

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA OPTIMIZACIÓN DIFUSA

NATALIA STEFANIA GARZÓN LAGUADO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2021

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA OPTIMIZACIÓN DIFUSA

NATALIA STEFANIA GARZÓN LAGUADO

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemática

Director

Élder Jesús Villamizar Roa

Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2021

DEDICATORIA

Este trabajo lo dedico principalmente a mis padres, por su apoyo, compromiso y amor. También quiero dedicarlo a mi novio por apoyarme y motivarme.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por hacer esto posible. A mis padres Rodolfo y Cristina por todo el esfuerzo y apoyo que me han brindado. A todos los profesores que hicieron parte de mi formación profesional. A mi novio Ricardo por acompañarme en este camino. A mis amigas Marcela, Melissa y Yulieth por brindarme su amistad. Por último y no menos importante, agradezco enormemente al profesor Élder por su paciencia y compromiso.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	10
1. CONJUNTOS DIFUSOS	13
1.1. CONJUNTOS DIFUSOS	13
1.2. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS DIFUSOS	15
1.3. NIVELES DE UN CONJUNTO DIFUSO	18
1.4. CLASES ESPECIALES DE CONJUNTOS DIFUSOS	19
1.5. TEOREMAS DE REPRESENTACIÓN	23
1.6. EL PRINCIPIO DE EXTENSIÓN	25
2. DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES DIFUSAS	29
2.1. DIFERENCIA DE HUKUHARA EN K_c^n	29
2.2. DIFERENCIA DE HUKUHARA DE NÚMEROS DIFUSOS	32
2.3. DERIVADA DE HUKUHARA DE FUNCIONES DIFUSAS	36
2.4. DERIVADA GENERALIZADA DE HUKUHARA DE FUNCIONES DIFUSAS	39
2.5. GRADIENTE DE FUNCIONES DIFUSAS DIFERENCIABLES	41
3. OPTIMIZACIÓN DIFUSA	44
3.1. GENERALIDADES	44
3.2. PUNTO ESTACIONARIO	47
3.3. CONDICIONES NECESARIAS DE OPTIMALIDAD	54
3.4. CONDICIONES SUFICIENTES DE OPTIMALIDAD	61
4. APLICACIONES	64
4.1. PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA	65

4.2. PROGRAMACIÓN LINEAL CON RESTRICCIONES DIFUSAS	67
4.3. OTRAS APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA	69
4.4. PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN DIFUSA NO LINEAL	70
5. CONCLUSIONES	77
BIBLIOGRAFÍA	78

LISTA DE FIGURAS

		pág.
Figura 1.	Representación de $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$	15
Figura 2.	Representación de $(A \vee B)(x)$.	16
Figura 3.	Representación de $(A \wedge B)(x)$.	16
Figura 4.	Representación de $A(x)$ y $A^c(x)$.	17
Figura 5.	Representación de $B(x)$ y $B^c(x)$.	17
Figura 6.	Conjunto difuso que representa los "números cerca al 1".	19
Figura 7.	Representación de conjuntos difusos convexos y no convexos	20
Figura 8.	Representación de conjunto difuso trapezoidal.	21
Figura 9.	Representación de conjunto difuso triangular.	22
Figura 10.	Representación de conjuntos difusos u y v .	27
Figura 11.	Gráfica de los conjuntos difusos u y v .	34
Figura 12.	Región factible	71
Figura 13.	Conjunto solución de (4.10)	76

RESUMEN

TÍTULO: UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA OPTIMIZACIÓN DIFUSA *

AUTOR: NATALIA STEFANIA GARZÓN LAGUADO **

PALABRAS CLAVE: CONJUNTOS DIFUSOS, NÚMEROS DIFUSOS, DIFERENCIABILIDAD DIFUSA, OPTIMIZACIÓN DIFUSA, CONDICIONES DE OPTIMALIDAD.

DESCRIPCIÓN:

Con el origen de la teoría de conjuntos difusos, introducida en 1965 por parte de Lofti A. Zadeh, y con ello el concepto de funciones difusas, múltiples autores han centrado su atención en el estudio de problemas de optimización de funciones difusas sujetas o no a restricciones difusas, lo cual puede verse reflejado en un considerable número de publicaciones que actualmente encontramos en la literatura. El interés en la optimización difusa radica en el hecho de que en la práctica es común encontrar problemas de optimización que requieren incorporar información ambigua, imprecisa, o difusa a través de las funciones objetivo y sus restricciones.

En el presente trabajo estudiamos desde un punto de vista teórico el problema de programación matemática difusa con restricciones de naturaleza difusa. En primer lugar, mencionamos los conceptos básicos de la teoría de conjuntos difusos para extender de manera natural los conceptos de optimización en el contexto difuso. Esto naturalmente implica un análisis previo de la diferenciabilidad de funciones difusas, como preámbulo para el análisis de condiciones de optimalidad. En particular, se describe un concepto de punto estacionario, basado en la gH diferenciabilidad. El objetivo final del trabajo es analizar condiciones necesarias y suficientes de optimalidad para problemas de optimización difusa, como una extensión de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para problemas de optimización no lineal con restricciones de desigualdad en el sentido clásico.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas. Director: Élder Jesús Villamizar Roa, Doctorado en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: AN INTRODUCTION TO THE FUZZY OPTIMIZATION THEORY. *

AUTHOR: NATALIA STEFANIA GARZÓN LAGUADO **

KEYWORDS: FUZZY SETS, FUZZY DIFFERENTIABILITY, FUZZY OPTIMIZATION, OPTIMALITY CONDITIONS.

DESCRIPTION:

With the origin of the theory of fuzzy sets, introduced in 1965 by Lofti A. Zadeh, and the concept of fuzzy functions, multiple authors have focused their attention on the study of optimization problems of fuzzy functions subject or not to fuzzy constraints, which can be seen reflected in a considerable number of publications that we currently find in the literature. The interest of what could be called fuzzy optimization lies in the fact that in practice, it is common to find objective functions and constraints that inherently represent ambiguous, imprecise, or fuzzy information.

In the present work we study, from a theoretical point of view, the problem of fuzzy mathematical programming subject to constraints of a fuzzy nature. First, we introduce the basic concepts on the fuzzy set theory in order to extend the optimization concepts in the fuzzy context. This implies a previous analysis of the differentiability of fuzzy functions, as a preamble to the analysis of optimizality conditions. In particular, a stationary point concept is described, based on the gH differentiability concept. The main objective of the work is to analyze necessary and sufficient optimizality conditions for fuzzy optimization problems, as an extension of the Karush-Kuhn-Tucker conditions for non-linear optimization problems with inequality constraints in the classical sense.

* Bachelor Thesis

** Faculty of Science, School of Math. Advisor: Élder Jesús Villamizar Roa, Ph.D. in Math.

INTRODUCCIÓN

La importancia de lo que se podría denominar optimización difusa, radica en el hecho de que en la práctica es común encontrar funciones objetivo y restricciones de igualdad o desigualdad que inherentemente representan información ambigua, imprecisa, o difusa. Usualmente al enfrentarse a problemas de la vida real, en particular aquellos en donde se desea maximizar o minimizar un objetivo, es común el uso de expresiones como “aproximadamente 100 unidades” o “no más de 70 unidades”, “nivel de satisfacción alto”, “mejorar ganancias”, “perder poco”, etc. Un ejemplo más concreto de esta situación podría ser el problema de maximizar una utilidad que relaciona el consumo de ciertos productos con el nivel de satisfacción de los consumidores, sujeto a una restricción presupuestal que a su vez depende de costos de productos que pueden tener precios de mercado fluctuantes.

Para abordar matemáticamente este tipo de problema es necesario encontrar métodos que permitan tratar la incertidumbre o vaguedad. Una manera de atacar este tipo de problemas es a través de la optimización difusa, rama del denominado análisis difuso que tuvo sus orígenes en la década de los 70s.

En forma general, un problema de optimización difusa se puede expresar como

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \tilde{f}(x), \\ &\text{sujeto a: } \tilde{g}_j(x) \leq \tilde{0}, \quad j = 1, \dots, m, \\ &x \in S \subseteq \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{0.1}$$

donde $\tilde{f}, \tilde{g}_j : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}_C^1$, S es un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{F}_C^1$ denota la clase de conjuntos difusos sobre $\mathbb{R}^n$, con α niveles compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$.

En (0.1), $\tilde{0}$ representa el conjunto difuso definido $\tilde{0}(t) = 1$ si $t = 0$ y $\tilde{0}(t) = 0$ en caso contrario. Por su parte, la notación $\preceq$ representa alguna noción de orden entre conjuntos difusos, a ser especificada posteriormente.

Al igual que en optimización clásica, resolver un problema de la forma (0.1) implica un análisis de existencia de condiciones necesarias y suficientes para que un punto admisible sea punto de mínimo (local o global). En ese sentido, en los últimos años, y con el avance que ha tenido el análisis difuso, principalmente en lo referente a la diferenciabilidad de las funciones difusas, el desarrollo de la teoría de optimización difusa ha venido avanzando satisfactoriamente, de manera tal que al día de hoy se conocen resultados de existencia y caracterizaciones de puntos óptimos, queriendo extender los correspondientes resultados que se conocen en la programación matemática clásica, a saber, la regla de multiplicadores de Lagrange, las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, la acción de la convexidad y generalizaciones en la caracterización de óptimos globales, entre otros. Sin embargo, en el desarrollo teórico de la optimización difusa, surgen serias dificultades provenientes principalmente de la falta de resultados concluyentes del análisis difuso, como es el caso de la diferenciabilidad difusa, y métodos de aproximación de soluciones óptimas. Así mismo, dado que esta teoría es relativamente joven y en pleno desarrollo, la bibliografía correspondiente se centra principalmente en artículos de investigación.

En este trabajo se presenta una disertación sobre los fundamentos de la optimización difusa, que permitan analizar matemáticamente el problema (0.1), de manera más específica. El documento está organizado de la siguiente manera: **En el primer capítulo** se introduce al lector el concepto de conjunto difuso y sus operaciones básicas de unión, intersección y complemento. Adicionalmente se revisa el concepto de α -nivel de un conjunto difuso, el cual es fundamental en el desarrollo de esta teo-

ría, dado que los α -niveles de un número difuso permiten hacer la transición de un problema de optimización difusa a uno más sencillo. Finalmente, se resaltan algunas definiciones relevantes en el estudio, como lo son las relaciones de orden entre los números difusos. **El segundo capítulo** se centra en la revisión de los conceptos de diferenciabilidad de funciones difusas, como la diferencia de Hukuhara, la derivada de Hukuhara, la derivada generalizada de Hukuhara, y el gradiente de una función difusa diferenciable. **En el tercer capítulo** se analiza el problema general de optimización (0.1), revisando el concepto de punto estacionario para posteriormente estudiar condiciones necesarias y suficientes de optimalidad. **En el cuarto capítulo**, se presentan algunos ejemplos de problemas de optimización difusa, derivados de (0.1) con el objetivo de ilustrar las posibles aplicaciones de esta teoría. El desarrollo de esta monografía está basado principalmente en la disertación de las referencias [*,[†],[‡]]

* G. ARENAS DÍAZ y E. J. VILLAMIZAR ROA. *Introducción a las ecuaciones diferenciales difusas*. Ediciones UIS, 2018.

[†] R. et al. OSUNA GÓMEZ. "Optimality conditions for fuzzy constrained programming problems". En: *Fuzzy Sets and Systems* 362 (2019).

[‡] R. et al. OSUNA GÓMEZ. "Necessary and sufficient conditions for fuzzy optimality problems". En: *Fuzzy Sets and Systems* 296 (2016).

1. CONJUNTOS DIFUSOS

La teoría de conjuntos difusos comenzó su desarrollo con el trabajo del profesor Lotfi A. Zadeh en 1965. La idea de Zadeh era la de representar matemáticamente la imprecisión, incertidumbre o vaguedad presente en la mayoría de los fenómenos del mundo real. En la actualidad, los conjuntos difusos son utilizados para moldear matemáticamente problemas asociados a dinámicas de poblaciones, sistemas de control, inteligencia artificial, entre otros.

El objetivo de este capítulo es presentar una revisión de los elementos básicos de la teoría de los conjuntos difusos que permita abordar con posterioridad los conceptos de optimización difusa, que será el centro de atención de este documento monográfico. En primer lugar, se definen los conjuntos difusos, se recuerdan las operaciones básicas, se da el concepto de nivel de un conjunto difuso, se presentan algunos conjuntos difusos especiales, los teoremas de representación y el principio de extensión de Zadeh. El contenido de este capítulo se basa principalmente en el texto [*]

1.1. CONJUNTOS DIFUSOS

En la teoría clásica de conjuntos, dado un conjunto universal X y un subconjunto $A \subseteq X$, podemos caracterizar la pertenencia de los elementos de A bajo la función característica $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ la cual es definida como $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Queriendo representar fenómenos de incertidumbre, imprecisión o vaguedad, Zadeh definió los conjuntos difusos extendiendo de manera natural el conjunto de llegada de χ_A a todo el intervalo compacto $[0,1]$, flexibilizando así la transición de pertenencia o no de elementos a un conjunto A dado.

Definición 1.1.1. Un conjunto difuso A en $\mathbb{R}^n$ es una función $\mu_A : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ donde $\mu_A(x)$ representa el grado de pertenencia del elemento x al conjunto difuso A . Si $\mu_A(x) = 1$, se dice que x pertenece totalmente al conjunto difuso A ; si $0 < \mu_A(x) < 1$, se dice que x pertenece parcialmente a A , y si $\mu_A(x) = 0$, se dice que x no pertenece a A .

Denotamos por $\mathcal{F}(X)$ la colección de todos los conjuntos difusos sobre X . Este trabajo se centrará en el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Recordemos que las funciones de pertenencia cuyo recorrido es el $\{0, 1\}$ corresponden a los subconjuntos clásicos de X ; es decir, los subconjuntos clásicos son casos especiales de subconjuntos difusos, en los cuales la función que define el grado de pertenencia es la función característica χ_A .

Ejemplo 1.1.1. Consideremos el conjunto difuso A de "personas altas". Para representar este conjunto, se pueden considerar diferentes funciones de pertenencia μ_A , cuya elección depende del contexto del problema. Podemos, por ejemplo, considerar la siguiente función

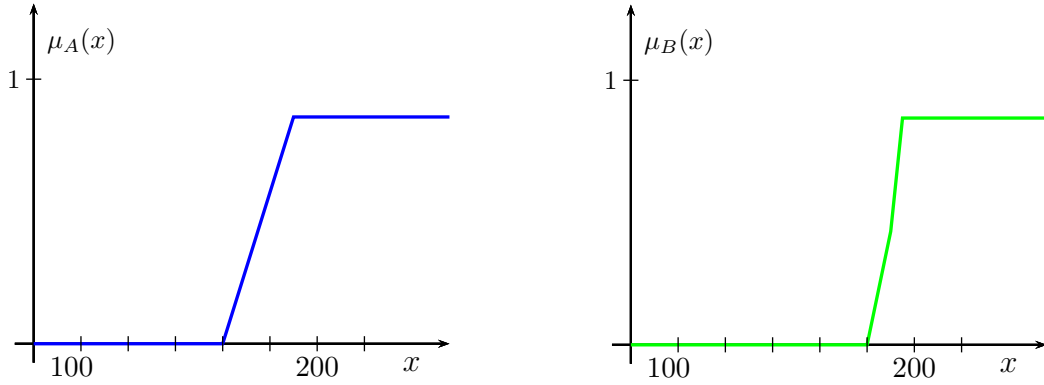
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 160; \\ \frac{x-160}{30}, & \text{si } 160 \leq x \leq 190; \\ 1, & \text{si } x > 190, \end{cases}$$

en donde la variable x representa la altura que puede variar dentro del intervalo abierto $(0, 210)$. En el caso anterior, una persona con 180 cm tiene un grado de pertenencia de 0,66 a dicho conjunto, es decir, es relativamente alta. Sin embargo, si por ejemplo deseamos representar el conjunto de personas altas para conformar un equipo de baloncesto, esa misma persona podría no pertenecer a ese nuevo conjunto. En ese caso particular, lo natural es pensar en una función de pertenencia como

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 180, \\ \frac{x-180}{20}, & \text{si } 180 \leq x \leq 190, \\ \frac{x-185}{10}, & \text{si } 190 \leq x \leq 195, \\ 1, & \text{si } x > 195. \end{cases}$$

Se observa que con esa nueva representación, el grado de pertenencia de una persona con 180 cm al conjunto, es 0, y hay pertenencia total si la persona supera los 195 cm.

Figura 1. Representación de $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$



1.2. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS DIFUSOS

A partir de la caracterización de las operaciones de unión, intersección y complemento de conjuntos clásicos en términos de la función característica, se pueden extender de manera natural estas tres operaciones al contexto difuso, sustituyendo la función característica $\chi_{A \cup B}$, $\chi_{A \cap B}$, χ_{A^c} por la función de pertenencia de la definición de conjunto difuso, es decir, si A y B son dos conjuntos difusos, se definen su unión, intersección y complemento por:

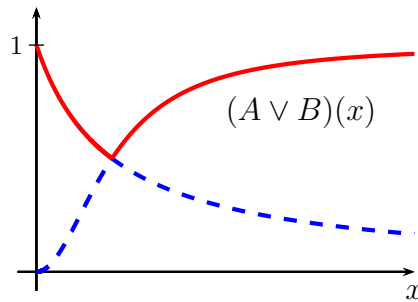
$$\begin{aligned} \mu_{A \cup B}(x) &= (\mu_A \vee \mu_B)(x) = \text{máx} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} = A(x) \vee B(x) = (A \vee B)(x); \\ \mu_{A \cap B}(x) &= (\mu_A \wedge \mu_B)(x) = \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} = A(x) \wedge B(x) = (A \wedge B)(x); \\ \mu_{A^c}(x) &= 1 - \mu_A(x). \end{aligned}$$

En las expresiones anteriores $A(x) \vee B(x)$ y $A(x) \wedge B(x)$ representan el máximo y el mínimo entre los valores $A(x)$ y $B(x)$, respectivamente.

