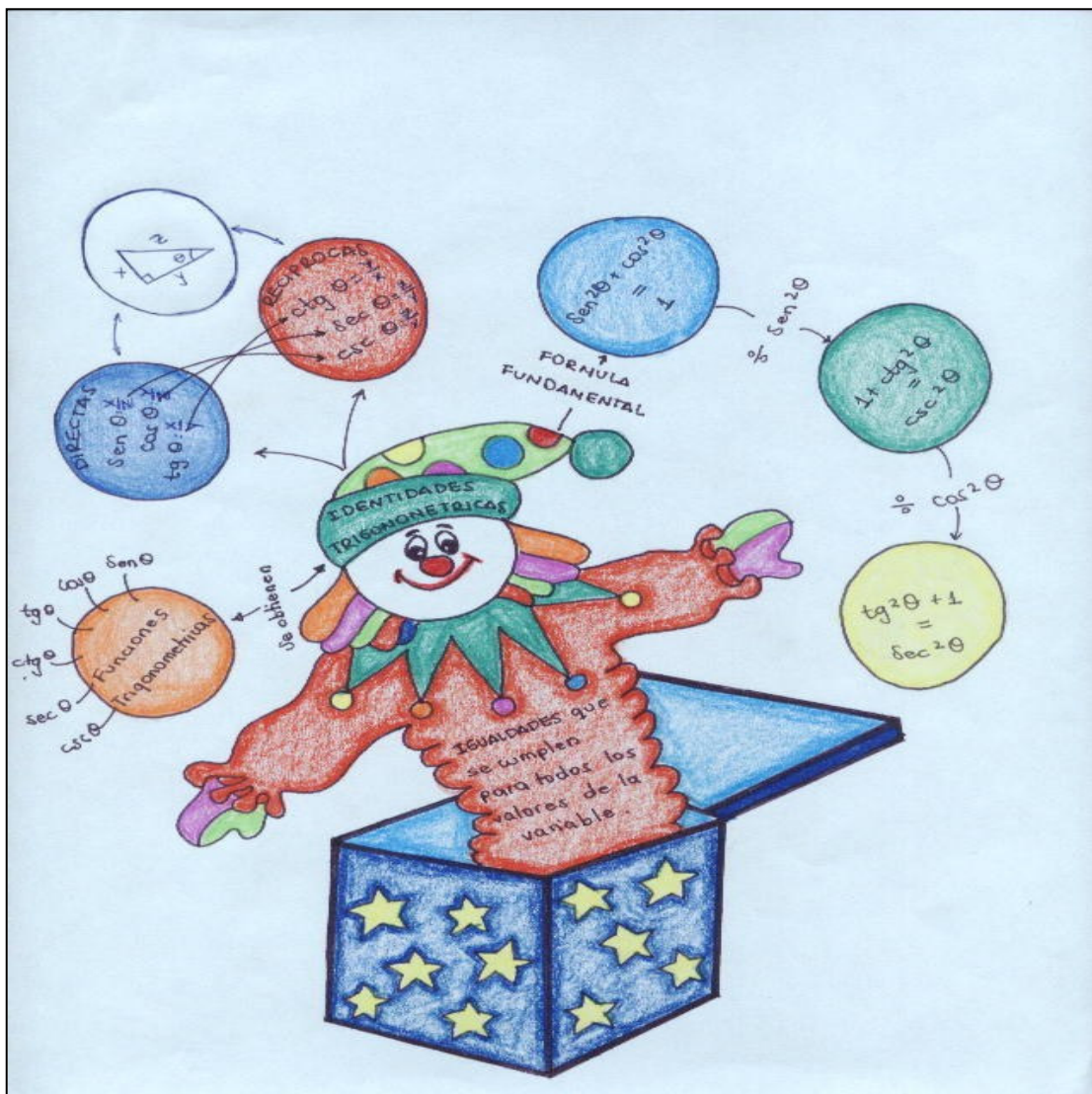


Figura 4. "Payaso" Mapa conceptual elaborado por Laura

LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Por último Melissa pensó en una vaca lechera (figura 5) y todos los productos derivados de este líquido vital para el crecimiento de los niños.

“En unos de mis dibujos de infancia vi una vaca soñadora, entonces se me ocurrió que la vaca estaba pensando y tenía cara de placer, entonces dije: la vaca está pensando en lo que más le gusta, y por esto realicé el mapa”.

(Aparte del texto narrativo, Octubre 20 de 2004)

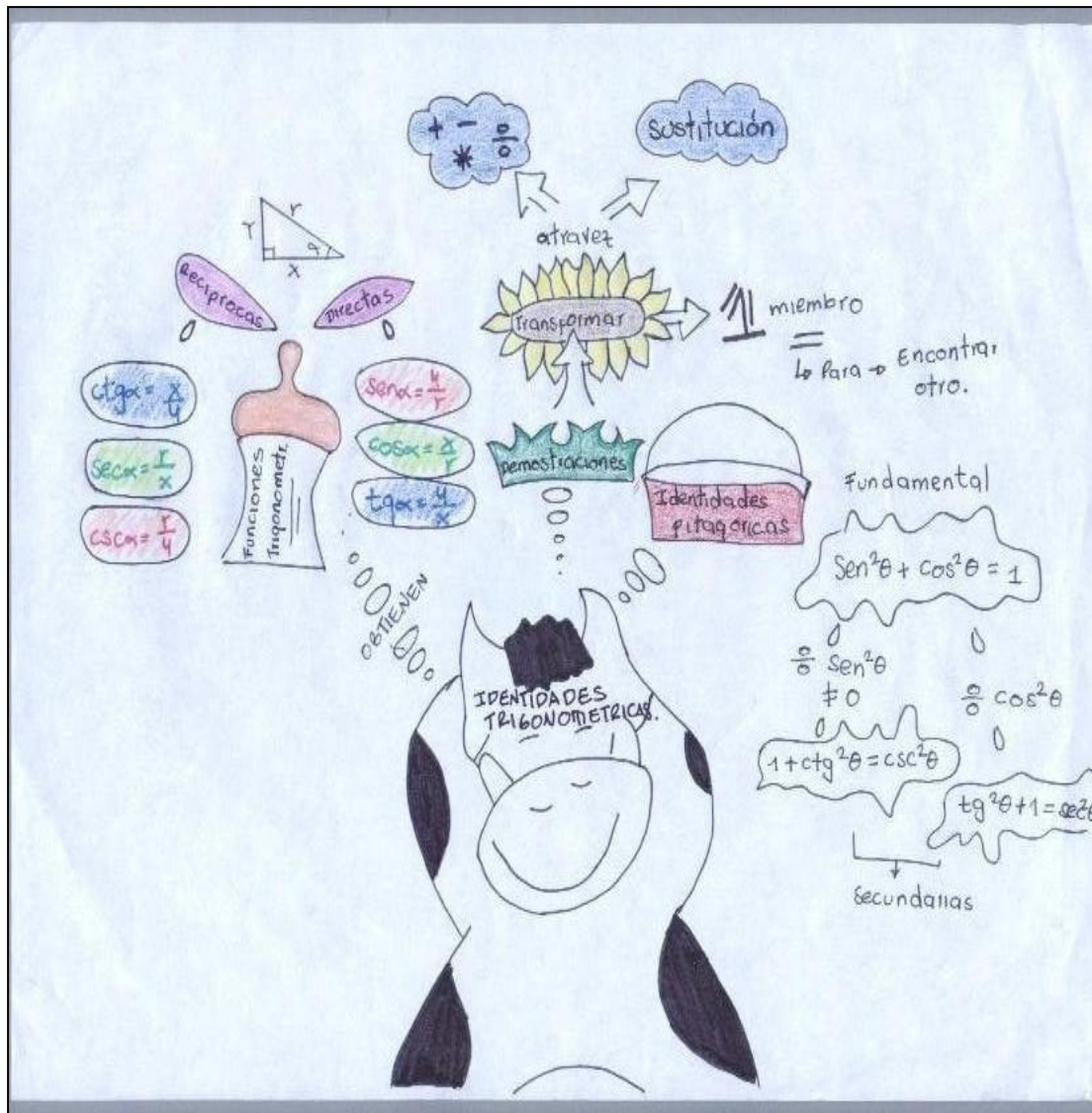


Figura 5. "Vaca lechera" Mapa conceptual elaborado por Melissa

Basado en Jaramillo (2003) los mapas conceptuales producidos por las estudiantes se salieron de las organizaciones tradicionales. Estas organizaciones pictóricas se reflejan en dibujos que representaban algo para cada una de las alumnas. *El payaso, la vaca, Tigger, el arco iris y Hello Kitty* y los demás mapas que elaboraron no eran simplemente “dibujos” eran mapas conceptuales y cada uno de ellos reflejaba el toque muy personal de cada estudiante.

Después de esta actividad, donde las estudiantes pudieron explorar diferentes representaciones de la información obtenida en clase y de que cada una construyera su propio mapa, de acuerdo a su aprendizaje, sugerí que realizaran un último mapa, dado que las clases seguían su curso y ya se estaba finalizando el tema de identidades trigonométricas y con éste el año escolar.

Esta tarea fue, en términos generales, un poco más fácil que las dos anteriores, pues ya se habían enfrentado a la elaboración de este tipo de mapas, lo difícil en este momento era la extensión de los temas, ya que se había abordado todo el tema de ángulos dobles, medios, sumas y diferencias de los mismos.

“Realmente, fue más sencillo, pues, comparándolo con la elaboración del mapa anterior y ni hablar del primer mapa... Se presentó dificultad inicialmente porque eran muchas las fórmulas y no conseguía una fórmula clave o central para de ahí establecer las conexiones. Sin embargo, después de organizar todos los conceptos, todas las fórmulas la idea era buscar una representación pictórica que tuviera alguna relación con el tema o que me permitiera compactar todas las fórmulas”.

(Entrevista Noviembre 5 de 2004)

Esta fue la apreciación de Indira una vez finalizada la actividad de los mapas conceptuales.

Todas las estudiantes coincidieron en que lo “más tedioso” en la elaboración de esta actividad era relacionar las diferentes fórmulas que se habían estudiado y de las cuales hablaremos en la siguiente categoría de análisis. Lo “más tedioso” para ellas, pero lo más importante para mí desde el punto de vista de la construcción de conceptos.

En la elaboración de este último mapa Indira hizo el comentario de que la dificultad más grande que tuvo fue escoger el dibujo que le permitiera una armonía en conjunto (figura 6):

“Después de varios intentos decidí realizar un Mickey Mouse ya que es un personaje muy inteligente y práctico, así como las matemáticas. Además con su alegría y diversión podemos aprender y entender las identidades trigonométricas con operaciones en sus ángulos”

(Aparte del texto narrativo, Octubre 29 de 2004)

LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

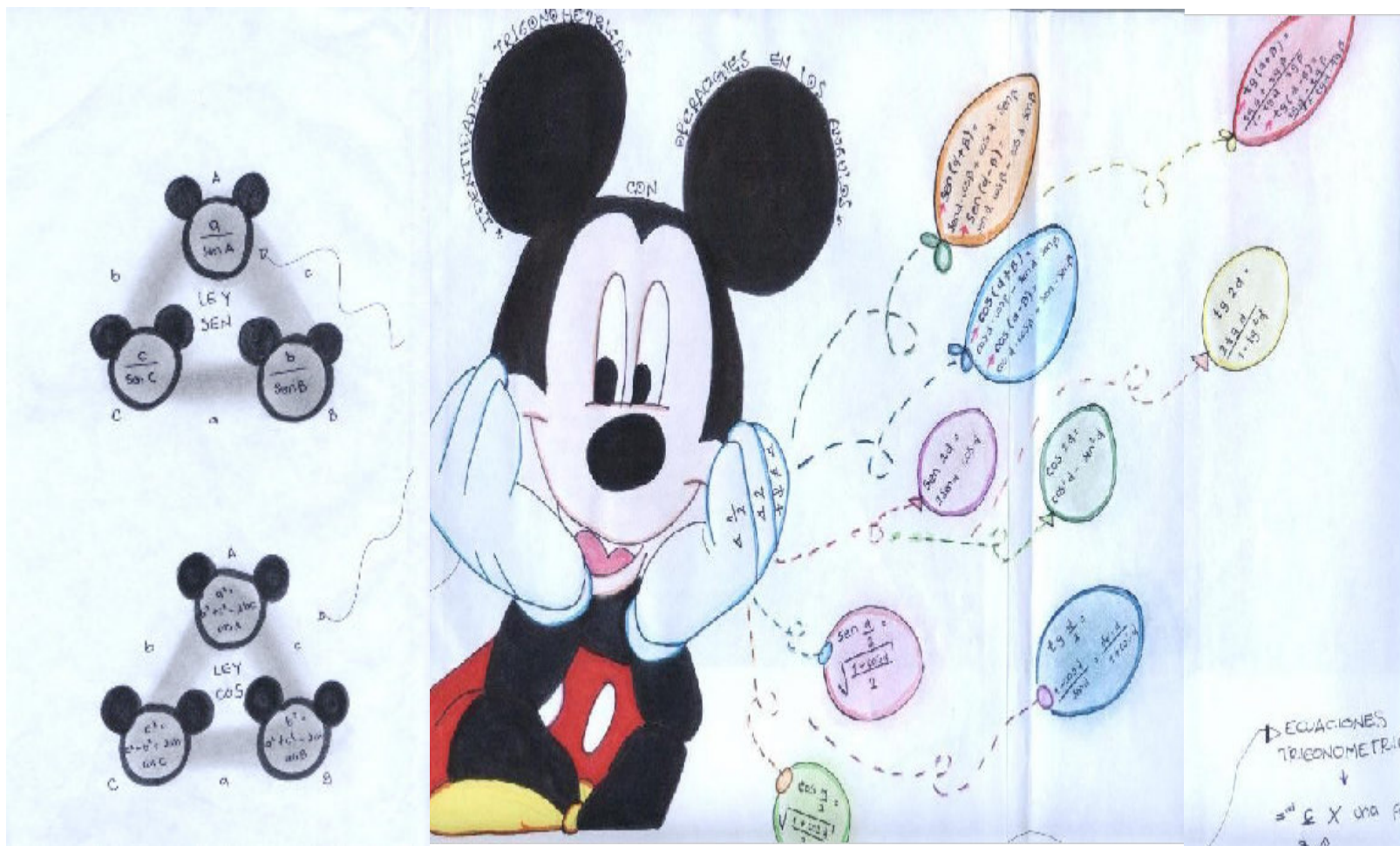


Figura 6. "Mickey Mouse" Mapa conceptual elaborado por Indira

Laura, por su parte, pensó en la tarea de la aviación (figura 7) y todo lo que implica hacer volar un avión:

“Escogí el avión, el cielo y las nubes ya que para poder hacer volar un avión se necesita tener mucho cuidado, concentración y ser muy ágil, así como en la trigonometría se debe tener mucha audacia, para poder resolver cada identidad trigonométrica, especialmente cuando ya no se trata de un ángulo cualquiera, sino de un ángulo doble, medio o si es una suma o una diferencia”

(Texto narrativo, Octubre 29 de 2004)

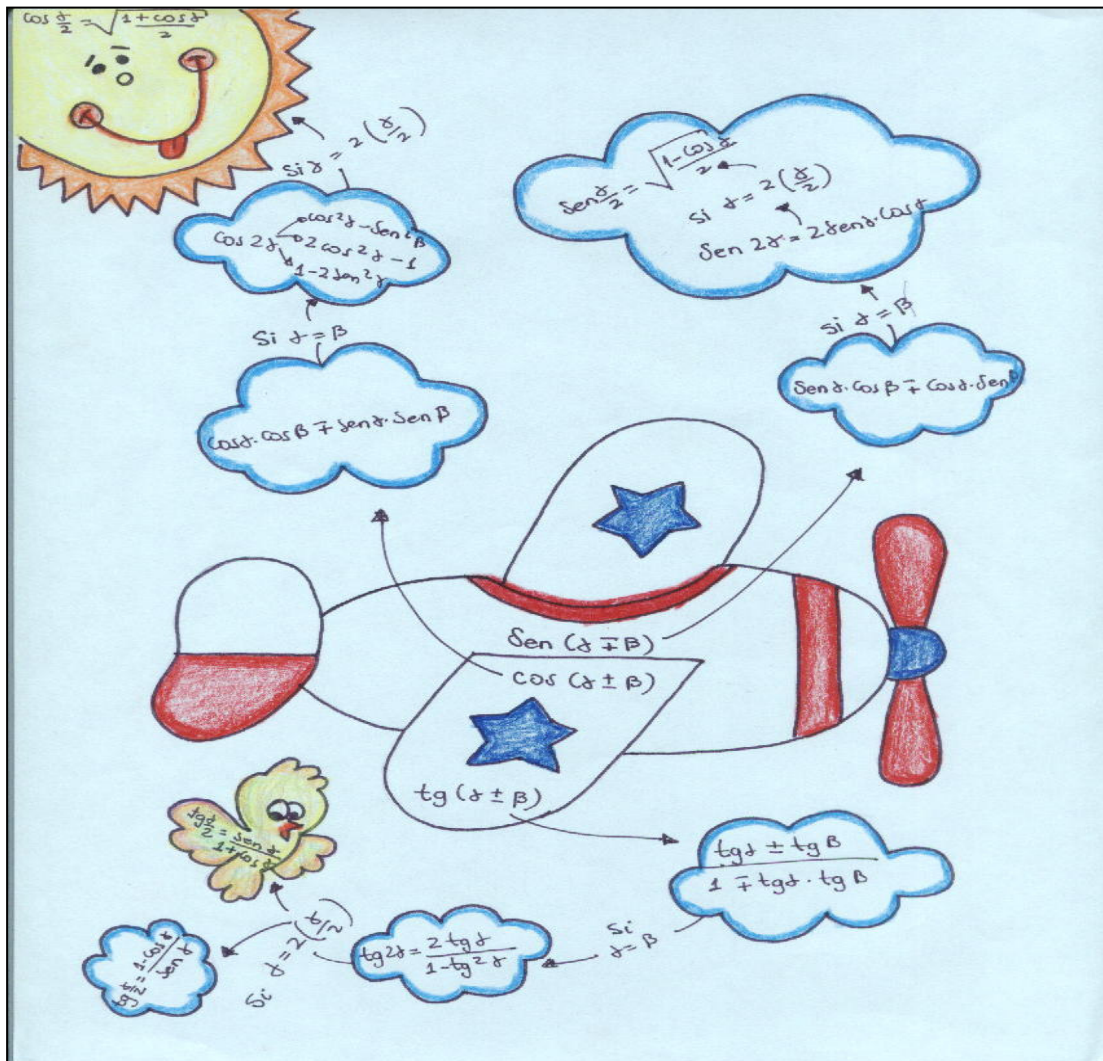


Figura 7. "El avión" Mapa conceptual elaborado por Laura

Por otro lado, Melissa pensó en algo que por la época de final de año casi todos esperamos, las vacaciones (figura 8):

“Pensé en un día de playa, sol y mar, que sabroso para descansar en estos días que se esta finalizando el año escolar y todo es ir y venir a las carreras, además el juego y los colores son un buen material para aprender, especialmente las matemáticas”

(Texto narrativo, Octubre 29 de 2004)

LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

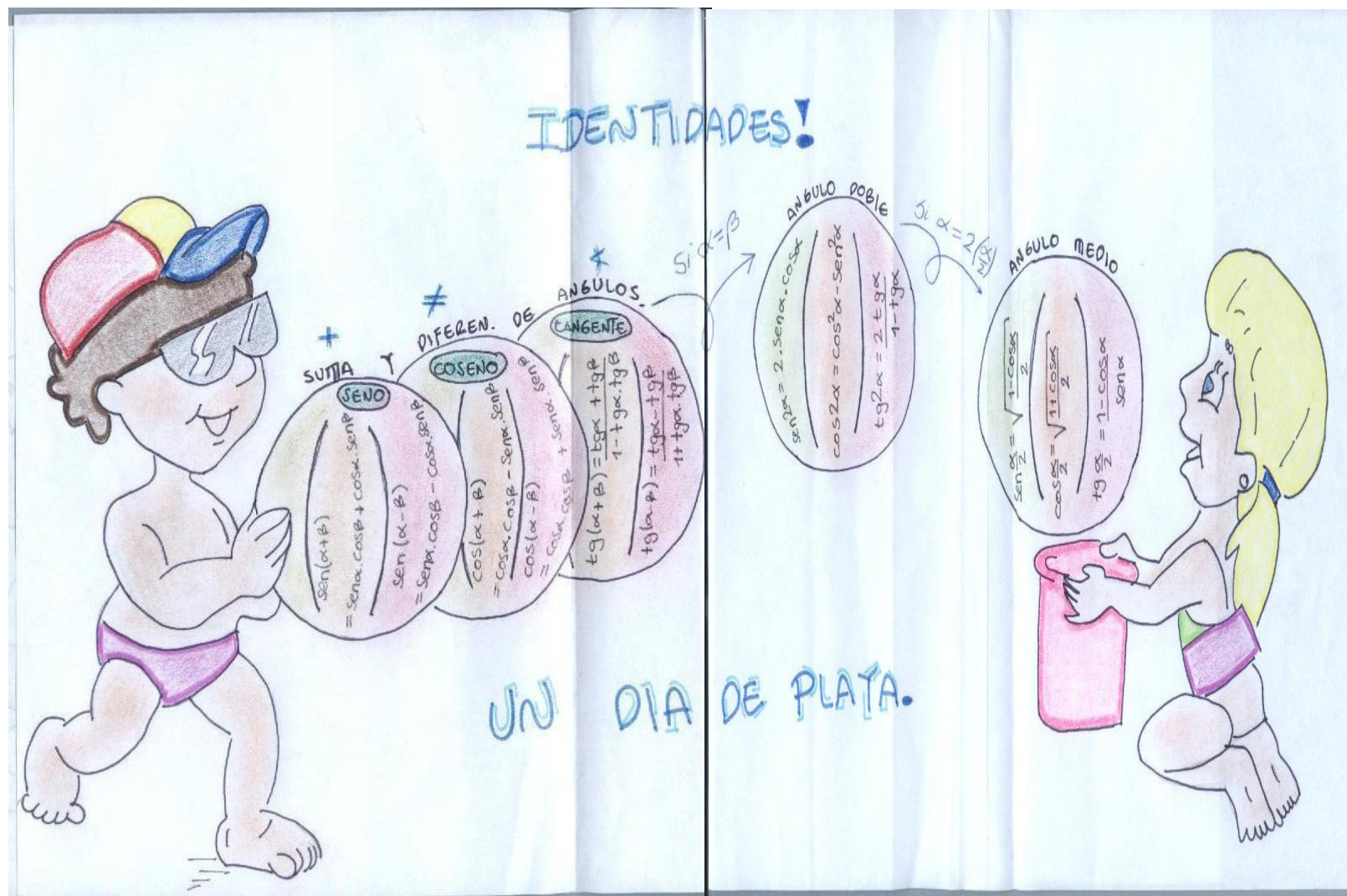


Figura 8. "Un día de playa" Mapa conceptual elaborado por Melissa

Martha fue muy fiel a su dibujo animado *Hello Kitty* (figura 9) y continuó aferrada a los gustos de este personaje:

“Continué con Hello Kitty, pues es mi dibujo animado preferido. A él le gusta salir a pasear con los globos y entretenerse con ellos, por esto ubiqué en cada globo las funciones más importantes para relacionarlas más fácilmente y a medida que pase el tiempo encontrar un gusto por la trigonometría, así como Hello Kitty por los globos”

(Texto narrativo, Octubre 29 de 2004)

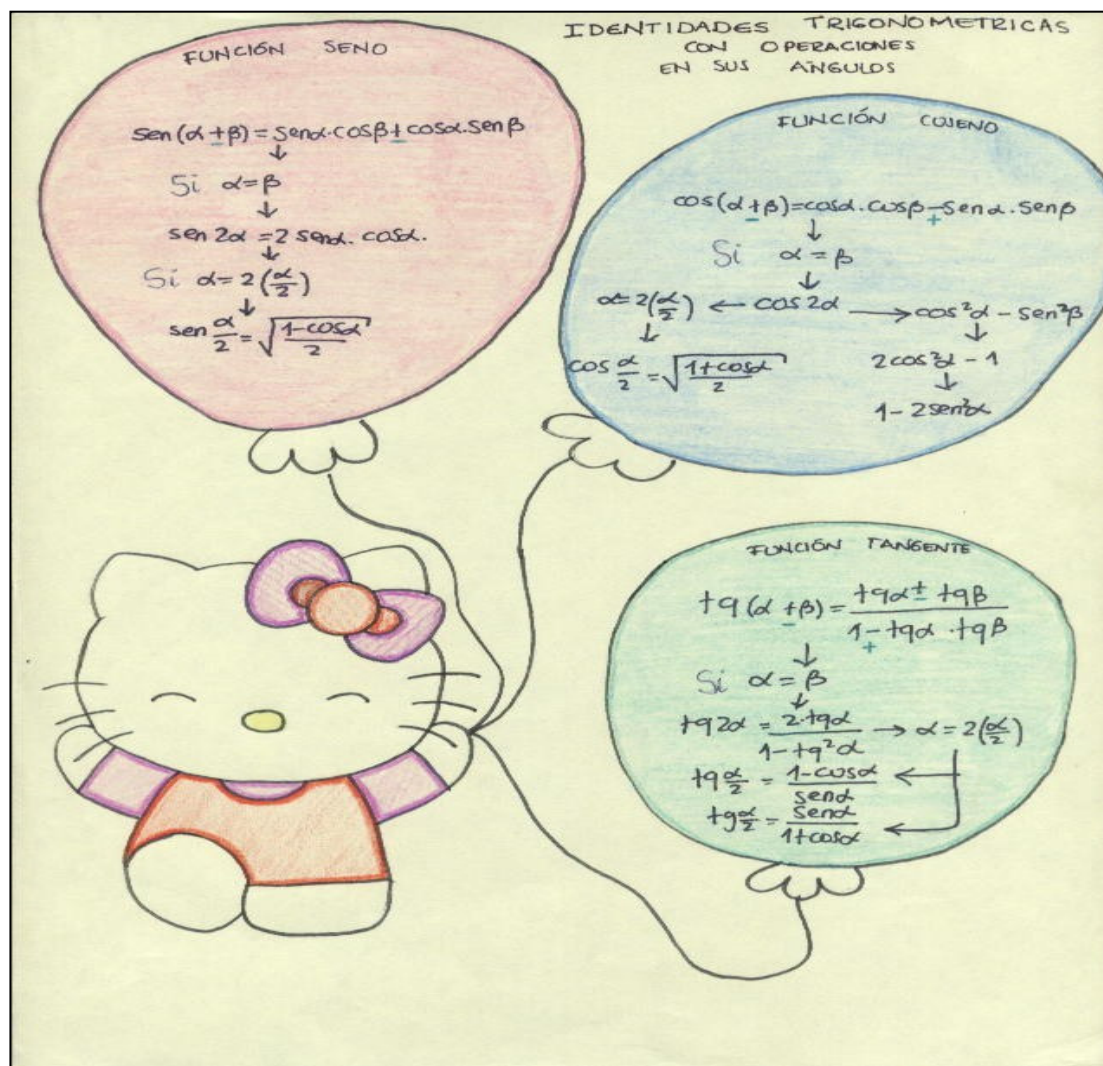


Figura 9. “Hello Kity 2” Mapa conceptual elaborado por Martha

Este es el preciso momento para comentar que Diana no cambió el dibujo escogido para su primer mapa, el arco iris, pues simplemente le realizó un cambio de fondo mas no de forma, le pareció más completo realizar un mapa con todo lo que se había trabajado en el tema de identidades trigonométricas y no pensar en algo que estuviera dividido o fragmentado, pues, según ella, se seguía una continuidad en cada tema y no eran temas aislados.

Es necesario resaltar, en este momento, que cada mapa conceptual con su respectivo texto narrativo elaborado por las estudiantes refleja, además del toque personal que cada una le puso a su trabajo, la individualidad y las diferencias existentes entre cada una de las autoras. Así como lo manifiesta Jaramillo (2003) en investigación:

“el mapa muestra una clara singularidad que posibilita diferenciar el sujeto, autor, de otros sujetos. Y, en último lugar, esos textos [los textos narrativos que acompañan a los mapas conceptuales] pueden ser considerados elementos fundamentales para la negociación de ideas, significados y sentidos, tanto de un sujeto consigo mismo como con otros sujetos”. (Jaramillo, 2003, p.64).

Para finalizar esta categoría de análisis y dar paso a la segunda categoría denominada “**Negociación de significados**” quiero retomar los comentarios de Jaramillo (2003) con respecto a la técnica de elaboración de mapas conceptuales:

“un mapa conceptual puede entenderse como el retrato instantáneo de un individuo o de un grupo en un determinado momento sobre un asunto... Sin embargo, es un retrato que demora varios días en ser construido, además de ser un retrato que va cambiando de acuerdo a las diferentes resignificaciones que el individuo o grupo hagan sobre el asunto en cuestión”. (*Ibíd.*)

2. Negociación de significados.

El aprendizaje de la técnica del mapa conceptual en la mayoría de los casos no presenta dificultad alguna; salvo en aspectos de tipo práctico. Sin embargo, su interés se deriva de los procesos que se ponen en marcha, tanto en la tarea de construcción del mapa como en la reflexión final acerca de los resultados de dicha tarea.

