

# Inflación y energía oscura en la teoría $SU(2)$ generalizada de Proca

**Juan Camilo Garnica Aguirre**

Trabajo de grado para optar al título de Físico

Director

Yeinzon Rodríguez García

Doctorado en Física

Codirector

Andrés Américo Navarro León

Maestría en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2019

A mis padres

Hay que poner un gran signo de interrogación sobre el valor de lo fácil (...), sobre la predilección por todo aquello que no exige de nosotros ninguna superación, ni nos pone en cuestión, ni nos obliga a desplegar nuestras posibilidades.

Estanislao Zuleta, *Elogio de la dificultad*

... for life to be large and full, it must contain the care of the past and of the future in every passing moment of the present. Our daily work must be done to the glory of the dead, and for the good of those who come after.

Joseph Conrad, *Nostromo*

## Agradecimientos

A mis padres Germán Garnica y Marilú Aguirre, y a mi hermano Edwin John Fredy por haber incentivado mi pasión por la Física.

A mis familiares y amigos por haberme acompañado mientras descubría mi interés por la investigación, por hacer de mí quien soy hoy en día y por haberme dado ánimo cuando más lo necesitaba.

A Hernán Asorey, Luis Nuñez, Fabio Lora y Yeinzon Rodríguez por su notable formalidad y dedicación en la enseñanza de la física, las cuales me sirvieron de inspiración y marcaron un referente académico claro a lo largo de mi carrera.

A Cyril Pitrou, Macarena Lagos, Everth Vargas y a mi equipo de trabajo: Gabriel Gómez, Andrés Navarro y Yeinzon Rodríguez, por sus valiosos comentarios, sugerencias y discusiones que fueron clave para el desarrollo de esta investigación.

A los creadores de contenido libre que dieron origen a paquetes como GRTensor (de Maple) y xAct (de Mathematica), facilitando enormemente la investigación y la creación de nuevo conocimiento para las nuevas generaciones de investigadores.

## Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>17</b>
<b>1 Fundamentos Teóricos</b>	<b>22</b>
1.1 Inestabilidad de Ostrogradski	22
1.2 Construcción de Galileones escalares	24
1.3 Inflación y energía oscura con campos vectoriales	26
1.3.1 Fundamentos de cosmología	27
1.3.2 Inflación y los problemas de la cosmología estándar	30
1.3.3 Inflación de tipo rodadura lenta	31
1.3.4 Tríada cósmica	32
1.4 Generalización del Lagrangiano de Proca	33
1.4.1 Teoría básica de grupos de Lie	35
1.4.2 Lagrangiano de la teoría SU(2) generalizada de Proca	37
1.5 Discusión: grados de libertad dinámicos de la teoría	39
1.5.1 Dinámica de la métrica espacio-temporal	40
1.5.2 Dinámica de la métrica de gauge	40
1.5.3 Dinámica de la conexión espacio-temporal	40
1.5.4 Dinámica de la conexión de gauge	41
1.6 Fundamentos de sistemas dinámicos	42
1.7 Teoría de perturbaciones cosmológicas y estabilidad	44
1.7.1 Sector tensorial de las perturbaciones	46
1.7.2 Sectores vectorial y escalar de las perturbaciones	48

<b>2</b>	<b>Dinámica de los diferentes Lagrangianos</b>	<b>49</b>
2.1	Modelo para $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1$	50
2.2	Modelo para $\tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2$	57
2.3	Modelo para $\tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$	61
2.4	Propiedades de estabilidad para $\tilde{\chi}_3 \mathcal{L}_{G^2A^2}^{(1)} + \tilde{\chi}_4 \mathcal{L}_{G^2A^2}^{(2)}$	64
2.5	Problemas del modelo para $\tilde{\theta}_1 \mathcal{L}_1^{\text{Curv}}$	66
2.6	Modelo de juguete $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2$	67
2.7	Modelo $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$	70
2.8	Modelo $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}} + \tilde{\chi}_3 \mathcal{L}_{G^2A^2}^{(1)} + \tilde{\chi}_4 \mathcal{L}_{G^2A^2}^{(2)}$	73
<b>3</b>	<b>Conclusiones y futuros trabajos</b>	<b>78</b>
3.1	Conclusiones	78
3.2	Futuros trabajos	80
3.3	Material publicado y demás contribuciones	81
	<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>82</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>93</b>

### Lista de Figuras

Figura 1	Topología del diagrama de fase para el modelo de $\mathcal{L}_4^1$ en función de $\alpha$ .	51
Figura 2	Ejemplo de una solución inflacionaria para el modelo de $\mathcal{L}_4^1$ con $\alpha < \alpha_{\text{crit}}$ .	52
Figura 3	Otra solución inflacionaria para el modelo de $\mathcal{L}_4^1$ con $\alpha > \alpha_{\text{crit}}$ .	53
Figura 4	Ejemplo de una solución numérica en el modelo de $\mathcal{L}_4^2$ con $\kappa > \kappa_{\text{crit}}$ .	59
Figura 5	Topología del diagrama de fase para el modelo de $\mathcal{L}_4^2$ en función de $\kappa$ .	59
Figura 6	Ejemplos de soluciones inflacionarias para $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$ con $\theta_4 > \theta_{4,\text{crit}}$ .	62
Figura 8	Topología del diagrama de fase para el modelo de $\tilde{\alpha}\mathcal{L}_4^1 + \tilde{\kappa}\mathcal{L}_4^2$ .	69
Figura 9	Diagramas de fase para el modelo de $\tilde{\alpha}\mathcal{L}_4^1 + \tilde{\kappa}\mathcal{L}_4^2$ .	72
Figura 10	Topología del espacio de parámetros en el subespacio $\{\alpha, \theta_4, \chi_i\} \in \mathbb{R}$ para el modelo de $\tilde{\alpha}\mathcal{L}_4^1 + \tilde{\theta}_4\mathcal{L}_4^{\text{Curv}} + \tilde{\chi}_3\mathcal{L}_{G^2A^2}^{(1)} + \tilde{\chi}_4\mathcal{L}_{G^2A^2}^{(2)}$ .	74

## Lista de Tablas

Tabla 1	Criterios de consistencia para soluciones asintóticas en el modelo de $\mathcal{L}_4^1$ .	55
Tabla 2	Criterios de consistencia para soluciones en la región central del modelo para $\mathcal{L}_4^1$ .	55
Tabla 3	Criterios de consistencia para soluciones asintóticas en el modelo de $\mathcal{L}_4^2$ .	58
Tabla 4	Criterios de consistencia para soluciones asintóticas en el modelo de $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$ .	63
Tabla 5	Criterios de consistencia para soluciones asintóticas en el modelo de $\tilde{\chi}_3 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)} + \tilde{\chi}_4 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)}$ .	66
Tabla 6	Criterios de consistencia para soluciones asintóticas del modelo de juguete.	67
Tabla 7	Criterios de consistencia para soluciones asintóticas de $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$ .	70
Tabla 8	Parámetro de acople, densidad de energía normalizada $\Omega_i = \rho_i / \rho_{\text{total}}$ , presión normalizada $p_i / \rho_{\text{total}}$ , y parámetro de estado $w_i = p_i / \rho_i$ de cada Lagrangiano considerado.	157

### Lista de Apéndices

Apéndice A	Expresiones de cálculo variacional útiles en gravedad modificada	94
Apéndice A.1	Variaciones de tensores con información geométrica	94
Apéndice A.1.1	$\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} = ?$	94
Apéndice A.1.2	$\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} = ?$	96
Apéndice A.1.3	$\delta R_{\mu\nu} = ?$	98
Apéndice A.1.4	$\delta g_{\mu\nu} \stackrel{?}{=} f(\delta g^{\alpha\beta})$	98
Apéndice A.1.5	$\delta R = ?$	101
Apéndice A.2	Truco de Leibniz	101
Apéndice A.3	Fórmula para la variación de una contracción	103
Apéndice A.4	Fórmula para el tensor de energía-momento	106
Apéndice B	Expresiones alternativas en términos del tensor de Riemann	107
Apéndice B.1	Fundamentos teóricos	107
Apéndice B.2	Discusión	109
Apéndice B.3	Conclusión	111
Apéndice C	Fórmulas especiales para $\mathcal{L}_4^1$ y $\mathcal{L}_4^2$	114
Apéndice C.1	Variación de términos tipo 1	115
Apéndice C.2	Variación de términos tipo 2	116
Apéndice C.3	Variación de términos tipo 3	117
Apéndice D	Comprobación de las fórmulas	118
Apéndice D.1	Comparación con las variaciones de Andrés A. Navarro para el Lagrangiano $\mathcal{L}_4^1$	118

Apéndice D.2	Comparación con las variaciones de Gabriel Gómez para el Lagrangiano	
	$\mathcal{L}_4^2$	122
Apéndice D.2.1	Cálculo de variaciones para la métrica inversa	123
Apéndice D.2.2	Primera comparación	126
Apéndice D.2.3	Cálculo de variaciones para los campos de materia	132
Apéndice D.2.4	Segunda comparación	135
Apéndice D.3	Síntesis de las comparaciones	139
Apéndice E	Ecuaciones de evolución para el Lagrangiano más general considerado	139
Apéndice E.1	Estructura del Lagrangiano	139
Apéndice E.2	Variación de la acción	141
Apéndice E.3	Sistema autónomo	145
Apéndice E.4	Puntos críticos	146
Apéndice E.5	Comportamiento asintótico	147
Apéndice E.6	Criterios de estabilidad	150
Apéndice E.7	Criterio de Ondas gravitacionales	155
Apéndice E.8	Rangos de $\hat{\psi}$ y ventana de parámetros útiles	156
Apéndice E.9	Propiedades especiales de cada Lagrangiano	157
Apéndice F	Códigos computacionales	160

### Lista de convenciones

A lo largo de este documento se implementa el sistema de “unidades naturales” [1,2] en el que la constante reducida de Planck, la velocidad de propagación de la luz en el vacío, la constante de Boltzmann y la permeabilidad magnética del vacío son normalizadas ( $\hbar = c = k_B = \mu_0 = 1$ ). La masa reducida de Planck se denota  $m_p^2 = \frac{1}{8\pi G}$  para diferenciarla de la masa (no-reducida) de Planck  $M_p^2 \equiv 8\pi m_p^2$ . Los índices griegos representan índices espacio-temporales y, por ende, toman valores dentro del conjunto de números  $\{0, 1, 2, 3\}$ ; los índices latinos representan índices de gauge dentro del conjunto de números  $\{1, 2, 3\}$ . El convenio de signos a implementar para la métrica, tensor de Riemann, escalar de Ricci y ecuaciones de campo de Einstein es (+ + +) según la clasificación de Misner-Thorne-Wheeler [3].<sup>1 2</sup>

Las derivadas parciales respecto a una coordenada  $\frac{\partial}{\partial x^\nu}$  están denotadas por  $\partial_\nu$ ; las derivadas respecto al tiempo cósmico  $\frac{\partial}{\partial t}$  se denotan con un punto sobre la magnitud de interés  $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$ ; las derivadas respecto al argumento “ $P$ ” de una función “ $G$ ” se denotan  $G_{,P}$ , las matrices se denotan con letras en mayúscula y en negrilla, los sistemas de referencia se asumen holónomos y se exigirá que la conexión del espacio-tiempo  $\Gamma$  sea Riemanniana

---

<sup>1</sup> Excepto en la sección 2.3.1 que sigue el convenio de Weinberg (+ - -) [4].

<sup>2</sup> La clasificación de Misner, Thorne y Wheeler fácilmente puede aplicarse a cualquier 2-forma de curvatura; en dicho caso, la definición del signo  $[S_2]$  dada en (56) seguiría siendo válida pero (32) se modificaría a  $F \equiv [S_2] dA + (\dots)$ ; esto no lo consideran muchos autores de física (e.g: Weinberg [4,5]) y genera inconsistencias matemáticas en la descripción de la curvatura asociada a conexiones de diferentes haces fibrados [6] pero no afecta a la física (porque siempre es posible añadir una constante  $c$  al Lagrangiano que garantice todos los criterios adecuados para que la acción sea viable [5]).

(métrica y libre de torsión), esto implica que los tensores de metricidad  $Q_{\alpha\mu\nu} \equiv \nabla_\alpha g_{\mu\nu}$  y contorsión  $K_{\mu\nu}$  son cero y que los coeficientes de la conexión son los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \Gamma_{\rho\nu}^\mu$ .

Se exige que el espacio-tiempo sea descrito por una variedad infinitamente diferenciable  $\mathcal{M}$  con frontera  $\partial\Omega$  en el infinito, orientable (para poder aplicar el teorema de Stokes-Cartan) y con campos que decaigan en el infinito (debido a que ésta es una condición impuesta por construcción [7], la cual garantiza que la adición de términos de la forma  $\partial_\mu J^\mu$  no repercuta en las ecuaciones de movimiento derivadas a partir del Lagrangiano de la teoría.)<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Si el universo se asumiese finito, la condición necesaria para anular las respectivas integrales de superficie que repercuten en las ecuaciones de movimiento sería otra; en ese caso, algunos campos de la descomposición escalar-vector-tensor deberían ser de soporte compacto y otros, obligatoriamente, no. [8].

Símbolo	Término	Detalles
$[S_i]$	Signos de la clasificación de Misner et al.	$[S_1] = -\eta_{00}$ , Ecs.(57),(60)
$a$	Factor de escala del universo de FLRW	$a \equiv a(t)$
$M^C$	Componentes de un tensor/operador M	...
$\delta M^C$	Componentes de la variación de M	$\delta M^C \equiv (\delta M)^C \neq \delta(M^C)$
$\eta$	Determinante de la métrica de Minkowski	$(-1)^q \Leftrightarrow$ Signatura $(p, q, 0)$
$g$	Determinante de la métrica de la variedad $\mathcal{M}$	$g = a^6 \Leftrightarrow$ FLRW $ _{k=0}$ , Ec.(15)
$\rho$	Densidad de energía neta del universo	$\rho = \rho_{\text{crit}} \Leftrightarrow$ FLRW $ _{k=0}$ , Ec.(19)
$p$	Presión neta en el universo	...
$p_i$	Presión de la i-ésima componente de materia	...
$P$	Variable auxiliar del sistema autónomo	$P \equiv \ddot{\psi} / m_p H^2$
$\varepsilon_{\mu(n)}$	Símbolo de permutación (de Levi-Civita)	Referencia [9]
$\epsilon_{\mu(n)}$	Tensor de Levi-Civita	$\epsilon^{\mu(n)} \equiv \eta  g ^{-1/2} \varepsilon^{\mu(n)}$ $\epsilon_{\mu(n)} \equiv  g ^{+1/2} \varepsilon_{\mu(n)}$
$\epsilon$	Variable auxiliar, parámetro de rodadura lenta	Ec.(26)
$x'$	Derivada de $x$ respecto al número de e-folds $N$	$x' \equiv \frac{dx}{dN} = \frac{1}{H} \frac{dx}{dt}$
$\dot{x}$	Derivada de $x$ respecto al tiempo cósmico $t$	$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$
$\tilde{\delta}_{\nu(p)}^{\mu(p)}$	Delta generalizada permanente (simetrizador)	Referencia [9]
$\delta_{\nu(p)}^{\mu(p)}$	Delta generalizada de Kronecker (antisimetrizador)	Referencia [9]
$q$	Parámetro de acoplamiento de gauge	Ec.(30)
$\vec{\alpha}$	Conjunto de parámetros libres de la teoría	$\vec{\alpha} \equiv \{\xi, \alpha, \kappa, \lambda, \theta_i, \chi_i\}$
$A$	Galileón vectorial	Ec.(27)
$H$	Parámetro de Hubble	$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$
$X, Y$	Coordenadas del espacio configuracional	Ecs.(95)

## Resumen

**Título:** Inflación y Energía oscura en la teoría SU(2) generalizada de Proca<sup>1</sup>

**Autor:** Juan Camilo Garnica Aguirre<sup>2</sup>

**Palabras Clave:** Teoría generalizada de Proca, Inflación, Energía oscura, Tríada cósmica, Cosmología, Galileón.

**Descripción:** En la última década, muchas teorías de gravedad modificada han sido propuestas, algunas como la teoría SU(2) generalizada de Proca fueron motivadas en la física fundamental y pretenden dar respuesta a un gran número de preguntas que la relatividad general no ha sido capaz de solucionar. A pesar de que la relatividad de Einstein ha sido el modelo canon de la gravedad por más de un siglo, en la actualidad es ampliamente entendido que dicha teoría es un modelo efectivo (que probablemente corresponda al límite de una teoría más general, en principio desconocida hasta el momento) y es necesario buscar una generalización satisfactoria de la misma para dar respuesta a inquietudes tan fundamentales como: el origen de la materia oscura, la naturaleza de la constante cosmológica, la solución al problema de jerarquía, las características de las teorías del todo, la topología del universo, la naturaleza de sus conexiones, entre otros. Con lo anterior en mente y teniendo en cuenta que la teoría SU(2) generalizada de Proca es una de las teorías de gravedad modificada más generales posibles con campos vectoriales, este trabajo presenta el estudio de ocho modelos particulares pertenecientes a la teoría, sus implicaciones cosmológicas y la construcción de un modelo viable de inflación y energía oscura que, en principio, carece de inestabilidades Laplacianas y de Ostrogradski, fantasmas, entra en concordancia con las cotas observacionales sobre la rapidez de las ondas gravitacionales en épocas recientes y respeta el principio de subluminalidad (implicando que tampoco hay violaciones al principio de causalidad).

---

<sup>1</sup>Trabajo de grado.

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Yeinzon Rodríguez García, ph.D.

## Abstract

**Title:** Dark energy and Inflation in the Generalized SU(2) Proca theory<sup>1</sup>

**Author:** Juan Camilo Garnica Aguirre<sup>2</sup>

**Keywords:** Generalized Proca theory, Inflation, Dark energy, Cosmic triad, Cosmology, Galileon.

**Description:** Throughout the last decade, many theories of modified gravity have been proposed, some of them, such as the Generalized SU(2) Proca theory rely on the basis of fundamental physics and attempt to give an answer to the vast amount of questions that general relativity hasn't been able to answer. Although Einstein's relativity has been the canon model of gravity for more than a century, it is widely understood nowadays that it's truly an effective model (probably corresponding to the limit of a yet unknown general theory) and further research is necessary in order to achieve a satisfactory generalization of it and being able to give answers to fundamental questions on topics like: the origin of the dark matter, the nature of the cosmological constant, the solution to the hierarchy problem, the properties of any "theory of everything", the topology of the universe, the nature of its connections, among others. With the previous thing in mind, and considering that the Generalized SU(2) Proca theory is one of the most general possible theories of modified gravity with vector fields, this research shows the specific details of eight particular models belonging to this theory, its cosmological implications, and the final construction of a viable model equipped with inflation and dark energy scenarios that, a priori, avoid all possible Laplacian and Ostrogradski instabilities, lack of ghosts, are in agreement with the latest observational constraints on the speed of the gravitational waves and ensure the subluminal propagation of its tensor modes (implying that no violations to the principle of causality happen at that level).

---

<sup>1</sup>Bachelor thesis.

<sup>2</sup>Faculty of sciences. Physics department. Supervisor: Yeinzon Rodríguez García, ph.D.

## Introducción

A lo largo de la historia ha habido siempre una inquietud persistente sobre los orígenes del universo y la forma en que nuestro entorno ha evolucionado para devenir en todo lo que observamos hoy en día. En 1915, gracias a los avances realizados por David Hilbert y Albert Einstein de manera independiente, se sentaron las bases matemáticas de la relatividad general [10]; en 1924 y 1927 Alexander Friedmann [11] y Georges Lemaître [12] publicaron su famosa solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein sin constante cosmológica; dicha solución suscitó en Friedmann la primera idea del Big Bang, la cual fue posteriormente sustentada por las observaciones de Edwin Hubble [13] en 1929 y seis años después fue complementada por Howard Robertson y Arthur Walker al demostrar que la solución de Friedmann y Lemaître incorporaba la única métrica posible en una variedad Lorentziana<sup>1</sup> capaz de satisfacer el principio cosmológico de homogeneidad e isotropía a grandes escalas [14–17].

Apoyándose en estos desarrollos filosóficos y matemáticos, la comunidad científica planteó la teoría “del Big Bang” para explicar una gran cantidad de observaciones cosmológicas disponibles para la época; pero debido a la formulación de la teoría se presentaban múltiples inconvenientes dentro de los cuales los más destacados recibieron el nombre de “los tres problemas de la cosmología estándar” (planitud, horizonte y reliquias no deseadas) [4]. Motivado por los dos primeros problemas, Alan Guth propuso en 1981 un periodo de expansión cósmica acelerada que los solucionase antes de que iniciara el Big Bang [18]. El paradigma inflacionario en la versión propuesta por Alan Guth (denominada “inflación anti-

---

<sup>1</sup> Entiéndase por “variedad Lorentziana” una variedad  $\mathcal{M}$  con métrica de signatura  $(1, \dim(\mathcal{M}) - 1)$ .

gua”) no fue ajeno a los inconvenientes y rápidamente fue reemplazado por un nuevo modelo que surgió un año después gracias a las contribuciones de Andrei Linde, Andreas Albrecht y Paul Steinhardt [19, 20]; posteriormente, este modelo - denominado “nueva inflación” o “de rodadura lenta” - se consagró como la teoría de expansión cósmica más aceptada y sería reconocida por su capacidad para resolver los tres problemas de la cosmología estándar (no solo los dos que Guth se había planteado).

El modelo de “nueva inflación” fue exitoso en la medida en que complementó perfectamente al Big Bang y predijo con gran precisión la estadística de las estructuras a gran escala del universo y las pequeñas fluctuaciones de temperatura en el fondo cósmico de microondas [4, 21]; no obstante, algunas anomalías observadas en los datos proporcionados por WMAP (2003) y PLANCK (2013) mostraron que no todas las predicciones coincidían con los resultados observacionales [22].

La inconsistencia de estas predicciones motivó el análisis detallado de los datos obtenidos por ambos telescopios en búsqueda de posibles sesgos estadísticos y errores sistemáticos en su estudio; al mismo tiempo, la necesidad de encontrar teorías accesibles a nuestras escalas de energía dio origen a una nueva preocupación generalizada por investigar teorías de inflación alternativas, principalmente modificadas a través de campos escalares.<sup>2</sup>

Siguiendo las necesidades de la época, Dvali, Gabadadze y Porrati [23] propusieron en el año 2000 un modelo de gravedad modificada particularmente interesante ya que éste no requería la presencia de una constante cosmológica para generar expansión acelerada (evitando

---

<sup>2</sup> El análisis de estas anomalías estadísticas sigue siendo objeto de interés hoy en día. En 2014, Rassat et al. plantearon que la mayoría de ellas podrían haber sido producto de filtros estadísticos no considerados [22].

sus problemas<sup>3</sup>), ofrecía una posible solución al problema de jerarquía<sup>4</sup> (argumentando que la gravedad se distribuía en cuatro dimensiones espaciales en vez de tres) y, además, estaba basado en una acción sencilla compuesta por un Lagrangiano de materia y dos términos de Einstein-Hilbert: uno en 5D y otro en 4D que dominaba al primero dentro de un “radio de Vainshtein” que servía como mecanismo de apantallamiento para recobrar la gravedad de Einstein a escalas del sistema solar.

En el límite de desacople de esta teoría, se observó que un campo escalar “de Stueckelberg” (introducido para añadir simetrías a la teoría sin modificar sus grados de libertad) presentaba una invarianza curiosa ante un tipo de transformaciones similares a las de Galileo [26]; dicha invarianza implicaba que las ecuaciones de movimiento del campo debían ser estrictamente de segundo orden y, por tanto, la dinámica del campo de Stueckelberg estaría exenta de la inestabilidad de Ostrogradski<sup>5</sup>.

El hallazgo de un campo escalar con las propiedades previamente expuestas motivó a autores como Deffayet [27] a encontrar el Lagrangiano más general posible para un campo escalar real con ecuaciones de movimiento de orden menor o igual a dos en espacio-tiempo plano; esta teoría se denominó “teoría de Galileones generalizados” y ese mismo año se publicó la extensión de sus resultados a espacio-tiempo curvo [28]. En 2011 Kobayashi, Yamaguchi y Yokoyama [29] verificaron que los resultados de Deffayet et al. en espacio-

---

<sup>3</sup> El problema de la constante cosmológica consiste en un desfase de 60 a 120 ordenes de magnitud entre los resultados observacionales y el valor predicho al considerar las respectivas correcciones cuánticas [24].

<sup>4</sup> El problema de jerarquía consiste en la carencia de una explicación físicamente satisfactoria al hecho de que la gravedad sea  $10^{34}$  veces menos intensa que la interacción nuclear débil [25].

<sup>5</sup> En el caso más simple, la inestabilidad se produce siempre que las ecuaciones de movimiento de la teoría sean de orden superior a dos e implica que el Hamiltoniano no estará acotado por debajo.

tiempo curvo eran equivalentes a los Lagrangianos investigados por Horndeski en 1974 [30]; con esto, la teoría de Galileones generalizados marcó un precedente y su descubrimiento a través de dos vías diferentes (Horndeski y Deffayet) reavivó el interés de la comunidad científica en este tipo de modelos. Las ventajas eran evidentes: la teoría de Galileones era la más general posible, carecía de la inestabilidad de Ostrogradski, y servía para modelar universos en expansión sin necesidad de una constante cosmológica [29, 31, 32] solamente introduciendo un campo escalar similar al que ya se había propuesto en el modelo de “nueva inflación”.

En el periodo comprendido entre 2009 y 2016, la teoría evolucionó en múltiples direcciones, abarcando ramas cada vez más ambiciosas; los modelos más destacados incluyeron derivadas espaciales de ordenes superiores [33], Lagrangianos degenerados con ligaduras [34, 35], multi-Galileones [36–39], campos vectoriales Abelianos [40–42], p-formas [43], “teorías más allá de Horndeski” [44] y sus correspondientes generalizaciones a casos no Abelianos [7].

En 2014, Deffayet conjeturó que la teoría más general de Galileones vectoriales invariante ante el grupo de transformaciones U(1), debía constar únicamente del término cinético de Maxwell en espacio-tiempo plano<sup>6</sup> [45] (prohibiendo entonces cualquier generalización del electromagnetismo); por esta razón, Heisenberg propuso relajar el requisito de invarianza de gauge en su propia teoría generalizada de Galileones vectoriales y empleó el método de Deffayet para generalizar por primera vez el Lagrangiano de Proca [40]. A principios de 2016, Allys, Peter y Rodríguez [7, 46] demostraron que el método de Deffayet no era suficiente para construir la acción más general posible para un campo vectorial Abeliano y ese mismo año propusieron un enfoque alternativo para construir completamente el Lagrangiano generali-

---

<sup>6</sup> “Término cinético de Maxwell” hace referencia al término  $\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  con  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

zado de Proca, invariante ante transformaciones globales de tipo SU(2). Hasta la fecha es poco lo que se sabe sobre las implicaciones cosmológicas de esta teoría, no obstante, recientes indicios sugieren que el sector  $\mathcal{L}_4$  de la misma sería mucho más robusto que el de sus rivales escalares y a raíz de ello se ha generado una gran expectativa en torno al estudio del funcionamiento detallado de sus partes y de cómo sus interacciones eventualmente podrían otorgarle un mayor poder predictivo a la teoría.

En virtud a lo mencionado anteriormente, el presente trabajo responde a la necesidad de presentar un análisis detallado de la teoría SU(2) generalizada de Proca y está dividido en tres pedazos fácilmente reconocibles: el primero se dedica a la discusión de los fundamentos teóricos (Sección 1), el segundo aborda el análisis de diferentes Lagrangianos de interés (Sección 2) y en el tercero se presenta una serie de apéndices con información relevante para el proyecto, de donde se destaca: (i) la deducción paso a paso de varias fórmulas de cálculos variacional aplicables a cualquier teoría y convenio de signos (Apéndices A-B), (ii) una reparametrización especial de las ecuaciones de Euler-Lagrange que permite reescribirlas en forma totalmente covariante y facilita los cálculos independientemente de la teoría trabajada (Apéndice D.2.3), y (iii) los cálculos detallados y códigos computacionales empleados en la sección 3 (Apéndice E-F).

## 1. Fundamentos Teóricos

Antes de proceder al análisis, resulta conveniente abordar los siguientes conceptos:

### 1.1. Inestabilidad de Ostrogradski

Se denomina “Inestabilidad de Ostrogradski” a la evolución ineludible que presentan ciertos sistemas Hamiltonianos hacia niveles de energía no finitos; su origen como concepto se debe gracias a los estudios de Ostrogradski en 1850 [47] bajo el marco de la teoría clásica de campos con Lagrangianos locales<sup>7</sup> no degenerados<sup>8</sup>.

Con propósitos ilustrativos, se ejemplificarán los principales aspectos de esta inestabilidad a través de un Lagrangiano simplificado; a pesar de ello, los resultados aquí expuestos serán fácilmente generalizables y resultarán siendo fundamentales para la creación de cualquier teoría clásica (o cuántica) de campos físicamente viable en cualquier espacio-tiempo.

[1] Considérese un Lagrangiano  $L[\phi](t) = L(\phi \equiv \phi^{(0)}, \frac{d\phi}{dt} \equiv \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(n)})$  con dependencias de orden superior a uno en derivadas temporales del campo; su ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\sum_{k=0}^n \left(-\frac{d}{dt}\right)^k \frac{\partial L}{\partial \phi^{(k)}} = 0. \quad (1)$$

[2] Al cumplirse el criterio de no degeneración  $\frac{\partial L}{\partial \phi^{(n)}} = f(\phi^{(n)}) \neq 0$  se puede reescribir (1)

---

<sup>7</sup> i.e.: Lagrangianos que solo dependen del campo y sus derivadas evaluadas en un mismo punto.

<sup>8</sup> i.e.: Lagrangianos que dependen del campo y sus primeras  $n$  derivadas de tal forma que su variación respecto a la  $n$ -ésima derivada del campo es función de dicha derivada.  $\left(\frac{\partial L}{\partial \phi^{(n)}} = f(\phi^{(n)}) \neq 0\right)$ .

como

$$\phi^{(2n)} = F(\phi, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(2n-1)}) \quad \Rightarrow \quad \phi(t) = G(t, \phi_0, \phi_0^{(1)}, \dots, \phi_0^{(2n-1)}); \quad (2)$$

de manera general, ésta es una ecuación diferencial de orden  $2n$  y, por ende, se requieren  $2n$  variables canónicas independientes para satisfacer los grados de libertad del espacio de fase sin necesidad de ligaduras. La propuesta de Ostrogradski para evitar estas ligaduras consiste en definir las variables canónicas del sistema  $Q_i, P_i$  de la siguiente forma:

$$Q_i \equiv \phi^{(i-1)} \quad , \quad P_i \equiv \sum_{k=i}^n \left( -\frac{d}{dt} \right)^{k-i} \frac{\partial L}{\partial \phi^{(k)}} \quad , \quad \text{con } i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

**3** Aplicando una transformación de Legendre al Lagrangiano se deduce que con  $n \geq 2$  el Hamiltoniano es lineal en  $n - 1$  momentos conjugados  $P_i$  que, al no estar restringidos a un rango de valores específico, llevarían al Hamiltoniano a niveles de energía no finitos generando comportamientos no físicos y la inexistencia del estado base a nivel cuántico [48, 49].

Para prevenir esta inestabilidad con Lagrangianos locales no degenerados, la deducción sugiere que es necesario (pero no suficiente) garantizar que las ecuaciones de movimiento (2) sean a lo sumo de orden dos<sup>9</sup>; esto se consigue trivialmente al imponer  $n = 1$  como requisito o, de forma más general, garantizando que los términos de orden superior a dos se cancelen mutuamente en la sumatoria (1). Alternativas más elaboradas hacen uso de Lagrangianos degenerados, ligaduras, múltiples campos escalares y generalizaciones a la teoría de Horndeski [34–39, 44] pero no serán consideradas a lo largo de este trabajo.

---

<sup>9</sup> Por esta razón se cree que la mayoría de ecuaciones en física adopta la forma  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$  en virtud de la ecuación (2) y los Lagrangianos considerados siempre suelen ser de la forma  $L[q](t) = L(q, \dot{q}, t)$ .

## 1.2. Construcción de Galileones escalares

Habiendo sentado las bases teóricas sobre la inestabilidad de Ostrogradski es inmediata la introducción a la teoría de Galileones escalares; ésta se fundamenta en un Lagrangiano local que depende de segundas derivadas pero aún así presenta una dinámica saludable gracias a que los términos de orden superior a dos se cancelan mutuamente en la ecuación (1).

Con el fin de evitar la inestabilidad de Ostrogradski, la teoría se construyó de tal forma que garantizara los siguientes dos principios sobre un espacio-tiempo plano:

1. El Lagrangiano debe contener, como máximo, segundas derivadas del campo.
2. Las ecuaciones de Euler-Lagrange deben ser a lo sumo de orden dos.

Como consecuencia de ambas propiedades, los Lagrangianos debían ser polinomios en segundas derivadas del campo tal y como lo demostró Sivanesan<sup>10</sup> en la referencia [50]. Dicho esto, existen dos tipos de Galileones escalares que garantizan estas propiedades:

- **Puros:** Su Lagrangiano es invariante ante la transformación  $\delta\phi = b + c_\mu x^\mu$  (con  $b$  y  $c_\mu$  siendo un escalar y un cuadrivector constantes) y sus ecuaciones de evolución son de orden estrictamente igual a dos en espacio-tiempo plano.
- **Generalizados:** Su Lagrangiano no es invariante ante dicha ley y sus ecuaciones de evolución son menos restrictivas, de orden menor o igual a dos en espacio-tiempo plano.

En cualquiera de los casos hace falta generalizar la teoría a espacio-tiempo curvo para poder estudiar sus implicaciones cosmológicas; para ello se debe realizar un proceso

---

<sup>10</sup> Esta demostración es válida incluso para teorías con un número arbitrario  $N$  de Galileones escalares.

de “covariantización” que puede ser “mínimo” si solo se reemplazan derivadas parciales por derivadas covariantes (resultando en un sistema de ecuaciones de orden superior a dos) o “no mínimo” si además de reemplazar las derivadas parciales se añaden contratérminos específicos para eliminar todos los aportes de orden superior a dos en las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Teniendo en cuenta que la covariantización mínima aumenta el orden de las ecuaciones de Euler-Lagrange, el consenso general es que los Lagrangianos obtenidos por este método padecerán de la inestabilidad de Ostrogradski<sup>11</sup>, y por ende, es sensato optar por aplicar un proceso de covariantización no mínima a la teoría menos restrictiva de Galileones escalares (generalizados) cuya acción en espacio-tiempo plano 4D viene dada por [27, 29]:

$$S = \int \sum_{N=2}^5 \mathcal{L}_{N,\pi}^{\text{Gal}} d^4x, \quad (4)$$

con

$$\mathcal{L}_{2,\pi}^{\text{Gal}} = f_2(\pi, X), \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_{3,\pi}^{\text{Gal}} = f_3(\pi, X) \square\pi, \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_{4,\pi}^{\text{Gal}} = f_4(\pi, X) [(\square\pi)^2 - (\partial_\mu\partial_\nu\pi)(\partial^\mu\partial^\nu\pi)], \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_{5,\pi}^{\text{Gal}} = f_5(\pi, X) [(\square\pi)^3 - 3(\square\pi)(\partial_\mu\partial_\nu\pi)(\partial^\mu\partial^\nu\pi) + 2(\partial_\mu\partial_\nu\pi)(\partial^\nu\partial^\rho\pi)(\partial_\rho\partial^\mu\pi)], \quad (8)$$

en donde  $\square\pi \equiv \partial_\mu\partial^\mu\pi$ , y  $f_{2,3,4,5}$  son funciones arbitrarias de  $\pi$  y  $X = -\frac{1}{2}\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi$ .

Al covariantizar no mínimamente (4), se encuentra su versión en espacio-tiempo curvo:

---

<sup>11</sup> Algunos estudios pertinentes sobre el número de grados de libertad y tipo de covariantización son: [44,51]; en ambos no se descarta que la covariantización mínima pueda estar exenta de inestabilidades de Ostrogradski pero la posición más aceptada actualmente es que este método se debe evadir porque produce ecuaciones de evolución potencialmente inestables de orden mayor a dos.

$$S = \int \left[ \sum_{N=2}^5 \mathcal{L}_{N,\pi}^{\text{Gal}} + \mathcal{L}_{\text{Curv},\pi}^{\text{Gal}} \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (9)$$

con

$$\mathcal{L}_{2,\pi}^{\text{Gal}} = G_2(\pi, X), \quad (10)$$

$$\mathcal{L}_{3,\pi}^{\text{Gal}} = G_3(\pi, X) \square\pi, \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_{4,\pi}^{\text{Gal}} = G_4(\pi, X) R + G_{4,X} [(\square\pi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \pi)], \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{5,\pi}^{\text{Gal}} &= G_5(\pi, X) G_{\mu\nu}(\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\ &\quad - \frac{1}{6} G_{5,X} [(\square\pi)^3 - 3(\square\pi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) + 2(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)(\nabla^\nu \nabla^\rho \pi)(\nabla_\rho \nabla^\mu \pi)], \end{aligned} \quad (13)$$

en donde  $X = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu \pi)(\nabla^\mu \pi)$ ,  $\square\pi \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu \pi$ ;  $g$ ,  $R$  y  $G_{\mu\nu}$  representan el determinante de  $g_{\mu\nu}$ , escalar de Ricci y componentes del tensor de Einstein;  $G_{2,3,4,5}$  denotan funciones arbitrarias de  $\pi$  y  $X$  y los primeros términos en  $\mathcal{L}_{4,\pi}^{\text{Gal}}$  y  $\mathcal{L}_{5,\pi}^{\text{Gal}}$  son contratérminos necesarios en el proceso de covariantización.

### 1.3. Inflación y energía oscura con campos vectoriales

Siendo necesario que las predicciones de toda teoría estén sujetas a constantes correcciones y márgenes de incertidumbre impuestos por la observación, es relevante mencionar que los modelos de energía oscura con campos escalares han sufrido importantes restricciones [52–56] debido a la reciente detección de la onda gravitacional GW170817 y su respectiva contraparte electromagnética GRB170817A por parte de la colaboración LIGO - VIRGO en Agosto de 2017 [57–59]. La necesidad de buscar teorías alternativas a las escalares es ahora casi imperativa y, entre ellas, el caso vectorial se presenta como una posibilidad notablemente atractiva, no solo porque podría solucionar los inconvenientes no resueltos por las teorías escalares sino porque, al involucrar direcciones privilegiadas, también podría dar explicación

a algunas de las anisotropías más desconcertantes en la radiación cósmica de fondo; con esto en mente, es conveniente revisar a continuación una serie de conceptos esenciales para entender estas teorías.

**1.3.1. Fundamentos de cosmología.** Gracias a las mediciones realizadas por PLANCK (2018) [60] de las fluctuaciones de temperatura en el fondo cósmico de microondas, hoy en día es bien sabido que el universo observable es altamente homogéneo e isótropo a grandes escalas (distancias del orden de 100 Mpc). Extendiendo esas propiedades a cualquier punto del espacio se sientan las bases del denominado “principio cosmológico” el cual afirma que no existen observadores predilectos a grandes escalas por cuanto el universo es homogéneo e isótropo con respecto a todos los puntos. Rigiendo el comportamiento de la materia y la dinámica del espaciotiempo se encuentran las ecuaciones de campo de Einstein [4, 61] que en el convenio de signos de Weinberg, son:

$$- m_p^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad \text{con } m_p^2 = 1/8\pi G; \quad (14)$$

resolverlas implica encontrar una métrica  $g_{\mu\nu}$  y una fuente de materia<sup>12</sup> con tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  que satisfagan la igualdad (14). El elemento de línea más general que satisface dicha igualdad en conjunto con el requisito de homogeneidad e isotropía espacial en todos los puntos es el elemento de línea de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [4]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ d\vec{x}^2 + K \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - K\vec{x}^2} \right] \quad (15)$$

---

<sup>12</sup> Aquí “materia fría” hace referencia a todo aquello que se mueva con velocidad promedio mucho menor que uno, en oposición a “materia caliente” o “radiación” cuya velocidad promedio es del orden de uno.

en donde  $K$  representa la curvatura espacial del universo y  $a > 0$  es el factor de escala que da cuenta de la expansión; adicionalmente, la solución debe ir acompañada por una fuente de materia tipo “fluido perfecto” [61, 62] cuyo tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  está dado por:

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (\rho + p) u_\mu u_\nu \quad (16)$$

en donde  $u^\mu$  representa las componentes de la cuadrivelocidad de un observador fundamental y la presión  $p \equiv p_{\text{mat}} + m_p^2 \Lambda$  y densidad de energía  $\rho = \rho_{\text{mat}} - m_p^2 \Lambda$  en general presentan aportes de materia y energía oscura (tradicionalmente modelada mediante una constante cosmológica  $\Lambda$ ).

Introduciendo (15) y (16) en (14) se obtienen las ecuaciones de Einstein-Friedmann que, luego de definir el *parámetro de Hubble*  $H = \dot{a}/a$ , adoptan la siguiente forma:

$$-6 m_p^2 \frac{\ddot{a}}{a} = \rho + 3p, \quad (17)$$

$$6 m_p^2 \left[ \frac{2K}{a^2} + 2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right] = 3\rho - 3p, \quad (18)$$

La suma de ambas ecuaciones da origen a una ecuación más fácil de manipular:

$$\boxed{H^2 = \frac{\rho}{3m_p^2} - \frac{K}{a^2}}, \quad (19)$$

la cual muestra que el universo sería plano si  $\rho$  es igual a  $3H^2 m_p^2$  y, por ende, dicho valor define una densidad de energía crítica  $\rho_{\text{crit}} \equiv 3H^2 m_p^2$ , y ésta, es tal que  $\text{Sgn}(\rho - \rho_{\text{crit}}) = \text{Sgn}(K)$ . Por otra parte, al derivar (19) y emplear (17) se obtiene la ecuación de continuidad:

$$\boxed{\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0} . \quad (20)$$

En adición, la condición de homogeneidad implica  $\rho = \rho(t)$ ,  $p = p(t)$  y  $a = a(t)$ ; y al dividir (20) entre  $H$  se obtiene una ecuación diferencial adicional para resolver  $\rho(a)$ <sup>13</sup>:

$$\frac{d\rho}{da} a + 3(\rho + p) = 0 . \quad (21)$$

Las ecuaciones (20) y (21) son intercambiables de modo que la única ganancia que se obtiene al deducir esta ecuación consiste en ver que (19) y (21) nos permiten describir completamente el sistema si se conocen  $(\rho, p$  y  $a)$ . Por lo anterior, se suele introducir una ecuación de estado:

$$\boxed{p = w\rho} \quad (22)$$

cuya correcta interpretación implica entender a  $p$  y  $\rho$  como propiedades globales del fluido (promedio en vez de locales)<sup>14</sup> y que, en el caso de conglomerados de partículas débilmente interactuantes, es decir fluidos perfectos, la relación puede reescribirse como  $p = \rho v^2/3$  según argumentos de mecánica estadística que implicarían  $w \rightarrow 1/3^-$  para fluidos de radiación y  $w \rightarrow 0^+$  para fluidos de materia fría.

---

<sup>13</sup> Esto se cumple siempre que  $a(t)$  sea invertible, solo en ese caso  $dt/da = (da/dt)^{-1}$  implica  $\dot{\rho}/\dot{a} = d\rho/da$ .

<sup>14</sup> Esto se debe a que las fluctuaciones en los valores de  $\rho$  y  $p$  respecto a su valor promedio son despreciables cuando la escala de interés es del tamaño del universo.

**1.3.2. Inflación y los problemas de la cosmología estándar.** [1] Como ya se ha mencionado, uno de los principales problemas resueltos por inflación es el denominado “problema de horizonte”, éste radica en que la cosmología estándar predice la existencia de aproximadamente  $10^5$  zonas que deberían haber estado causalmente desconectadas en la época de recalentamiento y hoy en día se observan en cuasi-equilibrio térmico al estudiar la radiación cósmica de fondo [4]. Según la teoría, independientemente del contenido material del universo, el tamaño de cualquier región causalmente conectada hoy en día con un evento del Big Bang debe ser del orden de un “radio de Hubble” ( $d = 1/H$ ); habiendo dicho esto, inflación solucionó el problema exigiendo la existencia de un periodo previo al Big Bang en el que el radio comóvil de Hubble ( $d/a$ ) disminuyera con el tiempo logrando que las zonas causalmente desconectadas en el pasado (según la cosmología estándar) en realidad sí pudiesen interactuar hasta alcanzar el cuasi-equilibrio térmico observado [63]; en lenguaje matemático, esto se traduce en la siguiente condición:

$$\frac{d(aH)^{-1}}{dt} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{a} > 0}, \quad (23)$$

lo anterior implica que el periodo inflacionario debe ser acelerado y por ende debe darse  $\rho + 3p < 0$  en virtud a la ecuación (17), o bien,  $w < -1/3$ ; esta condición es satisfecha, entre otros casos, por el universo de de-Sitter (compuesto por energía oscura) cuyas principales características son tener  $w = -1$ ,  $H$  constante y expansión acelerada exponencial.

[2] Las ecuaciones (19), (20) y (22) conforman un conjunto de ecuaciones suficiente para estudiar las distribuciones de materia a lo largo de la historia. Definiendo un “parámetro de densidad” adimensional  $\Omega \equiv \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda \equiv \rho/\rho_{\text{crit}}$ , es posible reescribir (19) como:

$$1 - \Omega = \frac{K}{(aH)^2} \equiv \Omega_K. \quad (24)$$

Con base en los resultados de PLANCK (2018) [60], se sabe que hoy en día  $|\Omega_K| < 0,0007$  y  $\Omega \approx 1$ ; no obstante, según las ecuaciones (19), (20), (22) y las condiciones necesarias para garantizar las épocas de recalentamiento, nucleosíntesis y bariogénesis, la cosmología estándar predecía un valor para el parámetro de densidad del orden de  $\Omega \sim 10^{-60}$  en la época de Planck (aprox. catorce mil millones de años atrás) [19]; esto constituyó un grave problema de ajuste fino que se denominó “problema de planitud”. El modelo inflacionario solucionó dicho inconveniente argumentando un periodo de crecimiento acelerado previo al Big Bang con una duración mínima de 60 a 70 e-folds<sup>15</sup> en el que el factor de escala evolucionaría como  $a(t) \simeq e^{Ht}$  garantizando que  $\Omega_K \simeq e^{-2Ht}$  se aproxime naturalmente a cero (y  $\Omega \rightarrow 1$ ) como consecuencia del mecanismo inflacionario, y así no constituya un problema de ajuste fino.

Definiendo el parámetro ( $\epsilon \equiv -\dot{H}/H^2$ ) para dar cuenta del cambio fraccional estimado de  $H$  en un tiempo de Hubble  $\Delta t = H^{-1}$  se encuentra que la condición (23) implica:

$$\frac{d(aH)^{-1}}{dt} = \frac{\epsilon - 1}{a} < 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \epsilon < 1 \\ \ddot{a} > 0 \end{array}. \quad (25)$$

**1.3.3. Inflación de tipo rodadura lenta.** Si bien es cierto que existen diferentes mecanismos para garantizar que el periodo inflacionario dure el tiempo necesario para resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar, quizá el más usado es el paradigma inflacionario de tipo rodadura lenta [61, 63]; éste es un mecanismo bastante estándar

---

<sup>15</sup> Estos son calculados como  $\ln(a_f/a_i)$  en donde los subíndices  $i$  y  $f$  denotan el inicio y final de inflación.

dentro de la literatura científica, sustentado en mediciones del índice espectral escalar de la radiación cósmica de fondo, y consiste en exigir lo siguiente:

$$\boxed{\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1} \quad \text{y} \quad \boxed{\delta \equiv -\frac{\ddot{H}}{2\dot{H}H} \ll 1}. \quad (26)$$

Nótese que dado el valor del índice espectral escalar  $n_s = 0,965 \pm 0,004$  reportado por PLANCK (2018) [60] y la relación  $n_s - 1 = 2\delta - 4\epsilon$ , válida para teorías clásicas de inflación con un solo campo escalar [64], al exigir  $\epsilon \ll 1$  y  $\delta \ll 1$  se procura replicar el comportamiento del inflatón tradicional y así mismo mantener la concordancia con los datos observacionales.

**1.3.4. Tríada cósmica.** Siempre que se desee trabajar en el espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker con campos de materia vectoriales, estos deben ser tales que se satisfaga la homogeneidad e isotropía del espacio con un tensor de energía-momento de la forma (16); para este fin, es conveniente implementar configuraciones de campos vectoriales como las que se enumeran en la referencia [65]; o bien, como se hará en este trabajo, centrarse en la configuración de tríada cósmica, la cual consta de tres campos vectoriales ortogonales de igual norma<sup>16</sup>:

$$A_\mu^a(x^\nu) = f(t) \delta_\mu^a; \quad (27)$$

definidos de tal forma que cada campo vectorial depende exclusivamente del tiempo y está alineado con un vector base del sector espacial del espacio tangente  $T_p\mathcal{M}$ ; como resultado, la configuración será isótropa y el origen de los tres campos vectoriales podrá ser fácilmente motivado por la introducción de una simetría interna de tipo SU(2) en la teoría [ $\dim SU(2) = 3$ ].

---

<sup>16</sup> La igualdad de normas se encarga de generar contribuciones netamente isótropas al tensor  $T_{\mu\nu}$  [66–68].

Con una pequeña modificación, se puede generalizar esta configuración para adaptarla al universo de Bianchi tipo I<sup>17</sup>; en tal caso,  $A_\mu^a = f_{(a)}(t) \delta_\mu^a$  garantizará las simetrías del espacio-tiempo: más aún, se puede asegurar que  $\psi_{(a)}(t)$  sea un escalar (ante difeomorfismos y transformaciones de  $SU(2)$ ) con la elección  $f_{(a)}(t) = \frac{1}{\sqrt{T_R}} a_{(a)}(t) \psi_{(a)}(t)$ , en donde  $T_R$  es el índice de Dynkin asociado a la métrica de Cartan-Killing de  $SU(2)$  en una representación dada (ver sección 1.4.1) y  $a_{(a)}(t)$  y  $\psi_{(a)}(t)$  son los factores de expansión y magnitudes de los campos vectoriales en cada dirección espacial [69, 70].

#### 1.4. Generalización del Lagrangiano de Proca

Teniendo en cuenta las ideas discutidas en las secciones 1.1 y 1.2 en lo relativo a la inestabilidad de Ostrogradski y el proceso de covariantización para el caso de Galileones escalares, la teoría generalizada de Proca se construye con base en las siguientes consideraciones:

1. Si bien los campos fermiónicos suelen ser complejos, la teoría de representación para los grupos de Lie dicta que las componentes  $A_\mu^a$  de los campos de gauge  $A_\mu$  sean reales por cuanto  $A_\mu^a \equiv \partial_\mu \theta^a$  donde  $\theta^a \in \mathbb{R}$  es el monto de una transformación tipo  $SU(n)$ . [71].
2. Debido al teorema de descomposición de Helmholtz-Hodge, toda 1-forma  $A$  puede ser expresada en términos de 1-formas más elementales, en este caso<sup>18</sup>, una sin rotacional ( $d\pi$ ) que lleva información de la divergencia y otra sin divergencia ( $\tilde{A}$ ) que lleva información del rotacional. En componentes,  $A_\mu = \tilde{A}_\mu + \partial_\mu \pi$ , implicando que, a nivel del Lagrangiano,  $\pi$  será una variable dinámica (tendrá momento conjugado no nulo) y, por ende, se exige que  $\pi$  sea un Galileón escalar para evitar la inestabilidad de Ostrogradski en dicho grado de libertad. El razonamiento aquí expuesto es complementado por la

---

<sup>17</sup> Existen configuraciones más generales [65] pero este trabajo se limitará a aquellas con  $A_0^a = 0$ .

<sup>18</sup> La descomposición solo involucra dos términos cuando el espacio-tiempo se asume infinito [72].

referencia [39]; allí se establece que es deseable la exigencia de que el Lagrangiano de una teoría saludable siempre se reduzca al Lagrangiano de un Galileón escalar luego de tomar el límite de desacople de los modos transversal y longitudinal (cuando  $A_\mu = \partial_\mu \pi$ ). Como consecuencia de esa consideración, se limita a uno el orden máximo de las derivadas covariantes de  $A$  en el Lagrangiano.

3. Se decide generalizar el Lagrangiano de Proca<sup>19</sup>  $\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu^a A_a^\mu$  debido a que este Lagrangiano mantiene una estrecha relación con la física de partículas involucrando campos vectoriales (posibles alternativas a los mecanismos tradicionales de generación de inflación y energía oscura); hoy en día es bien sabido que este tipo de Lagrangianos, al dotarlos de una simetría local de tipo SU(n), resultan ser fundamentales para la descripción de interacciones nucleares débiles, fuertes y electromagnéticas pero que debido a la participación de campos vectoriales (y a la teoría de representación en dimensión finita del grupo de Lorentz), estos modelos solo pueden propagar tres grados de libertad. Con el fin de ser consecuente con esta ligadura, se exige que la teoría generalizada de Proca también propague solo tres grados de libertad lo cual se consigue garantizando que en espacio-tiempo plano se cumpla:

$$\mathcal{H}_{\mu\nu ab} \Big|_{\mu=0} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^{\mu a}) \partial(\partial_0 A^{\nu b})} \Big|_{\mu=0} = 0, \quad (28)$$

condición que es abordada con mayor detalle en las referencias [39, 40, 73, 74].

---

<sup>19</sup> El signo menos depende de la signatura y se incluye para que el término cinético  $\frac{1}{2}\dot{A}_\mu^a \dot{A}_a^\mu$  sea positivo.