Ejemplo 1.2.1. Consideremos los conjuntos difusos definidos por $A(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ y $B(x) = \frac{1}{x+1}$, con $x \in [0, \infty)$. Si $0 \leq x \leq 1$, se tiene que $\frac{x^2}{x^2+1} \leq \frac{1}{x+1}$; por otro lado, si $x \geq 1$, se tiene que $\frac{x^2}{x^2+1} \geq \frac{1}{x+1}$. Por lo tanto,

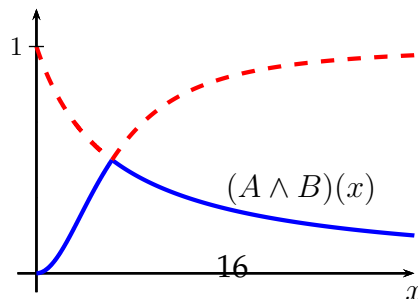
$$\begin{aligned} (A \vee B)(x) &= \max \{A(x), B(x)\} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{x^2}{x^2+1}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Figura 2. Representación de $(A \vee B)(x)$.



$$\begin{aligned} (A \wedge B)(x) &= \min \{A(x), B(x)\} \\ &= \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{x+1}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

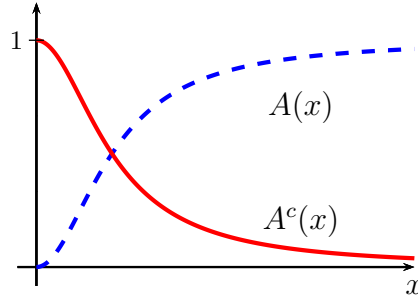
Figura 3. Representación de $(A \wedge B)(x)$.



Por otra parte,

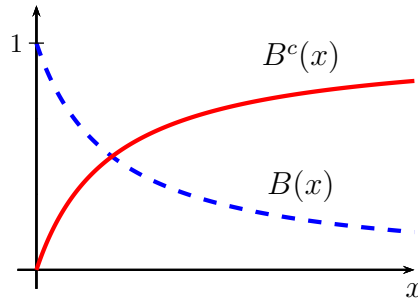
$$A^c(x) = 1 - A(x) = 1 - \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Figura 4. Representación de $A(x)$ y $A^c(x)$.



$$B^c(x) = 1 - B(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

Figura 5. Representación de $B(x)$ y $B^c(x)$.



Las operaciones de unión, intersección y complemento entre elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, verifican propiedades como la asociatividad, idempotencia, conmutatividad, entre otras, esto se resume en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.1. * Si $A, B, C \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, se satisfacen las siguientes propiedades:

- **Asociatividad:** $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ y $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.
- **Conmutatividad:** $A \vee B = B \vee A$ y $A \wedge B = B \wedge A$.

- **Distributividad:** $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ y $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
- **Identidad:** $A \vee \emptyset = A$ y $A \wedge X = A$.
- **Involución:** $(A^c)^c = A$.
- **Idempotencia:** $A \vee A = A$ y $A \wedge A = A$.
- **Absorción:** $A \vee (A \wedge B) = A$ y $A \wedge (A \vee B) = A$.
- **Absorción por $\emptyset$ y X :** $A \vee X = X$ y $A \wedge \emptyset = \emptyset$.
- **Leyes de De Morgan:** $(A \vee B)^c = A^c \wedge B^c$ y $(A \wedge B)^c = A^c \vee B^c$.

Los conjuntos difusos en general no satisfacen la ley de contradicción, ni la ley de la media inclusión pues $A \wedge A^c \neq \emptyset$ y $A \vee A^c \neq X$, siendo A un conjunto difuso. Adicionalmente, si A, B son conjuntos difusos, se dice que el conjunto A está contenido en B , y se denotará por $A \leq B$, si $A(x) \leq B(x)$, para todo $x \in X$. En particular, $A \wedge B \leq A \vee B$.

1.3. NIVELES DE UN CONJUNTO DIFUSO

Asociado a la definición de conjunto difuso, está el concepto de α -nivel. La importancia del α -nivel radica en el hecho que cada conjunto difuso puede representarse de manera única en términos de sus α -niveles, lo que lleva a su vez a establecer un puente entre la teoría de los conjuntos difusos y la teoría de los conjuntos clásicos.

Definición 1.3.1 (Niveles de un conjunto difuso). Sean $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ un conjunto difuso y $\alpha \in (0, 1]$. El α - nivel de u se define como el conjunto

$$[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \geq \alpha\}.$$

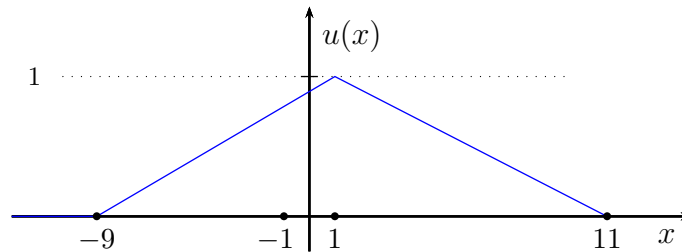
Definición 1.3.2 (Soporte de un conjunto difuso). Sean $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ un conjunto difuso. El soporte del conjunto u se define por

$$[u]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) > 0\}}.$$

Ejemplo 1.3.1. Consideremos el conjunto difuso de los números reales cercanos al número 1. Una de las funciones de pertenencia para este conjunto es dada por

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -9 \text{ ó } x > 11; \\ \frac{x+9}{10}, & \text{si } x \in [-9, 1]; \\ \frac{11-x}{10}, & \text{si } x \in [1, 11]; \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Figura 6. Conjunto difuso que representa los "números cerca al 1".



Observemos que el soporte es $[u]^0 = [-9, 11]$.

1.4. CLASES ESPECIALES DE CONJUNTOS DIFUSOS

Definición 1.4.1 (Conjunto difuso normal). Sea u un conjunto difuso definido sobre un conjunto $\mathbb{R}^n$. Se dice que u es un conjunto difuso normal si existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $u(x_0) = 1$.

Definición 1.4.2 (Conjunto difuso convexo). Un conjunto difuso u sobre $\mathbb{R}^n$ es convexo si, y solo si, para cada $\alpha \in (0, 1]$, el α -nivel $[u]^\alpha$ es un conjunto convexo.

Teorema 1.4.1. * Un conjunto difuso u sobre $\mathbb{R}^n$ es convexo si, y solo si,

$$u(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{u(x_1), u(x_2)\},$$

para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$.

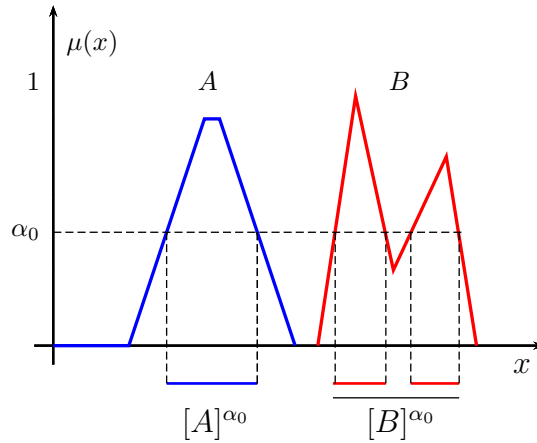
Ejemplo 1.4.1. Consideremos un conjunto difuso que represente los números cercanos al 0, definiendo la función de pertenencia del conjunto de la siguiente manera:

$$C(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [-1, 1], \\ x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Note que $C(x)$ es un conjunto normal, ya que $C(0) = 1$.

Ejemplo 1.4.2. Sean A, B conjuntos difusos, los cuales se representan gráficamente en la siguiente figura.

Figura 7. Representación de conjuntos difusos convexos y no convexos



Note que para el nivel α_0 , $[A]^{\alpha_0}$ es convexo y $[B]^{\alpha_0}$ no lo es, es decir, A es un conjunto difuso convexo y B no es un conjunto difuso convexo.

Definición 1.4.3 (Conjunto difuso semicontinuo superiormente). Un conjunto difuso u sobre $\mathbb{R}^n$ es llamado semicontinuo superiormente en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto $\mathcal{U}$ que contiene a x_0 tal que si $x \in \mathcal{U}$, entonces $u(x) < u(x_0) + \varepsilon$. Se dice que u es semicontinuo superiormente sobre $\mathbb{R}^n$ (o simplemente, semicontinuo superiormente), si u es semicontinuo superiormente para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

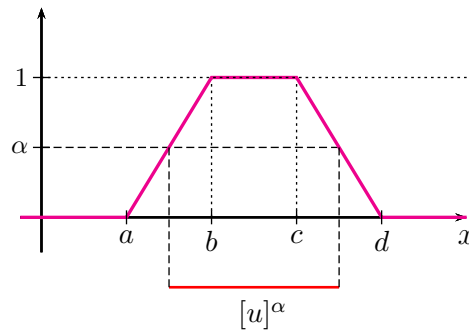
Observación 1.4.1. La definición de semicontinuidad superior es equivalente a decir que para todo $\alpha \in [0, 1]$, el conjunto $[u]^\alpha$ es cerrado.

Definición 1.4.4 (Conjunto difuso compacto). Un conjunto difuso u se denomina compacto si para todo $\alpha \in [0, 1]$, el conjunto $[u]^\alpha$ es compacto.

Definición 1.4.5 (Conjunto difuso trapezoidal). Sean $a < b < c < d \in \mathbb{R}$. Se define el conjunto trapezoidal difuso como

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [a, d]; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } x \in [a, b]; \\ 1, & \text{si } x \in (b, c); \\ \frac{x-d}{c-d}, & \text{si } x \in [c, d]. \end{cases}$$

Figura 8. Representación de conjunto difuso trapezoidal.



Se observa que sus α -niveles están dados por:

$$[u]^\alpha = [b\alpha + (1 - \alpha)a, c\alpha + (1 - \alpha)d], \text{ para } \alpha \in [0, 1].$$

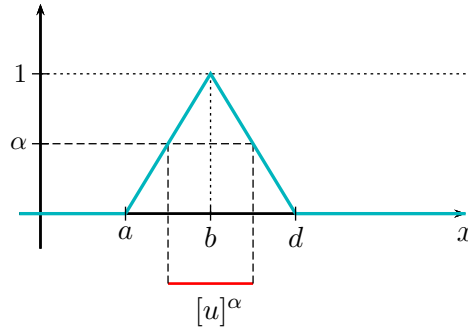
Cuando en el conjunto trapezoidal u se tiene que $b = c$, se dice que u es triangular y sus α -niveles están dados por

$$[u]^\alpha = [b\alpha + (1 - \alpha)a, b\alpha + (1 - \alpha)d] \quad (1.1)$$

$$= b\alpha + (1 - \alpha)[a, d], \text{ para } \alpha \in [0, 1]. \quad (1.2)$$

El conjunto difuso triangular también se puede representar por la siguiente tripla $u = (a, b, d)$.

Figura 9. Representación de conjunto difuso triangular.



Observación 1.4.2. Los conjuntos difusos trapezoidales son normales, convexos, semicontinuos superiormente y compactos.

Dentro de la clase de los conjuntos difusos, existe una subclase de particular importancia la cual comprende a los denominados números difusos. Esta subclase permite representar adecuadamente idealizaciones de afirmaciones imprecisas envolviendo valores mínimos, y operar matemáticamente con ellos.

Definición 1.4.6 (Número difuso). Un conjunto difuso en $\mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ se dice que es número difuso si satisface las siguientes propiedades:

- 1) u es normal, es decir, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $u(x_0) = 1$;
- 2) u es una función semicontinua superiormente;
- 3) $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min \{u(x), u(y)\}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0, 1]$;
- 4) $[u]^0$ es compacto.

El conjunto de los números difusos será denotado por $\mathcal{F}_c^1$. Las condiciones 3)-4) hacen que todos los α -niveles de cada conjunto difuso $u \in \mathcal{F}_c^1$ sean elementos del espacio $\mathcal{K}_c^n$ de los subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$. En efecto, la condición 3) implica que para cada $\alpha \in [0, 1]$, $[u]^\alpha$ es convexo, mientras que la condición 2) implica que los α -niveles $[u]^\alpha$ son cerrados, con lo cual, siendo $[u]^0$ compacto, se tiene que $[u]^\alpha$ es compacto para cada $\alpha \in [0, 1]$. La condición 1) muestra el hecho de que el espacio $\mathcal{F}_c^1$ generaliza los conjuntos clásicos de $\mathbb{R}^n$, en el sentido de que elementos de $\mathbb{R}^n$ representados por la función característica, verifican 1).

Proposición 1.4.1. * La familia de niveles $\{[u]^\alpha \mid \alpha \in [0, 1]\}$ de un conjunto difuso sobre X , verifica las siguientes propiedades:

- a) $[u]^0 \supseteq [u]^\alpha \supseteq [u]^\beta$ para cualesquiera α, β tales que $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.
- b) Si $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_n \rightarrow \alpha$, entonces $[u]^\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n}$.
- c) $v = u \Leftrightarrow [v]^\alpha = [u]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

1.5. TEOREMAS DE REPRESENTACIÓN

El teorema de representación da respuesta a la siguiente pregunta: Dada una familia $\{N_\alpha \mid \alpha \in [0, 1]\}$ de subconjuntos no vacíos de X , ¿existe un subconjunto difuso $u : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $[u]^\alpha = N_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$?

Teorema 1.5.1 (Negoita-Ralescu). Sean X y $\{N_\alpha \mid \alpha \in [0, 1]\}$ una familia de subconjuntos de X tales que:

a) $N_0 = X$.

b) Si $\alpha \leq \beta$, entonces $N_\beta \subseteq N_\alpha$.

c) Si $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p = \alpha$, entonces $N_\alpha = \bigcap_{p=1}^{\infty} N_{\alpha_p}$.

Entonces, la función $u : X \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$u(x) = \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid x \in N_\alpha \},$$

tiene la propiedad de que $[u]^\alpha = N_\alpha$ para cada $\alpha \in [0, 1]$.

El siguiente teorema nos ayudará a ver cómo puede ser descompuesto un conjunto difuso en términos de todos sus α -niveles.

Teorema 1.5.2 (Teorema de descomposición). Para todo $u \in \mathcal{F}(X)$, se tiene que

$$u = \bigvee_{\alpha \in [0, 1]} \alpha \cdot \chi_{[u]^\alpha},$$

donde $\chi_{[u]^\alpha}$ es la función característica del α -nivel de u y $\bigvee$ denota la unión (no numerable) de conjuntos difusos.

Ejemplo 1.5.1. Sea $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ un conjunto difuso con la función de pertenencia dada por

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [\frac{\pi}{4}, \infty), \\ \arctan(x) & \text{si } x \in (0, \frac{\pi}{4}), \\ 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

Despejando x en la ecuación $\alpha = \arctan(x)$ con $x \in (0, \frac{\pi}{4})$, tenemos que $[u]^\alpha = [\tan(\alpha), \infty)$, para todo $\alpha \in [0, 1]$. Por lo tanto,

$$\alpha \cdot \chi_{[u]^\alpha} = \begin{cases} \alpha, & \text{si } x \in [\tan(\alpha), \infty), \\ 0, & \text{en cualquier otra parte.} \end{cases}$$

Así la unión de todos los $\alpha \cdot \chi_{[u]^\alpha}$ es igual al conjunto u .

1.6. EL PRINCIPIO DE EXTENSIÓN

El principio de extensión de Zadeh permite extender funciones $f : X \rightarrow Y$ a funciones $\tilde{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$, posibilitando así, definir operaciones algebraicas entre números difusos. Observe que si se suman conjuntos difusos a través de la suma de sus funciones de pertenencia, puede suceder que su resultado no sea un conjunto difuso. Considérese una función $f : X \rightarrow Y$ con X y Y conjuntos arbitrarios y $A \subseteq X$. Es claro que $f(A) = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\}$ es un subconjunto de Y . Se puede utilizar la función característica para representar este conjunto, es decir,

$$\chi_{f(A)}(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y \in f(A); \\ 0, & \text{si } y \notin f(A). \end{cases}$$

Lo anterior también se puede expresar como sigue:

$$\chi_{f(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{s \in f^{-1}(y)} \chi_A(s), & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

para cada $y \in Y$.

La generalización de la anterior representación a conjuntos difusos se puede llevar a cabo a través del principio de extensión de Zadeh, es decir, la función $f : X \rightarrow Y$ puede ser extendida al contexto difuso por medio de la aplicación $\tilde{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$, donde $\tilde{f}$ se define, para cada $u \in \mathcal{F}(X)$, como

$$\tilde{f}(u)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} u(x), & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

para cada $y \in Y$.

Por medio del principio de extensión de Zadeh se puede definir la adición y multiplicación por escalar de conjuntos difusos.

Definición 1.6.1 (Adición y producto por escalar). Sean u, v conjuntos difusos y λ un número real. Se define la suma de $u + v$ y el producto por escalar λu de la siguiente manera:

$$(u + v)(x) = \sup_{y+z=x} \min \{u(y), v(z)\} \quad (1.3)$$

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u(\frac{x}{\lambda}), & \text{si } \lambda \neq 0; \\ 0, & \text{si } \lambda = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Seguidamente se tiene un resultado que relaciona las operaciones definidas anteriormente, con las operaciones de niveles.