Según Jaramillo (2003)

“los mapas conceptuales, en el salón de clases, se pueden constituir en un instrumento para ayudar a los estudiantes y a los profesores a captar el “significado” de los temas que se van a aprender. Ellos posibilitan que estudiantes y profesores se den cuenta de nuevas relaciones y, por lo tanto, de nuevos significados (o al menos significados que no podrían encontrar, de una manera consciente, antes de la elaboración del mapa conceptual)”. Jaramillo (2003, p.65).

El aula es considerada por algunos autores como un microsistema, en el que tienen lugar multitud de acontecimientos, que se relacionan estrechamente entre sí. Estos acontecimientos están centrados en dos elementos fundamentales: la enseñanza y el aprendizaje. El primero atañe directamente al profesor y el segundo tiene como protagonista fundamental al alumno. Entre uno y otro aparece, además, un tercer elemento, centrado en el conocimiento que el profesor debe transmitir y que el alumno ha de asimilar. Sin embargo, la naturaleza misma del aprendizaje, como experiencia vivida de forma individual, constituye un factor que perturba este esquema ideal acerca de los acontecimientos que tienen lugar en el aula. Ningún individuo es igual a otro y, por ende, no hay dos alumnos idénticos. Su experiencia de

aprendizaje es diferente, lo cual plantea serios retos al educador que ha de llegar a ellos (Ontoria, 1999, p.53)

El acto de enseñar, concebido como una forma de compartir los propios conocimientos, presenta una nueva perspectiva a la hora de plantear la tarea del profesor, pues, para que ésta sea eficaz, debe basarse en criterios de honradez y responsabilidad, así como de respeto por aquellos alumnos a los que invita a compartir su propio trabajo y, en definitiva, a “participar” en la construcción de un conocimiento que sea aceptado por todos ellos (*Ibíd.* p.54).

Recogiendo algunas ideas de Novak y Gowin (1988) sobre esta categoría de análisis, los mapas conceptuales son instrumentos para negociar significados. Para aprender el significado de cualquier conocimiento es preciso dialogar, intercambiar, compartir y, a veces, llegar a un compromiso. En ningún momento se habla de aprendizaje compartido, porque el aprendizaje no es una actividad que se pueda compartir, sino un asunto en el que la responsabilidad es del individuo. No obstante, los significados sí se pueden compartir, discutir, negociar y convenir. El punto más importante que se debe recordar es el referente a compartir significados en el contexto de la actividad de educar en el que los estudiantes siempre aportan algo de ellos mismo a la negociación y que no son una tabla rasa donde hay que escribir o un depósito vacío que se debe llenar (Novak y Gowin, 1988, p.39).

Sin embargo, el mapa conceptual no tiene únicamente un valor final, en cuanto a consecución de unos objetivos de aprendizaje, sino que su interés educativo deviene también del proceso seguido en su elaboración, porque es una técnica que sirve para explicitar los conceptos que los alumnos ya conocen y las proposiciones que pueden construir con ellos. En la tarea de

compartir el conocimiento, el profesor debe tener en cuenta las ideas previas que los estudiantes poseen sobre lo que él desea transmitirles (Ontoria, 1999, p.56)

La búsqueda de nuevas relaciones entre conceptos exige un gran esfuerzo, por la dificultad que entraña el asimilar ideas novedosas que implican la reflexión sobre aquello que se acaba de aprender. En este sentido, Novak y Gowin (1988) defienden el valor del pensamiento reflexivo, comparándolo con una actividad deportiva, en la que los alumnos deben entrenarse, aceptando o rechazando conceptos que unen o vuelven a separar. Este trabajo de construcción y reconstrucción de mapas conceptuales exige el contacto con los otros compañeros, en un esfuerzo solidario que anima a compartir los significados que cada uno aporta, como un equipo deportivo comparte su actividad de entrenamiento (*Ibíd.*).

Así lo manifestó Indira cuando le pregunté sobre cómo había sido el proceso de construcción del mapa y ella dijo:

“...buscaba un dibujo en el que pudiera relacionar conceptos, colores, palabras de enlace y el dibujo. ¡Claro está! Llamando a mis amigas cada cinco minutos para preguntarles como integrar el conocimiento matemático con la forma de representarlo (globo, burbujas, etc.)”.

(Entrevista, Octubre 20 de 2004.)

Para comprender el valor del mapa conceptual como medio de compartir significados, debo dejar muy claro que no hay un mapa conceptual unívoco y definitivo sobre cualquier tema, ya que en su elaboración el individuo pone de manifiesto sus propios conceptos previos, y el nivel de inclusión que perciba en dichos conceptos.

Así mismo, por muy claras que hayan quedado las ideas en la explicación de un contenido temático o en la lectura de un texto, cada persona puede haberlas captado con un valor diferente. En este sentido, ocurre con frecuencia que los alumnos, después de atender a la explicación de un tema, resalta de él ciertos conceptos que no coinciden con los que el profesor considera como relevantes.

Como ya se dijo anteriormente, el aprendizaje es una experiencia que se vive de forma individual, pero el conocimiento es un hecho que puede ser compartido. Los significados propios del conocimiento presentan la posibilidad de ser cambiados e incluso negociados con otros compañeros, con el fin de conseguir la construcción de un mapa conceptual consensuado por todos, en el que se plasmen los conceptos más significativos de cada uno de los alumnos, previamente negociados. Cabe resaltar en este momento, que la actividad de elaborar un mapa conceptual en grupo no se pudo realizar debido a las limitaciones de tiempo que se presentaron, pues las estudiantes tenían muchas actividades y el tiempo que les quedaba finalizando el año escolar era muy escaso. Sin embargo, la negociación de significados se hizo con cada una de las estudiantes a medida que ellas realizaban la exposición de los mapas elaborados.

Cuando tuve la oportunidad de entrevistarme por segunda vez con las estudiantes, se dio una charla muy enriquecedora con cada una de ellas y el proceso de negociación de significados se dio de una forma muy espontánea. Por ejemplo, cuando Indira estaba explicándome su mapa conceptual, que ella denominó **Tigger**, inició por explicar

“Las funciones trigonométricas son seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, las tres primeras funciones

se conocen también como identidades directas y las tres últimas se conocen como recíprocas”.

(Entrevista, 20 de octubre de 2004)

En este momento intervine preguntándole ¿qué significa cada una de ellas?
Y ella respondió:

“Ah, claro, la tangente esta definida como la relación que existe entre el cateto opuesto y el adyacente. El seno es la relación entre el cateto opuesto y la hipotenusa y el coseno es la relación entre el adyacente y la hipotenusa”.

(Entrevista 20 de octubre de 2004)

Ella estaba hablando de la definición de las funciones trigonométricas, pero en ninguna parte del mapa se había hecho alguna aclaración acerca de la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo, por esto yo le pregunté: “y en que parte del mapa o del texto narrativo está eso?”. En ese momento ella se quedó pensativa, mirando su mapa y argumentó lo siguiente:

“No me pareció relevante escribirlo, pues pensé que alguien que tomara el mapa lo podía ver claramente”.

(Entrevista 20 de octubre de 2004)

Sin embargo, le aclaré que no cualquier persona que tomara el mapa lo podría ver tan claro como ella pensaba, pues la idea del mapa es precisamente que sirva como un instrumento de aprendizaje pero que le facilite a cualquier persona (no precisamente el autor) la lectura y el entendimiento del mensaje que se quiere transmitir (Jaramillo, 2003), cualidad que ella no había tenido en cuenta. Después de esto, Indira incluyó unas vocales:

“Entonces, colocaré aquí (señalando el óvalo que tiene las funciones) las letras que representan los catetos y la hipotenusa”.

(Entrevista 20 de octubre de 2004)

Ella simplemente escribió estas letras, sin realizar ningún tipo de triángulo, por lo que realicé el siguiente comentario: “pero en un triángulo, cualquier lado puede ser cateto y cualquier lado puede ser hipotenusa?”, dado que a , b o c no tienen ninguna condición, es decir, a puede ser cateto opuesto, adyacente o hipotenusa, igual para b y c (figura 10). Entonces ella argumentó lo siguiente:

“No, claro que no. Depende del ángulo que estemos observando, es decir, si tenemos un triángulo como el siguiente:

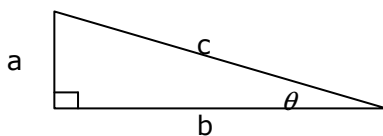


Figura 10

El cateto opuesto al ángulo θ es a y el adyacente es b , además la hipotenusa siempre es el lado que se encuentra frente al ángulo recto”.

(Entrevista 20 de octubre de 2004)

El triángulo de la figura anterior, fue dibujado por Indira en una hoja que traía en sus manos y me pareció pertinente que ella lo incluyera en el mapa, por lo tanto le dije: “pero este triángulo que tu acabas de dibujar en esa hoja, ¿qué te parece si lo dibujas en el mapa? Y ella accedió diciendo:

“Sí, voy a insertarlo aquí arriba (señalando el mapa) en medio de las identidades directas y recíprocas para que cuando alguien vea la expresión $\tan \theta = \frac{a}{b}$ se de cuenta que es la relación que existe entre el cateto que esta frente al ángulo (cateto opuesto) y el adyacente”.

(Entrevista 20 de octubre de 2004)

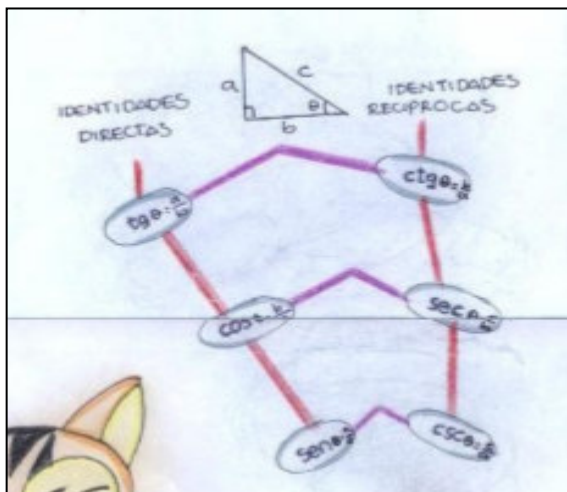


Figura 11. Aparte del mapa conceptual elaborado por Indira

En este momento, la estudiante dibujó el triángulo antes mencionado (figura 11) y estableció las relaciones de las funciones trigonométricas con respecto a ese triángulo.

De igual forma ocurrió con Martha y Laura, ya que ellas en sus mapas escribieron simplemente que las funciones trigonométricas eran seno, coseno, etc., pero en ningún momento mencionaron las relaciones que existían entre las funciones, ni la definición de las funciones trigonométricas para los triángulos rectángulos que se había mencionado en clase.

Laura, por ejemplo, en el mapa del payaso escribió en un balón que las funciones trigonométricas son seno, coseno, etc., y que de allí se obtienen las identidades trigonométricas. En otro lugar dibujó otros dos balones y en

uno de ellos escribió directas y en el otro recíprocas, pero no hizo ninguna mención a lo que envuelve a la palabra seno, o coseno. Por esto le pregunté ¿qué significado tiene para ti esas palabras que escribiste en esos balones? Y ella me respondió:

“La función seno es la relación que existe entre el cateto opuesto y la hipotenusa, el coseno es la relación que existe entre el cateto adyacente y la hipotenusa y la tangente es la relación que existe entre el cateto opuesto y la hipotenusa, estas funciones se llaman directas...”

(Entrevista 20 de octubre de 2004)

Antes de que continuara, le pregunté lo siguiente: ¿Laura, cualquier persona que coja tu mapa puede ver en él estas definiciones que me estas contando? Con una cara de asombro y un poco de desconcierto, pienso yo, respondió lo siguiente:

“Caramba, no me había fijado en este detalle. ¡Claro! Escribí las funciones, pero ¿qué significan ellas? Insertaré un balón más en medio de esos dos que dibuje allí y escribiré con símbolos lo que dije anteriormente (figura 12)”

(Entrevista 20 de octubre de 2004)

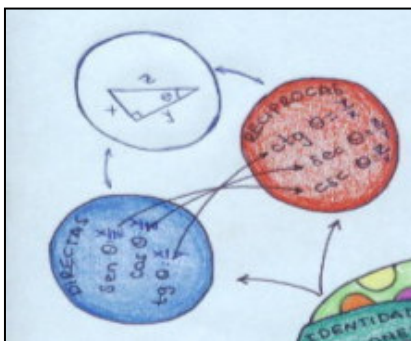


Figura 12. Aparte del mapa conceptual elaborado por Laura

De la misma forma ocurrió con Martha. Ella había escrito en uno de los pétalos de la flor las palabras, seno, coseno, tangente y en el otro

cotangente, secante y cosecante, pero estaban ahí sin ninguna relación y sin significado. Le formulé la misma pregunta que le hice a Laura e Indira y su reacción fue muy similar a la de ellas:

“Ah, ¿cómo hago para diferenciar el seno del coseno o la tangente? Esto que escribí ahí, no tiene ningún significado, es decir, sé lo que significan esas funciones, lo tengo muy claro, pero cualquier persona que vea mi mapa, no lo entenderá tan fácilmente”.

(Entrevista 20 de octubre de 2004)

Después de esto, Martha realizó el gráfico de un triángulo rectángulo (figura 13) colocándole nombre a los lados y señalando uno de los ángulos, para que de esta manera quedara mas claro el significado que tiene la expresión

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r}.$$

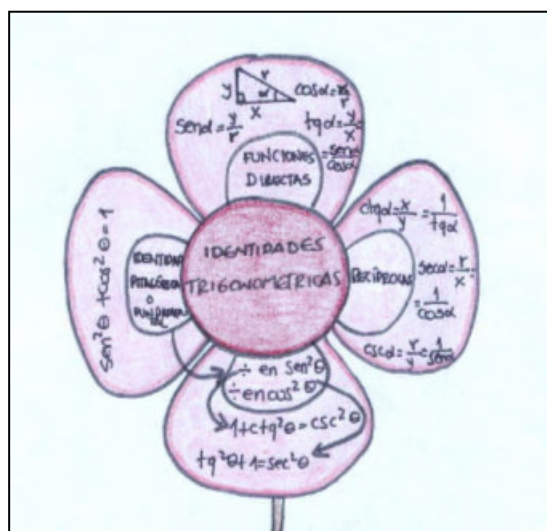


Figura 13. Aparte mapa conceptual elaborado por Martha

Con Diana y Melissa, no se presentó la situación descrita anteriormente, por el contrario, ellas sí tuvieron en cuenta este detalle en la elaboración de sus mapas (figura 14 – 15).

LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

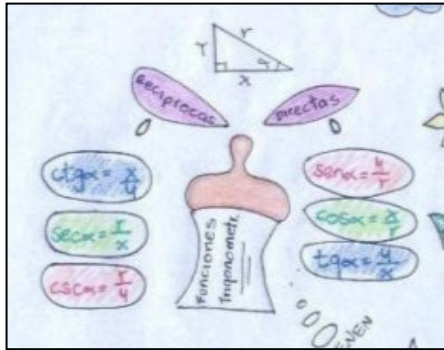


Figura 14. Aparte del mapa conceptual elaborado por Melissa

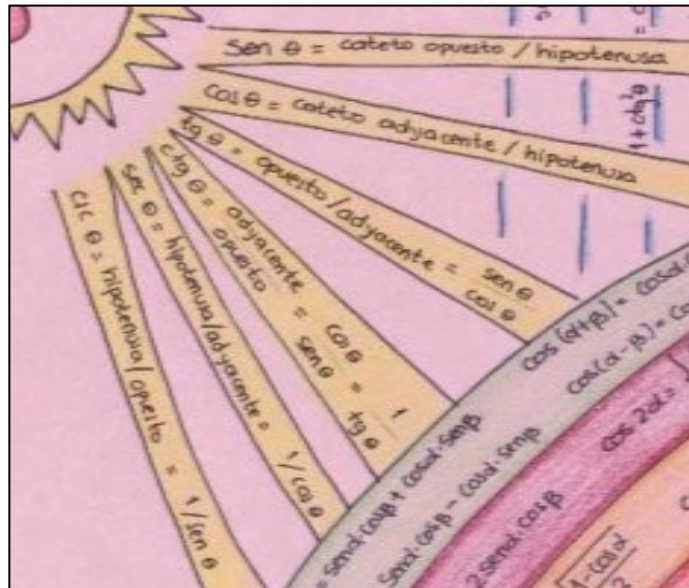


Figura 15. Aparte del mapa conceptual elaborado por Diana

Sin embargo, en el mapa que elaboró Melissa, un día de playa, había un pequeño detalle que parecía insignificante, pero resultó ser muy importante en el momento de la lectura del mapa. Inicialmente estaban dibujados una serie de balones que parecían estar estáticos, en los cuales estaba impreso una fórmula en cada uno de ellos. Todo parecía estar bien, pero lo que yo entendí al momento de observar el mapa y leer su texto, era que el par de niños que aparecían en el dibujo estaban jugando con esos balones que traían impresas las fórmulas trigonométricas, pero los balones estaban

estáticos, es decir, no había ninguna señal que indicara que ellos estaban en movimiento y además le hacía falta algunas palabras de enlace para que quedara más claro el mensaje que ella quería transmitir. Por lo tanto yo le pregunté acerca de la relación que existía entre esos cinco balones y ella me respondió lo siguiente:

“el niño está jugando con la niña a lanzarle los balones que tienen impresas las fórmulas trigonométricas cuando hay operaciones en los ángulos”

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

En este momento le dije que era claro que el niño estaba jugando con la niña y los balones, pero cual es la relación que existe entre los balones, es decir, en unos dice suma y diferencia de ángulos, en el otro dice ángulo doble y en el último dice ángulo medio. Pero, ¿cómo se deducen esas fórmulas de ángulos dobles y medios? O, expresado de otra forma, ¿qué palabra de enlace hace falta para relacionar estos balones? Una vez formuladas estas preguntas a Melissa, se reflejó en su cara una confusión entre las identidades allí plasmadas en ese dibujo, por lo tanto yo le recordé que el día que hablamos de ese tema en clase, se había hecho la aclaración de que el tema de ángulos dobles se deducía de la suma de ángulos en el caso particular para el cual el par de ángulos son iguales. A esto Melissa argumentó:

“Obvio, hace falta escribir esa condición, para que se vea claramente que el ángulo doble se deduce de la suma de ángulos, igual para el ángulo medio. Voy a dibujar una flecha que simule el movimiento de los balones y sobre ella voy a escribir las condiciones para que se cumplan estas fórmulas”.

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

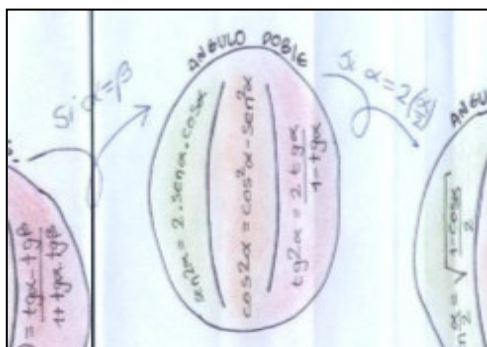


Figura 16. Aparte del mapa conceptual elaborado por Melissa

Era un detalle (figura 16) que, como dije anteriormente, parecía insignificante pero era de mucha importancia para la comprensión del mapa.

De igual forma ocurrió en el mapa conceptual de Martha, hacía falta esta palabra de enlace para que quedara más claro el mensaje que se quería transmitir y de la misma manera como le aclaré a Melissa, la importancia de este conector, se lo hice saber a Martha quien después de la negociación lo aceptó y escribió en su mapa, pues hacía falta.

Un detalle que llamó bastante mi atención y que sólo estuvo presente en dos mapas, el de Indira y Diana, fue la inclusión del tema de la Ley de Senos y cosenos en sus dibujos. Tema que no tuvieron en cuenta las otras participantes de la presente experiencia y las cuales me contaron que no les había parecido importante este tema, pues ya habían tenido bastante con todas las fórmulas estudiadas como para incluir este tema que parecía no tener relación con las identidades. Sin embargo, considero que si tiene relación con el tema, dado que estas leyes son ecuaciones que se utilizan para resolver triángulos que no necesariamente son rectángulos y en últimas se convierten en identidades, les hice ver esto a las estudiantes.

Pero el detalle que más me cautivó fue que en el mapa de Indira aparecía escrita la palabra Ley Sen y Ley Cos, pero no había ninguna frase o fórmula que me indicara lo que expresan estas dos leyes. Por lo tanto le pregunté a Indira ¿qué significa esto que esta escrito dentro de este triángulo? Y ella muy emocionada me dijo:

“Este triángulo representa la ley de los senos y este la ley de los cosenos, que se utiliza para resolver triángulos que no son rectángulos”.

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

En este momento, sucedió lo mismo que en el mapa que la estudiante había realizado Tigger, cuando ella mencionó las funciones trigonométricas pero sin enunciarlas o por los menos hacer un comentario de ellas. Yo le dije, sí claro, pero ¿qué quiere decir o qué significado tiene para ti la ley de senos y la de cosenos? Indira rápidamente respondió:

“La ley de los senos dice que la magnitud de uno de los lados es proporcional al seno del ángulo opuesto a este lado, es decir, si tengo un triángulo de la forma (figura 17)

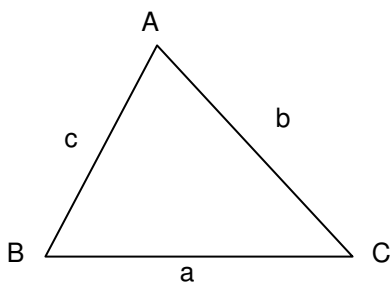


Figura 17

Entonces la ley de los senos plantea $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Ahora la ley de los cosenos plantea lo siguiente: Dado un triángulo como el de la figura anterior entonces la ley nos dice

que: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ **y**
 $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C .$

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

Todo lo anterior, era completamente cierto, pero me dio la impresión de que lo había dicho de memoria. Entonces, le dije que estaba bien todo lo que ella me había contado, pero que en el mapa no veía eso por ningún lado. Entonces ella misma reflexionó y me dijo:

“Claro, volvimos a lo de antes, están escritos los nombres pero no lo que quiere decir cada una de ellas”

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

En ese instante, le pregunté: ¿cómo puedes incluir todo lo que acabas de decir, en este mapa?

“Voy a aprovechar los dibujos triangulares que realicé y voy a incluir allí las fórmulas que acabé de decir”.

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

Todavía me quedaba la sensación de que Indira se había aprendido de memoria las fórmulas y no tenían ningún significado para ella y además las repetía como quien repite un trabalenguas. Por esto le pregunté ¿qué pasa con estas leyes, es decir, para qué sirve o cuándo se aplican? Y ella me respondió:

“Estas leyes se utilizan para resolver aquellos triángulos que no son rectángulos, es decir, sirve para los triángulos acutángulos, equiángulos y oblicuángulos”.

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

Después de esta respuesta, le pregunté qué significaba para ella un triángulo acutángulo, equiángulo u oblicuángulo. Quedó un poco sorprendida por la pregunta, y simplemente le dije que me parecía que ella se había aprendido de memoria las fórmulas y esa no era la idea de esa actividad. Por lo que ella me respondió que tenía claro de que se trataban estas leyes, al respecto comentó:

“La ley del seno es muy útil cuando tenemos un ejercicio en el que conocemos dos ángulos y el lado comprendido entre ellos y necesitamos hallar los demás elementos del triángulo, o si conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados y la ley del coseno nos sirve para resolver triángulos en los que conocemos los tres lados y necesitamos hallar los ángulos”.

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

Lo que dijo Indira estaba totalmente correcto, sin embargo, insistí en preguntarle que entendía por triángulo acutángulo, oblicuángulo y equiángulo.

“Un triángulo acutángulo es aquel que tiene todos sus ángulos agudos, el triángulo equiángulo es aquel que tiene todos sus ángulos iguales y un triángulo oblicuángulo es aquel que tiene un ángulo oblicuo, es decir, mide mas de 90°”

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

Indira tenía clara la clasificación de los triángulos, sin embargo, en su mapa aparecía lo siguiente (figura 18):

LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

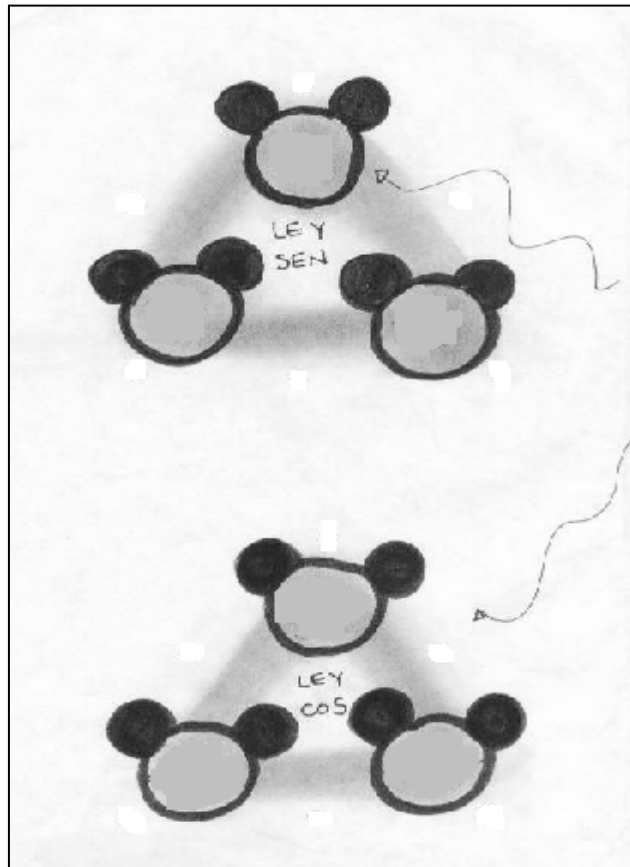


Figura 18. Aparte del mapa conceptual elaborado por Indira

Este dibujo, no significaba para mí absolutamente nada, pero después de la anterior negociación el resultado fue el siguiente (figura 19):

LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

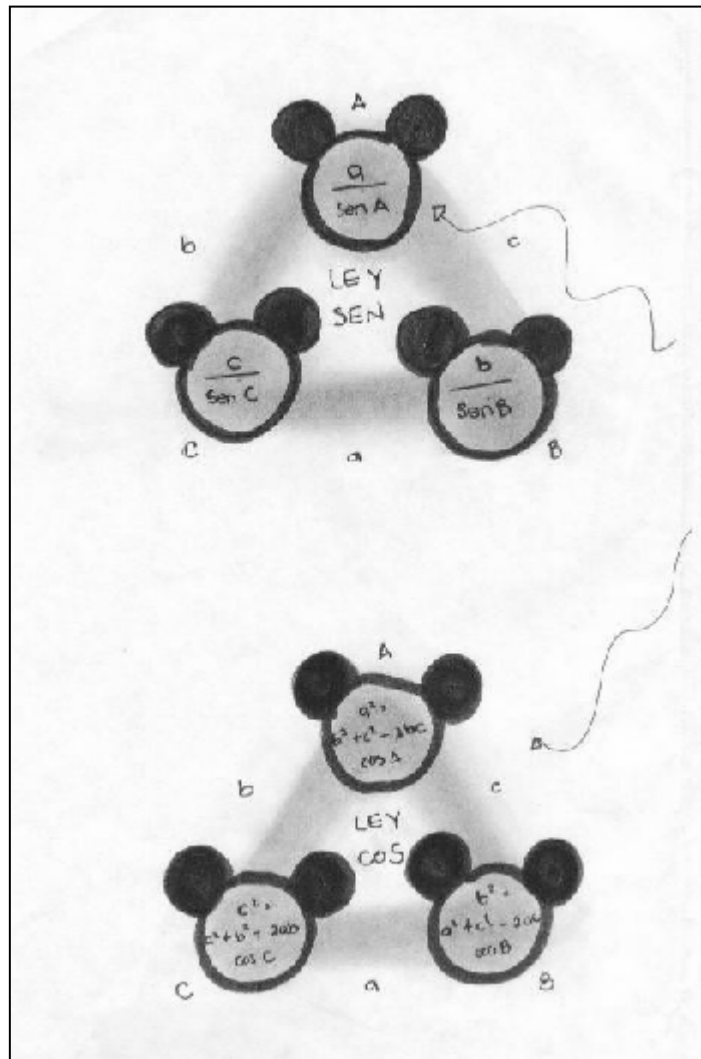


Figura 19. Aparte del mapa conceptual elaborado por Indira

También había otro detalle aparte de la ley de senos y cosenos, eran las ecuaciones trigonométricas, que curiosamente también aparecían en ambos mapas, el de Diana y el de Indira. Pero en el de Diana, no se hacía ninguna mención acerca del tema, simplemente se mencionaba y nada más, por lo tanto le pregunté a Diana que pasaban con estas ecuaciones y ella expresó:

“Una ecuación trigonométrica es una igualdad que contiene como variable no una letra sino una función trigonométrica”

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

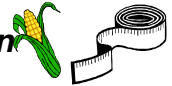
En este momento le pedí el favor de que me lo explicara con palabras más claras y ella respondió:

“Es decir, en las ecuaciones normales, siempre se debe hallar el valor de una variable x , y o z o cualquier letra del alfabeto, pero en estas ecuaciones se debe hallar el valor de un ángulo que depende de una función trigonométrica. Por ejemplo al resolver la ecuación: $\sin^2 \theta - \frac{1}{4} = 0$, se debe tener presente

para qué valores de θ , el seno de ese ángulo es igual a $\pm \frac{1}{2}$, ya que como la función esta elevada al cuadrado, este valor siempre va a ser positivo y si se le resta un cuarto, este resultado va a ser cero”.