**1.4.1. Teoría básica de grupos de Lie.** Al igual que en relatividad general existe una libertad de calibre para elegir el sistema de referencia (asociado a las transformaciones generales de coordenadas), en las teorías con simetrías de tipo SU(n) existe una libertad de calibre asociada a la invarianza del Lagrangiano ante la acción de un elemento del grupo sobre los campos fermiónicos; esta libertad exige que las magnitudes de la teoría deban ser covariantes en el espacio *de gauge* para garantizar que la física de las ecuaciones no dependa del calibre empleado; para asegurar esto, se define una nueva derivada covariante *de gauge*  $D$  en términos de una conexión  $A$  que parametriza el cambio en los vectores base de dicho espacio al realizar una transformación infinitesimal de tipo SU(n) que depende de un monto real infinitesimal  $\delta\theta^k$ , un *parámetro de acople*  $q$  y los  $n^2 - 1$  generadores  $T_k$  del grupo de la siguiente forma [5, 71]:

$$\mathbb{U}(\delta\theta^k) = 1 + iq \delta\theta^k T_k + \mathcal{O}(\delta\theta^2)^{\rightarrow 0} \quad \text{con} \quad T_k^\dagger = T_k = -\frac{i}{q} \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \theta^k}. \quad (29)$$

De aquí que el cambio en un vector base del espacio de gauge  $u^a$  se parametrize como

$$u_{a'} = \mathbb{U}(\delta\theta^k) u_a = (1 + iq \delta\theta^k T_k) u_a = u_a + iq \delta\theta^k T_k u_a ,$$

$$\delta u_a = u_{a'} - u_a = iq \delta\theta^k T_k u_a \equiv iq A_\mu^k \delta x^\mu T_k u_a ,$$

$$\boxed{D_\mu u_a \equiv iq A_\mu u_a} \quad \boxed{D_\mu u^a \equiv -iq A_\mu u^a} , \quad (30)$$

en donde se usó la regla de la cadena  $\delta\theta^k = \partial_\mu \theta^k \delta x^\mu \equiv A_\mu^k \delta x^\mu$  y se definió  $A_\mu \equiv A_\mu^k T_k$ . Una vez obtenido este resultado, la forma más natural de definir la derivada covariante de gauge para un campo  $\Psi$  (expandido en dicho espacio como  $\Psi_a u^a$ , [6] págs. 208 y 224) será

$$\boxed{(D_\mu \Psi)_a \equiv (\partial_\mu - iq A_\mu) \Psi_a}, \quad (31)$$

en el mismo espíritu se define un “tensor de esfuerzos de gauge” o “2-forma de curvatura asociada a  $A$ ” como  $F \equiv DA = dA - iq A \wedge A$  [6,75], y sus componentes espacio-temporales  $F_{\mu\nu} = D_{[\mu} A_{\nu]}$  se relacionan con las componentes de gauge  $F_{\mu\nu}^a$  mediante  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a$ ; así:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - iq [A_\mu, A_\nu],$$

$$\boxed{F_{\mu\nu}^c = \partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c + q f_{ab}^c A_\mu^a A_\nu^b}, \quad (32)$$

en donde se ha tenido en cuenta la regla de conmutación  $[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c$  que define al álgebra de Lie en términos de sus *constantes de estructura*  $f_{ab}^c$  que, en la representación adjunta de SU(2), están dadas por el símbolo de Levi-Civita ( $f_{ab}^c = \varepsilon_{ab}^c$ ) y se asocian a una *métrica de grupo* (de Cartan-Killing)  $g_{ab} \equiv \text{Tr} \{T_a, T_b\} = T_R \delta_{ab}$  con  $T_R = 2$ . cf.ref. [76]<sup>20 21</sup>

Finalmente, para que la nueva derivada  $D$  transforme de manera adecuada (covariante con el campo fermiónico) se exige una regla de transformación específica para  $A_\mu$  para garantizar que la transformación  $\Psi \mapsto \Psi' = \mathbb{U} \Psi$  implique  $(D_\mu \Psi) \mapsto (D_\mu \Psi)' = \mathbb{U} (D_\mu \Psi)$ :

---

<sup>20</sup> Al definir la representación y normalización de los generadores del grupo, Weinberg señala que la forma de  $\{\mathcal{L}_{\text{YM}}, T_a, f_{ab}^c, g_{ab}\}$  queda completamente determinada. Para evitar inconsistencias matemáticas en la teoría es recomendable prestar especial atención al desarrollo matemático de la referencia [5].

<sup>21</sup> Usualmente se parametriza  $q \equiv [S_1] g$  para tener  $g > 0$  (previo a renormalización) igual a la carga del electrón cuando la simetría es de tipo U(1); en casos más generales (gravedad modificada) no existe una parametrización genérica  $q = q(g)$  que garantice  $g > 0$ ; todas son válidas a priori, ( $g \in \mathbb{R}$ ) y ( $\sqrt{g} \in \mathbb{R} \vee i\mathbb{R}$ ).

$$A_{\mu'} = \mathbb{U} A_{\mu} \mathbb{U}^{-1} - \frac{i}{q} (\partial_{\mu} \mathbb{U}) \mathbb{U}^{-1}. \quad (33)$$

Si la transformación es global se da que  $\theta \neq \theta(x^{\mu})$ ,  $\partial_{\mu} \mathbb{U} = 0$ ,  $D_{\mu} = \partial_{\mu}$ , y  $A_{\mu}^a = 0$  pero siempre es posible relajar la(s) última(s) condición(es) y seguir teniendo una teoría invariante de gauge (esto contradice la definición  $A_{\mu}^k = \partial_{\mu} \theta^k$  pero permite investigar el comportamiento aproximado que tendría la teoría si las simetrías fueran locales); dicho esto, (35) satisface

$$\boxed{A_{\mu} \mapsto A_{\mu'} = \mathbb{U} A_{\mu} \mathbb{U}^{-1}}. \quad (34)$$

**1.4.2. Lagrangiano de la teoría SU(2) generalizada de Proca.** Según el tipo de simetría que se decida trabajar, la teoría generalizada de Proca puede ser Abelian (si  $f_{ab}^c = 0$ ) [41,42,46] o no Abelian [7] pero la teoría de interés en este documento se caracteriza por tener una **simetría global de tipo SU(2)**, ser invariante ante la transformación (34), haber sido construida a partir de magnitudes tensoriales con un máximo de seis índices contraídos, y estar descrita por el siguiente Lagrangiano en espacio-tiempo curvo 4D [7,77]:

$$S = \int \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_a^{\mu} A_{\mu}^a + \sum_{N=2}^4 \mathcal{L}_{N,A}^{\text{Gal}} + \sum_{m=1}^4 \mathcal{L}_{\text{Curv},m,A}^{\text{Gal}} \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (35)$$

sujeto a las siguientes definiciones:

$$\mathcal{L}_{\text{Curv},1,A}^{\text{Gal}} = f_1^{\text{Curv}} G_{\mu\nu} A^{\mu a} A_a^\nu, \quad (36)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Curv},2,A}^{\text{Gal}} = f_2^{\text{Curv}} L_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu a} F_a^{\rho\sigma}, \quad (37)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Curv},3,A}^{\text{Gal}} = f_3^{\text{Curv}} \epsilon_{abc} L_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu a} A^{\rho b} A^{\sigma c}, \quad (38)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}} = f_4^{\text{Curv}} L_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\mu a} A_a^\nu A^{\rho b} A_b^\sigma, \quad (39)$$

en donde  $f_{1,2,3,4}^{\text{Curv}}$  denotan constantes escalares arbitrarias y  $L_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\tau\phi} \epsilon^{\rho\sigma\eta\xi} R_{\tau\phi\eta\xi}$  es el doble dual de Hodge del tensor de Riemann asociado a  $[g_{\mu\nu}]$ . Los diferentes  $\mathcal{L}_{N,A}^{\text{Gal}}$  son:

$$\mathcal{L}_{2,A}^{\text{Gal}} = f_2(A_\mu^a, F_{\mu\nu}^a, \tilde{F}_{\mu\nu}^a) \quad , \quad \mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal}} = \alpha \mathcal{L}_4^1 + \kappa \mathcal{L}_4^2 + \lambda \mathcal{L}_4^3. \quad (40)$$

$\mathcal{L}_{3,A}^{\text{Gal}}$  es idénticamente cero y la versión covariante de los Lagrangianos  $\mathcal{L}_{5,A}^{\text{Gal}}$  y  $\mathcal{L}_{6,A}^{\text{Gal}}$  se desconoce (debido a la complejidad de la teoría al aumentar el valor de  $N$  [7, 46]). Adicionalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^1 &\equiv \frac{1}{4} (A_b \cdot A^b) [S_\mu^{\mu a} S_{\nu a}^\nu - S_\nu^{\mu a} S_{\mu a}^\nu + (A_a \cdot A^a) R] \\ &+ \frac{1}{2} (A_a \cdot A_b) [S_\mu^{\mu a} S_\nu^{\nu b} - S_\nu^{\mu a} S_\mu^{\nu b} + 2(A^a \cdot A^b) R], \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^2 &\equiv \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) [S_\mu^{\mu a} S_\nu^{\nu b} - S_\nu^{\mu a} S_\mu^{\nu b} + (A^a \cdot A^b) R] \\ &+ \frac{1}{2} (A^{\mu a} A^{\nu b}) [S_{\mu a}^\rho S_{\nu \rho b} - S_{\nu a}^\rho S_{\mu \rho b} - A_a^\rho A_b^\sigma R_{\mu\nu\rho\sigma} \\ &- (\nabla^\rho A_{\mu a}) (\nabla_\rho A_{\nu b}) + (\nabla^\rho A_{\nu a}) (\nabla_\rho A_{\mu b})], \end{aligned} \quad (42)$$

$$\mathcal{L}_4^3 \equiv \tilde{G}_{\mu\sigma}^b A_a^\mu A_{\nu b} S^{\nu\sigma a}. \quad (43)$$

en donde  $S_{\mu\sigma}^b \equiv \nabla_{(\mu} A_{\sigma)}^b$  es la versión simétrica de  $G_{\mu\sigma}^b \equiv \nabla_{[\mu} A_{\sigma]}^b$  (simbolizando la versión Abeliiana del tensor  $F_{\mu\sigma}^b = G_{\mu\sigma}^b + q f_{ab}^c A_\mu^a A_\sigma^b$ ) cuyo dual de Hodge se denota  $\tilde{G}_{\mu\sigma}^b$ .

Este tipo de teorías, según lo indican autores como Heisenberg, Tsujikawa y de Rham [78–80] presentan un beneficio teórico importante, y es que las modificaciones a la relatividad de Einstein solo ocurren representativamente a partir de una distancia denominada “Radio de Vainshtein”; este mecanismo de apantallamiento natural<sup>22</sup> surge gracias a los términos de autointeracción que hacen parte del Lagrangiano y garantiza que, al menos al interior de dicho radio, la teoría de gravedad predominante sea la relatividad de Einstein, permitiendo así que el  $\mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal}}$  pueda concordar con las observaciones realizadas a escalas del sistema solar.

### Observación:

Nótese que la teoría, al asumir una simetría global, no requiere de campos vectoriales para definir una derivada covariante de gauge; no obstante, la teoría SU(2) generalizada de Proca hace uso de la discusión expuesta antes de la ecuación (34) para estudiar el comportamiento aproximado de la que sería una futura teoría local de la misma.

### 1.5. Discusión: grados de libertad dinámicos de la teoría

Dado que la teoría SU(2) generalizada de Proca está construida sobre una variedad dotada de un grupo de simetrías globales de tipo SU(2), con métrica de grupo  $g_{ab} = \delta_{ab}$  y métrica espacio-temporal  $g_{\mu\nu}$ ; la presencia de dos métricas  $g_{\mu\nu}$ ,  $g_{ab}$  (y sus conexiones  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ ,  $A_\mu$ )<sup>23</sup>, exige que se establezcan las consideraciones que se han de asumir para estudiar la dinámica de los campos al aplicar el principio de acción estacionaria con extremos fijos.

---

<sup>22</sup> Usualmente denominado: “Mecanismo de Vainshtein” o “k-mouflage” en la literatura científica.

<sup>23</sup> Formalmente, la conexión de gauge no es  $A_\mu^a$ , sino  $(\Gamma_{\text{su}(2)})_{\mu a}^b = iqA_\mu \delta_a^b$  por comparación de (30) con  $D_\mu u_a \equiv (\Gamma_{\text{su}(2)})_{\mu a}^b u_b$ ; sin embargo, de forma laxa, en este trabajo se le llamará “conexión”. De aquí se puede verificar que  $F_{\mu\nu} \equiv D_{[\mu} A_{\nu]} = \partial_{[\mu} A_{\nu]} - iqA_{[\mu} A_{\nu]}$  y (32) concuerdan con [6, 75, 81].

**1.5.1. Dinámica de la métrica espacio-temporal.** Según la idea clave de la relatividad general: la dinámica de la métrica define cómo evolucionan los campos de materia y estos, a su vez, actualizan la dinámica de la misma; por ende, la métrica espacio-temporal debe ser considerada como un grado de libertad de la teoría.

**1.5.2. Dinámica de la métrica de gauge.** Es cierto que tener una métrica de gauge dinámica puede dar origen a fenómenos físicos muy interesantes [82], no obstante, por simplicidad, se asumirá que la métrica de gauge es estacionaria ( $\delta g_{ab} = 0$ ); ésta suposición es bastante estándar dentro del marco de las teorías de gravedad modificada propuestas en las últimas décadas y tiene por consecuencia que la métrica de gauge carecerá de ecuaciones de Euler-Lagrange.

**1.5.3. Dinámica de la conexión espacio-temporal.** Es bien sabido que en la construcción de la teoría SU(2) generalizada de Proca se asumió que la conexión  $\Gamma$  era simétrica y libre de torsión; debido a ello (y al teorema fundamental de la geometría Riemanniana), las componentes  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  de la conexión espacio-temporal deben estar dadas por los símbolos de Christoffel, de tal suerte que al aplicar las fórmulas (54), (63) y (67), los términos de la forma  $\left[ \frac{\delta S}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \approx D^{\rho}_{\mu\nu\alpha(3)} (\nabla^{\alpha_3} \frac{\delta S}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}) \delta g^{\alpha_2\alpha_1} \equiv \frac{\delta S^{(\text{Chris})}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \subset \delta S \right]$  se traducen en aportes a las ecuaciones de evolución de la métrica inversa.

De no haberse asumido que la conexión espacio-temporal era Riemanniana desde el comienzo existiría la posibilidad de aplicar otras consideraciones sobre la dinámica de la conexión, éstas alternativas son sintetizadas en los formalismos *métrico* y *de Palatini* (detallados en [83]).

**1.5.4. Dinámica de la conexión de gauge.** La conexión de gauge cumple el mismo papel que un campo de materia, por ende, existen múltiples razones para exigir que  $A_\mu^a$  sea dinámico: (i) para evitar el problema de la constante cosmológica: haciendo la constante igual a cero y permitiendo la dinámica de los  $A_\mu^a$  existe la posibilidad de que los campos vectoriales generen un mecanismo alternativo a la constante cosmológica para producir energía oscura. (ii) para aprovechar las ideas esenciales de “Gauge-flation” [69]: cabe la posibilidad de que los campos vectoriales actúen en conjunto como un inflatón estándar al considerar que los  $A_\mu^a$  sean grados de libertad dinámicos. (iii) para acercar la teoría a la física de partículas: eventualmente (al generalizar la teoría a simetrías locales) estos campos decaerán en partículas y su propagación e interacción obedecerá las reglas impuestas por las ecuaciones de Euler-Lagrange que surjan de asumir los  $A_\mu^a$  dinámicos.

### 1.6. Fundamentos de sistemas dinámicos

Otro aspecto importante para este trabajo será el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas, estos son, por definición, sistemas de ecuaciones de la forma

$$\dot{x}_i(t) = F_i(\vec{x}) \quad \text{con} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (44)$$

en los que el tiempo no aparece de manera explícita en el lado derecho de la igualdad.<sup>24</sup> Se dice que un punto dado en el espacio configuracional es un “punto crítico” (también referido como “punto fijo” o “estable”) del sistema autónomo si sus coordenadas  $\vec{x}_p$  son tales que  $F_i(\vec{x}_p) = 0 \quad \forall i$ ; de esta forma se garantiza, en virtud a (44), que la solución con condiciones iniciales  $\vec{x} = \vec{x}_p$  es una solución constante en todo tiempo y no diverge.

Teniendo en cuenta esta definición basta estudiar las soluciones próximas a puntos críticos para establecer en qué régimen las soluciones convergen o divergen; al hacer esto, es posible crear un bosquejo general de cómo se comportará el sistema en función de sus condiciones iniciales.<sup>25</sup> Para ello, se expande  $F_i(\vec{x})$  en series de Taylor en torno a un punto crítico arbitrario ( $\vec{x}_p$ ) y se trunca la serie al orden dominante:

$$F_i(\vec{x}) = F_i(\vec{\eta} + \vec{x}_p) = \underbrace{F_i(\vec{x}_p)}_0 + (\mathbf{J}_p)_{ij} \eta^j + \frac{1}{2} (\mathbf{H}_{ip})_{jkl} \eta^j \eta^k + \mathcal{O}(|\vec{\eta}|^3),$$

en donde se empleó el convenio de suma de Einstein,  $\vec{\eta} \equiv \vec{x} - \vec{x}_p$  es una perturbación

---

<sup>24</sup> A veces surgen sistemas de la forma  $\dot{x}_i(t) = F_i(\vec{x}, t)$ ; estos pueden convertirse en sistemas autónomos definiendo una coordenada ( $x_{N+1} \equiv t$ ) y añadiendo la ecuación ( $\dot{x}_{N+1} = 1$ ) al sistema de ecuaciones.

<sup>25</sup> La solución a un sistema autónomo es de la forma  $\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{x}_{(t=0)})$  con  $N$  condiciones iniciales.

infinitesimal de las coordenadas respecto al punto crítico y  $\vec{x}$  representa una N-tupla genérica de coordenadas;  $\mathbf{J}_p$  y  $\mathbf{H}_{ip}$  son respectivamente el Jacobiano de  $\vec{F}$  y Hessiano de  $F_i$  en  $\vec{x}_p$ :

$$(\mathbf{J}_p)_{ij} \equiv \left. \frac{\partial F_i}{\partial x^j} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_p}, \quad (\mathbf{H}_{ip})_{jk} \equiv \left. \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^j \partial x^k} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_p}.$$

Algunos criterios de estabilidad importantes son los siguientes:

► Si el orden dominante es uno<sup>26</sup>, el sistema (44) tenderá a  $\dot{\vec{\eta}} = \mathbf{J}_p \vec{\eta}$ ; basado en [86] se concluye que, sin importar si  $\mathbf{J}_p$  es o no diagonalizable, la estabilidad de las soluciones en  $t \rightarrow \infty$  solo se da si la parte real de todos sus autovalores es negativa.

► Si el orden dominante es uno y las partes reales de los autovalores no tienen el mismo signo, se dice que el punto  $\vec{x}_p$  es un “punto de silla”, implicando que algunas variables  $x_i$  tenderán a aumentar exponencialmente mientras que otras tenderán a disminuir.

► Si la ecuación asociada a algún  $\eta_i$  es  $\dot{\eta}_i = 0$ , el orden dominante en dicho caso no es uno y debe apelarse a términos de orden superior en la serie de Taylor.

► Si se da que  $\mathbf{J}_p$  es diagonalizable y todos sus autovalores son imaginarios puros, la solución será periódica; o bien, si  $\mathbf{J}_p$  es no diagonalizable, la solución divergirá en  $t \rightarrow \infty$ .

► Si el orden dominante es dos, es necesario aplicar un método de análisis diferente a partir de teoremas de la variedad central [87] y teoría de bifurcaciones [88, 89].

---

<sup>26</sup> Las ref. [84, 85] ofrecen un análisis para  $N$  par (propio del estudio de sistemas mecánicos); este caso no siempre se presenta en cosmología así que aquí he presentado una versión generalizada de sus resultados.

### 1.7. Teoría de perturbaciones cosmológicas y estabilidad

Al estudiar la viabilidad física de cualquier teoría de campos se deben tener en cuenta consideraciones de estabilidad a nivel perturbativo; para ello, se expande la perturbación de cada grado de libertad de la teoría (denotado  $\mathcal{X}$ ) como:  $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{(0)} + \delta\mathcal{X}$ , en donde  $\delta\mathcal{X} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \delta\mathcal{X}^{(k)} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \delta\bar{\mathcal{X}}^{(k)}$  con  $\varepsilon \ll 1$ . Despreciando los términos de orden 2 en adelante, el principio de acción estacionaria con extremos fijos dicta que:

$$\delta S = \int d^4x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta S}{\delta \mathcal{X}^{(i)}} \delta \mathcal{X}^{(i)} = 0 \quad \forall \delta \mathcal{X}^{(i)} \Rightarrow \frac{\delta S}{\delta \mathcal{X}^{(i)}} = 0 \quad \forall i .$$

Implementando la configuración de triada cósmica como  $[A_\mu^a = f(t)\delta_\mu^a = \frac{1}{\sqrt{T_R}} a(t)\psi(t)\delta_\mu^a]$  es posible identificar los índices de gauge como índices espaciales y realizar una foliación 3+1 del espacio-tiempo en hipersuperficies de tiempo constante con métrica inducida  $q_{ij} = g_{ij}$ , y al efectuar una descomposición Escalar-Vector-Tensor de las perturbaciones  $\delta g_{\mu\nu}$  y  $\delta A_\mu^a$ , éstas quedan parametrizadas como: (cf. [68] y también [8,90] para el caso de  $dx^0 \equiv dt/a \equiv d\eta$ )<sup>27</sup>

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2A & aB_i \\ aB_i & a^2(-2C\delta_{ij} + W_{ij}) \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{bmatrix} B_i = \partial_i B - S_i \\ W_{ij} = 2\partial_i \partial_j E + \partial_{(i} W_{j)} + h_{ij} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{\sqrt{T_R}} \begin{bmatrix} \delta^{ak} \mathcal{Y}_k \\ \delta_i^a Q + \varepsilon_i^{ak} \mathcal{R}_k + \delta^{ak} \mathcal{V}_{ik} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_k = \partial_k \dot{Y} + u_k \\ \mathcal{R}_k = qa\psi \partial_k R + w_k \\ \mathcal{V}_{ik} = \partial_i \partial_k M + \partial_i v_k + \gamma_{ik} \end{bmatrix} \quad (46)$$

---

<sup>27</sup> Este resultado es válido para (i) FLRW con curvatura espacial genérica ( $K \in \mathbb{R}$ ) (ii) con la restricción de que la métrica inducida en las hipersuperficies sea dada por  $q_{ij} = g_{ij} = a^2(\delta_{ij} + K \frac{x_i x_j}{1 - kx^2}) = f(t)$  (15), así, la conexión inducida  ${}^{(3)}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}q^{kl}(q_{l(i,j)} - q_{ij,k})$  es nula [91,92] y su derivada covariante es  $D_i = \partial_i$ .

Nótese que (i) la perturbación  $\delta g_{\mu\nu}$  exhibe 4 modos escalares  $\{A, B, C, E\}$ , 2 vectoriales transversales  $\{S_i, W_i\}$  y 1 modo tensorial transversal simétrico y sin traza  $h_{ij}$ , encargados de propagar los 10 grados de libertad provenientes de las 10 componentes independientes de  $g_{\mu\nu}$ ; y, por otra parte, (ii) la perturbación  $\delta A_\mu^a$  exhibe 4 modos escalares  $\{Q, Y, M, R\}$ , 3 vectoriales transversales  $\{u_i, v_i, w_i\}$  y 1 modo tensorial transversal simétrico y sin traza  $\gamma_i^a$ , éstos propagan los 12 grados de libertad asociados a las componentes independientes de  $A_\mu^a$ .

Adicionalmente, de los  $10+12 = 22$  grados de libertad en total, solo  $22 - 7 = 15$  tienen un significado físico real y medible tras descontar las 4 simetrías ante difeomorfismos y 3 simetrías de gauge de la teoría; estos grados de libertad redundantes son 3 modos escalares y 2 vectoriales, los cuales deben ser eliminados “fijando un gauge” o introduciendo un nuevo conjunto de variables invariantes de gauge [68,90,93]; en el caso de los modos tensoriales, éstos ya son invariantes ante ambos tipos de transformación y, por ende, exhiben de inmediato su significado físico medible.

De manera general, las perturbaciones escalares y vectoriales se asocian con la distribución espacial de materia-energía en el universo y las tensoriales con la emisión de algún tipo de radiación (que es gravitacional en el caso del modo  $h_{ij}$ , o similar a la radiación “débil” de los bosones  $\{W^\pm, Z^0\}$  del modelo estándar en el caso del modo  $\gamma_{ij}$ ). Debido a la presencia de los campos  $A_\mu^a$ , las ondas gravitacionales presentarán relaciones de dispersión y factores de amortiguamiento distintos a los predichos por la relatividad general; ambas características constituyen formas interesantes de poner a prueba la teoría; sin embargo, en este trabajo solo se abordará la primera de ellas.

### 1.7.1. Sector tensorial de las perturbaciones.

Para analizar este sector es conveniente descomponer los modos tensoriales  $h_{ij}$  y  $\gamma_{ij}$  en sus dos polarizaciones:

$$\begin{pmatrix} h_{ij} \\ \gamma_{ij} \end{pmatrix} = \sum_{\lambda=+, \times} \begin{pmatrix} h_{\lambda} \\ \gamma_{\lambda} \end{pmatrix} e_{ij}^{(\lambda)} \quad \text{con} \quad e_{ij}^{(+)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge e_{ij}^{(\times)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\lambda = \{+, \times\}$  representa las dos polarizaciones que propaga cada modo tensorial [90] y  $e_{ij}^{(\lambda)}$  son los “tensores de polarización” asociados a una base en la cual el eje  $z$  está alineado con su dirección de propagación, normalizados<sup>28</sup> de tal forma que  $e_{ij}^{(\lambda)} e_{kl}^{(\lambda')} \delta^{ik} \delta^{jl} = 2 \delta^{\lambda\lambda'}$ .

Como ya se ha mencionado antes, una ventaja al enfocarse en los modos tensoriales  $h_{ij}$  y  $\gamma_{ij}$  es que estos, de por sí, ya son invariantes ante difeomorfismos espaciales y transformaciones de gauge de tipo SU(2) [68] (esto hace que sean más fáciles de analizar que los otros modos); con esto en mente, resulta conveniente definir el vector  $\vec{x} = \{h_+, \gamma_+, h_{\times}, \gamma_{\times}\}$ ; de este modo, las contribuciones de los modos tensoriales a la acción de orden 2 toman la siguiente forma:

$$S^{(2)} = \int d^4x \left\{ a^3 \left[ \dot{\vec{x}}^T \mathbb{K} \dot{\vec{x}} + \dot{\vec{x}}^T \mathbb{C}_{\text{KM}} \vec{x} + \vec{x}^T \mathbb{M} \vec{x} \right] + a^2 \left[ \dot{\vec{x}}^T \mathbb{C}_{\text{KL}} (\partial_z \vec{x}) + \dot{\vec{x}}^T \mathbb{C}_{\text{LM}} \vec{x} \right] + a (\partial_z \vec{x}) \mathbb{L} (\partial_z \vec{x}) \right\}. \quad (47)$$

Las matrices  $\{\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{M}\}$  dan cuenta de los términos cinéticos, Laplacianos y de masa presentes en la acción y éstas son simétricas debido a que codifican toda la información sobre productos de derivadas de la misma clase; la matriz  $\mathbb{C}_{\text{KL}}$  codifica los acoples cinético-

---

<sup>28</sup> La normalización depende de cada autor; e.g: en muchos casos es común ver  $\delta^{\lambda\lambda'}$  en vez de  $2\delta^{\lambda\lambda'}$ . De forma general, dada la normalización  $D\delta^{\lambda\lambda'}$ , los tensores de polarización correspondientes son  $\tilde{e}_{ij}^{(\lambda)} \equiv \sqrt{D/2} e_{ij}^{(\lambda)}$ .

Laplacianos en la acción y es definida simétrica (por conveniencia) luego de algunas integraciones por partes; las matrices  $\{\mathbb{C}_{\text{KM}}, \mathbb{C}_{\text{LM}}\}$ , median las interacciones de tipos cinético-masa y Laplaciano-masa y éstas son definidas antisimétricas (por conveniencia) luego de integraciones por partes. Adicionalmente, al proponer soluciones de tipo onda plana  $\vec{x} = \vec{x}_0 e^{\pm i(kz - \omega t)}$  con relación de dispersión  $\omega = \frac{k}{a} c_s$ , es posible incorporar información en la acción sobre la velocidad de propagación de dichas ondas:

$$S^{(2)} = \int d^4x \left\{ -ak^2 \vec{x}^T \left[ c_s^2 \left( \mathbb{K} \pm \frac{i}{\omega} \mathbb{C}_{\text{KM}} - \frac{1}{\omega^2} \mathbb{M} \right) - c_s \left( \mathbb{C}_{\text{KL}} \pm \frac{i}{\omega} \mathbb{C}_{\text{LM}} \right) + \mathbb{L} \right] \vec{x} \right\} . \quad (48)$$

Nótese que esta expresión requiere  $\{\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{M}, \mathbb{C}_{\text{KL}}\} \in \mathbb{R}$  y  $\{\mathbb{C}_{\text{KM}}, \mathbb{C}_{\text{LM}}\} \in i\mathbb{R}$  ya que  $S^{(2)} \in \mathbb{R}$ . Finalmente, es de resaltar que existen dos regímenes importantes en la acción<sup>29</sup>: (i) el régimen de altas energías (o subhorizonte) con  $k/a \gg H$  y el de bajas energías (o superhorizonte) con  $k/a \ll H$  [90]; de estos dos regímenes, el de bajas energías es el menos preocupante debido a que todas las perturbaciones en dicho régimen tienden a evolucionar exponencialmente hacia el régimen de altas energías en donde, luego de algunas oscilaciones, se estabilizan en un valor constante; con esto en mente, es claro que al garantizar la estabilidad del Hamiltoniano en el régimen de altas energías, es altamente improbable que las inestabilidades a bajas energías, de llegar a darse, duren lo suficiente para ser catastróficas en el sistema.<sup>30</sup>

---

<sup>29</sup> Algunos autores prefieren hablar de régimen (sub/super-)Hubble [90], esto tiene que ver con el hecho de que el horizonte de sucesos siempre tiene un radio del orden de  $H$  pero en general no se da una igualdad estricta. Los nombres de los regímenes provienen del siguiente razonamiento:  $k \equiv \text{cte}$  es el número de onda comóvil, su valor físico es  $k/a = 2\pi/\lambda$  así que las longitudes de onda de las perturbaciones crecen como  $\lambda \sim a(t)$ ; al superar el radio de Hubble, se habla de régimen super-Hubble, i.e:  $\lambda \gg H$  (o  $k/a \ll H$ ) [94].

<sup>30</sup> Las ecuaciones  $\frac{\delta S^{(2)}}{\delta \vec{x}} = 0$  para (48) son de la forma  $f(\ddot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}}, \partial_z^2 \vec{x}, \partial_z \vec{x}, \vec{x}) = 0$ , así que el comportamiento oscilatorio amortiguado de los modos tensoriales es bastante comprensible.

Los criterios de estabilidad para los modos tensoriales aquí considerados son entonces:

1. Criterio de energía cinética positiva (“*No-Ghosts condition*”): Autovalores $[\mathbb{K}] > 0$ .
2. Criterio de velocidad de propagación real (“*No-Laplacian instabilities condition*”):  $c_s^2 > 0$ .
3. Criterio de subluminalidad:  $c_s \leq 1$  - Éste es opcional porque aún hoy no se sabe si la propagación superlumínica contradice el principio de causalidad, existen posturas a favor [95] y en contra [96].

en donde  $c_s^2$  se obtiene de (48) teniendo en cuenta que:

$$\left[ \frac{\delta S^{(2)}}{\delta \vec{x}} = \vec{0} \wedge \vec{x} \neq \vec{0} \right] \Leftrightarrow \det \left[ c_s^2 \left( \mathbb{K} \pm \frac{i}{\omega} \mathbb{C}_{\text{KM}} - \frac{1}{\omega^2} \mathbb{M} \right) - c_s \left( \mathbb{C}_{\text{KL}} \pm \frac{i}{\omega} \mathbb{C}_{\text{LM}} \right) + \mathbb{L} \right] = 0 \quad (49)$$

**1.7.2. Sectores vectorial y escalar de las perturbaciones.** Estos sectores no serán abordados en este trabajo debido a que las condiciones de estabilidad para estos son un poco más elaboradas (e.g: aparecen condiciones sobre la masa de las perturbaciones) y requieren tener en cuenta consideraciones adicionales sobre la invarianza de gauge de las variables empleadas en (45).

## 2. Dinámica de los diferentes Lagrangianos

Habiéndose discutido una gran parte del sustento matemático y filosófico de la teoría SU(2) generalizada de Proca, se procede a investigar las implicaciones cosmológicas de su sector  $\mathcal{L}_4$  para valorar mejor la importancia de sus diferencias con respecto a los sectores  $\mathcal{L}_4$  de otras teorías alternativas de Galileones fuertemente restringidas (y casi descartadas) por cuenta de las recientes cotas observacionales en la velocidad de propagación de las ondas gravitacionales deducidas del evento GW170817 [53, 57]. A manera de repaso, se da inicio a este estudio comenzando con una revisión del Lagrangiano  $\mathcal{L}_4^1$  de la ref. [77], ésta vez con un enfoque diferente desde la perspectiva de los diagramas de fase y criterios de estabilidad, y no desde la perspectiva de sus soluciones numéricas; eventualmente, se irán añadiendo otros Lagrangianos de interés y se irán destacando las propiedades más relevantes de cada caso.

El procedimiento escogido para estudiar cada Lagrangiano fue el siguiente: ① se define la acción de interés compuesta por (i) un término cinético para el gravitón  $\mathcal{L}_{\text{EH}}$ , (ii) un término cinético para los campos de materia  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$ , y (iii) un término asociado al Lagrangiano que se desea analizar  $\tilde{\alpha}_i \mathcal{L}_{\alpha_i}$  modulando la intensidad de su acople a la teoría mediante el parámetro adimensional  $\tilde{\alpha}_i$ ; luego, ② se aplica el principio de acción estacionaria con extremos fijos para encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a  $g_{\mu\nu}$  y  $A_\mu^a$ ; ③ se evalúan las componentes de dichas ecuaciones implementando una configuración de tríada cósmica con una métrica de Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker corroborando computacionalmente que el tensor de energía-momento sea isótropo; ④ se reescriben los resultados en términos de variables adimensionales, ⑤ se realizan diagramas de fase para estudiar las propiedades de los puntos críticos y comportamientos asintóticos del sistema, ⑥ se aplican las restricciones de estabilidad y consistencia observacional de la sección 1.7.1 y ⑦ se sintetizan

las principales propiedades de las soluciones de interés en cada caso.

### 2.1. Modelo para $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1$

Considerando que el sistema de unidades naturales [1] exige  $[x^\mu] = E^{-1}$ ,  $[L] = [\mathcal{L}][x^\mu]^3 = E$  y  $[\mathcal{L}] = [F_{\mu\nu}^a]^2 = [\partial_\mu A_\nu^a]^2 = [A_\nu^a]^2 [x^\mu]^{-2}$ , se tiene que  $[\mathcal{L}] = E^4$  y  $[A_\nu^a] = E$ , y reconociendo que por la forma de  $\mathcal{L}_4^1$  - ec. (41) - se tiene  $[\mathcal{L}_4^1] = E^6$ , es fácil ver que la constante de acoplamiento en  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1$  debe tener unidades de  $[\tilde{\alpha}] = E^{-2}$  para poder sumar este Lagrangiano con otros como  $\mathcal{L}_{\text{EH}}$  con  $[\mathcal{L}_{\text{EH}}] = E^4$ ; para este fin se define entonces  $\tilde{\alpha} \equiv \alpha/m_p^2$  con  $[\alpha] = 1$ , y se obtiene que:

$$S \equiv \int (\mathcal{L}_{\text{EH}} + \mathcal{L}_{\text{YM}} + \tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1) \sqrt{-g} d^4x = \int \left( \frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \frac{\alpha}{m_p^2} \mathcal{L}_4^1 \right) \sqrt{-g} d^4x, \quad (50)$$

$$\mathcal{L}_4^1 = \frac{1}{4} (A_b \cdot A^b) \left[ S_{[\mu}^{\mu a} S_{\nu]a}^{\nu} + (A_a \cdot A^a) R \right] + \frac{1}{2} (A_a \cdot A_b) \left[ S_{[\mu}^{\mu a} S_{\nu]b}^{\nu} + 2 (A^a \cdot A^b) R \right].$$

Al aplicar el principio de acción estacionaria con extremos fijos y evaluar las ecuaciones obtenidas en términos del conjunto de variables adimensionales  $\{\epsilon, P, X, Y, Z\}$  definidas en el Apéndice E, solo tres ecuaciones de movimiento resultan ser independientes debido a la isotropía del espacio-tiempo; éstas, (92)-(93)-(94), son:

$$(10X^2Y^2 - 188XY^3 - 32Y^4) \alpha + [X^2 + 2XY + Y^2 + 2Z^4] + \Omega_m + \Omega_r = 1,$$

$$(614X^2Y^2 + 104\sqrt{2}PY^3 + 316XY^3 - 340Y^4 + 124Y^4\epsilon) \alpha + [X^2 + 2XY + Y^2 + 2Z^4] + \Omega_r = 2\epsilon - 3,$$

$$(10X^2Y + 5\sqrt{2}PY^2 + 30XY^2 - 218Y^3 + 94Y^3\epsilon) \alpha + \left[ \frac{P}{\sqrt{2}} + 3X + 2Y + \frac{4Z^4}{Y} - Y\epsilon \right] = 0.$$

De éstas, se despejan las siguientes expresiones para (i) las variables auxiliares  $\{Z, P, \epsilon\}$  (Apéndice E.2), (ii) las constantes  $\{\beta, \gamma\}$  que caracterizan el comportamiento asintótico del sistema generando tres posibles escenarios de interés: (i) Inflación a través de asíntotas con  $\beta < 0$ , (ii) Energía oscura a través de asíntotas con  $\beta > 0$ , o (iii) Inflación a partir de condiciones iniciales al interior de la región central de  $Z^4 \geq 0$  (Apéndice E.5), (iii) los autovalores  $\{\lambda_+, \lambda_-\}$  de la matriz cinética  $\mathbb{K}$  y (iv) las velocidades de propagación de los modos

tensoriales  $\{c_{s,h\pm}^2, c_{s,\gamma\pm}^2\}$  (Apéndice E.6):

$$Z^4 = \frac{1}{2} [ -(X^2 + 2XY + Y^2) + 2Y^2(-5X^2 + 94XY + 16Y^2)\alpha + (1 - \Omega_m - \Omega_r) ] ,$$

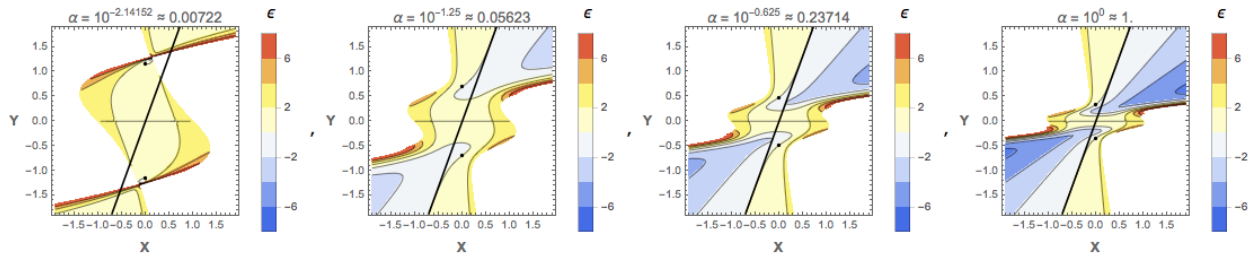
$$P = \{ 4X^2(1 + Y^2\alpha[5 + 89Y^2 - 14504Y^4\alpha]) + 2XY(1 - 2Y^3\alpha[203 + 95Y^2 + 742Y^4\alpha]) - 2(1 - \Omega_m - \Omega_r) \\ + Y^2(2Y^2\alpha[90 - 154Y^2 + 4928Y^4\alpha - 77\Omega_m - 124\Omega_r] + 4 - \Omega_m) \} \div \{ \sqrt{2}Y(1 + Y^2\alpha[10 - 166Y^2 + 9156Y^4\alpha]) \} ,$$

$$\epsilon = \frac{2Y^2\alpha(-188 + 2[255X^2 + 178XY - 77Y^2 + 14Y^2\alpha(5X - 47Y)](29X - 11Y)) + 203\Omega_m + 208\Omega_r}{2 + 4Y^2\alpha(5 - 83Y^2 + 4578Y^4\alpha)} + 4 - \Omega_m ,$$

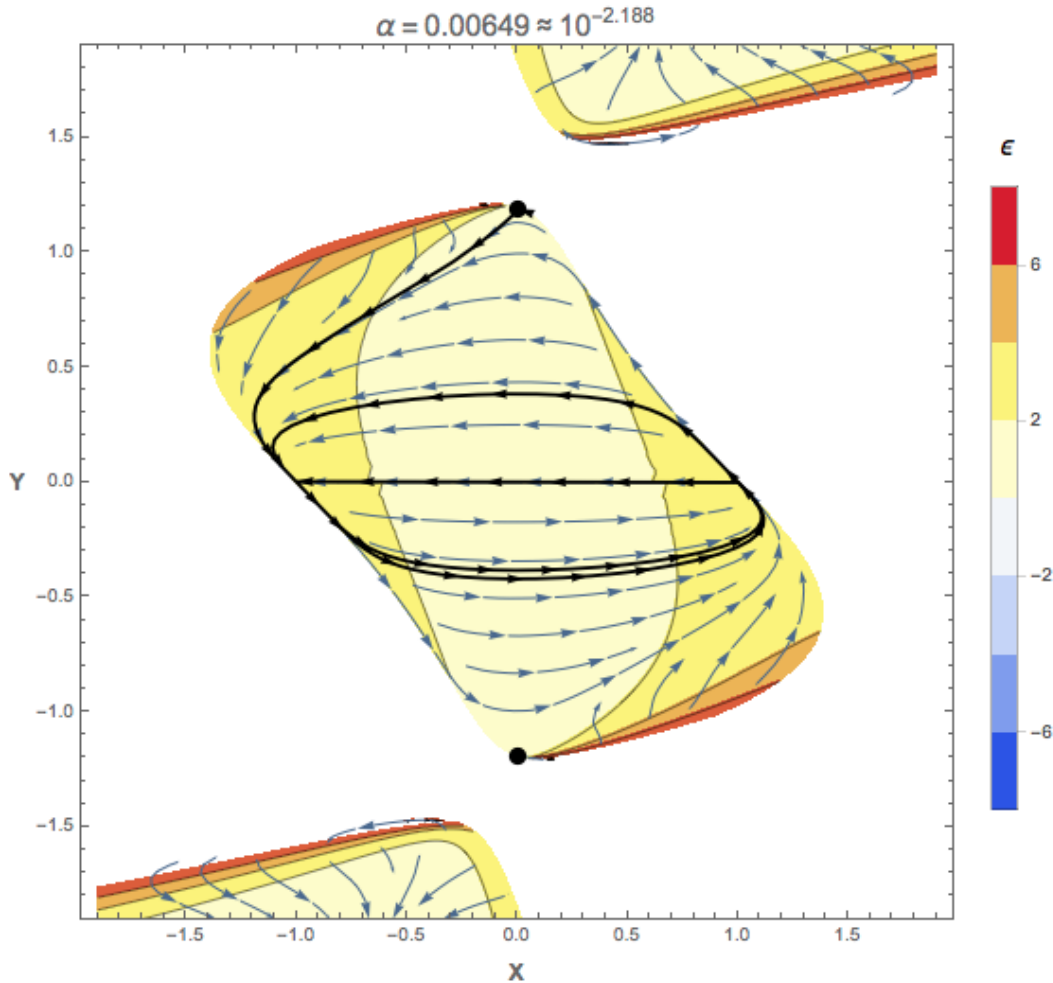
$$\left[ \begin{array}{l} \lambda_+ + \lambda_- = \frac{5}{4} + 5\alpha\hat{\psi}^2 + \frac{61}{8}\alpha\hat{\psi}^4 \\ \lambda_+ * \lambda_- = \frac{1}{8}(2 + 10\alpha\hat{\psi}^2 + 61\alpha\hat{\psi}^4 + 105\alpha^2\hat{\psi}^6) \end{array} \right] , \quad \left[ \begin{array}{l} c_{s,h\pm}^2 + c_{s,\gamma\pm}^2 = \frac{4 + 20\alpha\hat{\psi}^2 + 142\alpha\hat{\psi}^4 + 310\alpha^2\hat{\psi}^6}{2 + 10\alpha\hat{\psi}^2 + 61\alpha\hat{\psi}^4 + 105\alpha^2\hat{\psi}^6} \\ c_{s,h\pm}^2 * c_{s,\gamma\pm}^2 = \frac{2 + 10\alpha\hat{\psi}^2 + 81\alpha\hat{\psi}^4 + 205\alpha^2\hat{\psi}^6}{2 + 10\alpha\hat{\psi}^2 + 61\alpha\hat{\psi}^4 + 105\alpha^2\hat{\psi}^6} \end{array} \right] .$$

$$\beta = \frac{29}{11} \approx \tan^{-1}(69,2^\circ) \quad , \quad \gamma^4 = \frac{36025917}{14641} \alpha .$$

Con base en estas expresiones, es posible estudiar algunos diagramas de fase representativos (Figuras 1-2-3) restringidos a la región matemáticamente viable  $Z^4 \geq 0$  y al subespacio  $\{\Omega_m, \Omega_r\} = 0$  (suposición válida durante la época inflacionaria primordial o durante la época tardía dominada por energía oscura, además necesaria para reducir la dimensión del sistema autónomo (96)); esto con el fin de investigar los diferentes escenarios previamente expuestos.



**Figura 1. Topología del diagrama de fase para el modelo en función de  $\alpha$ .** Se evidencia que las disminuciones en  $\alpha$  se traducen en expansiones verticales de la región central, lo cual implica soluciones inflacionarias de mayor duración; existe un valor  $\alpha_{\text{crit}}$  en el que las regiones externas se separan de la región central y presentan “puntos de ruptura” con  $[Z = 0] \wedge [\epsilon \rightarrow \infty]$ , de éstas se deducen (i) sus coordenadas  $(X_r; Y_r) \approx (\pm 0,132; \mp 1,282)$  y (ii) el valor de  $\alpha_{\text{crit}} \approx 10^{-2,14152} \approx 0,00722$ . Las rectas diagonales representan asíntotas de energía oscura viables cuando se cumplen los criterios de la (Tabla 1). Los puntos destacados son puntos críticos (Apéndice E.4) con coordenadas  $(X_c; Y_c) \approx (0; \mp 1,158)$  cuando  $\alpha = \alpha_{\text{crit}}$ .



*Figura 2. Ejemplo de una solución inflacionaria en el modelo con  $\alpha < \alpha_{\text{crit}}$  y condiciones iniciales  $(X_0; Y_0) = (0,0011; 1,189)$  tomadas de (Rodríguez et al., 2017) al interior de la región viable  $Z^4 \geq 0$  y cerca de su frontera para procurar la mayor distancia posible entre el estado inicial y el estado final  $Y = 0$  que, en este caso, permite obtener 86 e-folds de inflación. Los puntos en negro dan el punto crítico  $(X_c; Y_c) = (0; \pm 1,18937)$  del (Apéndice E.4).*

El siguiente ejemplo es útil para ilustrar la importancia de la relación entre el tamaño de la región central y la duración de las soluciones; se expone una solución inflacionaria para un valor de  $\alpha > \alpha_{\text{crit}}$  mayor al caso anterior y evidencia que, si bien el tamaño de la región central se redujo a la mitad, el descenso en la duración de las soluciones es mucho más drástico y cae de los 86 e-folds a tan solo 4, lo cual evidencia una relación no lineal.



Otra propiedad a destacar es que, dado que  $\beta = \frac{29}{11} > 0 \forall \alpha$ , este modelo solo puede generar asíntotas de energía oscura y no de tipo inflacionario; no obstante, la carencia de este tipo de asíntotas fácilmente es compensada por su habilidad para albergar soluciones inflacionarias en la región central del diagrama de fase. Ya que la dinámica de las soluciones de energía oscura en los diagramas de fase es demasiado simple (se limita a seguir una asíntota), se ha optado por no mostrarla en este trabajo, pero algunas soluciones numéricas detalladas para inflación y energía oscura se muestran en la referencia [77].

Un par de dificultades importantes al investigar esta clase de modelos es que (i) las ecuaciones diferenciales a resolver son “rígidas” (fallan ante ciertos métodos de integración numérica) y (ii) para poder visualizar las soluciones en un diagrama de fase bidimensional se requiere tomar el límite de de Sitter ( $\{\Omega_m, \Omega_r\} \rightarrow 0$ ) - una buena aproximación del universo en épocas de inflación primordial o un futuro dominado por energía oscura en  $t \rightarrow \infty$  - pero éste no es más que una simple aproximación y eventualmente se deben considerar estas variables para analizar el universo en cualquier tiempo. Estas dificultades hacen que el proceso de encontrar un conjunto saludable de condiciones iniciales capaz de reproducir la historia térmica del universo<sup>31</sup> sea una tarea ardua que aún hoy en día sigue siendo motivo de estudio, que puede facilitarse si se logra depurar aún más la ventana de parámetros viable.

Incorporando los criterios de consistencia del comportamiento asintótico - ecuación (99), criterios de estabilidad de los modos tensoriales (Sección 1.7.1 y Apéndice E.6) y recientes restricciones del evento GW170817 (Apéndice E.7), se construyen las siguientes tablas:

---

<sup>31</sup> El universo fue inicialmente dominado por materia caliente, luego fría y luego energía oscura.

$\forall \hat{\psi}$	Dinámica	Fantasmas		Inest. Laplacianas			Subluminalidad		Ondas grav.
<b>Paráms</b>	$\beta > 0$ $\gamma \in \mathbb{R}$	$\lambda_+ + \lambda_- > 0$	$\lambda_+ \times \lambda_- > 0$	$\mathcal{S} > 0$	$\mathcal{P} > 0$	$\mathcal{D} > 0$	$c_{s,h\pm}^2 \leq 1$	$c_{s,\gamma\pm}^2 \leq 1$	$c_{s,h\pm}^2 = 1$
$\alpha \neq 0$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	$\alpha > 0$
	$\alpha > 0$	$\alpha > 0$		$\alpha > 0$			×		
		×							
×									

*Tabla 1. Criterios de consistencia para soluciones asintóticas en el modelo de  $\mathcal{L}_4^1$ .* Se indica si es posible o no garantizar los diferentes criterios de estabilidad-consistencia observacional (y sus intersecciones) para todo  $\hat{\psi} \in \mathbb{R}$  con sus respectivas ventanas de parámetros. Algunos autores defienden que el criterio de subluminalidad es opcional. El rango asumido para  $\hat{\psi}$  y cada uno de los criterios se explican con detalle en los (Apéndices .5-.6-.7-.8).

De acuerdo con la Tabla 1 es posible tener soluciones saludables de energía oscura al obviar el criterio de causalidad [96] y, si existe un conjunto de condiciones iniciales capaz de reproducir la historia térmica del universo hasta la actualidad, dichas soluciones serán exitosas. Para estudiar la viabilidad de las soluciones en la región central se puede elaborar una tabla similar teniendo en cuenta que los valores de  $\hat{\psi}$  para las soluciones deseables (las de mayor duración) estarán en el intervalo  $[-\sqrt{2}Y_c, \sqrt{2}Y_c]$ :

$\forall \hat{\psi} \in [-\sqrt{2}Y_c, \sqrt{2}Y_c]$	Fantasmas		Inest. Laplacianas			Subluminalidad	
<b>Parámetros</b>	$\lambda_+ + \lambda_- > 0$	$\lambda_+ \times \lambda_- > 0$	$\mathcal{S} > 0$	$\mathcal{P} > 0$	$\mathcal{D} > 0$	$c_{s,h\pm}^2 \leq 1$	$c_{s,\gamma\pm}^2 \leq 1$
$\alpha \neq 0$ $\Omega_m = 0, \Omega_r = 0$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×
	$\alpha > 0$		$\alpha > 0$			×	
	×						

*Tabla 2. Criterios de consistencia para soluciones en la región central del modelo para  $\mathcal{L}_4^1$ .* Se muestra que (i) los criterios satisfechos por las soluciones en la región central coinciden con los criterios asintóticos, y (ii) el criterio de subluminalidad sigue violándose a pesar de haber exigido que la teoría sea saludable en un rango de  $\hat{\psi}$  menos amplío.

La conclusión para  $\mathcal{L}_4^1$  es la siguiente: (i) si se impone el requisito de subluminalidad y los cálculos de las tablas son correctos, el modelo no es viable, (ii) si se relaja el criterio de subluminalidad, se tiene un modelo saludable con  $\alpha > 0$  aunque esto no aporta gran cosa al problema de las soluciones fuera del límite de de Sitter, (iii) quizá otro Lagrangiano pueda corregir esto. A continuación se listan algunas conclusiones adicionales que pueden deducirse sobre los diferentes modelos de la teoría SU(2) generalizada de Proca:

### Conclusiones independientes del modelo:

Teniendo en cuenta las ideas y expresiones presentes en los (Apéndices E.2, E.5 y E.9) y extrapolando las observaciones hechas hasta el momento, se observa que por regla general, todo modelo con asíntotas<sup>32</sup> que no incluya a  $\theta_1$  presentará las siguientes características:

1. Siempre habrá un conjunto de parámetros  $\vec{\alpha}_{\text{crit}}$  que cause la separación del diagrama de fase en 2 regiones; además, si  $Y_c \in \mathbb{R}$ , los “puntos de ruptura” se ubicarán en  $Y_r \sim \mathcal{O}(Y_c)$ .
2. Las soluciones dentro de la región central, permanecen dentro y generan inflación.
3. Siempre que la región central y la exterior estén conectadas y  $Y_c \in \mathbb{R}$ , las soluciones con  $|Y_0| \gtrsim |Y_c|$  evolucionarán hacia la asíntota  $Y = \beta X$  con dirección a  $\text{Sign}(\beta) \infty$ .<sup>33</sup>

---

<sup>32</sup> Los únicos modelos sin asíntotas son aquellos compuestos únicamente por parámetros que no influyan en la expresión para  $\beta$  (97), i.e: combinaciones exclusivas de  $\{\lambda, \chi_1, \chi_2, \chi_1\}$  (Apéndice E.9).

<sup>33</sup> Esto se debe a que  $(X, Y) = (0, Y_c)$  será un punto de silla.

