

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE
SÉPTIMO GRADO: UNA MIRADA DESDE EL ENFOQUE DE PLANTEAMIENTO
Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

LEONOR PINTO CRISTANCHO



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRIA EN PEDAGOGIA
BUCARAMANGA
2018**

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE
SÉPTIMO GRADO: UNA MIRADA DESDE EL ENFOQUE DE PLANTEAMIENTO
Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

LEONOR PINTO CRISTANCHO

**Trabajo de Grado para Optar al Título de
Magíster en Pedagogía**

Directora

**BELKI YOLIMA TORRES RUEDA
Magister en Pedagogía**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRIA EN PEDAGOGIA
BUCARAMANGA
2018**

*Dedico este proyecto a mi esposo
y a mis hijos, quienes son mi
fuente de inspiración, felicidad
y razón de vivir.*

AGRADECIMIENTOS

A Dios por haberme dado la vida, la fortaleza y la salud necesaria para poder llegar a alcanzar esta meta.

A mis padres, en especial a mi madre, porque siempre han estado a mi lado brindándome su amor.

A mi directora de tesis Mg. Belki Yolima Torres por su orientación, paciencia, sabios consejos y asesoría hasta la finalización de este proyecto.

A la Institución Educativa Pitigüao y sus directivas por haberme permitido desarrollar el proyecto de investigación.

A los estudiantes del grado séptimo por su colaboración.

A las profesoras Rosa Margarita y Johana por su amistad, sus consejos y apoyo incondicional. También, a cada uno de los profesores de la Maestría por sus enseñanzas, las cuales me han servido para mejorar mis prácticas pedagógicas. Finalmente, a mis compañeros de la Maestría por su amistad y colaboración.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	17
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	20
1.1 ANÁLISIS Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	20
1.2 JUSTIFICACIÓN	33
1.3 OBJETIVOS	34
1.3.1 OBJETIVO GENERAL.	34
1.3.1.1 Objetivos Específicos	35
2 MARCO TEÓRICO	36
2.1 ANTECEDENTES	36
2.1.1 ANTECEDENTES A NIVEL INTERNACIONAL.	36
2.1.2 ANTECEDENTES A NIVEL NACIONAL.	38
2.1.3 ANTECEDENTES A NIVEL LOCAL.	40
2.2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	42
2.2.1 LA NOCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS Y SUS FUENTES DE DIFICULTAD.	42
2.2.1 ENFOQUE DE RESOLUCIÓN Y PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS.	45
2.2.1.1 Significado de problema matemático	48
2.2.1.2 Dinámica de trabajo al interior del aula.	50
2.2.1.3 Un modelo de Análisis en la Resolución de Problemas.	52
2.2.2 LINEAMIENTOS CURRICULARES Y ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS	53
2.2.2.1 El Pensamiento Numérico y los Sistemas Numéricos	55
2.2.2.2 Competencia comunicativa.	55
2.2.3 MARCO LEGAL	56
3 MÉTODO	60
3.1 POBLACIÓN	61
3.2 MUESTRA	61

3.3 PROCESO METODOLÓGICO	61
3.3.1 DIAGNÓSTICO Y PROBLEMATIZACIÓN.	62
3.3.2 INTERVENCIÓN EN EL AULA.	63
3.3.3 REFLEXIÓN.	64
3.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN	64
3.5 CRITERIOS ÉTICOS	67
<u>4 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS</u>	<u>68</u>
4.1 ANÁLISIS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA	69
4.2 ANÁLISIS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA	93
4.2.1 ANÁLISIS PRELIMINAR DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA.	94
4.2.2 ANÁLISIS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA IMPLEMENTADA.	109
4.3 ANÁLISIS DE LA PRUEBA FINAL	140
<u>5 CONCLUSIONES</u>	<u>176</u>
<u>REFERENCIAS</u>	<u>180</u>