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

Creo que esta explicación fue más que suficiente, pues tenía muy claro lo que significaba resolver una ecuación trigonométrica. Mientras que Indira en su mapa “Tigger” escribió lo siguiente:

“Una ecuación trigonométrica es una $=^{ad} \subseteq X$ una función  ***”***

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

Lo que ella había escrito era un jeroglífico, y me pareció bastante curioso que lo hubiera escrito de esa forma, pues relacionó la trigonometría con una rama de trigo para la primera parte de la palabra y un metro para la palabra métrica. Le pedí el favor de que me explicará con palabras lo que allí estaba dibujado:

“Significa que una ecuación trigonométrica es una igualdad que está contenida por una función trigonométrica, aquí la variable no solo depende de una letra, sino de una función”

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

*LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS*

En este momento, concluí que el tema estaba claro, por parte de las dos estudiantes y consideré oportuno dejar hasta aquí la negociación.

3. Disquisiciones trigonométricas⁴.

Antes de iniciar con esta categoría de análisis, creo pertinente recordar en este momento cuál fue la pregunta que me planteé para iniciar este trabajo: ¿cómo los mapas conceptuales posibilitan que los estudiantes de décimo establezcan relaciones entre las identidades trigonométricas? Esta pregunta fue planteada debido a la gran dificultad que los estudiantes tienen para diferenciar, por ejemplo, que la tangente se puede expresar como el cociente entre el seno y el coseno o que la fórmula del ángulos doble se deduce de la suma de ángulos, ya que la mayoría de veces, no son más que fórmulas mecánicas sin sentido para ellos.

Así, presentaré en esta sección algunas observaciones generales que hice, de mis estudiantes durante las actividades; también lo que ellos expresaron e hicieron para llegar a establecer las relaciones antes mencionadas.

Una vez elegidas las estudiantes que participarían en la presente experiencia, estaba interesada en escuchar los argumentos matemáticos o las relaciones que ellos podían establecer en la construcción de cada uno de los mapas, especialmente en la elaboración del primero, ya que era algo nuevo para ellos. Y cuando le solicité a Indira que me explicara lo que había realizado en el primer mapa esto fue lo que ella me contó:

“Empecemos por decir que una Identidad Trigonométrica es una igualdad que se cumple para todos los valores del ángulo, y que pueden ser de dos clases:

1. Directas: $\sin \theta = \frac{y}{1}$, $\cos \theta = \frac{x}{1}$, $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

⁴ Aquí estoy parafraseando a Galois en sus “Disquisiciones Aritméticas”.

2. Indirectas o recíprocas: $\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta},$
 $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\frac{x}{y}}, \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{y}{x}}.$

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

Me pareció interesante que ella hubiese escrito expresiones como $\frac{y}{1}$, es decir, que le hubiera asignado valores específicos a los lados del triángulo; por esto le pregunté ¿que significa para ti la expresión $\frac{y}{1}, \frac{x}{1}$ o $\frac{y}{x}$?

“Estas expresiones significan que el seno de un ángulo es la relación existente entre su cateto opuesto (y) y su hipotenusa (1), igual para el coseno y la tangente”.

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

La anterior expresión estaba indicando que la hipotenusa de un triángulo siempre va a valer 1 y le pregunté que si esto era cierto.

“Pues, no, no siempre, es decir yo tomé el caso particular para cuando la hipotenusa vale 1, pero puede ser cualquier otro valor, es decir, yo lo escribí así, para tratar de relacionar el seno con la y (ordenadas) y el coseno con la x (abscisas)”

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

Indira, aclaró que había tomado el caso particular para el triángulo rectángulo cuya hipotenusa vale 1. Sin embargo, le aclaré que no se podía generalizar un caso particular, dado que la hipotenusa de un triángulo no siempre va a valer 1, pero si se puede hallar uno semejante que la tenga.

Es necesario en este momento hablar de las definiciones de las funciones trigonométricas.

Consideremos un punto P de la circunferencia de radio unitario (figura 20) y centro en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares.

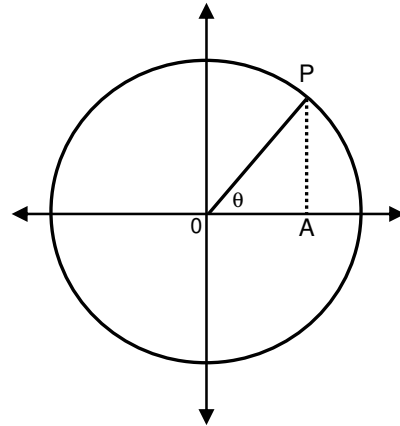


Figura 20 Circunferencia unitaria

Por el punto P que está en la circunferencia trazamos una perpendicular al eje de las X cortándose en el punto A, formándose así el triángulo rectángulo OAP y ángulo θ en el vértice O.

Teniéndose en cuenta según Pitágoras:

$\overline{OP}$ = radio = 1 = hipotenusa

$\overline{OA}$ = cateto adyacente

$\overline{AP}$ = cateto opuesto.

De acuerdo a la posición del ángulo θ en el ΔOAP se definen las funciones trigonométricas:

✓ Seno del ángulo θ es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa. En

símbolos: $\text{sen } \theta = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$.

- ✓ Coseno del ángulo θ es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa. En símbolos: $\cos \theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$.
- ✓ Tangente del ángulo θ es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente. En símbolos: $\operatorname{tg} \theta = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}$.
- ✓ Cotangente del ángulo θ es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto. En símbolos: $\cot \theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{AP}}$.
- ✓ Secante del ángulo θ es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente. En símbolos: $\sec \theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}$.
- ✓ Cosecante del ángulo θ es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto. En símbolos: $\csc \theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{AP}}$ (Ardila, 1998, p.15)

Después de esta discusión, pasamos a hablar de las identidades pitagóricas especialmente de la fórmula fundamental $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, pues tenía especial interés en que las estudiantes interiorizaran esta fórmula y prestaran atención a todo lo que ella implicaba, es decir, que ellas mismas dedujeran las otras sin necesidad de que las memorizaran, por esto Indira siguió relatándome su mapa:

"Ahora tenemos las identidades pitagóricas que salen de la fórmula fundamental $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, esta fórmula se cumple para cualquier valor del ángulo. Si se divide entre $\operatorname{sen}^2 \theta$ ambos miembros de la identidad se obtiene $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ siempre y cuando $\operatorname{sen}^2 \theta \neq 0$ ".

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

Me pareció interesante que tuviera en cuenta la condición $\sin^2 \theta \neq 0$, y en ese momento le pregunté ¿a qué se debe esa condición? Ella respondió con toda seguridad:

“Cuando el ángulo vale 0° , 180° , 360° , el seno es igual a cero y la división por cero no existe, luego hay que hacer esta aclaración”.

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

Es pertinente hablar de las identidades pitagóricas en este momento, ya que sirven de base en la demostración de la mayoría de identidades trigonométricas.

Representemos los segmentos trigonométricos (figura 21) para un ángulo que se encuentra en el primer cuadrante así:

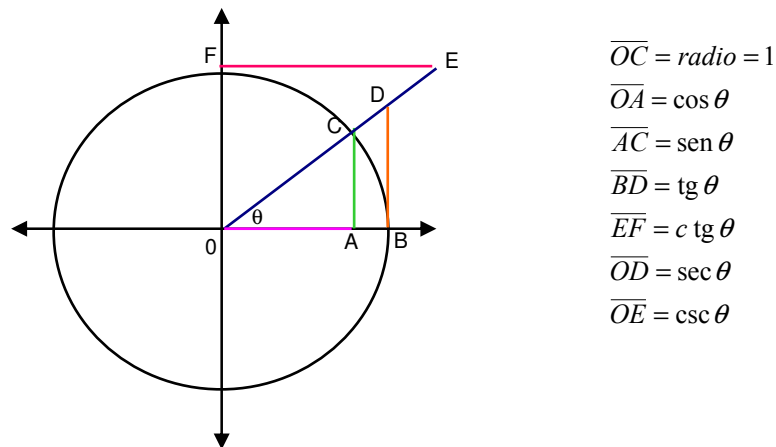


Figura 21. Segmentos trigonométricos

1. Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo OAC, y aplicando el Teorema de Pitágoras: $\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2$

Pero: $\overline{OC} = \text{Radio} = 1$, $\overline{OA} = \cos \theta$, $\overline{AC} = \sin \theta$

Entonces: $1^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$

$$1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

O sea que: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

2. Teniendo en cuenta el triángulo OBD, y aplicando el Teorema de

Pitágoras: $\overline{OD}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BD}^2$

Pero: $\overline{OD} = \sec \theta$, $\overline{OB} = \text{Radio} = 1$, $\overline{BD} = \text{tg } \theta$

Entonces: $\sec^2 \theta = 1^2 + \text{tg}^2 \theta$

Luego: $\sec^2 \theta = 1 + \text{tg}^2 \theta$

3. Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo EFO, y aplicando el Teorema

de Pitágoras: $\overline{OE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FO}^2$

Pero: $\overline{OE} = \csc \theta$, $\overline{EF} = c \text{tg } \theta$, $\overline{FO} = \text{Radio} = 1$

Entonces: $\csc^2 \theta = c^2 \text{tg}^2 \theta + 1^2$

Luego: $\csc^2 \theta = c^2 \text{tg}^2 \theta + 1$

El hablar de identidades trigonométricas, implica hablar de demostraciones y en este punto es bueno hacer énfasis en lo que significa para los estudiantes la palabra demostrar. Al respecto Indira realiza una explicación muy concreta acerca de lo que para ella significa demostrar:

“Demostrar es mostrar con argumentos que algo si es válido”.

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

Luego pregunté ¿y demostrar identidades qué significa?

“Mostrar con argumentos válidos que algo es verdadero y se cumple, y en trigonometría es demostrar con argumentos matemáticos que una identidad trigonométrica es verdadera”.

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

El gran interrogante en este momento es ¿cómo se realiza la demostración de una identidad? Pregunta que para la mayoría de los estudiantes del grado décimo se convierte en la “piedra en el zapato”, pues si no se tienen claros los conceptos y las relaciones trigonométricas, además las operaciones básicas de sumar, restar, multiplicar y dividir, difícilmente se puede llevar a cabo un ejercicio de este tipo. Al respecto Melissa, Indira y Laura tenían claro lo que implicaba realizar un ejercicio de este tipo:

“Realmente existen varias formas de hacerlo, una de ellas es reducir un miembro a la forma del otro, es decir, iniciar con un lado de la igualdad y llegar al otro utilizando operaciones básicas y por lo general se escoge el lado de la igualdad más complicado o el que tenga más cosas para hacer, es decir, sumas, restas, multiplicaciones, etc.”.

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

Esto es lo que argumentó Indira acerca de lo que para ella significaba demostrar una identidad. Melissa compartió en cierta forma esta apreciación que hizo Indira, al respecto ella comenta:

“Las demostraciones se realizan por medio de transformaciones de algún miembro de la igualdad para llegar al otro, generalmente se escoge el que esté un poco más complicado, además se pueden hacer por medio de operaciones básicas o a través de sustituciones”

(Entrevista 20 de octubre de 2004)

Cuando Melissa hizo referencia a sustituciones, estaba hablando de escribir las funciones en términos de otras para facilitar la demostración:

“Transformar la identidad es escribirla en términos de senos y cosenos para que la demostración quede mucho más fácil de

trabajar, especialmente cuando tenemos una igualdad que contienen funciones como secante, cotangente y cosecante”.

(Entrevista 20 de octubre de 2004)

En este sentido la estudiante se refería a que es mucho más fácil trabajar los ejercicios de demostración haciendo las equivalencias entre las funciones, especialmente en términos de senos y cosenos y para esto se debe tener muy claro la relación que existe entre las diferentes funciones trigonométricas.

Mientras que Laura hace referencia a este tópico en los siguientes términos:

“Demostrar una identidad consiste en reducir un miembro a la forma del otro, empleando las relaciones fundamentales y procedimientos matemáticos, tales como sumar, restar, multiplicar y dividir. Por lo general se escoge el miembro de la igualdad más complicado para reducirlo al más sencillo”

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

Laura coincide con Melissa en que es más fácil empezar las demostraciones por el lado más complicado o el que tiene más cosas por hacer, es decir, hay más operaciones como sumar o multiplicar expresiones para ir reduciendo la expresión hasta llegar al otro lado de la igualdad, que por lo general es una expresión más sencilla que la inicial.

Sin embargo, las tres concluyeron en que no existe una regla general para resolver identidades, es decir, no existe un algoritmo único de solución de este tipo de ejercicios, cada uno es diferente y se deben utilizar métodos distintos para la solución de cada uno de ellos. Pero esto no es suficiente también se debe tener claras las relaciones que existen entre las diferentes funciones trigonométricas y saber las operaciones básicas.

En el último mapa que construyeron las estudiantes, Martha y Laura tuvieron en cuenta una identidad que tiene otras equivalencias en términos de senos y cosenos y que sirve bastante tenerla presente en el momento de resolver identidades. Esta identidad sale de la identidad pitagórica o fundamental $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$ y como lo explicó Diana:

“Si despejamos la función $\text{cos}^2 \theta$ de la fórmula $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$ obtenemos que $\text{cos}^2 \theta = 1 - \text{sen}^2 \theta$, si despejamos por ejemplo $\text{tg}^2 \theta$ de la expresión $\text{tan}^2 \theta + 1 = \text{sec}^2 \theta$ se obtiene $\text{tan}^2 \theta = \text{sec}^2 \theta - 1$, si despejamos $\text{ctg}^2 \theta$ de la expresión $1 + \text{cot}^2 \theta = \text{csc}^2 \theta$ se obtiene $\text{cot}^2 \theta = \text{csc}^2 \theta - 1$ y así con cada una de ellas”.