## 2.2. Modelo para $\tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2$

Usando el mismo razonamiento de la sección anterior; se conoce la forma del  $\mathcal{L}_4^2$  - ec.(42) - y se ve que  $[\mathcal{L}_4^2] = E^6$ , entonces la constante de acople en  $\tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2$  debe tener unidades  $[\tilde{\kappa}] = E^{-2}$ ; para arreglar esto, se define  $\tilde{\kappa} \equiv \kappa/m_p^2$  con  $[\kappa] = 1$ , y se obtiene la siguiente acción:

$$S \equiv \int (\mathcal{L}_{\text{EH}} + \mathcal{L}_{\text{YM}} + \tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2) \sqrt{-g} d^4x = \int \left( \frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \frac{\kappa}{m_p^2} \mathcal{L}_4^2 \right) \sqrt{-g} d^4x ,$$

$$\mathcal{L}_4^2 = \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) \left[ S_{[\mu}^{\mu a} S_{\nu]}^{\nu b} + (A^a \cdot A^b) R \right] + \frac{1}{2} (A^{\mu a} A^{\nu b}) \left[ S_{[\mu|a}^{\rho} S_{\nu]\rho b} - A_a^\rho A_b^\sigma R_{\mu\nu\rho\sigma} - (\nabla^\rho A_{(\mu|a}) (\nabla_{\rho} A_{|\nu)b}) \right] .$$

de la cual se deducen las ecuaciones de movimiento independientes adimensionalizadas:

$$(2X^2Y^2 - 20XY^3 - 12Y^4) \kappa + [X^2 + 2XY + Y^2 + 2Z^4] + \Omega_m + \Omega_r = 1 ,$$

$$(70X^2Y^2 + 12\sqrt{2}PY^3 + 108XY^3 + 24Y^4 - 4Y^4\epsilon) \kappa + [X^2 + 2XY + Y^2 + 2Z^4] + \Omega_r = 2\epsilon - 3 ,$$

$$(2X^2Y + \sqrt{2}PY^2 + 6XY^2 - 6Y^3 + 10Y^3\epsilon) \kappa + \left[ \frac{P}{\sqrt{2}} + 3X + 2Y + \frac{4Z^4}{Y} - Y\epsilon \right] = 0 ,$$

y se encuentra que  $\{Z, P, \epsilon\}$ ,  $\{\beta, \gamma\}$ ,  $\{\lambda_+, \lambda_-\}$ ,  $\{c_{s,h\pm}^2, c_{s,\gamma\pm}^2\}$  están dados por:

$$Z^4 = \frac{1}{2} [ -(X^2 + 2XY + Y^2) + 2Y^2(-X^2 + 10XY + 6Y^2)\kappa + (1 - \Omega_m - \Omega_r) ] ,$$

$$P = \{ 4X^2(1 + Y^2\kappa[1 + 19Y^2 - 168Y^4\kappa]) + 2XY(1 - 2Y^2\kappa[23 - 33Y^2 + 366Y^4\kappa]) - 4(1 - \Omega_m - \Omega_r) + Y^2(2Y^2\kappa[-42 + 18Y^2 - 216Y^4\kappa + 9\Omega_m + 4\Omega_r] + 4 - \Omega_m) \} \div \{ \sqrt{2}Y(1 + 2Y^2\kappa[1 - 5Y^2 + 62Y^4\kappa]) \} ,$$

$$\epsilon = \frac{2Y^2\kappa(-20 + 2[29X^2 + 38XY + 9Y^2 + 2Y^2\kappa(X - 5Y)(23X + 9Y)] + 23\Omega_m + 24\Omega_r) + 4 - \Omega_m}{2 + 4Y^2\kappa(1 - 5Y^2 + 62Y^4\kappa)} ,$$

$$\left[ \begin{array}{l} \lambda_+ + \lambda_- = \frac{5}{4} + \kappa\hat{\psi}^2 + \frac{19}{8}\kappa\hat{\psi}^4 \\ \lambda_+ * \lambda_- = \frac{1}{8}(2 + 2\kappa\hat{\psi}^2 + 19\kappa\hat{\psi}^4 + \kappa^2\hat{\psi}^6) \end{array} \right] , \left[ \begin{array}{l} c_{s,h\pm}^2 + c_{s,\gamma\pm}^2 = \frac{4+4\kappa\hat{\psi}^2+18\kappa\hat{\psi}^4+30\kappa^2\hat{\psi}^6}{2+2\kappa\hat{\psi}^2+19\kappa\hat{\psi}^4+\kappa^2\hat{\psi}^6} \\ c_{s,h\pm}^2 * c_{s,\gamma\pm}^2 = \frac{2+2\kappa\hat{\psi}^2-\kappa\hat{\psi}^4-3\kappa^2\hat{\psi}^6}{2+2\kappa\hat{\psi}^2+19\kappa\hat{\psi}^4+\kappa^2\hat{\psi}^6} \end{array} \right] .$$

$$\beta = -\frac{23}{9} \approx \tan^{-1}(-68,6^\circ) \quad , \quad \gamma^4 = \frac{180389}{2187} \kappa .$$

Ya que este modelo presenta  $\beta < 0 \forall \kappa$ , se deduce que la dinámica de  $\tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2$  será completamente opuesta a la de  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1$ : las líneas de flujo irán hacia el interior de la región central y el modelo no generará asintotas de energía oscura, pero sí de tipo inflacionario; esto, que en principio puede verse como un problema del modelo, en efecto lo es, pero fácilmente podría remediarse planteando en vez de éste, un modelo compuesto por una combinación lineal entre  $\tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2$  y  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1$  que permita tener tanto  $\beta < 0$  como  $\beta > 0$  si se desea; esta posibilidad se investigará con más detalle en secciones posteriores, pero por ahora, se procede al estudio de criterios de estabilidad y diagramas de fase:

$\forall \hat{\psi}$	Dinámica		Fantasmas		Inest. Laplacianas			Subluminalidad		GW
Paráms	$\beta < 0$ $\gamma \in \mathbb{R}$	$\beta > 0$ $\gamma \in \mathbb{R}$	$\lambda_+ + \lambda_- > 0$	$\lambda_+ \times \lambda_- > 0$	$\mathcal{S} > 0$	$\mathcal{P} > 0$	$\mathcal{D} > 0$	$c_{s,h\pm}^2 \leq 1$	$c_{s,\gamma\pm}^2 \leq 1$	$c_{s,h\pm}^2 = 1$
$\kappa \neq 0$	✓	×	✓	✓	✓	×	✓	✓	×	×
	$\kappa > 0$		$\kappa > 0$		×			×		
			×			×				
			×			×				

*Tabla 3. Criterios de consistencia para soluciones asintóticas en el modelo de  $\mathcal{L}_4^2$ .* Se muestra que este modelo no puede generar soluciones asintóticas de energía oscura y además es incapaz de asegurar la viabilidad de las soluciones inflacionarias asintóticas en lo relativo a fantasmas, inestabilidades Laplacianas, subluminalidad y ondas gravitacionales.

En la Tabla 3 se aprecia cómo el modelo de  $\mathcal{L}_4^2$ , en comparación con el de  $\mathcal{L}_4^1$ , exhibe muchas más dificultades para satisfacer los criterios de estabilidad y consistencia observacional a lo largo de sus asintotas; no obstante, esto es fácil de solucionar añadiendo un nuevo parámetro libre que permita ampliar la ventana de parámetros viables. Otras propiedades del modelo, se destacan a continuación en las Figuras 4 y 5:

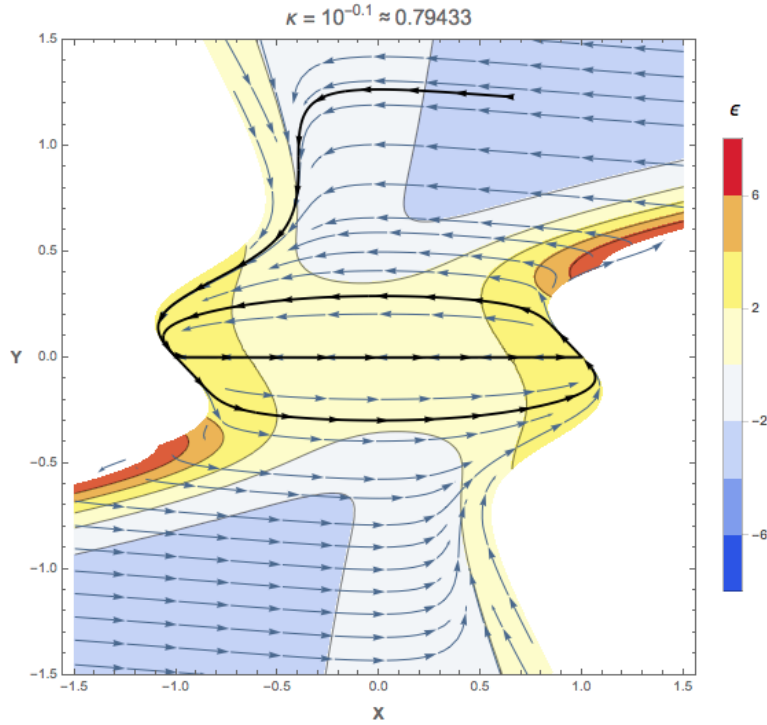


Figura 4. Ejemplo de una solución numérica en el modelo de  $\mathcal{L}_4^2$  con  $\kappa > \kappa_{\text{crit}}$  y condiciones iniciales  $(X_0; Y_0) = (0,60432; 1,2345)$ . El número de e-folds obtenido es de 4,3; para obtener valores mayores a 50 e-folds, se requerirían valores de  $Y_0$  del orden de  $\mathcal{O}(Y_0) \sim 10^9$  pero estos suelen generar inestabilidades en el integrador numérico.

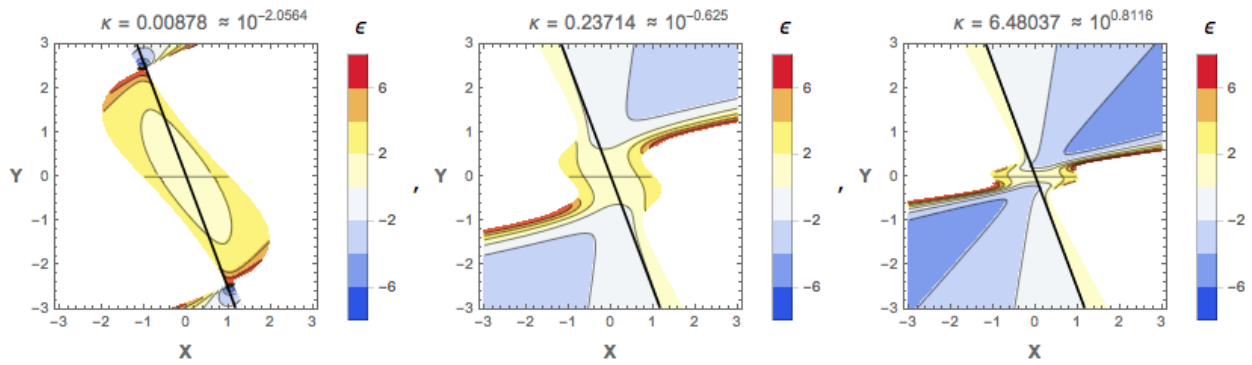


Figura 5. Topología del diagrama de fase para el modelo de  $\mathcal{L}_4^2$  en función de  $\kappa$ . Similar a lo observado en el modelo anterior, se confirma que (i) existe un valor límite  $\kappa_{\text{crit}} \approx 0,00879$  que cambia la conexidad del diagrama de fase, (ii) las disminuciones en  $\kappa$  implican aumentos en el tamaño de la región central, sin embargo, (iii) parece ser que en este caso,  $[\epsilon \rightarrow \infty]$  no se da precisamente en los “puntos de ruptura” sino en su vecindad; pero a pesar de ello, se mantiene que  $[Z = 0]$  y es posible estimar sus coordenadas  $(X_r; Y_r) = (\pm 1,2511; \mp 2,74646)$ .

### Una explicación definitiva a los problemas de $\mathcal{L}_4^2$ :

Teniendo en cuenta las múltiples deficiencias del modelo para  $\mathcal{L}_4^2$  era lógico que surgiera la pregunta de si su naturaleza problemática podía hallar una razón fundamental en la construcción de la teoría y, en efecto, esta sospecha fue confirmada por un reciente artículo de Errasti et. al [97] (Mayo 16 de 2019) en el que los autores señalan que durante la construcción de las teorías generalizadas de Proca [7] y [40] se impuso la “restricción del Hessiano primario” pero no se aseguró el cumplimiento de una ligadura secundaria necesaria para garantizar la propagación del número adecuado de grados de libertad en la teoría.

Implementando esta nueva ligadura en el Lagrangiano más general del (Apéndice E) se descubre que  $\mathcal{L}_4^2$  y  $\mathcal{L}_4^3$  deben desaparecer por completo para satisfacer la ligadura secundaria y, como consecuencia de esto, el sector  $\mathcal{L}_4$  de la teoría SU(2) generalizada de Proca se reduce simplemente al Lagrangiano  $\mathcal{L}_4^1$ . Llegado este punto, y recordando que el modelo para el Lagrangiano  $\mathcal{L}_4^1$  aún presenta violaciones al criterio de subluminalidad, es conveniente investigar la posibilidad de emplear los Lagrangianos de curvatura  $\{\tilde{\theta}_1 \mathcal{L}_1^{\text{Curv}}, \tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}}\}$  y Lagrangianos de tipo Yang-Mills  $\{\tilde{\chi}_1 \mathcal{L}_{A^4}^{(1)}, \tilde{\chi}_2 \mathcal{L}_{A^4}^{(2)}, \tilde{\chi}_3 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)}, \tilde{\chi}_4 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(4)}\}$  como medida de apoyo para solucionar los problemas de subluminalidad del  $\mathcal{L}_4^1$ .

### 2.3. Modelo para $\tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$

Dada la expresión para  $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$  en el (Apéndice E), se deduce que  $[\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}] = E^6$ , por ende, la constante de acople en  $\tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$  debe tener unidades  $[\tilde{\theta}_4] = E^{-2}$  y, definiendo  $\tilde{\theta}_4 \equiv \theta_4/m_p^2$  con  $[\theta_4] = 1$ , la acción de interés resulta ser:

$$S \equiv \int (\mathcal{L}_{\text{EH}} + \mathcal{L}_{\text{YM}} + \tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}}) \sqrt{-g} d^4x = \int \left( \frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \frac{\theta_4}{m_p^2} \mathcal{L}_4^{\text{Curv}} \right) \sqrt{-g} d^4x ,$$

$$\mathcal{L}_4^{\text{Curv}} = L_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\mu a} A_a^\nu A^{\rho b} A_b^\sigma \quad , \quad L_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\tau\phi} \epsilon^{\rho\sigma\eta\xi} R_{\tau\phi\eta\xi} ,$$

la cual da origen a las siguientes ecuaciones de movimiento independientes y adimensionales:

$$-32Y^3 (2X + Y) \theta_4 + [X^2 + 2XY + Y^2 + 2Z^4] + \Omega_m + \Omega_r = 1 ,$$

$$(192X^2Y^2 + 32\sqrt{2}PY^3 + 256XY^3 + 32Y^4) \theta_4 + [X^2 + 2XY + Y^2 + 2Z^4] + \Omega_r = 2\epsilon - 3 ,$$

$$32Y^3 (\epsilon - 1) \theta_4 + \left[ \frac{P}{\sqrt{2}} + 3X + 2Y + \frac{4Z^4}{Y} - Y\epsilon \right] = 0 ,$$

y sus expresiones para  $\{Z, P, \epsilon\}$ ,  $\{\beta, \gamma\}$ ,  $\{\lambda_+, \lambda_-\}$ ,  $\{c_{s,h\pm}^2, c_{s,\gamma\pm}^2\}$  están dadas por:

$$Z^4 = \frac{1}{2} \left[ -(X^2 + 2XY + Y^2) + 32Y^3(2X + Y)\theta_4 + (1 - \Omega_m - \Omega_r) \right] ,$$

$$P = \left\{ X^2(4 + 192Y^4\theta_4[1 - 32Y^2\theta_4]) + 2XY(1 - 32Y^2\theta_4[4 - 5Y^2 + 160Y^4\theta_4]) - 4(1 - \Omega_m - \Omega_r) \right. \\ \left. + Y^2(-32Y^4\theta_4[+32Y^2\theta_4 - 1] + 4 - \Omega_m) \right\} \div \left\{ \sqrt{2}Y(1 + 32Y^4\theta_4[32Y^4\theta_4 - 1]) \right\} ,$$

$$\epsilon = \frac{64Y^2\theta_4(5X^2 + 6XY + Y^2 - 32Y^3(4X + Y)\theta_4 - 2(1 - \Omega_m - \Omega_r)) + 4 - \Omega_m}{2 + 64Y^4\theta_4(32Y^2\theta_4 - 1)} ,$$

$$\left[ \begin{array}{l} \lambda_+ + \lambda_- = \frac{5}{4} - 2\theta_4 \hat{\psi}^4 \\ \lambda_+ * \lambda_- = \frac{1}{8} (2 - 16\theta_4 \hat{\psi}^4 - 128\theta_4^2 \hat{\psi}^6) \end{array} \right] , \quad \left[ \begin{array}{l} c_{s,h\pm}^2 + c_{s,\gamma\pm}^2 = \frac{4 - 16\theta_4 \hat{\psi}^4}{2 - 16\theta_4 \hat{\psi}^4 - 128\theta_4^2 \hat{\psi}^6} \\ c_{s,h\pm}^2 * c_{s,\gamma\pm}^2 = \frac{2}{2 - 16\theta_4 \hat{\psi}^4 - 128\theta_4^2 \hat{\psi}^6} \end{array} \right] .$$

$$\beta = -4 \approx \tan^{-1}(-66,34^\circ) \quad , \quad \gamma^4 = 2048 \theta_4 .$$

Fácilmente se verifica que este modelo tiene una dinámica similar a la de  $\tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2$ : las líneas de flujo se dirigen hacia el interior de la región central, no genera asíntotas de energía

oscura y sus condiciones de estabilidad fallan (incluso a pesar de haber sobrevivido al criterio señalado por Errasti et. al); esto puede corroborarse en las Figuras 6-7 y la Tabla 4.

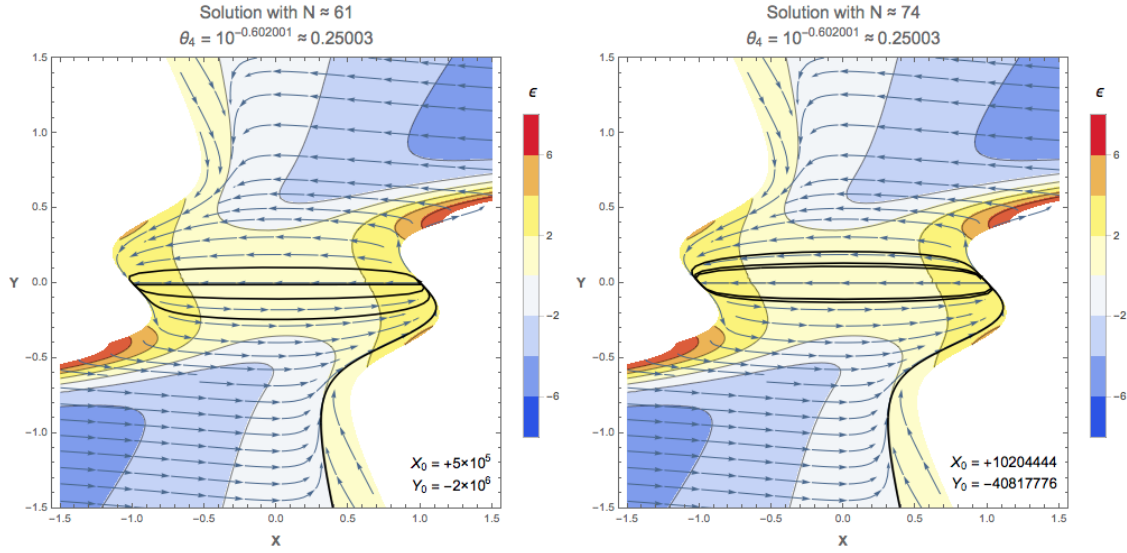


Figura 6. Ejemplos de soluciones inflacionarias para  $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$  con  $\theta_4 > \theta_{4,\text{crit}}$  y condiciones iniciales (i)  $(X_0; Y_0) = (5 \times 10^5; -2 \times 10^6)$ , (ii)  $(X_0; Y_0) = (10204444; -40817776)$ . En ambos casos las soluciones tienden a estabilizarse en una época dominada por la radiación luego de un periodo prolongado con  $\epsilon = 0$  a lo largo de la asíntota  $Y = \beta X$ . La duración de inflación en ambos casos es superior a los 60 e-folds: 61 y 74 e-folds respectivamente.

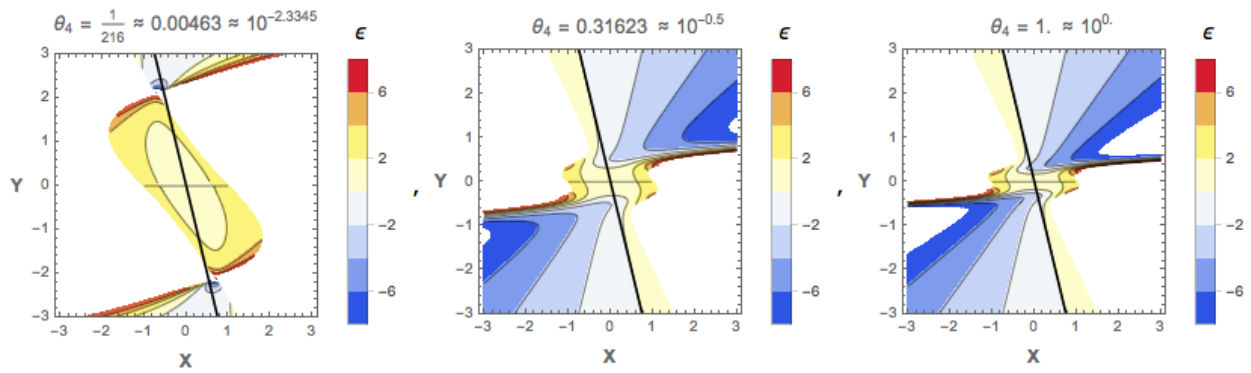


Figura 7. Topología del diagrama de fase para el modelo en función de  $\theta_4$ . Similar al modelo anterior, se confirma que (i) existe un valor límite  $\theta_{4,\text{crit}} = \frac{1}{216} \approx 0,00463$  que cambia la conexidad del diagrama de fase, (ii) las disminuciones en  $\theta_4$  implican aumentos en el tamaño de la región central, (iii) los “puntos de ruptura” presentan  $[Z = 0] \wedge [\epsilon \rightarrow \infty]$  y se deduce que sus coordenadas son  $(X_r; Y_r) = (\mp 1/\sqrt{2}; \pm 3/\sqrt{2}) \approx (\mp 0,707; \mp 2,121)$ .

Se observa que el modelo es capaz de albergar soluciones estables con duraciones prolongadas, pero, como se verá a continuación, los criterios de estabilidad-consistencia lo hacen inviable:

$\forall \hat{\psi}$	Dinámica		Fantasmas		Inest. Laplacianas			Subluminalidad		GW
<b>Paráms</b>	$\beta < 0$ $\gamma \in \mathbb{R}$	$\beta > 0$ $\gamma \in \mathbb{R}$	$\lambda_+ + \lambda_-$ $> 0$	$\lambda_+ \times \lambda_-$ $> 0$	$\mathcal{S} > 0$	$\mathcal{P} > 0$	$\mathcal{D} > 0$	$c_{s,h\pm}^2 \leq 1$	$c_{s,\gamma\pm}^2 \leq 1$	$c_{s,h\pm}^2 = 1$
$\theta_4 \neq 0$	✓	×	✓	×	✓	✓	×	×	×	×
	$\theta_4 > 0$		×		×			×		
			×			×				
$\theta_4 > 0$		×			×			×		
		×			×			×		

Tabla 4. Criterios de consistencia para soluciones asintóticas en el modelo de  $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$ .

Se ve que este Lagrangiano, por sí solo, no es saludable. Tiene asíntotas negativas con una dinámica muy interesante capaz de albergar soluciones inflacionarias de larga duración, pero dichas soluciones violan todos los criterios de estabilidad.

### Observaciones finales sobre el $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$ :

Aunque todas estas deficiencias (vistas por primera vez con el  $\mathcal{L}_4^2$ ) se hayan presentado (de nuevo), hay que tener en cuenta que aún existe la posibilidad de plantear una combinación lineal con  $\alpha$  y otros Lagrangianos de la teoría para investigar en qué medida una elección adecuada de los parámetros puede modular suficientemente bien las virtudes y deficiencias de cada término dando origen (o no) a una acción saludable con dinámicas inflacionarias y de energía oscura interesantes.

### Panorama general de los modelos analizados:

Hasta el momento se sabe que (i)  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1$  es capaz de generar periodos de inflación prolongados en su región central y épocas de energía oscura a través de sus asíntotas, en ambos casos, violando únicamente el principio de causalidad, (ii)  $\tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2$  y  $\tilde{\lambda} \mathcal{L}_4^3$  se tuvieron que descartar debido a la ligadura secundaria mencionada por Errasti et. al, y (iii)  $\tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$  genera periodos de inflación con suficiente duración (a través de sus asíntotas), pero no cuenta con soluciones de energía oscura y, por desgracia, viola todos los criterios de estabilidad. Es posible que, por la forma de sus términos, la adición de un Lagrangiano de tipo Yang-Mills sea útil para ayudar a solucionar problemas a nivel perturbativo, de modo que es útil analizar algunos de estos términos a continuación.

#### 2.4. Propiedades de estabilidad para $\tilde{\chi}_3 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)} + \tilde{\chi}_4 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)}$

Teniendo en cuenta las expresiones para estos Lagrangianos (Apéndice E), se verifica que  $[\mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(i)}] = E^6$ , ergo, las constantes de acople en  $\tilde{\chi}_i \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(i)}$  deben tener unidades  $[\tilde{\chi}_i] = E^{-2}$ . Introduciendo la reparametrización  $\tilde{\chi}_i \equiv \chi_i/m_p^2$ , y definiendo  $\chi_{34} \equiv \chi_3 + \chi_4$  con  $[\chi_i] = 1$ , se deduce que la acción de interés tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S &\equiv \int (\mathcal{L}_{\text{EH}} + \mathcal{L}_{\text{YM}} + \tilde{\chi}_3 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)} + \tilde{\chi}_4 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)}) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int \left( \frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \frac{\chi_3}{m_p^2} \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)} + \frac{\chi_4}{m_p^2} \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)} \right) \sqrt{-g} d^4x, \\ \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)} &= (A_\mu^a A_{\nu a}) (G^{\mu\rho b} G^\nu_{\rho b}) \quad , \quad \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)} = (A_\mu^a A_{\nu b}) (G^{\mu\rho b} G^\nu_{\rho a}) . \end{aligned}$$

Con base en ésta, se hallan las 3 ecuaciones de movimiento independientes y adimensionales:

$$\begin{aligned}
& -4Y^2 (X^2 + 2XY + Y^2) \chi_{34} + [X^2 + 2XY + Y^2 + 2Z^4] + \Omega_m + \Omega_r = 1 , \\
& 4Y^2 (X^2 + 2XY + Y^2) \chi_{34} + [X^2 + 2XY + Y^2 + 2Z^4] + \Omega_r = 2\epsilon - 3 , \\
& -2Y [2X^2 + 6XY + Y(\sqrt{2}P - 2Y(\epsilon - 1))] \chi_{34} + \left[ \frac{P}{\sqrt{2}} + 3X + 2Y + \frac{4Z^4}{Y} - Y\epsilon \right] = 0 .
\end{aligned}$$

Para que éstas se satisfagan automáticamente, es necesario que  $\{Z, P, \epsilon\}$  estén dados por:

$$\begin{aligned}
Z^4 &= \frac{1}{2} [ -(X^2 + 2XY + Y^2) (4Y^2 \chi_{34} - 1) + (1 - \Omega_m - \Omega_r) ] , \\
P &= \{ 2XY(-1 + 4Y^2 \chi_{34}(1 + 8Y^4 \chi_{34})) + 4X^2(-1 + 2Y^2 \chi_{34}(1 - Y^2 + 4Y^4 \chi_{34})) \} \div \{ \sqrt{2}Y(-1 + 4Y^2 \chi_{34}) \\
& Y^2(-4 + 4Y^2 \chi_{34}(6 - 2Y^2 + 8Y^4 \chi_{34} - \Omega_m) + \Omega_m) + 4(1 - \Omega_m - \Omega_r) \} , \\
\epsilon &= 2 + 4Y^2(X + Y)^2 \chi_{34} - (\Omega_m/2) .
\end{aligned}$$

De otra parte, los autovalores y velocidades de propagación de los modos tensoriales tienen:

$$\left[ \begin{array}{l} \lambda_+ + \lambda_- = \frac{5}{4} - 2\chi_{34}\hat{\psi}^2 \\ \lambda_+ * \lambda_- = \frac{1}{8}(2 - 4\chi_{34}\hat{\psi}^2) \end{array} \right] , \quad \left[ \begin{array}{l} c_{s,h\pm}^2 + c_{s,\gamma\pm}^2 = \frac{4+4(\chi_4-3\chi_{34})\hat{\psi}^2}{2-4\chi_{34}\hat{\psi}^2} \\ c_{s,h\pm}^2 * c_{s,\gamma\pm}^2 = \frac{2+4(\chi_4-2\chi_{34})\hat{\psi}^2}{2-4\chi_{34}\hat{\psi}^2} \end{array} \right] .$$

y una vez más, se presenta un comportamiento asintótico que es caracterizado por:

$$\beta = -1 = \tan^{-1}(-45^\circ) \quad , \quad \gamma^4 = 0 .$$

En este caso, los diagramas de fase no serán de especial interés, (debido a que su atractivo radica esencialmente en su sector perturbativo y no tanto en su dinámica); habiendo aclarado esto, los criterios de estabilidad y consistencia observacional se resumen en:

$\forall \hat{\psi}$	Dinámica		Fantasmas		Inest. Laplacianas			Subluminalidad		GW
Paráms	$\beta < 0$ $\gamma \in \mathbb{R}$	$\beta > 0$ $\gamma \in \mathbb{R}$	$\lambda_+ + \lambda_-$ $> 0$	$\lambda_+ \times \lambda_-$ $> 0$	$\mathcal{S} > 0$	$\mathcal{P} > 0$	$\mathcal{D} > 0$	$c_{s,h\pm}^2 \leq 1$	$c_{s,\gamma\pm}^2 \leq 1$	$c_{s,h\pm}^2 = 1$
$\chi_3, \chi_4$	-	-	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	$(\chi_3 \leq 0) \wedge$ $(\chi_4 \leq -\chi_3)$
	-		$\chi_4 \leq -\chi_3$		$(\chi_3 \leq 0) \wedge (\chi_4 \leq -\chi_3) \vee$ $(\chi_3 > 0) \wedge (\chi_4 \leq -2\chi_3)$			$(\chi_3 \geq 0) \wedge (\chi_4 \leq -\chi_3)$		
			$(\chi_3 \geq 0) \wedge (\chi_4 \leq -2\chi_3)$							
			$(\chi_3 = 0 \wedge \chi_4 < 0)$							

*Tabla 5. Criterios de consistencia para soluciones asintóticas en el modelo de  $\tilde{\chi}_3 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)} + \tilde{\chi}_4 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)}$ .* Se evidencia que el modelo con  $\chi_3 = 0$  y  $\chi_4 < 0$  es capaz de satisfacer todos los criterios de estabilidad y consistencia observacional considerados; como ya se ha mencionado, esto en el fondo se debe a que ambos Lagrangianos tienen estructuras similares al término de Yang-Mills y éste es precisamente el Lagrangiano estándar encargado de propagar partículas masivas y sin masa con velocidades acordes al principio de subluminalidad, y sin afectar la velocidad de propagación del gravitón en relatividad general ( $c_{s,h\pm}^2 = 1$ ).

## 2.5. Problemas del modelo para $\tilde{\theta}_1 \mathcal{L}_1^{\text{Curv}}$

Sin necesidad de realizar un análisis mucho más profundo, es posible aprovechar las expresiones del (Apéndice E.9) para verificar que este Lagrangiano, por sí solo o en presencia de otros, aporta un término al parámetro de rodadura lenta  $\epsilon = \epsilon(X, Y, \vec{\alpha})$  tal que

$$\epsilon \Big|_{Y=0} = 2 + (8 - 12X^2) \theta_1 ;$$

esto implica que la región central es incapaz de conducir las soluciones inflacionarias hacia una época dominada por la radiación ( $\epsilon = 2$ ), lo cual arruina la historia térmica del universo que ha sido cuidadosamente trazada a partir de las múltiples observaciones cosmológicas del último siglo. Teniendo en cuenta que (i) este problema no puede remediarse añadiendo otros Lagrangianos, y que (ii) este término solo puede ser útil en modelos exclusi-

vos de energía oscura; es ideal evitar la adición de este Lagrangiano en modelos subsecuentes, ya que lo que se pretende encontrar en este trabajo es, en el mejor de los casos, un modelo que sea capaz de exhibir los dos tipos de expansión.

## 2.6. Modelo de juguete $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2$

Para el momento en el que se publicó el artículo de Errasti et. al [97] ya se tenía información sobre los resultados de estabilidad provenientes de la combinación de  $\mathcal{L}_4^1$  y  $\mathcal{L}_4^2$  que se expondrá a continuación; vale la pena destacar que debido a la violación de la ligadura secundaria por parte del Lagrangiano  $\mathcal{L}_4^2$ , este modelo es inviable pero puede servir con fines pedagógicos para ilustrar la clase de resultados que se pueden esperar al realizar otros tipos de combinaciones lineales; habiendo dicho esto, se introduce la acción:

$$S \equiv \int \left( \frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \frac{\alpha}{m_p^2} \mathcal{L}_4^1 + \frac{\kappa}{m_p^2} \mathcal{L}_4^2 \right) \sqrt{-g} d^4x \quad , \quad \text{con} \quad \kappa \equiv Q_\kappa \alpha \quad ,$$

de la cual se deducen las siguientes restricciones:

$\forall \tilde{\psi}$	Dinámica		Fantasmas		Inest. Laplacianas			Subluminalidad		GW
Paráms	$\beta < 0 \wedge \gamma \in \mathbb{R}$	$\beta > 0 \wedge \gamma \in \mathbb{R}$	$\lambda_+ + \lambda_- > 0$	$\lambda_+ \times \lambda_- > 0$	$\mathcal{S} > 0$	$\mathcal{P} > 0$	$\mathcal{D} > 0$	$c_{s,h\pm}^2 \leq 1$	$c_{s,\gamma\pm}^2 \leq 1$	$c_{s,h\pm}^2 = 1$
$\{\alpha, Q_\kappa\} \neq 0$ $Q_\kappa \equiv \kappa/\alpha$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×
	$(\alpha < 0) \wedge Q_\kappa < -\frac{917}{33} \vee (\alpha > 0) \wedge Q_\kappa \in (-\frac{917}{33}, \infty) \setminus \{-\frac{203}{23}, \frac{77}{9}\}$		$(\alpha < 0) \wedge (Q_\kappa \leq -18 - \sqrt{219}) \vee (\alpha > 0) \wedge (Q_\kappa \geq -18 + \sqrt{219})$		$(\alpha > 0) \wedge Q_\kappa \leq \frac{1}{3}(58 + \sqrt{3979}) \wedge Q_\kappa \geq \frac{1}{3}(58 - \sqrt{3979})$			×		
	$(\alpha > 0) \wedge Q_\kappa \in [ (58 - \sqrt{3979}) \div 3, (58 + \sqrt{3979}) \div 3 ] \setminus \{77 \div 9\}$									

**Tabla 6. Criterios de consistencia para soluciones asintóticas del modelo de juguete.**

Se demuestra que es posible combinar Lagrangianos con dinámicas tan diferentes como  $\mathcal{L}_4^1$  y  $\mathcal{L}_4^2$  manteniendo algunas de sus características especiales y, al mismo tiempo, procurando que se satisfaga el mayor número de criterios de estabilidad posible. Como consecuencia, la teoría final tiene acceso a ciertas soluciones asintóticas de energía oscura provenientes de  $\mathcal{L}_4^1$  y otras inflacionarias provenientes de  $\mathcal{L}_4^2$ ; además, todos los criterios satisfechos coinciden con los criterios cumplidos originalmente por el Lagrangiano más saludable (excepto  $c_{s,h\pm}^2 = 1$ ).

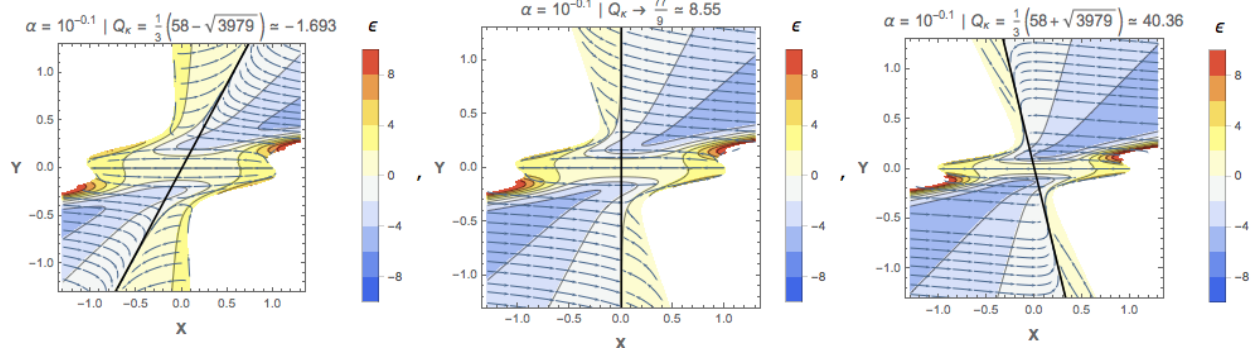
Las asíntotas generadas por este modelo exhiben  $(\beta > 0) \Leftrightarrow \frac{1}{3}(58 - \sqrt{3979}) \leq Q_\kappa < \frac{77}{9}$ , o bien,  $(\beta < 0) \Leftrightarrow \frac{77}{9} \leq Q_\kappa < \frac{1}{3}(58 + \sqrt{3979})$  y esto, en valores numéricos, se traduce en  $(\beta > 0) \Leftrightarrow Q_\kappa \in (-1,693; 8,555)$  o  $(\beta < 0) \Leftrightarrow Q_\kappa \in (8,555; 40,360)$ , con  $\beta$  dado por:

$$\beta = \frac{203\alpha + 23\kappa}{77\alpha - 9\kappa} = \frac{203 + 23Q_\kappa}{77 - 9Q_\kappa}.$$

Se observa que debido a la no linealidad de esta expresión, para obtener  $\beta > 0$  no hace falta garantizar que  $\kappa$  sea subdominante respecto a  $\alpha$  (i.e: exigir  $|Q_\kappa| \ll 1$ ), de hecho, incluso cuando  $Q_\kappa \approx 8,555$  (i.e:  $\kappa$  domina a  $\alpha$  casi en un orden de magnitud), la propiedad de  $\beta > 0$  - característica del modelo de  $\tilde{\alpha}\mathcal{L}_4^1$  - se sigue manifestando.

Calculando las inclinaciones límite al evaluar  $\beta$  en  $Q_\kappa = \frac{1}{3}(58 \pm \sqrt{3979})$  se encuentra que éstas se encuentran en el rango  $82,43^\circ \pm 21,77^\circ$ , lo cual indica que las propiedades de la combinación  $\tilde{\alpha}\mathcal{L}_4^1 + \tilde{\kappa}\mathcal{L}_4^2$  se asemejan más a las del Lagrangiano  $\mathcal{L}_4^1$  (el más saludable) que a las del  $\mathcal{L}_4^2$ ; lo anterior es consecuencia de que las exigencias impuestas en la Tabla 6 obligan a que la combinación herede varias propiedades del Lagrangiano más saludable con el fin de procurar que el conjunto entero cumpla la mayor cantidad de criterios y las propiedades del segundo no socaven las virtudes del primero.

De otra parte, los diagramas de fase para este modelo permiten concluir que todo incremento suave en el valor de  $Q_\kappa$  (dentro de los rangos viables) se traduce en un incremento suave de la inclinación de la asíntota  $Y = \beta X$ ; esto se evidencia a continuación:



*Figura 8. Topología del diagrama de fase para el modelo de  $\tilde{\alpha}\mathcal{L}_4^1 + \tilde{\kappa}\mathcal{L}_4^2$ . Se observa que los aumentos en  $Q_\kappa$  permiten rotar antihorariamente la asíntota  $Y = \beta X$ , migrando fácilmente de un régimen de energía oscura a uno de inflación cuando  $Q_\kappa > \frac{77}{9}$ .*

y lo anterior tiene sentido ya que, analíticamente se puede demostrar que:

$$\frac{d\beta}{dQ_\kappa} = \frac{3598}{(77 - 9Q_\kappa)^2} > 0 \Leftrightarrow Q_\kappa \neq \frac{77}{9}$$

**En síntesis:** Una conclusión importante puede ser elaborada con base en esto; si bien es cierto que el Lagrangiano  $\mathcal{L}_4^2$  está descartado por la ligadura secundaria de Errasti et. al, es de destacar que al realizar la respectiva combinación lineal entre  $\mathcal{L}_4^1$  y  $\mathcal{L}_4^2$ , las deficiencias de  $\mathcal{L}_4^2$  pudieron ser apantalladas y el modelo conjunto resultó dotado de características únicas de ambas partes; ahora bien, ya que el criterio de ondas gravitacionales es más estricto de satisfacer, a la hora de plantear combinaciones lineales, el escenario ideal es aquél en el que todas o varias de las piezas satisfacen la restricción desde el comienzo y para rangos amplios de sus parámetros; recordando que esta propiedad es común en los Lagrangianos de tipo Yang-Mills, es conveniente introducirlos en futuras combinaciones.

## 2.7. Modelo $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$

Teniendo en cuenta los resultados de la sección anterior, es lógico proceder a investigar la combinación lineal de  $\mathcal{L}_4^1$  con  $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$  - hay que tener en cuenta que, después de todo,  $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$  comparte muchas de sus propiedades con  $\mathcal{L}_4^2$  y éste evidenció una gran mejoría al combinarse a  $\mathcal{L}_4^1$ . Dicho esto, se define la nueva acción de interés de la siguiente forma:

$$S \equiv \int \left( \frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \frac{\alpha}{m_p^2} \mathcal{L}_4^1 + \frac{\theta_4}{m_p^2} \mathcal{L}_4^{\text{Curv}} \right) \sqrt{-g} d^4x .$$

Por conveniencia en la notación, se introduce una reparametrización para  $\theta_4$  y se definen algunas etiquetas para los intervalos “ $I_j$ ” que serán relevantes a continuación:

$$I_j \equiv (P_{j-1}, P_j) \quad , \quad \theta_4 \equiv Q_4 \alpha \quad ,$$

$$P_0 = -\infty = -P_6 \quad , \quad P_1 = -\frac{917}{128} \approx -7,164 \quad , \quad P_2 = -\frac{99 + \sqrt{645}}{32} \approx -3,887 \quad ,$$

$$P_3 = -\frac{203}{64} \approx -3,172 \quad , \quad P_4 = \frac{-99 + \sqrt{645}}{32} \approx -2,300 \quad , \quad P_5 = \frac{77}{16} \approx 4,812 \quad .$$

Usando estos, las restricciones de estabilidad y consistencia observacional arrojan:

$\forall \hat{\psi}$	Dinámica		Fantasmas		Inest. Laplacianas			Subluminalidad		GW
Paráms	$\beta < 0 \wedge \gamma \in \mathbb{R}$	$\beta > 0 \wedge \gamma \in \mathbb{R}$	$\lambda_+ + \lambda_- > 0$	$\lambda_+ \times \lambda_- > 0$	$\mathcal{S} > 0$	$\mathcal{P} > 0$	$\mathcal{D} > 0$	$c_{s,h\pm}^2 \leq 1$	$c_{s,\gamma\pm}^2 \leq 1$	$c_{s,h\pm}^2 = 1$
$\{\alpha, Q_4\} \neq 0$ $Q_4 \equiv \theta_4/\alpha$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×
	$(\alpha < 0) \wedge Q_\kappa \in (I_1 \vee I_3 \vee I_4) \vee (\alpha > 0) \wedge Q_\kappa \in (I_2 \vee I_5 \vee I_6)$		$(\alpha > 0) \wedge Q_4 \leq \frac{1}{16}(15 + \sqrt{435}) \wedge Q_4 \geq \frac{1}{3}(15 - \sqrt{435})$		$(\alpha > 0) \wedge Q_4 \leq \frac{1}{16}(15 + \sqrt{435}) \wedge Q_4 \geq \frac{1}{3}(15 - \sqrt{435})$			×		
	$(\alpha > 0) \wedge \frac{1}{16}(15 - \sqrt{435}) \leq Q_4 \leq \frac{1}{16}(15 + \sqrt{435})$									

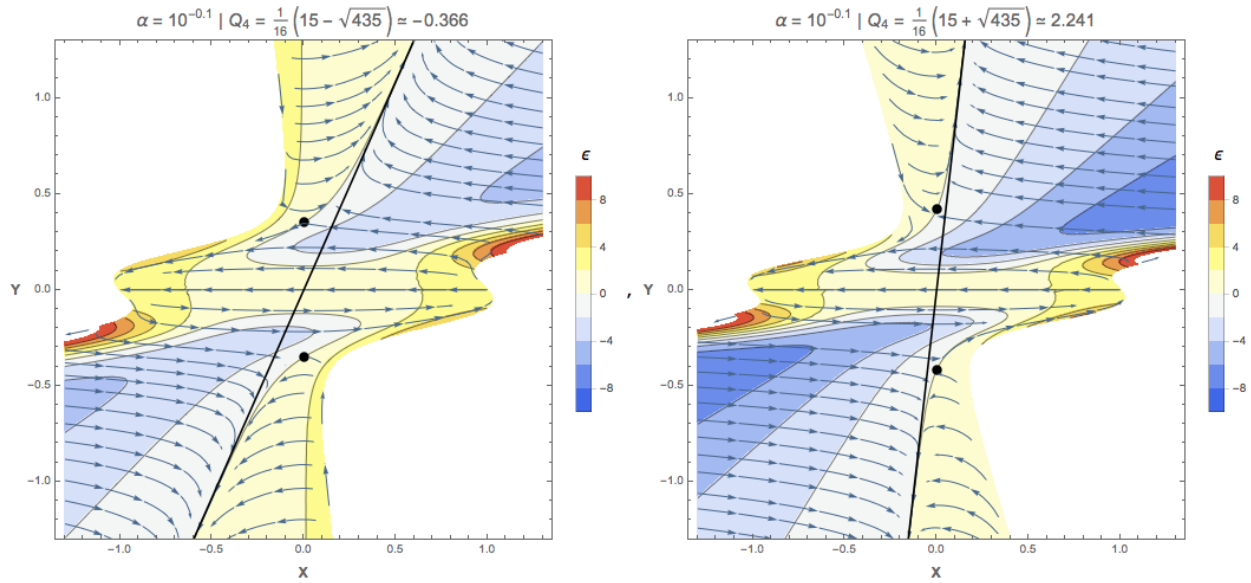
**Tabla 7. Criterios de consistencia para soluciones asintóticas de  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$ .** Similar al caso anterior, se verifica que la combinación de un Lagrangiano saludable como  $\mathcal{L}_4^1$  con uno no tan saludable como  $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$ , da origen a un modelo que satisface los mismos criterios de estabilidad que  $\mathcal{L}_4^1$ , pero no satisface el criterio de ondas gravitacionales  $c_{s,h\pm}^2 = 1$ .

En adición a lo anterior, se verifica que las asíntotas con valores de  $Q_\kappa$  dentro del rango que satisface los criterios de  $\gamma \in \mathbb{R}$ , fantasmas e inestabilidades Laplacianas, son tales que  $\beta > 0 \forall Q_4$ ; esto indica que los apartes del Lagrangiano  $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$  son tan restringidos por  $\mathcal{L}_4^1$  para compensar sus deficiencias a nivel perturbativo, que el resultado de la combinación lineal es un modelo que carece de las asíntotas con  $\beta < 0$  características del  $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$ .

En lo referente a la relación entre los incrementos de  $Q_4$  y la inclinación de las asíntotas, se encuentra que las inclinaciones accesibles barren el rango  $74, 229^\circ \pm 8,998^\circ$  y nuevamente se observa que la relación entre las variaciones del ángulo y el parámetro  $Q_4$  es directamente proporcional, y esto se debe a que

$$\beta = \frac{203\alpha + 64\theta_4}{77\alpha - 16\theta_4} = \frac{203 + 64Q_4}{77 - 16Q_4} \implies \frac{d\beta}{dQ_4} = \frac{8176}{(77 - 16Q_4)^2} > 0 \Leftrightarrow Q_4 \neq \frac{77}{16}.$$

Esta información es útil para estudiar en profundidad las ventanas de parámetros finales, puesto que esto permite separar las zonas que dan orígenes a soluciones asintóticas con velocidades altas de las que tienen velocidades pequeñas (y por ende, qué zonas evolucionan rápidamente hacia un periodo de energía oscura y cuáles evolucionan con suficiente lentitud para satisfacer la duración mínima requerida por inflación); la siguiente gráfica es evidencia de la relación directa entre las variaciones de  $Q_4$  y la inclinación de la asíntota  $Y = \beta X$ :



*Figura 9. Diagramas de fase para el modelo de  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2$ . Se observa que las asíntotas de este modelo están bastante restringidas para que la combinación lineal pueda satisfacer los criterios de dinámica, fantasmas e inestabilidades Laplacianas y, en consecuencia, (i) en este modelo solo es posible tener soluciones de energía oscura asintótica y (ii) las inclinaciones características del Lagrangiano más saludable ( $\mathcal{L}_4^1$ ) son las únicas que llegan a manifestarse en el diagrama de fase.*

**En síntesis:** Los resultados sugieren que (i) es necesario añadir términos de tipo Yang-Mills para satisfacer el criterio de consistencia observacional de ondas gravitacionales, (ii) los Lagrangianos con mayores deficiencias a nivel perturbativo tienden a ser mayormente constreñidos por sus compañeros más saludables en la combinación lineal; así, una combinación bien diseñada puede exhibir ambas clases de asíntotas, pero una teoría demasiado desbalanceada a nivel perturbativo no (porque tendería a exhibir las asíntotas generadas por sus Lagrangianos más saludables); para ver más claramente el por qué de esta afirmación basta ver el caso de  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2$ , en éste, la diferencia esencial con  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{curv}}$  es que  $\mathcal{L}_4^2$  satisface más criterios de estabilidad por sí solo que  $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$ , y los resultados en ambos casos verifican esta afirmación (el modelo más desbalanceado tiende a exhibir solo una de las dos clases de asíntotas).

### 2.8. Modelo $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}} + \tilde{\chi}_3 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)} + \tilde{\chi}_4 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)}$

Siguiendo la misma línea de razonamientos de los casos anteriores, se define la siguiente acción de interés, donde  $\{\alpha, \theta_4, \chi_3, \chi_4\}$  son parámetros adimensionales,  $\theta_4 \equiv Q_4 \alpha$  y  $\chi_i \equiv C_i \alpha$ :

$$S \equiv \int \left( \frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \frac{\alpha}{m_p^2} \mathcal{L}_4^1 + \frac{\theta_4}{m_p^2} \mathcal{L}_4^{\text{Curv}} + \frac{\chi_3}{m_p^2} \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)} + \frac{\chi_4}{m_p^2} \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)} \right) \sqrt{-g} d^4 x .$$

En este caso, las ecuaciones de movimiento y expresiones para  $\{Z, P, \epsilon\}$  son demasiado largas como para ser expuestas a continuación - ver Apéndice E - Dicho esto, las demás expresiones relevantes en este modelo son:

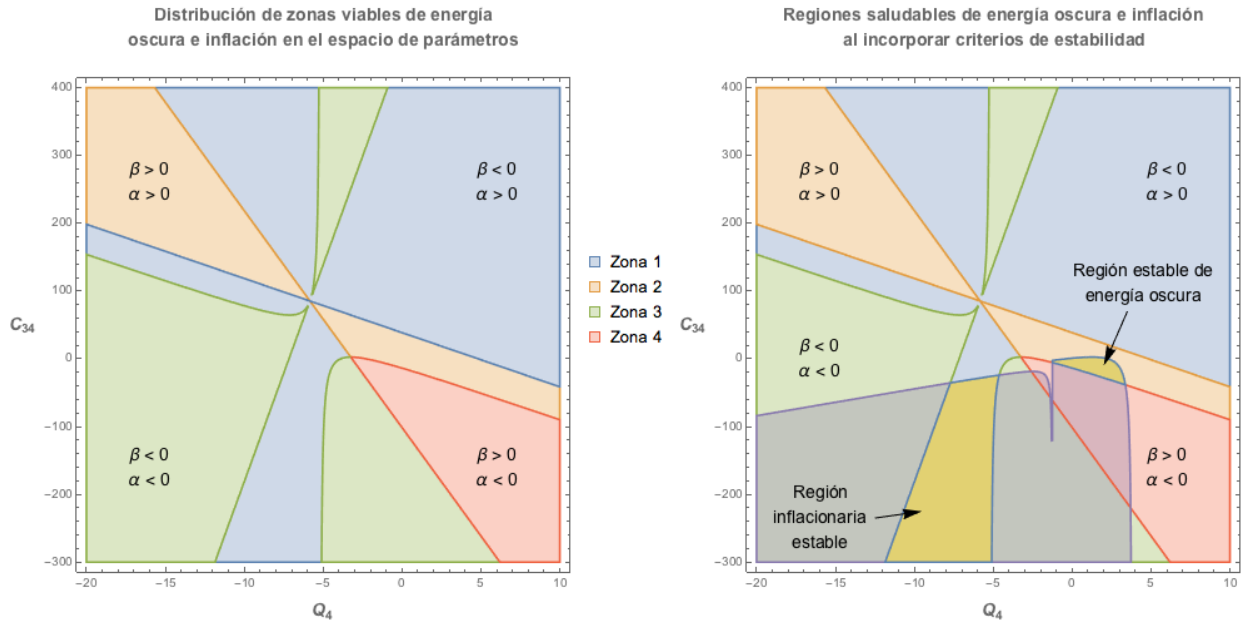
$$\lambda_+ + \lambda_- = \frac{5}{4} (5\alpha - 2\chi_{34}) \hat{\psi}^2 + \frac{1}{8} (61\alpha - 16\theta_4) \hat{\psi}^4 ,$$

$$\lambda_+ * \lambda_- = \frac{1}{8} \left[ \begin{array}{l} 2 + 2(5\alpha - 2\chi_{34}) \hat{\psi}^2 + (61\alpha - 16\theta_4) \hat{\psi}^4 \\ + (105\alpha^2 - 128\theta_4^2 + 240\alpha\theta_4 - 122\alpha\chi_{34} + 32\theta_4\chi_{34}) \hat{\psi}^6 \end{array} \right] \equiv R ,$$

$$c_{s,h\pm}^2 + c_{s,\gamma\pm}^2 = \left[ \begin{array}{l} 4 + 4(5\alpha - 3\chi_{34} + \chi_4) \hat{\psi}^2 + 2(71\alpha - 8\theta_4) \hat{\psi}^4 \\ + 2(155\alpha^2 + 8\theta_4[4\chi_{34} - 2\chi_4] + \alpha[120\theta_4 - 203\chi_{34} + 61\chi_4]) \hat{\psi}^6 \end{array} \right] R^{-1} ,$$

$$c_{s,h\pm}^2 * c_{s,\gamma\pm}^2 = \left[ \begin{array}{l} (205\alpha^2 - 324\alpha\chi_{34} + 162\alpha\chi_4) \hat{\psi}^6 \\ + 2 + 2(5\alpha - 4\chi_{34} + 2\chi_4) \hat{\psi}^2 + 81\alpha\hat{\psi}^4 \end{array} \right] R^{-1} .$$

A partir de ellas, se obtienen las siguientes gráficas, en donde  $C_{34} \equiv C_3 + C_4$ :



*Figura 10. Topología del espacio de parámetros en el subespacio  $\{\alpha, \theta_4, \chi_i\} \in \mathbb{R}$  para el modelo de  $\tilde{\alpha}\mathcal{L}_4^1 + \tilde{\theta}_4\mathcal{L}_4^{\text{Curv}} + \tilde{\chi}_3\mathcal{L}_{G^2A^2}^{(1)} + \tilde{\chi}_4\mathcal{L}_{G^2A^2}^{(2)}$ . (i) La gráfica de la izquierda muestra las diferentes regiones del plano  $\{Q_4, C_{34}\}$  en las cuales se garantiza  $\gamma \in \mathbb{R}$ ; éstas están clasificadas en términos del signo de  $\alpha$  y  $\beta$ . Nótese que la recta  $C_{34} = \frac{1}{2}(77 - 16Q_4)$  no debe formar parte del espacio viable debido a que  $\beta = \frac{203+64Q_4+2C_{34}}{77-16Q_4-2C_{34}}$  presenta singularidades a lo largo de ella. Las zonas 1 y 3 albergan soluciones asintóticas de tipo inflacionario ( $\beta < 0$ ) y las 2 y 4, soluciones asintóticas de energía oscura ( $\beta > 0$ ). (ii) Al investigar los criterios de estabilidad para los modos tensoriales, los parámetros que garantizan la estabilidad del modelo deben tener  $\alpha > 0$  y pertenecer a la nueva región resaltada en la gráfica de la derecha; la intersección de ésta con las zonas que tienen  $\gamma \in \mathbb{R}$  y  $\alpha > 0$  da origen a las zonas doradas donde la teoría satisface todos los criterios de estabilidad aquí considerados.*

Teniendo en cuenta que los diagramas de la Figura 10 están restringidos al subespacio  $\{Q_4, C_{34}\}$  para permitir su visualización en 2 dimensiones, no es posible extraer de ésta toda la información pertinente sobre  $\{Q_4, C_3, C_4\}$ , así que, incorporando esta información de vuelta, las zonas ideales completas satisfacen lo siguiente:

- **En zonas de energía oscura:** los modos tensoriales (i) no exhiben inestabilidades (Fantasmas, Laplacianas), (ii) presentan propagación sublumínica, y (iii) satisfacen las restricciones impuestas por GW170817 sobre la velocidad del gravitón si y solo si:

$$(\alpha > 0) \wedge (-1,25 < Q_4 \lesssim 3,373) \wedge \\ -\frac{2289 + 1584 Q_4 + 256 Q_4^2}{2(83 + 16 Q_4)} < C_{34} \leq \frac{105 + 240 Q_4 - 128 Q_4^2}{2(61 - 16 Q_4)} \wedge C_4 = \frac{C_{34}(5 + 4 Q_4) + 16 Q_4^2}{5 + 4 Q_4}$$

Bajo este conjunto de restricciones, la pendiente máxima que puede obtenerse para la asíntota de energía oscura ocurre cuando  $\{Q_4; C_{34}\} \rightarrow \{2,466; -1,894\}$ , la pendiente mínima ocurre cuando  $\{Q_4; C_{34}\} \rightarrow \{-1,250; -5,627\}$  y en consecuencia, el rango de pendientes accesibles es de  $64,653^\circ \pm 18,744^\circ$ , esto corresponde a un incremento de  $\approx 108,3\%$  con respecto al resultado del modelo  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$  cuyo rango era de  $\sim \pm 9^\circ$ .