Teorema 1.6.1. * Si $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $u + v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ y, para cada $\alpha \in [0, 1]$, se tiene que

$$[u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha, \quad (1.5)$$

y

$$[\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha. \quad (1.6)$$

A continuación, daremos paso a definiciones relevantes en el estudio de la optimización difusa.

Definición 1.6.2. Sean $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ y $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ dos intervalos cerrados en $\mathbb{R}$. Escribimos:

- $A \underline{\leq} B \Leftrightarrow \underline{a} \leq \underline{b} \text{ y } \bar{a} \leq \bar{b}$.
- $A \preceq B \Leftrightarrow A \underline{\leq} B \text{ y } A \neq B$.
- $A \prec B \Leftrightarrow \underline{a} < \underline{b} \text{ y } \bar{a} < \bar{b}$.

Definición 1.6.3. Sean u y v dos conjuntos difusos sobre $\mathbb{R}^n$. Decimos que $u \subseteq v \Leftrightarrow u(x) \leq v(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 1.6.1. Sean u y v dos conjuntos difusos sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces $u \subseteq v$ si y solo si, $[u]^\alpha \subseteq [v]^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$.

Definición 1.6.4. [Orden de los números difusos] Sean $u, v \in \mathcal{F}_C^1$ se dice que:

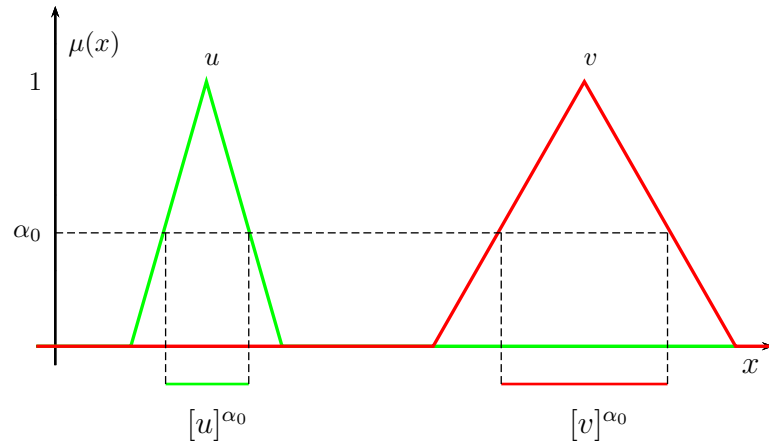
- $u \underline{\preceq} v$ si para cada $\alpha \in [0, 1]$, $[u]^\alpha \underline{\preceq} [v]^\alpha$.
- $u \preceq v$ si $u \underline{\preceq} v$ y $\exists \alpha_0 \in [0, 1]$ tal que $[u]^{\alpha_0} \preceq [v]^{\alpha_0}$.
- $u \prec v$ si $u \preceq v$ y $\exists \alpha_0 \in [0, 1]$ tal que $[u]^{\alpha_0} \prec [v]^{\alpha_0}$.

Observación 1.6.1. Si $u \preceq v$ y $v \preceq u$ entonces $u = v$.

Ejemplo 1.6.1. Sean u, v dos conjuntos triangulares difusos definidos por

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [1, 3]; \\ x - 1, & \text{si } x \in [1, 2); \\ 1, & \text{si } x = 2; \\ -x + 3, & \text{si } x \in (2, 3]. \end{cases} \quad v(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [5, 9]; \\ \frac{x-5}{2}, & \text{si } x \in [5, 7); \\ 1, & \text{si } x = 7; \\ \frac{-x+9}{2}, & \text{si } x \in (7, 9]. \end{cases}$$

Figura 10. Representación de conjuntos difusos u y v .



Sabemos que $[u]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha]$ y $[v]^\alpha = [5 + 2\alpha, 9 - 2\alpha]$. Note que $1 + \alpha < 5 + 2\alpha$ y $3 - \alpha < 9 - 2\alpha$, para toda $\alpha \in [0, 1)$ usando la Definición 1.6.2 concluimos que $u \underline{\preceq} v$, $u \preceq v$ y $u \prec v$. La conclusión anterior, se puede ver gráficamente en la Figura 10.

Corolario 1.6.1. Si $u \prec v$, entonces $u \preceq v$, y por tanto, $u \underline{\preceq} v$.

Observación 1.6.2. Si $a \in \mathbb{R}^m$ y $u \in (\mathcal{F}_C)^m$, es decir, a es un vector m -dimensional cuyas componentes son números y u es un vector m -dimensional cuyas componentes son intervalos difusos, entonces $au = (a_1u_1, \dots, a_mu_m) \in \mathcal{F}_C^m$, de este modo tenemos que

$$[au]^\alpha = \prod_{i=1}^m [a_iu_i]^\alpha = \prod_{i=1}^m a_i [u_i]^\alpha.$$

Observación 1.6.3. Por conveniencia, introduciremos la siguiente notación. Sea $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in \mathcal{K}_C$ y sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, denotamos por $\lambda \times A$ la combinación lineal

$$\lambda \times A = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \bar{a}.$$

2. DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES DIFUSAS

El objetivo de este capítulo es establecer la fundamentación teórica sobre la diferenciabilidad de funciones difusas en el sentido de la derivada de Hukuhara, y la derivada generalizada de Hukuhara. Para ello se iniciará recordando el concepto de diferencia de Hukuhara entre conjuntos de K_c^n , y la diferencia de Hukuhara entre conjuntos difusos, con miras a definir la derivada de Hukuhara. Posteriormente se presentará el concepto de derivada generalizada de Hukuhara. Es importante recalcar que el concepto de derivada es fundamental para el desarrollo teórico de la optimización difusa, principalmente en lo relativo a la existencia de condiciones de optimalidad, es decir, condiciones necesarias y suficientes para la existencia de mínimos y máximos.

2.1. DIFERENCIA DE HUKUHARA EN K_c^n

Para definir el concepto de derivada de funciones difusas, estamos abocados, en algún sentido, a establecer un cociente diferencial; esto lleva implícito definir adecuadamente la diferencia entre conjuntos difusos, y entre elementos de K_c^n . Cabe recordar que si consideramos la diferencia entre K_c^n de manera usual, no se cumple que $A - A = \{0\}$, es decir, K_c^n no tiene estructura de espacio vectorial. Lo mismo sucede en el contexto de los conjuntos difusos. La diferencia de Hukuhara nos permite definir de manera adecuada la diferencia entre conjuntos de K_c^n y la diferencia entre conjuntos difusos.

Definición 2.1.1 (Diferencia de Hukuhara sobre K_c^n). Si $A, B \in K_c^n$, la H -diferencia entre A y B denotada por $A \ominus B$, se define como

$$A \ominus B = C \Leftrightarrow A = B + C.$$

Ejemplo 2.1.1. Sean $A = [1, 3]$ y $B = [0, 1]$. Entonces $A, B \in \mathcal{K}_c^n$ y se tiene que

$$A - B = A + (-B) = [0, 3] \quad \text{y} \quad A \ominus B = [1, 2].$$

Es claro que $A - B \neq A \ominus B$.

Proposición 2.1.1. * Si $A, B, C \in \mathcal{K}_c^n$, tenemos:

- a) $A \ominus A = \{0\}$.
- b) $(A + B) \ominus B = A$.
- c) Si $A \ominus B = C$, entonces C es único.
- d) $A \ominus B \neq A + (-1)B = A - B$.
- f) La existencia de $A \ominus B$ no implica la existencia de $B \ominus A$.

Observación 2.1.1. La H -diferencia no siempre existe. Una condición necesaria para la existencia de $A \ominus B$ es que $B + \{c\} \subseteq A$, siendo $B + \{c\}$ una traslación de B , donde c es un punto en $\mathbb{R}^n$. Además, denotando

$$\text{diám}(A) = \sup \{ \|a_1 - a_2\| \mid a_1, a_2 \in A \},$$

tenemos que la afirmación $\text{diám}(B) > \text{diám}(A)$, implica $A \ominus B$ no existe.

Ejemplo 2.1.2. Sean $A = [-1, 1]$ y $B = [0, 1]$. Entonces $A, B \in \mathcal{K}_c^1$ y se tiene que

$$A - B = A + (-B) = [-2, 1] \quad \text{y} \quad A \ominus B = [-1, 0].$$

Evidentemente $A - B \neq A \ominus B$. Se puede observar que $\text{diám}(A) > \text{diám}(B)$, por lo tanto no existe $B \ominus A$.

Debido a la naturaleza restrictiva de la H-diferencia, Stefanini en[§], propuso una generalización de la diferencia de Hukuhara, denominada *diferencia generalizada de Hukuhara* entre A y B (o gH-diferencia), denotada por $A \ominus_g B$ y que se define como sigue.

Definición 2.1.2 (Diferencia generalizada de Hukuhara sobre $\mathcal{K}_c^n$). Para $A, B \in \mathcal{K}_c^n$, la gH-diferencia $A \ominus_g B$ es dada por el elemento $C \in \mathcal{K}_c^n$ tal que

$$A \ominus_g B = C \iff \begin{cases} (a) & A = B + C, \\ & \text{o} \\ (b) & B = A + (-1)C. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ejemplo 2.1.3. Sean $A = [1, 2]$ y $B = [0, 3]$. $A, B \in \mathcal{K}_c^1$. Note que $A \ominus B$ no existe, ya que $\text{diám}(B) > \text{diám}(A)$. Sin embargo existe $C = [-1, 1] \in \mathcal{K}_c^1$ tal que $[0, 3] = [1, 2] + (-1)[-1, 1]$. Por lo tanto $A \ominus_g B$ existe.

Proposición 2.1.2. * Sean $A, B, C \in \mathcal{K}_c^n$. Entonces

- a) Si existe $C = A \ominus_g B$, entonces C es única.
- b) Si $A \ominus B$ existe, $A \ominus_g B = A \ominus B$.
- c) $A \ominus_g A = 0$.
- d) • $(A + B) \ominus_g B = A$.
• $A \ominus_g (A - B) = B$.
• $A \ominus_g (A + B) = -B$.
- e) $A \ominus B$ existe si, y solo si, $B \ominus_g A$ y $(-B) \ominus_g (-A)$ existen, y

$$A \ominus_g B = (-B) \ominus_g (-A) = -(B \ominus_g A).$$

[§] L. STEFANINI. "A generalization of hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic". En: *Series on Advances in Soft Computing* 48 (2008).

f) En general, $A \ominus_g B = B \ominus_g A$ no implica que $A = B$; pero $A \ominus_g B = B \ominus_g A = C$ si, y solo si, $C = -C$ y, en particular, $C = \{0\}$ si, y solo si, $A = B$.

g) Si $B \ominus_g A$ existe, entonces

$$A + (B \ominus_g A) = B \quad \text{o} \quad B - (B \ominus_g A) = A.$$

Ambas igualdades se cumplen si, y solo si, $B \ominus_g A$ es un conjunto unitario.

h) Si $B \ominus_g A = C$ existe, entonces para todo $D \in \mathcal{K}_c^n$ se tiene

$$(B + D) \ominus_g A = C + D \quad \text{o} \quad B \ominus_g (A + D) = C - D.$$

Al contrario de lo que sucede con la H -diferencia, en el espacio $\mathcal{K}_c^1$, la gH-diferencia $A \ominus_g B$ siempre existe. Por lo tanto, si $A = [a^-, a^+]$ y $B = [b^-, b^+]$, con $a^-, a^+, b^-, b^+ \in \mathbb{R}$, son dos elementos de $\mathcal{K}_c^1$, entonces la gH-diferencia está dada por

$$[a^-, a^+] \ominus [b^-, b^+] = [\min \{a^- - b^-, a^+ - b^+\}, \max \{a^- - b^-, a^+ - b^+\}].$$

Lema 2.1.1. ⁺ Sean $A, B \in \mathcal{K}_c^1$. Entonces la g H -diferencia verifica que

- $A \underline{\preceq} B$ si, y solo si, $A \ominus_{gH} B \underline{\preceq} [0, 0]$;
- $A \preceq B$ si, y solo si, $A \ominus_{gH} B \preceq [0, 0]$;
- $A \prec B$ si, y solo si, $A \ominus_{gH} B \prec [0, 0]$.

2.2. DIFERENCIA DE HUKUHARA DE NÚMEROS DIFUSOS

Definición 2.2.1 (H-diferencia entre conjuntos difusos). Sean $u, v \in \mathcal{F}_c^1$. Si existe $w \in \mathcal{F}_c^1$ tal que $u = v + w$, entonces w es llamada la diferencia de Hukuhara (H-diferencia)

entre u y v , y la denotamos por $u \ominus v$. Aquí la suma $u + w$ se toma en el sentido de la Definición 1.6.1.

Observación 2.2.1. En la H-diferencia entre conjuntos de $\mathcal{K}_c^n$ se utilizó el símbolo “ $\ominus$ ”, mientras que para denotar la H-diferencia entre conjuntos difusos se usará el símbolo “ $\ominus$ ”.

Al igual que en el caso de multifunciones, cuando se trabaja sobre $\mathcal{F}_c^1$, la H-diferencia en el contexto difuso $u \ominus v$ satisface las siguientes propiedades.

Proposición 2.2.1. * Sean $u, v \in \mathcal{F}_c^1$. Si $u \ominus v$ existe, es única y satisface las siguientes proposiciones:

- a) $u \ominus u = 0$.
- b) $(u + v) \ominus v = u$.
- c) Si $u \ominus v$ existe, entonces también existe $(-u) \ominus (-v)$.
- d) $u \ominus v$ y $v \ominus u$ existen simultáneamente si, y solo si,

$$\text{diám}([u]^\alpha) = \text{diám}([v]^\alpha), \quad \text{para cada } \alpha \in [0, 1].$$

- e) Si alguna traslación de v está contenida en u , entonces existe $u \ominus v$.

Observe que una condición necesaria para la existencia de $u \ominus v$ es que $v + \chi_c \subseteq u$; esto quiere decir que para cada $\alpha \in [0, 1]$, $[v]^\alpha + \{c\} \subseteq [u]^\alpha$. Además, es fácil ver que la existencia de $u \ominus v$ no implica la existencia de $v \ominus u$. Por otro lado, del ítem d), podemos observar que si $u \ominus v$ y $v \ominus u$ existen simultáneamente, entonces $u \ominus v = \chi_c$ y $v \ominus u = \chi_{-c}$, con $c \in \mathbb{R}$. Note que si para algún $\alpha \in [0, 1]$, $\text{diám}([v]^\alpha) > \text{diám}([u]^\alpha)$, entonces $u \ominus v$ no existe.

Observación 2.2.2. Observe que la existencia de $u \ominus v$ implica la existencia de

$$[u \ominus v]^\alpha = [u]^\alpha \ominus [v]^\alpha, \quad \text{para todo } \alpha \in [0, 1],$$

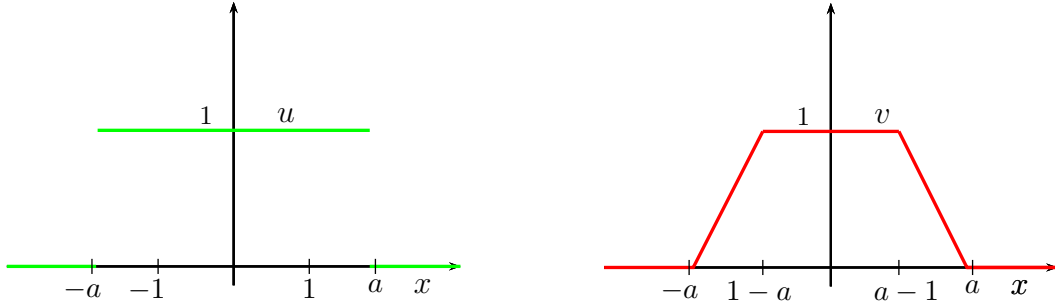
pero el recíproco no es cierto.

El siguiente ejemplo deja clara la observación anterior.

Ejemplo 2.2.1. La existencia de la H-diferencia $[u]^\alpha \ominus [v]^\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, no implica la existencia de $u \ominus v$. Considérese $a \geq 1$ un número real y los números difusos $u, v : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definidos por

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [-a, a]; \\ 0, & \text{si } t \notin [-a, a]. \end{cases} \quad v(t) = \begin{cases} t + a, & \text{si } t \in [-a, -a + 1]; \\ 1, & \text{si } t \in (-a + 1, a - 1); \\ -t + a, & \text{si } t \in [a - 1, a]; \\ 0, & \text{si } t \notin [-a, a]. \end{cases}$$

Figura 11. Gráfica de los conjuntos difusos u y v .



En este caso, la H-diferencia entre los α -niveles existe y es dada por

$$[u]^\alpha \ominus [v]^\alpha = [-a, a] \ominus [-a + \alpha, a - \alpha], \quad \alpha \in [0, 1]$$

Sin embargo, la H-diferencia $u \ominus v$ no existe, dado que de acuerdo con el Teorema de representación de Negoita-Ralescu 1.5.1 la familia $\{[-\alpha, \alpha] | \alpha \in [0, 1]\}$ no define un conjunto difuso.