(Entrevista 6 de octubre de 2004)

Pero esta identidad sirve también en el caso del ángulo doble para el coseno, es decir, según lo explicó Laura en su mapa (figura 22):

“La expresión $\text{cos} 2\theta = \text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta$, se puede escribir de otra forma utilizando $\text{cos}^2 \theta = 1 - \text{sen}^2 \theta$, entonces reemplazando esta ecuación en la del ángulo doble se tiene que: $\text{cos} 2\theta = 1 - \text{sen}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = 1 - 2\text{sen}^2 \theta$, expresión que también sirve para esta fórmula”

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

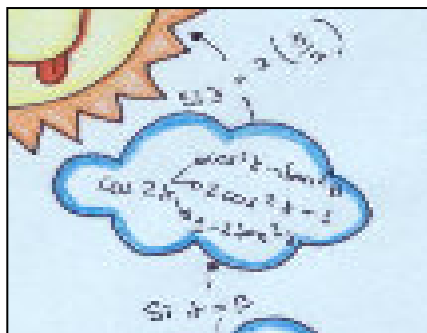


Figura 22. Aparte del mapa conceptual elaborado por Laura

Expresión válida para el coseno del ángulo doble, que utiliza la relación que se dedujo de la fórmula pitagórica.

De igual forma Martha en su mapa de los globos (figura 23), utilizó esta expresión y además la expresión $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ para deducir otra forma de escribir la fórmula del coseno del ángulo doble:

“La fórmula $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$, puede transformarse utilizando $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, entonces reemplazando esta equivalencia en la del ángulo doble se tiene que: $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2\cos^2 \theta - 1$, expresión válida para esta fórmula”

(Entrevista 5 de noviembre de 2004)

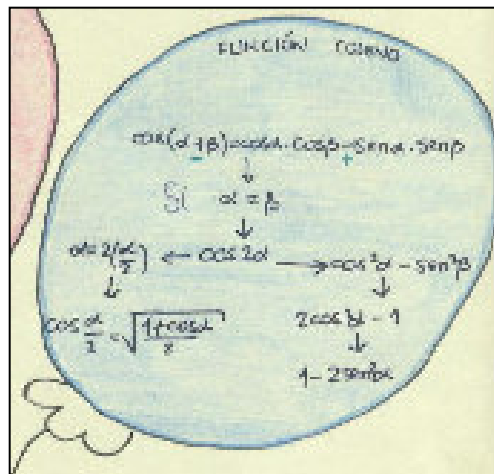


Figura 23. Aparte del mapa conceptual elaborado por Martha

0

Dentro de los mapas elaborados por las estudiantes, sólo hubo una de ellas que incluyó en ellos lo que para ella significaba trigonometría, este fue el caso de Laura, quien escribió:

“Trigonometría: Rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo”

(Elaboración primer mapa 1 de octubre de 2004)

En este punto, Laura hizo énfasis en las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo en términos de las funciones trigonométricas.

Una vez finalizada esta experiencia, realicé una prueba escrita con las estudiantes, para evaluar si efectivamente los mapas conceptuales habían ayudado en la construcción de su propio conocimiento. Les planteé un ejercicio aparentemente sencillo, pero requería de casi todo lo que se había visto en clase y lo que ellas habían escrito en sus mapas. Cabe resaltar que las estudiantes podían consultar sus mapas para la evaluación.

El ejercicio que les planteé fue el siguiente:

Demostrar que $\text{sen } 3\theta = 3 \cdot \text{sen } \theta - 4 \text{sen}^3 \theta$.

Cada una lo resolvió de una forma distinta y lo hiciera de una forma bastante acertada, pero voy a comentar la forma como lo resolvió Martha, ya que recordando los antecedentes de esta estudiante, fue una de las que tenía unas percepciones equivocadas infundidas por sus amigos de otros colegios. La forma como lo resolvió fue la siguiente:

LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Demostración:

Empecemos por escribir el ángulo triple como $2+1$, es decir

$$3\theta = 2\theta + \theta$$

$\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) \rightarrow$ suma de ángulos

$$= \sin 2\theta \cdot \cos \theta + \cos 2\theta \cdot \sin \theta$$

$$= 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos \theta + (1 - 2\sin^2 \theta) \cdot \sin \theta \rightarrow \text{reemplazo ángulos dobles y propiedad distributiva}$$

$$= 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos^2 \theta + \sin \theta - 2\sin^3 \theta$$

como $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ reemplazo en la demostración

$$= 2 \cdot \sin \theta \cdot (1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta - 2\sin^3 \theta \rightarrow \text{propiedad distributiva}$$

$$= 2 \cdot \sin \theta - 2 \cdot \sin^3 \theta + \sin \theta - 2\sin^3 \theta \rightarrow \text{términos semejantes}$$

$$= 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$$

Luego:

$$\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$$

(Evaluación, 12 de noviembre de 2004)

Una vez que ella me entregó la evaluación, las revisé todas y les pedí a las estudiantes el favor de que comentaran como lo habían resuelto. Martha expresó lo siguiente:

“Inicialmente no se me ocurría nada, ya que no existía ninguna fórmula para el ángulo triple, es más, se debía deducir la fórmula del ángulo triple, simplemente pensé en que $3=2+1$ y de esta forma me quedaba una suma de ángulos, luego de esto aplique la fórmula para la suma y resultaron dos ángulos dobles, uno para el seno y otro para el coseno, con fórmulas que ya conocía de antemano, entonces el resto simplemente fue reemplazar las fórmulas y tener presente a donde debía llegar, ya que el otro lado de la igualdad contenía solamente la función seno, por lo tanto debía escribir todas las expresiones en términos de seno para facilitar el procedimiento”.

(Evaluación, 12 de noviembre de 2004)

Laura, Melissa e Indira también utilizaron el hecho de que $3 = 2 + 1$ para poder resolver el ejercicio, aunque dieron más vueltas que las que dio Martha, pues ellas no tenían apuntadas las equivalencias de la función del coseno del ángulo doble que Martha y Laura sí habían incluido en sus mapas. Mientras que Diana no tuvo esa “agilidad”, por decirlo de alguna forma para poder atacar el ejercicio y después de divagar durante un buen tiempo, me le acerqué y le di la sugerencia, sin embargo, siempre tuvo obstáculos para resolver el ejercicio.

Quiero finalizar esta categoría de análisis con unos comentarios de la autora Jaramillo (2003) con respecto a la utilización de los mapas conceptuales en la evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje:

“los mapas conceptuales permiten que los alumnos y los profesores puedan: evaluar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta evaluación, durante todo el proceso de aprendizaje del alumno, posibilitan que el profesor: uno, verifique el uso adecuado de conceptos y términos en un determinado momento; dos, verifique cuáles de las conexiones están claras y con significados apropiados; tres, verifique también el uso de ejemplos adecuados; cuatro, verifique la profundización del contenidos, y las interrelaciones de estos contenidos con otros temas; y finalmente, verifique el aprendizaje de los alumnos de forma más libre y abierta, ya sea de forma individual o ya sea de forma grupal. Y, a su vez, posibilita que el alumno: uno, organice y sistematice su conocimiento, estableciendo enlaces entre conceptos y subconceptos y las diversas ejemplificaciones; y dos, esté continuamente desarrollando proceso de auto-evaluación”. (Jaramillo, 2003, p. 65).

EL CASO DE DIANA

“las identidades no son tan difíciles como los demás dicen”
(Entrevista, Noviembre 12 de 2004)

Además de las tres categorías antes discutidas, quiero dedicar este capítulo a Diana, ya que de las cinco participantes fue la que tuvo más dificultad durante todo el proceso vivido, puesto que había varios determinantes que la estaban influenciando y los cuales voy a destacar a continuación:

1. Determinante pedagógico: la dificultad que siempre había tenido con las matemáticas durante todos sus años de escolaridad:

“las matemáticas no han sido mi mejor compañía durante mi vida escolar...”

(Entrevista, octubre 15 de 2004)

Esto fue lo que ella me comentó en el preciso momento en que le hice la invitación para que hiciera parte de esta experiencia. Sin embargo, le hablé acerca de los beneficios que tienen los mapas conceptuales como herramientas de aprendizaje en el estudio de diferentes disciplinas y que no eran desconocidos para ella, puesto que los utilizaba en el estudio de otras asignaturas y esto era un valor agregado para la estudiante, ya que se le facilitaban la realización de los mapas. Así que le resalté esta fortaleza que ella tenía y nos serviría de gran ayuda para la experiencia que se iba a desarrollar en clase.

Aunque las matemáticas no eran su mejor “aliada”, dado que en los años anteriores siempre debía recuperar en todos los períodos académicos

incluyendo los dos primeros períodos de 2.004, año en que se llevó a cabo la presente experiencia, y a pesar de que le había perdido el gusto por estudiar esta asignatura Diana aceptó participar en esta experiencia que para ella se convirtió en todo un “desafío” como ella misma lo denominó.

2. Determinante social: los amigos de otras instituciones educativas le habían infundido cierto “terror” por el estudio de las identidades trigonométricas diciéndole que la trigonometría es lo más complicado del mundo.

“tengo algunos amigos del conjunto que me han dicho que las identidades no las entiende nadie, salvo el profesor de trigo, bueno y uno que otro estudiante piloso o come libro de la clase”

(Entrevista, octubre 6 de 2004)

Este comentario bastante negativo acerca de las matemáticas marcaba de una manera significativa a Diana, ya que ella reconocía que tenía algunas dificultades en esta asignatura y se encontraba en un grado que implicaba mucho estudio, concentración y dedicación, ingredientes que requerían de tiempo y constancia. Adicionalmente había otras actividades extra curriculares programadas por la institución, como el servicio social y las lúdicas en las horas de la tarde, que le ocupaban parte del tiempo de estudio en casa. Y como supuestamente “las identidades no las entiende nadie” esta asignatura se le estaba convirtiendo en “la piedra en el zapato” ya que no contaba con el tiempo suficiente para su estudio y que según Diana, debía dedicarle más tiempo que el de cualquier estudiante con mayores habilidades en matemáticas. Así que se encontraba bastante apática hacia la trigonometría ya que si “no las entendía nadie”,

pues ella no iba a ser la excepción y estaría ubicada dentro de ese grupo de estudiantes denominados “nadie”.

El trabajo de mi parte para tratar de convencerla de que sería una actividad diferente que le traería beneficios en un futuro no muy lejano, fue bastante arduo, pues ella insistía en que no sería capaz de lograr el objetivo y le refutaba diciéndole que si no se atrevía por los menos dar el primer paso cómo iba ella a saber si lograría algo que no había empezado a hacer.

3. Determinante afectivo: Diana se sentía de alguna manera desplazada en las clases de matemáticas por los diferentes docentes que le habían dado esta asignatura pues, según ella, esos profesores le prestaban más atención a las estudiantes más pilosas de la clase dejando a un lado las menos favorecidas.

“los profesores que he tenido no han realizado una buena labor conmigo, ya que ellos, en la mayoría de los casos, se han preocupado por cumplir un currículo y se han ocupado de los estudiantes a los que se les facilita esta materia, dejando a un lado a aquellos a los que nos cuesta más trabajo entenderla”

(Entrevista, octubre 15 de 2004)

En un principio no supe que decirle ante esta aseveración que bajo mi criterio era bastante fuerte. Lo que Diana quería expresar es que existen algunos docentes que en su afán por cumplir con un currículo establecido para cada año escolar se olvidan de aquellos estudiantes que tienen problemas de aprendizaje y concentran su atención en aquellos estudiantes con más habilidades para las matemáticas dejando a un lado a aquellos alumnos menos favorecidos.

Al principio Diana se sintió halagada pues nunca había sido escogida para alguna actividad de este tipo y menos en matemáticas, se le facilitaban otras cosas como la poesía, las artes plásticas, literatura y nunca se imaginó que iba a participar en una experiencia de este tipo. Y esta fue la principal razón por la cuál Diana aceptó ser parte de este “desafío”, porque se sintió importante en la clase de matemáticas.

Estos fueron los determinantes que influenciaban a Diana y que pienso no la dejaban crecer en su formación como estudiante de matemáticas. Sin embargo, ella había aceptado la invitación y se debía aprovechar al máximo su participación en esta experiencia, especialmente para alejarle de sus pensamientos estos recuerdos que desfavorecen sus procesos académicos no sólo en matemáticas sino en cualquier área.

A continuación voy a contar como fue el proceso de Diana durante toda la experiencia y para esto comenzaré por la elaboración del primer mapa. Como ya lo comenté anteriormente (ver p. 20) Diana expresó cierta incertidumbre por el trabajo que había realizado, ya que en el momento de la socialización de los mapas elaborados por cada una de las estudiantes ella miraba con desconcierto su trabajo, pues pensaba que sería valorado como bien o mal hecho y además porque los trabajos que realizaron sus compañeras eran bastante diferentes al de ella.

Diana expresó que sentía algo de temor y no quería mostrar el trabajo que había realizado ya que pensaba que estaba mal hecho. En este momento realicé una intervención ante el grupo explicándoles que cada mapa elaborado por las estudiantes era muy diferente de los demás, puesto que cada uno entendía de una u otra forma y no debían estar iguales porque no todos los seres humanos pensamos igual, cada uno interpreta, piensa y

siente de forma totalmente diferente. Luego no podían existir dos mapas exactamente iguales.

Además les hablé del aprendizaje significativo propuesto por Ausubel quien plantea que lo fundamental del proceso de aprendizaje es que sea activo y personal, pues cada tarea de aprendizaje depende de los recursos cognitivos que utilice cada alumno, también les hablé de ciertos tópicos del aprendizaje significativo, pero éstos no son el objeto de estudio de este capítulo.

Una vez discutidos los mapas y realizada la experiencia de las palabras se procedió a la tarea de elaborar un mapa diferente utilizando como base lo hablado anteriormente en el taller de mapas. Y para la elaboración de este segundo mapa Diana recurrió a los dibujos que coloreaba en la primaria y que le traían muy buenos recuerdos.

“Después de revisar uno a uno los dibujos que coloreaba en primaria y que me gustaban mucho, no encontraba uno que me permitiera integrar todos los conocimientos adquiridos en clase. No fue tarea fácil, pues tuve que gastar bastante tiempo en la elaboración de este trabajo”

(Elaboración segundo mapa, Octubre 15 de 2.004)

Sin embargo, encontró uno que le facilitaba integrar los conceptos de una forma más concreta: *“el arco iris”*

“Pensé en el hermoso efecto producido por los rayos solares y las gotas de lluvia, conocido como el arco iris y por esto escogí este dibujo”

(Entrevista, Octubre 15 de 2.004)

Diana escogió el arco iris que es un efecto producido por la lluvia y los rayos del sol, la fusión entre estos dos elementos que finaliza en una hermosa

gama de colores primarios que gusta a chicos y a grandes, particularmente a ella y porque le permitía relacionar todos los temas que se habían trabajado en clase, pues según ella la unión de las identidades trigonométricas y las funciones trigonométricas producen las diferentes fórmulas que se estudiaron en la clase de trigonometría.