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Índice Sintético de Calidad Educativa de Básica Secundaria 2015	29
Figura 2. Índice Sintético de Calidad Educativa de Básica Secundaria 2016	29
Figura 3. Resultados de progreso de calidad educativa de Básica secundaria Pruebas Saber 2016	30
Figura 4. Resultados de desempeño de calidad educativa de Básica secundaria Pruebas Saber 2016	30
Figura 5. Resultados de Eficiencia de calidad educativa de Básica secundaria Pruebas Saber 2016	31
Figura 6. Ambiente Escolar de calidad educativa de Básica secundaria Pruebas Saber 2016.....	32
Figura 7. Estructura metodológica de la investigación	62
Figura 8. Procesos de solución de los estudiantes E-04 y E-12 en el ítem 9.....	78
Figura 9. Procesos de solución de los estudiantes E-04 y E-07 en el ítem 10.....	80
Figura 10. Procesos de solución de los estudiantes E-05 y E-09 en el ítem 11	81
Figura 11. Proceso de solución del estudiante E-13 en el ítem 13.....	83
Figura 12. Exploración visual y empírica en la actividad A.....	111
Figura 13. Búsqueda de múltiples métodos de solución en la actividad A, parte 1	112
Figura 14. Búsqueda de múltiples métodos de solución en la actividad A, parte 2	113
Figura 15. Momento de reflexión final en la actividad A	114
Figura 16. Exploración visual y empírica en la actividad B.....	116
Figura 17. Búsqueda de múltiples métodos de solución en la actividad B.....	117
Figura 18. Momento final de reflexión en la actividad B	118
Figura 19. Adición de números enteros usando el modelo de la recta numérica en “Geogebra”, primera fase	120
Figura 20. Adición de números enteros usando el modelo de la recta numérica en “Geogebra”, segunda fase.....	121
Figura 21. Búsqueda de múltiples métodos de solución en la actividad C.....	122
Figura 22. Exploración visual y empírica en la actividad D	123
Figura 23. Búsqueda de múltiples soluciones en la actividad D.....	124

Figura 24. Momento final de reflexión en la actividad D.....	125
Figura 25. Exploración visual y empírica en la actividad E.....	127
Figura 26. Proceso de solución E-09, ítem c.....	129
Figura 27. Proceso de solución E-15, ítem c.....	129
Figura 28. Conclusiones del grupo 3, actividad E	130
Figura 29. Sustracción de números enteros usando el modelo de la recta numérica en “Geogebra”	131
Figura 30. Búsqueda de múltiples métodos de solución en la actividad F	132
Figura 31. Momento final de reflexión en la actividad F	133
Figura 32. Exploración visual y empírica en la actividad G	134
Figura 33. Proceso de solución E-02, Actividad G, ítem 1	135
Figura 34. Proceso de solución E-09, Actividad G, ítem 1	136
Figura 35. Proceso de solución E-15, Actividad G, ítem 1	136
Figura 36. Exploración visual y empírica en la actividad H	137
Figura 37. Búsqueda de múltiples métodos de solución en la actividad H.....	138
Figura 38. Momento final de reflexión en la actividad H.....	139
Figura 39. Proceso de solución E-01, ítem 1.....	142
Figura 40. Proceso de solución E-12, ítem 1.....	142
Figura 41. Proceso de solución E-04, ítem 2.....	144
Figura 42. Proceso de solución E-13, ítem 2.....	144
Figura 43. Proceso de solución E-09, ítem 2.....	145
Figura 44. Proceso de solución E-14, ítem 3.....	146
Figura 45. Proceso de solución E-09, ítem 3.....	146
Figura 46. Proceso de solución E-07, ítem 4.....	148
Figura 47. Proceso de solución E-01, ítem 4.....	148
Figura 48. Proceso de solución E-10, ítem 4.....	149
Figura 49. Proceso de solución E-10, ítem 5.....	150
Figura 50. Proceso de solución E-08, ítem 5.....	150
Figura 51. Proceso de solución E-03, ítem 5.....	151
Figura 52. Proceso de solución E-04, ítem 6.....	152
Figura 53. Proceso de solución E-06, ítem 6.....	152
Figura 54. Proceso de solución E-08, ítem 7.....	154