De manera similar al caso de K_c^1 , en $\mathbb{I}$ Stefanini introduce una generalización de la H-diferencia para el contexto difuso, también llamada diferencia generalizada de Hukuhara entre u y v (gH -diferencia), denotada por $u \ominus_g v$ y definida como sigue:

Definición 2.2.2 (Diferencia generalizada de Hukuhara en el contexto difuso). Para $u, v \in \mathcal{F}_C^n$, la gH-diferencia $u \ominus_g v$ es dada por el elemento $z \in \mathcal{F}_C^n$ tal que

$$u \ominus_g v = z \Leftrightarrow \begin{cases} (a) & u = v + z, \\ & \mathbf{0} \\ (b) & v = u + (-1)z. \end{cases} \quad (2.2)$$

$\mathbb{I}$ L. STEFANINI. "A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic". En: *Fuzzy sets and systems* 161.11 (2010).

Para el caso de $\mathcal{F}_c^1$, la gH-diferencia $u \ominus_g v$ en el contexto difuso satisface las siguientes propiedades, análogas a las que se tienen para $\mathcal{K}_c^1$ y establecidas en la Proposición 1.16.

Proposición 2.2.2. * Sean $u, v \in \mathcal{F}_c^1$. Si $u \ominus_g v$ existe, es única y satisface las siguientes propiedades:

- a) $u \ominus_g u = 0$.
- b) $(u + v) \ominus_g v = u$.
- c) $u \ominus_g (u - v) = v$.
- d) Si $u \ominus_g v$ existe, entonces también existen $(-v) \ominus_g (-u)$ y $0 \ominus_g (u \ominus_g v) = (-v) \ominus_g (-u)$.
- e) $u \ominus_g v = v \ominus_g u = z$ si, y solo si, $z = -z$ (en particular $z = 0$ si, y solo si, $u = v$).
- f) Si $v \ominus_g u$ existe, entonces $u + (v \ominus_g u) = v$ ó $v - (v \ominus_g u) = u$ y si ambas igualdades se cumplen, entonces $v \ominus_g u$ es la función característica de un número real.

En $\mathcal{F}_c^1$, $u \ominus_g v$ no siempre existe; sin embargo, existen condiciones bajo las cuales existe $u \ominus_g v$.

2.3. DERIVADA DE HUKUHARA DE FUNCIONES DIFUSAS

El objetivo de esta sección es presentar las nociones de derivada en el contexto difuso, para así a partir de esto se pueda llevar los fundamentos de la optimización a este contexto. El concepto de función difusa fue introducido por Chang y Zadeh ¹¹.

¹¹ S. S. CHANG y L. A. ZADEH. "On fuzzy mapping and control". En: *Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers by Lotfi A Zadeh*. World Scientific, 1996.

El concepto de diferenciabilidad de Hukuhara fue generalizado y extendido al contexto difuso por Puri y Ralescu en **, y es definida en la sección anterior. Al igual que la H-diferenciabilidad de multifunciones, el concepto de H-derivada de funciones difusas es muy restrictivo en el sentido que la clase de funciones Hukuhara diferenciables es muy pequeña; en este sentido, Bede y Gal en ++ y Stefanini y Bede en §§¶, con miras a intentar ampliar la clase de funciones H -diferenciables, introdujeron nuevos conceptos de diferenciabilidad de funciones difusas tales como la GH-derivada y gH-derivada.

Para introducir una primera noción de derivada de funciones difusas, consideramos a $\tilde{f} : (a, b) \rightarrow \mathcal{F}_C$ una función difusa. Para cada $\alpha \in [0, 1]$, nosotros asociamos a $\tilde{f}$ la familia de funciones intervaluada $\tilde{f}_\alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{K}_C$ dada por $\tilde{f}_\alpha(x) = [\tilde{f}(x)]^\alpha$. Para cada $\alpha \in [0, 1]$, y denotamos $S = (a, b) \subset \mathbb{R}$ $\tilde{f} : S \rightarrow \mathcal{F}_c^1$. Se requiere el concepto de diferencia entre conjuntos difusos que se mencionó en la sección anterior.

Definición 2.3.1 (Derivada de Hukuhara de funciones difusas). Sea $\tilde{f} : S \rightarrow \mathcal{F}_c^1$ una función difusa. Se dice que $\tilde{f}$ es diferenciable según Hukuhara (o H-diferenciable) en $t_0 \in S$, si para $h > 0$ suficientemente pequeño, existen las diferencias $\tilde{f}(t_0 + h) \ominus$

** M. L. PURI y D. A. RALESCU. "Differentials of fuzzy functions". En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 91.2 (1983).

++ B. BEDE y S. G. GAL. "Almost periodic fuzzy-number-valued functions". En: *Fuzzy Sets and Systems* 147.3 (2004).

B. BEDE y S. G. GAL. "Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations." En: *Fuzzy sets and systems* 151.3 (2005).

§§ B. BEDE y L. STEFANINI. "Generalized differentiability of fuzzy-valued functions." En: *Fuzzy Sets Syst.* 230.1 (2013).

¶¶ L. STEFANINI y B. BEDE. "Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations". En: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 71.3-4 (2009).

$\tilde{f}(t_0)$ y $\tilde{f}(t_0) \ominus \tilde{f}(t_0 - h)$, y existe un elemento $\tilde{f}'_H(t_0) \in \mathcal{F}_c^1$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(t_0 + h) \ominus \tilde{f}(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(t_0) \ominus \tilde{f}(t_0 - h)}{h} = \tilde{f}'_H(t_0)$$

$\tilde{f}'(t_0)$ es llamada la H-derivada de la función difusa $\tilde{f}$ en el punto $t_0 \in S$. Si para cada $t_0 \in S$ se tiene que $\tilde{f}$ es H-diferenciable, entonces se dice que $\tilde{f}$ es H-diferenciable. Aquí los límites se toman en el espacio métrico $(\mathcal{F}_c^1, d_\infty)$.

Es de notar que si $\tilde{f} : S \rightarrow \mathcal{F}_c^1$ es H-diferenciable en $t_0 \in S$, entonces $\tilde{f}_\alpha : S \rightarrow \mathcal{K}_c^1$ dadas por $\tilde{f}_\alpha(t_0) = [\tilde{f}(t_0)]^\alpha$ son H-diferenciables en $t_0 \in S$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, y su derivada está dada por $[\tilde{f}'_H(t_0)]^\alpha = D_H \tilde{f}_\alpha(t_0)$, donde $D_H \tilde{f}_\alpha(t_0)$ denota la derivada de Hukuhara de la multifunción $\tilde{f}_\alpha$. El resultado recíproco no se cumple, dado que, como vimos en el Ejemplo 2.2.1 la existencia de la diferencia de Hukuhara en los α -niveles $[u]^\alpha \ominus [v]^\alpha$ no implica la existencia de la H-diferencia de los números difusos $u \ominus v$.

Teorema 2.3.1. * Sea $\tilde{f} : S \rightarrow \mathcal{F}_c^1$ una función difusa H-diferenciable y considere $\tilde{f}_\alpha : S \rightarrow \mathcal{K}_c^1$ dada por $\tilde{f}_\alpha(t) = [\tilde{f}_\alpha^-(t), \tilde{f}_\alpha^+(t)]$, para cada $\alpha \in [0, 1]$. Entonces las funciones reales $\tilde{f}_\alpha^-$ y $\tilde{f}_\alpha^+$ son diferenciables y

$$D_H \tilde{f}_\alpha(t) = [\tilde{f}'_H(t)]^\alpha = \left[\left(\tilde{f}_\alpha^- \right)'(t), \left(\tilde{f}_\alpha^+ \right)'(t) \right].$$

Teorema 2.3.2. * Si $\tilde{f} : S \rightarrow \mathcal{F}_c^1$ es una función difusa H-diferenciable sobre S , entonces $\tilde{f}$ es continua.

Teorema 2.3.3. * Si $\tilde{f}, \tilde{g} : S \rightarrow \mathcal{F}_c^1$ son funciones difusas H-diferenciables sobre S y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las funciones $\tilde{f} + \tilde{g}$ y $\lambda \tilde{f}$ son H-diferenciables y además,

$$(\tilde{f} + \tilde{g})'_H(t) = \tilde{f}'_H(t) + \tilde{g}'_H(t) \quad y \quad (\lambda \tilde{f})'_H(t) = \lambda \tilde{f}'_H(t).$$

Ejemplo 2.3.1. Sea $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}_c^2$ la función difusa definida por $\tilde{f}(t) = \chi_R$ donde

R es cualquier rectángulo de $\mathbb{R}^2$. Entonces $\tilde{f}$ es H-diferenciable sobre R , y además, $f'_H(t) = \chi_{\{0\}}$. En efecto, basta con observar que para $h > 0$ y para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $\tilde{f}(t+h) \ominus \tilde{f}(t) = \tilde{f}(t) \ominus \tilde{f}(t-h) = \chi_{\{0\}}$

Observamos, sin embargo, que la Definición 2.3.1 es muy restrictiva, puesto que muchas funciones difusas relativamente simples no resultan ser diferenciables, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.1. Consideremos la función difusa $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}_c^1$ definida por $F(t) = (1 - t^2)\chi_{[-1,1]}$. Observemos que F no es H-diferenciable en el intervalo $(0, 1)$. Para ver esto, tomemos $t_0 \in (0, 1)$, observemos que la función real $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = 1 - t^2$ verifica que $g'(t_0) = -2t_0 < 0$. Por lo tanto, las H-diferencias $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$ y $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ no existen, puesto que $\text{diám}([F(t_0 + h)]^\alpha) \leq \text{diám}([F(t_0)]^\alpha)$ y $\text{diám}([F(t_0)]^\alpha) \leq \text{diám}([F(t_0 - h)]^\alpha)$ para $h > 0$ suficientemente pequeño. Por consiguiente, F no es H-diferenciable sobre el intervalo $(0, 1)$.

2.4. DERIVADA GENERALIZADA DE HUKUHARA DE FUNCIONES DIFUSAS

Dado que la clase de funciones H-diferenciables es bastante restrictiva, B. Bede y Stefanini introducen en §§ la siguiente noción de diferenciabilidad para funciones difusas, la cual generaliza la noción dada en la Definición 2.3.1

Definición 2.4.1 (Derivada generalizada de Hukuhara). Una función $\tilde{f} : (a, b) \rightarrow \mathcal{F}_c^1$ se llama gH -diferenciable si existe $\tilde{f}'_g(t_0) \in \mathcal{F}_c^1$ tal que

$$\tilde{f}'_g(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\tilde{f}(t_0 + h) \ominus_g \tilde{f}(t_0) \right]. \quad (2.3)$$

Aquí el límite se toma en el sentido de la métrica d_∞ .

Ejemplo 2.4.1. Sea u el conjunto difuso triangular definido por

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| \geq 1; \\ 1+x, & \text{si } -1 < x < 0; \\ 1-x, & \text{si } 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

y consideremos la función difusa $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}_c^1$ definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} (1 - t^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{t}))u, & \text{si } t \neq 0; \\ u, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Observemos que

$$[\tilde{f}(t)]^\alpha = \begin{cases} (1 - t^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{t})) [u]^\alpha, & \text{si } t \neq 0; \\ [u]^\alpha, & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

donde $[u]^\alpha = [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$. Entonces las funciones reales $\tilde{f}_\alpha^-$ y $\tilde{f}_\alpha^+$ definidas por

$$\tilde{f}_\alpha^-(t) = \begin{cases} (1 - t^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{t}))(-1 + \alpha), & \text{si } t \neq 0; \\ -1 + \alpha, & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

y

$$\tilde{f}_\alpha^+(t) = \begin{cases} (1 - t^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{t}))(1 - \alpha) & \text{si } t \neq 0 \\ 1 - \alpha & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

son diferenciables y verifican que $(\tilde{f}_\alpha^-)'(0) = (\tilde{f}_\alpha^+)'(0) = 0$. Así, $\tilde{f}$ es gH-diferenciable en $t = 0$. Sin embargo $\tilde{f}$ no es H-diferenciable en $t = 0$, puesto que no existe $\delta > 0$ tal que las H-diferencias $\tilde{f}(h) \ominus \tilde{f}(0)$ y $\tilde{f}(-h) \ominus \tilde{f}(0)$ existan para todo $h \in (0, \delta)$.

Teorema 2.4.1. [†] Si $\tilde{f} : S \rightarrow \mathcal{F}_C$ es gH -diferenciable en $x_0 \in S$, entonces $\tilde{f}_\alpha$ es gH -diferenciable en x_0 para todo $\alpha \in [0, 1]$ y

$$\tilde{f}'_\alpha(x_0) = [\tilde{f}'(x_0)]^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

En general, tenemos el siguiente resultado que conecta la gH -diferenciabilidad de $\tilde{f}$ y la diferenciabilidad de sus funciones punto inicial $\underline{f}_\alpha$ y punto final $\bar{f}_\alpha$.

Teorema 2.4.2. ⁺ Sea $\tilde{f} : S \rightarrow \mathcal{F}_C$ una función difusa. Si $\tilde{f}$ es gH -diferenciable en $x_0 \in S$, entonces uno de los siguientes casos es válido:

a) $\underline{f}_\alpha$ y $\bar{f}_\alpha$ son diferenciables en x_0 , para todo $\alpha \in [0, 1]$, y

$$\left[\tilde{f}'(x_0) \right]^\alpha = \left[\min \left\{ \left(\underline{f}_\alpha \right)'(x_0), \left(\bar{f}_\alpha \right)'(x_0) \right\}, \max \left\{ \left(\underline{f}_\alpha \right)'(x_0), \left(\bar{f}_\alpha \right)'(x_0) \right\} \right] \\ \forall \alpha \in [0, 1].$$

b) $\left(\underline{f}_\alpha \right)'_{-}(x_0), \left(\underline{f}_\alpha \right)'_{+}(x_0), \left(\bar{f}_\alpha \right)'_{-}(x_0)$ y $\left(\bar{f}_\alpha \right)'_{+}(x_0)$ existen, para todo $\alpha \in [0, 1]$, y satisfacen $\left(\underline{f}_\alpha \right)'_{-}(x_0) = \left(\bar{f}_\alpha \right)'_{+}(x_0)$ y $\left(\underline{f}_\alpha \right)'_{+}(x_0) = \left(\bar{f}_\alpha \right)'_{-}(x_0)$. Además

$$\left[\tilde{f}'(x_0) \right]^\alpha = \left[\min \left\{ \left(\underline{f}_\alpha \right)'_{-}(x_0), \left(\bar{f}_\alpha \right)'_{-}(x_0) \right\}, \max \left\{ \left(\underline{f}_\alpha \right)'_{-}(x_0), \left(\bar{f}_\alpha \right)'_{-}(x_0) \right\} \right] \\ = \left[\min \left\{ \left(\underline{f}_\alpha \right)'_{+}(x_0), \left(\bar{f}_\alpha \right)'_{+}(x_0) \right\}, \max \left\{ \left(\underline{f}_\alpha \right)'_{+}(x_0), \left(\bar{f}_\alpha \right)'_{+}(x_0) \right\} \right] \\ \forall \alpha \in [0, 1].$$

2.5. GRADIENTE DE FUNCIONES DIFUSAS DIFERENCIABLES

Definición 2.5.1. (i -ésima derivada parcial) Sea $\tilde{f}$ una función difusa definida en $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ un elemento fijo de S . Consideremos la función $\tilde{h}_i(x_i) = \tilde{f}(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Si $\tilde{h}_i$ es gH -diferenciable en $x_i^{(0)}$, entonces se dice que $\tilde{f}$ tiene i -ésima gH -derivada parcial en x_0 , denotada por $(\partial \tilde{f} / \partial x_i)(x_0)$ y $(\partial \tilde{f} / \partial x_i)(x_0) = (\tilde{h}_i)'(x_i^{(0)})$.

Sea $\tilde{f}$ una función difusa definida en S y $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in S$ un elemento fijo. Decimos que $\tilde{f}$ es gH -diferenciable en x_0 , si todas las gH -derivadas parciales $(\partial \tilde{f} / \partial x_1)(x_0), \dots, (\partial \tilde{f} / \partial x_n)(x_0)$ existen en alguna vecindad de x_0 .

A partir de la definición anterior, podemos definir el gradiente de una función difusa de la siguiente manera.