En este segundo mapa (figura 24) que Diana había elaborado se encontraba en el sol el tema principal que eran las identidades trigonométricas y en los rayos solares incluyó las seis funciones trigonométricas.

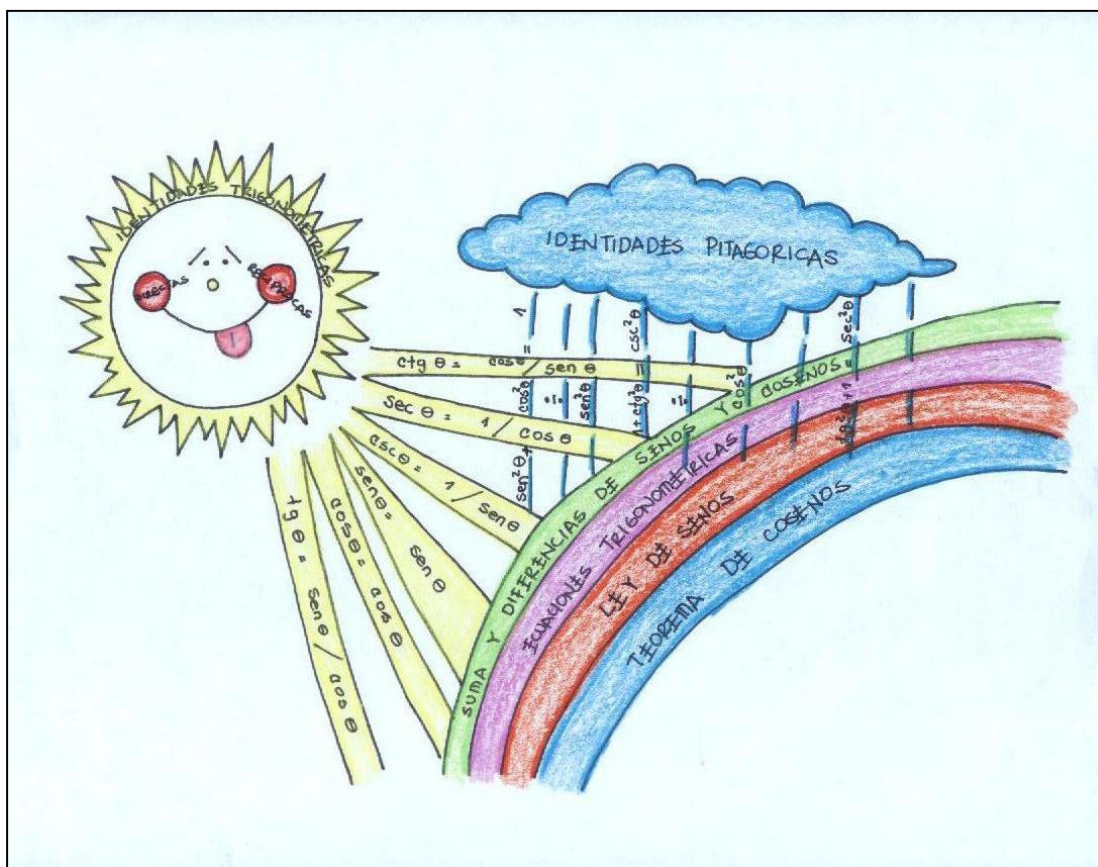


Figura 24. "El arco iris". Mapa conceptual elaborado por Diana

"En el sol encontramos las identidades trigonométricas porque es el tema central de estudio".

(Texto narrativo, Octubre 20 de 2004)

Además, escribió las seis funciones en cada uno de los rayos solares, porque son estas funciones de las que se desprenden las identidades trigonométricas.

En la nube de donde se desprende la lluvia ubicó las identidades pitagóricas y las gotas de lluvia que caen son las diferentes identidades.

“en la nube ubique las identidades pitagóricas porque están en menor categoría del sol por eso las ubiqué aquí”.

(Texto narrativo, Octubre 20 de 2004)

En esta parte Diana recalcó que las identidades pitagóricas son las más importantes en la trigonometría ya que gracias a ellas se pueden resolver más fácilmente las demostraciones de las diferentes identidades.

Y en el arco iris escribió los nombres de las diferentes temas relacionados con las identidades, es decir, escribió suma y diferencias de senos y cosenos, ecuaciones trigonométricas, ley de senos y teorema de cosenos.

“El arco iris es producido por la fusión entre el sol y el agua y por esto ubiqué aquí las operaciones entre los ángulos y demás temas relacionados con las identidades trigonométricas”.

(Texto narrativo, Octubre 20 de 2004)

Escribió estas palabras porque así como la fusión del agua con el sol produce el arco iris de igual forma la unión de las funciones con ciertas operaciones y las identidades producen las otras fórmulas.

A diferencia de sus compañeras, quienes hicieron dos mapas diferentes para todos los temas vistos, Diana incluyó casi todos los temas que se había trabajado en clase y para ella el mapa conceptual estaba completo y

terminado, pero desde mi punto de vista le faltaban ciertos elementos para que quedara completo y de fácil acceso para cualquier lector, por esto aprovechamos la negociación de significados para aclarar las dudas que se tenían y para completar esos vacíos que había en el mapa.

Inicialmente estaba el sol y sus rayos solares y dentro de ellos Diana escribió

las seis funciones trigonométricas: $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$,

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\sin \theta = \sin \theta$, $\cos \theta = \cos \theta$. En este momento yo le pregunté

¿qué entendía ella por la expresión $\sin \theta = \sin \theta$? Y ella se quedó pensativa un rato y no sabía que explicación darme, después de varios minutos me dijo que había escrito esa expresión en el mapa porque no había una relación en términos de otras funciones para la función seno o para la función coseno, como si lo había para las otras cuatro funciones. Entonces le dije que sí existía una relación de esta forma para el seno y para el coseno:

$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$, estas expresiones eran válidas, pero creo que no

era lo que ella quería expresar. Se sintió un poco decepcionada por esto, sin embargo, yo le dije que no había ningún problema, precisamente la negociación se trataba de esto de hablar de los temas que ella había incluido en el mapa.

Después de esto le pregunté ¿qué entendía ella por la función seno?, de acuerdo con lo que se había visto en clase, y ella me respondió

“El seno es la relación que existe entre el cateto opuesto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es decir,

$$\sin \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} ”.$$

(Entrevista, 5 de noviembre de 2004)

Luego pregunté ¿y el coseno? Y ella dijo:

“es la relación que existe entre el cateto adyacente y la hipotenusa $\cos \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ ”

(Entrevista, 5 de noviembre de 2004)

¿Y la tangente?

“la tangente está definida como la relación que existe entre el cateto opuesto sobre el adyacente, $\tan \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$ y también se podía escribir en términos de las funciones seno y coseno, es decir, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ”

(Entrevista, 5 de noviembre de 2004)

Estas relaciones ella las escribió en el tablero del salón y yo las transcribía en mi diario de campo, entonces le recomendé que las tuviera en cuenta para las respectivas modificaciones que se le debían hacer al mapa. Pienso que hasta ese momento Diana llevaba un buen proceso de aprendizaje de las identidades, faltaba ver como le iba con las demás y simplemente me dediqué a escucharle el discurso matemático que ella me quería contar.

Continuó de esta forma hablando de las otras funciones trigonométricas así:

“la secante es la relación entre la hipotenusa y el cateto adyacente $\sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$, y también se puede escribir en términos de coseno como $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$. La cosecante es la relación entre la hipotenusa y el cateto opuesto

$\csc \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$, y también se puede escribir en términos de la

función seno así: $\csc \theta = \frac{1}{\text{sen} \theta}$. Y la cotangente es la relación que

existe entre el cateto adyacente y el cateto opuesto,

$\cot \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$, pero también se puede escribir como la

relación que existe entre el coseno y el seno, $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta}$ y

finalmente se puede escribir en términos de tangente como

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

(Entrevista, 5 de noviembre de 2004)

Hasta esta parte el proceso de aprendizaje estaba completo en cuanto a las relaciones que existen entre las funciones trigonométricas y para mí esto se convertía en una ganancia, ya que se veía que tenía claros los conceptos básicos de trigonometría.

Después de esto pasamos a hablar de los elementos que había en el arco iris (figura 25).

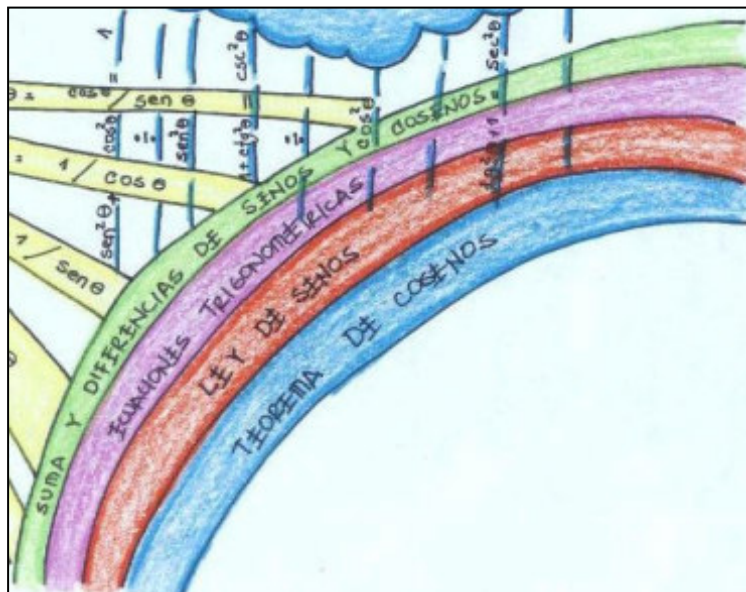


Figura 25. Aparte del mapa conceptual elaborado por Diana

Me parecía más pertinente tratar estos temas que los que se encontraban en la nube dado que ya se había discutido el tema de las identidades pitagóricas (ver p. 76), así que le pregunte ¿cuál era el significado o qué representaba para ella la expresión sumas y diferencias de senos y cosenos? Y respondió:

“las sumas y diferencias de senos y cosenos son fórmulas que se utilizan cuando se encuentran expresiones tales como $\text{sen}(\alpha + \beta)$ o $\cos(\alpha - \beta)$ y que sirven para hallar los valores de algunos ángulos conocidos otros, por ejemplo, para el caso de 75° , se puede hallar $\text{sen}75^\circ$, transformando 75 como $75 = 45 + 30$ y de esta forma $\text{sen}75^\circ = \text{sen}(45 + 30)$ y luego se desarrolla la fórmula para la suma de ángulos”

(Entrevista, 5 de noviembre de 2004)

Esta respuesta en parte fue producto de un proceso llevado en clase, ya que se había trabajado durante los dos primeros períodos académicos las funciones trigonométricas para los ángulos notables y ahora los estudiantes estaban viendo la importancia de saber estos valores puesto que nos facilitarían muchos cálculos. Así que le pregunté ¿cuál es esta fórmula? Entonces ella revisó sus apuntes de clase y dijo:

“ $\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta$, es decir, para cuando es suma de ángulos la fórmula es con suma y para la diferencia de ángulos la fórmula es con resta”

(Entrevista, 5 de noviembre de 2004)

Entonces le dije que me parecía bueno que incluyera estas fórmulas en el mapa, pues creo que hacían falta y además se le facilitaría el trabajo pues las tendría más a la mano. También le pregunté por la del coseno, y ella me respondió:

“la fórmula es la siguiente (revisando sus apuntes de clase) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$, la diferencia en esta fórmula

es el signo, es decir, cuando es suma de ángulos se utiliza la resta al otro lado de la igualdad y viceversa cuando es diferencia de ángulos se utiliza suma al otro lado de la igualdad.

(Entrevista, 5 de noviembre de 2004)

Curiosamente esta es una de las falencias que tienen los estudiantes al utilizar estas fórmulas y que Diana había diferenciado bastante bien, puesto que muchos alumnos escribían los signos sin tener en cuenta si era una suma o una diferencia o si era la función seno o coseno.

Finalicé preguntándole que si no había más fórmulas para sumas y diferencias de ángulos aparte de los senos y cosenos, pues ella había escrito simplemente estas dos funciones y respondió:

“si existe otra fórmula que es la de la tangente. La tangente se desprende de las dos fórmulas anteriores, es decir,

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$ y al resolver las fórmulas para seno y

coseno resulta lo siguiente $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$, pero no

escribí tangente, pues pensé que lo deducirían de esas dos.

(Entrevista, 5 de noviembre de 2004)

Le aclaré que no cualquier persona iba a deducirlas tan fácilmente y, por el contrario, le iban a decir que le hacía falta algo al mapa. Además me pareció bueno que Diana hablara de deducción en este momento, pues casi todos sus compañeros de clase preguntaban ¿cuál es la fórmula para la tangente, y la cotangente y las demás funciones? Y muy pocos se detenían a pensar que las podían deducir de las otras dos, es decir, así como $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$,

también se cumple para $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$ y creo que esto es una

ganancia para Diana, pues no necesariamente debe esperar que el docente le de todas las fórmulas, sino que ella puede deducirlas a partir de las que se han trabajado en clase. Así que le pregunté que si para las otras tres funciones cotangente, cosecante y secante existía alguna fórmula para sumas y diferencias en los ángulos y ella respondió:

“éestas se deducen de las anteriores, es decir, se puede utilizar las expresiones $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)}$, $\sec(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{\cos(\alpha \pm \beta)}$ y $\csc(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{\sin(\alpha \pm \beta)}$ para hallar estos valores”

(Entrevista, 5 de noviembre de 2004)

Me pareció que la respuesta era bastante acertada, además me gustaba que Diana estuviera hablando en un lenguaje más “matemático” por decirlo de alguna forma.

Después de esto charlamos de las ecuaciones trigonométricas, pues estaban en la segunda posición del arco iris.

“las ecuaciones trigonométricas son ecuaciones que contienen funciones trigonométricas, por ejemplo $\cos \theta = \frac{1}{2}$, se deben hallar los valores del ángulo θ , para los cuáles el coseno es igual a un medio”

(Entrevista, 5 de noviembre de 2004)

Este tema se había trabajado bastante en clase, pues se resolvieron muchas ecuaciones trigonométricas y no consideré necesario continuar hablando de lo mismo, además porque Diana había incluido dos frases que me parecía bueno discutir. Ellas eran ley de senos y el teorema de cosenos y le pregunté ¿qué significado tienen estas dos leyes?

“estas dos leyes me sirven para resolver aquellos triángulos que no son rectángulos, es decir, aquellos triángulos que no tienen un ángulo recto y me facilitan hallar los valores del triángulo (lados y ángulos)”

(Entrevista, 5 de noviembre de 2004)

Le pregunté ¿por qué te facilita hallar los lados y ángulos de un triángulo?