Por otro lado, es posible demostrar que todo incremento en  $Q_4$  o  $C_{34}$ , sujeto a las restricciones previamente expuestas, se traduce automáticamente en un aumento de la inclinación de la asíntota de energía oscura - y esto es consistente con el hecho de que la mínima pendiente se da cuando  $\{Q_4; C_{34}\} \rightarrow \{-1,250; -5,627\}$ , i.e, cuando  $Q_4$  y  $C_{34}$  toman los valores más pequeños que pueden en la región estable de energía oscura.

Para tener una idea de los órdenes de magnitud de los parámetros permitidos es útil resolver el conjunto de restricciones necesario sobre el campo de los números enteros;

hecho esto, todos los posibles resultados son:

$$(\alpha > 0) \wedge (Q_4 = -1) \wedge (C_{34} = C_4 - 16) \wedge C_4 = \{9, 10, \dots, 14\} .$$

- **En zonas de inflación:** los modos tensoriales (i) están libres de inestabilidades y (ii) presentan propagación sublumínica siempre y cuando:

$$(\alpha > 0) \wedge \left[ \begin{array}{l} (Q_4 \lesssim -7,720) \wedge (C_{34} < P_0) \vee \\ (-7,720 \lesssim Q_4 \lesssim -5,188) \wedge (C_{34} \leq P_2) \vee \\ (-5,188 \lesssim Q_4 \lesssim -4,621) \wedge (P_1 < C_{34} \leq P_2) \end{array} \right] \wedge (b_0 \leq C_4 \leq b_1) ,$$

$$b_0 \equiv \frac{-205 + 324 C_{34}}{162} , \quad b_1 \equiv \frac{C_{34}(5 + 4 Q_4) + 16 Q_4^2}{5 + 4 Q_4} ;$$

más aún, (iii) es posible exigir que la velocidad de propagación de las ondas gravitacionales primordiales sea la misma que en el presente simplemente tomando:

$$(\alpha > 0) \wedge \left[ \begin{array}{l} (Q_4 \lesssim -7,720) \wedge (C_{34} < P_0) \vee \\ (-7,720 \lesssim Q_4 \lesssim -5,188) \wedge (C_{34} \leq P_2) \vee \\ (-5,188 \lesssim Q_4 \lesssim -4,621) \wedge (P_1 < C_{34} \leq P_2) \end{array} \right] \wedge C_4 = \frac{C_{34}(5 + 4 Q_4) + 16 Q_4^2}{5 + 4 Q_4} .$$

$$P_0 \equiv \frac{917 + 128 Q_4}{2} , \quad P_1 \equiv -\frac{2289 + 1584 Q_4 + 256 Q_4^2}{2(83 + 16 Q_4)} , \quad P_2 \equiv \frac{1025 + 820 Q_4 + 2592 Q_4^2}{162(5 + 4 Q_4)} .$$

Nótese que esta imposición adicional (que es especulativa ya que los experimentos actuales no pueden dar evidencia directa de lo que ocurrió en periodos primordiales con las ondas gravitacionales) solo restringe el rango de  $C_4$  y deja invariante el subespacio de parámetros viables restantes  $\{\alpha, Q_4, C_{34}\}$ ; esto es un indicativo de la robustez del modelo para adaptarse fácilmente a nuevos criterios que se impongan sobre las velocidades de propagación de los modos tensoriales.

El rango de inclinaciones accesible en este caso es de:  $135,790^\circ \pm 8,920^\circ$ , esta amplitud es la más pequeña que se ha obtenido dentro de todos los modelos analizados; no obstante, su mera existencia es suficiente para garantizar que el modelo  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}} + \tilde{\chi}_3 \mathcal{L}_{G^2A^2}^{(1)} + \tilde{\chi}_4 \mathcal{L}_{G^2A^2}^{(2)}$  pueda generar inflación además de energía oscura; de hecho, precisamente ésta es una de las características que hacen que este modelo sea más interesante que todos los demás (la otra es el hecho de que éste sea el único modelo que satisface todos los criterios hasta el momento).

Otras propiedades destacables de las asíntotas inflacionarias son las siguientes: (i) la máxima pendiente posible se da cuando  $\{Q_4; C_{34}\} \rightarrow \{-7,720; -35,581\}$  y la mínima ocurre cuando  $\{Q_4; C_{34}\} \rightarrow \{-4,621; -24,074\}$ , (ii) las variaciones en la pendiente obedecen (i)  $\frac{d\beta}{dQ_4} > 0$  para todo  $Q_4$  dentro de la región permitida, (ii)  $\frac{d\beta}{dC_{34}} < 0$  cuando  $Q_4 \lesssim -5,833$ , y (iii)  $\frac{d\beta}{dC_{34}} > 0$  si  $-5,833 \lesssim Q_4 \lesssim -4,621$ .

Al igual que en el caso anterior, pueden estimarse algunas cotas en el orden de magnitud de los parámetros permitidos resolviendo el conjunto de restricciones necesario sobre el campo de los números enteros; hecho esto, todos los posibles resultados son:

$$(\alpha > 0) \wedge (Q_4 \leq -8) \wedge \left[ C_{34} < \frac{917 + 128 Q_4}{2} \lesssim 53 \right] \wedge \left[ C_4 = \frac{C_{34} (5 + 4 Q_4) + 16 Q_4^2}{5 + 4 Q_4} \lesssim 15 \right].$$

### 3. Conclusiones y futuros trabajos

#### 3.1. Conclusiones

Se presentó un análisis detallado para ocho modelos diferentes (progresivos en complejidad) pertenecientes a la teoría SU(2) generalizada de Proca. (i) Para el modelo de  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1$ , se verificaron los resultados obtenidos por el equipo de Rodríguez et. al en la referencia [77], se incorporaron las respectivas restricciones de estabilidad en el sector tensorial de las perturbaciones y se verificó que el modelo generaba soluciones inflacionarias (en la región central) y asíntotas de energía oscura, en ambos casos satisfaciendo todos los criterios de estabilidad-consistencia excepto uno: el de subluminalidad. (ii) Para el modelo de  $\tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2$  se encontró que se presentaban soluciones inflacionarias dentro de la región central y a través de asíntotas, en ambos casos, satisfaciendo todos los criterios excepto tres: el de inestabilidades Laplacianas, subluminalidad y ondas gravitacionales. (iii) Para el modelo de  $\tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$  se encontró un comportamiento similar al anterior pero incumpliendo cuatro criterios: los tres anteriormente mencionados y el de fantasmas. (iv) El modelo de  $\tilde{\theta}_1 \mathcal{L}_1^{\text{Curv}}$  se descartó argumentando que por sí solo no generaba asíntotas de la forma  $Y = \beta X$  y, en presencia de otros Lagrangianos, arruinaría la historia térmica del universo al conducir las soluciones inflacionarias a un estado final con  $\epsilon \neq 2$  (que no corresponde a una época dominada por la radiación).

Los cuatro modelos previamente descritos completan el conjunto de modelos con un único Lagrangiano; en cada caso, se mostró que era posible aprovechar la referencia de un valor crítico de  $\alpha_i$  para ampliar el tamaño de la región central y modificar la duración de las soluciones inflacionarias a gusto. (v) Para el modelo de  $\tilde{\chi}_3 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)} + \tilde{\chi}_4 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)}$  se encontró que todos los criterios de estabilidad-consistencia podían ser satisfechos al escoger  $\chi_3$  y  $\chi_4$  dentro de una ventana de parámetros adecuada. (vi) Para  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\kappa} \mathcal{L}_4^2$  se mostró que era posible

diseñar modelos capaces de exhibir asíntotas tanto de inflación como de energía oscura, en función del conjunto de parámetros escogidos. (vii) Para  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$  se observó que al combinar un Lagrangiano poco saludable con uno más saludable, el comportamiento de la combinación tiende a asemejarse al comportamiento del Lagrangiano más saludable, y por ende, los modelos mixtos siempre son más propensos a presentar un solo tipo de asíntota.

La información recopilada dio origen a la última combinación estudiada:  $\tilde{\alpha} \mathcal{L}_4^1 + \tilde{\theta}_4 \mathcal{L}_4^{\text{Curv}} + \tilde{\chi}_3 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)} + \tilde{\chi}_4 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)}$ ; (viii) para este último modelo, se encontró que era posible generar ambos tipos de expansión y que la totalidad de los criterios de estabilidad-consistencia podían ser satisfechos con una elección adecuada de  $\alpha, \theta_4, \chi_3$  y  $\chi_4$ ; el éxito en la satisfacción de los criterios de subluminalidad y ondas gravitacionales se atribuyó a las propiedades de los Lagrangianos de tipo Yang-Mills  $\tilde{\chi}_3 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)}, \tilde{\chi}_4 \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)}$  pertenecientes a  $\mathcal{L}_2$ .

Adicional a todo esto, se comentó la desaparición de los Lagrangianos  $\mathcal{L}_4^2$  y  $\mathcal{L}_4^3$  de la teoría SU(2) generalizada de Proca debido a la ligadura secundaria indicada por Errasti et. al [97]. En todos los casos, los criterios de estabilidad fueron aplicados en el régimen de altas energías (sub-horizonte) y sin tener en cuenta el límite de de Sitter, esto garantiza que cada criterio de estabilidad satisfecho en el régimen de altas energías, no implique inestabilidades en el régimen de bajas energías, y que los resultados obtenidos reflejen un escenario general en el que las densidades de energía para las componentes de materia fría y caliente no se hayan asumido necesariamente nulas. Con el fin de permitir la visualización en dos dimensiones, el límite de de Sitter fue aplicado en los diagramas de fase expuestos a lo largo del documento.

A raíz de lo observado, la teoría SU(2) generalizada sigue siendo una teoría de gravedad modificada vigente que, por su atractivo, vale la pena seguir estudiando; existen aspectos que se deben mejorar poco a poco y, con suerte, la revisión bibliográfica exhaustiva y la ca-

racterización detallada de cada término aquí expuesto podrá ser de utilidad para que en el futuro se puedan dar grandes pasos en esa dirección. Uno de los elementos más relevantes que se dejan como apoyo para futuras investigaciones, producto de este trabajo, es el compendio de códigos en *Mathematica* y Maple que permiten estudiar más fácilmente la teoría de gravedad modificada que se desee en el universo de FLRW o Bianchi.

Para finalizar, los apéndices A-D ofrecen fórmulas inéditas de cálculo variacional y discusiones pertinentes que, siendo generales, pueden resultar de gran utilidad para cualquier investigador o estudiante que requiera traducir diferentes resultados bajo cierto convenio de signos, o bien desee aprender una receta simple para calcular más rápido todo tipo de variaciones a términos arbitrariamente complejos, o desee reescribir las ecuaciones de Euler-Lagrange de cualquier teoría en una forma más sencilla, eficiente y explícitamente covariante.

### 3.2. Futuros trabajos

Existen muchas líneas de investigación afines a este trabajo que pueden ser abordadas en el futuro; algunos ejemplos son: (i) Una exploración más detallada de los diagramas de fase, puntos críticos, puntos de ruptura y soluciones numéricas en el último modelo analizado, (ii) el análisis del teorema de no cabello cósmico en la teoría - para ello puede ser útil el artículo de Maleknejad et. al [98], (iii) la búsqueda de fórmulas que permitan obtener todos los términos invariantes de gauge con base en teoría de grupos y Young Tableaux, útiles para completar la teoría actual, o bien, generalizarla; (iv) la revisión y eventual reinvención de esta teoría pero para simetrías locales, (v) la posibilidad de incorporar conexiones generales con torsión y derivadas covariantes de la métrica diferentes de cero - esto es algo que ha demostrado ser beneficioso para las teorías de Horndeski [99] y también puede ser útil para aportar nuevos avances en temas asociados a teorías de gran unificación, entre otros.

### 3.3. Material publicado y demás contribuciones

Como resultado de esta investigación, (i) se presentaron las etapas iniciales de este trabajo en el *Second workshop on current challenges in cosmology* (Bogotá, Colombia - 2018)<sup>34</sup> a través de la charla titulada “Are the non-Einsteinian gravity Horndeski-type theories still alive after GW170817?” a cargo del Ph.D. Yeinzon Rodríguez, y del póster titulado “Dark energy in the generalized SU(2) Proca theory” del cual fui autor en colaboración con el Ph.D. Gabriel Gómez y el MSc. Andrés Navarro, (ii) se desarrollaron cuatro códigos computacionales para estudiar el sector tensorial de cualquier acción en un universo homogéneo (Apéndice F), (iii) se generalizaron las ideas de Misner et. al en lo referente a los convenios de signos de la relatividad general (Apéndice A), (iv) se facilitó la realización de [100] y [101] y (v) actualmente se trabajando en la realización de dos a tres publicaciones adicionales por parte del autor de este documento, y al menos otras dos por parte de investigadores asociados al proyecto.

---

<sup>34</sup><http://cosmology.univalle.edu.co/index.php/home>.

### Referencias Bibliográficas

- [1] A. Korytov, *Introduction to Elementary Particle Physics lecture notes, Note 01*, University of Florida (2007) <http://www.phys.ufl.edu/~korytov/phz4390/>.
- [2] M. W. Guidry, *Gauge field theories: An Introduction with applications*, Wiley (1991) .
- [3] C. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, *Gravitation*. Princeton University Press (2017).
- [4] S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford University Press, (2008).
- [5] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*. Cambridge University Press, (2013).
- [6] J. Baez and J. P. Muniain, *Gauge fields, knots and gravity*. World Scientific, (1995).
- [7] E. Allys, P. Peter and Y. Rodríguez, *Generalized SU(2) Proca Theory*, [Phys. Rev. D](#) **94** (2016) 084041 [[1609.05870](#)].
- [8] J. M. Stewart, *Perturbations of friedmann-robertson-walker cosmological models*, [Class. Quantum Grav](#) **7** (1990) 1169.
- [9] R. L. Agacy, *Generalized Kronecker and permanent deltas, their spinor and tensor equivalents and applications - Reference formulae*, [Journal of Mathematical Physics](#) **40** (1999) [http://ftp.aip.org/epaps/j\\_math\\_phys/E-JMAPAQ-40-033903-35/E-JMAPAQ-40-033903-35.pdf](http://ftp.aip.org/epaps/j_math_phys/E-JMAPAQ-40-033903-35/E-JMAPAQ-40-033903-35.pdf).
- [10] A. Kox, M. Klein, R. Schulmann and C. Kilmister, *The collected papers of Albert Einstein, vol. 6. The Berlin years: 1914-17*, [Princeton University Press](#) (1998) 30.

- [11] A. Friedmann, *On the Possibility of a world with constant negative curvature of space*, [Gen. Rel. Grav.](#) **31** (1999) 2001.
- [12] G. Lemaitre, *Expansion of the universe, A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae*, [Mon. Not. R. Astron. Soc.](#) **91** (1931) 483.
- [13] E. Hubble, *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*, [Proc. Nat. Acad. Sci.](#) **15** (1929) 168.
- [14] H. P. Robertson, *Kinematics and world structure I*, [Astrophys. J.](#) **83** (1935) 248.
- [15] H. P. Robertson, *Kinematics and world structure II*, [Astrophys. J.](#) **83** (1936) 187.
- [16] H. P. Robertson, *Kinematics and world structure III*, [Astrophys. J.](#) **83** (1936) 257.
- [17] A. G. Walker, *On Milne's theory of world structure*, [Proc. London Math. Soc.](#) **42** (1936) 90.
- [18] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, [Phys. Rev. D](#) **23** (1981) 347.
- [19] A. R. Liddle, *An Introduction to Cosmological Inflation*, in *High Energy Physics and Cosmology, 1998 Summer School* (A. Masiero, G. Senjanovic and A. Smirnov, eds.), p. 260, 1999, [astro-ph/9901124](#).
- [20] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*, [Phys. Rev. Lett.](#) **48** (1982) 1220.
- [21] D. H. Lyth and A. R. Liddle, *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. Cambridge University Press, (2009).

- [22] A. Rassat et al., *Planck CMB anomalies: astrophysical and cosmological secondary effects and the curse of masking*, *JCAP* **1408** (2014) [[1405.1844](#)].
- [23] G. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, *4D gravity on a brane in 5D Minkowski space*, *Phys. Lett. B* **485** (2000) 208 [[hep-th/0005016](#)].
- [24] S. Weinberg, *The Cosmological Constant Problem*, *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 1.
- [25] G. Dvali, *A Lecture on the Hierarchy Problem and Gravity*, 6th CERN Latin-American School of High-Energy Physics (2013)  
<http://cds.cern.ch/record/2120792>.
- [26] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, *The Galileon as a local modification of gravity*, *Phys. Rev. D.* **79** (2009) 064036 [[0811.2197](#)].
- [27] C. Deffayet, S. Deser and G. Esposito-Farese, *Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors*, *Phys. Rev. D.* **80** (2009) 064015 [[0906.1967](#)].
- [28] C. Deffayet, G. Esposito-Farese and A. Vikman, *Covariant Galileon*, *Phys. Rev. D.* **79** (2009) 084003 [[0901.1314](#)].
- [29] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, *Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations*, *Prog. Theor. Phys.* **126** (2011) 511 [[1105.5723](#)].
- [30] G. W. Horndeski, *Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space*, *Int. J. Theor. Phys.* **10** (1974) 363.

- [31] C. Burrage, C. de Rham, D. Seery and A. J. Tolley, *Galileon inflation*, **JCAP** **1101** (2011) 014 [[1009.2497](#)].
- [32] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, *G-inflation: Inflation driven by the Galileon field*, **Phys. Rev. Lett.** **105** (2010) 231302 [[1008.0603](#)].
- [33] R. Kase and S. Tsujikawa, *Effective field theory approach to modified gravity including Horndeski theory and Hořava–Lifshitz gravity*, **Int. J. Mod. Phys. D** **23** (2015) 1443008 [[1409.1984](#)].
- [34] T. Chen, M. Fasiello, E. A. Lim and A. J. Tolley, *Higher derivative theories with constraints: Exorcising Ostrogradski’s Ghost*, **JCAP** **1302** (2013) 042 [[1209.0583](#)].
- [35] D. Langlois and K. Noui, *Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability*, **JCAP** **1602** (2016) 034 [[1510.06930](#)].
- [36] A. Padilla, P. M. Saffin and S.-Y. Zhou, *Bi-galileon theory I: Motivation and formulation*, **JHEP** **1012** (2010) 031 [[1007.5424](#)].
- [37] A. Padilla, P. M. Saffin and S.-Y. Zhou, *Multi-galileons, solitons and Derrick’s theorem*, **Phys. Rev. D** **83** (2011) 045009 [[1008.0745](#)].
- [38] E. Allys, *New terms for scalar multi-Galileon models and application to SO(N) and SU(N) group representations*, **Phys. Rev. D** **95** (2017) 064051 [[1612.01972](#)].
- [39] C. de Rham and A. Matas, *Ostrogradsky in Theories with Multiple Fields*, **JCAP** **1606** (2016) 041 [[1604.08638](#)].
- [40] L. Heisenberg, *Generalization of the Proca Action*, **JCAP** **1405** (2014) 015 [[1402.7026](#)].

- [41] E. Allys, P. Peter and Y. Rodriguez, *Generalized Proca action for an Abelian vector field*, *JCAP* **1602** (2016) 004 [[1511.03101](#)].
- [42] E. Allys, J. P. Beltran Almeida, P. Peter and Y. Rodríguez, *On the 4D generalized Proca action for an Abelian vector field*, *JCAP* **1609** (2016) 026 [[1605.08355](#)].
- [43] C. Deffayet, S. Deser and G. Esposito-Farese, *Arbitrary p-form Galileons*, *Phys. Rev. D.* **82** (2010) 061501 [[1007.5278](#)].
- [44] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza and F. Vernizzi, *Healthy theories beyond Horndeski*, *Phys. Rev. Lett.* **114** (2015) 211101 [[1404.6495](#)].
- [45] C. Deffayet, A. E. Gümrükçüoğlu, S. Mukohyama and Y. Wang, *A no-go theorem for generalized vector Galileons on flat spacetime*, *JHEP* **1404** (2014) [[1312.6690](#)].
- [46] Y. Rodriguez and A. A. Navarro, *Scalar and vector Galileons*, *J. Phys. Conf. Ser.* **831** (2017) 012004 [[1703.01884](#)].
- [47] M. Ostrogradski, *Memoires sur les equations differentielle relatives au probleme des isoperimetres*, *Mem. Ac. St. Petersburg* **VI** (1850) 385.
- [48] R. P. Woodard, *Avoiding dark energy with 1/r modifications of gravity*, *Lect. Notes Phys.* **720** (2007) 403 [[astro-ph/0601672](#)].
- [49] R. P. Woodard, *Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability*, *Scholarpedia* **10** (2015) 32243 [[1506.02210](#)].
- [50] V. Sivanesan, *Generalized multiple-scalar field theory in Minkowski space-time free of Ostrogradski ghosts*, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 104006 [[1307.8081](#)].

- [51] C. Deffayet, G. Esposito-Farese and D. A. Steer, *Counting the degrees of freedom of generalized Galileons*, *Phys. Rev.* **D92** (2015) 084013 [[1506.01974](#)].
- [52] T. Baker et al., *Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 251301 [[1710.06394](#)].
- [53] P. Creminelli and F. Vernizzi, *Dark Energy after GW170817 and GRB170817A*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 251302 [[1710.05877](#)].
- [54] J. Sakstein and B. Jain, *Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 251303 [[1710.05893](#)].
- [55] J. M. Ezquiaga and M. Zumalacárregui, *Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 251304 [[1710.05901](#)].
- [56] H. Wang et al., *The GW170817/GRB 170817A/AT 2017gfo Association: Some Implications for Physics and Astrophysics*, *Astrophys. J.* **851** (2017) L18 [[1710.05805](#)].
- [57] VIRGO, LIGO SCIENTIFIC collaboration, B. Abbott et al., *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 161101 [[1710.05832](#)].
- [58] B. P. Abbott et al., *Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger*, *Astrophys. J.* **848** (2017) L12 [[1710.05833](#)].
- [59] VIRGO, FERMI-GBM, INTEGRAL, LIGO SCIENTIFIC collaboration, B. P. Abbott et al., *Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A*, *Astrophys. J.* **848** (2017) L13 [[1710.05834](#)].

- [60] PLANCK collaboration, N. Aghanim et al., *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, [1807.06209](#).
- [61] P. Peter and J. Uzan, *Primordial Cosmology*, Oxford University Press. (2013).
- [62] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monogr. Math. Phys. Cambridge University Press, (1973), [10.1017/CBO9780511524646](#).
- [63] D. Baumann, *The physics of inflation*. Cambridge State University, (2011).
- [64] A. Maleknejad, M. M. Sheikh-Jabbari and J. Soda, *Gauge Fields and Inflation*, *Phys. Rept.* **528** (2013) 161 [[1212.2921](#)].
- [65] J. Beltran Jimenez and L. Heisenberg, *Non-trivial gravitational waves and structure formation phenomenology from dark energy*, *JCAP* **1809** (2018) 035 [[1806.01753](#)].
- [66] C. Armendariz-Picon, *Could dark energy be vector-like?*, *JCAP* **0407** (2004) 007 [[astro-ph/0405267](#)].
- [67] A. Golovnev, V. Mukhanov and V. Vanchurin, *Vector inflation*, *JCAP* **0806** (2008) 009 [[0802.2068](#)].
- [68] A. Maleknejad and M. M. Sheikh-Jabbari, *Non-Abelian gauge field inflation*, *Phys. Rev. D* **84** (2011) [[1102.1932](#)].
- [69] A. Maleknejad and M. M. Sheikh-Jabbari, *Gauge-flation: Inflation From Non-Abelian Gauge Fields*, *Phys. Lett. B* **723** (2013) 224 [[1102.1513](#)].
- [70] J. Beltran Jimenez et al., *Instabilities in Horndeski Yang-Mills inflation*, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 063533 [[1702.01193](#)].

- [71] K. Moriyasu, *An Elementary Primer for Gauge Theory*. World Scientific, (1983).
- [72] H. Bhatia, G. Norgard, V. Pascucci and P.-T. Bremer, *The Helmholtz-Hodge Decomposition-A Survey*, [IEEE Trans Vis Comput Graph](#) **19** (2013) 1386 [1077-2626].
- [73] L. Heisenberg, *Theoretical and observational consistency of massive gravity*. Springer International Publishing, (2015).
- [74] J. B. Pitts, Empirical Equivalence, Artificial Gauge Freedom and a Generalized Kretschmann Objection. (2009), [0911.5400].
- [75] A. Marsh, *Gauge Theories and Fiber Bundles: Definitions, Pictures, and Results*, 1607.03089.
- [76] G. Eichmann, *Hadron Physics*, SU(N) lecture notes. University of Giessen, Germany, (2014) <http://cftp.tecnico.ulisboa.pt/~gernot.eichmann/ws2014>.
- [77] Y. Rodríguez and A. A. Navarro, *Non-Abelian S-term dark energy and inflation*, [Phys. Dark Univ.](#) **19** (2018) 129 [1711.01935].
- [78] L. Heisenberg, Consistency of massive gravity. Perimeter Institute Recorded Seminars, Conference, (Dec 2013) <http://pirsa.org/13120061/>.
- [79] S. Tsujikawa, Effective field theory approach to modified gravity with applications to inflation and dark energy. Hot Topics in General Relativity and Gravitation, Conference, (Aug 2015) <http://www.cpt.univ-mrs.fr/~cosmo/HTGRG-2/index.php?page=speakers>.

- [80] C. de Rham, *Modified gravity and degravitation*, International Conference in High Energy Physics, Conference. (Jul 2010)  
<https://indico.cern.ch/event/73513/contributions/2078224/>.
- [81] Y. Rodriguez, *A New Pedagogical Way of Finding Out the Gauge Field Strength Tensor in Abelian and Non-Abelian Local Gauge Field Theories*, [1512.03827](#).
- [82] T. Biswas, *Symmetry breaking of gauge theories via internal space dynamics*, *JHEP* **0802** (2003) 054 [[hep-th/0210273](#)].
- [83] A. Jimenez Cano, Formalismo de Palatini y sus implicaciones en la teoría Einstein-Hilbert libre y acoplada. Tesis de maestría, Universidad de Granada., (Jul 2016) [https://www.ugr.es/~bjanssen/text/TFM\\_AlejandroJimenezCano.pdf](https://www.ugr.es/~bjanssen/text/TFM_AlejandroJimenezCano.pdf).
- [84] V. José and E. Saletan, *Classical dynamics: A contemporary approach*. Cambridge University Press, (1998).
- [85] B. Binegar, *Intermediate Differential Equations*, Lecture 4. Oklahoma State University, (Fall, 2008)  
<https://math.okstate.edu/people/binegar/4233/4233-1ec.html>.
- [86] M. de Oliveira, *Linear Systems*, Lecture 6. University of California, San Diego, (Fall, 2014) <http://control.ucsd.edu/mauricio/courses/mae280a/lecture6.pdf>.
- [87] A. Bressan, *Tutorial on the center manifold theorem*, Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag (2007) <https://www.math.psu.edu/bressan/LectureNotes.html>.
- [88] S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Studies in nonlinearity. Sarat Book House, (2007).

- [89] J. Marsden and T. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover Civil and Mechanical Engineering Series. Dover, (1994).
- [90] P. Peter, *Cosmological Perturbation Theory*, .
- [91] W. Ballmann and A. Balsler, *Vector bundles and connections*, Lecture notes, Universität Bonn (2002).  
<http://people.mpim-bonn.mpg.de/hwblmnn/archiv/conncurv1999.pdf>.
- [92] E. Gourgoulhon, *3+1 formalism and bases of numerical relativity*, [gr-qc/0703035](#).
- [93] H. Motohashi, T. Suyama and K. Takahashi, *Fundamental theorem on gauge fixing at the action level*, [Phys. Rev. D \*\*94\*\* \(2016\) 124021 \[1608.00071\]](#).
- [94] V. Rubakov, *Cosmological Perturbation Theory*, in *European School of High Energy Physics (2011) Moeciu, Romania, September, 2011*.
- [95] J.-P. Bruneton, *On causality and superluminal behavior in classical field theories: Applications to k-essence theories and MOND-like theories of gravity*, [Phys. Rev. D \*\*75\*\* \(2007\) 085013 \[gr-qc/0607055\]](#).
- [96] G. F. R. Ellis, R. Maartens and M. A. H. MacCallum, *Causality and the speed of sound*, [General Relativity and Gravitation \*\*39\*\* \(2007\) 1651 \[gr-qc/0703121\]](#).
- [97] V. Errasti Díez, B. Gording, J. A. Méndez-Zavaleta and A. Schmidt-May, *The Maxwell-Proca theory: definition and construction*, [1905.06968](#).
- [98] A. Maleknejad, M. M. Sheikh-Jabbari and J. Soda, *Gauge-flation and Cosmic No-Hair Conjecture*, [JCAP \*\*1201\*\* \(2012\) 016 \[1109.5573\]](#).

- [99] S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos and J. Levi Said, *Can Horndeski Theory be recast using Teleparallel Gravity?*, .
- [100] L. G. Gomez and Y. Rodriguez, *Stability Conditions in the Generalized SU(2) Proca Theory*, [1907.07961](#).
- [101] C. A. Bautista, Y. Rodriguez and A. Navarro, *Galileones vectoriales con simetría SU(2) para la representación de los periodos de inflación y energía oscura*, Trabajo en progreso.
- [102] T. Schucker, *Forces from Connes' geometry*, *Lect. Notes Phys.* **659** (2005) 285 [[hep-th/0111236](#)].
- [103] A. Guarnizo, L. Castaneda and J. M. Tejeiro, *Boundary Term in Metric  $f(R)$  Gravity: Field Equations in the Metric Formalism*, *Gen. Rel. Grav.* **42** (2010) 2713 [[1002.0617](#)].
- [104] R. Emami, S. Mukohyama, R. Namba and Y.-l. Zhang, *Stable solutions of inflation driven by vector fields*, *JCAP* **1703** (2017) 058 [[1612.09581](#)].
- [105] R. Gharechahi, M. Nouri-Zonoz and A. Tavanfar, *A tale of two velocities: Threading versus slicing*, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **15** (2017) 1850047 [[1510.02359](#)].
- [106] F. Lobo and P. Crawford, *Weak energy condition violation and superluminal travel*, *Lect. Notes Phys.* **617** (2003) 277 [[gr-qc/0204038](#)].
- [107] A. Borde and A. Vilenkin, *Violations of the weak energy condition in inflating space-times*, *Phys. Rev. D* **56** (1997) 717 [[gr-qc/9702019](#)].

- [108] A. Arenas, *Notas sobre desigualdades clásicas*, Seminario de problemas para alumnos de ESO y Bachillerato. Curso 2017-2018. Universidad de la Rioja, Logroño, España, <https://bit.ly/2Za6SgM>.
- [109] A. Gangui, *Topological defects in cosmology*, [astro-ph/0110285](#).
- [110] M. Kawasaki, K. Saikawa and T. Sekiguchi, *Axion dark matter from topological defects*, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 065014 [[1412.0789](#)].
- [111] R. D. Peccei, *Discrete and global symmetries in particle physics*, *Lect. Notes Phys.* **521** (1999) [[hep-ph/9807516](#)].
- [112] S. E. Larsson, S. Sarkar and P. L. White, *Evading the cosmological domain wall problem*, *Phys. Rev. D* **55** (1997) 5129 [[hep-ph/9608319](#)].
- [113] E. J. Copeland and T. W. B. Kibble, *Cosmic Strings and Superstrings*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **466** (2010) 623 [[0911.1345](#)].

## Apéndice A. Expresiones de cálculo variacional útiles en gravedad modificada

### Apéndice A.1. Variaciones de tensores con información geométrica

En esta sección se mostrarán algunos cálculos relevantes para determinar correctamente la variación de cualquier término de acople mínimo o no mínimo a la gravedad. Por comodidad, los paréntesis (o brackets) en los índices de un tensor denotarán (anti)-simetrización no-normalizada, esto quiere decir que  $A_{(ab)} \equiv A_{ab} + A_{ba}$  no incorporará el factor de  $\frac{1}{2}$  que muchos autores suelen emplear, así las ecuaciones adoptarán una forma más concisa y elegante. En adición, se considerarán todos los posibles convenios de signos presentes en relatividad general, para ello se seguirá la parametrización  $[S_1], [S_2], [S_3]$  propuesta por Misner et al. [3]. Finalmente, las bases se asumirán holónomas, la conexión será métrica y libre de torsión (símbolos de Christoffel), y con frecuencia,  $\mu(n)$  se usará como reemplazo de  $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$ .

#### Apéndice A.1.1. $\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} = ?$

Como la conexión es métrica, se tiene que:

$$g_{\mu\nu;\rho} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_{\mu\nu,\rho} = \Gamma_{\rho(\mu}^\alpha g_{\nu)\alpha} . \quad (51)$$

También se exige que toda variación  $\delta$  conmute con las derivadas  $\partial_\rho$ , entonces

$$\begin{aligned} (\delta g_{\mu\nu})_{;\rho} &= (\delta g_{\mu\nu})_{,\rho} - \Gamma_{\rho(\mu}^\alpha \delta g_{\nu)\alpha} , \\ &= \delta(g_{\mu\nu,\rho}) - \Gamma_{\rho(\mu}^\alpha \delta g_{\nu)\alpha} , \\ &= \delta\Gamma_{\rho(\mu}^\alpha g_{\nu)\alpha} + \Gamma_{\rho(\mu}^\alpha \delta \overleftarrow{g_{\nu)\alpha}} - \Gamma_{\rho(\mu}^\alpha \delta \overleftarrow{g_{\nu)\alpha}} , \\ (\delta g_{\mu\nu})_{;\rho} &= \delta\Gamma_{\rho(\mu}^\alpha g_{\nu)\alpha} . \end{aligned} \quad (52)$$

Por simplicidad,  $(\delta g_{\mu\nu})_{;\rho}$  puede denotarse como  $\delta g_{\mu\nu;\rho}$  entendiéndose que  $\delta g_{\mu\nu;\rho} \neq \delta(\overleftarrow{g_{\mu\nu;\rho}})$ .

Dado que la conexión es métrica y libre de torsión se puede aplicar el “truco de Riemann” para despejar  $\delta\Gamma_{\rho\mu}^\alpha$ , para ello se toman tres copias de (52) con permutaciones cíclicas de  $\{\mu, \nu, \rho\}$ , dos de ellas se suman y la tercera se resta:

$$\begin{aligned} + \delta g_{\mu\nu;\rho} &= + \delta\Gamma_{\rho\mu}^\alpha g_{\nu\alpha} + \underline{\delta\Gamma_{\rho\nu}^\alpha g_{\mu\alpha}} , \\ + \delta g_{\nu\rho;\mu} &= + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha g_{\rho\alpha} + \delta\Gamma_{\mu\rho}^\alpha g_{\nu\alpha} , \\ - \delta g_{\rho\mu;\nu} &= - \underline{\delta\Gamma_{\nu\rho}^\alpha g_{\mu\alpha}} - \underline{\delta\Gamma_{\nu\mu}^\alpha g_{\rho\alpha}} . \end{aligned}$$

Realizando las operaciones indicadas, los términos subrayados se cancelan y se da que

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu;\rho} + \delta g_{\nu\rho;\mu} - \delta g_{\rho\mu;\nu} &= 2 \delta\Gamma_{\mu\rho}^\alpha g_{\nu\alpha} , \\ \delta\Gamma_{\mu\rho}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} (\delta g_{\nu\mu;\rho} + \delta g_{\nu\rho;\mu} - \delta g_{\mu\rho;\nu}) , \\ \boxed{\delta\Gamma_{\mu\rho}^\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\nabla_{(\rho} \delta g_{\mu)\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\rho}) . \end{aligned} \quad (53)$$

Por comodidad, conviene reescribir la expresión anterior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\rho}^\alpha &= \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left( \delta_\lambda^{\sigma_1} \delta_{(\mu}^{\sigma_2} \delta_{\rho)}^{\sigma_3} - \delta_\mu^{\sigma_1} \delta_\rho^{\sigma_2} \delta_\lambda^{\sigma_3} \right) \right] \nabla_{\sigma_3} \delta g_{\sigma_2\sigma_1} , \\ \delta\Gamma_{\mu\rho}^\alpha &= \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left( \delta_\lambda^{\sigma_1} \tilde{\delta}_{\mu\rho}^{\sigma_2\sigma_3} - \frac{1}{2} \tilde{\delta}_{\mu\rho}^{\sigma_1\sigma_2} \delta_\lambda^{\sigma_3} \right) \right] \nabla_{\sigma_3} \delta g_{\sigma_2\sigma_1} , \\ \boxed{\delta\Gamma_{\mu\rho}^\alpha} &\equiv D_{\mu\rho}^{\alpha\sigma(3)} \nabla_{\sigma_3} \delta g_{\sigma_2\sigma_1} \end{aligned} \quad (54)$$

en donde  $\tilde{\delta}_{\mu\rho}^{\sigma_1\sigma_2} \equiv \delta_{(\mu}^{\sigma_1} \delta_{\rho)}^{\sigma_2} = \delta_\mu^{(\sigma_1} \delta_\rho^{\sigma_2)}$  es la “delta generalizada permanente” [9], análogo simétrico de la delta generalizada de Kronecker. En esta presentación, la expresión

(53) se asemeja más a  $\Gamma_{\mu\rho}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_{(\rho} g_{\mu)\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\rho})$  y los índices de los tensores  $\delta\Gamma$  y  $D$  de (54) no solo aparecen en el mismo orden, sino que además satisfacen dos propiedades:

$$\boxed{\nabla_\beta D^\alpha_{\mu\rho}{}^{\sigma(3)} = 0, \quad D^\alpha_{[\mu\rho]}{}^{\sigma(3)} = 0}, \quad (55)$$

implicando que  $D$  es compatible con la conexión y cuenta con las simetrías de  $\delta\Gamma_{\mu\rho}^\alpha$ .

### Apéndice A.1.2. $\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} = ?$

Este caso depende del convenio de signos debido a la libertad de signo existente en la definición del tensor de Riemann con relación al conmutador de derivadas covariantes:  $[\nabla_\rho, \nabla_\sigma] V^\mu = [S_2] R^\mu_{\nu\rho\sigma} V^\nu$  con  $[S_2] = \pm 1$ . Esta libertad no se había evidenciado antes porque el único signo libre que podría haber influido (la signatura de la métrica) no era explícito debido a los productos pares de métricas (y sus derivadas) involucrados en  $\delta\Gamma_{\mu\rho}^\alpha$ . Para dar cuenta de ésta nueva libertad se define:

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} \equiv [S_2] \tilde{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} \equiv [S_2] \left( \Gamma^\mu_{\nu[\sigma, \rho]} + \Gamma^\mu_{\alpha[\rho} \Gamma^\alpha_{\sigma]\nu} \right). \quad (56)$$

$$\delta \tilde{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} = \delta \Gamma^\mu_{\nu[\sigma, \rho]} + \delta \Gamma^\mu_{\alpha[\rho} \Gamma^\alpha_{\sigma]\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha[\rho} \delta \Gamma^\alpha_{\sigma]\nu}.$$

Por otro lado, se sabe que  $(\delta \Gamma^\mu_{\nu\sigma})_{;\rho} = \delta \Gamma^\mu_{\nu\sigma, \rho} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha} \delta \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu} \delta \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} - \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} \delta \Gamma^\mu_{\nu\alpha}$ ,

y se sabe que se pueden evitar los paréntesis al escribir  $(\delta \Gamma^\mu_{\nu\sigma})_{;\rho}$  porque no existe  $\delta(\Gamma^\mu_{\nu\sigma; \rho})$ . Reemplazando  $\delta \Gamma^\mu_{\nu\sigma, \rho}$  en términos de esa cantidad que denotaré  $\delta \Gamma^\mu_{\nu\sigma; \rho}$ , se encuentra que

$$\begin{aligned}\delta\tilde{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} &= \delta\Gamma^\mu_{\nu[\sigma;\rho]} - \Gamma^\mu_{\alpha[\rho}\delta\Gamma^\alpha_{\sigma]\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu[\rho}\delta\Gamma^\mu_{\sigma]\alpha} + \Gamma^\alpha_{[\rho\sigma]}\delta\Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \delta\Gamma^\mu_{\alpha[\rho}\Gamma^\alpha_{\sigma]\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha[\rho}\delta\Gamma^\alpha_{\sigma]\nu}, \\ \delta\tilde{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} &= \delta\Gamma^\mu_{\nu[\sigma;\rho]} - \underbrace{\Gamma^\mu_{\alpha[\rho}\delta\Gamma^\alpha_{\sigma]\nu}}_{\sim} - \underbrace{\Gamma^\alpha_{\nu[\sigma}\delta\Gamma^\mu_{\rho]\alpha}}_{\sim} + \underbrace{\delta\Gamma^\mu_{\alpha[\rho}\Gamma^\alpha_{\sigma]\nu}}_{\sim} + \underbrace{\Gamma^\mu_{\alpha[\rho}\delta\Gamma^\alpha_{\sigma]\nu}}_{\sim},\end{aligned}$$

$$\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} = [S_2] \delta\tilde{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} = [S_2] \delta\Gamma^\mu_{\nu[\sigma;\rho]}. \quad (57)$$

Usando (54), (55) y (57) se puede definir otro tensor  $D$  para reescribir a  $\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma}$

$$\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \nabla_{[\rho]}\left\{[S_2] D^\mu_{\nu|\sigma]} \alpha^{(3)} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2\alpha_1}\right\} = \left[ [S_2] D^\mu_{\nu|\sigma]} \alpha^{(3)} \delta_{|\rho]}^{\alpha_4} \right] \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2\alpha_1},$$

$$\boxed{\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} \equiv D^\mu_{\nu\rho\sigma} \alpha^{(4)} \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2\alpha_1}}, \quad (58)$$

evidenciando entonces que el nuevo tensor  $D$  también es compatible con la conexión y tiene la misma antisimetría en  $\{\rho, \sigma\}$  que  $\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ . Esto, matemáticamente, equivale a:

$$\boxed{\nabla_\beta D^\mu_{\nu\rho\sigma} \alpha^{(4)} = 0, \quad D^\mu_{\nu(\rho\sigma)} \alpha^{(4)} = 0}. \quad (59)$$

### ■ Observación:

Partiendo de  $\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma}$  es trivial deducir  $\delta R_{\mu\nu\rho\sigma}$  pero su expresión  $\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = \delta\{R^\varepsilon_{\nu\rho\sigma} g_{\mu\varepsilon}\} = (\delta R^\varepsilon_{\nu\rho\sigma}) g_{\mu\varepsilon} + R^\varepsilon_{\nu\rho\sigma} (\delta g_{\mu\varepsilon})$  carecerá de ventajas operacionales al involucrar dos variaciones en vez de una. Para evitar este tipo de variaciones es conveniente entonces reescribir los Lagrangianos con acoples al tensor de Riemann en la forma  $C_\mu^{\nu\rho\sigma} R^\mu_{\nu\rho\sigma}$  antes de variarlos.

**Apéndice A.1.3.**  $\delta R_{\mu\nu} = ?$ 

En este caso también hay una libertad de signo que se debe considerar (debida a las dos posibles formas de tomar una traza no nula del tensor de Riemann); se define entonces

$$R_{\mu\nu} \equiv [S_3] \tilde{R}_{\mu\nu} \equiv [S_3] \tilde{R}^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = [S_2] [S_3] R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} , \quad (60)$$

y, en concordancia con la definición, se tiene que  $\delta R_{\nu\sigma} = [S_2] [S_3] \delta R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} \delta_{\mu}^{\rho}$ , i.e:

$$\delta R_{\nu\sigma} = [ [S_2] [S_3] D^{\mu}{}_{\nu\mu\sigma}{}^{\alpha(4)} ] \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2\alpha_1} ,$$

$$\delta R_{\nu\sigma} = [ [S_3] D^{\mu}{}_{\nu[\sigma}{}^{\alpha(3)} \delta_{|\mu]}^{\alpha_4} ] \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2\alpha_1} ,$$

$$\boxed{\delta R_{\nu\sigma} \equiv D_{\nu\sigma}{}^{\alpha(4)} \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2\alpha_1}} . \quad (61)$$

Nótese que, a primera vista, el lado derecho de  $\delta R_{\nu\sigma}$  no parece ser simétrico en  $\{ \nu, \sigma \}$  pero, teniendo en cuenta que  $(\delta \Gamma_{[\mu\rho]}^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow D^{\alpha}{}_{[\mu\rho]}{}^{\sigma(3)} = 0)$  y  $(R^{\nu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0 \Leftrightarrow D^{\mu}{}_{\mu\rho\sigma}{}^{\alpha(4)} = 0)$ , es fácil ver que  $\delta R_{[\nu\sigma]} \sim [ D^{\mu}{}_{[\nu\sigma]}{}^{\alpha(3)} \delta_{\mu}^{\alpha_4} - D^{\mu}{}_{[\nu|\mu}{}^{\alpha(3)} \delta_{|\sigma]}^{\alpha_4} ] \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2\alpha_1} = 0$ ; entonces:

$$\boxed{\nabla_{\beta} D_{\nu\sigma}{}^{\alpha(4)} = 0 , \quad D_{[\nu\sigma]}{}^{\alpha(4)} = 0} . \quad (62)$$

**Apéndice A.1.4.**  $\delta g_{\mu\nu} \stackrel{?}{=} f(\delta g^{\alpha\beta})$ 

Habiendo mostrado algunos cálculos importantes, es necesario continuar la construcción de este formulario determinando la relación que existe entre las variaciones  $\delta g_{\mu\nu}$  y  $\delta g^{\alpha\beta}$  para poder expresar todo en términos de una sola de ellas, para ello se debe notar que:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta \{ \delta_\mu^\beta \} = \delta \{ g_{\alpha\mu} g^{\beta\alpha} \} = g_{\alpha\mu} \delta g^{\beta\alpha} + \delta g_{\alpha\mu} g^{\beta\alpha} , \\
&\Rightarrow g_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\beta} = - \delta g_{\mu\alpha} g^{\alpha\beta} , \\
\boxed{\delta g^{\alpha\beta} = - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\mu\nu}} &\wedge \boxed{\delta g_{\alpha\beta} = - g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}} \quad (63)
\end{aligned}$$

en donde se corrobora que la expresión (63) es simétrica en  $\{\alpha, \beta\}$ , como debe ser.

### ■ Observación:

Debido a que muchas veces la notación puede ser ambigua, es importante entender bien lo que la ecuación (63) está diciendo: ésta parece indicar que las componentes contravariantes del tensor  $\delta g$  no se relacionan con sus componentes covariantes de la forma usual (por un signo menos) pero tal interpretación es incorrecta; para entender por qué, es útil revisar los cálculos con una matriz arbitraria  $M$  y sin hacer referencia a una base en particular, así

$$MM^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad \delta\{M\} M^{-1} = -M \delta\{M^{-1}\} \quad \Rightarrow \quad \delta\{M^{-1}\} = -M^{-1} \delta\{M\} M^{-1}$$

permite reescribir (63) de forma más clara como  $\delta\{g^{-1}\}^{\alpha\beta} = - (g^{-1})^{\alpha\mu} (g^{-1})^{\beta\nu} \delta g_{\mu\nu}$  donde se observa que las componentes de las variaciones referidas a ambos lados de la ecuación no corresponden a un mismo tensor y, por ende, lo correcto es concluir que  $\delta\{g^{-1}\}_{\mu\nu} = -\delta g_{\mu\nu}$  es condición necesaria y suficiente para que  $\delta g^{-1}$  preserve la relación adecuada entre sus componentes covariantes y contravariantes; esto también se reflejará en todas las demás ecuaciones que incorporen tensores asociados tales como  $\frac{\delta M}{\delta g^{-1}} = -\frac{\delta M}{\delta g}$ .

■ **Demostración:**

$$\left(\frac{\delta M}{\delta g^{-1}}\right)_{\mu\nu} = \frac{\delta M}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta M}{\delta g_{\alpha\beta}} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta M}{\delta g_{\alpha\beta}} (-g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}) = - \left(\frac{\delta M}{\delta g}\right)_{\mu\nu} \Rightarrow \frac{\delta M}{\delta g^{-1}} = - \frac{\delta M}{\delta g} \quad \blacksquare$$

Gracias a esto se ve que, en lo relativo a derivadas variacionales, el esfuerzo operacional es idéntico si se emplean variaciones de la métrica usual o variaciones de la métrica inversa. Por convención, en este documento se preferirá el uso de variaciones de la métrica inversa. La libertad de elección en este caso se justifica porque, a nivel de ecuaciones, los resultados siempre pueden llevarse a la forma *ecuación* = 0 en donde el signo relativo entre  $\delta g$  y  $\delta g^{-1}$  es insignificante. Por construcción, el paquete *xAct* de *Mathematica* utiliza variaciones con respecto a la métrica usual y no su inversa; se debe tener un cuidado espacial al combinar cálculos a mano con cálculos a computador (las precauciones sobran cuando el mismo método - manual o computarizado - es aplicado a todos los términos de una misma ecuación).

■ **Corolario: Acción de un operador  $M$  compatible con  $g$  sobre  $\delta g_{\mu\nu}$  y  $\delta g^{\mu\nu}$**

Para todo operador  $M$  compatible con la métrica, definido sobre una variedad  $\mathcal{M}$  con componentes  $M^C_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} M^{C\alpha\beta}$ , se satisface la siguiente regla:

$$\boxed{M^{C\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = - M^C_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}} \quad . \quad (64)$$

Demostración: (i) Nótese que los dos últimos índices de  $M$  deben ser simétricos, (ii) si la ecuación (64) es cierta, ésta se cumple para todo  $\delta g^{\alpha\beta}$ , (iii) ahora bien, es claro que  $M^{C\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = - M^{C\mu\nu} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta} = - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} M^{C\mu\nu} \delta g^{\alpha\beta} \Leftrightarrow [g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}, M^{C\mu\nu}] = 0$ , (iv) con la simetría en los últimos índices esta condición se traduce en  $\{g_{\mu\alpha}, [g_{\nu\beta}, M^{C\mu\nu}]\} = 0$

y finalmente (v) ésta se satisface en particular cuando  $[g_{\alpha\beta}, M^{C\mu\nu}] = [g_{\alpha\beta}, M^C_{\mu\nu}] = 0$ .