Definición 2.5.2 (Gradiente de una función difusa). Dada la función difusa $\tilde{f} : S \rightarrow \mathcal{F}_C$ gH -diferenciable, el gradiente de $\tilde{f}$ en x_0 , se denota $\tilde{\nabla} \tilde{f}(x_0)$ y es el vector difuso definido por

$$\tilde{\nabla} \tilde{f}(x_0) = \left(\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \right)(x_0), \dots, \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n} \right)(x_0) \right), \quad (2.4)$$

donde cada intervalo difuso $(\partial \tilde{f} / \partial x_j)(x_0)$ es la j -ésima gH -derivada parcial de $\tilde{f}$, con respecto a x_j , en x_0

Observación 2.5.1. Note que si $\tilde{f}$ es gH -diferenciable en x_0 , entonces $(\partial \tilde{f} / \partial x_i)(x_0)$ es un intervalo difuso cuyos α -niveles, $\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x_0) \right]^\alpha$ son obtenidos por el Teorema 2.4.2, esto es $(\partial \tilde{f} / \partial x_i)(x_0) \in \mathcal{F}_C, i = 1, \dots, n, \tilde{\nabla} \tilde{f}(x_0) \in \mathcal{F}_C^n$ y los α -niveles de $\tilde{\nabla} \tilde{f}(x_0)$ están definidos por

$$\left[\tilde{\nabla} \tilde{f}(x_0) \right]^\alpha = \left(\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}(x_0) \right]^\alpha, \dots, \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}(x_0) \right]^\alpha \right),$$

donde $\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x_0) \right]^\alpha$ es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. En otras palabras, $\left[\tilde{\nabla} \tilde{f}(x_0) \right]^\alpha$ es un n -vector cuyas componentes son intervalos cerrados de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.5.1. Consideremos la función $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{F}_C$ definida por

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \tilde{2} \cdot x_1^2 + \tilde{1} \cdot x_2^2,$$

donde $\tilde{1} = (0, 1, 2)$ y $\tilde{2} = (1, 2, 3)$ son números triangulares difusos. En este caso, los α -niveles de $\tilde{1}$ y $\tilde{2}$ son dados por

$$[\tilde{1}]^\alpha = [\alpha, 2 - \alpha] \quad [\tilde{2}]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha].$$

Entonces

$$\begin{aligned} [\tilde{f}(x_1, x_2)]^\alpha &= [\tilde{2}]^\alpha x_1^2 + [\tilde{1}]^\alpha x_2^2 \\ &= [1 + \alpha, 3 - \alpha] x_1^2 + [\alpha, 2 - \alpha] x_2^2 \\ &= [(1 + \alpha)x_1^2 + \alpha x_2^2, (3 - \alpha)x_1^2 + (2 - \alpha)x_2^2]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right]^\alpha = \frac{\partial \tilde{f}_\alpha}{\partial x_1}(x_1, x_2) = [2(1 + \alpha)x_1, 2(3 - \alpha)x_1], \quad \text{para cada } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

y

$$\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right]^\alpha = \frac{\partial \tilde{f}_\alpha}{\partial x_2}(x_1, x_2) = [2\alpha x_2, 2(2 - \alpha)x_2], \quad \text{para cada } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Para todo $\alpha \in [0, 1]$. Como $(\partial \tilde{f} / \partial x_1)(x_1, x_2)$ y $(\partial \tilde{f} / \partial x_2)(x_1, x_2)$ existen en $\mathbb{R}^2$, entonces $\tilde{f}$ es gH -diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

3. OPTIMIZACIÓN DIFUSA

Este capítulo tiene por objetivo analizar el problema general de la optimización con restricciones, en el cual, tanto las funciones objetivo como las restricciones son funciones difusas. Iniciamos planteando una equivalencia entre el problema general de optimización difusa a uno en el cual el conjunto de restricciones es determinado por funciones clásicas. Analizaremos un concepto novedoso de punto estacionario para posteriormente estudiar condiciones necesarias y suficientes de optimalidad. El contenido de este capítulo es basado en la referencia [†].

3.1. GENERALIDADES

El problema general de optimización difusa con restricciones puede ser formulado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \tilde{f}(x) \\ &\text{sujeto a : } \tilde{g}_j(x) \preceq \tilde{0}, \quad j = 1, \dots, m, \\ &\quad x \in S \subseteq \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\tilde{0}$ denota el número difuso cero, definido como $\tilde{0}(t) = 1$, si $t = 0$ y $\tilde{0}(t) = 0$ en caso contrario, y $\tilde{f}, \tilde{g}_j : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}_C$ siendo S un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^n$. El conjunto $X = \{x \in S : \tilde{g}_j(x) \preceq \tilde{0}, \quad j = 1, \dots, m\}$ es denominado *conjunto factible*.

Para analizar (3.1), consideremos el siguiente problema de optimización difusa, en el

cual el conjunto de restricciones es determinado por funciones clásicas de valor real.

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \tilde{f}(x) \\ & \text{sujeto a} \quad \overline{g}_j(0, x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ & \quad \quad \quad x \in S \subseteq \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $\overline{g}_j : S \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $j = 1, \dots, m$.

Lema 3.1.1. El problema (3.1) y (3.2) son equivalentes.

Demostración. Si x es una solución factible para (3.1) entonces $\tilde{g}_j(x) \preceq \tilde{0}$, para cada $j = 1, \dots, m$. Así, por la Definición 1.6.4, para cada $\alpha \in [0, 1]$, se tiene que $[\tilde{g}_j(x)]^\alpha \preceq [\tilde{0}]^\alpha$. Teniendo en cuenta que $[\tilde{g}_j(x)]^\alpha = [\underline{g}_j(\alpha, x), \overline{g}_j(\alpha, x)]$ y $[\tilde{0}]^\alpha = [0, 0]$, y por la Definición 1.6.2 se concluye que $\overline{g}_j(\alpha, x) \leq 0$ y $\underline{g}_j(\alpha, x) \leq 0$ para cada $\alpha \in [0, 1]$; en particular, $\overline{g}_j(0, x) \leq 0$, lo que implica que x es solución factible para (3.2).

Por otro lado, si x es una solución factible para (3.2), entonces $\overline{g}_j(0, x) \leq 0$. Además, como $\overline{g}_j(\alpha, x)$ es una función no creciente con respecto a α , entonces se tiene que $\overline{g}_j(\alpha, x) \leq \overline{g}_j(0, x)$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Luego $\overline{g}_j(\alpha, x) \leq 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Como $\underline{g}_j(\alpha, x) \leq \overline{g}_j(\alpha, x)$ por definición, entonces $\underline{g}_j(\alpha, x) \leq 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ y por lo tanto, nuevamente por la Definición 1.6.2 $\tilde{g}_j(x) \preceq \tilde{0}$. ■

Observe que como consecuencia inmediata del Lema 3.1.1, $\bar{x}$ es una solución óptima para (3.1) si, y solo si, $\bar{x}$ es una solución óptima para (3.2).

En problemas clásicos de optimización el significado de puntos óptimos es claro, por tratarse de la maximización o minimización de una función objetivo sujeta al conjunto admisible de restricciones. Sin embargo, en la optimización difusa, dado que cada función difusa tiene implícitamente definida una multifunción cuyos valores

corresponden a los α niveles de los conjuntos difusos de la función, ese significado de puntos óptimos debe ser reformulado. La manera de hacerlo es acudiendo al significado de óptimos de Pareto, para problemas de optimización multiobjetivo. A continuación se presentarán las definiciones de mínimo considerando (3.1).

Definición 3.1.1. Sea $\bar{x} \in X$ una solución factible.

Se dice que $\bar{x}$ es un mínimo estricto (local) para (3.1) si no existe $x \in X \cap N_\delta(\bar{x})$, tal que $\tilde{f}(x) \preceq \tilde{f}(\bar{x})$, siendo $N_\delta(\bar{x})$ una vecindad de $\bar{x}$ de radio $\delta > 0$.

Se dice que $\bar{x}$ es un mínimo (local) para (3.1) si no existe $x \in X \cap N_\delta(\bar{x})$, tal que $\tilde{f}(x) \preceq \tilde{f}(\bar{x})$.

Se dice que $\bar{x}$ es un mínimo débil (local) para (3.1) si no existe $x \in X \cap N_\delta(\bar{x})$, tal que $\tilde{f}(x) \prec \tilde{f}(\bar{x})$.

Lema 3.1.2. Si $\bar{x}$ es un mínimo estricto, entonces $\bar{x}$ es un mínimo, y por tanto, $\bar{x}$ es un mínimo débil.

Demostración. Se tiene del Corolario 1.6.1 y la Definición 3.1.1 . ■

Las definiciones anteriores de mínimos para una función difusa son generalizaciones de los conceptos de mínimos para una función real. Observe también que cuando $\tilde{f}(x)$ es un número real, para cada $x \in X$, las definiciones de mínimo y mínimos débil son equivalentes. Sin embargo, en general, estos conceptos son diferentes. En efecto considere la función difusa $\tilde{f}$ definida por $\tilde{f}(x) = (-2, 0, 0) \cdot x^2$, entonces $\tilde{f}$ puede ser representada a través de sus α -niveles por $[\tilde{f}(x)]^\alpha = [2\alpha - 2, 0]x^2$, entonces $\bar{x} = 0$ es un mínimo débil para $\tilde{f}$, pero no es un mínimo para $\tilde{f}$.

Tras ver las definiciones de mínimos para una función difusa, vamos a introducir la definición de punto estacionario difuso y probaremos una condición necesaria de optimalidad como la existente en la optimización clásica. Los siguientes resultados han sido tomados esencialmente de [†].

3.2. PUNTO ESTACIONARIO

La noción de punto estacionario juega un papel importante en la optimización clásica dado que es sobre puntos estacionarios, como se establecen condiciones de optimalidad. A lo largo de los años el estudio de soluciones óptimas se ha centrado en probar las condiciones en base a estos puntos. Hasta ahora existen diferentes definiciones de funciones difusas que generalizan la definición de punto estacionario dada en la programación matemática clásica. Algunas de estas definiciones utilizan las técnicas de defusificación y otras que son muy restrictivas [*** †††‡‡‡]. En esta sección se menciona una nueva definición de punto estacionario difuso que generaliza los existentes, ya que se usa la noción de gH derivada que incluye las anteriores.

Definición 3.2.1. Sea $\tilde{f}$ una función difusa gH-diferenciable en S , se dice que $\bar{x} \in S$ es un punto estacionario para $\tilde{f}$ si para cada $i = 1, \dots, n$ existe $\lambda_i \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_i > 0$ tal que

$$\lambda_i \times \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 = 0. \quad (3.3)$$

Ejemplo 3.2.1. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}_C$ la función difusa definida por

$$F(x) = B \cdot x^3,$$

donde B es un número difuso tal que $[B]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. F es

*** M. PANIGRAHI, G. PANDA y S NANDA. "Convex fuzzy mapping with differentiability and its application in fuzzy optimization". En: *European Journal of Operational Research* 185.1 (2008).

††† H. C. WU. "The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for the optimization problem with fuzzy-valued objective function". En: *Mathematical Methods of Operations Research* 66.2 (2007).

‡‡‡ H. C. WU. "The optimality conditions for optimization problems with convex constraints and multiple fuzzy-valued objective functions". En: *Fuzzy Optimization and Decision Making* 8.3 (2009).

gH -diferenciable en $\mathbb{R}$ y

$$[F'(x)]^\alpha = [3(1 + \alpha)x^2, 3(3 - \alpha)x^2].$$

Como $[F'(0)]^0 = \{0\}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}^2$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) > 0$ se tiene que $\lambda \times [F'(0)]^0 = 0$. Por lo tanto podemos afirmar que $x = 0$ es un punto estacionario de F .

Teorema 3.2.1. Sea $\tilde{f}$ una función difusa definida en S . Si $\bar{x}$ es un mínimo débil (local) para $\tilde{f}$ y $\tilde{f}$ es gH -diferenciable en $\bar{x}$, entonces el siguiente sistema de desigualdades lineales no tiene solución para algún $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$y \tilde{\nabla} \tilde{f}(\bar{x}) \prec (\tilde{0})^n. \quad (3.4)$$

Demostración. Se usará un argumento por contradicción y la observación 1.6.2. Supongamos que para cada $i = 1, \dots, n$ existe $y_i \in \mathbb{R}$ tal que $y_i \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right) \prec \tilde{0}$, es decir,

$$y_i \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^\alpha \prec [0, 0], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Entonces por el Teorema 2.4.2, para cada $i = 1, \dots, n$ ocurre uno de los siguientes casos:

a) Existen $\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x})$ y $\frac{\partial \bar{f}_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x})$, para todo $\alpha \in [0, 1]$ tales que satisfacen:

$$\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^\alpha = \left[\min \left\{ \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{\partial \bar{f}_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}) \right\}, \max \left\{ \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{\partial \bar{f}_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}) \right\} \right].$$

Luego

$$y_i \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^\alpha = \left[y_i \min \left\{ \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{\partial \bar{f}_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}) \right\}, y_i \max \left\{ \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{\partial \bar{f}_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}) \right\} \right].$$

Entonces,

$$y_i \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^\alpha \prec [0, 0].$$

y así que $y_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}) < 0$ y $y_i \frac{\partial \bar{f}_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}) < 0$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Como $\underline{f}_\alpha$ y $\bar{f}_\alpha$ son funciones reales, por la definición clásica de la derivada direccional, se tiene que

$$y_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{f}_\alpha(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + y_i h, \dots, \bar{x}_n) - \underline{f}_\alpha(\bar{x})}{h}, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Como $\tilde{f}$ es gH- diferenciable, $\underline{f}_\alpha$ y $\bar{f}_\alpha$ son diferenciables en $\bar{x}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$; por lo tanto se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\underline{f}_\alpha(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + y_i h, \dots, \bar{x}_n) - \underline{f}_\alpha(\bar{x})}{h} - y_i \frac{\partial \underline{f}_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}) \right) = 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Así, para todo $\epsilon > 0$ existe $\underline{\delta}_i > 0$ tal que si $|h| < \underline{\delta}_i$, se tiene que

$$\left| \frac{\underline{f}_\alpha(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + y_i h, \dots, \bar{x}_n) - \underline{f}_\alpha(\bar{x})}{h} - y_i \frac{\partial \underline{f}_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}) \right| < \epsilon, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Si consideramos $\epsilon = -\frac{1}{2} y_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}) > 0$, y si $|h| < \underline{\delta}_i(\epsilon)$, por la definición de valor absoluto, se deduce que:

$$-\epsilon < \left(\frac{\underline{f}_\alpha(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + y_i h, \dots, \bar{x}_n) - \underline{f}_\alpha(\bar{x})}{h} - y_i \frac{\partial \underline{f}_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}) \right) < \epsilon, \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

es decir,

$$\frac{f_{\alpha}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + y_i h, \dots, \bar{x}_n) - f_{\alpha}(\bar{x})}{h} - y_i \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}(\bar{x}) < -\frac{1}{2} y_i \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}(\bar{x}), \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

y así,

$$\frac{f_{\alpha}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + y_i h, \dots, \bar{x}_n) - f_{\alpha}(\bar{x})}{h} < \frac{1}{2} y_i \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}(\bar{x}) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Por lo tanto si $h \in (0, \underline{\delta}_i)$, entonces

$$f_{\alpha}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + y_i h, \dots, \bar{x}_n) - f_{\alpha}(\bar{x}) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Análogamente se muestra que existe $\bar{\delta}_i$ tal que para toda $h \in (0, \bar{\delta}_i)$

$$\bar{f}_{\alpha}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + y_i h, \dots, \bar{x}_n) - \bar{f}_{\alpha}(\bar{x}) < 0.$$

- b) Existen $\left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{+}(\bar{x})$, $\left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{-}(\bar{x})$, $\left(\frac{\partial \bar{f}_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{+}(\bar{x})$ y $\left(\frac{\partial \bar{f}_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{-}(\bar{x})$, con $\alpha \in [0, 1]$. Además se tiene que $\left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{+}(\bar{x}) = \left(\frac{\partial \bar{f}_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{-}(\bar{x})$ y $\left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{-}(\bar{x}) = \left(\frac{\partial \bar{f}_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{+}(\bar{x})$ y satisfacen que

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) = \left[\min \left\{ \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{+}(\bar{x}), \left(\frac{\partial \bar{f}_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{+}(\bar{x}) \right\}, \max \left\{ \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{+}(\bar{x}), \left(\frac{\partial \bar{f}_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{+}(\bar{x}) \right\} \right].$$

Note que

$$y_i \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^{\alpha} \prec [0, 0] \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{+}(\bar{x}) y_i < 0 \\ \left(\frac{\partial \bar{f}_{\alpha}}{\partial x_i}\right)_{+}(\bar{x}) y_i < 0 \end{cases}, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Sabemos que

$$\left(\frac{\partial \underline{f}_\alpha}{\partial x_i} \right)_+ (\bar{x}) y_i = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\underline{f}_\alpha(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + y_i h, \dots, \bar{x}_n^-) - \underline{f}_\alpha(\bar{x})}{h} < 0.$$

Así, por la definición de límite existe $\underline{\delta}_i^+ > 0$, tal que para toda h con $0 < h < \underline{\delta}_i^+$

$$\underline{f}_\alpha(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + y_i h, \dots, \bar{x}_n) - \underline{f}_\alpha(\bar{x}) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Análogamente, existe $\bar{\delta}_i^+ > 0$ tal que para toda h , con $0 < h < \bar{\delta}_i^+$,

$$\bar{f}_\alpha(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + y_i h, \dots, \bar{x}_n) - \bar{f}_\alpha(\bar{x}) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Por lo tanto, si $\delta = \min \left\{ \underline{\delta}_i, \bar{\delta}_i, \underline{\delta}_i^+, \bar{\delta}_i^+, \delta' : i = 1, \dots, n \right\}$, $h \in (0, \delta)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$, tenemos que

$$\underline{f}_\alpha(\bar{x} + y h) - \underline{f}_\alpha(\bar{x}) < 0 \quad \text{y} \quad \bar{f}_\alpha(\bar{x} + y h) - \bar{f}_\alpha(\bar{x}) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Así, existe $x = \bar{x} + y h \in N_{\delta'}(\bar{x}) \cap S$ tal que $\tilde{f}(x) \prec \tilde{f}(\bar{x})$, lo que contradice que $\bar{x}$ es un mínimo local débil.

■

El siguiente resultado es equivalente al Teorema 3.2.1 y ofrece ventajas desde el punto de vista computacional, pues solo involucra el soporte.

Teorema 3.2.2. Sea $\tilde{f}$ una función difusa en S . Si $\bar{x}$ es un mínimo estricto (local) para $\tilde{f}$ y $\tilde{f}$ es gH-diferenciable en $\bar{x}$, entonces el siguiente sistema de desigualdades lineales no tiene solución para algún $y \in \mathbb{R}^n$

$$y_i \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 \prec [0, 0]. \quad (3.5)$$

Demostración. Se usará un argumento por contradicción. Supongamos que existe solución, entonces para cada $i = 1, \dots, n$ existe y_i tal que $y_i \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 \prec [0, 0]$. Como $\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^\alpha \subseteq \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, entonces $y_i \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^\alpha \prec [0, 0]$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Por la Definición 1.6.4,

$$y_i \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right) \prec \tilde{0} \quad i = 1, \dots, n.$$

Por el teorema anterior, esto es una contradicción. ■

Para continuar, recordemos lo que nos dice el Teorema de Gordan.