“porque la ley del seno plantea que el valor de los lados del triángulo es proporcional al seno del ángulo opuesto, es decir, $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$, donde a , b y c son las longitudes de los lados del triángulo y A , B y C son los ángulos del triángulo y la ley del coseno plantea algo parecido que en este momento no recuerdo”

(Entrevista, 5 de noviembre de 2004)

Diana sabía perfectamente cuando se debía utilizar la ley del seno, pero no la del coseno, sin embargo, le recomendé que también incluyera las fórmulas dentro del mapa, en primer lugar para más comprensión y en segundo lugar para que ella las pudiera aprender más rápido.

Después de esto le pedí que me trajera el mapa cuando lo hubiese completado, y de esta manera el resultado de esta negociación fue la siguiente (figura 26):

LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

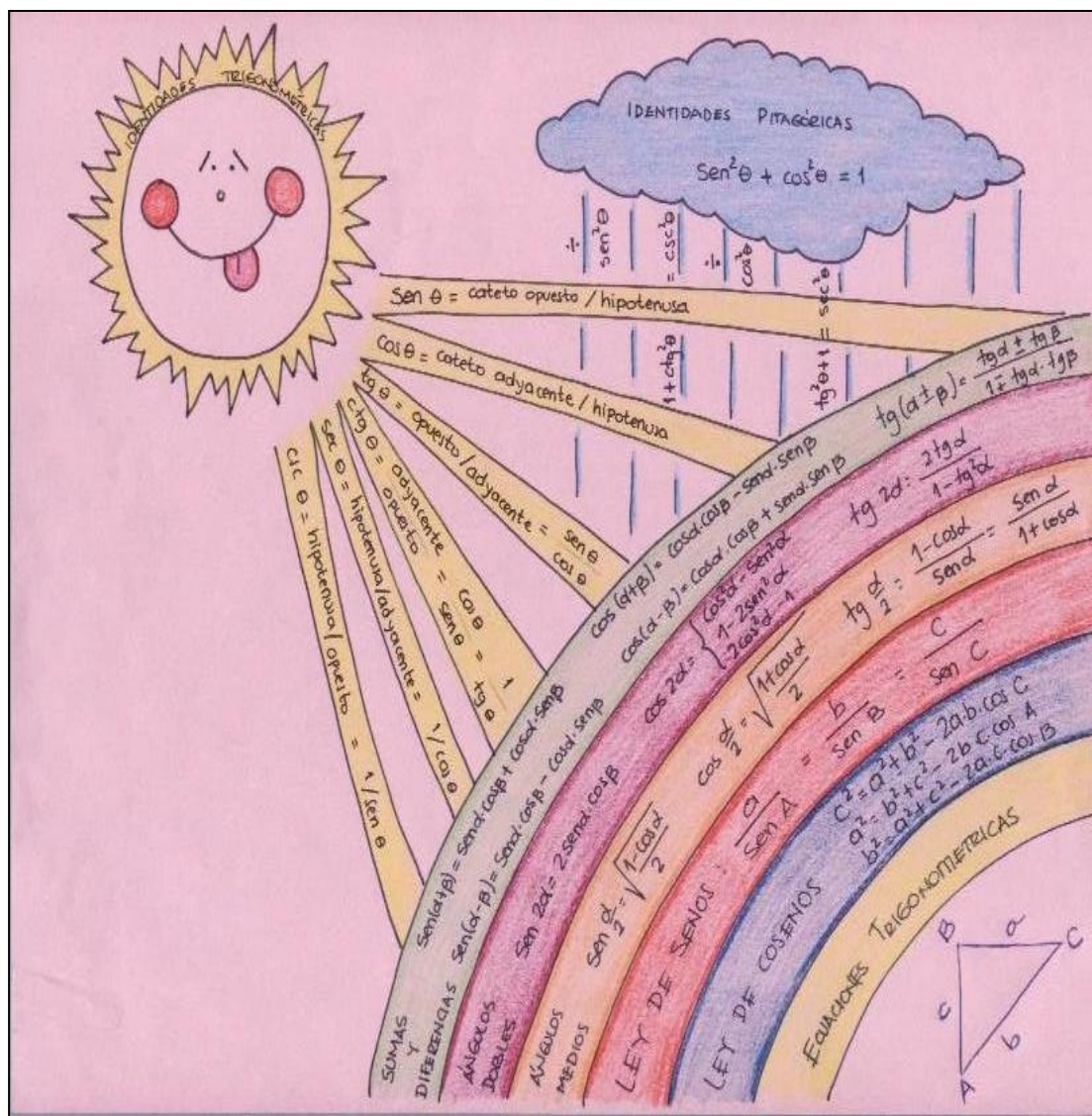


Figura 26 "El arco iris 2". Mapa conceptual elaborado por Diana

Como ya lo comenté en la página 50, a Diana no le pareció pertinente hacer un cambio del dibujo, pues pensó que era mejor darle un cambio de fondo y no de forma y además el dibujo que ella había escogido le permitía incluir todos los temas en un solo mapa y esto era precisamente lo que ella quería expresar, también lo hizo por comodidad y para que quedara más completo:

“me parece más completo realizar un mapa con todo lo que se ha trabajado en el tema de identidades trigonométricas y no pensar en algo que esté dividido o fragmentado, pues se seguía una continuidad en cada uno de los temas y no son completamente aislados”

(Entrevista, 12 de noviembre de 2004)

Aquí Diana hablaba de una secuencia en los diferentes temas estudiados en clase y que para ella era importante mantenerla para no “perder el hilo”. Pero este nuevo mapa tenía algunos elementos que no tenía el mapa anterior, estos elementos eran los ángulos dobles y los ángulos medios (figura 27).

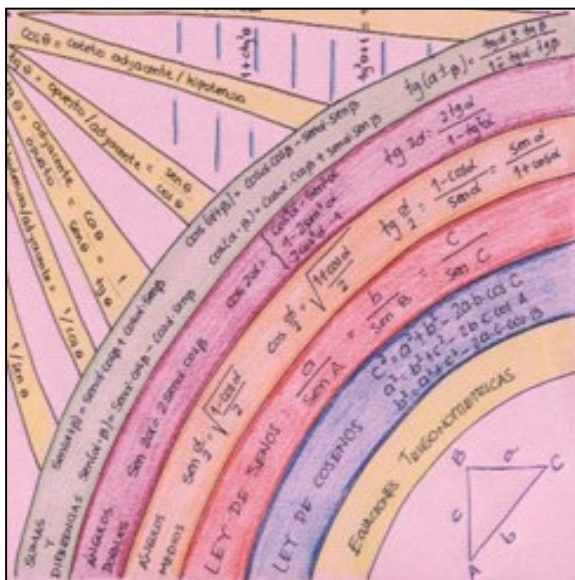


Figura 27. Aparte del mapa conceptual elaborado por Diana

Entonces le pregunté acerca de los ángulos dobles y ella dijo:

“se deducen de las fórmulas de sumas de los ángulos, es decir, cuando los ángulos α, β y son iguales se obtiene: $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha$ y esto es igual a: $\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$. Para el coseno tenemos tres fórmulas pero se deducen de la primera, es decir,

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, **si se reemplaza las funciones $\sin^2 \alpha$ o $\cos^2 \alpha$ salen las otras dos fórmulas**

(Entrevista, 12 de noviembre de 2004)

En este momento Diana expresó que no las había incluido en el mapa anterior ya que estas fórmulas se deducían de las anteriores, es decir, de la suma de ángulos para el seno y para el coseno, y que por esto no le había parecido pertinente incluirlas. Sin embargo, después de la negociación anterior, aunque yo no se lo había mencionado, ella quedó con la inquietud de incluirlas en el mapa y cuando lo estaba completando en su casa decidió que si era necesario incluirlas para no confundirse más adelante en la utilización de las mismas. Así continuó hablando del mapa haciendo referencia ahora a los ángulos medios

“las fórmulas de los ángulos medios se deducen de las del ángulo doble, pues si hacemos en la fórmula $\alpha = 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ y se despejan las expresiones para el seno y el coseno se obtienen las fórmulas ahí escritas”

(Entrevista, 12 de noviembre de 2004)

Para finalizar la entrevista con Diana le hice dos preguntas: ¿cómo te sentiste al realizar este último mapa?

“la verdad se me facilitó mucho más hacerlo, pues ya tenía el anterior más o menos hecho y con las indicaciones que me dijiste fue más práctico completarlo, ya que me diste luces para seguir adelante”

(Entrevista, 12 de noviembre de 2004)

¿Cómo te pareció la experiencia y que aprendiste de todo el proceso vivido?

“La experiencia me gustó mucho, porque me permitió ver que las matemáticas no son del todo difíciles, es cuestión de dedicarle un poco de estudio y de encontrarle el gusto a ellas. Y aprendí que las metas que uno se trace debe luchar por ellas y trabajar fuertemente, además las identidades no son tan difíciles como los demás dicen”

(Entrevista, 12 de noviembre de 2004)

Aquí finaliza la historia de Diana, quien además de aprender las identidades trigonométricas se dio cuenta de que las matemáticas no son difíciles pues había visto la trigonometría desde otra óptica. Los mapas conceptuales fueron de gran ayuda para superar las dificultades que tenía y le permitieron establecer relaciones que en clase no había podido entender tan fácilmente, ya que el proceso de elaboración de cada uno de ellos le permitió ir estableciendo ella misma las relaciones que habían entre las funciones y las identidades sin necesidad de aprendérselas de memoria como sucede con algunos estudiantes de décimo grado y además porque el objetivo de este trabajo era precisamente que cada una de las estudiantes construyera su propio conocimiento utilizando como herramienta del proceso de aprendizaje los mapas conceptuales.

CONCLUYENDO ESTA HISTORIA

- ✓ En el proceso de construcción de los mapas conceptuales los estudiantes tuvieron la oportunidad de construir su propio conocimiento, descubriendo así las fortalezas, dificultades o ausencias en el tema de las identidades trigonométricas que no habían podido resolver en clase, pero que sí lograron entender y superar en la elaboración de cada uno de los mapas, ya que tuvieron que leer una y otra vez sus apuntes y pensar cómo los organizarían de tal manera que les facilitara el aprendizaje de los mismos.
- ✓ En la negociación de significados, las estudiantes pudieron aclarar las dudas que tenían acerca del tema y llenar esas ausencias o resolver esas inquietudes que quedan después de una clase y que en la mayoría de los casos durante el acto pedagógico por diferentes circunstancias (tiempo, currículo, actividades extracurriculares) no pueden ser atendidas por el docente y que además en casa el estudiante difícilmente los puede resolver, dado que en la mayoría de los casos se encuentra solo y no cuenta con una asesoría personalizada.
- ✓ En las disquisiciones trigonométricas se pudo apreciar el proceso de aprendizaje de las identidades trigonométricas, ya que se pretendía lograr un acercamiento hacia estos temas, es decir, que las estudiantes establecieran relaciones entre las diferentes identidades y dedujeran algunas fórmulas olvidándose de los aprendizajes

memorísticos que en la mayoría de los casos se da en los estudiantes de décimo grado cuando estudian este tema.

- ✓ El aprendizaje no es un momento, ni un retrato, ni una fotografía, es un proceso y al explorar la técnica de los mapas conceptuales como una posibilidad, entre muchas, para facilitar el proceso de aprendizaje de las identidades trigonométricas, éstos se constituyeron en una buena herramienta/estrategia para llevar a cabo este proceso, ya que se buscaba que los estudiantes descubrieran por sí mismo las relaciones que existen entre las funciones e identidades trigonométricas, temas considerados por los estudiantes de difícil aprendizaje, convirtiéndose así en facilitadores de los conceptos haciéndolos menos memorísticos.
- ✓ Durante el desarrollo de las clases, se propició un ambiente adecuado que generó en los estudiantes confianza, expresión oral y escrita, debate, participación, discusión y conciliación de ideas y conceptos.
- ✓ Como fue dicho durante este trabajo, los mapas conceptuales contribuyen al desarrollo de los procesos metacognitivos, entre otras alternativas. Sin embargo, la construcción de mapas sobre un determinado asunto no siempre se facilita para algunos individuos, esto porque la elaboración de ellos requiere tiempo. Tiempo para plasmar los conceptos o ideas claves de forma organizada, tiempo para establecer las conexiones, tiempo para negociar significados, etc. Por lo tanto, es importante que el docente tenga claro que esta estrategia no debe, ni puede ser la única en el desarrollo de los procesos metacognitivos.

*LOS MAPAS CONCEPTUALES:
UNA HERRAMIENTA/ ESTRATEGIA
EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS*

- ✓ En esta experiencia de aula los mapas conceptuales fueron apenas abordados como parte del proceso de aprendizaje de los estudiantes que, de alguna forma, ya conocían el tema. Esto puede ser visto como una limitación si considero que los mapas también pueden servir dentro del salón de clase para explicar temas, como herramienta de evaluación y como herramienta de estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 📖 ANILLO, F. (1991) “Experiencia de trabajo con mapas conceptuales en Matemáticas”. In: ONTORIA, A. (1999) *Mapas conceptuales una técnica para aprender*. Madrid: Narcea, S. A. de ediciones.
- 📖 ARDILA, V. (1998) NOVA 10 Matemáticas. Santa fe de Bogotá: Editorial Voluntad.
- 📖 AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. (1986) Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas.
- 📖 GARCÍA, L. (1996) Las relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos. Monografía de Especialización. Bucaramanga: UIS.
- 📖 GÓMEZ, P; CARULLA, C. (2001) Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas. Cuadernos de matemática educativa NO. 4. Bogotá: Grupo Editorial Gala.
- 📖 JARAMILLO, D. (2003) (Re)constituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica. Tesis de Doctorado. Campinas: Editora Unicamp.
- 📖 MORAL, C. (1992) “Los mapas cognitivos como representaciones de la acción”. In: VILLAR, L. y RODRIGUEZ, P. *Enseñanza reflexiva para*

centros educativos. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

📖 NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. (1988) Aprendiendo a aprender. Barcelona: Ediciones Martínez Roca.

📖 ONTORIA, A. (1999) Mapas Conceptuales, una técnica para aprender. Madrid: Narcea, S. A. de ediciones

📖 ORTÍZ, R. (2000) Diseño metodológico para llegar a la conceptualización de identidades pitagóricas a partir de la aplicación de actividades pedagógicas que requieren de uso de material didáctico. Monografía de Especialización. Bucaramanga: UIS.

📖 OSORIO, R. (2002) Reseña histórica de la geometría. Aportes y Reflexiones. Bucaramanga: UIS.

📖 RODRÍGUEZ, C. (2004) Figuras geométricas: Relación entre sus medidas y su dimensión. Monografía de Especialización. Bucaramanga: UIS.