### Apéndice A.1.5. $\delta R = ?$

Este caso no presenta libertades de signo (ya que solo existe una posible traza de  $R_{\mu\nu}$ ). Teniendo en cuenta la expresión (64) y la compatibilidad de los tensores  $D$  con la métrica:

$$\delta R = \delta\{R_{\nu\sigma} g^{\nu\sigma}\} = R_{\nu\sigma} \delta g^{\nu\sigma} + \delta R_{\nu\sigma} g^{\nu\sigma},$$

$$\delta R = \left( R_{\alpha_2\alpha_1} - g^{\nu\sigma} D_{\nu\sigma\alpha(2)}^{\alpha_3\alpha_4} \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \right) \delta g^{\alpha_2\alpha_1}. \quad (65)$$

### Apéndice A.2. Truco de Leibniz

Hasta ahora se ha demostrado que (i)  $\delta\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$  es proporcional a una derivada covariante de  $\delta g_{\alpha_2\alpha_1}$ , (ii)  $\delta R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$  y  $\delta R_{\nu\sigma}$  son proporcionales a dos derivadas covariantes de  $\delta g_{\alpha_2\alpha_1}$  y (iii)  $\delta R$  está compuesto por una parte proporcional a  $\delta g_{\alpha_2\alpha_1}$  y otra proporcional a dos derivadas covariantes de  $\delta g_{\alpha_2\alpha_1}$ ; con esto en mente y dado que la teoría aquí expuesta siempre se implementará en el contexto del principio de acción estacionaria con extremos fijos, todas las variaciones que involucren acoples no mínimos a la gravedad provendrán de escalares reales como:

$$C^{\mu(p)} P_{\mu(p)}, \quad (66)$$

en donde  $p \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ ,  $C$  es un tensor real arbitrario,  $P$  es un tensor real cuya variación involucra términos proporcionales, a lo sumo, a  $n$  derivadas covariantes de  $\delta g_{\alpha_2\alpha_1}$  siendo  $n \in \mathbb{N}$  un número entre 0 y  $p-1$  y  $\mathbb{D}_{\mu(p)}^{\alpha(n)}$  su respectivo factor de proporcionalidad; así:

$$\delta P_{\mu^{(p)}} = \sum_{i=2}^{n+2} \mathbb{D}_{\mu^{(p)}}^{\alpha(i)} \left( \prod_{k=3}^i \nabla_{\alpha_{3+i-k}} \right) \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} ,$$

en donde al menos uno de los factores de proporcionalidad  $\mathbb{D}$  ha de ser diferente de cero para evitar el caso trivial  $\delta P_{\mu^{(p)}} = 0$ . En particular, si  $\mathbb{D}_{\mu^{(p)}}^{\alpha(i)} \neq 0 \Leftrightarrow i = 2$ , la productoria se hace igual a 1 y  $C^{\mu^{(p)}} \delta P_{\mu^{(p)}}$  resulta proporcional a  $\delta g_{\alpha_2 \alpha_1}$ ; en general,

$$\delta \left\{ C^{\mu^{(p)}} P_{\mu^{(p)}} \right\} \supset C^{\mu^{(p)}} \delta P_{\mu^{(p)}} \supset C^{\mu^{(p)}} \mathbb{D}_{\mu^{(p)}}^{\alpha(i)} \nabla_{\alpha_i} \nabla_{\alpha_{i-1}} \cdots \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} \equiv B^{\alpha(i)} \nabla_{\alpha_i} \cdots \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1}$$

corresponde al  $i$ -ésimo término de  $\delta P_{\mu^{(p)}}$  (con  $i - 2$  derivadas covariantes involucradas) y, aplicando la regla de Leibniz  $i - 2$  veces se puede factorizar  $\delta g_{\alpha_2 \alpha_1}$  para dar origen a una expresión más simple; para demostrarlo, defínanse

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha_l} \nabla_{\alpha_{l+1}} \cdots \nabla_{\alpha_m} &\equiv \nabla_{\alpha_{(l \uparrow m)}} = 1 \Leftrightarrow l < m \quad ; \quad \nabla_{\alpha_l} \nabla_{\alpha_{l-1}} \cdots \nabla_{\alpha_m} \equiv \nabla_{\alpha_{(l \downarrow m)}} = 1 \Leftrightarrow l > m . \\ \mathbb{C}_{\mathbb{k}}^{\alpha_i - k} &\equiv \nabla_{\alpha_{(i+1-k \uparrow i)}} B^{\alpha(i)} \nabla_{\alpha_{(i-1-k \downarrow 3)}} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} , \end{aligned}$$

en donde la definición de  $\mathbb{C}$  es tal que todos los índices de las derivadas covariantes se contraen excepto el  $i - k$ ; esto permite desarrollar el proceso previamente mencionado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} B^{\alpha(i)} \nabla_{\alpha_{(i \downarrow 3)}} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} &= \nabla_{\alpha_i} \mathbb{C}_{\mathbb{0}}^{\alpha_i} - (\nabla_{\alpha_i} B^{\alpha(i)}) \nabla_{\alpha_{(i-1 \downarrow 3)}} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} , \\ &= \nabla_{\alpha_i} \mathbb{C}_{\mathbb{0}}^{\alpha_i} - \nabla_{\alpha_{i-1}} \mathbb{C}_{\mathbb{1}}^{\alpha_{i-1}} + \left( \nabla_{\alpha_{(i-1 \uparrow i)}} B^{\alpha(i)} \right) \nabla_{\alpha_{(i-2 \downarrow 3)}} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} , \\ &= \sum_{k=0}^{i-3} (-1)^k \nabla_{\alpha_{i-k}} \mathbb{C}_{\mathbb{k}}^{\alpha_{i-k}} + (-1)^{i-2} \delta g_{\alpha_1 \alpha_2} \nabla_{\alpha_{(3 \uparrow i)}} B^{\alpha(i)} . \end{aligned}$$

Como estas expresiones surgen al variar la acción  $\left( \int \delta \mathcal{L}_{\text{mat}} \sqrt{-g} d^4x \supset \int C^{\mu(p)} \delta P_{\mu(p)} \sqrt{-g} d^4x \right)$  con extremos fijos y la conexión es compatible con la métrica ( $\nabla_\mu \sqrt{-g} = 0$ ), se da que la integral de los términos de la sumatoria es igual a cero por teorema de la divergencia y que

$$\boxed{B^{\alpha(i)} \nabla_{\alpha_i} \dots \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} \approx (-1)^i \delta g_{\alpha_1 \alpha_2} \nabla_{\alpha_3} \dots \nabla_{\alpha_i} B^{\alpha(i)}} , \quad (67)$$

en donde el símbolo  $\approx$  sirve para enfatizar que esto solo es válido tras variar la acción con extremos fijos. Nótese la simplicidad de ésta fórmula: para intercambiar dos operadores separados por  $i$  derivadas covariantes ( $\delta g_{\alpha_2 \alpha_1}$  y  $B^{\alpha(i)}$ ) solo hace falta invertir el orden de las derivadas y agregar un factor de  $(-1)$  si el número de derivadas involucradas es impar.

### Apéndice A.3. Fórmula para la variación de una contracción

Cualquier escalar  $c$  puede ser expresado como la contracción de dos tensores: uno  $p$  veces covariante  $A$  y otro  $p$  veces contravariante  $B$ , i.e:  $c = A_{\mu(p)} B_{\nu(p)} L^{\mu(p)\nu(p)} \equiv C_{\mu(p)\nu(p)} L^{\mu(p)\nu(p)}$  en donde  $L$  es un tensor compuesto por  $p$  métricas que conserva toda la información relevante sobre cómo se deben emparejar los índices de  $C$  para obtener el escalar deseado  $c$ , así pues:

$$L^{\mu(p)\nu(p)} = \prod_{i=1}^p g^{P_i}$$

en donde cada  $P_i$  representa el  $i$ -ésimo par de índices del conjunto  $\{\mu(p), \nu(p)\}$  que se deben contraer en  $A_{\mu(p)} B_{\nu(p)}$  para dar origen al escalar deseado<sup>35</sup>. Dicho esto, es claro que:

---

<sup>35</sup> Si la magnitud a variar está (anti-)simetrizada,  $L$  incluirá deltas generalizadas además de métricas; en esos casos lo ideal es primero aplicar las deltas generalizadas y luego sí operar con  $\$$ .

$$\delta L^{\mu(p)\nu(p)} = \frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} \left\{ \prod_{i=1}^p g^{P_i} \right\} \delta g^{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^p \frac{\delta g^{P_i}}{\delta g^{\alpha\beta}} \left\{ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p g^{P_k} \right\} \delta g^{\alpha\beta} ,$$

y ya que  $\frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta g^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \tilde{\delta}_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$  actúa como un operador simetrizador normalizado<sup>36</sup>, el efecto neto de  $\delta L^{\mu(p)\nu(p)}$  es el de actuar sobre cada par de índices contraídos y reemplazarlos por  $\{\alpha, \beta\}$ , simetrizando, normalizando y dejando intactas las demás contracciones en cada iteración de la sumatoria; todos estos procesos pueden sintetizarse en una notación que minimice la escritura, de modo que a partir de ahora la acción de  $\delta L$  se denotará como:

$$\boxed{C_{\mu(p)\nu(p)} \delta L^{\mu(p)\nu(p)} \equiv \mathbb{S} \left( C_{\mu(p)\nu(p)} L^{\mu(p)\nu(p)} ; \alpha, \beta \right) \delta g^{\alpha\beta}} , \quad (68)$$

en donde se enfatiza que los procesos previamente expuestos solo se deben realizar sobre las posiciones indicadas por el tensor  $L$  y, con fines ilustrativos, se expone un par de ejemplos:

■ **Ejemplo 1 - Término de Yang-Mills:** Se puede definir un término  $G$  (análogo a  $L$ ) para factorizar todas las métricas de grupo que median las contracciones de índices de gauge; hecho esto, es importante notar que  $\delta G_{ab} = 0$  ante variaciones de  $g^{\mu\nu}$ ; lo mismo ocurrirá con otras magnitudes como  $A_\mu^a$  que también tendrán  $\delta A_\mu^a = 0$  ya que solo se desea conocer el efecto de las variaciones de  $g^{\mu\nu}$  en las ecuaciones.

---

<sup>36</sup> Con esto se hace referencia a que al tener una expresión como  $M_{\mu\nu}^C \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta g^{\alpha\beta}}$ , el resultado será  $\frac{1}{2} M_{(\alpha\beta)}^C$ .

$$\begin{aligned}
\delta \{ F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \} &= \delta \{ F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^b g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} g_{ab} \} \equiv \delta \{ F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^b L^{\mu\nu\rho\sigma} G_{ab} \} , \\
&= [ \delta \{ \nabla_{[\mu} A_{\nu]}^a \} F_{\rho\sigma}^b g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + \delta \{ \nabla_{[\rho} A_{\sigma]}^b \} F_{\mu\nu}^a g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^b \delta L^{\mu\nu\rho\sigma} ] G_{ab} , \\
&= [ \delta \{ \cancel{\partial_{[\mu} A_{\nu]}^a} - \cancel{\Gamma_{[\mu\nu]}^\rho} A_\rho^a \} F^{b\mu\nu} + \delta \{ \cancel{\partial_{[\rho} A_{\sigma]}^b} - \cancel{\Gamma_{[\rho\sigma]}^\rho} A_\rho^b \} F^{a\rho\sigma} + F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^b \delta L^{\mu\nu\rho\sigma} ] G_{ab} , \\
&= [ F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^b G_{ab} ] \delta L^{\mu\nu\rho\sigma} = \mathbb{S} ( F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} ; \beta , \varepsilon ) \delta g^{\beta\varepsilon} , \\
&= \frac{1}{2} [ F_{(\beta|\nu}^a F_{a|\varepsilon)}^\nu + F_{\mu(\beta|}^a F_{a|\varepsilon)}^\mu ] \delta g^{\beta\varepsilon} = F_{(\beta|\nu}^a F_{a|\varepsilon)}^\nu \delta g^{\beta\varepsilon} = 2 F_{\beta\nu}^a F_{a\varepsilon}^\nu \delta g^{\beta\varepsilon} .
\end{aligned}$$

Con estas definiciones se sintetiza un proceso que fácilmente puede realizarse mentalmente minimizando errores y agilizando el tiempo de cálculo; adicionalmente, se proporciona un método fácilmente replicable en cálculos más complejos: (i) agrupar métricas inversas en L y métricas de grupo en G (sus variaciones son triviales con  $\mathbb{S}$ ), (ii) aplicar la regla del producto.

■ **Ejemplo 2 - Término de acople no mínimo de la forma  $R A_\mu^a A_\mu^a$  :**

$$\begin{aligned}
\delta \{ R A_\mu^a A_\mu^a \} &= \delta \{ R A_\mu^a A_\nu^b g^{\mu\nu} g_{ab} \} \equiv \delta \{ R A_\mu^a A_\nu^b L^{\mu\nu} G_{ab} \} , \\
&= \delta R A_\mu^a A_\mu^a + R A_\mu^a A_\nu^b \delta L^{\mu\nu} G_{ab} , \\
&= [ [S_3] \left( \tilde{R}_{\beta\varepsilon} + g_{\beta\varepsilon} \nabla_\mu \nabla^\mu - \nabla_\varepsilon \nabla_\beta \right) \{ A_\mu^a A_\mu^a \} + \mathbb{S} ( R A_\mu^a A_\mu^a ; \beta , \varepsilon ) ] \delta g^{\beta\varepsilon} , \\
&= [ [S_3] \left( \tilde{R}_{\beta\varepsilon} + g_{\beta\varepsilon} \nabla_\mu \nabla^\mu - \nabla_\varepsilon \nabla_\beta \right) \{ A_\mu^a A_\mu^a \} + R A_{a\beta} A_\varepsilon^a ] \delta g^{\beta\varepsilon} .
\end{aligned}$$

En este caso, por definición,  $\mathbb{S} ( R A_\mu^a A_\mu^a ; \beta , \varepsilon ) = R \mathbb{S} ( A_\mu^a A_\mu^a ; \beta , \varepsilon )$  ya que  $L^{\mu\nu}$  es tal que las contracciones dentro del escalar de Ricci no se ven afectadas por la acción de  $\mathbb{S}$ .

Asimismo, se implementó una fórmula para reemplazar el término de la forma  $c \delta R$ ; ésta y otras fórmulas similares se expondrán en el anexo B.

#### Apéndice A.4. Fórmula para el tensor de energía-momento

Considérese por un momento, una acción totalmente general en donde  $[S_{\text{EH}}]$  sea el signo del término de Einstein-Hilbert en el convenio de signos definido por  $[S_1]$ ,  $[S_2]$  y  $[S_3]$  relacionados con la signatura de la métrica y las definiciones del tensor de Riemann y el tensor de Ricci.<sup>37</sup>

$$S = [S_{\text{EH}}] \int \frac{m_p^2}{2} R \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_{\text{mat}} \sqrt{-g} d^4x .$$

Al permitir variaciones en  $g^{\mu\nu}$ , el principio de acción estacionaria dicta que

$$\begin{aligned} \delta S = 0 &\Leftrightarrow \int \left\{ \frac{m_p^2}{2} [S_{\text{EH}}] G_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\{\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}}\}}{\delta g^{\mu\nu}} \right\} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad \forall \delta g^{\mu\nu} , \\ \Rightarrow [S_{\text{EH}}] m_p^2 G_{\mu\nu} &= \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\{\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}}\}}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}} + \mathcal{L}_{\text{mat}} g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

pero se sabe que debe satisfacerse  $m_p^2 G_{\mu\nu} = [S_3] T_{\mu\nu}$  para que el tensor  $T_{\mu\nu}$  sea consistente con la clasificación de Misner, Thorne y Wheeler; entonces, igualando ambas expresiones se encuentra fácilmente que  $T_{\mu\nu}$  debe estar dado por:

$$\boxed{T_{\mu\nu} = [S_3] [S_{\text{EH}}] \left\{ \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\{\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}}\}}{\delta g^{\mu\nu}} \right\} = [S_3] [S_{\text{EH}}] \left\{ -2 \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}} + \mathcal{L}_{\text{mat}} g_{\mu\nu} \right\}} . \quad (69)$$

---

<sup>37</sup> La convención tal y como la proponen Misner, Thorne y Wheeler en [3] es:  $\eta_{\mu\nu} = [S_1] \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ,  $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = [S_2] \left( \Gamma^\mu{}_{\nu[\sigma, \rho]} + \Gamma^\mu{}_{\alpha[\rho} \Gamma^\alpha{}_{\sigma]\nu} \right)$ ,  $R_{\mu\nu} = [S_2][S_3] R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ , de tal modo que  $m_p^2 G_{\mu\nu} = [S_3] T_{\mu\nu}$ .

### ■ Observación:

Físicamente, el signo de Einstein-Hilbert  $[S_{\text{EH}}]$  está determinado por  $[S_1]$ ,  $[S_2]$  y  $[S_3]$  para garantizar que el término cinético del gravitón sea del signo adecuado [102] y se recupere la ley de gravitación universal en el gauge de Newton; lamentablemente, no parece haber literatura científica dedicada a la forma funcional de  $[S_{\text{EH}}]$  hasta la fecha y, para los fines prácticos de este trabajo, basta con saber que  $[S_{\text{EH}}] = +1$  si  $[S_1]=[S_2]=[S_3] = +1$ .

## Apéndice B. Expresiones alternativas en términos del tensor de Riemann

### Apéndice B.1. Fundamentos teóricos

Dado que  $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] M_{\mu\nu} = \tilde{R}^\varepsilon_{\mu\alpha\beta} M_{\varepsilon\nu} + \tilde{R}^\varepsilon_{\nu\alpha\beta} M_{\mu\varepsilon}$  se satisface para todo tensor dos veces covariante, se deduce una relación útil para manipular algunas expresiones:

$$\nabla_{[\rho} \nabla_{\sigma]} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} = \tilde{R}^\varepsilon_{(\alpha_1 | \rho \sigma} \delta g_{|\alpha_2) \varepsilon} = \delta_{\rho}^{\alpha_4} \delta_{\sigma}^{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} = \tilde{\delta}_{\alpha_2 \alpha_1}^{\mu \nu} \tilde{R}^\varepsilon_{\mu \rho \sigma} \delta g_{\nu \varepsilon} \quad (70)$$

en donde  $\delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$  es la delta generalizada de Kronecker. Por otro lado, gracias al proceso de antisimetrización requerido en la ecuación (57) y considerando la ecuación previa a (58), es posible reescribir  $\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma}$  como:

$$\begin{aligned} \delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} &= [S_2] \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left( \delta_{\lambda}^{\alpha_1} \delta_{\nu}^{\alpha_2} \delta_{[\sigma}^{\alpha_3} + \delta_{\lambda}^{\alpha_1} \delta_{[\sigma}^{\alpha_2} \delta_{\nu}^{\alpha_3} - \delta_{\nu}^{\alpha_1} \delta_{[\sigma}^{\alpha_2} \delta_{\lambda}^{\alpha_3} \right) \delta_{|\rho]}^{\alpha_4} \right] \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} , \\ &= [S_2] \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left( \delta_{\lambda}^{\alpha_1} \delta_{\nu}^{\alpha_2} \delta_{\sigma}^{\alpha_3 \alpha_4} + \delta_{\lambda}^{\alpha_1 \alpha_3} \delta_{\sigma}^{\alpha_2 \alpha_4} \right) \right] \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} , \\ &= [S_2] \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left( \delta_{\lambda}^{\alpha_1 \alpha_3} \delta_{\sigma}^{\alpha_2 \alpha_4} - \delta_{\lambda}^{\alpha_1} \delta_{\nu}^{\alpha_2} \delta_{\sigma}^{\alpha_4 \alpha_3} \right) \right] \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} , \\ &= \frac{1}{2} [S_2] g^{\mu\lambda} \left( \delta_{\lambda}^{\alpha_1 \alpha_3} \delta_{\sigma}^{\alpha_2 \alpha_4} \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} - \delta_{\lambda}^{\alpha_1} \delta_{\nu}^{\alpha_2} \tilde{\delta}_{\alpha_2 \alpha_1}^{\mu \beta} \tilde{R}^\varepsilon_{\mu \sigma \rho} \delta g_{\beta \varepsilon} \right) , \\ &= \frac{1}{2} [S_2] g^{\mu\lambda} \left( \nabla_{[\rho} \nabla_{\nu} \delta g_{|\sigma] \lambda} - \nabla_{[\rho} \nabla_{\lambda} \delta g_{|\sigma] \nu} + \tilde{R}^\varepsilon_{(\nu | \rho \sigma} \delta g_{|\lambda) \varepsilon} \right) , \end{aligned} \quad (71)$$

$$\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} [S_2] g^{\mu\lambda} \left( \delta_{\lambda}^{\varepsilon} \delta_{[\sigma}^{\beta} \nabla_{\rho]} \nabla_{\nu} - \delta_{\nu}^{\varepsilon} \delta_{[\sigma}^{\beta} \nabla_{\rho]} \nabla_{\lambda} + \tilde{R}^\varepsilon_{(\nu | \rho \sigma} \delta_{|\lambda) \varepsilon}^{\beta} \right) \delta g_{\beta \varepsilon} . \quad (72)$$

Es de destacar que según (71), la variación  $\delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} = D^\mu_{\nu\rho\sigma}{}^{\alpha(4)} \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2\alpha_1}$  puede ser separada en una parte proporcional a  $\nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2\alpha_1}$  y otra proporcional a  $\delta g_{\alpha_2\alpha_1}$ , de este modo se puede introducir una nueva parametrización en términos de dos factores de proporcionalidad  $\mathbb{D}$  (consistentes con la notación expuesta en la sección del truco de Leibniz) que ya no serán compatibles con  $\nabla_\mu$ , así:

$$\begin{aligned} \delta R^\mu_{\nu\rho\sigma} &= D^\mu_{\nu\rho\sigma}{}^{\alpha(4)} \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2\alpha_1} = \left[ \frac{1}{2} [S_2] g^{\mu\lambda} \left( \delta_{\sigma\rho}^{\alpha_2\alpha_4} \delta_{\lambda\nu}^{\alpha_1\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} + \tilde{R}^{\alpha_2}_{(\nu|\rho\sigma} \delta_{|\lambda)}^{\alpha_1} \right) \right] \delta g_{\alpha_2\alpha_1}, \\ &\equiv \left[ \mathbb{D}^\mu_{\nu\rho\sigma}{}^{\alpha(4)} \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} + \mathbb{D}^\mu_{\nu\rho\sigma}{}^{\alpha(2)} \right] \delta g_{\alpha_2\alpha_1}, \end{aligned} \quad (73)$$

De igual forma,  $\delta R_{\nu\sigma} = [S_2][S_3] \delta R^\mu_{\nu\mu\sigma}$  y  $\delta R = \delta R_{\nu\sigma} g^{\nu\sigma} - R^{\nu\sigma} \delta g_{\nu\sigma}$ , entonces

$$\begin{aligned} \delta R_{\nu\sigma} &= \frac{1}{2} [S_3] \left( g^{\mu\beta} \delta_{[\sigma}^\varepsilon \nabla_{\mu]} \nabla_\nu - \delta_\nu^\beta \delta_{[\sigma}^\varepsilon \nabla_{\mu]} \nabla^\mu + \tilde{R}^\varepsilon_{(\lambda|\sigma} \delta_{|\nu)}^\beta \right) \delta g_{\beta\varepsilon}, \\ &= [S_2][S_3] \left[ \mathbb{D}^\rho_{\nu\rho\sigma}{}^{\alpha(4)} \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} + \mathbb{D}^\rho_{\nu\rho\sigma}{}^{\alpha(2)} \right] \delta g_{\alpha_2\alpha_1}. \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta que  $\left[ \delta R \supset \delta R_{\nu\sigma} g^{\nu\sigma} \supset \tilde{R}^\varepsilon_{(\lambda|\sigma} \delta_{|\nu)}^\beta g^{\nu\sigma} = \tilde{R}^\varepsilon_{\lambda}{}^{(\lambda\beta)} = 0 \right]$ , se da

$$\begin{aligned} \delta R &= \frac{1}{2} [S_3] g^{\nu\sigma} \left( g^{\mu\beta} \delta_{[\sigma}^\varepsilon \nabla_{\mu]} \nabla_\nu - \delta_\nu^\beta \delta_{[\sigma}^\varepsilon \nabla_{\mu]} \nabla^\mu \right) \delta g_{\beta\varepsilon} - R^{\beta\varepsilon} \delta g_{\beta\varepsilon}, \\ &= \frac{1}{2} [S_3] \left( \nabla^\beta \nabla^\varepsilon - g^{\beta\varepsilon} \nabla^\nu \nabla_\nu - g^{\beta\varepsilon} \nabla_\mu \nabla^\mu + \nabla^\beta \nabla^\varepsilon - 2\tilde{R}^{\beta\varepsilon} \right) \delta g_{\beta\varepsilon}, \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta R = [S_3] \left( \nabla^\beta \nabla^\varepsilon - g^{\beta\varepsilon} \nabla_\mu \nabla^\mu - \tilde{R}^{\beta\varepsilon} \right) \delta g_{\beta\varepsilon}}. \quad (74)$$

### ■ Comprobación de fórmulas:

Al comparar estas fórmulas con la literatura es importante tener en cuenta que la definición del operador D'Alembertiano  $\square \equiv -[S_1] \nabla_\mu \nabla^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$  depende de  $[S_1]$  para garantizar que el coeficiente de la doble derivada temporal sea positivo. El artículo [103] de A. Guarnizo ilustra muy bien esto: luego de aplicar (64) en la ecuación (3.8) se puede deducir por comparación con (74) que  $[S_3] = +1$  y  $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$ ; esto es consistente con el párrafo que se muestra a continuación y con el convenio de signos  $[S_1] = [S_2] = [S_3] = +1$  expuesto entre (2.1) y (2.2). Asimismo, (2.4) dicta que  $[S_{EH}] = +1$  y, por ende, (2.35) corrobora a (69). De otra parte, (2.9) también concuerda con (57) y (74) es la versión expandida de (2.13).

### Apéndice B.2. Discusión

Para comenzar esta sección, es conveniente resaltar que las variaciones con el mayor número de posibles expresiones alternativas, siempre serán aquellas de la forma  $\delta R^{\mu_4}_{\nu(3)} C_{\mu_4}^{\nu(3)}$ ; en estos casos se pueden identificar al menos tres vías evidentes para realizar su variación:

- **Vía 1:** Expresar  $\delta R^{\mu_4}_{\nu(3)}$  en términos de  $D$ , aplicar el truco de Leibniz y no escribir los conmutadores de derivadas en términos de  $R_{\nu(4)}$ .

$$\begin{aligned} \delta R^{\mu_4}_{\nu(3)} C_{\mu_4}^{\nu(3)} &\approx D^{\mu_4}_{\nu(3)}{}^{\alpha(4)} (\nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} C_{\mu_4}^{\nu(3)}) \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} , \\ &= -\frac{1}{2} [S_2] g^{\mu_4 \lambda} \left[ \delta_{\lambda}^{\alpha_1} \delta_{\nu_1}^{\alpha_2} \delta_{\nu_2 \nu_3}^{\alpha_3 \alpha_4} + \delta_{\lambda}^{\alpha_1 \alpha_3} \delta_{\nu_2 \nu_3}^{\alpha_2 \alpha_4} \right] (\nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} C_{\mu_4}^{\nu(3)}) \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} , \\ &= -\frac{1}{2} [S_2] \nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} \{ C^{\alpha_1 \alpha_2 [\alpha_3 \alpha_4]} + C^{[\alpha_1 \alpha_3] [\alpha_2 \alpha_4]} \} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} . \end{aligned}$$

Esta vía finaliza en un gran número de derivadas covariantes de  $C$  sumadas y restadas; de manera general, éstas toman la forma de derivadas de productos y, al expandirse con Leibniz pueden generar derivadas covariantes de orden superior a 2. En caso de optar por

esta vía lo ideal sería no expandir las derivadas de productos, más bien, desarrollar la doble derivada covariante de  $C$  como se haría para un tensor de orden (4,0).

• **Vía 2:** Expresar  $\delta R^{\mu_4}_{\nu(3)}$  en términos de  $D$ , aplicar el truco de Leibniz y escribir los conmutadores de derivadas en términos de  $R_{\nu(4)}$ .

$$\begin{aligned}
\delta R^{\mu_4}_{\nu(3)} C_{\mu_4}^{\nu(3)} &\approx D^{\mu_4}_{\nu(3)}{}^{\alpha(4)} (\nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} C_{\mu_4}^{\nu(3)}) \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} , \\
&= -\frac{1}{2} [S_2] g^{\mu_4 \lambda} \left[ \delta_{\lambda}^{\alpha_1} \delta_{\nu_1}^{\alpha_2} \delta_{\nu_2 \nu_3}^{\alpha_3 \alpha_4} + \delta_{\lambda}^{\alpha_1 \alpha_3} \delta_{\nu_2 \nu_3}^{\alpha_2 \alpha_4} \right] (\nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} C_{\mu_4}^{\nu(3)}) \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} , \\
&= -\frac{1}{2} [S_2] \left[ \delta_{\nu_1}^{\alpha_2} [\nabla_{\nu_2}, \nabla_{\nu_3}] C^{\alpha_1 \nu(3)} + \nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} C^{[\alpha_1 \alpha_3][\alpha_2 \alpha_4]} \right] \delta g_{\alpha_2 \alpha_1} , \\
&= -\frac{1}{2} [S_2] \left[ \sum_{k=1}^4 \tilde{R}^{\alpha_k}_{\lambda \alpha_3 \alpha_4} C^{\alpha(4)}_{\lambda \alpha_3 \alpha_4}{}^{\alpha_k \mapsto \lambda} + \nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} C^{[\alpha_1 \alpha_3][\alpha_2 \alpha_4]} \right] \delta g_{\alpha_1 \alpha_2} .
\end{aligned}$$

Este resultado complementa el análisis a la vía 1 y permite reescribir:

$$\begin{aligned}
\delta R^{\mu_4}_{\nu(3)} C_{\mu_4}^{\nu(3)} &= -\frac{1}{2} [S_2] (\delta \text{CRiem1} + \delta \text{CRiem2}) \\
\text{con } \delta \text{CRiem1} &\equiv \sum_{k=1}^4 \tilde{R}^{\alpha_k}_{\lambda \alpha_3 \alpha_4} C^{\alpha(4)}_{\lambda \alpha_3 \alpha_4}{}^{\alpha_k \mapsto \lambda} \delta g_{\alpha_1 \alpha_2} = \nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} C^{\alpha_1 \alpha_2 [\alpha_3 \alpha_4]} \delta g_{\alpha_1 \alpha_2} ,
\end{aligned}$$

la cual se exhibe como la opción más deseable y fácil de manipular encontrada hasta el momento porque involucra cuatro tensores de Riemann en vez de un conmutador de derivadas covariantes aplicado al tensor  $C$  (que generaría de 12 a 60 términos según su manipulación).<sup>38</sup>

• **Vía 3:** Expresar  $\delta R^{\mu_4}_{\nu(3)}$  en términos de  $\mathbb{D}^*$  desde el comienzo.<sup>39</sup>

<sup>38</sup>  $\nabla_{\nu_2} \nabla_{\nu_3} C$  arroja 6 términos si no se desarrolla la derivada covariante interna (12 al restarle  $\nabla_{\nu_3} \nabla_{\nu_2} C$ ) y, si se desarrolla, es peor, dando origen a  $6 \times 5 = 30$  (60 al restarle  $\nabla_{\nu_3} \nabla_{\nu_2} C$ ) términos.

<sup>39</sup> Este caso equivale a utilizar (70) desde el comienzo, dicho paso está implícito en la relación (73).

Aquí da igual si se reemplazan los  $\mathbb{D}$  antes o después de usar Leibniz para factorizar la variación  $\delta g_{\alpha_2 \alpha_1}$ , esto ocurre porque un  $\mathbb{D}$  es un simple factor multiplicativo y el otro (sin considerar eventuales modificaciones) no incorpora las deltas de Kronecker necesarias para antisimetrizar  $\{\alpha_3, \alpha_4\}$  y dar lugar a los conmutadores de derivadas covariantes que aparecen en (70); por consiguiente:

$$\begin{aligned}
\delta R^{\mu_4}_{\nu(3)} C_{\mu_4}^{\nu(3)} &= C_{\mu_4}^{\nu(3)} D^{\mu_4}_{\nu(3)}{}^{\alpha(4)} \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1}, \\
&= C_{\mu_4}^{\nu(3)} \left[ \mathbb{D}^{\mu_4}_{\nu(3)}{}^{\alpha(4)} \nabla_{\alpha_4} \nabla_{\alpha_3} + \mathbb{D}^{\mu_4}_{\nu(3)}{}^{\alpha(2)} \right] \delta g_{\alpha_2 \alpha_1}, \\
&\approx \left[ \mathbb{D}^{\mu_4}_{\nu(3)}{}^{\alpha(4)} (\nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} C_{\mu_4}^{\nu(3)}) + C_{\mu_4}^{\nu(3)} \mathbb{D}^{\mu_4}_{\nu(3)}{}^{\alpha(2)} \right] \delta g_{\alpha_2 \alpha_1}, \\
&= \frac{1}{2} [S_2] g^{\mu_4 \nu_4} \left[ \delta_{\nu_3 \nu_2}^{\alpha_2 \alpha_4} \delta_{\nu_4 \nu_1}^{\alpha_1 \alpha_3} (\nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} C_{\mu_4}^{\nu(3)}) + C_{\mu_4}^{\nu(3)} \tilde{R}^{\alpha_2}_{(\nu_1 | \nu_2 \nu_3} \delta_{|\nu_4)}^{\alpha_1} \right] \delta g_{\alpha_2 \alpha_1}, \\
&= \frac{1}{2} [S_2] \left[ \nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} C^{[\alpha_1 \alpha_3][\alpha_4 \alpha_2]} + C^{\nu(4)} \tilde{R}^{\alpha_2}_{(\nu_2 | \nu_3 \nu_4} \delta_{|\nu_1)}^{\alpha_1} \right] \delta g_{\alpha_2 \alpha_1},
\end{aligned}$$

### Apéndice B.3. Conclusión

En todas las vías es persistente el término ( $\delta \text{CRiem2} = \nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} C^{[\alpha_1 \alpha_3][\alpha_2 \alpha_4]} \delta g_{\alpha_2 \alpha_1}$ ) pero  $\delta \text{CRiem1}$  admite tres posibles formas de escribirlo: la primera involucra un conmutador de derivadas covariantes de un tensor de rango (4, 0), la segunda involucra cuatro tensores de Riemann contraídos con  $C$  como reemplazo del conmutador, la tercera involucra dos tensores de Riemann contraídos con el tensor de rango (4, 0) a través de una delta de Kronecker.

#### Síntesis de alternativas:

Con base en la discusión anterior, se concluye que la forma más compacta de expresar la variación de interés en este capítulo está dada por la siguiente expresión:

$$\delta R^{\mu_4}_{\nu(3)} C_{\mu_4}^{\nu(3)} = -\frac{1}{2} [S_2] (\delta \text{CRiem1} + \delta \text{CRiem2}) \quad (75)$$

$$\text{con } \left\{ \begin{array}{l} \delta \text{CRiem1} \equiv C^{\nu(4)} \tilde{R}^{\alpha_2}_{(\nu_2|\nu_4\nu_3} \delta^{\alpha_1}_{|\nu_1)} \delta g_{\alpha_2\alpha_1} \left[ = 0 \text{ si } C^{\alpha_1\alpha_2[\alpha_3\alpha_4]} = 0 \right] \\ \& \delta \text{CRiem2} \equiv \nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha_4} C^{[\alpha_1\alpha_3][\alpha_2\alpha_4]} \delta g_{\alpha_2\alpha_1} \end{array} \right\} .$$

Nótese que si  $C^{\rho(4)}$  es simétrico en sus últimos dos índices,  $\delta \text{CRiem1} = \delta \text{CRiem2} = 0$ ; esto es consistente con el hecho de que el escalar  $\delta R^{\mu_4}_{\nu(3)} C_{\mu_4}^{\nu(3)}$  sea idénticamente nulo cuando se exige que  $C$  sea simétrico en los dos últimos índices.<sup>40</sup>

De la conclusión anterior, se deducen inmediatamente los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \text{CRiem1}}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{2} \tilde{\delta}^{\alpha_2\alpha_1}_{\mu\nu} C^{\nu(4)} \tilde{R}_{\alpha_2(\nu_2|\nu_3\nu_4} g_{|\nu_1)\alpha_1} , \\ &= \frac{1}{2} \left[ C_{(\mu|\rho(3)} + C^{\rho_1}_{(\mu|\rho_2\rho_3)} \right] \tilde{R}_{|\nu)\rho(3)} , \\ &= \frac{1}{2} C^{(\lambda\rho_1)\rho_2\rho_3} g_{\lambda(\mu} \tilde{R}_{\nu)\rho(3)} . \end{aligned} \quad (76)$$

$$\frac{\delta \text{CRiem2}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \tilde{\delta}^{\alpha_2\alpha_1}_{\mu\nu} \nabla^{\alpha_3} \nabla^{\alpha_4} C_{[\alpha_1\alpha_3][\alpha_4\alpha_2]} . \quad (77)$$

Gracias a ellos, se ve que  $\delta \text{CRiem1} = 0$  si  $C$  es antisimétrico en sus primeros dos índices, o en otras condiciones,  $\delta \text{CRiem2} = 0$  si  $C$  es simétrico en sus primeros dos índices. Esto fácilmente lo lleva a uno a pensar que  $\delta \text{CRiem1}$  y  $\delta \text{CRiem2}$  están, respectivamente, asociados a la parte simétrica y antisimétrica de  $C$  en sus dos primeros índices; no obstante, esto no es necesariamente cierto siempre y a continuación me permitiré exponer un claro contraejemplo:

---

<sup>40</sup> Por otro lado, debido a que  $\delta R^{\mu_4}_{\nu(3)} C_{\mu_4}^{\nu(3)} = \delta R_{\lambda\nu(3)} C^{\lambda\nu(3)} - \delta g_{\mu_4\lambda} R^{\lambda}_{\nu(3)} C^{\mu_4\nu(3)} \neq \delta R_{\mu_4\nu(3)} C^{\mu_4\nu(3)}$ , no se debe esperar que  $\delta R^{\mu_4}_{\nu(3)} C_{\mu_4}^{\nu(3)} = 0$  cuando  $C$  sea simétrico en los dos primeros índices.

Considérese un tensor  $C$  con  $C^{(\rho_1 \rho_2) \rho_3 \rho_4} \neq 2 C^{\rho(4)}$  pero con  $C^{(\rho_1 \rho_2) \rho_3 \rho_4} = C^{\rho_1 \rho_2 (\rho_3 \rho_4)}$ ; en este caso,  $C$  no es simétrico en sus dos primeros índices pero su simetrización en dichos índices equivale a una simetrización en los dos últimos; esto, a la luz de (76), implica que  $\delta\text{CRiem1} = 0$  por cuenta de la contracción de los dos últimos índices de  $C$  con los dos últimos del tensor de Riemann.

Ejemplo del anterior caso es el tensor  $C^{\rho(4)} = A_a^{\rho_1} A_b^{\rho_2} A^{\rho_3 a} A^{\rho_4 b}$  que satisface

$$\begin{aligned} C^{(\rho_1 \rho_2) \rho_3 \rho_4} &= A_a^{(\rho_1} A_b^{\rho_2)} A^{\rho_3 a} A^{\rho_4 b} \\ &= A_{(a}^{\rho_1} A_{b)}^{\rho_2} A^{\rho_3 a} A^{\rho_4 b} \\ &= A_a^{\rho_1} A_b^{\rho_2} A^{\rho_3 (a} A^{\rho_4 | b)} \\ &= A_a^{\rho_1} A_b^{\rho_2} A^{(\rho_3 | a} A^{|\rho_4) b} = C^{\rho_1 \rho_2 (\rho_3 \rho_4)} \end{aligned}$$

como consecuencia directa de las simetrías al intercambio de  $\{\rho_1, \rho_3\}$  y  $\{\rho_2, \rho_4\}$ ; estas simetrías inducen la simetría al intercambio de bloque  $\{\rho_1 \rho_2, \rho_3 \rho_4\}$  y garantiza el cumplimiento de las siguientes igualdades:

$$C^{(\rho_1 \rho_2) \rho_3 \rho_4} = C^{(\rho_3 \rho_4) \rho_1 \rho_2} = C^{\rho_3 \rho_4 (\rho_1 \rho_2)} = C^{\rho_1 \rho_2 (\rho_3 \rho_4)}$$

y por ende  $\delta\text{CRiem1}$  termina anulándose. Dicho esto, es evidente que  $\delta\text{CRiem1} = \frac{\delta\text{CRiem1}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}$  es nulo si  $C$  es antisimétrico en sus dos primeros índices o presenta una simetría de bloque entre los dos primeros y los dos últimos índices (entre otras posibilidades más exóticas) y, adicionalmente, no es correcto asociar  $\delta\text{CRiem1}$  exclusivamente con la parte simétrica de  $C$  en sus dos primeros índices.

Un corolario interesante que se deriva de este resultado es que no todo acople al tensor de Riemann generará modificaciones a la rapidez de las ondas gravitacionales, e.g: ningún escalar formado a partir de un  $C \neq C(\Gamma)$  con simetrías en  $\{\rho_1, \rho_3\}$  y  $\{\rho_2, \rho_4\}$  aportará modificaciones (a primer orden en teoría de perturbaciones cosmológicas) a la rapidez de las ondas gravitacionales.

### Apéndice C. Fórmulas especiales para $\mathcal{L}_4^1$ y $\mathcal{L}_4^2$

A continuación se exponen las tres piezas del Lagrangiano  $\mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal}}$  según la ref. [77]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^1 \equiv & \frac{1}{4} (A_b \cdot A^b) [S_\mu^{\mu a} S_\nu^{\nu a} - S_\nu^{\mu a} S_\mu^{\nu a} + (A_a \cdot A^a) R] \\ & + \frac{1}{2} (A_a \cdot A_b) [S_\mu^{\mu a} S_\nu^{\nu b} - S_\nu^{\mu a} S_\mu^{\nu b} + 2(A^a \cdot A^b) R], \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^2 \equiv & \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) [S_\mu^{\mu a} S_\nu^{\nu b} - S_\nu^{\mu a} S_\mu^{\nu b} + (A^a \cdot A^b) R] \\ & + \frac{1}{2} (A^{\mu a} A^{\nu b}) [S_{\mu a}^\rho S_{\nu \rho b} - S_{\nu a}^\rho S_{\mu \rho b} - A_a^\rho A_b^\sigma R_{\mu\nu\rho\sigma} \\ & - (\nabla^\rho A_{\mu a})(\nabla_\rho A_{\nu b}) + (\nabla^\rho A_{\nu a})(\nabla_\rho A_{\mu b})], \end{aligned} \quad (79)$$

$$\mathcal{L}_4^3 \equiv \tilde{G}_{\mu\sigma}^b A_a^\mu A_{\nu b} S^{\nu\sigma a}, \quad (80)$$

donde  $S_{\mu\sigma}^b \equiv \nabla_{(\mu} A_{\sigma)}^b$  representa la versión simétrica de  $G_{\mu\sigma}^b \equiv \nabla_{[\mu} A_{\sigma]}^b$  que es la versión Abelianiana del tensor de esfuerzos  $F_{\mu\sigma}^b$ . El dual de Hodge de  $G_{\mu\sigma}^b$  es  $\tilde{G}_{\mu\sigma}^b$  (no confundirlo con  $G_{ab}$ , un tensor que factoriza las contracciones de gauge, o con  $G_{\mu\nu}$ , el tensor de Einstein).

■ Nótese que todos los términos de  $\mathcal{L}_4^1$  y  $\mathcal{L}_4^2$  pueden resumirse en tres tipos:

$$\begin{array}{c} \underbrace{(\nabla_{\mu_1} A_{\mu_2}^{c_1})(\nabla_{\nu_1} A_{\nu_2}^{c_2}) A_{\mu_3}^{c_3} A_{\nu_3}^{c_4} L^{\mu(3)\nu(3)} G_{c(4)}}_{\text{Tipo ①}} ; \underbrace{A_{\mu_1}^{c_1} A_{\mu_2}^{c_2} A_{\mu_3}^{c_3} A_{\mu_4}^{c_4} R_{\nu(3)}^{\mu(4)} L^{\mu(3)\nu(3)} G_{c(4)}}_{\text{Tipo ②}} \\ \underbrace{A_{\mu_1}^{c_1} A_{\mu_2}^{c_2} A_{\mu_3}^{c_3} A_{\mu_4}^{c_4} R L^{\mu(4)} G_{c(4)}}_{\text{Tipo ③}} \end{array}$$

**Observación:**

Eventualmente se podría encontrar una fórmula general para los términos tipo ② y ③ pero su variación sería innecesariamente complicada por cuenta de la repetición obligatoria de cálculos similares a los que dieron origen a la fórmula para  $c\delta R$  (cuya aplicabilidad, además, estaría desaprovechándose a pesar de su evidente utilidad para variar expresiones tipo ③).

**Apéndice C.1. Variación de términos tipo 1**

Sabiendo que  $\delta \{ (\nabla_{\mu_1} A_{\mu_2}^{c_1}) (\nabla_{\nu_1} A_{\nu_2}^{c_2}) L^{\mu(3)\nu(3)} \} A_{\mu_3}^{c_3} A_{\nu_3}^{c_4} G_{c(4)}$  originará tres términos al aplicar la regla de Leibniz, se denotarán los términos complementarios a cada variación usando tres tensores  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{K}$ , así (se proveerán explicaciones adicionales después del cálculo):

$$\begin{aligned}
\delta \{ \textcircled{1} \} &= \delta \{ (\nabla_{\mu_1} A_{\mu_2}^{c_1}) (\nabla_{\nu_1} A_{\nu_2}^{c_2}) L^{\mu(3)\nu(3)} \} A_{\mu_3}^{c_3} A_{\nu_3}^{c_4} G_{c(4)} , \\
&= \delta \{ \nabla_{\mu_1} A_{\mu_2}^{c_1} \} \mathbb{C}_{c_1}^{\mu(2)} + \delta \{ \nabla_{\nu_1} A_{\nu_2}^{c_2} \} \mathbb{Q}_{c_2}^{\nu(2)} + \delta L^{\mu(3)\nu(3)} \mathbb{C}_{\mu(3)\nu(3)} , \\
&= \mathbb{S}(\textcircled{1}; \beta, \varepsilon) \delta g^{\beta\varepsilon} - \delta \Gamma_{\mu(2)}^\rho A_\rho^{c_1} \mathbb{C}_{c_1}^{\mu(2)} - \delta \Gamma_{\nu(2)}^\rho A_\rho^{c_2} \mathbb{Q}_{c_2}^{\nu(2)} , \\
&= \mathbb{S}(\textcircled{1}; \beta, \varepsilon) \delta g^{\beta\varepsilon} - D_{\sigma(2)}^\rho A_\rho^{c_k} \mathbb{C}_{c_k}^{\sigma(2)} \nabla_{\alpha_3} \delta g_{\alpha_2\alpha_1} , \\
&\approx \mathbb{S}(\textcircled{1}; \beta, \varepsilon) \delta g^{\beta\varepsilon} + D_{\sigma(2)}^\rho A_\rho^{c_k} \mathbb{C}_{c_k}^{\sigma(2)} \nabla_{\alpha_3} \left\{ A_\rho^{c_k} \mathbb{C}_{c_k}^{\sigma(2)} \right\} \delta g_{\alpha_2\alpha_1} , \\
&= \mathbb{S}(\textcircled{1}; \beta, \varepsilon) \delta g^{\beta\varepsilon} + \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left( \delta_\lambda^{\alpha_1} \delta_{(\sigma_1)}^{\alpha_2} \delta_{\sigma_2}^{\alpha_3} - \delta_{\sigma_1}^{\alpha_1} \delta_{\sigma_2}^{\alpha_2} \delta_\lambda^{\alpha_3} \right) \nabla_{\alpha_3} \left\{ A_\rho^{c_k} \mathbb{C}_{c_k}^{\sigma(2)} \right\} \delta g_{\alpha_2\alpha_1} , \\
&= \mathbb{S}(\textcircled{1}; \beta, \varepsilon) \delta g^{\beta\varepsilon} + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_3} \left\{ A^{\alpha_1 c_k} \mathbb{C}_{c_k}^{(\alpha_2\alpha_3)} - A^{\alpha_3 c_k} \mathbb{C}_{c_k}^{\alpha_1\alpha_2} \right\} \delta g_{\alpha_2\alpha_1} , \\
&= \left[ \mathbb{S}(\textcircled{1}; \beta, \varepsilon) - \frac{1}{2} \nabla^\bullet \left\{ A_\beta^{c_k} \mathbb{C}_{(\varepsilon\bullet)c_k} - A_{\bullet}^{c_k} \mathbb{C}_{\beta\varepsilon c_k} \right\} \right] \delta g^{\beta\varepsilon} .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \textcircled{1}}{\delta g^{\mu\nu}} = \mathbb{S}(\textcircled{1}; \mu, \nu) - \frac{1}{4} \nabla^\bullet \left\{ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_{\beta}^{c_k} \mathbb{C}_{(\varepsilon\bullet)c_k}^k - A_{\bullet}^{c_k} \mathbb{C}_{(\mu\nu)c_k}^k \right\} \Leftarrow. \quad (81)$$

En el primer renglón se aislaron los términos cuya variación respecto a la métrica  $g^{\alpha_2\alpha_1}$  es cero; en el segundo, se incorporaron los tensores  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$  luego de aplicar la regla de Leibniz; en el tercero, se expresó la variación de la derivada covariante en términos de la variación de la conexión; en el cuarto, se agruparon los dos últimos términos y se reemplazó  $\delta\Gamma_{\sigma(2)}^\rho$  usando (54); en el quinto, se empleó el truco de Leibniz (67) y se tuvo en cuenta la compatibilidad de  $D$  (59); en el sexto y séptimo, se reemplazó  $D$  en su forma explícita y se desarrollaron los productos; finalmente, se renombraron algunos índices y se factorizó  $\delta g^{\beta\varepsilon}$  usando (63). (Se sobreentiende la presencia un convenio de suma sobre  $k = \overline{1,2}$ ).

### Corolario:

En particular si el término de interés  $T$  es de la forma  $T = S_{\mu_1\mu_2}^{c_1} S_{\nu_1\nu_2}^{c_2} A_{\mu_3}^{c_3} A_{\nu_3}^{c_4} L^{\mu(3)\nu(3)} G_{c(4)}$ , se puede aplicar la fórmula anterior (i) reemplazando el primer término por  $\mathbb{S}(T; \mu, \nu)$  y (ii) cambiando el factor  $-\frac{1}{4}$  del segundo término por  $-\frac{1}{2}$  ya que la libertad de torsión agrega un factor de 2 al resultado porque  $\delta S_{\mu_1\mu_2}^{c_1} = \delta \left\{ \nabla_{(\mu_1} A_{\mu_2)}^{c_1} \right\} = -2 \delta\Gamma_{\mu_1\mu_2}^\rho A_\rho^{c_1} = 2 \delta \left\{ \nabla_{\mu_1} A_{\mu_2}^{c_1} \right\}$ .