Teorema 3.2.3 (Teorema de Gordan). ^[SSS] Si $A \in M_{n \times m}$, solo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

- 1) $y^T A < 0$ para algún $y \in \mathbb{R}^m$.
- 2) $Ax = 0; x > 0$.

Teorema 3.2.4. Sea $\tilde{f}$ una función difusa definida en S , si $\bar{x}$ es un mínimo débil (local) para $\tilde{f}$ y $\tilde{f}$ es gH-diferenciable en $\bar{x}$. Entonces $\bar{x}$ es un punto estacionario para $\tilde{f}$.

Demostración. Como $\bar{x}$ es un mínimo débil (local) para $\tilde{f}$, el sistema (3.5) no tiene solución; por lo tanto, el siguiente sistema de desigualdades lineales no tiene solución

$$\left. \begin{array}{l} y_1 A_1 < 0 \\ \vdots \\ y_n A_n < 0 \end{array} \right\}, \quad (3.6)$$

^{SSS} M. R. GALÁN. "The Gordan theorem and its implications for minimax theory". En: *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 17 (2016).

donde $A_i \in M_{1 \times 2}$ tal que $A_i = \left(\min \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0, \max \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 \right)$. Aplicando el Teorema de Gordan 3.2.3, no se cumple 1) y por lo tanto para cada $i = 1, \dots, n$, existe $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}) \in \mathbb{R}^2$, tal que $A_i \lambda_i = 0$, esto es,

$$\lambda_{i1} \min \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 + \lambda_{i2} \max \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 = 0.$$

Así, para $i = 1 \dots, n$, por la observación 1.6.3.

$$\lambda_i \times \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 = 0,$$

es decir, $\bar{x}$ es un punto estacionario para $\tilde{f}$. ■

Observación 3.2.1. 1) El sistema de ecuaciones $\lambda_i \times \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 = 0$, $i = 1, \dots, n$ es equivalente a decir que $0^n \in [\tilde{\nabla} \tilde{f}(\bar{x})]^0$. Así, si $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, si $\tilde{f}$ es una función real, $[\tilde{\nabla} \tilde{f}(\bar{x})]^0 = [\nabla \tilde{f}(\bar{x}), \nabla \tilde{f}(\bar{x})]$ y por lo tanto, la Definición 3.2.1 coincide con la definición clásica de punto estacionario para funciones reales.

2) En el caso clásico, si $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, si $\bar{x}$ es un punto de mínimo local de f en S , entonces para toda dirección factible d de $\bar{x}$, se tiene que $d \nabla f(\bar{x}) \geq 0$; es decir, un punto $\bar{x} \in S$ es un punto de mínimo local si no existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$d \nabla f(\bar{x}) < 0.$$

Eso significa que el conjunto de direcciones decrecientes no existe. Esto no coincide exactamente con el sistema (3.4). De hecho si el sistema $\nabla f(\bar{x})d < 0$, no tiene solución, entonces (3.4) no tiene solución, pero el recíproco no es verdadero. Esto implica que la teoría de optimización difusa incluye estrictamente la teoría de optimización clásica.

3) Para el caso clásico, la condición estacionaria (3.3) se mantiene como

$$\begin{aligned}\lambda_{i1} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) + \lambda_{i2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) &= 0; \\ (\lambda_{i1} + \lambda_{i2}) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) &= 0; \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

que coincide con la condición clásica.

3.3. CONDICIONES NECESARIAS DE OPTIMALIDAD

En la sección anterior mencionamos una definición de punto estacionario basada en la gH-diferenciabilidad de funciones difusas. En base a esto buscaremos una condición necesaria de optimalidad, que más adelante, bajo ciertas nociones de convexidad también será una condición suficiente.

Teorema 3.3.1. Sea $\bar{x}$ una solución local débil para (3.6). Supongamos que $\tilde{f}$ es una función gH-diferenciable en $\bar{x}$, $\bar{g}_j(0, \cdot)$, $j \in I(\bar{x})$ son funciones diferenciables en $\bar{x}$ donde $I(\bar{x}) = \{j = 1, \dots, m : \bar{g}_j(0, \bar{x}) = 0\}$ y $\bar{g}_j(0, \cdot)$, $j \notin I(\bar{x})$ son continuas en $\bar{x}$. Entonces el siguiente sistema no tiene solución $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}y \tilde{\nabla} \tilde{f}(\bar{x}) &\prec (\bar{0})^n, \\ y^T \nabla \bar{g}_j(0, \bar{x}) &\leq 0, \quad j \in I(\bar{x}).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Demostración. La primera parte se tiene por (3.4).

Por otro lado, dado que las restricciones activas son funciones diferenciables de valor real, para cada $j \in I(\bar{x})$,

$$\begin{aligned}y^T \nabla \bar{g}_j(0, \bar{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{g}_j(0, \bar{x} + hy) - \bar{g}_j(0, \bar{x})}{h} \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \sigma_j > 0 : |h| < \sigma_j \quad \bar{g}_j(0, \bar{x} + hy) &\leq 0\end{aligned}$$

Recordemos que $\delta, \underline{\delta}_i, \bar{\delta}_i, \delta_i^+, \bar{\delta}_i^+, \delta'$, son tomados de la misma forma que en la demostración del Teorema (3.2.1).

Si tomamos $\epsilon = \min \left\{ \delta, \underline{\delta}_i, \overline{\delta}_i, \underline{\delta}_i^+, \overline{\delta}_i^+, \delta', i = 1, \dots, n, \sigma_j, j = 1, \dots, m \right\}$, $h \in (0, \epsilon)$ y

$y = (y_1, \dots, y_n)$ se sigue que

$$\underline{f}_\alpha(\bar{x} + yh) - \underline{f}(\bar{x}) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1], \text{ y}$$

$$\overline{f}_\alpha(\bar{x} + yh) - \overline{f}(\bar{x}) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1];$$

$$\overline{g}_j(0, \bar{x} + hy) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m, \text{ y}$$

$$\bar{x} + hy \in N_\delta(\bar{x}).$$

Esto contradice que $\bar{x}$ es una solución local débil para (3.6).

■

A continuación, presentamos las condiciones de Fritz-John y Karush-Kuhn-Tucker, definidos en el contexto difuso.

Definición 3.3.1. Sea $\tilde{f}$ una función difusa gH-diferenciable en S y $\overline{g}_j(0, \cdot)$ funciones reales diferenciables en S . Un punto $\bar{x} \in X$ se dice que es una solución de Fritz-John para (3.2) si existe $\lambda_i \in \mathbb{R}^2$ con $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ y un vector $\omega \in \mathbb{R}^m$, con $\omega_j > 0$, no todos iguales a cero, tal que

$$\begin{cases} \lambda_i \times \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 + \omega^T \nabla \overline{g}(0, \bar{x}) = 0; \\ \omega^T \overline{g}(0, \bar{x}) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Si $\lambda_i \geq 0$, para todo i , se dice que $\bar{x}$ es una solución de Karush-Kuhn-Tucker.

Observación 3.3.1. Como $\omega \geq 0$ y $\overline{g}(0, \bar{x}) \leq 0$, la condición $\omega^T \overline{g}(0, \bar{x}) = 0$ implica que $\omega_j = 0$, para todo $j \notin I(\bar{x})$. Luego por la condición (3.8) puede ser reemplazada por

$$\lambda_i \times \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 + \sum_{j \in I(\bar{x})} \omega_j \frac{\partial \overline{g}_j}{\partial x_i}(0, \bar{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

Denotando $\Lambda = (\lambda_i)$ una matriz, $\Lambda \in \mathcal{M}^{n \times 2}$, (3.9) puede ser reescrito como

$$\Lambda \times [\tilde{\nabla} \tilde{f}(\bar{x})]^0 + \sum_{j \in I(\bar{x})} \omega_j \nabla \overline{g}_j(0, \bar{x}) = 0. \quad (3.10)$$

Observación 3.3.2. La condición (3.9) es equivalente a decir que

$$0 \in \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 + \left[\sum_{j \in I(\bar{x})} \omega_j \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial x_i}(0, \bar{x}), \sum_{j \in I(\bar{x})} \omega_j \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial x_i}(0, \bar{x}) \right],$$

por el ítem 1) de la Observación 3.2.1 para todo $i = 1, \dots, n$. Y así,

$$0^n \in [\tilde{\nabla} \tilde{f}(\bar{x})]^0 + \left[\sum_{j \in I(\bar{x})} \omega_j \nabla \bar{g}_j(0, \bar{x}), \sum_{j \in I(\bar{x})} \omega_j \nabla \bar{g}_j(0, \bar{x}) \right],$$

La condición anterior es equivalente a la condición de Karush-Kuhn-Tucker o Fritz-John (depende de los multiplicadores de la función objetivo) para el problema clásico de programación matemática con restricciones de desigualdad. El siguiente ejemplo presenta las condiciones de optimalidad (condiciones de Karush-Kuhn-Tucker) para un problema de optimización no difuso. Después de eso, se mostrará un correspondiente problema de optimización difusa, en el que varios de los coeficientes son de tipo difuso. Para este problema de optimización difusa, se aplican las condiciones de optimalidad propuestas en el trabajo, y se comparan los dos tipos de problemas (un problema no difuso y uno difuso).

Ejemplo 3.3.1. Consideremos el siguiente problema de optimización no difusa:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ \text{sujeto a:} \quad & x_1 + x_2 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Denotando por $g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ y $g_2(x_1, x_2) = -x_1$, tenemos que

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 3) \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las condiciones KKT no difusas son

$$\nabla f(x_1, x_2) + \omega_1 \nabla g_1(x_1, x_2) + \omega_2 \nabla g_2(x_1, x_2) = 0,$$

es decir,

$$\begin{cases} 2(x_1 - 2) + \omega_1 - \omega_2 = 0; \\ 2(x_2 - 3) + \omega_1 = 0; \\ \omega_1(x_1 + x_2) = 0; \\ \omega_2 x_1 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior obtenemos que $(0,0)$ es la única solución KKT con $\omega_1 = 6, \omega_2 = 2$.

Ejemplo 3.3.2. Consideremos el siguiente problema de optimización difusa:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \tilde{1}(x_1 - 2)^2 + \tilde{2}(x_2 - 3)^2 \\ \text{sujeto a} \quad & \tilde{1}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq 0 \\ & -\tilde{1}x_1 \leq 0 \\ & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

donde $\tilde{1}$, $\tilde{2}$ y $-\tilde{1}$ son números difusos definidos en términos de sus α -niveles por $[\tilde{1}]^\alpha = [\alpha, 2 - \alpha]$, $[\tilde{2}]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha]$, $[-\tilde{1}]^\alpha = [-2 + \alpha, -\alpha]$. Aplicando Lema 3.1.1, tenemos que $[\tilde{g}_1(x)]^\alpha = [\alpha, 2 - \alpha](x_1 + x_2)$, entonces

$$\bar{g}_1(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_1 + x_2 \leq 0; \\ 2(x_1 + x_2), & \text{si } x_1 + x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Luego $\bar{g}_1(x, 0) \leq 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq 0$. Así mismo $[\tilde{g}_2(x)]^\alpha = [-2 + \alpha, -\alpha]x_1$, entonces

$$\bar{g}_2(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_1 \geq 0; \\ -2x_1, & \text{si } x_1 \leq 0. \end{cases}$$

Luego $\bar{g}_2(x, 0) \leq 0 \Leftrightarrow -x_1 \leq 0$.

Como $\tilde{f}(x) = \tilde{1}(x_1 - 2)^2 + \tilde{2}(x_2 - 3)^2$, entonces $\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}(\bar{x})\right]^0 = 2[\tilde{1}]^0(x_1 - 2)$ y $\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2}(\bar{x})\right]^0 = 2[\tilde{2}]^0(x_2 - 3)$. De lo anterior $\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}(x)\right]^0 = 2[0, 2](x_1 - 2)$, $\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2}(x)\right]^0 = 2[1, 3](x_2 - 3)$. Así

$$\nabla \bar{g}_1(x, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ y } \nabla \bar{g}_2(x, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por la Observación 3.3.2, las condiciones KKT se verifican si

$$\begin{cases} 0 \in \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x})\right]^0 + \left[\sum_{j \in I(\bar{x})} \omega_j \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial x_i}(0, \bar{x}), \sum_{j \in I(\bar{x})} \omega_j \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial x_i}(0, \bar{x})\right], \\ \omega_i \bar{g}_i(0, \bar{x}) = 0, \end{cases}$$

para todo $i = 1, 2$. De modo que

$$\begin{cases} 0 \in 2[0, 2](x_1 - 2) + [\omega_1 - \omega_2, \omega_1 - \omega_2]; \\ 0 \in 2[1, 3](x_2 - 3) + [\omega_1, \omega_1]; \\ \omega_1(x_1 + x_2) = 0; \\ \omega_2 x_1 = 0. \end{cases}$$

Note que (0,0) es la única solución KKT, pues de no ser así $\omega_2 = 0$, lo que implica que $\omega_1 = 0$ y esto contradice los supuestos de la Definición 3.3.1, con $6 \leq \omega_1 \leq 18, \omega_1 - 8 \leq \omega_2 \leq \omega_1$ y $\omega_2 > 0$, por ejemplo, $\omega_1 = 6$ y $\omega_2 = 2$.

A continuación, demostramos una condición de optimalidad necesaria de tipo Karush-Kuhn-Tucker, en la línea de la optimización clásica, ya que cada mínimo débil para un problema de optimización restringido verifica esta condición.

Teorema 3.3.2. Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, sea $\bar{x} \in X$ una solución local débil para (3.1). Entonces $\bar{x}$ es una solución Fritz-John para (3.1).

Demostración. Si $\bar{x}$ es una solución local débil para (3.1), entonces es una solución local débil para (3.2). Del Teorema 3.3.1, el sistema

$$\begin{cases} A_i y < 0 & i = 1, \dots, n, \\ B y < 0, \end{cases}$$

no tiene solución $y \in \mathbb{R}^n$, donde $A_i \in \mathcal{M}^{2 \times n}$ y $B \in \mathcal{M}^{p \times n}$ donde $p = \text{card}(I(\bar{x}))$, y $B = (\nabla \bar{g}_j(0, \bar{x}))_{j \in I(\bar{x})}$ es tal que

$a_{1i} = \min \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0$, $a_{2i} = \max \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0$, $a_{kj} = 0 \quad j \neq i$. Entonces el sistema

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_i \min \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 \\ y_i \max \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & i = 1, \dots, n \\ y^T \nabla \bar{g}_j(0, \bar{x}) < 0, & j \in I(\bar{x}) \end{cases}$$

no tiene solución en $y \in \mathbb{R}^n$. Aplicando el teorema alternativo de Gordan 3.2.3 existe $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}) \geq 0$ para cada $i = 1, \dots, n$ y $\omega_j \geq 0, j \in I(\bar{x})$ no todos cero, tal que

$$\lambda_{i1} \min \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 + \lambda_{i2} \max \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 + \sum_{j \in I(\bar{x})} \omega_j \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial x_i}(0, \bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Si consideramos que $\omega_j = 0$ para $j \notin I(\bar{x})$, obtenemos las condiciones de Fritz-John

y se completa la prueba. ■

Teorema 3.3.3. Bajo los mismos supuestos del Teorema 3.3.2 y suponiendo que $\{\nabla \bar{g}_j(0, \bar{x}) : j \in I(\bar{x})\}$ son vectores linealmente independientes, si $\bar{x} \in X$ es una solución local débil para (3.1), entonces $\bar{x}$ es una solución Karush-Kuhn-Tucker para (3.1).

Demostración. Para cada $i = 1, \dots, n$, $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ no son simultáneamente cero, porque si lo fueran, (3.11) quedaría expresado como

$$\sum_{j \in I(\bar{x})} \omega_j \nabla \bar{g}_j(0, \bar{x}) = 0,$$

y esto contradice la condición de independencia lineal. ■

Ejemplo 3.3.3. Consideremos el siguiente problema de optimización con función objetivo y restricciones difusas.

$$\begin{aligned} \text{Mín} \quad & \tilde{2} \cdot x^3 \\ \text{Sujeto a} \quad & \widetilde{-1} \cdot x^2 \preceq \tilde{0}, \\ & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde $\tilde{2} = (1, 2, 3)$ y $\widetilde{-1} = (-2, -1, 0)$ son números difusos triangulares. En este caso sus conjuntos de α -niveles son dados por

$$\begin{aligned} \widetilde{-1} [\tilde{2}]^\alpha &= [1 + \alpha, 3 - \alpha], \text{ y} \\ [\widetilde{-1}]^\alpha &= [\alpha - 2, -\alpha] \end{aligned}$$

Si $\tilde{g}(x) = \widetilde{-1} \cdot x^2$, por el Lema 3.1.1, se tiene que $\bar{g}(\alpha, x) = -\alpha x^2$. Por otra parte, $\tilde{f}(x) = \tilde{2} \cdot x^3$ es gH -diferenciable en X y

$$[\tilde{\nabla} \tilde{f}(x)]^\alpha = [3(1 + \alpha)x^2, 3(3 - \alpha)x^2].$$

Ahora, $\bar{x} = 0$ es una solución Karush-Kuhn-Tucker, pero no es un mínimo débil,

porque $\tilde{f}(-1) \prec \tilde{f}(0)$.