### Apéndice C.2. Variación de términos tipo 2

En este caso se ha de recalcar que  $\mathbb{S}$  no opera en la contracción del primer índice del tensor de Riemann porque la forma como se planteó el tensor  $L$  excluye a dicha contracción, así:

$$\begin{aligned}
\delta \{ \textcircled{2} \} &= \delta \left\{ R^{\mu_4}{}_{\nu(3)} L^{\mu(3)\nu(3)} \right\} \prod_{i=1}^4 A_{\mu_i}^{c_i} G_{c(4)} , \\
&= \delta R^{\mu_4}{}_{\nu(3)} \mathbb{C}_{\mu_4}{}^{\nu(3)} + \delta L^{\mu(3)\nu(3)} \mathbb{C}_{\mu(3)\nu(3)} , \\
&\approx \mathbb{S}(\textcircled{2}; \beta, \varepsilon) \delta g^{\beta\varepsilon} - \frac{1}{2} [S_2] (\delta \text{CRiem1} + \delta \text{CRiem2}) .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \textcircled{2}}{\delta g^{\mu\nu}} = \mathbb{S}(\textcircled{2}; \mu, \nu) - \frac{1}{2} [S_2] \left[ \frac{\delta \text{CRiem1}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta \text{CRiem2}}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \Leftarrow \quad (82)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\delta \text{CRiem1}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \mathbb{C}^{(\lambda\rho_1)\rho_2\rho_3} g_{\lambda(\mu} \tilde{R}_{\nu)\rho(3)} \\ \frac{\delta \text{CRiem2}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\alpha_2\alpha_1} \nabla^{\alpha_3} \nabla^{\alpha_4} \mathbb{C}_{[\alpha_1\alpha_3][\alpha_4\alpha_2]} \end{array} \right] .$$

### Apéndice C.3. Variación de términos tipo 3

Este tipo de términos son los más sencillos de variar, son el análogo inmediato del ejemplo 2 expuesto en el capítulo dedicado a la variación de una contracción y su simetría en  $\{\mu, \nu\}$  se da gracias a la libertad de torsión que hace a la doble derivada covariante de  $c$  simétrica.

$$\begin{aligned}
\delta \{ \textcircled{3} \} &= \delta \{ L^{\mu(4)} R \} A_{\mu_1}^{c_1} A_{\mu_2}^{c_2} A_{\mu_3}^{c_3} A_{\mu_4}^{c_4} G_{c(4)} \equiv R \delta c + c \delta R , \\
&= \left[ \mathbb{S}(\textcircled{3}; \beta, \varepsilon) + [S_3] \left( \tilde{R}_{\beta\varepsilon} + g_{\beta\varepsilon} \nabla_{\bullet} \nabla^{\bullet} - \nabla_{\beta} \nabla_{\varepsilon} \right) \{ c \} \right] \delta g^{\beta\varepsilon} .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \textcircled{3}}{\delta g^{\mu\nu}} = \mathbb{S}(\textcircled{3}; \mu, \nu) + [S_3] \left( \tilde{R}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla_{\bullet} \nabla^{\bullet} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \right) \{ c \} \Leftarrow \quad (83)$$

## Apéndice D. Comprobación de las fórmulas

### Apéndice D.1. Comparación con las variaciones de Andrés A. Navarro para el Lagrangiano $\mathcal{L}_4^1$

Al momento de desarrollar este trabajo ya se contaba con información de estudios previos realizados a la teoría SU(2) generalizada de Proca; dado que Andrés Américo Navarro ya había realizado algunos cálculos de variaciones para el Lagrangiano  $\mathcal{L}_4^1$ , se compararon ambos resultados con el ánimo de corroborar la validez de las fórmulas aquí expuestas.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^1 = & A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\beta}^\beta A^{a\pi}{}_{;\pi} - A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\sigma}^\lambda A_\lambda^{a;\sigma} + \frac{1}{4} A_b^\alpha A_\alpha^b A_a^\gamma A_\gamma^a R \\ & 2A_a^\alpha A_\alpha^b A_{b;\beta}^{a\beta} A_{b;\pi}^\pi - 2A_a^\alpha A_\alpha^b A^{a\lambda}{}_{;\sigma} A_{b\lambda}{}^{;\sigma} + A_a^\alpha A_\alpha^b A^{a\gamma} A_{b\gamma} R \end{aligned}$$

En esta sección se adoptará su propuesta de partir el Lagrangiano  $\mathcal{L}_4^1$  en 6 piezas:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{1(1)} &= A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\beta}^\beta A^{a\pi}{}_{;\pi} & \mathcal{L}_4^{1(4)} &= 2A_a^\alpha A_\alpha^b A_{b;\beta}^{a\beta} A_{b;\pi}^\pi \\ \mathcal{L}_4^{1(2)} &= A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\sigma}^\lambda A_\lambda^{a;\sigma} & \mathcal{L}_4^{1(5)} &= 2A_a^\alpha A_\alpha^b A^{a\lambda}{}_{;\sigma} A_{b\lambda}{}^{;\sigma} \\ \mathcal{L}_4^{1(3)} &= \frac{1}{4} A_b^\alpha A_\alpha^b A_a^\gamma A_\gamma^a R & \mathcal{L}_4^{1(6)} &= A_a^\alpha A_\alpha^b A^{a\gamma} A_{b\gamma} R \end{aligned}$$

que pueden ser reescritas en la notación de este documento de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{1(1)} &= (\nabla \cdot A^a) (\nabla \cdot A_a) (A^b \cdot A_b) & \mathcal{L}_4^{1(4)} &= 2 (\nabla \cdot A^a) (\nabla \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) \\ \mathcal{L}_4^{1(2)} &= (\nabla_\sigma A_\lambda^a) (\nabla^\sigma A_a^\lambda) (A^b \cdot A_b) & \mathcal{L}_4^{1(5)} &= 2 (\nabla_\sigma A_\lambda^a) (\nabla^\sigma A_b^\lambda) (A_a \cdot A^b) \\ \mathcal{L}_4^{1(3)} &= \frac{1}{4} (A^a \cdot A_a) (A^b \cdot A_b) R & \mathcal{L}_4^{1(6)} &= (A^a \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) R \end{aligned}$$

en donde se puede apreciar más fácilmente la estructura tipo ① de  $\mathcal{L}_4^{1(1,2,4,5)}$  y tipo ③ de  $\mathcal{L}_4^{1(3,6)}$ . Aplicando la ecuación (81) para los tipo ① y (83) para los tipo ③ se encuentra que

■ Para el  $\mathcal{L}_4^{1(1)} = (\nabla \cdot A^a)(\nabla \cdot A_a)(A^b \cdot A_b)$  :  $\left[ \mathbb{C}_{\mu\nu a} = \mathbb{C}_{\mu\nu a} = g_{\mu\nu}(\nabla \cdot A_a)(A^b \cdot A_b) \right]$

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \frac{1}{2} \nabla_{(\mu} A_{\nu)}^a (\nabla \cdot A_a)(A^b \cdot A_b) + \frac{1}{2} (\nabla \cdot A^a) \nabla_{(\mu} A_{\nu)a} (A^b \cdot A_b) + (\nabla \cdot A^a)(\nabla \cdot A_a) A_{\mu}^b A_{\nu b} , \\ &= \underbrace{(\nabla \cdot A^a) \nabla_{(\mu} A_{\nu)a} (A^b \cdot A_b)} + (\nabla \cdot A^a)(\nabla \cdot A_a) A_{\mu}^b A_{\nu b} . \\ &-\frac{1}{4} \nabla^{\bullet} \left\{ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_{\beta}^{c_k} \mathbb{C}_{(\varepsilon\bullet)c_k} - A_{\bullet}^{c_k} \mathbb{C}_{(\mu\nu)c_k} \right\} = -\nabla^{\bullet} \left\{ A_{(\mu}^a \mathbb{C}_{\nu)\bullet a} - A_{\bullet}^a \mathbb{C}_{\mu\nu a} \right\} , \\ &= -\nabla_{(\mu} \left\{ A_{\nu)}^a (\nabla \cdot A_a)(A^b \cdot A_b) \right\} + g_{\mu\nu} \nabla^{\bullet} \left\{ A_{\bullet}^a (\nabla \cdot A_a)(A^b \cdot A_b) \right\} , \\ &= \underbrace{-\nabla_{(\mu} A_{\nu)}^a (\nabla \cdot A_a)(A^b \cdot A_b)} - A_{(\mu}^a \nabla_{\nu)} \left\{ (\nabla \cdot A_a)(A^b \cdot A_b) \right\} + g_{\mu\nu} \nabla^{\rho} \left\{ A_{\rho}^a (\nabla \cdot A_a)(A^b \cdot A_b) \right\} . \end{aligned}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\delta g^{\mu\nu}} = (\nabla \cdot A^a)(\nabla \cdot A_a) A_{\mu}^b A_{\nu b} - A_{(\mu}^a \nabla_{\nu)} \left\{ (\nabla \cdot A_a)(A^b \cdot A_b) \right\} + g_{\mu\nu} \nabla^{\rho} \left\{ A_{\rho}^a (\nabla \cdot A_a)(A^b \cdot A_b) \right\}$$

El resultado concuerda con la expresión hallada por Andrés Navarro expuesta a continuación; la correspondencia de ambos resultados se da en el orden { Rojo, (Azul, Amarillo), Verde }:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\delta g^{\mu\nu}} = \underbrace{A_{b\mu} A_{\nu}^b A_{a;\beta}^{\beta} A^{a\pi}}_{\text{Rojo};\pi} - \underbrace{(A_b^{\alpha} A_{\alpha}^b)_{;\mu} A_{a\nu} A^{a\pi}}_{\text{Azul};\pi} - \underbrace{A_b^{\alpha} A_{\alpha}^b A_{a\nu} A^{a\pi}}_{\text{Amarillo};\pi\mu} - \underbrace{(A_b^{\alpha} A_{\alpha}^b)_{;\nu} A_{a\mu} A^{a\pi}}_{\text{Azul};\pi} - \underbrace{A_b^{\alpha} A_{\alpha}^b A_{a\mu} A^{a\pi}}_{\text{Amarillo};\pi\nu} + \underbrace{g_{\mu\nu} [A_b^{\alpha} A_{\alpha}^b A_{a\lambda} A^{a\pi}]}_{\text{Verde};\pi;\lambda}$$

■ Para el  $\mathcal{L}_4^{1(2)} = (\nabla_{\sigma} A_{\lambda}^a)(\nabla^{\sigma} A_a^{\lambda})(A^b \cdot A_b)$  :  $\left[ \mathbb{C}_{\mu\nu a} = \mathbb{C}_{\mu\nu a} = (\nabla_{\mu} A_{\nu a})(A^b \cdot A_b) \right]$

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= (\nabla_{\mu} A_{\lambda}^a)(\nabla_{\nu} A_a^{\lambda})(A^b \cdot A_b) + (\nabla_{\sigma} A_{\mu}^a)(\nabla^{\sigma} A_{\nu a})(A^b \cdot A_b) + (\nabla_{\sigma} A_{\lambda}^a)(\nabla^{\sigma} A_a^{\lambda}) A_{\mu}^b A_{\nu b} . \\ &-\frac{1}{4} \nabla^{\bullet} \left\{ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_{\beta}^{c_k} \mathbb{C}_{(\varepsilon\bullet)c_k} - A_{\bullet}^{c_k} \mathbb{C}_{(\mu\nu)c_k} \right\} = -\frac{1}{2} \nabla^{\bullet} \left\{ \left[ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_{\beta}^a \nabla_{(\varepsilon} A_{\bullet)a} - A_{\bullet}^a \nabla_{(\mu} A_{\nu)a} \right] (A^b \cdot A_b) \right\} , \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^{\bullet} \left\{ A_{(\mu}^a [\nabla_{\nu)} A_{\bullet a} + \nabla_{\bullet} A_{|\nu)a}] (A^b \cdot A_b) - A_{\bullet}^a \nabla_{(\mu} A_{\nu)a} (A^b \cdot A_b) \right\} . \end{aligned}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} = (\nabla_{\mu} A_{\lambda}^a)(\nabla_{\nu} A_a^{\lambda})(A^b \cdot A_b) + (\nabla_{\sigma} A_{\mu}^a)(\nabla^{\sigma} A_{\nu a})(A^b \cdot A_b) + (\nabla_{\sigma} A_{\lambda}^a)(\nabla^{\sigma} A_a^{\lambda}) A_{\mu}^b A_{\nu b} - \frac{1}{2} \nabla^{\bullet} \left\{ A_{(\mu}^a [\nabla_{\nu)} A_{\bullet a} + \nabla_{\bullet} A_{|\nu)a}] (A^b \cdot A_b) - A_{\bullet}^a \nabla_{(\mu} A_{\nu)a} (A^b \cdot A_b) \right\}$$

correcto según el orden {Naranja, Amarillo, Verde, Azul oscuro, Azul claro, Morado}:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} = A_\mu^b A_{b\nu} A_{a;\sigma}^\lambda A_\lambda^{a;\sigma} + A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\mu;\sigma} A_\nu^{a;\sigma} + A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\mu}^\lambda A_{\lambda;\nu}^a + \frac{1}{2} \left( - [A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\mu}^\lambda A_\nu^a]_{;\lambda} - [A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\nu}^\lambda A_\mu^a]_{;\lambda} - [A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\mu}{}^{;\omega} A_\nu^a]_{;\omega} - [A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\nu}{}^{;\omega} A_\mu^a]_{;\omega} + [A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\mu;\nu} A_\kappa^a]^{;\kappa} + [A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\nu;\mu} A_\kappa^a]^{;\kappa} \right)$$

■ Para el  $\mathcal{L}_4^{1(3)} = \frac{1}{4} (A^a \cdot A_a) (A^b \cdot A_b) R$ : basta aplicar (83) para ver que

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(3)}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} (A^a \cdot A_a) A_\mu^b A_{\nu b} R + \frac{1}{4} [S_3] \left( \tilde{R}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla \cdot \nabla^\bullet - \nabla_\mu \nabla_\nu \right) \{ (A^a \cdot A_a) (A^b \cdot A_b) \}$$

también se corresponde con el resultado de Andrés Américo al implementar  $[S_3] = +1$ :

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(3)}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{4} \left[ 2A_{b\mu} A_\nu^b A_\alpha^\beta A_\beta^a R + A_b^\alpha A_\alpha^b A_\alpha^\beta A_\beta^a R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} (A_b^\alpha A_\alpha^b A_\alpha^\beta A_\beta^a)_{;\pi}{}^{;\pi} - (A_b^\alpha A_\alpha^b A_\alpha^\beta A_\beta^a)_{;\mu\nu} \right]$$

■ Para el  $\mathcal{L}_4^{1(4)} = 2 (\nabla \cdot A^a) (\nabla \cdot A^b) (A_a \cdot A_b)$ :  $\left[ \mathbb{C}_{\mu\nu a}^1 = \mathbb{C}_{\mu\nu a}^2 = \left[ 2g_{\mu\nu} (\nabla \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) \right] \right]$

$$S = 2 \left[ \nabla_{(\mu} A_{\nu)}^a (\nabla \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) + (\nabla \cdot A^a) (\nabla \cdot A^b) A_{\mu a} A_{\nu b} \right].$$

$$- \frac{1}{4} \nabla^\bullet \left\{ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_\beta^{c_k} \mathbb{C}_{(\varepsilon\bullet)c_k}^1 - A_\bullet^{c_k} \mathbb{C}_{(\mu\nu)c_k}^1 \right\} = - \nabla^\bullet \left\{ A_{(\mu}^a \mathbb{C}_{\nu)\bullet a}^1 - A_\bullet^a \mathbb{C}_{\mu\nu a}^1 \right\},$$

$$= -2 \left[ \nabla_{(\mu} \{ A_{\nu)}^a (\nabla \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) \} - g_{\mu\nu} \nabla^\bullet \{ A_\bullet^a (\nabla \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) \} \right],$$

$$= -2 \nabla_{(\mu} A_{\nu)}^a (\nabla \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) - 2 A_{(\mu}^a \nabla_{\nu)} \{ (\nabla \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) \} + 2 g_{\mu\nu} \nabla^\bullet \{ A_\bullet^a (\nabla \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) \}.$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(4)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \left[ (\nabla \cdot A^a) (\nabla \cdot A^b) A_{\mu a} A_{\nu b} - A_{(\mu}^a \nabla_{\nu)} \{ (\nabla \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) \} + g_{\mu\nu} \nabla^\bullet \{ A_\bullet^a (\nabla \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) \} \right]$$

lo cual concuerda según el orden {Amarillo, (Rojo, Verde), Azul}:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(4)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \left( A_{a\nu}^b A_\mu^a A_{b;\pi}^\pi + A_a^\alpha A_\alpha^b A_{\nu;\mu}^a A_{b;\pi}^\pi + A_a^\alpha A_\alpha^b A_{\mu;\nu}^a A_{b;\pi}^\pi - [A_a^\alpha A_\alpha^b A_\mu^a A_{b;\pi}^\pi]_{;\nu} - [A_a^\alpha A_\alpha^b A_\nu^a A_{b;\pi}^\pi]_{;\mu} + g_{\mu\nu} [A_a^\alpha A_\alpha^b A_\kappa^a A_{b;\pi}^\pi]^{;\kappa} \right)$$

■ Para el  $\mathcal{L}_4^{1(5)} = 2 (\nabla_\sigma A_\lambda^a) (\nabla^\sigma A_b^\lambda) (A_a \cdot A^b) :$   $\left[ \mathbb{C}_{\mu\nu a} = \mathbb{C}_{\mu\nu a} = 2 (\nabla_\mu A_\nu^b) (A_a \cdot A_b) \right]$

$$\mathbb{S} = 2 \left[ (\nabla_\mu A_\lambda^a) (\nabla_\nu A_b^\lambda) (A_a \cdot A^b) + (\nabla_\sigma A_\mu^a) (\nabla^\sigma A_{\nu b}) (A_a \cdot A^b) + (\nabla_\sigma A_\lambda^a) (\nabla^\sigma A_b^\lambda) A_{\mu a} A_\nu^b \right] .$$

$$-\frac{1}{4} \nabla^\bullet \left\{ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_\beta^{c_k} \mathbb{C}_{(\varepsilon\bullet)c_k} - A_\bullet^{c_k} \mathbb{C}_{(\mu\nu)c_k} \right\} = -\nabla^\bullet \left\{ \left[ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_\beta^a \nabla_{(\varepsilon\bullet)} A_\bullet^b - A_\bullet^a \nabla_{(\mu} A_\nu^b) \right] (A_a \cdot A_b) \right\} ,$$

$$= -\nabla^\bullet \left\{ A_{(\mu|}^a [\nabla_{|\nu)} A_\bullet^b + \nabla_\bullet A_{|\nu)}^b] (A_a \cdot A_b) - A_\bullet^a \nabla_{(\mu} A_\nu^b) (A_a \cdot A_b) \right\} .$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(5)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \left[ (\nabla_\mu A_\lambda^a) (\nabla_\nu A_b^\lambda) (A_a \cdot A^b) + (\nabla_\sigma A_\mu^a) (\nabla^\sigma A_{\nu b}) (A_a \cdot A^b) + (\nabla_\sigma A_\lambda^a) (\nabla^\sigma A_b^\lambda) A_{\mu a} A_\nu^b \right]$$

$$- \nabla^\bullet \left\{ A_{(\mu|}^a [\nabla_{|\nu)} A_\bullet^b + \nabla_\bullet A_{|\nu)}^b] (A_a \cdot A_b) - A_\bullet^a \nabla_{(\mu} A_\nu^b) (A_a \cdot A_b) \right\}$$

correcto según el orden {Naranja, Amarillo, Verde, Azul oscuro, Azul claro, Morado}:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(5)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \left( \begin{aligned} & A_{a\nu} A_\mu^b A^{a\lambda} ;_\sigma A_{b\lambda} ;^\sigma + A_\alpha^a A_\alpha^b A_{\nu;\sigma} A_{b\mu} ;^\sigma + A_\alpha^a A_\alpha^b A^{a\lambda} ;_\mu A_{b\lambda;\nu} \\ & - [A_\alpha^a A_\alpha^b A_\nu^a A_{b;\mu}^\kappa] ;_\kappa - [A_\alpha^a A_\alpha^b A_\mu^a A_{b;\nu}^\kappa] ;_\kappa - [A_\alpha^a A_\alpha^b A_\nu^a A_{b\mu} ;^\sigma] ;_\sigma \\ & - [A_\alpha^a A_\alpha^b A_\mu^a A_{b\nu} ;^\sigma] ;_\sigma + [A_\alpha^a A_\alpha^b A_\lambda^a A_{b\mu;\nu} ;^\lambda] + [A_\alpha^a A_\alpha^b A_\lambda^a A_{b\nu;\mu} ;^\lambda] \end{aligned} \right)$$

■ Para el  $\mathcal{L}_4^{1(6)} = (A^a \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) R :$  basta aplicar (83) para ver que

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(6)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 (A_a \cdot A_b) A_\mu^a A_\nu^b R + [S_3] \left( \tilde{R}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla_\bullet \nabla^\bullet - \nabla_\mu \nabla_\nu \right) \left\{ (A^a \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) \right\}$$

éste, nuevamente, es equivalente si y solo si  $[S_3] = +1:$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(6)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \left( A_{a\nu} A_\mu^b A^{a\gamma} A_{b\gamma} R \right) + A_\alpha^a A_\alpha^b A^{a\gamma} A_{b\gamma} R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \left( A_\alpha^a A_\alpha^b A^{a\gamma} A_{b\gamma} \right) ;_\pi - \left( A_\alpha^a A_\alpha^b A^{a\gamma} A_{b\gamma} \right) ;_{\mu\nu}$$

## Apéndice D.2. Comparación con las variaciones de Gabriel Gómez para el Lagrangiano $\mathcal{L}_4^2$

Antes de empezar a calcular, se debe recordar que la expresión del Lagrangiano  $\mathcal{L}_4^2$  es ésta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^2 \equiv & \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) [S_{\mu}^{\mu a} S_{\nu}^{\nu b} - S_{\nu}^{\mu a} S_{\mu}^{\nu b} + (A^a \cdot A^b) R] \\ & + \frac{1}{2} (A^{\mu a} A^{\nu b}) [S_{\mu a}^{\rho} S_{\nu \rho b} - S_{\nu a}^{\rho} S_{\mu \rho b} - A_a^{\rho} A_b^{\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \\ & - (\nabla^{\rho} A_{\mu a})(\nabla_{\rho} A_{\nu b}) + (\nabla^{\rho} A_{\nu a})(\nabla_{\rho} A_{\mu b})] . \end{aligned}$$

Realizando una inspección rápida, es útil subdividirla en los siguientes cinco términos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{2(1)} &= \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) S_{[\mu}^{\mu a} S_{\nu]}^{\nu b} & \mathcal{L}_4^{2(2)} &= \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) (A^a \cdot A^b) R = \frac{1}{4} \mathcal{L}_4^{1(6)} \\ \mathcal{L}_4^{2(3)} &= \frac{1}{2} (A_a^{\mu} A_b^{\nu}) S_{[\mu}^{\rho a} S_{\nu]\rho}^b & \mathcal{L}_4^{2(4)} &= -\frac{1}{2} (A_{\mu}^a A^{\nu b}) A_a^{\rho} A_b^{\sigma} R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \\ \mathcal{L}_4^{2(5)} &= \frac{1}{2} A^{\mu a} A^{\nu b} (\nabla^{\rho} A_{[\mu|a})(\nabla_{\rho} A_{|\nu]b}) \end{aligned}$$

Hecho esto, se identifican tres términos  $\mathcal{L}_4^{2(1,3,5)}$  similares a los tipo ①, un término  $\mathcal{L}_4^{2(4)}$  tipo ② y uno  $\mathcal{L}_4^{2(2)}$  tipo ③ cuya variación ya es conocida de la sección anterior. Siguiendo las sugerencias mencionadas en la sección (.3) y teniendo en cuenta el corolario expuesto tras la deducción de la fórmula (81), los resultados mostrados a continuación se obtienen fácilmente aplicando las fórmulas del Anexo C (más en comparación con métodos tradicionales)<sup>41</sup>

---

<sup>41</sup> El beneficio de estas fórmulas (y especialmente, la del razonamiento que las originó) salta a la vista. Típicamente, un cálculo a mano de estas características, le suele tomar al estudiante promedio un par de horas y varias páginas de escritura; con las fórmulas, el trabajo se reduce a 5 o 10 renglones en promedio.

**Apéndice D.2.1. Cálculo de variaciones para la métrica inversa**

■ Para  $\mathcal{L}_4^{2(1)} = \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) S_{[\mu}^{\mu a} S_{\nu]}^{\nu b}$  es útil dividir el Lagrangiano en  $\mathcal{L}_4^{2(1)+}$  y  $\mathcal{L}_4^{2(1)-}$

$$\mathbb{S} \left( \mathcal{L}_4^{2(1)} ; \mu, \nu \right) = \frac{1}{4} \left[ A_{\mu a} A_{\nu b} S_{[\alpha}^{\alpha a} S_{\beta]}^{\beta b} + 2 (A_a \cdot A_b) S_{\mu[\nu}^a S_{\beta]}^{\beta b} \right] .$$

Para  $\mathcal{L}_4^{2(1)+} \equiv \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) S_{\mu}^{\mu a} S_{\nu}^{\nu b}$  :

$$\left[ \mathbb{C}_{\mu\nu a} = \mathbb{C}_{\mu\nu a} = \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) S_{\alpha}^{\alpha b} g_{\mu\nu} \right]$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \nabla^{\bullet} \left\{ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_{\beta}^{c_k} \mathbb{C}_{(\varepsilon\bullet)c_k} - A_{\bullet}^{c_k} \mathbb{C}_{(\mu\nu)c_k} \right\} &= -2 \nabla^{\bullet} \left\{ A_{(\mu}^a \mathbb{C}_{\nu)\bullet a} - A_{\bullet}^a \mathbb{C}_{\mu\nu a} \right\} , \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \nabla_{(\mu} \left\{ A_{\nu)}^a (A_a \cdot A_b) S_{\alpha}^{\alpha b} \right\} - g_{\mu\nu} \nabla^{\bullet} \left\{ A_{\bullet}^a (A_a \cdot A_b) S_{\alpha}^{\alpha b} \right\} \right] . \end{aligned}$$

Para  $\mathcal{L}_4^{2(1)-} \equiv \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) S_{\nu}^{\mu a} S_{\mu}^{\nu b}$  :

$$\left[ \mathbb{C}_{\mu\nu a} = \mathbb{C}_{\mu\nu a} = \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) S_{\mu\nu}^b \right]$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \nabla^{\bullet} \left\{ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_{\beta}^{c_k} \mathbb{C}_{(\varepsilon\bullet)c_k} - A_{\bullet}^{c_k} \mathbb{C}_{(\mu\nu)c_k} \right\} &= -2 \nabla^{\bullet} \left\{ A_{(\mu}^a \mathbb{C}_{\nu)\bullet a} - A_{\bullet}^a \mathbb{C}_{\mu\nu a} \right\} , \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^{\bullet} \left\{ A_{(\mu}^a S_{\nu)\bullet}^b (A_a \cdot A_b) - A_{\bullet}^a S_{\mu\nu}^b (A_a \cdot A_b) \right\} . \end{aligned}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{2(1)}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} &\frac{1}{2} A_{\mu a} A_{\nu b} S_{[\alpha}^{\alpha a} S_{\beta]}^{\beta b} + (A_a \cdot A_b) S_{\mu[\nu}^a S_{\beta]}^{\beta b} - \nabla_{(\mu} \left\{ A_{\nu)}^a (A_a \cdot A_b) S_{\alpha}^{\alpha b} \right\} \\ &+ g_{\mu\nu} \nabla^{\bullet} \left\{ A_{\bullet}^a (A_a \cdot A_b) S_{\alpha}^{\alpha b} \right\} + \nabla^{\bullet} \left\{ A_{(\mu}^a S_{\nu)\bullet}^b (A_a \cdot A_b) - A_{\bullet}^a S_{\mu\nu}^b (A_a \cdot A_b) \right\} \end{aligned} \right]$$

■ Para  $\mathcal{L}_4^{2(2)} = \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) (A^a \cdot A^b) R = \frac{1}{4} \mathcal{L}_4^{1(6)}$  se puede usar el resultado de  $\mathcal{L}_4^{1(6)}$  :

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{2(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \left[ (A_a \cdot A_b) A_{\mu}^a A_{\nu}^b R + \frac{1}{2} [S_3] \left( \tilde{R}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla_{\bullet} \nabla^{\bullet} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \right) \left\{ (A^a \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) \right\} \right]$$



---

■ Para  $\mathcal{L}_4^{2(4)} = -\frac{1}{2} A_a^{\rho_1} A_b^{\rho_2} A^{\rho_3 a} A_b^{\rho_4} R_{\rho(3)}^{\rho_4}$  :  $\left[ \mathbb{C}_1^{\rho(4)} = -\frac{1}{2} A_a^{\rho_1} A_b^{\rho_2} A^{\rho_3 a} A^{\rho_4 b} \right]$

$\mathbb{C}$  es simétrico al intercambio de  $\{\rho_1, \rho_3\}$  y  $\{\rho_1\rho_2, \rho_3\rho_4\}$ , por ende, siguiendo la discusión ofrecida en las fórmulas (76) y (77), el único término no nulo al variar es:

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= -\frac{1}{4} \left[ \underbrace{A_{\rho_4}^a A_{(\mu|}^b A_a^{\rho_2} A_b^{\rho_3} R_{|\nu)\rho_2\rho_3}^{\rho_4}} + A_{\rho_4}^a A^{\rho_1 b} A_{(\mu|a} A_b^{\rho_3} R_{\rho_1|\nu)\rho_3}^{\rho_4} + \underbrace{A_{\rho_4}^a A^{\rho_1 b} A_a^{\rho_2} A_{(\mu|b} R_{\rho_1\rho_2|\nu)}^{\rho_4} \right] \\ &\quad \parallel \\ \frac{\delta \mathcal{L}_4^{2(4)}}{\delta g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{4} \left[ A^{\rho_2 a} A^{\rho_3 b} A_{(\mu|a} A_b^{\rho_1} - 2 A^{\rho_1 a} A_{(\mu|}^b A_a^{\rho_2} A_b^{\rho_3} \right] R_{|\nu)\rho(3)} \\ &\quad \parallel \\ &\quad \boxed{\frac{\delta \mathcal{L}_4^{2(4)}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{3}{4} A_b^{\rho_1} A^{\rho_2 a} A^{\rho_3 b} A_{(\mu|a} R_{|\nu)\rho(3)}} \end{aligned}$$


---

■ Para  $\mathcal{L}_4^{2(5)} = \frac{1}{2} A^{\mu a} A^{\nu b} (\nabla^\rho A_{[\mu|a}) (\nabla_\rho A_{|\nu]b})$  es útil dividir el Lagrangiano en dos:

Para  $\mathcal{L}_4^{2(5)+} \equiv \frac{1}{2} A^{\alpha a} A^{\beta b} (\nabla^\rho A_{\alpha a}) (\nabla_\rho A_{\beta b})$  :  $\left[ \mathbb{C}_{\mu\nu a} = \mathbb{C}_{\mu\nu a} = \frac{1}{2} A_{\nu a} A^{\beta b} (\nabla_\mu A_{\beta b}) \right]$

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \frac{1}{4} \left[ \underbrace{A_{(\mu|}^a A^{\beta b} \nabla^\rho A_{|\nu)a} \nabla_\rho A_{\beta b}} + \underbrace{A^{\alpha a} A_{(\mu|}^b \nabla^\rho A_{\alpha a} \nabla_\rho A_{|\nu)b}} + \underbrace{A^{\alpha a} A^{\beta b} \nabla_{(\mu|} A_{\alpha a} \nabla_{|\nu)} A_{\beta b} \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[ A_{(\mu|}^a A^{\beta b} (\nabla^\rho A_{|\nu)a}) (\nabla_\rho A_{\beta b}) + A^{\alpha a} A^{\beta b} (\nabla_\mu A_{\alpha a}) (\nabla_\nu A_{\beta b}) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \nabla^\bullet \left\{ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_\beta^{c_k} \mathbb{C}_{(\varepsilon\bullet)c_k} - A_\bullet^{c_k} \mathbb{C}_{(\mu\nu)c_k} \right\} = -\frac{1}{2} \nabla^\bullet \left\{ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_\beta^a \mathbb{C}_{(\varepsilon\bullet)a} - A_\bullet^a \mathbb{C}_{(\mu\nu)a} \right\}, \\ &= -\frac{1}{4} \nabla^\bullet \left\{ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_\beta^a \left[ (\nabla_\varepsilon A_{\beta b}) A_{\bullet a} A^{\beta b} + (\nabla_\bullet A_{\beta b}) A_{\varepsilon a} A^{\beta b} \right] - A_\bullet^a \nabla_{(\mu|} A_{\beta b} A_{|\nu)a} A^{\beta b} \right\}, \\ &= -\frac{1}{4} \nabla^\bullet \left\{ A_{(\mu|}^a \left[ \underbrace{(\nabla_{|\nu)} A_{\beta b}) A_{\bullet a} A^{\beta b}} + (\nabla_\bullet A_{\beta b}) A_{|\nu)a} A^{\beta b} \right] - \underbrace{A_\bullet^a \nabla_{(\nu|} A_{\beta b} A_{|\mu)a} A^{\beta b}} \right\}, \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^\bullet \left\{ A_\mu^a A_{\nu a} (\nabla_\bullet A_{\beta b}) A^{\beta b} \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Para } \mathcal{L}_4^{2(5)-} &\equiv \frac{1}{2} A^{\alpha a} A^{\beta b} (\nabla^\rho A_{\beta a}) (\nabla_\rho A_{\alpha b}) : \quad \left[ \mathbb{C}_{\mu\nu a} = \mathbb{C}_{\mu\nu a} = \frac{1}{2} A_\nu^b A_a^\beta (\nabla_\mu A_{\beta b}) \right] \\
\mathbb{S} &= \frac{1}{4} \left[ \underbrace{A_{(\mu}^a A^{\beta b} \nabla^\rho A_{\beta a} \nabla_\rho A_{|\nu)b}} + \underbrace{A^{\alpha a} A_{(\mu}^b \nabla^\rho A_{|\nu)a} \nabla_\rho A_{\alpha b}} + \underbrace{A^{\alpha a} A^{\beta b} \nabla_{(\mu} A_{\beta a} \nabla_{|\nu)} A_{\alpha b}} \right], \\
&= \frac{1}{2} \left[ A_{(\mu}^a A^{\beta b} (\nabla^\rho A_{\beta a}) (\nabla_\rho A_{|\nu)b}) + A^{\alpha a} A^{\beta b} (\nabla_\mu A_{\beta a}) (\nabla_\nu A_{\alpha b}) \right]. \\
-\frac{1}{4} \nabla^\bullet \left\{ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_\beta^{c_k} \mathbb{C}_{(\varepsilon\bullet)c_k} - A_{\bullet}^{c_k} \mathbb{C}_{(\mu\nu)c_k} \right\} &= -\frac{1}{2} \nabla^\bullet \left\{ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_\beta^a \mathbb{C}_{(\varepsilon\bullet)a} - A_{\bullet}^a \mathbb{C}_{(\mu\nu)a} \right\}, \\
&= -\frac{1}{4} \nabla^\bullet \left\{ \tilde{\delta}_{\mu\nu}^{\beta\varepsilon} A_\beta^a [(\nabla_\varepsilon A_{\beta b}) A_{\bullet}^b A_a^\beta + (\nabla_{\bullet} A_{\beta b}) A_\varepsilon^b A_a^\beta] - A_{\bullet}^a (\nabla_{(\mu} A_{\beta b}) A_{|\nu)}^b A_a^\beta \right\}, \\
&= -\frac{1}{4} \nabla^\bullet \left\{ A_{(\mu}^a [(\nabla_{|\nu)} A_{\beta b}) A_{\bullet}^b A_a^\beta + (\nabla_{\bullet} A_{\beta b}) A_{|\nu)}^b A_a^\beta] - A_{\bullet}^a (\nabla_{(\mu} A_{\beta b}) A_{|\nu)}^b A_a^\beta \right\}, \\
&= -\frac{1}{4} \nabla^\bullet \left\{ A_{\bullet}^{[b} A_{(\mu}^{a]} (\nabla_\nu A_{\beta b}) A_a^\beta + A_{(\mu}^a A_{\nu)}^b A_a^\beta (\nabla_{\bullet} A_{\beta b}) \right\}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\delta \mathcal{L}_4^{2(5)}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} &A_{(\mu}^a A^{\beta b} (\nabla^\rho A_{|\nu)a}) (\nabla_\rho A_{|\beta)b}) + A^{\alpha a} A^{\beta b} (\nabla_\mu A_{|\alpha)a}) (\nabla_\nu A_{|\beta)b}) \\ &+ \frac{1}{2} \nabla^\bullet \left\{ A_{\bullet}^{[b} A_{(\mu}^{a]} (\nabla_\nu A_{\beta b}) A_a^\beta + A_{(\mu}^a A_{\nu)}^b A_a^\beta (\nabla_{\bullet} A_{\beta b}) \right\} \\ &- \nabla^\bullet \left\{ A_{\mu}^a A_{\nu a} (\nabla_{\bullet} A_{\beta b}) A^{\beta b} \right\} \end{aligned} \right]}$$

### Apéndice D.2.2. Primera comparación

Llegado este punto del trabajo, el Ph.D. Luis Gabriel Gómez Díaz, adjunto a la investigación, ideó un código en *Mathematica* para calcular las derivadas variacionales de una acción dada. Aplicando (69) a los resultados de la sección anterior fue posible comparar las ecuaciones de evolución para  $g^{\mu\nu}$  obtenidas por medio del método manual aquí descrito y los resultados computacionales obtenidos de *Mathematica*. Para ello, primero se hallaron los tensores de momento-energía propios de cada pieza del  $\mathcal{L}_4^2$ :

$$T_{\mu\nu} = [S_3] [S_{\text{EH}}] \left\{ -2 \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{mat}} \right\}, \quad T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta}.$$

■ Para  $\mathcal{L}_4^{2(1)} = \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) S_{[\mu}^{\mu a} S_{\nu]}^{\nu b}$  se tienen los siguientes resultados:

$$\left[ \begin{array}{l} S_{\mu}^{\mu a} S_{\nu}^{\nu b} = [2(\nabla \cdot A^a)][2(\nabla \cdot A^b)] = 4(\nabla \cdot A^a)(\nabla \cdot A^b) \\ S_{\nu}^{\mu a} S_{\mu}^{\nu b} = S^{\mu\nu a} S_{\mu\nu}^b = \nabla^{(\mu} A^{\nu)a} \nabla_{(\mu} A_{\nu)}^b = 2(\nabla^{\mu} A^{\nu a}) \nabla_{(\mu} A_{\nu)}^b \\ \mathcal{L}_4^{2(1)+} \equiv \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) S_{\mu}^{\mu a} S_{\nu}^{\nu b} = (A_a \cdot A_b) (\nabla \cdot A^a) (\nabla \cdot A^b) . \\ \mathcal{L}_4^{2(1)-} \equiv \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) S_{\nu}^{\mu a} S_{\mu}^{\nu b} = \frac{1}{2} (A_a \cdot A_b) (\nabla^{\mu} A^{\nu a}) \nabla_{(\mu} A_{\nu)}^b . \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} [S_3][S_{EH}] T^{\alpha\beta} = & -\frac{1}{2} \underbrace{A^{\alpha b} A^{\beta c} S_{\gamma b}^{[\gamma} S_{\zeta c}^{\zeta]} + (A^b \cdot A^c) S_b^{\alpha\gamma} S_{\gamma c}^{\beta}}_{\dots\dots\dots} + A_b^{(\alpha} \nabla^{\beta)} \{ (A^b \cdot A_c) S_{\gamma c}^{\gamma} \} \\ & - g^{\alpha\beta} \nabla^{\bullet} \{ A_b^{\bullet} (A_b \cdot A_c) S_{\gamma c}^{\gamma} \} - \nabla^{\bullet} \left\{ \underbrace{A_b^{(\alpha} S_{\bullet c}^{\beta)} (A^b \cdot A^c) - A_b^{\bullet} S_c^{\alpha\beta} (A_b \cdot A^c)}_{\dots\dots\dots} \right\} \\ & + \frac{1}{4} \underbrace{(A_b \cdot A_c) S_{[\gamma}^{\gamma b} S_{\zeta c}^{\zeta c}]}_{\dots\dots\dots} g^{\alpha\beta} , \end{aligned}$$

en donde los términos propios de  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(1)+}$  se han indicado sin subrayar, los mixtos se indicaron con línea curva y, los propios de  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(1)-}$  con línea punteada. Desarrollando las antisimetrizaciones, se aislaron los aportes de cada Lagrangiano, obteniendo entonces:

$$\begin{aligned} [S_3][S_{EH}] T^{\alpha\beta} = & + A^{\alpha b} A^{\beta c} \left[ \frac{1}{2} \underbrace{S_{\zeta b}^{\gamma} S_{\gamma c}^{\zeta}}_{\dots\dots\dots} - 2(\nabla \cdot A_b)(\nabla \cdot A_c) \right] + \underbrace{(A^b \cdot A^c) S_b^{\alpha\gamma} S_{\gamma c}^{\beta}}_{\dots\dots\dots} \\ & + 2 A_b^{(\alpha} \nabla^{\beta)} \{ (A^b \cdot A^c) (\nabla \cdot A_c) \} - 2 g^{\alpha\beta} \nabla^{\gamma} \{ A_{\gamma}^b (A_b \cdot A_c) (\nabla \cdot A^c) \} \\ & - \nabla^{\bullet} \left\{ \underbrace{A_b^{(\alpha} S_{\bullet c}^{\beta)} (A^b \cdot A^c) + A_b^{\bullet} S_c^{\alpha\beta} (A_b \cdot A^c)}_{\dots\dots\dots} \right\} \\ & + g^{\alpha\beta} (A_b \cdot A_c) \left[ (\nabla \cdot A^b) (\nabla \cdot A^c) - \frac{1}{4} \underbrace{S_{\zeta b}^{\gamma} S_{\gamma c}^{\zeta}}_{\dots\dots\dots} \right] . \end{aligned} \tag{86}$$

Para comprobar este resultado, se tomaron las ecuaciones  $\frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\{\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(1)\pm}\}}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0$  calculadas por Gabriel Gómez y se compararon con el resultado manual  $(86) = 0$ .

► para  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(1)+}$ , *Mathematica* arrojó la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & 2 A^{\beta b} \left( A_{\gamma}^c A^{\gamma b} \nabla^{\alpha} \nabla_{\zeta} A^{\zeta c} + (A^{\gamma b} \nabla^{\alpha} A_{\gamma}^c + A^{\gamma c} (\nabla^{\alpha} A_{\gamma b} - \nabla^{\alpha} A_{\gamma}^d \nabla^{\alpha} g_{bd})) \nabla_{\zeta} A^{\zeta c} \right) + 2 A^{\alpha b} \\ & \left( A_{\gamma}^c A^{\gamma b} \nabla^{\beta} \nabla_{\zeta} A^{\zeta c} + (A^{\gamma b} \nabla^{\beta} A_{\gamma}^c + A^{\gamma c} (\nabla^{\beta} A_{\gamma b} - \nabla^{\beta} A_{\gamma}^d \nabla^{\beta} g_{bd}) - A^{\beta c} \nabla_{\gamma} A^{\gamma b} \right) \nabla_{\zeta} A^{\zeta c} = \\ & A^{\gamma b} \bar{g}^{\alpha\beta} \left( 2 \left( A_{\zeta c}^{\zeta} \nabla_{\zeta} A_{\gamma c} \nabla_{\eta} A^{\eta b} + A_{\zeta b}^{\zeta} \nabla_{\zeta} A_{\gamma}^c \nabla_{\eta} A^{\eta c} \right) + A_{\gamma}^c \left( 2 A_{\zeta b}^{\zeta} \nabla_{\zeta} \nabla_{\eta} A^{\eta c} + \nabla_{\zeta} A_{\zeta b}^{\zeta} \nabla_{\eta} A^{\eta c} \right) \right) \end{aligned}$$

Al enfocarse en los términos sin subrayar de la ecuación (86), uno fácilmente puede ver que el código de colores del resultado en *Mathematica* se traduce en las siguientes equivalencias:

$$\text{(verde)} = -2 A^{\alpha b} A^{\beta c} (\nabla_{\gamma} A_b^{\gamma}) (\nabla_{\zeta} A_c^{\zeta}) = \text{término (1/4) de la ecuación (86)}.$$

$$\begin{aligned} \text{(gris)} &= 2 A^{(\alpha|b} [(A^c \cdot A_b) (\nabla^{|\beta)} \nabla_{\zeta} A_c^{\zeta}) + A_b^{\gamma} (\nabla^{|\beta)} A_{\gamma}^c) (\nabla_{\zeta} A_c^{\zeta}) + A^{\gamma c} (\nabla^{|\beta)} A_{\gamma b}) (\nabla_{\zeta} A_c^{\zeta})] \\ &= 2 A^{(\alpha|b} \nabla^{|\beta)} \{ (A^c \cdot A_b) (\nabla \cdot A_c) \} = \text{término (2/4) de la ecuación (86)}. \end{aligned}$$

Los dos primeros términos en naranja, al pasar al lado izquierdo, son equivalentes a:

$$\begin{aligned} &= -2 A^{\gamma b} g^{\alpha\beta} A_{(c|}^{\zeta} (\nabla_{\zeta} A_{\gamma}^c) (\nabla \cdot A_{|b}) \\ &= -A^{\gamma(b|} g^{\alpha\beta} A_{(c|}^{\zeta} (\nabla_{\zeta} A_{\gamma}^{|c)}) (\nabla \cdot A_{|b}) \\ &= -g^{\alpha\beta} A_{(c|}^{\zeta} \nabla_{\zeta} \{ A^b \cdot A^c \} (\nabla \cdot A_{|b}) \\ &= -g^{\alpha\beta} A_b^{\zeta} \nabla_{\zeta} \{ A^{(b} \cdot A^c) \} (\nabla \cdot A_c) \\ &= -2 g^{\alpha\beta} A_b^{\zeta} \nabla_{\zeta} \{ A^b \cdot A^c \} (\nabla \cdot A_c) . \end{aligned}$$

Los dos últimos términos en naranja, al pasar al lado izquierdo, son equivalentes a:

$$= -2 g^{\alpha\beta} (A^b \cdot A^c) A_b^{\zeta} \nabla_{\zeta} \{ (\nabla \cdot A_c) \} - g^{\alpha\beta} (A^b \cdot A^c) (\nabla \cdot A_b) (\nabla \cdot A_c) .$$

Sumando y restando  $g^{\alpha\beta} (A^b \cdot A^c) (\nabla \cdot A_b) (\nabla \cdot A_c)$  al resultado anterior, se encuentra que:

$$\text{(naranja)} = \text{términos (3/4) y (4/4) de la ecuación (86)}.$$

Nótese así que para  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(1)+}$ , los resultados manuales coinciden con los de *Mathematica*.

► Para  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(1)-}$  *Mathematica* arrojó la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} &A^{\beta b} (A^{\gamma c} (2 \nabla_{\zeta} A_{\gamma b} - A_{\gamma}^d \nabla_{\zeta} g_{1bd}) (\nabla^{\alpha} A_c^{\zeta} + \nabla^{\zeta} A^{\alpha c}) + 2 A^{\gamma b} \nabla_{\zeta} A_{\gamma c} (\nabla^{\alpha} A_c^{\zeta} + \nabla^{\zeta} A^{\alpha c})) + \\ &2 A^{\alpha b} (A^{\gamma c} \nabla_{\zeta} A_{\gamma b} (\nabla^{\beta} A_c^{\zeta} + \nabla^{\zeta} A^{\beta c}) + A^{\gamma b} \nabla_{\zeta} A_{\gamma c} (\nabla^{\beta} A_c^{\zeta} + \nabla^{\zeta} A^{\beta c})) = \\ &2 A^{\gamma b} (A_c^{\zeta} (\nabla^{\alpha} A^{\beta b} + \nabla^{\beta} A^{\alpha b}) + A_b^{\zeta} (\nabla^{\alpha} A^{\beta c} + \nabla^{\beta} A^{\alpha c})) \nabla_{\zeta} A_{\gamma c} + \\ &A^{\alpha b} (A_{\gamma}^d A^{\gamma c} \nabla_{\zeta} g_{1bd} (\nabla^{\beta} A_c^{\zeta} + \nabla^{\zeta} A^{\beta c}) + 2 A^{\beta c} (\nabla_{\gamma} A_{\zeta c} + \nabla_{\zeta} A_{\gamma c}) \nabla^{\zeta} A^{\gamma b}) + \\ &A_{\gamma}^c (-2 A^{\gamma b} (A^{\beta b} (\nabla_{\zeta} \nabla^{\alpha} A_c^{\zeta} + \nabla_{\zeta} \nabla^{\zeta} A^{\alpha c}) + A^{\alpha b} (\nabla_{\zeta} \nabla^{\beta} A_c^{\zeta} + \nabla_{\zeta} \nabla^{\zeta} A^{\beta c})) + \\ &A^{\gamma b} (2 \nabla^{\alpha} A_b^{\zeta} \nabla^{\beta} A_{\zeta c} + A^{\zeta d} (\nabla^{\beta} g_{1cd} (\nabla^{\alpha} A_{\zeta b} + \nabla_{\zeta} A^{\alpha b}) + \nabla^{\alpha} g_{1cd} (\nabla^{\beta} A_{\zeta b} + \nabla_{\zeta} A^{\beta b})) + \\ &2 \nabla^{\alpha} A_b^{\zeta} \nabla_{\zeta} A_c^{\zeta} + 2 \nabla^{\beta} A^{\alpha b} \nabla_{\zeta} A_c^{\zeta} + 2 A_b^{\zeta} \nabla_{\zeta} \nabla^{\alpha} A^{\beta c} + 2 A_b^{\zeta} \nabla_{\zeta} \nabla^{\beta} A^{\alpha c} - \\ &2 \nabla_{\zeta} A^{\beta c} \nabla^{\zeta} A^{\alpha b} - \tilde{g}^{\alpha\beta} \nabla_{\zeta} A_{\eta c} \nabla^{\eta} A_{\zeta b} - \tilde{g}^{\alpha\beta} \nabla_{\eta} A_{\zeta c} \nabla^{\eta} A_{\zeta b} ) \end{aligned}$$

Los términos señalados con el primer verde, al pasar a la izquierda, equivalen a

$$= -2 A^{\alpha b} A^{\beta c} S_{\gamma \zeta c} (\nabla^\zeta A_b^\gamma) = -A^{\alpha b} A^{\beta c} S_{\zeta b}^\gamma S_{\gamma c}^\zeta = [-2] \times \text{término (1/5)}.$$

Los términos en naranja, al pasar a la izquierda, son iguales a

$$\begin{aligned} &= -2 A^{\gamma b} \left[ A_{(c}^\zeta S_b^{\alpha\beta} \right] (\nabla_\zeta A_\gamma^c) = -2 A^{\gamma(b} \left[ A_c^\zeta S_b^{\alpha\beta} \right] (\nabla_\zeta A_\gamma^{c)}) \\ &= -2 A_c^\zeta S_b^{\alpha\beta} \nabla_\zeta \{ A^b \cdot A^c \} = -2 A_\bullet^b S_c^{\alpha\beta} \nabla^\bullet \{ A_b \cdot A^c \}. \end{aligned}$$

Los términos en gris oscuro, al pasar a la izquierda, son iguales a

$$\begin{aligned} &= -2 (A^b \cdot A^c) \left[ S_b^{\alpha\beta} (\nabla_\zeta A_c^\zeta) + A_b^\zeta (\nabla_\zeta S_c^{\alpha\beta}) \right] = -2 (A^b \cdot A^c) \nabla_\zeta \{ A_b^\zeta S_c^{\alpha\beta} \} \\ &= -2 (A_b \cdot A^c) \nabla^\bullet \{ A_\bullet^b S_c^{\alpha\beta} \}. \end{aligned}$$

En consecuencia, (naranja) + (gris oscuro) = [+2]  $\times$  término (3/5).

$$\text{(amarillo)} = 2 A^{(\alpha|b} \left[ A_{(c|}^\gamma (\nabla_\zeta A_{\gamma|b)}) S^{|\beta)\zeta c} \right] = 2 A^{(\alpha|b} \nabla_\zeta \{ A_b \cdot A_c \} S^{|\beta)\zeta c}.$$

$$\text{(gris claro), al pasar a la izquierda} = 2 (A_b \cdot A_c) A^{(\alpha|b} (\nabla_\zeta S^{|\beta)\zeta c}).$$

$$\text{(segundo verde), al pasar a la izquierda} = -2 (A^b \cdot A^c) (\nabla^\alpha A_b^\zeta) (\nabla^\beta A_{\zeta c}).$$

(rosa), al pasar a la izquierda, se puede reescribir como

$$\begin{aligned} &= 2 (A^b \cdot A^c) (\nabla_\zeta A_c^\beta) (\nabla^\zeta A_b^\alpha) = (A^{(b} \cdot A^{c)}) (\nabla_\zeta A_c^\beta) (\nabla^\zeta A_b^\alpha) = (A^b \cdot A^c) (\nabla_\zeta A_{(c|}^\beta) (\nabla^\zeta A_{|b)}^\alpha) \\ &= (A^b \cdot A^c) (\nabla_\zeta A_c^{(\beta|} (\nabla^\zeta A_b^{|\alpha)}) = (A^b \cdot A^c) (S_{\zeta c}^{(\beta|} - \nabla^{(\beta|} A_{\zeta c}) (\nabla^\zeta A_b^{|\alpha)}). \end{aligned}$$

(verde claro), al pasar a la izquierda, es igual a

$$= g^{\alpha\beta} (A^b \cdot A^c) S_{\zeta \eta c} (\nabla^\eta A_b^\zeta) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (A^b \cdot A^c) S_{\zeta b}^\eta S_{\eta c}^\zeta = [-2] \times \text{término (5/5)}.$$

❑ **Conclusión:** Para  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(1)}$ , los resultados manuales coinciden con los de *Mathematica*.

■ Para  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(2)} = \frac{1}{4} \sqrt{-g} (A_a \cdot A_b) (A^a \cdot A^b) R = \frac{1}{4} \sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{1(6)}$  el resultado manual fue:

$$\begin{aligned}
 [S_3][S_{\text{EH}}] T_{\mu\nu} = & - (A_a \cdot A_b) A_\mu^a A_\nu^b R - \frac{1}{2} (A^a \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) R_{\mu\nu} \\
 & - \frac{1}{2} [S_3] g_{\mu\nu} \nabla_\bullet \nabla^\bullet \{ (A^a \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) \} \\
 & + \frac{1}{2} [S_3] \nabla_\mu \nabla_\nu \{ (A^a \cdot A^b) (A_a \cdot A_b) \} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (A_a \cdot A_b) (A^a \cdot A^b) R .
 \end{aligned} \tag{87}$$

► para  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(2)}$ , *Mathematica* arrojó la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 & 4 A_{\alpha c} A^{\alpha b} A_\mu^b A_\nu^c R[\nabla] + \\
 & 8 A^{\alpha b} (A^{\beta c} (\tilde{g}_{\mu\nu} \nabla_\gamma A_{\beta b} \nabla^\gamma A_{\alpha c} - \nabla_\mu A_{\alpha c} \nabla_\nu A_{\beta b}) + A^{\beta b} (\tilde{g}_{\mu\nu} \nabla_\gamma A_{\beta c} \nabla^\gamma A_{\alpha^c} - \nabla_\mu A_{\alpha^c} \nabla_\nu A_{\beta c})) + \\
 & A_{\alpha^c} A^{\alpha b} (A_{\beta c} A^{\beta b} (2 R[\nabla]_{\mu\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu} R[\nabla]) + 8 \tilde{g}_{\mu\nu} \nabla_\gamma A_{\beta c} \nabla^\gamma A^{\beta b} - \\
 & 8 \nabla_\mu A^{\beta b} \nabla_\nu A_{\beta c} + A^{\beta b} (8 \tilde{g}_{\mu\nu} \nabla_\gamma \nabla^\gamma A_{\beta c} - 4 (\nabla_\mu \nabla_\nu A_{\beta c} + \nabla_\nu \nabla_\mu A_{\beta c}))) = 0
 \end{aligned}$$

Antes de analizar cada término es útil tener en cuenta la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu \nabla_\nu \{ (A^b \cdot A^c) (A_b \cdot A_c) \} &= 2 [ \nabla_\mu \{ A^b \cdot A^c \} \nabla_\nu \{ A_b \cdot A_c \} + (A^b \cdot A^c) \nabla_\mu \nabla_\nu \{ A_b \cdot A_c \} ] \\
 &= 2 [ \nabla_\mu \{ A^b \cdot A^c \} \nabla_\nu \{ A_b \cdot A_c \} + 2 (A^b \cdot A^c) [ (\nabla_\mu A_b^\zeta) (\nabla_\nu A_{\zeta c}) + A_b^\zeta (\nabla_\mu \nabla_\nu A_{\zeta c}) ] ] (*)
 \end{aligned}$$

Con esto en mente, es fácil ver que el código de colores se traduce en:

$$(\text{verde}) = [-4] \times \text{términos (1/5) y (2/5) de la ecuación (87)}.$$

Los dos primeros términos en amarillo son equivalentes a:

$$\begin{aligned}
 &= -8 A^{\alpha b} A_{(c|}^\beta (\nabla_\mu A_\alpha^c) (\nabla_\nu A_{\beta|b}) = -4 A^{\alpha(b|} A_{(c|}^\beta (\nabla_\mu A_\alpha^c) (\nabla_\nu A_{\beta|b}) \\
 &= -4 \nabla_\mu \{ A^b \cdot A^c \} \nabla_\nu \{ A_b \cdot A_c \} .
 \end{aligned}$$

Por otro lado,  $\nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} \{ (A^b \cdot A^c) (A_b \cdot A_c) \} = 2 \nabla_\mu \nabla_\nu \{ (A^b \cdot A^c) (A_b \cdot A_c) \}$  cuando la conexión es Riemanniana; entonces, usando (\*) se deduce que  $(A^b \cdot A^c) A_b^\zeta (\nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} A_{\zeta c}) = 2 (A^b \cdot A^c) A_b^\zeta (\nabla_\mu \nabla_\nu A_{\zeta c})$  y los dos últimos términos en amarillo resultan ser iguales a:

$$\begin{aligned}
 &= -8 (A^b \cdot A^c) [ (\nabla_\mu A_b^\beta) (\nabla_\nu A_{\beta c}) + A_b^\beta (\nabla_\mu \nabla_\nu A_{\beta c}) ] \\
 &= -4 (A^b \cdot A^c) \nabla_\mu \nabla_\nu \{ A_b \cdot A_c \}
 \end{aligned}$$

Sumando todos los términos en amarillo (y así mismo los azules) se tiene entonces que:

$$(\text{amarillo}) = -2 \nabla_\mu \nabla_\nu \{ (A^b \cdot A^c) (A_b \cdot A_c) \},$$

$$(\text{azul}) = 2 g_{\mu\nu} \nabla_\bullet \nabla^\bullet \{ (A^b \cdot A^c) (A_b \cdot A_c) \}.$$

$$(\text{amarillo}) + (\text{azul}) = [-4] \times \text{términos (3/5) y (4/5) de la ecuación (87)} \Leftrightarrow [S_3] = +1.$$

$$(\text{rojo}) = [-4] \times \text{término (5/5) de la ecuación (87)}.$$

❑ **Conclusión:** Para  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(2)}$ , los resultados manuales coinciden con los de *Mathematica*.<sup>42</sup>

**Para los demás Lagrangianos**, el proceso de comparación es igual de complejo; se espera que los dos ejemplos anteriores hayan sido suficientes para evidenciar que el proceso de comparación a mano es innecesariamente tedioso (no obstante, en este trabajo ya se han aportado elementos suficientes para servir de guía en tal proceso). Para comparar los resultados asociados a los demás Lagrangianos, el método de comprobación adoptado fue computacional: se verificó que la diferencia entre las expresiones obtenidas manualmente y los cálculos arrojados por *Mathematica* fuera nula para cada Lagrangiano; este proceso se muestra con detalle en el código anexo dedicado al cálculo de ecuaciones de Euler-Lagrange.

Los Lagrangianos cuyas ecuaciones de evolución para  $g^{\mu\nu}$  se verificaron de esta forma fueron:

$$\mathcal{L}_4^{2(3)} = \frac{1}{2} (A_a^\mu A_b^\nu) S_{[\mu}^{\rho a} S_{\nu]}^b{}_\rho, \quad \mathcal{L}_4^{2(4)} = -\frac{1}{2} A_\mu^a A^{\nu b} A_a^\rho A_b^\sigma R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}, \quad \mathcal{L}_4^{2(5)} = \frac{1}{2} A^{\mu a} A^{\nu b} (\nabla^\rho A_{[\mu|a}) (\nabla_\rho A_{|\nu]b})$$

Por convención, los Lagrangianos  $\mathcal{L}_4^{2(3)}$  y  $\mathcal{L}_4^{2(5)}$  se subdividieron en  $\mathcal{L}_4^{2(3)\pm}$  y  $\mathcal{L}_4^{2(5)\pm}$  de acuerdo al modelo de subdivisión previamente empleado en el que, dado un Lagrangiano con una antisimetrización expresa, al primero de sus términos se le denomina  $\mathcal{L}^+$  y al segundo  $\mathcal{L}^-$ .

<sup>42</sup> Al concluir esto ya se ha hecho uso de la convención (+++) que se aclaró en el capítulo de Nomenclatura. El factor de  $[-4]$  es usado por *Mathematica* para simplificar pero, al estar igualado a cero, es irrelevante.

### Apéndice D.2.3. Cálculo de variaciones para los campos de materia

Para el caso de Lagrangianos con dependencias máximas de orden uno en derivadas de  $A_\mu^C$  o Lagrangianos con dependencias máximas de orden dos en derivadas de  $\phi^C$ ; dado que  $(\partial_\nu \sqrt{-g}) = \sqrt{-g} \Gamma_{\nu\mu}^\mu$  cuando la conexión es Riemanniana, se dan las siguientes relaciones <sup>43</sup>

$$\boxed{\frac{\delta S}{\delta A_\beta^C} \equiv \frac{\partial \{\sqrt{-g} \mathcal{L}\}}{\partial A_\beta^C} - \partial_\alpha \left( \frac{\partial \{\sqrt{-g} \mathcal{L}\}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta^C)} \right) = \sqrt{-g} \left[ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial A_\beta^C} - \nabla_\alpha \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\alpha A_\beta^C)} \right) \right] = 0} \quad (88)$$

siendo  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A, \partial A)$ ,  $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}(A, \nabla A)$ ,  $S = \int_\Omega \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x$ , y  $\Omega$  es un hipervolumen arbitrario.

$$\boxed{\frac{\delta S}{\delta \phi^C} \equiv \sum_{i=0}^2 (-1)^i \partial_{\mu^{(i)}} \left( \frac{\partial \{\sqrt{-g} \mathcal{L}\}}{\partial (\partial_{\mu^{(i)}} \phi^C)} \right) = \sqrt{-g} \left[ \sum_{i=0}^2 (-1)^i \nabla_{\mu^{(i)}} \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_{\mu^{(i)}} \phi^C)} \right) \right] = 0} \quad (89)$$

siendo  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ ,  $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}(\phi, \nabla\phi)$ ,  $S = \int_\Omega \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x$ , y  $\Omega$  es un hipervolumen arbitrario.

Es de notar que las expresiones del lado derecho son más elegantes y ventajosas al momento de calcular, proveen expresiones fáciles de manipular en espacio-tiempos curvos y dejan ver claramente cómo las leyes de la física adoptan la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales (debido a la covarianza explícita, fundamento del principio de relatividad).

**Demostración de (88):** Defínase el tensor  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu^C)} = \frac{\partial (\nabla_\rho A_\sigma^D)}{\partial (\partial_\mu A_\nu^C)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\rho A_\sigma^D)} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu A_\nu^C)} \equiv B_C^{\mu\nu}$ .

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\partial \{\sqrt{-g} \mathcal{L}\}}{\partial (\partial_\mu A_\nu^C)} \right) &= \partial_\mu \{ \sqrt{-g} B_C^{\mu\nu} \} = \sqrt{-g} [ \nabla_\mu B_C^{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\nu B_C^{\mu\alpha} ] , \\ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^C} \right) &= \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial A_\nu^C} \right) + \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu A_\alpha^D)} \right) \left( \frac{\partial (\nabla_\mu A_\alpha^D)}{\partial A_\nu^C} \right) = \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial A_\nu^a} \right) - \Gamma_{\mu\alpha}^\nu B_a^{\mu\alpha} . \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\sqrt{-g}$  la última expresión y restándole la anterior, se completa la prueba.

<sup>43</sup> Aquí el multiíndice C representa un conjunto genérico de índices globales de gauge (pertenecientes a un *fibrado vectorial* que no requiere de una derivada covariante y, por ende, posee una conexión nula) [6]. Así mismo, (89) es crucial para entender el rol de la Ec.(73) en la teoría SU(2) generalizada de Proca [7].

**Demostración de (89):** Defínase  $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\nabla_{\nu(j)}\phi^D)} \equiv B_D^{\nu(j)}$  tal que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu(i)}\phi^C)} = \frac{\partial(\nabla_{\nu(j)}\phi^D)}{\partial(\partial_{\mu(i)}\phi^C)} B_D^{\nu(j)}$ .

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\partial \{ \sqrt{-g} \mathcal{L} \}}{\partial(\partial_\mu \phi^C)} \right) &= \partial_\mu \{ \sqrt{-g} [ B_C^\mu - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu B_C^{\rho\sigma} ] \} = (\sqrt{-g} \nabla_\mu B_C^\mu) - \partial_\mu (\sqrt{-g} \Gamma_{\rho\sigma}^\mu B_C^{\rho\sigma}) , \\ \partial_\mu \partial_\nu \left( \frac{\partial \{ \sqrt{-g} \mathcal{L} \}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi^C)} \right) &= \partial_\mu \partial_\nu \{ \sqrt{-g} B_C^{\mu\nu} \} = \partial_\mu \{ \sqrt{-g} [ \nabla_\nu B_C^{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu B_C^{\rho\sigma} ] \} \\ &= (\sqrt{-g} \nabla_\mu \nabla_\nu B_C^{\mu\nu}) - \partial_\mu (\sqrt{-g} \Gamma_{\rho\sigma}^\mu B_C^{\rho\sigma}) . \end{aligned}$$

Adicionalmente,  $\frac{\partial \{ \sqrt{-g} \mathcal{L} \}}{\partial \phi^C} = \sqrt{-g} B_C$ , entonces la igualdad (89) se verifica de forma trivial.

### Aplicación de fórmulas para el caso de $\mathcal{L}_4^2$ :

A continuación se muestran nuevamente las cinco piezas definidas para el Lagrangiano  $\mathcal{L}_4^2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{2(1)} &= \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) S_{[\mu}^{\mu a} S_{\nu]}^{\nu b} & \mathcal{L}_4^{2(2)} &= \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) (A^a \cdot A^b) R \\ \mathcal{L}_4^{2(3)} &= \frac{1}{2} (A_a^\mu A_b^\nu) S_{[\mu}^{\rho a} S_{\nu]\rho}^b & \mathcal{L}_4^{2(4)} &= -\frac{1}{2} (A_\mu^a A^{\nu b}) A_a^\rho A_b^\sigma R_{\nu\rho\sigma}^\mu \\ \mathcal{L}_4^{2(5)} &= \frac{1}{2} A^{\mu a} A^{\nu b} (\nabla^\rho A_{(\mu|a}) (\nabla_\rho A_{|\nu)b}) \end{aligned}$$

Siguiendo las convenciones de la sección anterior, los términos propios de  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(1)}$  se indicaron con línea punteada, los mixtos con línea curva, y los demás se muestran sin subrayar.

Para  $\mathcal{L}_4^{2(1)} = \frac{1}{4} A_a^\rho A_{\rho b} S_{\sigma\mu}^a S_{\varepsilon\nu}^b g^{\sigma[\mu} g^{\nu]\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_4^{2(1)}}{\partial A_\beta^c} &= \frac{1}{4} [ A^{\beta b} S_{\sigma\mu c} S_{\varepsilon\nu b} + A^{\beta a} S_{\sigma\mu a} S_{\varepsilon\nu c} ] g^{\sigma[\mu} g^{\nu]\varepsilon} = \frac{1}{4} A^{\beta b} S_{\mu(c|}^{[\mu} S_{\nu|b]}^{\nu] } , \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{A^{\beta b} S_{\mu c}^{[\mu} S_{\nu b]}^{\nu]}}_{\text{.....}} = \frac{1}{2} A^{\beta b} \left[ S_{\mu c}^\mu S_{\nu b}^\nu - S_c^{\mu\nu} S_{\mu\nu b} \right] . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_4^{2(1)}}{\partial(\nabla_\bullet A_\beta^c)} &= \frac{1}{4} (A_b \cdot A_c) \left[ \tilde{\delta}_{\sigma\mu}^{\bullet\beta} S_{\varepsilon\nu}^b + S_{\sigma\mu}^b \tilde{\delta}_{\varepsilon\nu}^{\bullet\beta} \right] g^{\sigma[\mu} g^{\nu]\varepsilon} , \\ &= \frac{1}{2} (A_b \cdot A_c) \delta_{\mu}^{(\beta} g^{\bullet)[\mu} S_{\varepsilon}^{\varepsilon]b} = (A_a \cdot A_c) \left[ S_{\nu}^{\nu a} g^{\bullet\beta} - S_{\dots}^{\bullet\beta a} \right] . \end{aligned}$$

Para  $\mathcal{L}_4^{2(2)} = \frac{1}{4} A_a^\rho A_{\rho b} A^{\sigma a} A_\sigma^b R$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_4^{2(2)}}{\partial A_\beta^c} = \frac{1}{4} \left[ A_b^\beta A_c^\sigma A_\sigma^b + A_a^\beta A^{\sigma a} A_{\sigma c} + A_c^\rho A_{\rho b} A^{\beta b} + A_a^\rho A_{\rho c} A^{\beta a} \right] R = A^{\beta a} (A_a \cdot A_c) R .$$

Para  $\mathcal{L}_4^{2(3)} = \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu}^{\alpha\varepsilon} A_a^\mu A_b^\nu S_{\rho\alpha}^a S_{\varepsilon\sigma}^b g^{\rho\sigma}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_4^{2(3)}}{\partial A_\beta^c} &= \frac{1}{2} \left[ g^{\mu\beta} A_b^\nu S_{\rho\alpha c} S_{\varepsilon\sigma}^b + g^{\nu\beta} A_a^\mu S_{\rho\alpha}^a S_{\varepsilon\sigma c} \right] \delta_{\mu\nu}^{\alpha\varepsilon} g^{\rho\sigma} = \underbrace{A_\nu^b S_c^\sigma S_{\sigma b}^\nu}_{\dots\dots\dots} , \\ &= A_\nu^b \left[ S_c^{\sigma\beta} S_{\sigma b}^\nu - S_{\dots\dots\dots}^{\sigma\nu} S_{\sigma b}^\beta \right] . \\ \frac{\partial \mathcal{L}_4^{2(3)}}{\partial (\nabla_\bullet A_\beta^c)} &= \frac{1}{2} \left[ A_c^\mu A_b^\nu \tilde{\delta}_{\rho\alpha}^{\bullet\beta} S_{\varepsilon\sigma}^b + A_a^\mu A_c^\nu S_{\rho\alpha}^a \tilde{\delta}_{\varepsilon\sigma}^{\bullet\beta} \right] \delta_{\mu\nu}^{\alpha\varepsilon} g^{\rho\sigma} , \\ &= A_c^{[\alpha} A_b^{\varepsilon]} \delta_\alpha^{(\beta} S_\varepsilon^{\bullet)b} = \underbrace{A_{[b}^\varepsilon A_{c]}^{(\beta} S_\varepsilon^{\bullet)b}}_{\dots\dots\dots} = A_b^\varepsilon A_c^{(\beta} S_\varepsilon^{\bullet)b} - \underbrace{A_c^\varepsilon A_b^{(\beta} S_\varepsilon^{\bullet)b}}_{\dots\dots\dots} . \end{aligned}$$

Para  $\mathcal{L}_4^{2(4)} = -\frac{1}{2} A^{\mu a} A^{\nu b} A_a^\rho A_b^\sigma R_{\mu\nu\rho\sigma}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_4^{2(4)}}{\partial A_\beta^c} &= -\frac{1}{2} \left[ g^{\mu\beta} A^{\nu b} A_c^\rho A_b^\sigma + g^{\nu\beta} A^{\mu a} A_a^\rho A_c^\sigma + g^{\rho\beta} A_c^\mu A^{\nu b} A_b^\sigma + g^{\sigma\beta} A^{\mu a} A_c^\nu A_a^\rho \right] R_{\mu\nu\rho\sigma} , \\ &= -A^{\nu b} A_{[c}^\rho A_{b]}^\sigma R_{\nu\rho\sigma}^\beta = -2 A^{\nu b} A_c^\rho A_b^\sigma R_{\nu\rho\sigma}^\beta . \end{aligned}$$

Para  $\mathcal{L}_4^{2(5)} = \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu}^{\alpha\varepsilon} A^{\mu a} A^{\nu b} (\nabla_\rho A_{\alpha a}) (\nabla_\sigma A_{\varepsilon b}) g^{\rho\sigma}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_4^{2(5)}}{\partial A_\beta^c} &= \frac{1}{2} \left[ g^{\mu\beta} A^{\nu b} (\nabla_\rho A_{\alpha c}) (\nabla_\sigma A_{\varepsilon b}) + g^{\nu\beta} A^{\mu a} (\nabla_\rho A_{\alpha a}) (\nabla_\sigma A_{\varepsilon c}) \right] \delta_{\mu\nu}^{\alpha\varepsilon} g^{\rho\sigma} , \\ &= \underbrace{A_\varepsilon^b (\nabla_\sigma A_{[b}^\varepsilon) (\nabla^\sigma A_{c]}^\beta)}_{\dots\dots\dots} = A_\varepsilon^b \left[ (\nabla_\sigma A_{[b}^\varepsilon) (\nabla^\sigma A_{c]}^\beta) - (\nabla_\sigma A_c^\varepsilon) (\nabla^\sigma A_{[b}^\beta) \right] . \\ \frac{\partial \mathcal{L}_4^{2(5)}}{\partial (\nabla_\bullet A_\beta^c)} &= \frac{1}{2} \left[ A_c^\mu A_b^\nu \delta_\rho^{\bullet\beta} \delta_\alpha^\beta (\nabla_\sigma A_\varepsilon^b) + A_b^\mu A_c^\nu \delta_\sigma^{\bullet\beta} \delta_\varepsilon^\beta (\nabla_\rho A_\alpha^b) \right] \delta_{\mu\nu}^{\alpha\varepsilon} g^{\rho\sigma} , \\ &= A_{[c}^\beta A_{b]}^\varepsilon (\nabla^\bullet A_\varepsilon^b) = \left[ A_c^\beta A_b^\varepsilon - \underbrace{A_b^\beta A_c^\varepsilon}_{\dots\dots\dots} \right] (\nabla^\bullet A_\varepsilon^b) . \end{aligned}$$

### Apéndice D.2.4. Segunda comparación

Con base en las discusiones previamente expuestas, las ecuaciones de movimiento obtenidas para  $A_\mu^a$  por medio del método manual para las diferentes piezas de  $\mathcal{L}_4^2$  fueron las siguientes:

■ Para  $\mathcal{L}_4^{2(1)} = \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) S_{[\mu}^{\mu a} S_{\nu]}^{\nu b}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} A^{\beta b} \underbrace{S_{\mu c}^{[\mu} S_{\nu b]}^{\nu]}} - \nabla_\bullet \left\{ (A_a \cdot A_c) \left[ S_\nu^{\nu a} g^{\bullet\beta} - S^{\bullet\beta a} \right] \right\} = 0, \\ \text{i.e:} & \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2} A^{\beta b} S_{\mu c}^\mu S_{\nu b}^\nu - \nabla^\beta \{A_a \cdot A_c\} S_\nu^{\nu a} - (A_a \cdot A_c) (\nabla^\beta S_\nu^{\nu a}) \\ - \frac{1}{2} A^{\beta b} S_c^{\mu\nu} S_{\mu\nu b} + \nabla_\bullet \{A_a \cdot A_c\} S^{\bullet\beta a} + (A_a \cdot A_c) (\nabla_\bullet S^{\bullet\beta a}) \end{array} \right] = 0, \\ \text{i.e:} & \left[ \begin{array}{l} 2 [A^{\beta b} (\nabla \cdot A_c) (\nabla \cdot A_b) - \nabla^\beta \{A_a \cdot A_c\} (\nabla \cdot A^a) - (A_a \cdot A_c) (\nabla^\beta \nabla \cdot A^a)] \\ - \frac{1}{2} A^{\beta b} S_c^{\mu\nu} S_{\mu\nu b} + \nabla_\bullet \{A_a \cdot A_c\} S^{\bullet\beta a} + (A_a \cdot A_c) (\nabla_\bullet S^{\bullet\beta a}) \end{array} \right] = 0. \quad (90) \end{aligned}$$

Al comparar los términos sin subrayar, se observa una coincidencia total con los resultados computacionales siguiendo el orden de colores { morado, cian, amarillo }:

$$\begin{aligned} 0 = & -2 A_\alpha^b A^{\alpha c} \nabla^\beta \nabla_\gamma A^\gamma_b - 2 A^{\alpha c} \nabla^\beta A_\alpha^b \nabla_\gamma A^\gamma_b - \\ & 2 A^{\alpha b} \nabla^\beta A_\alpha^c \nabla_\gamma A^\gamma_b + 2 A_\alpha^d A^{\alpha b} g^{1c e} \nabla^\beta g_{1de} \nabla_\gamma A^\gamma_b + 2 A^{\beta b} \nabla_\alpha A^\alpha_b \nabla_\gamma A^\gamma_c \end{aligned}$$

La comparación de los términos subrayados también muestra una coincidencia total:

$$\begin{aligned} 0 = & A^{\alpha c} \nabla^\beta A^\gamma_b \nabla_\gamma A^\alpha_b - A_\alpha^d A^{\alpha b} g^{1c e} \nabla^\beta A^\gamma_b \nabla_\gamma g_{1de} + A_\alpha^b A^{\alpha c} \nabla_\gamma \nabla^\beta A^\gamma_b + \\ & A_\alpha^b A^{\alpha c} \nabla_\gamma \nabla^\gamma A^\beta_b + A^{\alpha b} \nabla^\beta A_\gamma_b \nabla^\gamma A_\alpha^c - A^{\beta b} \nabla_\alpha A_\gamma^c \nabla^\gamma A^\alpha_b - A^{\beta b} \nabla_\gamma A_\alpha^c \nabla^\gamma A^\alpha_b + \\ & A^{\alpha b} \nabla_\gamma A_\alpha^c \nabla^\gamma A^\beta_b - A_\alpha^d A^{\alpha b} g^{1c e} \nabla_\gamma g_{1de} \nabla^\gamma A^\beta_b + A^{\alpha c} \nabla_\gamma A_\alpha_b \nabla^\gamma A^\beta_b \end{aligned}$$

(naranja) =  $-\frac{1}{2} A^{\beta b} S_c^{\mu\nu} S_{\mu\nu b}$  = término (1/3) de la ecuación (90).

La suma del primer y último término en amarillo equivale a  $A^{\alpha c} (\nabla_\gamma A_\alpha^b) S_b^{\gamma\beta}$ .

La suma de los dos términos en amarillo del medio es igual a  $A^{\alpha b} (\nabla_\gamma A_\alpha^c) S_b^{\gamma\beta}$ .

(amarillo) =  $A^{\alpha(c)} (\nabla_\gamma A_\alpha^b) S_b^{\gamma\beta} = \nabla_\gamma \{A^b \cdot A^c\} S_b^{\gamma\beta}$  = término (2/3) de la ecuación (90).

(morado) =  $(A^b \cdot A^c) (\nabla_\gamma S_b^{\gamma\beta})$  = término (3/3) de la ecuación (90).

☑ **Conclusión:** Para  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(1)}$ , los resultados manuales coinciden con los de *Mathematica*.

■ Para  $\mathcal{L}_4^{2(2)} = \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) (A^a \cdot A^b) R$ :

$$\begin{aligned} & A^{\beta a} (A_a \cdot A_c) R = 0 . \\ \Theta = & \mathbf{A}_{\alpha b} \mathbf{A}^{\alpha c} \mathbf{A}^{\beta b} \mathbf{R}[\nabla] \end{aligned}$$

✔ **Conclusión:** Para  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(2)}$ , los resultados manuales coinciden con los de *Mathematica*.

■ Para  $\mathcal{L}_4^{2(3)} = \frac{1}{2} (A_a^\mu A_b^\nu) S_{[\mu}^{\rho a} S_{\nu]}^b{}_\rho$ :

$$\begin{aligned} & A_\nu^b \left[ S_c^{\sigma\beta} S_{\sigma b}^\nu - \underline{S_c^{\sigma\nu} S_{\sigma b}^\beta} \right] - \nabla_\bullet \left\{ A_b^\varepsilon A_c^{(\beta} S_\varepsilon^{\bullet)b} - \underline{A_c^\varepsilon A_b^{(\beta} S_\varepsilon^{\bullet)b}} \right\} = 0 , \\ \text{i.e.:} & \left[ \begin{aligned} & A_\nu^b S_c^{\sigma\beta} S_{\sigma b}^\nu - (\nabla_\bullet A_b^\varepsilon) A_c^\beta S_\varepsilon^{\bullet b} - A_b^\varepsilon (\nabla_\bullet A_c^\beta) S_\varepsilon^{\bullet b} - A_b^\varepsilon A_c^\beta (\nabla_\bullet S_\varepsilon^{\bullet b}) \\ & \quad - (\nabla_\bullet A_b^\varepsilon) A_c^\bullet S_\varepsilon^{\beta b} - A_b^\varepsilon (\nabla_\bullet A_c^\bullet) S_\varepsilon^{\beta b} - A_b^\varepsilon A_c^\bullet (\nabla_\bullet S_\varepsilon^{\beta b}) \\ & - \underline{A_\nu^b S_c^{\sigma\nu} S_{\sigma b}^\beta} + (\nabla_\bullet A_c^\varepsilon) A_b^\beta S_\varepsilon^{\bullet b} + \underline{A_c^\varepsilon (\nabla_\bullet A_b^\beta) S_\varepsilon^{\bullet b}} + \underline{A_c^\varepsilon A_b^\beta (\nabla_\bullet S_\varepsilon^{\bullet b})} \\ & \quad + (\nabla_\bullet A_c^\varepsilon) A_b^\bullet S_\varepsilon^{\beta b} + \underline{A_c^\varepsilon (\nabla_\bullet A_b^\bullet) S_\varepsilon^{\beta b}} + \underline{A_c^\varepsilon A_b^\bullet (\nabla_\bullet S_\varepsilon^{\beta b})} \end{aligned} \right] = 0 . \quad (91) \end{aligned}$$

La comparación de los términos sin subrayar con los resultados de *Mathematica* es esta:

$$\begin{aligned} \Theta = & -A^{\alpha c} A^{\gamma b} \nabla_\alpha \nabla^\beta A_{\gamma b} - A^{\alpha c} A^{\gamma b} \nabla_\alpha \nabla_\gamma A^{\beta b} - A^{\alpha c} \nabla_\alpha A_{\gamma b} \nabla^\beta A^{\gamma b} + \\ & A^{\alpha b} \nabla_\alpha A_{\gamma b} \nabla^\beta A^{\gamma c} + A^{\alpha b} \nabla^\beta A^{\gamma c} \nabla_\gamma A_{\alpha b} - A^{\alpha b} \nabla_\alpha A_{\beta b} \nabla_\gamma A^{\gamma c} - A^{\alpha b} \nabla^\beta A_{\alpha b} \nabla_\gamma A^{\gamma c} + \\ & A^{\alpha d} A^{\beta b} g^{1ce} \nabla_\alpha A_{\gamma d} \nabla_\gamma g_{1be} + A^{\alpha b} A^{\gamma d} g^{1ce} \nabla_\alpha A_{\beta b} \nabla_\gamma g_{1de} + \\ & A^{\alpha b} A^{\gamma d} g^{1ce} \nabla^\beta A_{\alpha b} \nabla_\gamma g_{1de} - A^{\alpha b} A^{\beta c} \nabla_\gamma \nabla_\alpha A_{\gamma b} - A^{\alpha b} A^{\beta c} \nabla_\gamma \nabla^\gamma A_{\alpha b} + \\ & A^{\alpha d} A^{\beta b} g^{1ce} \nabla_\gamma g_{1be} \nabla^\gamma A_{\alpha d} - A^{\beta c} \nabla_\alpha A_{\gamma b} \nabla^\gamma A^{\alpha b} - A^{\beta c} \nabla_\gamma A_{\alpha b} \nabla^\gamma A^{\alpha b} - A^{\alpha c} \nabla_\alpha A_{\gamma b} \nabla^\gamma A^{\beta b} \end{aligned}$$

(naranja) =  $A^{\alpha b} (\nabla^\beta A^{\gamma c}) S_{\alpha\gamma b} = A^{\alpha b} [S^{\beta\gamma c} - \nabla^\gamma A^{\beta c}] S_{\alpha\gamma b} =$  términos (1/7) y (3/7).

(rosa) =  $-A^{\beta c} (\nabla^\gamma A^{\alpha b}) S_{\alpha\gamma b} =$  término (2/7).

(amarillo) =  $-A^{\alpha b} A_{\beta c} (\nabla_\gamma S_{\alpha b}^\gamma) =$  término (4/7).

(azul) =  $-A^{\alpha c} (\nabla_\alpha A_{\gamma b}) S^{\gamma\beta b} =$  término (5/7).

(vinotinto) =  $-A^{\alpha b} (\nabla_\gamma A^{\gamma c}) S_{\alpha b}^\beta =$  término (6/7).

(cian) =  $-A^{\alpha c} A^{\gamma b} (\nabla_\alpha S_{\gamma b}^\beta) =$  término (7/7).

El análisis evidencia una coincidencia total con los resultados obtenidos en *Mathematica*; cosa que también ocurre con la comparación efectuada a los términos subrayados en (91):

$$\Theta = \begin{aligned} & A^{\alpha b} \nabla_{\alpha} A^{\gamma c} \nabla^{\beta} A_{\gamma b} - A^{\alpha b} \nabla_{\alpha} A_{\gamma}^c \nabla^{\beta} A^{\gamma b} - A^{\alpha b} \nabla^{\beta} A^{\gamma b} \nabla_{\gamma} A_{\alpha}^c - \\ & A^{\alpha b} A^{\gamma d} g_{1}^{ce} \nabla_{\alpha} g_{1}^{de} \nabla_{\gamma} A^{\beta b} + A^{\alpha c} \nabla_{\alpha} A^{\beta b} \nabla_{\gamma} A^{\gamma b} + A^{\alpha c} \nabla^{\beta} A_{\alpha}^b \nabla_{\gamma} A^{\gamma b} - \\ & A^{\alpha b} A^{\gamma d} g_{1}^{ce} \nabla^{\beta} A_{\alpha d} \nabla_{\gamma} g_{1}^{be} - A^{\alpha d} A^{\beta b} g_{1}^{ce} \nabla_{\alpha} A^{\gamma b} \nabla_{\gamma} g_{1}^{de} + \\ & A^{\alpha c} A^{\gamma b} \nabla_{\gamma} \nabla_{\alpha} A^{\beta b} + A^{\alpha c} A^{\beta b} \nabla_{\gamma} \nabla_{\alpha} A^{\gamma b} + A^{\alpha c} A^{\gamma b} \nabla_{\gamma} \nabla^{\beta} A_{\alpha b} + \\ & A^{\alpha c} A^{\beta b} \nabla_{\gamma} \nabla^{\gamma} A_{\alpha b} - A^{\alpha d} A^{\beta b} g_{1}^{ce} \nabla_{\gamma} g_{1}^{de} \nabla^{\gamma} A_{\alpha b} + A^{\beta b} \nabla_{\alpha} A_{\gamma b} \nabla^{\gamma} A^{\alpha c} + \\ & A^{\beta b} \nabla_{\gamma} A_{\alpha b} \nabla^{\gamma} A^{\alpha c} - A^{\alpha b} \nabla_{\gamma} A_{\alpha}^c \nabla^{\gamma} A^{\beta b} + A^{\alpha c} \nabla_{\alpha} A_{\gamma b} \nabla^{\gamma} A^{\beta b} + A^{\alpha c} \nabla_{\gamma} A_{\alpha b} \nabla^{\gamma} A^{\beta b} \end{aligned}$$

(verde oscuro) =  $A^{\beta b} (\nabla^{\gamma} A^{\alpha c}) S_{\gamma \alpha b} =$  término (2/7).

(último color) =  $A^{\alpha c} (\nabla^{\gamma} A^{\beta b}) S_{\alpha \gamma b} =$  término (3/7).

(naranja) =  $A^{\alpha c} A^{(\gamma|b} (\nabla_{\gamma} \nabla^{|\beta)} A_{\alpha b})$ .

(rosa) =  $A^{\alpha c} A^{(\gamma|b} (\nabla_{\gamma} \nabla_{\alpha} A_b^{|\beta)}) = A^{\alpha c} A^{(\gamma|b} \nabla_{\gamma} (S_{\alpha b}^{|\beta)} - \nabla^{|\beta)} A_{\alpha b}) = (4/7) + (7/7) -$  (naranja).

(cian) =  $A^{\alpha c} (\nabla_{\gamma} A_b^{\gamma}) S_{\alpha}^{\beta b} =$  término (6/7).

(rojo) =  $A^{\alpha b} (\nabla^{\beta} A_{\gamma b}) (\nabla_{\alpha} A^{\gamma c})$ .

(Azul oscuro) =  $-A^{\alpha b} (\nabla^{\beta} A_{\gamma b}) S_{\alpha}^{\gamma c} = -A^{\alpha b} (\nabla^{\beta} A_{\gamma b}) (\nabla^{\gamma} A_{\alpha}^c) -$  (rojo).

(verde) =  $-A^{\alpha b} (\nabla_{\gamma} A_b^{\beta}) (\nabla^{\gamma} A_{\alpha}^c)$ .

(Azul oscuro + verde + rojo) =  $-A^{\alpha b} (\nabla^{\gamma} A_{\alpha}^c) S_{\gamma b}^{\beta} = -A^{\alpha b} (S_{\alpha}^{\gamma c} - \nabla_{\alpha} A^{\gamma c}) S_{\gamma b}^{\beta} = (1/7) + (5/7)$ .

☑ **Conclusión:** Para  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(3)}$ , los resultados manuales coinciden con los de *Mathematica*.

■ Para  $\mathcal{L}_4^{2(4)} = -\frac{1}{2} (A_{\mu}^{\alpha} A^{\nu b}) A_{\alpha}^{\rho} A_b^{\sigma} R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$ :

$$\Theta = -2 A^{\nu b} A^{\rho} A_{\gamma}^{\sigma} R^{\beta}_{\gamma\alpha\zeta} = 0$$

☑ **Conclusión:** Para  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(4)}$ , los resultados manuales coinciden con los de *Mathematica*.

■ Para el  $\mathcal{L}_4^{2(5)} = \frac{1}{2} A^{\mu a} A^{\nu b} (\nabla^\rho A_{[\mu|a}) (\nabla_\rho A_{|\nu]b})$ :

$$A_\varepsilon^b \left[ (\nabla_\sigma A_b^\varepsilon) (\nabla^\sigma A_c^\beta) - \underline{(\nabla_\sigma A_c^\varepsilon) (\nabla^\sigma A_b^\beta)} \right] - \nabla_\bullet \left\{ \left[ A_c^\beta A_b^\varepsilon - \underline{A_b^\beta A_c^\varepsilon} \right] (\nabla^\bullet A_\varepsilon^b) \right\} = 0 ,$$

i.e:  $A^{\beta c} \nabla_\bullet \{ A_b^\varepsilon (\nabla^\bullet A_\varepsilon^b) \} - \underline{A_\varepsilon^b (\nabla_\sigma A_c^\varepsilon) (\nabla^\sigma A_b^\beta)} + \nabla_\bullet \{ \underline{A_b^\beta A_c^\varepsilon} (\nabla^\bullet A_\varepsilon^b) \} = 0 .$

Aquí, los términos sin subrayar se compararon con el resultado computacional:

$$\Theta = A^{\alpha b} A^{\beta c} \nabla_\gamma \nabla^\gamma A_{\alpha b} - A^{\alpha d} A^{\beta b} g^{1ce} \nabla_\gamma g_{1be} \nabla^\gamma A_{\alpha d} + A^{\beta c} \nabla_\gamma A_{\alpha b} \nabla^\gamma A^{\alpha b}$$

el cual fácilmente puede ser reescrito como:

$$A^{\beta c} \left[ A^{\alpha b} (\nabla_\gamma \nabla^\gamma A_{\alpha b}) + (\nabla^\gamma A_{\alpha b}) (\nabla_\gamma A^{\alpha b}) \right] = A^{\beta c} \nabla_\gamma \{ A^{\alpha b} (\nabla^\gamma A_{\alpha b}) \} = A^{\beta c} \nabla_\bullet \{ A_b^\varepsilon (\nabla^\bullet A_\varepsilon^b) \} ,$$

de tal forma que el resultado computacional y el resultado manual concuerdan una vez más.

De otro lado, la contraparte computacional de los términos subrayados es la siguiente:

$$\Theta = - A^{\alpha c} A^{\beta b} \nabla_\gamma \nabla^\gamma A_{\alpha b} + A^{\alpha d} A^{\beta b} g^{1ce} \nabla_\gamma g_{1de} \nabla^\gamma A_{\alpha b} - A^{\beta b} \nabla_\gamma A_{\alpha b} \nabla^\gamma A^{\alpha c} + A^{\alpha b} \nabla_\gamma A_{\alpha c} \nabla^\gamma A^{\beta b} - A^{\alpha c} \nabla_\gamma A_{\alpha b} \nabla^\gamma A^{\beta b}$$

y también exhibe una correspondencia total siguiendo el orden de colores { Amarillo, Azul }.

☑ **Conclusión:** Para  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_4^{2(5)}$ , los resultados manuales coinciden con los de *Mathematica*.

---

### Apéndice D.3. Síntesis de las comparaciones

(i) Habiendo verificado la compatibilidad de las fórmulas aquí expuestas con los resultados encontrados en investigaciones realizadas por Rodríguez y Navarro [77], (ii) teniendo en cuenta la rigurosidad matemática implementada en las deducciones, (iii) habiendo corroborado los cálculos en *Mathematica*, y (iv) considerando que las fórmulas aquí descritas solo son versiones equivalentes del método tradicional, se concluye que las fórmulas y resultados aquí expuestos constituyen un medio viable y alternativo para calcular variaciones a mano.

Convenientemente, esto se logra de forma eficiente y manteniendo la covarianza explícita de las expresiones, a veces exhibiendo una simplicidad mayor a la de los *outputs* típicos de *Mathematica*. Estas ideas también pueden emplearse para variar duales de Hodge y demás expresiones que involucren tensores de Levi-Civita, no obstante, en tales casos debe recordarse que estos objetos dependen de  $\sqrt{g}$  y el respectivo símbolo de permutación.

## Apéndice E. Ecuaciones de evolución para el Lagrangiano más general considerado

### Apéndice E.1. Estructura del Lagrangiano

Con el propósito de presentar de la manera más sintetizada posible todos las posibles combinaciones (de Lagrangianos) que fueron analizadas durante esta investigación, a continuación se presenta el Lagrangiano más general considerado, a partir del cual se pueden obtener casos más particulares igualando a cero los parámetros de la teoría que no correspondan al caso.

Siguiendo las convenciones del sistema de unidades naturales descrito en [1] y aplicando un razonamiento similar al del capítulo 3, es posible deducir que:  $[g_{\mu\nu}] = 1$ ,  $[\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}] = [\partial_{\mu}] = [A_{\mu}^a] = E$ ,

y  $[R] = [R_{\mu\nu}] = [G_{\mu\nu}] = [R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}] = E^2$ . En la investigación, se consideraron los Lagrangianos:

- $\mathcal{L}_{\text{EH}} = \frac{1}{2} m_p^2 R$ .
  - $\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ .
  - $\mathcal{L}_4^1 = \frac{1}{4} (A_b \cdot A^b) \left[ S_{[\mu}^{\mu a} S_{\nu]a}^{\nu} + (A_a \cdot A^a) R \right]$   
 $+ \frac{1}{2} (A_a \cdot A_b) \left[ S_{[\mu}^{\mu a} S_{\nu]}^{\nu b} + 2 (A^a \cdot A^b) R \right]$ .
  - $\mathcal{L}_4^2 = \frac{1}{4} (A_a \cdot A_b) \left[ S_{[\mu}^{\mu a} S_{\nu]}^{\nu b} + (A^a \cdot A^b) R \right]$   
 $+ \frac{1}{2} (A^{\mu a} A^{\nu b}) \left[ S_{[\mu|a}^{\rho} S_{|\nu]\rho b} - A_a^{\rho} A_b^{\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \right]$   
 $- (\nabla^{\rho} A_{(\mu|a}) (\nabla_{\rho} A_{|\nu]b})$ .
  - $\mathcal{L}_4^3 = \tilde{G}_{\mu\sigma}^b A_a^{\mu} A_{\nu b} S^{\nu\sigma a}$ .
  - $\mathcal{L}_1^{\text{Curv}} = G_{\mu\nu} A^{\mu a} A_a^{\nu}$ .
  - $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}} = L_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\mu a} A_a^{\nu} A^{\rho b} A_b^{\sigma}$ .
- y siete Lagrangianos propios de  $\mathcal{L}_2$ :
- $\mathcal{L}_{A^4}^{(1)} = (A_{\mu}^a A_a^{\mu}) (A_{\nu}^b A_b^{\nu})$ .
  - $\mathcal{L}_{A^4}^{(2)} = (A_{\mu}^a A_b^{\mu}) (A_{\nu}^b A_a^{\nu})$ .
  - $\mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)} = (A_{\mu}^a A_{\nu a}) (G^{\mu\rho b} G_{\rho b}^{\nu})$ .
  - $\mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)} = (A_{\mu}^a A_{\nu b}) (G^{\mu\rho b} G_{\rho a}^{\nu})$ .
  - $\mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(3)} = (A_{\mu}^a A_{\mu b}) (G^{\mu\rho a} G_{\rho}^{\nu b})$ .
  - $\mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(4)} = (A^{\mu a} A_{\mu a}) (G^{\mu\rho b} G_{\nu\rho b})$ .
  - $\mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(5)} = (A^{\mu a} A_{\mu}^b) (G^{\nu\rho a} G_{\nu\rho b})$ .

Analizando las expresiones de cada uno por aparte,  $[\mathcal{L}_{\text{EH}}] = [\mathcal{L}_{\text{YM}}] = [\mathcal{L}_1^{\text{Curv}}] = [\mathcal{L}_{A^4}^{(i)}] = E^4$  y  $[\mathcal{L}_4^1] = [\mathcal{L}_4^2] = [\mathcal{L}_4^3] = [\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}] = [\mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(i)}] = E^6$ , así que los últimos Lagrangianos tuvieron que multiplicarse por parámetros normalizados en  $m_p^2$  para garantizarle las unidades adecuadas al Lagrangiano más general considerado, resumido en la siguiente suma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{\text{EH}} + \xi \mathcal{L}_{\text{YM}} + \frac{\alpha}{m_p^2} \mathcal{L}_4^1 + \frac{\kappa}{m_p^2} \mathcal{L}_4^2 + \frac{\theta_4}{m_p^2} \mathcal{L}_4^{\text{Curv}} + \frac{\lambda}{m_p^2} \mathcal{L}_4^3 + \chi_1 \mathcal{L}_{A^4}^{(1)} \\ & + \chi_2 \mathcal{L}_{A^4}^{(2)} + \frac{\chi_3}{m_p^2} \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)} + \frac{\chi_4}{m_p^2} \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)} + \theta_1 \mathcal{L}_1^{\text{Curv}} \end{aligned}$$

En esta suma se descartaron los Lagrangianos  $\mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(3,4,5)}$  previamente listados; las razones para ello van más allá de la simplicidad matemática: el código 'EOM' (Apéndice 6) muestra que los Lagrangianos de la forma  $\mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(i)}$  son idénticos bajo la configuración de tríada cósmica en el universo de FLRW y si bien es cierto que a nivel perturbativo cada Lagrangiano producirá ecuaciones de evolución muy diferentes, sus contribuciones a orden cero son idénticas, ergo, basta con tomar el par  $\mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1,2)}$  para estudiar el comportamiento general de los  $\mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(i)}$ . Otros posibles Lagrangianos [104] se exploraron en 'AllContractions' pero resultaron redundantes.

## Apéndice E.2. Variación de la acción

El código 'EOM' (Apéndice 6) detalla la aplicación del principio de acción estacionaria con extremos fijos al Lagrangiano de la sección .1 y la respectiva evaluación de las ecuaciones de evolución resultantes en términos del conjunto de variables adimensionales  $\{\epsilon, P, X, Y, Z\}$ . Debido a la isotropía del espacio-tiempo solo tres ecuaciones resultan ser independientes:

- Ecuación de Friedmann<sup>44</sup> ( $\frac{[S_3]T_{00}}{3m_p^2 H^2} = 1$ )

$$\frac{1}{2H^2 m_p^4} \left[ \begin{aligned} & -2m_p^2 \psi^4 (3\chi_1 + \chi_2) + m_p^2 \theta_1 (8H \dot{\psi} \psi + 6H^2 \psi^2) - (\chi_3 + \chi_4) (2\dot{\psi}^2 \psi^2 + 4H \dot{\psi} \psi^3 + 2H^2 \psi^4) \\ & + \kappa (\dot{\psi}^2 \psi^2 - 10H \dot{\psi} \psi^3 - 6H^2 \psi^4) - \theta_4 (32H \dot{\psi}^2 \psi^3 + 16H^2 \psi^4) + \alpha (5\dot{\psi}^2 \psi^2 - 94H \dot{\psi} \psi^3 - 16H^2 \psi^4) \\ & + m_p^2 \xi (\dot{\psi}^2 + 2H \dot{\psi} \psi + H^2 \psi^2 + q^2 \psi^4) \end{aligned} \right] = 1$$

- Ecuación espacial de Einstein<sup>45</sup> ( $\frac{[S_3]T_{11}}{a^2 m_p^2 H^2} = \frac{G_{11}}{a^2 H^2}$ )

$$\frac{1}{2H^2 m_p^4} \left[ \begin{aligned} & -2m_p^2 \psi^4 (3\chi_1 + \chi_2) - m_p^2 \theta_1 (8\dot{\psi}^2 + 24H \dot{\psi} \psi + 8\ddot{\psi} \psi + 6H^2 \psi^2 + 4\dot{H} \psi^2) + (\chi_3 + \chi_4) (2\dot{\psi}^2 \psi^2 + 4H \dot{\psi} \psi^3 + 2H^2 \psi^4) \\ & + \theta_4 (96\dot{\psi}^2 \psi^2 + 128H \dot{\psi} \psi^3 + 32\ddot{\psi} \psi^3 + 16H^2 \psi^4) + m_p^2 \xi (\dot{\psi}^2 + 2H \dot{\psi} \psi + H^2 \psi^2 + q^2 \psi^4) \\ & + \alpha (307\dot{\psi}^2 \psi^2 + 158H \dot{\psi} \psi^3 + 104\ddot{\psi} \psi^3 - 170H^2 \psi^4 - 62\dot{H} \psi^4) + \kappa (35\dot{\psi}^2 \psi^2 + 54H \dot{\psi} \psi^3 + 12\ddot{\psi} \psi^3 + 12H^2 \psi^4 + 2\dot{H} \psi^4) \end{aligned} \right] = 3 + 2 \frac{\dot{H}}{H^2}$$

<sup>44</sup> Es la ecuación temporal de Einstein normalizada en  $\rho_{\text{crit}} = 3m_p^2 H^2 = m_p^2 G_{00}$ ; equivale a  $\sum_i \Omega_i = 1$ .

<sup>45</sup> Es la ecuación espacial de Einstein normalizada en  $\frac{1}{3} a^2 \rho_{\text{crit}}$ ; equivale a  $3 \sum_i \frac{p_i}{\rho_{\text{crit}}} = 2\epsilon - 3$ , i.e:  $\frac{p}{\rho} = w = \frac{2}{3}\epsilon - 1$ . El mismo resultado puede obtenerse combinando las ecuaciones (19)-(20) para calcular  $\epsilon \equiv -(\dot{H}/H^2)$ .

- Ecuación de evolución para los campos vectoriales ( $\frac{1}{\sqrt{\tau_r}} \frac{\delta S}{\delta A_1^I} = 0$ )

$$\frac{1}{m_p^2 a} \left[ \begin{array}{l} 4 m_p^2 \psi^3 (3\chi_1 + \chi_2) - m_p^2 \psi \theta_1 (6H^2 + 4\dot{H}) - m_p^2 \xi (3H \dot{\psi} + \ddot{\psi} + 2H^2 \psi + \dot{H} \psi + 2q^2 \psi^3) \\ +3(\chi_3 + \chi_4) (2\dot{\psi}^2 \psi + 6H \dot{\psi} \psi^2 + 2H^2 \psi^3 + 2\dot{H} \psi^3) - \kappa (\dot{\psi}^2 \psi + 3H \dot{\psi} \psi^2 + \ddot{\psi} \psi^2 - 3H^2 \psi^3 - 5\dot{H} \psi^3) \\ +16\psi^3 \theta_4 (H^2 + \dot{H}) - \alpha (5\dot{\psi}^2 \psi + 15H \dot{\psi} \psi^2 + 5\ddot{\psi} \psi^2 - 109H^2 \psi^3 - 47\dot{H} \psi^3) \end{array} \right] = 0$$

El hallazgo de solo tres ecuaciones de evolución independientes es consistente con el siguiente análisis: (i) de las dieciséis ecuaciones de Einstein ( $[S_3] m_p^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ ) solo cuatro han de ser no nulas porque los tensores  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{G}$  son diagonales en el sistema coordenado empleado para escribir el elemento de línea (15) (coordenadas comóviles con función de lapso  $N = 1$ )<sup>46</sup>; más aún, debido a la isotropía, las tres ecuaciones espaciales de Einstein son idénticas, y de este modo, realmente solo dos ecuaciones de Einstein resultan ser independientes; asimismo, (ii) de las doce ecuaciones para  $A_\mu^a$  solo tres no son nulas debido a que  $A_\mu^a \propto \delta_\mu^a$  y, más aún, debido a la isotropía, todas estas son idénticas, dejando como resultado una sola independiente.

Introduciendo las siguientes definiciones para las variables adimensionales

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad P \equiv \frac{\ddot{\psi}}{m_p H^2}, \quad X \equiv \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{2} m_p H}, \quad Y \equiv \frac{\psi}{\sqrt{2} m_p}, \quad Z \equiv \frac{\psi F}{\sqrt{2} m_p H} \equiv \frac{\psi (q^2 \xi - 6\chi_1 - 2\chi_2)^{1/4}}{\sqrt{2} m_p H}$$

---

<sup>46</sup> Las coordenadas comóviles son aquellas coordenadas  $\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(t, x^i)$  con ( $t \equiv \tau/N + C$ ,  $x^i \neq x^i(\tau)$ ) donde  $C$  y  $N$  son constantes reales y  $\tau$  representa el tiempo propio del observador. Un vector tangente a la trayectoria de cualquier partícula en este sistema de referencia es dado por ( $u^\mu \equiv \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau} = \frac{1}{N} \delta_0^\mu$ ,  $u_\mu = \frac{1}{N} g_{\mu 0}$ ), si se normaliza este vector para que vaya en la dirección del flujo del tiempo, se tiene que ( $N > 0$ ,  $u^\mu u_\mu = \eta_{00}$ ). Si se emplea a  $u^\mu$  para definir una foliación 3+1 del espacio-tiempo en hipersuperficies de tiempo constante, entonces,  $N$  se denomina “función de lapso”. Siguiendo la ref. [105] se puede demostrar que ( $N^2 = \frac{\eta_{00}}{g_{00}}$ ,  $N_\mu = \eta_{00} g_{\mu 0}$ ) y, en particular, si el universo es isótropo, ( $g_{i0} = 0$ ). Reemplazando estas relaciones en la ecuación (16) se encuentra que ( $T_0^0 = -\rho$ ) y ( $T_j^i = P \delta_j^i$ ) lo cual complementa el análisis expuesto, evidenciando que  $T$  es diagonal y sus tres componentes espaciales son idénticas.

es posible reescribir las ecuaciones previamente expuestas de la siguiente forma:

- Ecuación de Friedmann: (92)

$$(10X^2Y^2 - 188XY^3 - 32Y^4) \alpha + (8XY + 6Y^2) \theta_1 - (64XY^3 + 32Y^4) \theta_4 + (2X^2Y^2 - 20XY^3 - 12Y^4) \kappa + [X^2 + 2XY + Y^2 + \frac{2q^2Z^4}{F^4}] \xi - \frac{4Z^4}{F^4} (3\chi_1 + \chi_2) - (4X^2Y^2 + 8XY^3 + 4Y^4) (\chi_3 + \chi_4) + \Omega_m + \Omega_r = 1$$

- Ecuación espacial de Einstein: (93)

$$(614X^2Y^2 + 104\sqrt{2}PY^3 + 316XY^3 - 340Y^4 + 124Y^4\epsilon) \alpha - (8X^2 + 4\sqrt{2}PY + 24XY + 6Y^2 - 4Y^2\epsilon) \theta_1 + (192X^2Y^2 + 32\sqrt{2}PY^3 + 256XY^3 + 32Y^4) \theta_4 + (70X^2Y^2 + 12\sqrt{2}PY^3 + 108XY^3 + 24Y^4 - 4Y^4\epsilon) \kappa + [X^2 + 2XY + Y^2 + \frac{2q^2Z^4}{F^4}] \xi - \frac{4Z^4}{F^4} (3\chi_1 + \chi_2) + (4X^2Y^2 + 8XY^3 + 4Y^4) (\chi_3 + \chi_4) + \Omega_r = 2\epsilon - 3$$

- Ecuación de evolución para los campos vectoriales: (94)

$$(10X^2Y + 5\sqrt{2}PY^2 + 30XY^2 - 218Y^3 + 94Y^3\epsilon) \alpha + (6Y - 4Y\epsilon) \theta_1 + (-32Y^3 + 32Y^3\epsilon) \theta_4 + (2X^2Y + \sqrt{2}PY^2 + 6XY^2 - 6Y^3 + 10Y^3\epsilon) \kappa + [\frac{P}{\sqrt{2}} + 3X + 2Y + \frac{4q^2Z^4}{F^4Y} - Y\epsilon] \xi - \frac{8Z^4}{F^4Y} (3\chi_1 + \chi_2) - (4X^2Y + 2\sqrt{2}PY^2 + 12XY^2 + 4Y^3 - 4Y^3\epsilon) (\chi_3 + \chi_4) = 0$$

Las variables adimensionales  $\{\Omega_m, \Omega_r\}$  dan cuenta de otros tipos de materia en el universo (“materia fría” caracterizada por  $p_m = 0$ , y “materia caliente” caracterizada por  $p_r = \rho_r/3$ ); estas ecuaciones son consistentes con los resultados encontrados por Rodríguez y Navarro para el caso de  $\{\alpha, q\}$  arbitrarios,  $\xi = 1$  y  $\{\kappa, \lambda, \theta_i, \chi_i\} = 0$  (Einstein Yang-Mills  $L_4^1$  - [77]).