El ejemplo anterior sugiere la importancia de establecer condiciones de suficiencia para la existencia del óptimo local.

3.4. CONDICIONES SUFICIENTES DE OPTIMALIDAD

En la sección anterior, mostramos que todo punto de mínimo es un punto estacionario difuso. Para asegurar la recíproca se requiere introducir nociones generalizadas de convexidad para funciones difusas, dado que la simple noción de convexidad difusa no es la más adecuada puesto que es una noción muy restrictiva. Por ejemplo, la función $F(x) = [-|x|, |x|]$ no es convexa. En efecto, se entiende que una función difusa $F(x)$ es convexa si, y sólo si, para cada $\alpha \in [0, 1]$, $\underline{f}_\alpha, \bar{f}_\alpha$ son funciones convexas en $\mathbb{R}$. Por esta razón es importante considerar otros tipos de convexidad difusa generalizada.

Definición 3.4.1. El problema (3.1) es llamado KT-pseudoinvexo en S si para todo $x, y \in S$ con $\tilde{f}(x) \prec \tilde{f}(y)$, existe $\eta(x, y) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{cases} \eta(x, y) \tilde{\nabla} \tilde{f}(y) \prec \tilde{0}^n, \\ \eta(x, y)^T \nabla \bar{g}_j(0, y) \leq 0, \quad j \in I(y). \end{cases}$$

Teorema 3.4.1. Supongamos que $\tilde{f}$ es una función difusa gH -diferenciable en $\bar{x}$; $\bar{g}_j(0, \cdot), j \in I(\bar{x})$ son funciones diferenciables en $\bar{x}$ donde $I(\bar{x}) = \{j = 1, \dots, m : \bar{g}_j(0, \bar{x}) = 0\}$ y $\bar{g}_j(0, \cdot), j \notin I(\bar{x})$ son continuas en $\bar{x}$. Si $\bar{x} \in X$ es una solución Karush-Kuhn-Tucker para un problema KT-pseudoinvexo, entonces $\bar{x}$ es un mínimo débil para el problema.

Demostración. Supongamos que $\bar{x} \in X$ es una solución Karush-Kuhn-Tucker para (3.1) y $\bar{x}$ no es un mínimo débil para (3.1). Entonces existe $x \in X$ tal que $\tilde{f}(x) \prec \tilde{f}(\bar{x})$.

Teniendo en cuenta la Definición 3.4.1, Observación 1.6.2 y Observación 1.6.3

$$\begin{cases} \eta_i(x, \bar{x}) \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 < [0, 0], & i = 1, \dots, n, \\ \eta(x_1, x_2)^T \nabla \bar{g}_j(0, x_2) \leq 0, & j \in I(x_2) \end{cases}$$

Si consideramos A_i y B como en la prueba del Teorema 3.3.3, entonces el sistema

$$\begin{cases} A_i y < 0 & i = 1, \dots, n, \\ B y \leq 0. \end{cases}$$

tiene solución en $y \in \mathbb{R}^n$ por el teorema alternativo de Gordan, $\bar{x}$ no puede ser una solución de Karush-Kuhn-Tucker. ■

Ejemplo 3.4.1. Consideremos la función difusa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{F}_C$ definida por

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \tilde{1} \cdot x_1^2 + \tilde{0} \cdot x_2^2,$$

donde $\tilde{1} = (1, 1, 1) = \chi_{\{1\}}$ y $\tilde{0} = (0, 0, 1)$ son números triangulares difusos. En este caso, los α -niveles están dados por

$$\left[\tilde{f}(x_1, x_2) \right]^\alpha = \tilde{f}_\alpha(x_1, x_2) = [x_1^2, x_1^2 + (1 - \alpha)x_2^2].$$

Entonces

$$\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right]^\alpha = \frac{\partial \tilde{f}_\alpha}{\partial x_1}(x_1, x_2) = [2x_1, 2x_1], \quad \text{para cada } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

y

$$\left[\frac{\partial \tilde{f}_\alpha}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right]^\alpha = \begin{cases} [0, 2(1 - \alpha)x_2], & \text{si } x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0; \\ [2(1 - \alpha)x_2, 0], & \text{si } x_1 \in \mathbb{R}, x_2 < 0, \end{cases}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. La Definición 3.4.1 se verifica en $X = \mathbb{R}^2$. Si $y_1 = 0$, entonces

no puede ser que $\tilde{f}(x) \prec \tilde{f}(y)$, por lo que se verifica la definición. Cuando $y_1 \neq 0$, tomando $\eta(x, y) = (-y_1, 0)$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, tenemos

$$\eta(x, y) \tilde{\nabla} \tilde{f}(y) \prec \tilde{0} \Rightarrow [-2y_1^2, -2y_1^2] \prec [0, 0].$$

Por lo tanto, todos los puntos estacionarios son soluciones mínimas débiles. Pero si el Ejemplo 3.3.3, fuera KT-pseudoinvex, debería haber un número η tal que

$$\eta[\tilde{f}(0)]^\alpha = \eta [3x^2, 9x^2] \prec [0, 0],$$

y no es posible.

4. APLICACIONES

Las aplicaciones de la optimización difusa surgen de manera natural en problemas en donde, como ya se ha dicho, la naturaleza difusa de la función objetivo o sus restricciones es inherente al problema. Esto ocurre cuando lidiamos con problemas prácticos de encontrar la "mejor" decisión dentro de un conjunto de alternativas factibles con respecto a uno o varios criterios de decisión. Con frecuencia estamos sujetos a tener en cuenta incertidumbre en los datos, producto de errores de información en mediciones, ambigüedad en la información, inhabilidad para obtener información completa, vaguedad relativa al uso de términos, etc, para lo cual la teoría de conjuntos difusos cumple un papel de destaque.

La naturaleza difusa de un problema de optimización puede obedecer al conjunto de posibles acciones, a los objetivos que se desean alcanzar y a las restricciones que se deben considerar. A manera de ilustración de este tipo de componentes podemos pensar, por ejemplo, en la necesidad de decidir sobre uno de varios trabajos posibles $t_1, t_2, \dots, t_m$ para escoger; podemos pensar en un objetivo que sea un buen trabajo con un buen salario, y finalmente, considerar un conjunto de restricciones como siendo, por ejemplo, el lugar de trabajo o el tipo de trabajo a desarrollar, los horarios laborales, entre otros. Estas y otras componentes difusas definen un problema de optimización difusa en problemas prácticos.

Aunque el objetivo de este trabajo monográfico no es el de presentar un desarrollo pormenorizado de alguna aplicación real, sí queremos delinear algunos posibles escenarios de aplicaciones que pueden ser extrapolados a problemas reales de optimización difusa, y ese es el objetivo de este capítulo.

4.1. PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA

En la programación matemática clásica, por el sin número de aplicaciones, la programación lineal tiene un capítulo especial, lo que de manera natural nos lleva a pensar que la versión difusa de la programación lineal también merece especial atención desde el punto de vista de las aplicaciones. Recordemos que un problema de programación lineal se define como

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
 &&& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\
 &&& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\
 &\text{sujeto a:} && \vdots \\
 &&& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\
 &&& x_1, \cdots, x_n \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

O en forma compacta,

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && cx \\
 &\text{sujeto a:} && Ax \leq b, \\
 &&& x \leq 0,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\text{donde } c = (c_1, \cdots, c_n), A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, b = (b_1, b_2, \cdots, b_m), x = (x_1, \cdots, x_n).$$

Pues bien, son muchas las situaciones prácticas en las cuales la función objetivo o las restricciones son de naturaleza difusa, lo que lleva a plantear la versión difusa del problema de programación lineal.

Explícitamente, un problema de programación lineal difusa es dado por

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && \widehat{c}_1x_1 + \cdots + \widehat{c}_nx_n \\
&&& \widehat{a}_{11}x_1 + \widehat{a}_{12}x_2 + \cdots + \widehat{a}_{1n}x_n \preceq \widehat{b}_1, \\
&&& \widehat{a}_{21}x_1 + \widehat{a}_{22}x_2 + \cdots + \widehat{a}_{2n}x_n \preceq \widehat{b}_2, \\
&\text{sujeto a:} && \vdots \\
&&& \widehat{a}_{m1}x_1 + \widehat{a}_{m2}x_2 + \cdots + \widehat{a}_{mn}x_n \preceq \widehat{b}_m, \\
&&& 0 \preceq x_1, \cdots, x_n,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

siendo $\widehat{c}_1, \cdots, \widehat{c}_n, \widehat{a}_{ij}, \widehat{b}_j$ números difusos y x_j variables cuyas entradas son números reales. Naturalmente, la relación $\preceq$, representa algún tipo de orden de números difusos como fue establecido en el Capítulo 1.

Del problema general de optimización difusa (4.3) se pueden desprender varios problemas particulares de optimización difusa. Por ejemplo, el problema de programación lineal difusa para las cuales la función objetivo es clásica y las restricciones son tales que la naturaleza estrictamente difusa son los datos $\widehat{b}_j$, es decir,

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
&&& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \preceq \widehat{b}_1, \\
&&& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \preceq \widehat{b}_2, \\
&\text{sujeto a:} && \vdots \\
&&& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \preceq \widehat{b}_m, \\
&&& x_1, \cdots, x_n \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

También, podemos considerar el problema de programación matemática difusa de-

rivados de (4.3) en los que la parte difusa son los coeficientes $\hat{a}_{ij}$ y $\hat{b}_j$, es decir,

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
&&& \widehat{a}_{11}x_1 + \widehat{a}_{12}x_2 + \cdots + \widehat{a}_{1n}x_n \preceq \widehat{b}_1, \\
&&& \widehat{a}_{21}x_1 + \widehat{a}_{22}x_2 + \cdots + \widehat{a}_{2n}x_n \preceq \widehat{b}_2, \\
&\text{sujeto a:} && \vdots \\
&&& \widehat{a}_{m1}x_1 + \widehat{a}_{m2}x_2 + \cdots + \widehat{a}_{mn}x_n \preceq \widehat{b}_m, \\
&&& x_1, \cdots, x_n \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Finalmente, obtenemos el problema (4.3), el cual se da cuando los coeficientes $\hat{c}_j$ son difusos y las restricciones son como en (4.4) y (4.5).

4.2. PROGRAMACIÓN LINEAL CON RESTRICCIONES DIFUSAS

Presentamos a continuación un problema que ilustra un problema de optimización lineal difusa de tipo (4.4), y que puede ser generalizado y contextualizado para resolver otros problemas prácticos de manufactura.

Problema 1:

Una empresa produce dos productos P_1 y P_2 . El producto P_1 tiene un precio por unidad de 400 pesos y el producto P_2 tiene un precio por unidad de 300 pesos. La empresa registra que la elaboración de cada unidad del producto P_1 requiere el doble de tiempo del producto P_2 . La empresa tiene un total disponible de 500 horas laborales por día, y puede posiblemente extender esta capacidad hasta 600 horas por día debido a la demanda. El suministro de material alcanza para cerca de 400 unidades de productos P_1 y P_2 por día. Nos planteamos el problema de determinar la cantidad de unidades de productos P_1 y P_2 que deben ser fabricados por día de manera tal que se maximicen las ganancias de la empresa.

Como se observa, el Problema 1 puede ser visto como un problema de programación lineal difusa en donde hay una componente difusa en las restricciones, es decir, en el material requerido para la fabricación y en el total de horas laborales. Si denotamos x_1 y x_2 las unidades de producto P_1 y P_2 respectivamente, entonces se trata de resolver el siguiente problema de programación lineal difusa:

$$\begin{aligned}
&\text{Máximizar} && 400x_1 + 300x_2 \\
&\text{sujeto a :} && x_1 + x_2 \preceq \widetilde{400}, \\
&&& 2x_1 + x_2 \preceq \widetilde{500}, \\
&&& x_1, x_2 \geq 0,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

en donde $\widetilde{400}$, $\widetilde{500}$ son números difusos triangulares definidos, por ejemplo, por $\widetilde{500} = (500, 500, 530)$ y $\widetilde{400} = (380, 400, 420)$.

Resaltemos que $\tilde{f}(x) = 400x_1 + 300x_2$, $\tilde{g}_1 = x_1 + x_2 - \widetilde{400}$, $\tilde{g}_2 = 2x_1 + x_2 - \widetilde{500}$, donde $[\widetilde{400}] = [300 + 20\alpha, 420 - 20\alpha]$ y $[\widetilde{500}] = [500, 530 - 30\alpha]$. Así $[\tilde{g}_1]^0 = x_1 + x_2 - [380, 420] = [x_1 + x_2 - 420, x_1 + x_2 - 380]$, $[\tilde{g}_2]^0 = 2x_1 + x_2 - [500, 530] = [2x_1 + x_2 - 530, 2x_1 + x_2 - 500]$.

Por lo tanto, el problema (4.6), usando el Lema 3.1.1, es equivalente a

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && -400x_1 - 300x_2 \\
&\text{sujeto a :} && x_1 + x_2 - 380 \leq 0, \\
&&& 2x_1 + x_2 - 500 \leq 0, \\
&&& x_1, x_2 \geq 0,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Apoyados en Wolfram Alpha, encontramos que el mínimo para el problema (4.7) es -126000 y se da en los puntos $x_1 = 120$, $x_2 = 160$. Esto es equivalente a que el máximo para el problema (4.6) es 126000 y se alcanza en los puntos $x_1 = 120$, $x_2 = 160$.

4.3. OTRAS APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA

Veamos ahora un ejemplo especial relativo a un problema de tráfico.

Problema 2:

Considere un sistema de carreteras como una red de tráfico $G = (V, E)$ que consiste de un conjunto de nodos V para los cruces y un conjunto de ejes E que contiene todas las calles que conectan los cruces. Las calles pueden tener diferentes capacidades. Suponga que v unidades de un determinado producto deben transportarse, con costos generales mínimos, desde el origen $s \in V$ hasta el destino $d \in V$ a través de la red de tráfico G . El problema consiste en calcular cantidades óptimas de mercancías transportadas por las calles de la red. Los costos de viaje para atravesar una calle generalmente no se conocen con exactitud, lo que motiva a asumir que todos los costos de viaje tienen valores difusos. Denotemos por x_{kl} la cantidad de unidades transportadas sobre el eje $(k, l) \in E$, que conecta dos vértices k y l . Sea $O_k(I_k)$ el conjunto de todos los ejes viales que salen (entran) del nodo k . Suponga que el flujo x_{kl} en el borde (k, l) está limitado por la capacidad u_{kl} . También se asume una restricción para garantizar que el flujo entrante total es igual al flujo saliente total. Además, el flujo de salida en el origen es igual a v . Entonces se tiene el siguiente problema de optimización difusa:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} \quad \tilde{f}(x) = \sum_{k,l \in V} \tilde{c}_{kl} x_{kl} \\
 &\text{sujeto a :} \quad x_{kl} \leq u_{kl} \quad \forall k, l \in V, \\
 &\quad \sum_{k \in I_l} x_{kl} - \sum_{i \in O_l} x_{li} = 0, \quad \forall l \in V \setminus \{s, d\}, \\
 &\quad \sum_{k \in I_s} x_{ks} - \sum_{i \in O_s} x_{si} = -v, \\
 &\quad x_{kl} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.4. PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN DIFUSA NO LINEAL

Analizaremos un problema de planificación de la producción.