De la primera ecuación es posible despejar  $Z(X, Y, \vec{\alpha})$  y de las otras dos,  $\{P(X, Y, \vec{\alpha}), \epsilon(X, Y, \vec{\alpha})\}$ :

$$Z = \frac{\text{Sgn}(\psi)}{\sqrt[4]{2}} \left[ \begin{aligned} &(-10X^2Y^2 + 188XY^3 + 32Y^4) \alpha - (X^2 + 2XY + Y^2) \xi + (-2X^2Y^2 + 20XY^3 + 12Y^4) \kappa \\ &+ (64XY^3 + 32Y^4) \theta_4 - (8XY + 6Y^2) \theta_1 + (4X^2Y^2 + 8XY^3 + 4Y^4) (\chi_3 + \chi_4) + (1 - \Omega_m - \Omega_r) \end{aligned} \right]^{1/4} \quad (95)$$

$$\begin{aligned}
P = & \{ Y^2(-\xi - 4\theta_1 + 2Y^2 [47\alpha + 5\kappa + 16\theta_4 + 2(\chi_3 + \chi_4)]) (4 - 12Y^2\theta_1 + Y^4 [-308\alpha + 36\kappa + 64\theta_4 + 8(\chi_3 + \chi_4)]) \\
& + 4X^2 [-2\theta_1 + Y^2(151\alpha + 17\kappa + 48\theta_4 + 2(\chi_3 + \chi_4))] + 8X [-4Y\theta_1 + Y^3(63\alpha + 16\kappa + 40\theta_4 + 2(\chi_3 + \chi_4))] - \Omega_m \\
& + 2(-1 + 2Y^2\theta_1 + 2Y^4 [31\alpha - \kappa]) (-XY [-\xi - 16\theta_1 + 2Y^2(203\alpha + 23\kappa + 64\theta_4 + 2(\chi_3 + \chi_4))] \\
& + 2X^2 [\xi + Y^2(5\alpha + \kappa - 2(\chi_3 + \chi_4))] + 2[-1 + 3Y^2\theta_1 + Y^4(77\alpha - 9\kappa - 16\theta_4 - 2(\chi_3 + \chi_4)) + \Omega_m + \Omega_r] \} \\
\div & \{ \sqrt{32} Y^3(\theta_1 - Y^2 [26\alpha + 3\kappa + 8\theta_4]) (-\xi - 4\theta_1 + 2Y^2 [47\alpha + 5\kappa + 16\theta_4 + 2(\chi_3 + \chi_4)]) \\
& + \sqrt{2} Y(-1 + 2Y^2\theta_1 + 2Y^4 [31\alpha - \kappa]) (\xi + 2Y^2 [5\alpha + \kappa - 2(\chi_3 + \chi_4)]) \} \\
\epsilon = & \{ 2XY\xi^2 - 8XY^3\xi(36\alpha - 5\kappa - 8\theta_4) - 8XY^5[77\alpha - 9\kappa - 16\theta_4 - 2(\chi_3 + \chi_4)][5\alpha + \kappa - 2(\chi_3 + \chi_4)] + 2Y^4[-373\alpha\xi - 11\kappa\xi \\
& - 1526\alpha\theta_1 - 102\kappa\theta_1 - 48\xi\theta_4 - 320\theta_1\theta_4 - 4\theta_1(\chi_3 + \chi_4) + 2X^2(203\alpha + 23\kappa + 64\theta_4 + 2(\chi_3 + \chi_4))(5\alpha + \kappa - 2(\chi_3 + \chi_4))] \\
& + 8Y^6[5243\alpha^2 + 24\kappa^2 + 256\theta_4^2 + \kappa(\chi_3 + \chi_4) - 2(\chi_3 + \chi_4)^2 + \alpha(755\kappa + 2616\theta_4 + 279(\chi_3 + \chi_4)) + 8\theta_4(19\kappa + 2(\chi_3 + \chi_4))] \\
& + \xi[3 + X^2(\xi - 8\theta_1) + \Omega_r] - [\xi + 16\theta_1 - 2Y^2(203\alpha + 23\kappa + 64\theta_4 + 2(\chi_3 + \chi_4))][ -1 + Y^2(\xi + 6\theta_1) - 4Y^4(8\alpha + 3\kappa + 8\theta_4 + (\chi_3 + \chi_4)) \\
& - 2XY(-\xi - 4\theta_1 + 2Y^2(47\alpha + 5\kappa + 16\theta_4 + 2(\chi_3 + \chi_4))) + X^2(\xi + 2Y^2(5\alpha + \kappa - 2(\chi_3 + \chi_4))) + \Omega_m + \Omega_r] \\
& + Y^2[6\kappa + 72X^2\kappa\xi + \xi^2 + 10\xi\theta_1 + 48\theta_1^2 + 192X^2\xi\theta_4 - 12(\chi_3 + \chi_4) + 2\Omega_r(\kappa - 2(\chi_3 + \chi_4)) + 2\alpha(312X^2\xi + 5(3 + \Omega_r))] \} \\
\div & \{ 2[\xi + 2Y^2(5\alpha + \kappa + \xi\theta_1 + 8\theta_1^2 - 2(\chi_3 + \chi_4)) - 2Y^4(83\alpha\xi + 5\kappa\xi + 406\alpha\theta_1 + 46\kappa\theta_1 + 16\xi\theta_4 + 128\theta_1\theta_4 + 4\theta_1(\chi_3 + \chi_4)) \\
& + 4Y^6(2289\alpha^2 + 256\theta_4^2 + 16\theta_4(11\kappa + 2(\chi_3 + \chi_4)) + \kappa(31\kappa + 10(\chi_3 + \chi_4)) + 2\alpha(258\kappa + 792\theta_4 + 83(\chi_3 + \chi_4)))] \}
\end{aligned}$$

Es de destacar que los aportes de  $\mathcal{L}_{G^2A^2}^{(1)}$  y  $\mathcal{L}_{G^2A^2}^{(2)}$  en todas las ecuaciones de esta sección siempre son idénticos (se puede factorizar  $\chi_3 + \chi_4$ ), y los aportes de  $\mathcal{L}_{A^2}^{(1)}$  y  $\mathcal{L}_{A^2}^{(2)}$  siempre se relacionan por medio de un factor de tres (se puede factorizar  $3\chi_1 + \chi_2$ ), esto ocurre porque los Lagrangianos de cada par resultan ser proporcionales entre sí al evaluar la configuración de tríada cósmica en el universo de FLRW, el factor de proporcionalidad es propagado, y llega a las ecuaciones de Euler-Lagrange a primer orden (92), (93), (94).

Podría pensarse entonces que tener múltiples Lagrangianos linealmente dependientes bajo una configuración determinada es algo redundante ya que, siempre que se tengan  $n$  Lagrangianos  $\mathcal{L}^{(i)}$  proporcionales a un Lagrangiano  $\mathcal{L}^{(0)}$  (i.e:  $\mathcal{L}^{(i)} = K_i \mathcal{L}^{(0)}$ ), será posible definir un parámetro  $K_{\text{eff}} \equiv \sum_{i=0}^n K_i \alpha_i$  de modo tal que la dinámica de  $\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathcal{L}^{(i)}$  sea equivalente a la de  $K_{\text{eff}} \mathcal{L}^{(0)}$ ; no obstante, como ya se ha sugerido previamente,  $K_{\text{eff}}$  se mantendrá en

las ecuaciones de Euler-Lagrange a primer orden pero no a ordenes superiores; incluso, la forma específica de cada Lagrangiano previo a su evaluación será la que determine qué clase de términos aportará cada  $\alpha_i \mathcal{L}^{(i)}$  en las velocidades de propagación del sonido.

### Apéndice E.3. Sistema autónomo

Por definición, el número de e-folds  $N$  entre dos tiempos  $t_1$  y  $t_2 \geq t_1$  está dado por  $\frac{a(t_2)}{a(t_1)} = e^N$ , esto implica  $N = \ln\{a(t_2)\} - \ln\{a(t_1)\} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{da}{a} = \int_{t_1}^{t_2} dN$  pero  $da = \dot{a} dt$ , entonces  $dN = H dt$ ; con esto en mente, se deduce el siguiente sistema autónomo de ecuaciones diferenciales:

$$X' \equiv \frac{dX}{dN} = \frac{1}{\sqrt{2} m_p H} \left\{ \frac{\ddot{\psi}}{H} - \frac{\dot{\psi} \dot{H}}{H^2} \right\} = \frac{P}{\sqrt{2}} + \epsilon X \quad , \quad Y' \equiv \frac{dY}{dN} = \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{2} m_p H} = X \quad ,$$

$$Z' \equiv \frac{dZ}{dN} = \frac{F}{\sqrt{2} m_p H} \left\{ \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{H}} - \frac{\dot{H} \psi}{2H\sqrt{H}} \right\} = Z \left( \frac{X}{Y} + \frac{\epsilon}{2} \right)$$

Adicionalmente, si se considera la existencia de contenidos de materia fría y caliente<sup>47</sup>  $\{\Omega_m, \Omega_r\}$  y estos se asumen no interactuantes (i.e: no hay decaimiento de partículas relativistas en partículas no-relativistas y viceversa), éstos obedecerán una ecuación de conservación de la forma (20) verificándose entonces que:

$$\Omega_i' \equiv \frac{d}{dN} \left\{ \frac{\rho_i}{3m_p^2 H^2} \right\} = \frac{1}{3m_p^2 H} \left[ \frac{-3H(w_i + 1)}{H^2} \rho_i - 2 \frac{\dot{H}}{H^3} \rho_i \right] = [2\epsilon - 3(w_i + 1)] \Omega_i$$

que al evaluar los respectivos  $w_i$  (ver sección 1.3.1) da origen a dos ecuaciones adicionales:

$$\Omega_r' = 2 \Omega_r (\epsilon - 2) \quad ,$$

$$\Omega_m' = \Omega_m (2\epsilon - 3) \quad .$$

---

<sup>47</sup> Los términos “materia caliente” y “materia fría” se deben entender como “materia relativista” (a veces llamada radiación) y “materia no relativista” (a veces llamada simplemente “materia”) respectivamente.

En síntesis, el sistema autónomo asociado al Lagrangiano más general considerado consta de

$$\begin{aligned}
 X' &= P/\sqrt{2} + \epsilon X \\
 Y' &= X \\
 Z' &= Z \left( \frac{X}{Y} + \frac{\epsilon}{2} \right) \\
 \Omega_r' &= 2\Omega_r(\epsilon - 2) \\
 \Omega_m' &= \Omega_m(2\epsilon - 3)
 \end{aligned} \tag{96}$$

en donde las ecuaciones de evolución para los campos  $g_{\mu\nu}$  y  $A_\mu^a$  se cumplirán automáticamente siempre y cuando  $\{Z, P, \epsilon\}$  sigan siendo dados por las expresiones de la sección anterior.

#### Apéndice E.4. Puntos críticos

A partir de las ecuaciones  $\{Y' = X, \Omega_r' = 2\Omega_r(\epsilon - 2), \Omega_m' = \Omega_m(2\epsilon - 3)\}$  se deduce que el sistema autónomo (96) requiere  $\{X, \Omega_r, \Omega_m\} = 0$  para poder garantizar que las soluciones con  $\epsilon \ll 1$  permanezcan en el estado estacionario  $\{Y', \Omega_r', \Omega_m'\} = 0$  indefinidamente. En estas circunstancias, el sistema autónomo (96) se transforma en  $\{X' = \frac{P}{\sqrt{2}}; Z' = \frac{Z\epsilon}{2}\}$  y la ecuación para  $Z'$  puede obviarse por el momento ya que  $Z = Z(X, Y, \vec{\alpha})$  (sección .2) garantiza que  $Z' = 0$  siempre que  $\{X', Y'\} = 0$ ; dicho esto, los puntos críticos satisfacen:

$$\{X, \Omega_r, \Omega_m\} = 0 \quad , \quad P(0, Y, \vec{\alpha}) = 0 \quad , \quad Z = Z(0, Y, \vec{\alpha}) .$$

Con estos datos, se encuentran cuatro soluciones con  $\xi = 1$  en el subespacio  $\{X, \Omega_r, \Omega_m\} = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad & (77\alpha - 16\theta_4 - 9\kappa - 2\chi_{34} \neq 0) \wedge Y^2 = \frac{-3\theta_1 \pm \sqrt{308\alpha + 9\theta_1^2 - 64\theta_4 - 36\kappa - 8\chi_{34}}}{2(77\alpha - 16\theta_4 - 9\kappa - 2\chi_{34})} \\
 \boxed{2} \quad & (8\alpha + 8\theta_4 + 3\kappa + \chi_{34} \neq 0) \wedge Y^2 = \frac{6\theta_1 + 1 \pm \sqrt{1 - 128\alpha + 36\theta_1^2 + 12\theta_1 - 128\theta_4 - 48\kappa - 16\chi_{34}}}{8(8\alpha + 8\theta_4 + 3\kappa + \chi_{34})} \\
 \boxed{3} \quad & (77\alpha - 16\theta_4 - 9\kappa - 2\chi_{34} = 0) \wedge (\theta_1 \neq -1/6) \wedge Y^2 = 1 / (6\theta_1 + 1) \\
 \boxed{4} \quad & (8\alpha + 8\theta_4 + 3\kappa + \chi_{34} = 0) \wedge (\theta_1 \neq 0) \wedge Y^2 = 1 / 3\theta_1
 \end{aligned}$$

cuyos parámetros de rodadura lenta  $\epsilon \big|_{\{X, \Omega_r, \Omega_m\}=0}$  son dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad \epsilon_1 \big|_{\{X, \Omega_r, \Omega_m\}=0} &= 0 \\ \boxed{2} \quad \epsilon_2 \big|_{\{X, \Omega_r, \Omega_m\}=0} &= 3 - \frac{2[r + \sqrt{r(6\theta_1 + 1)}]}{1 + r - 248\alpha + 4\theta_1(3\theta_1 + 2) + 8\kappa + \sqrt{r(8\theta_1 + 2)}} \\ \boxed{3} \quad \epsilon_3 \big|_{\{X, \Omega_r, \Omega_m\}=0} &= \frac{8 + 144\theta_1^2 + 72\theta_1 + 744\theta_4 + 303\kappa + 93\chi_{34}}{4 + 96\theta_1^2 + 40\theta_1 + 248\theta_4 + 101\kappa + 31\chi_{34}} \\ \boxed{4} \quad \epsilon_4 \big|_{\{X, \Omega_r, \Omega_m\}=0} &= 0 \end{aligned}$$

en donde se ha definido  $r \equiv 1 - 4[32\alpha - 3\theta_1(1 + 3\theta_1) + 4(8\theta_4 + 3\kappa + \chi_{34})]$  y se observa que dos puntos críticos que exhiben  $\epsilon = 0$  (los más interesantes) son solo dos y el último requiere un ajuste demasiado preciso de los parámetros de la teoría ( $8\alpha + 8\theta_4 + 3\kappa + \chi_{34} = 0$ ), así que, realmente, solo el primer punto crítico es de interés (y para el caso en el que  $(\alpha_i \neq \alpha) = 0$  se puede verificar que dicho punto corresponde al punto de silla inflacionario encontrado en la ref. [77] al estudiar la dinámica del modelo cuyo único Lagrangiano de Galileón era  $\mathcal{L}_4^1$ ).

### Apéndice E.5. Comportamiento asintótico

Al realizar diferentes diagramas de fase para el sistema autónomo descrito en la sección 96 (asumiendo diferentes valores para  $\vec{\alpha}$ ) se pueden encontrar comportamientos asintóticos llamativos para las variables  $Y$  y  $Z$  que son similares a los ya reportados en la referencia [77] caracterizados por las siguientes tendencias:

$$Y \rightarrow \beta X \quad , \quad Z \rightarrow \gamma X \quad \beta, \gamma \neq 0 .$$

Es fácil mostrar que, con este comportamiento,  $\epsilon \rightarrow 0$  cuando  $N \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow \text{Sgn}(\beta) = \pm 1$ .

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} Y' = X \\ Y' \rightarrow \beta X' \end{array} \right\} &\Rightarrow X' \rightarrow \frac{1}{\beta} X \Leftrightarrow X(N) \rightarrow X_1 e^{\frac{1}{\beta}(N-N_1)} \Rightarrow X(\pm\infty) \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{Sgn}(X_1) \infty \leftrightarrow \text{Sgn}(\beta) = \pm 1 \\ 0 \quad \leftrightarrow \text{Sgn}(\beta) = \mp 1 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} Y' = X \rightarrow \beta X' \\ Z' = Z \left( \frac{X}{Y} + \frac{\epsilon}{2} \right) \rightarrow \gamma X' \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X' \rightarrow \frac{1}{\beta} X \\ X' \rightarrow \left( \frac{1}{\beta} + \frac{\lim \epsilon}{2} \right) X \end{array} \right\} \Rightarrow \lim \epsilon \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

Aquí,  $X_1 \equiv X(N_1)$  y  $N_1$  es cualquier tiempo de referencia donde se evidencie el comportamiento asintótico. Desde un punto de vista físico, la solución con  $X \rightarrow 0$  debe ser evadida porque si  $\{X, Y, Z\} \rightarrow 0$ , entonces  $\Omega_{\text{Gal}} \rightarrow 0$ ,  $\Omega_r + \Omega_m \rightarrow 1$  y  $\epsilon \rightarrow \frac{1}{2}(3 + \Omega_r) \ll 1 \Leftrightarrow \Omega_r \ll -1$ , implicando que las soluciones de interés (con  $\epsilon \ll 1$ ) no existen debido a la no negatividad del parámetro de densidad  $\Omega_r$ .<sup>48</sup> Habiendo dicho esto; al descartar esta solución, se obtienen dos mecanismos de expansión de tipo rodadura lenta bastante llamativos; uno en el futuro si se tiene  $\beta > 0$  (que correspondería a energía oscura), y otro en el pasado si se tiene  $\beta < 0$  (que puede corresponder a inflación primordial si el comportamiento de  $\epsilon \ll 1$  se mantiene por un tiempo de al menos 60 o 70 e-folds como se discutió en la sección 1.3.2).

En síntesis, cada vez que se presente el comportamiento asintótico en el plano XY

Las asíntotas con  $\beta > 0$  exhibirán  $\epsilon(N \rightarrow +\infty) = 0$

generando un periodo de expansión acelerada en épocas tardías (i.e: energía oscura)

Las asíntotas con  $\beta < 0$  exhibirán  $\epsilon(N \rightarrow -\infty) = 0$

generando un periodo de expansión acelerada primordial (i.e: inflación)

Adicionalmente, es fácil ver que, dado este comportamiento asintótico, se tiene que

$$\left\{ X' = \frac{P}{\sqrt{2}} + \epsilon X \rightarrow \frac{1}{\beta} X, \epsilon \rightarrow 0 \right\} \Rightarrow P \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\beta} X,$$

y al evaluar  $\{X \rightarrow \pm\infty, Y \rightarrow \beta X, Z \rightarrow \gamma X, \epsilon \rightarrow 0, P \rightarrow (\sqrt{2}/\beta) X\}$ , las ecuaciones (92), (93) y (94) que son la forma  $E_i(X, Y, Z, P, \epsilon, \vec{\alpha}) = 0$ , pueden ser reescritas en la forma  $E_i(\beta, \gamma, \vec{\alpha}) = 0$

---

<sup>48</sup> La condición de energía débil estipula que la densidad de energía medida por cualquier observador con velocidad temporaloide ( $u^\mu u_\mu = \eta_{00}$ ) debe ser no negativa; el sistema de referencia comóvil es un caso particular de estos observadores, así que, si en alguna circunstancia se llegara a requerir  $\Omega_r \ll -1$ , la condición de energía débil se violaría y las consecuencias serían mucho más complejas [106, 107].

de las cuales es posible despejar las siguientes expresiones exactas para  $\{\beta(\vec{\alpha}), \gamma(\vec{\alpha})\}$  que garantizan el cumplimiento de las ecuaciones de evolución provenientes de la aplicación del principio de acción estacionaria con extremos fijos:

$$\beta = \frac{203\alpha + 23\kappa + 64\theta_4 + 2\chi_{34}}{77\alpha - 9\kappa - 16\theta_4 - 2\chi_{34}}, \quad \gamma^4 = \frac{(203\alpha + 23\kappa + 64\theta_4 + 2\chi_{34})^2}{(77\alpha - 9\kappa - 16\theta_4 - 2\chi_{34})^4} R_1 R_2 \quad (97)$$

$$R_1 = [2289\alpha^2 + 256\theta_4^2 + 176\theta_4(9\alpha + \kappa) + 2\chi_{34}(83\alpha + 16\theta_4) + \kappa(516\alpha + 31\kappa)]$$

$$R_2 = [917\alpha + 33\kappa + 128\theta_4 - 2\chi_{34}]$$

Nótese que (i) el parámetro  $\chi_{34} \equiv \chi_3 + \chi_4$  se introdujo para simplificar la notación y (ii) hasta el momento no se han hecho suposiciones excesivamente restrictivas sobre los parámetros libres de la teoría (solamente se ha asumido que la suma en el denominador de  $\beta$  es diferente de cero); por otro lado, existe otra tendencia que es fácil de verificar dadas las definiciones del conjunto de variables adimensionales:

$$\frac{Y}{Z} = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{H}{m_p}} \rightarrow \frac{\beta}{\gamma}; \quad (98)$$

de ella se deduce que, dadas las expresiones (97)-(98), siempre es posible escoger los parámetros libres de la teoría de tal forma que se garantice un tipo de asíntota en particular (bien sea de energía oscura cuando  $\beta > 0$ , o de inflación cuando  $\beta < 0$  y  $\epsilon \ll 1$  por al menos 60-70 e-folds) y se asegure el valor adecuado para  $H/m_p$  durante dicho periodo.

Una última observación digna de ser destacada, es la siguiente: sabiendo que por definición  $F > 0$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  deben ser reales para que la acción sea real, las siguientes relaciones de consistencia deben darse, la última proveniente de la ecuación E.7 y la definición de  $\{Y, Z\}$

$$\{\beta \in \mathbb{R} \neq 0, \gamma^2 > 0, \beta/\gamma > 0\} \quad (99)$$

### Apéndice E.6. Criterios de estabilidad

Teniendo en cuenta los elementos presentados en la sección 1.7.1, el sector tensorial de orden dos (en cualquier teoría clásica de campos) presenta la siguiente forma:

$$S^{(2)} = \int d^4x \left\{ a^3 \left[ \dot{\vec{x}}^T \mathbb{K} \dot{\vec{x}} + \dot{\vec{x}}^T \mathbb{C}_{\text{KM}} \vec{x} + \vec{x}^T \mathbb{M} \vec{x} \right] + a^2 \left[ \dot{\vec{x}}^T \mathbb{C}_{\text{KL}} (\partial_z \vec{x}) + \dot{\vec{x}}^T \mathbb{C}_{\text{LM}} \vec{x} \right] + a (\partial_z \vec{x}) \mathbb{L} (\partial_z \vec{x}) \right\} \quad (100)$$

con  $\vec{x} = \{h_+, \gamma_+, h_\times, \gamma_\times\}$ . En el límite de altas energías/subhorizonte ( $k/a \gg H$ ) tiende a:

$$S^{(2)} \simeq S_{k \rightarrow \infty}^{(2)} = \int d^4x \left\{ a^3 \dot{\vec{x}}^T \mathbb{K} \dot{\vec{x}} + a^2 \dot{\vec{x}}^T \mathbb{C}_{\text{KL}} (\partial_z \vec{x}) + a (\partial_z \vec{x}) \mathbb{L} (\partial_z \vec{x}) \right\}, \quad (101)$$

y para el caso del Lagrangiano más general considerado (.1), se obtienen las matrices:

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}^T = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{A} \end{array} \right], \quad \mathbb{C}_{\text{KL}} = \mathbb{C}_{\text{KL}}^T = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{B}^T \\ \hline \mathbb{B} & 0 \end{array} \right], \quad \mathbb{L} = \mathbb{L}^T = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{C} & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{C} \end{array} \right], \quad (102)$$

en donde se identifican las siguientes submatrices:

$$\mathbb{A} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{8} (2 + 2\theta_1 \hat{\psi}^2 + (61\alpha + 19\kappa - 16\theta_4) \hat{\psi}^4) & -\theta_1 \hat{\psi} + (-5\alpha + 4\theta_4 - \frac{3}{2}\kappa) \hat{\psi}^3 \\ -\theta_1 \hat{\psi} + (-5\alpha + 4\theta_4 - \frac{3}{2}\kappa) \hat{\psi}^3 & \xi + (5\alpha + \kappa - 2\chi_{34}) \hat{\psi}^2 \end{array} \right] = \mathbb{A}^T,$$

$$\mathbb{C} = \left[ \begin{array}{cc} -\frac{1}{8} (2 + 6\theta_1 \hat{\psi}^2 + (81\alpha - \kappa) \hat{\psi}^4) & \theta_1 \hat{\psi} + (5\alpha - \kappa/2) \hat{\psi}^3 \\ \theta_1 \hat{\psi} + (5\alpha - \kappa/2) \hat{\psi}^3 & -\xi - (5\alpha + \kappa - 4\chi_{34} + 2\chi_4) \hat{\psi}^2 \end{array} \right] = \mathbb{C}^T,$$

$$\mathbb{B} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & \lambda \hat{\psi}^3 \\ -\lambda \hat{\psi}^3 & 0 \end{array} \right] = -\mathbb{B}^T,$$

donde  $\hat{\psi} \equiv (\psi/m_p)$ . Aplicando las condiciones de estabilidad (sección 1.7.1) asociadas la naturaleza de las energías cinéticas y velocidades de propagación de los modos tensoriales generados por la teoría, se deducen algunas restricciones para  $\vec{\alpha}$  detalladas a continuación pero, por conveniencia, se presentarán haciendo uso de la siguiente reparametrización:

$$\alpha \neq 0 \quad , \quad Q_\kappa \equiv \frac{\kappa}{\alpha} \quad , \quad Q_\lambda \equiv \frac{\lambda}{\alpha} \quad , \quad Q_i \equiv \frac{\theta_i}{\alpha} \quad , \quad C_i \equiv \frac{\chi_i}{\alpha} \quad , \quad C_{34} \equiv C_3 + C_4$$

**1** Criterio de energía cinética positiva (“No-Ghosts condition”):

Autovalores $[\mathbb{K}] = \{ \lambda_i \in \mathbb{R} : \det [ \mathbb{K} - \lambda_i I ] = \det [ \mathbb{A} - \lambda_i I ]^2 = (\lambda_i^2 - \text{Tr} \mathbb{A} \lambda_i + \det \mathbb{A})^2 = 0 \}$ ,

por ende, existen 2 autovalores degenerados que son positivos solo si  $\text{Tr} \mathbb{A} > 0 \wedge \det \mathbb{A} > 0$ .<sup>49</sup>

De la ecuación (102) se observa que la traza y determinante de  $\mathbb{A}$  son:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \mathbb{A} &= \left( \frac{1}{4} + \xi \right) + \left( 5\alpha + \kappa + \frac{1}{4} \theta_1 - 2\chi_{34} \right) \hat{\psi}^2 + \frac{1}{8} \left( 61\alpha + 19\kappa - 16\theta_4 \right) \hat{\psi}^4 \\ \det \mathbb{A} &= \frac{1}{8} \left[ \begin{aligned} &2\xi + 2 \left[ 5\alpha + \kappa - 2\chi_{34} + (\xi - 4\theta_1) \theta_1 \right] \hat{\psi}^2 \\ &+ \left[ (61\alpha + 19\kappa - 16\theta_4) \xi - 2(35\alpha + 11\kappa - 132\theta_4 + 2\chi_{34}) \theta_1 \right] \hat{\psi}^4 \\ &+ \left[ (61\alpha + 19\kappa - 16\theta_4) (5\alpha + \kappa - 2\chi_{34}) + 2(10\alpha + 3\kappa - 8\theta_4)^2 \right] \hat{\psi}^6 \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

y pueden ser sintetizados como:

$$\text{Tr} \mathbb{A} = \sum_{i=0}^2 t_{2i} \hat{\psi}^{2i} \quad , \quad \det \mathbb{A} = \sum_{i=0}^3 d_{2i} \hat{\psi}^{2i} . \quad (103)$$

Para que los polinomios (103) sean positivos definidos ( $\forall \psi \in \mathbb{R}$ ) se requieren las condiciones

$$(t_0 > 0) \wedge \left[ (t_2 \wedge t_4) \geq 0 \vee (t_2 < 0 \wedge t_4 > \frac{t_2^2}{4t_0}) \right] , \quad (104)$$

$$(d_0 > 0) \wedge \left[ \begin{aligned} &\left[ (d_2 \wedge d_4) \geq 0 \vee (d_2 < 0 \wedge d_4 > \frac{d_2^2}{4d_0}) \right] \wedge (d_6 \geq 0) \vee \\ &\left[ (d_2 < 0 \wedge d_4 > \frac{d_2^2}{4d_0}) \vee (d_2 \geq 0 \wedge d_4 < 0) \right] \wedge d_6 > \frac{-2d_2^3 + 9d_0 d_2 d_4 + 2d_0^2 \sqrt{(d_2^3 - d_0 d_4)^3 \div d_0^4}}{27d_0^2} \end{aligned} \right] . \quad (105)$$

<sup>49</sup> Dado que los autovalores de  $\mathbb{K}$  coinciden con los de  $\mathbb{A}$  y son:  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} [ (\text{Tr} \mathbb{A}) \pm \sqrt{(\text{Tr} \mathbb{A})^2 - (4 \det \mathbb{A})} ]$ , se puede replantear la condición de Autovalores $(\mathbb{K}) > 0$  como  $[\lambda_+ \lambda_- = \det \mathbb{A} > 0] \wedge [\lambda_+ + \lambda_- = \text{Tr} \mathbb{A} > 0]$ , implicando adicionalmente  $(4/\text{Tr} \mathbb{A}^{-1})^2 \leq (4 \det \mathbb{A}) \leq (\text{Tr} \mathbb{A})^2 \leq (2 \text{Tr} \mathbb{A}^2)$  gracias a un famoso resultado de la estadística que compara las medias armónica, geométrica, aritmética y *root mean square* [108].

Éstas, al ser aplicadas, se traducen en restricciones (muy extensas para mostrarlas aquí) sobre los parámetros de la teoría, aunque es posible destacar un caso particular suficientemente simple y a la vez amplio para ser expuesto a continuación:

$$\begin{aligned}
 & [ \alpha \neq 0, \xi = 1, \theta_1 = 0, \chi_3 + \chi_4 = 0 ] \rightarrow \text{Autovalores}[\mathbb{K}] > 0 \forall \hat{\psi} \Leftrightarrow \\
 & [ (\alpha > 0 \wedge Q_\kappa \geq -29/9) \vee (\alpha < 0 \wedge Q_\kappa \leq -5) ] \wedge [ P_-[Q_\kappa] \leq Q_4 \leq P_+[Q_\kappa] ] \\
 & P_\pm[Q_\kappa] = \frac{1}{16} \left[ 5(Q_\kappa + 3) \pm \sqrt{3(Q_\kappa + 29/9)(Q_\kappa + 5)} \right] .
 \end{aligned}$$

**2** **Criterio de velocidad de propagación real** (“No-Laplacian instabilities condition”):

Empleando las matrices expuestas en la ecuación (102) y la expresión (48) para el sector tensorial de orden 2 en la acción, se encuentra que, al aplicar  $k \rightarrow \infty$ , las velocidades de propagación de las perturbaciones tensoriales  $c_s$  vienen dadas por  $\det [ c_s^2 \mathbb{K} - c_s \mathbb{C}_{\text{KL}} + \mathbb{L} ] = 0$ , esta expresión es un polinomio de orden cuatro en  $c_s^2$  gracias a la dimensión de las matrices (que es igual al número de polarizaciones propagadas) con dos soluciones degeneradas que representan las velocidades de propagación de ambas polarizaciones para cada modo.

Ambas velocidades al cuadrado son positivas si  $c_{s,h_\pm}^2 + c_{s,\gamma_\pm}^2 > 0 \wedge c_{s,h_\pm}^2 \times c_{s,\gamma_\pm}^2 > 0$ , en donde

$$\begin{aligned}
c_{s,h_{\pm}}^2 + c_{s,\gamma_{\pm}}^2 &= \left[ \begin{array}{l} 2\xi + 2[5\alpha - 4\theta_1^2 + 3\theta_1\xi + \kappa - 4\chi_{34} + 2\chi_4] \hat{\psi}^2 \\ + [-50\alpha\theta_1 + 81\alpha\xi + 14\theta_1\kappa - 24\theta_1\chi_{34} + 12\theta_1\chi_4 - \kappa\xi] \hat{\psi}^4 \\ + [205\alpha^2 + 2\alpha(58\kappa + 81[\chi_4 - 2\chi_{34}]) + \kappa(-3\kappa + 4\chi_{34} - 2\chi_4)] \hat{\psi}^6 \end{array} \right] \div \mathcal{D} , \\
c_{s,h_{\pm}}^2 \times c_{s,\gamma_{\pm}}^2 &= \left[ \begin{array}{l} 4\xi + 4[5\alpha + 2\theta_1(\xi - 2\theta_1) + \kappa - 3\chi_{34} + \chi_4] \hat{\psi}^2 \\ + 2[\alpha(71\xi - 60\theta_1) + 2\theta_1(16\theta_4 - 2\kappa - 5\chi_{34} + \chi_4) - 8\theta_4\xi + 9\kappa\xi] \hat{\psi}^4 \\ + 2[155\alpha^2 + \alpha(120\theta_4 + 76\kappa - 203\chi_{34} + 61\chi_4) \\ - 8\theta_4(3\kappa - 4\chi_{34} + 2\chi_4) + \kappa(15\kappa - 37\chi_{34} + 19\chi_4) + 4\lambda^2] \hat{\psi}^6 \end{array} \right] \div \mathcal{D} , \\
\mathcal{D} &= \left[ \begin{array}{l} 2\xi + 2[5\alpha + \theta_1(\xi - 4\theta_1) + \kappa - 2\chi_{34}] \hat{\psi}^2 \\ + [-70\alpha\theta_1 + 61\alpha\xi + 64\theta_1\theta_4 - 22\theta_1\kappa - 4\theta_1\chi_{34} - 16\theta_4\xi + 19\kappa\xi] \hat{\psi}^4 \\ + [105\alpha^2 + 2\alpha(120\theta_4 + 18\kappa - 61\chi_{34}) - 128\theta_4^2 + 80\theta_4\kappa + 32\theta_4\chi_{34} + \kappa^2 - 38\kappa\chi_{34}] \hat{\psi}^6 \end{array} \right] ,
\end{aligned}$$

de modo que ambas expresiones pueden sintetizarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
c_{s,h_{\pm}}^2 + c_{s,\gamma_{\pm}}^2 &= (\mathcal{S} / \mathcal{D}) , \quad c_{s,h_{\pm}}^2 \times c_{s,\gamma_{\pm}}^2 = (\mathcal{P} / \mathcal{D}) , \quad (106) \\
\mathcal{S} &= \sum_{i=0}^3 s_{2i} \hat{\psi}^{2i} , \quad \mathcal{P} = \sum_{i=0}^3 p_{2i} \hat{\psi}^{2i} , \quad \mathcal{D} = \sum_{i=0}^3 D_{2i} \hat{\psi}^{2i} ,
\end{aligned}$$

y en el caso particular de  $\{\vec{\alpha} = \vec{0}, \xi = 1\}$ , se puede verificar que  $c_{s,h_{\pm}}^2 = 1$  (es igual a la rapidez de las ondas gravitacionales en la teoría de Einstein) y  $c_{s,\gamma_{\pm}}^2 = 1$  (es igual a la rapidez de las partículas sin masa en la teoría de Proca sin generalizar), tal y como debe ser<sup>50</sup>.

---

<sup>50</sup> En este trabajo no se consideró la adición del término canónico de masa  $\frac{1}{2}m^2 A_{\mu}^{\alpha} A_{\alpha}^{\mu}$  ya que dicho término aporta un parámetro libre adicional a la teoría y es imposible acotarlo analizando simplemente el régimen de subhorizonte; sus aportes a nivel perturbativo entran completamente en la matriz MI - ec.(49) - que es relevante solo en el límite de super-horizonte. Dicho esto, al tomar  $\{\vec{\alpha} = \vec{0}, \xi = 1\}$  y  $k \gg aH$ , se debe verificar que la teoría tienda a la de Proca sin masa (donde los modos  $\gamma_{\pm}$  se propagan con  $c_{s,\gamma_{\pm}}^2 = 1$ ).

Para que las velocidades de propagación sean positivas definidas ( $\forall \psi \in \mathbb{R}$ ), se requiere que los polinomios en el numerador y denominador de ambas expresiones sean del mismo signo, esto implica  $\text{Sgn}[s_0] = \text{Sgn}[p_0] = \text{Sgn}[D_0]$ <sup>51</sup>, y como dicho signo es dado por  $\text{Sgn}[\xi] = \text{Sgn}[1] = 1$ , implica que cada polinomio debe ser positivo por aparte. Nuevamente, estas condiciones - similares a (105) - dan origen a un conjunto de restricciones demasiado amplio para ser mostrado, pero a diferencia del caso anterior, no se presenta un caso particular que sea lo suficientemente simple y amplio como para destacarlo aquí.

### 3 Criterio de subluminalidad:

Las condiciones  $[c_{s,h\pm}^2 \leq 1 \wedge c_{s,\gamma\pm}^2 \leq 1]$  a veces son difíciles de aplicar a las velocidades de propagación provenientes de la ecuación (106), no obstante, se puede demostrar que la siguiente condición es necesaria (mas no suficiente) para determinar si existe una ventana de parámetros viable para que la teoría esté libre de velocidades superlumínicas:

$$[0 < c_{s,h\pm}^2 \leq 1 \wedge 0 < c_{s,\gamma\pm}^2 \leq 1] \Rightarrow (0 < \mathcal{S} - \mathcal{P} \leq \mathcal{D}) \wedge (\mathcal{D} \neq 0) .$$

**Demostración:** En general, dados  $A, B \in (0, 1]$ , se da que  $A + B \in (0, 2] \wedge AB \in (0, 1] \Rightarrow A + B - AB \in (0, 1]$ . Tomando el caso particular de  $\{A = c_{s,h\pm}^2, B = c_{s,\gamma\pm}^2\}$  es fácil ver que  $A + B - AB = \frac{\mathcal{S} - \mathcal{P}}{\mathcal{D}} \in (0, 1] \Leftrightarrow (0 < \mathcal{S} - \mathcal{P} \leq \mathcal{D}) \wedge (\mathcal{D} \neq 0)$ .<sup>52</sup>

**Observaciones:** La anterior condición no es un requisito exclusivo de subluminalidad; mas

---

<sup>51</sup> Ya que se buscan condiciones válidas para todo  $\psi$  con  $\xi = 1$  (término canónico de Yang-Mills), basta con evaluar  $\hat{\psi} = 0$  para ver que el signo del polinomio es dado por el signo de su término independiente.

<sup>52</sup> Dado  $A + B - AB \in (0, 1]$ , no es posible concluir que  $A, B \in (0, 1]$ ; por este motivo, se dice que la condición  $(0 < \mathcal{S} - \mathcal{P} \leq \mathcal{D}) \wedge (\mathcal{D} \neq 0)$  es “necesaria, mas no suficiente”.

bien, puede demostrarse que es una condición necesaria para garantizar los criterios de velocidad de propagación real ( $0 < \mathcal{S} - \mathcal{P}$ ), subluminalidad ( $\mathcal{S} - \mathcal{P} \leq \mathcal{D}$ ) y ondas gravitacionales ( $\mathcal{S} - \mathcal{P} = \mathcal{D}$ ). En la medida de lo posible, es preferible emplear las condiciones suficientes (104), (105) y  $[c_{s,h\pm}^2 \leq 1 \wedge c_{s,\gamma\pm}^2 \leq 1]$  para abordar los criterios de estabilidad asociados a  $c_{s,i}^2$  pero, si esto es demasiado difícil debido a la complejidad de las expresiones, es válido hacer uso de estas expresiones de apoyo en términos de  $\{\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{D}\}$  como medida de apoyo.

Aplicando la condición necesaria de subluminalidad  $(\mathcal{S} - \mathcal{P} \leq \mathcal{D}) \wedge (\mathcal{D} \neq 0)$  en general:

$$\begin{aligned}
& [c_{s,h\pm}^2 \leq 1 \wedge c_{s,\gamma\pm}^2 \leq 1] \forall \hat{\psi} \wedge [\alpha \neq 0, \xi = 1] \rightarrow \\
& ((C_3 < 0 \wedge Q_\kappa \leq [20C_3 - C_3^2 + 4Q_\lambda^2] \div 12C_3) \vee (C_3 = 0) \vee (C_3 > 0 \wedge Q_\kappa \geq [20C_3 - C_3^2 + 4Q_\lambda^2] \div 12C_3)) \\
& \wedge (P_-[Q_\kappa, Q_\lambda, C_3] \leq Q_4 \leq P_+[Q_\kappa, Q_\lambda, C_3]) \\
& P_\pm[Q_\kappa, Q_\lambda, C_3] = \frac{1}{8} [(4Q_\kappa - C_3) \pm \{12C_3 (Q_\kappa - [20C_3 - C_3^2 + 4Q_\lambda^2] \div 12C_3)\}^{1/2}] .
\end{aligned}$$

## Apéndice E.7. Criterio de Ondas gravitacionales

Considerando la reciente restricción generada por la observación del evento GW170817 sobre la velocidad de propagación de las ondas gravitacionales [57], es necesario incorporar la restricción  $[c_{s,h\pm}^2 \simeq 1]$  en épocas recientes (dominadas por la energía oscura, momento en el cual se da la observación de GW170817); dicho esto, en virtud de (106), exigir  $[c_{s,h\pm} = 1]$ , implica  $(\mathcal{S}/\mathcal{D}) = 1 + (\mathcal{P}/\mathcal{D})$  y esto es:

$$(c_{s,h\pm} = 1) \Rightarrow (\mathcal{S} - \mathcal{P} = \mathcal{D}) \wedge (\mathcal{D} \neq 0) .$$

Con un poco de álgebra, es fácil ver que la implicación lógica solo se da en esta dirección<sup>53</sup> y

<sup>53</sup> La expresión anterior equivale a  $c_{s,h\pm}^2 + c_{s,\gamma\pm}^2 = 1 + c_{s,h\pm}^2 c_{s,\gamma\pm}^2$ , con solución  $(c_{s,i}^2 \in \mathbb{R}) \wedge (c_{s,h\pm}^2 \vee$

las condiciones de la derecha solo implican que al menos una de las velocidades de propagación es igual a 1 (sin especificar cuál); no obstante, como ya se ha explicado previamente, es útil tener expresiones de apoyo (fáciles de aplicar) como ésta<sup>54</sup>.

### Apéndice E.8. Rangos de $\hat{\psi}$ y ventana de parámetros útiles

Al momento de pensar en la influencia de  $\hat{\psi}$  sobre la ventana de parámetros saludable vale la pena tener en cuenta las siguientes observaciones: (i) solo hace falta garantizar el cumplimiento de las condiciones de estabilidad en los rangos de valores barridos por  $\hat{\psi}$  durante su evolución, (ii) la dependencia de  $\hat{\psi}(t) = \sqrt{2}Y$  en el tiempo para valores arbitrarios de los parámetros de la teoría solo puede conocerse si se resuelven analíticamente las ecuaciones (complicadas) del sistema autónomo (96) o si se emplea la expresión  $Z^4 \geq 0$  (complicada) para deducir cotas sobre  $\hat{\psi}$ , (iii)  $\psi$  no necesariamente toma valores en toda la recta real; e.g: si el sistema se mantiene en una asíntota durante toda su evolución,  $X$  evoluciona exponencialmente implicando que  $\hat{\psi} = \sqrt{2}Y \rightarrow \sqrt{2}\beta X$  solo tiende a tomar valores en el intervalo  $(-\infty, 0)$  o  $(0, \infty)$  - ver Apéndice .5), (iv) Dado que los criterios de estabilidad siempre involucran polinomios pares en  $\hat{\psi}$ , por simetría, la ventana de parámetros que garantice la estabilidad de la teoría para  $\hat{\psi} \in (-\infty, 0]$  será la misma que garantiza la estabilidad para  $\hat{\psi} \in [0, \infty)$  y, por extensión, cualquier subintervalo de la recta real que incluya a 0 y  $\pm\infty$ .

Habiendo dicho esto, la conclusión es que es apenas justo exigir que los criterios de estabilidad se cumplan para todo  $\hat{\psi} \in (-\infty, \infty)$  ya que esto es apenas equivalente a garantizar que el rango de valores que toma  $\psi$  a lo largo de las asíntotas de interés esté exento de patologías.

---

$c_{s,\gamma_{\pm}}^2 = 1$ .

<sup>54</sup> Las expresiones para  $c_{s,i}^2$  son de la forma  $c_{s,i}^2 = r_1 \pm \sqrt{r_2}$  en donde cada  $r_i$  es un cociente de polinomios de orden 6 en  $\hat{\psi}$ ; en cambio,  $c_{s,h_{\pm}}^2 \times c_{s,\gamma_{\pm}}^2$ ,  $c_{s,h_{\pm}}^2 + c_{s,\gamma_{\pm}}^2$  son de la forma (más sencilla) expuesta en (106).

## Apéndice E.9. Propiedades especiales de cada Lagrangiano

### ■ Parámetros de estado:

De forma general, los Lagrangianos de curvatura  $\mathcal{L}_1^{\text{Curv}}$ ,  $\mathcal{L}_4^{\text{Curv}}$  y Lagrangianos del sector  $\mathcal{L}_4$  (excepto  $\mathcal{L}_4^3$  que es nulo en el universo de FLRW) exhiben un parámetro de estado variable dependiente de  $\{\psi, \dot{\psi}, \vec{\alpha}\}$  y los demás, que son similares al término de Yang-Mills  $\{\mathcal{L}_{\text{YM}}, \mathcal{L}_{A^4}^{(1)}, \mathcal{L}_{A^4}^{(2)}, \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(1)}, \mathcal{L}_{G^2 A^2}^{(2)}\}$ , dan origen a parámetros de estado  $w_i = \pm 1/3$  asociados a “redes frustradas de cuerdas cósmicas”<sup>55</sup> y fluidos de materia caliente (radiación).

Especie	Densidad de energía normalizada	Presion normalizada	Parámetro de estado
$\xi$	$\left( X^2 + 2 X Y + Y^2 + \frac{2 q^2 z^4}{F^4} \right) \xi$	$\frac{1}{3} \left( X^2 + 2 X Y + Y^2 + \frac{2 q^2 z^4}{F^4} \right) \xi$	$\frac{1}{3}$
$\alpha$	$(10 X^2 Y^2 - 188 X Y^3 - 32 Y^4) \alpha$	$\frac{1}{3} \alpha (614 X^2 Y^2 + 104 \sqrt{2} P Y^3 + 316 X Y^3 - 340 Y^4 + 124 Y^4 \epsilon)$	$\frac{307 X^2 - 52 \sqrt{2} P Y - 158 X Y - 170 Y^2 - 62 Y^2 \epsilon}{3 (5 X^2 - 94 X Y - 16 Y^2)}$
$\kappa$	$(2 X^2 Y^2 - 20 X Y^3 - 12 Y^4) \kappa$	$\frac{1}{3} (70 X^2 Y^2 + 12 \sqrt{2} P Y^3 + 108 X Y^3 + 24 Y^4 - 4 Y^4 \epsilon) \kappa$	$\frac{35 X^2 - 6 \sqrt{2} P Y - 54 X Y - 12 Y^2 - 2 Y^2 \epsilon}{3 (X^2 - 10 X Y - 6 Y^2)}$
$\Theta_4$	$(-64 X Y^3 - 32 Y^4) \Theta_4$	$\frac{1}{3} (192 X^2 Y^2 + 32 \sqrt{2} P Y^3 + 256 X Y^3 + 32 Y^4) \Theta_4$	$-\frac{6 X^2 - \sqrt{2} P Y - 8 X Y - Y^2}{3 Y (2 X - Y)}$
$\chi_1$	$-\frac{12 z^4 \chi_1}{F^4}$	$-\frac{4 z^4 \chi_1}{F^4}$	$\frac{1}{3}$
$\chi_2$	$-\frac{4 z^4 \chi_2}{F^4}$	$-\frac{4 z^4 \chi_2}{3 F^4}$	$\frac{1}{3}$
$\chi_3$	$(-4 X^2 Y^2 - 8 X Y^3 - 4 Y^4) \chi_3$	$\frac{1}{3} (4 X^2 Y^2 + 8 X Y^3 + 4 Y^4) \chi_3$	$-\frac{1}{3}$
$\chi_4$	$(-4 X^2 Y^2 - 8 X Y^3 - 4 Y^4) \chi_4$	$\frac{1}{3} (4 X^2 Y^2 + 8 X Y^3 + 4 Y^4) \chi_4$	$-\frac{1}{3}$
$\Theta_1$	$(8 X Y + 6 Y^2) \Theta_1$	$\frac{1}{3} (-8 X^2 - 4 \sqrt{2} P Y - 24 X Y - 6 Y^2 + 4 Y^2 \epsilon) \Theta_1$	$-\frac{4 X^2 + 2 \sqrt{2} P Y - 12 X Y - 3 Y^2 - 2 Y^2 \epsilon}{3 Y (4 X + 3 Y)}$
$\Omega_r$	$\Omega_r$	$\frac{\Omega_r}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\Omega_m$	$\Omega_m$	$0$	$0$

Tabla 8. Parámetro de acople, densidad de energía normalizada  $\Omega_i = \rho_i/\rho_{\text{total}}$ , presión normalizada  $p_i/\rho_{\text{total}}$ , y parámetro de estado  $w_i = p_i/\rho_i$  de cada Lagrangiano considerado.

<sup>55</sup> Estos fluidos tienden a dominar en épocas tardías y hacen parte de un conjunto de “defectos topológicos” [109] que puede resultar bastante útil para modelar materia oscura fría [110, 111] aunque, debido a restricciones observacionales, requieren de un mecanismo especial que los apantalle adecuadamente para garantizar que el parámetro de estado global en el universo sea  $w \approx -1$  en el presente [112, 113]

■ **Dinámica a orden cero:**

- El único término que no influye en la dinámica del fondo es el término modulado por  $\lambda$ .
- Los aportes de  $\{\chi_1, \chi_2\}$  se pueden combinar con los de  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  a través del parámetro  $F$ .<sup>56</sup>
- Exceptuando  $\lambda$ , todos los parámetros del Cuadro 8 alteran la frontera de la zona  $Z^4 \geq 0$  (condición de consistencia matemática) y modifican la topología del diagrama de fase.
- Los Lagrangianos modulados por  $\{\alpha, \kappa, \theta_4, \chi_3, \chi_4\}$  alteran las pendientes de las asíntotas definidas por  $\{\beta, \gamma\}$  y esto modifica la topología del diagrama de fase.

■ **Dinámica a orden uno:**

- La matriz  $\mathbb{K}$  recibe aportes de  $\theta_1$  y aquéllos parámetros que modifican las pendientes de las asíntotas, i.e:  $\{\alpha, \kappa, \theta_4, \chi_3, \chi_4, \theta_1\}$ .
- La matriz  $\mathbb{L}$  recibe aportes de los mismos parámetros que  $\mathbb{K}$ , exceptuando  $\theta_4$ .
- La matriz  $\mathbb{C}$  solo recibe aportes de  $\lambda$ .
- Las restricciones de fantasmas - Autovalores $[\mathbb{K}] > 0$  - reciben los mismos aportes que la matriz  $\mathbb{K}$  y, por ende, son independientes de  $\{\lambda, \chi_1, \chi_2\}$ .
- Las restricciones asociadas a los  $c_{s,i}^2$  (inestabilidades Laplacianas, subluminalidad y GW170817) ( $0 < c_{s,i}^2 \leq 1$ ) reciben los mismos aportes de  $\{\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{C}\}$  así que son independientes de  $\{\chi_1, \chi_2\}$ .

■ **Síntesis:** en lo referente a los criterios en las asíntotas, la validez de la desigualdad  $Z^4 \geq 0$ , la libertad de fantasmas y demás restricciones sobre  $c_{s,i}^2$ , se tiene lo siguiente:

---

<sup>56</sup> Este parámetro  $F$  define un parámetro de acople de gauge efectivo  $q_{\text{eff}} = q/F^2$ .

- $\{\chi_1, \chi_2\}$  son especiales porque modifican exclusivamente la región  $Z^4 \geq 0$ .
- $\lambda$  es especial porque modifica exclusivamente las restricciones sobre  $c_{s,i}^2$ .
- $\theta_1$  es especial porque modifica solamente la región  $Z^4 \geq 0$  y las restricciones sobre  $c_{s,i}^2$ .
- Los demás parámetros  $\{\alpha, \kappa, \theta_4, \chi_3, \chi_4\}$  modifican las cuatro cosas al tiempo.

■ **Precaución:** Durante inflación (con  $\Omega_m = \Omega_r = 0$ ) se puede verificar que

$$\epsilon \Big|_{Y=0} = 2 + (8 - 12X^2) \theta_1 ,$$

así que las soluciones en la región central del diagrama de fase (con  $Y \rightarrow 0$ ) pierden la capacidad de estabilizarse en un estado final de  $\epsilon = 2$  siempre que  $\theta_1 \neq 0$ , y como consecuencia, es imposible alcanzar un parámetro de estado global  $w = (2\epsilon - 3)/3$  igual a  $1/3$  - necesario para reproducir los inicios de la historia térmica del universo. De esto se concluyen dos cosas: (i) En estos modelos, inflación requiere de  $\theta_1 = 0$  y (ii) Los potenciales beneficios de  $\theta_1$  solo se dan en modelos con aplicaciones en energía oscura (ya que aquí se busca estabilizar el sistema en estados con  $\epsilon = 0$  en las asíntotas  $Y = \beta X$  independiente del valor de  $\epsilon \Big|_{Y=0}$ ).

## Apéndice F. Códigos computacionales

Todos los códigos empleados en esta investigación pueden encontrarse en el repositorio virtual <https://github.com/JuanPhys97/Generalized-SU2-Proca>, sus nombres y funciones son:

### En *Mathematica*:

- *EOM*: Fue diseñado para realizar el cálculo de ecuaciones de Euler-Lagrange, evaluación en componentes, traducción a variables adimensionales y evaluación de criterios de estabilidad en el límite de sub-horizonte del Lagrangiano más general considerado. Otras características de este código incluyen la posibilidad de considerar escenarios más generales en universos de Bianchi tipo I con triadas ortogonales de diferente norma, realizar comparaciones con los resultados a mano, y verificar automáticamente la isotropía del tensor  $T_{\mu\nu}$ .
- *AllContractions*: Fue diseñado para producir exhaustivamente todos los Lagrangianos de la forma  $\{X^2, XY, XZ, Y^2, YZ, Z^2\}$  según las convenciones de la referencia [104], pertenecientes al Lagrangiano  $\mathcal{L}_2$  compuesto por funciones arbitrarias de  $A_\mu^a$  y  $G_{\mu\nu}^a$ .
- *LDynamics*: Fue diseñado para desarrollar un análisis exhaustivo de la dinámica del sistema autónomo de la teoría calculando y clasificando puntos críticos, analizando la viabilidad de comportamientos asintóticos, produciendo diagramas de fase y estudiando las restricciones de estabilidad-consistencia de los modos tensoriales. Es importante recalcar que este código asume que las componentes de materia fría y caliente son independientes, i.e: las partículas relativistas no decaen en partículas no relativistas.

**En *Maple*:**

- *MapleEOM*: Constituye una alternativa al código '*EOM*' para realizar la evaluación en componentes y traducción a variables adimensionales de las ecuaciones de evolución. Este código carece de muchas de las funcionalidades que '*EOM*' sí ofrece; no obstante, su tiempo de cómputo es mucho menor y por ello resulta muy útil para comprobar las ecuaciones de evolución generadas por '*EOM*'; por otro lado, este código también es útil para verificar que la ecuación de conservación  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  es automáticamente satisfecha cuando se cumplen las ecuaciones de evolución para  $g_{\mu\nu}$  y  $A_\mu^a$  y, por ende, no constituye una ecuación de ligadura independiente.