Problema 3:

A la empresa C le gustaría maximizar el beneficio total produciendo dos productos $P1$ y $P2$ utilizando tres materiales diferentes $M1$, $M2$ y $M3$. La compañía sabe que para producir 1 tonelada de producto $P1$ se requieren 2 toneladas de material $M1$, 8 toneladas de material $M2$ y 3 toneladas de material $M3$, mientras que para producir 1 tonelada de producto $P2$ requiere 6 toneladas de material $M1$, 6 toneladas de material $M2$ y 1 tonelada de material $M3$. Las cantidades totales de materiales disponibles se limitan a 27 toneladas, 45 toneladas y 15 toneladas para $M1$, $M2$ y $M3$, respectivamente. También se sabe que el producto $P1$ produce un beneficio al rededor de 1 millón de pesos por tonelada, mientras que $P2$ rinde cerca de 2 millones de pesos. Dadas las limitaciones de los materiales, la empresa está tratando de averiguar cuántas unidades de productos $P1$ y $P2$ debe producirse para maximizar el beneficio total. Denotamos el número de toneladas producidas de los productos $P1$ y $P2$ por x_1 y x_2 respectivamente. Así, este problema de planificación de la producción se puede formular como sigue

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & \tilde{f}(x) = -1x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a : } & 2x_1 + 6x_2 \leq 27, \\ & 8x_1 + 6x_2 \leq 45, \\ & 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

En la práctica, sin embargo, es posible que las contribuciones de utilidad unitaria de los productos $P1$ y $P2$ no son constantes como en la función de utilidad lineal. Ellos dependen de las cantidades de productos $P1$ y $P2$, y son $4 - x_1$, $11 - x_2$ para $P1$ y $P2$, respectivamente. En este contexto, el problema problema con esta nueva hipótesis

queda definido por

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } \tilde{f}(x) = -\tilde{1}(4 - x_1)x_1 - \tilde{2}(11 - x_2)x_2 \\
 &\text{sujeto a : } 2x_1 + 6x_2 \leq 27, \\
 &\quad 8x_1 + 6x_2 \leq 45, \\
 &\quad 3x_1 + x_2 \leq 15, \\
 &\quad x_1, x_2 \geq 0,
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde $\tilde{1}$ y $\tilde{2}$ son números difusos triangulares definidos, por ejemplo, como $\tilde{1} = (0, 1, 1)$ y $\tilde{2} = (1, 2, 2)$ y sus α -niveles están dados por $[\tilde{1}]^\alpha = [\alpha, 1]$, $[\tilde{2}]^\alpha = [1 + \alpha, 2]$. Definamos $g_1 = 2x_1 + 6x_2 - 27$, $g_2 = 8x_1 + 6x_2 - 45$, $g_3 = 3x_1 + x_2 - 15$. Por lo tanto,

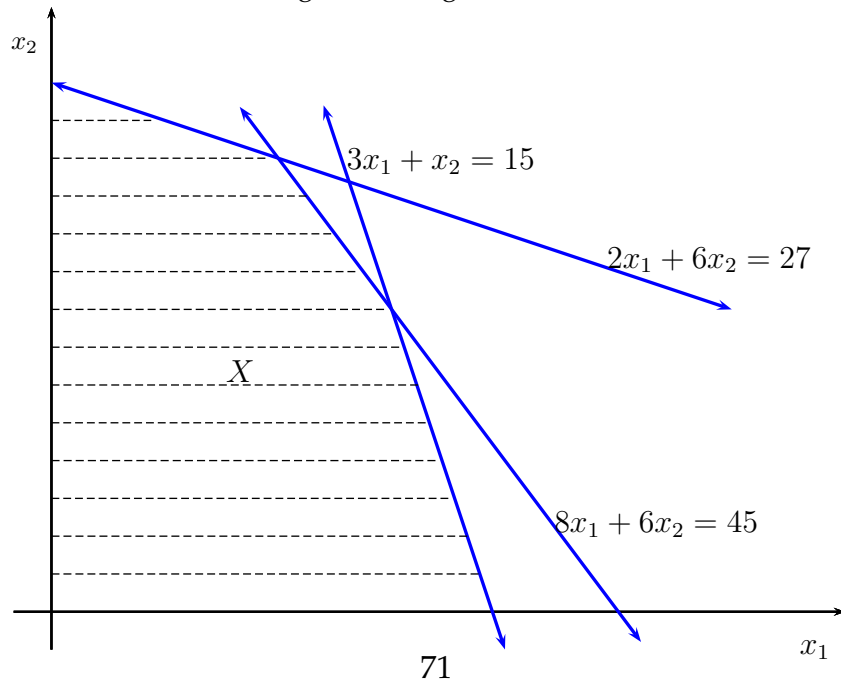
$$\begin{aligned}
 [\tilde{f}(x)]^0 &= -[\tilde{1}]^0(4 - x_1)x_1 - [\tilde{2}]^0(11 - x_2)x_2 \\
 &= -[0, 1](4x_1 - x_1^2) - [1, 1](11x_2 - x_2^2),
 \end{aligned}$$

y

$$\left[\frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x_1} \right]^0 = [-1, 0](4 - 2x_1), \left[\frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x_2} \right]^0 = [-2, -1](11 - 2x_2), \nabla g_1(x) = (2, 6), \nabla g_2(x) = (8, 6), \nabla g_3(x) = (3, 1).$$

El conjunto admisible para el problema (4.10) es representado en la Figura 13

Figura 12. Región factible



No es difícil verificar las condiciones de la Definición 3.4.1, y en consecuencia, el problema (4.10) es un problema KT-pseudoinvexo. Por lo tanto, a raíz de la Observación 3.3.2, las condiciones KKT se verifican si

$$\begin{cases} 0 \in \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right]^0 + \left[\sum_{j \in I(\bar{x})} \omega_j \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial x_i}(0, \bar{x}), \sum_{j \in I(\bar{x})} \omega_j \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial x_i}(0, \bar{x}) \right], \\ \omega_i \bar{g}_i(0, \bar{x}) = 0, \end{cases}$$

para todo $i = 1, 2$. De modo que,

$$\begin{cases} 0 \in [-1, 0] (4 - 2x_1) + [2\omega_1 + 8\omega_2 + 3\omega_3, 2\omega_1 + 8\omega_2 + 3\omega_3], \\ 0 \in [-2, -1] (11 - 2x_2) + [6\omega_1 + 6\omega_2 + \omega_3, 6\omega_1 + 6\omega_2 + \omega_3], \\ \omega_1 (2x_1 + 6x_2 - 27) = 0, \\ \omega_2 (8x_1 + 6x_2 - 45) = 0, \\ \omega_3 (3x_1 + x_2 - 15) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Para verificar las condiciones (4.11) consideremos los siguientes casos:

CASO 1: Si $\omega_1, \omega_2, \omega_3 > 0$.

De las condiciones (4.11) tenemos que $8x_1 + 6x_2 = 45$ y $3x_1 + x_2 = 15$; por lo tanto, $x_1 = \frac{9}{2}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$. Pero como $\omega_1 > 0$, también se debe cumplir que $2x_1 + 6x_2 - 27 = 0$, pero esta ecuación no es verificada por $x_1 = \frac{9}{2}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$. En consecuencia, este caso no es posible.

CASO 2: Si $\omega_1 = 0, \omega_2, \omega_3 > 0$.

En este caso, de las condiciones (4.11) tenemos que $8x_1 + 6x_2 = 45$ y $3x_1 + x_2 = 15$; por lo tanto, $x_1 = \frac{9}{2}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$. En consecuencia,

$$0 \in [-1, 0] (-5) + [8\omega_2 + 3\omega_3, 8\omega_2 + 3\omega_3] \Rightarrow 0 \leq -3\omega_3 - 8\omega_2 \leq 5.$$

Como $\omega_2, \omega_3 > 0$, este caso no es posible.

CASO 3: Si $\omega_2 = 0, \omega_1, \omega_3 > 0$.

De las condiciones (4.11) tenemos que $2x_1 + 6x_2 = 27$ y $3x_1 + x_2 = 15$; por lo tanto, $x_1 = \frac{63}{16}$ y $x_2 = \frac{51}{16}$. En consecuencia,

$$0 \in [-1, 0] \left(-\frac{31}{8} \right) + [2\omega_1 + 3\omega_3, 2\omega_1 + 3\omega_3] \Rightarrow 0 \leq -3\omega_3 - 2\omega_1 \leq \frac{31}{8}.$$

Como $\omega_1, \omega_3 > 0$, este caso no es posible.

CASO 4: Si $\omega_3 = 0, \omega_1, \omega_2 > 0$.

De las condiciones (4.11) tenemos que $2x_1 + 6x_2 = 27$ y $8x_1 + 6x_2 = 45$; por lo tanto, $x_1 = \frac{18}{7}$ y $x_2 = \frac{45}{42}$. En consecuencia,

$$0 \in [-1, 0] \left(-\frac{8}{7} \right) + [2\omega_1 + 8\omega_2, 2\omega_1 + 8\omega_2] \Rightarrow 0 \leq -8\omega_2 - 2\omega_1 \leq \frac{8}{7}.$$

Como $\omega_1, \omega_2 > 0$, este caso tampoco es posible.

CASO 5: Si $\omega_1, \omega_2 = 0$ y $\omega_3 > 0$.

De las condiciones (4.11) tenemos que $3x_1 + x_2 = 15$ y

$$0 \in [-1, 0] (4 - 2x_1) + [3\omega_3, 3\omega_3].$$

Por lo tanto, si $4 - 2x_1 \geq 0$, entonces

$$0 \in [2x_1 - 4, 0] + [3\omega_3, 3\omega_3] \Rightarrow 0 \leq -2x_1 + 4 - 3\omega_3 \leq -2x_1 + 4,$$

y si $4 - 2x_1 \leq 0$, entonces

$$0 \in [0, 2x_1 - 4] + [3\omega_3, 3\omega_3] \Rightarrow 3\omega_3 \leq 0 \leq 3\omega_3 + 2x_1 - 4.$$

Como $\omega_3 > 0$, no puede pasar que $4 - 2x_1 \leq 0$. Por otro lado,

$$0 \in [-2, -1] (11 - 2x_2) + [\omega_3, \omega_3];$$

por lo tanto, si $11 - 2x_2 \geq 0$, entonces

$$0 \in [4x_2 - 22 + \omega_3, 2x_2 - 11 + \omega_3] \Rightarrow -2(11 - 2x_2) \leq -w_3 \leq 2x_2 - 11,$$

y si $11 - 2x_2 \leq 0$, entonces

$$0 \in [2x_2 - 11 + \omega_3, 4x_2 - 22 + \omega_3] \Rightarrow 0 \leq 2x_2 - 11 \leq -w_3 \leq 4x_2 - 22.$$

Como $\omega_3 > 0$, este caso no se puede dar. Así, de estas últimas condiciones tenemos que $x_1 \leq 2$ y $x_2 \leq \frac{11}{2}$. Pero como, $3x_1 + x_2 \leq \frac{23}{2} < 15$, y teniendo en cuenta que debe cumplirse que $3x_1 + x_2 = 15$, se concluye que el CASO 5 tampoco es posible.

CASO 6: Si $\omega_1, \omega_3 = 0$ y $\omega_2 > 0$.

De las condiciones (4.11) tenemos que $8x_1 + 6x_2 = 45$ y

$$0 \in [-1, 0] (4 - 2x_1) + [8\omega_2, 8\omega_2].$$

Por lo tanto, si $4 - 2x_1 \geq 0$, entonces

$$0 \in [2x_1 - 4, 0] + [8\omega_2, 8\omega_2] \Rightarrow 2x_1 - 4 \leq -8\omega_2 \leq 0.$$

Si $4 - 2x_1 \leq 0$, entonces

$$0 \in [0, 2x_1 - 4] + [8\omega_2, 8\omega_2] \Rightarrow 8\omega_2 \leq 0 \leq 2x_1 - 4 + 8\omega_2.$$

Como $\omega_2 > 0$, no puede pasar que $4 - 2x_1 \leq 0$. Por otro lado,

$$0 \in [-2, -1] (11 - 2x_2) + [6\omega_2, 6\omega_2] .$$

Por lo tanto, si $11 - 2x_2 \geq 0$, entonces

$$0 \in [4x_2 - 22 + 6\omega_2, 2x_2 - 11 + 6\omega_2] \Rightarrow 4x_2 - 22 \leq -6\omega_2 \leq 2x_2 - 11.$$

Si $11 - 2x_2 \leq 0$, entonces

$$0 \in [2x_2 - 11 + 6\omega_2, 4x_2 - 22 + 6\omega_2] \Rightarrow 0 \leq 2x_2 - 11 \leq -6\omega_2 \leq 4x_2 - 22.$$

Como $\omega_2 > 0$, este caso no se puede dar. Así, de estas condiciones tenemos que $x_1 \leq 2$ y $x_2 \leq \frac{11}{2}$. Con esta información, concluimos que el conjunto solución es dado por

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 6x_2 + 8x_1 = 45, 3/2 \leq x_1 \leq 2\}.$$

CASO 7: Si $\omega_2, \omega_3 = 0$ y $\omega_1 > 0$. De las condiciones (4.11) tenemos que $2x_1 + 6x_2 = 27$ y

$$0 \in [-1, 0] (4 - 2x_1) + [2\omega_1, 2\omega_1] .$$

Por lo tanto, si $4 - 2x_1 \geq 0$, entonces

$$0 \in [2x_1 - 4, 0] + [2\omega_1, 2\omega_1] \Rightarrow 2x_1 - 4 \leq -2\omega_1 \leq 0.$$

Si $4 - 2x_1 \leq 0$, entonces

$$0 \in [0, 2x_1 - 4] + [2\omega_1, 2\omega_1] \Rightarrow 2\omega_1 \leq 0 \leq 2x_1 - 4 + 2\omega_1.$$

Como $\omega_1 > 0$, no puede pasar que $4 - 2x_1 \leq 0$. Por otro lado,

$$0 \in [-2, -1] (11 - 2x_2) + [6\omega_1, 6\omega_1] .$$

Por lo tanto, si $11 - 2x_2 \geq 0$, entonces

$$0 \in [4x_2 - 22 + 6\omega_1, 2x_2 - 11 + 6\omega_1] \Rightarrow 4x_2 - 22 \leq -6\omega_2 \leq 2x_2 - 11.$$

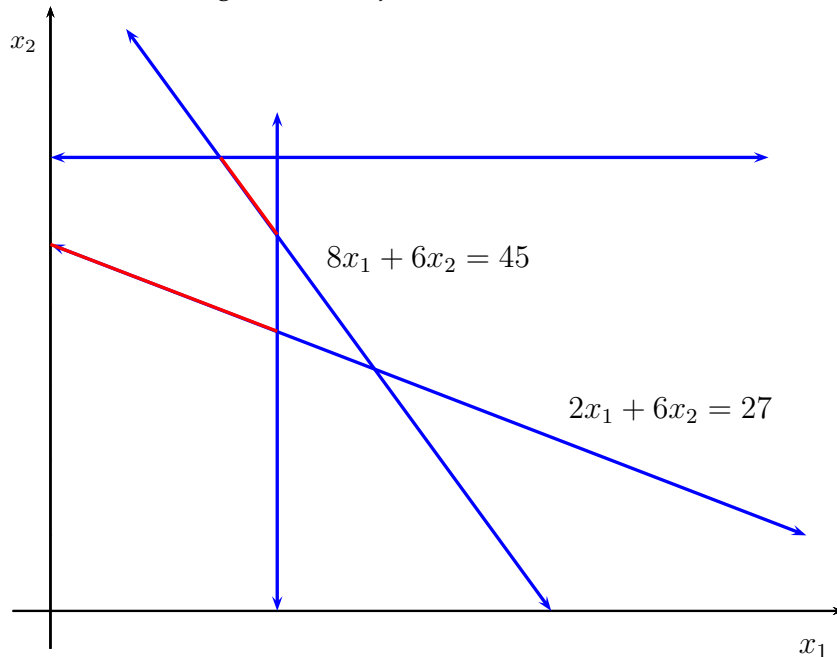
Si $11 - 2x_2 \leq 0$, entonces

$$0 \in [2x_2 - 11 + 6\omega_1, 4x_2 - 22 + 6\omega_1] \Rightarrow 0 \leq 2x_2 - 11 \leq -6\omega_2 \leq 4x_2 - 22.$$

Como $\omega_1 > 0$, este caso no se puede dar. Así, de estas condiciones tenemos que $x_1 \leq 2$ y $x_2 \leq \frac{11}{2}$. Con esta información, concluimos que el conjunto solución es dado por

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + 6x_2 = 27, 0 \leq x_1 \leq 2\}.$$

Figura 13. Conjunto solución de (4.10)



5. CONCLUSIONES

En este trabajo se revisaron los fundamentos de la teoría de la optimización difusa, analizando condiciones de optimalidad necesarias y suficientes para problemas de optimización difusa con restricciones. Para llevar a cabo este análisis, en primer lugar se disertó sobre el concepto de diferenciabilidad difusa en el sentido de la derivada generalizada de Hukuhara, y con él, el concepto de gradiente y punto estacionario. Finalmente, se plantearon algunos problemas de optimización de naturaleza difusa que pueden ser prototipos de problemas que pueden ser extendidos a situaciones reales y más generales.

BIBLIOGRAFÍA

- ARENAS DÍAZ, G. y E. J. VILLAMIZAR ROA. *Introducción a las ecuaciones diferenciales difusas*. Ediciones UIS, 2018 (vid. págs. 12, 13, 17, 20, 23, 26, 30, 31, 33, 36, 38).
- BEDE, B. y S. G. GAL. “Almost periodic fuzzy-number-valued functions”. En: *Fuzzy Sets and Systems* 147.3 (2004) (vid. pág. 37).
- “Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations.” En: *Fuzzy sets and systems* 151.3 (2005) (vid. pág. 37).
- BEDE, B. y L. STEFANINI. “Generalized differentiability of fuzzy-valued functions.” En: *Fuzzy Sets Syst.* 230.1 (2013) (vid. págs. 37, 39).
- CHANG, S. S. y L. A. ZADEH. “On fuzzy mapping and control”. En: *Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers by Lotfi A Zadeh*. World Scientific, 1996 (vid. pág. 36).
- GALÁN, M. R. “The Gordan theorem and its implications for minimax theory”. En: *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 17 (2016) (vid. pág. 52).
- OSUNA GÓMEZ, R. *et al.* “Necessary and sufficient conditions for fuzzy optimality problems”. En: *Fuzzy Sets and Systems* 296 (2016) (vid. pág. 12).
- “Optimality conditions for fuzzy constrained programming problems”. En: *Fuzzy Sets and Systems* 362 (2019) (vid. págs. 12, 32, 40, 41, 44, 46).

- PANIGRAHI, M., G. PANDA y S NANDA. "Convex fuzzy mapping with differentiability and its application in fuzzy optimization". En: *European Journal of Operational Research* 185.1 (2008) (vid. pág. 47).
- PURI, M. L. y D. A. RALESCU. "Differentials of fuzzy functions". En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 91.2 (1983) (vid. pág. 37).
- STEFANINI, L. "A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic". En: *Fuzzy sets and systems* 161.11 (2010) (vid. pág. 35).
- "A generalization of hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic". En: *Series on Advances in Soft Computing* 48 (2008) (vid. pág. 31).
- STEFANINI, L. y B. BEDE. "Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations". En: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 71.3-4 (2009) (vid. pág. 37).
- WU, H. C. "The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for the optimization problem with fuzzy-valued objective function". En: *Mathematical Methods of Operations Research* 66.2 (2007) (vid. pág. 47).
- "The optimality conditions for optimization problems with convex constraints and multiple fuzzy-valued objective functions". En: *Fuzzy Optimization and Decision Making* 8.3 (2009) (vid. pág. 47).