Figura 55. Proceso de solución E-02, ítem 7.....	154
Figura 56. Proceso de solución E-11, ítem 7.....	155
Figura 57. Proceso de solución E-09, ítem 8.....	156
Figura 58. Proceso de solución E-02, ítem 8.....	156
Figura 59. Proceso de solución E-13, ítem 9.a.....	158
Figura 60. Proceso de solución E-10, ítem 9.a.....	158
Figura 61. Proceso de solución E-14, ítem 9.b.....	158
Figura 62. Proceso de solución E-08, ítem 9.b.....	158
Figura 63. Proceso de solución E-13, ítem 9.c.....	159
Figura 64. Proceso de solución E-02, ítem 9.c.....	159
Figura 65. Proceso de solución E-15, ítem 10.....	160
Figura 66. Proceso de solución E-13, ítem 10.....	160

TABLAS

Tabla 1. Relación de competencias y componentes evaluados en matemáticas en quinto grado (2013- 2015).....	27
Tabla 2. Relación de competencias y componentes evaluados en matemáticas en noveno grado (2013-2015).....	28
Tabla 3. Instrumento de evaluación de carácter cuantitativo, tomado de Santos Trigo	68
Tabla 4. Indicadores asociados a la solución del problema, tomado de Santos Trigo	69
Tabla 5. Evaluación cuantitativa de los estudiantes de acuerdo al trabajo mostrado en cada ítem de la prueba diagnóstica.....	91
Tabla 6. Dificultades identificadas en la prueba diagnóstica	91
Tabla 7. Indicadores asociados al proceso de resolución de problemas en la prueba diagnóstica	92
Tabla 8. Planeación general de la SD	96
Tabla 9. Planeación de la actividad A “El laberinto”	98
Tabla 10. Planeación de la actividad B “Las 7 maravillas del mundo”	100
Tabla 11. Planeación de la actividad C “Representando Situaciones Aditivas en la Recta Numérica”.	101
Tabla 12. Planeación de la actividad D “En Busca del Tesoro”	103
Tabla 13. Planeación de la actividad E “La Cafetería”	104
Tabla 14. Planeación de la actividad F “Sustracción de Números Enteros”	106
Tabla 15. Planeación de la actividad G “Campeonato Interligas”	107
Tabla 16. Planeación de la actividad H “El Clima”.....	108
Tabla 17. Evaluación cuantitativa de los estudiantes de acuerdo al trabajo mostrado en cada ítem de la prueba final	161
Tabla 18. Dificultades identificadas en la prueba final.....	161
Tabla 19. Indicadores asociados al proceso de resolución de problemas en la prueba final.....	174

LISTA DE TRANSCRIPCIONES

Transcripción 1. Actividad A “El laberinto”, primera fase.....	111
Transcripción 2. Actividad A “El laberinto”, segunda fase.....	113
Transcripción 3. Actividad A “El laberinto”, tercera fase.....	114
Transcripción 4. Actividad B “Las 7 maravillas del mundo”, segunda fase.....	117
Transcripción 5. Actividad B “Las 7 maravillas del mundo”, tercera fase.....	118
Transcripción 6. “Representando Situaciones Aditivas en la Recta Numérica”, primera fase.....	120
Transcripción 7. “Representando Situaciones Aditivas en la Recta Numérica”, segunda fase.....	121
Transcripción 8. Actividad D “En busca del tesoro”, primera fase.....	124
Transcripción 9. Actividad D “En busca del tesoro”, segunda fase.....	125
Transcripción 10. Actividad D “En busca del tesoro”, tercera fase.....	126
Transcripción 11. Actividad E “La Cafetería”, primera fase.....	128
Transcripción 12. Actividad E “La Cafetería”, primera fase.....	129
Transcripción 13. Actividad F “Sustracción de números enteros en la recta numérica”, primera fase.....	131
Transcripción 14. Actividad F “Sustracción de números enteros en la recta numérica”, segunda fase.....	132
Transcripción 15. Actividad G “Campeonato Interligas”, primera fase.....	135
Transcripción 16. Actividad H “El Clima”, segunda fase.....	138
Transcripción 17. Actividad H “El Clima”, tercera fase.....	139

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1. Solicitud de Intervención de Aula a la Institución Educativa.....	187
Anexo 2. Consentimiento informado para los padres de familia de los estudiantes participantes de la investigación.....	188
Anexo 3. Autorización de la institución educativa para los estudiantes participantes en la investigación.....	190
Anexo 4. Diario de campo	191
Anexo 5. Prueba diagnóstica.....	192
Anexo 6. Actividad A “El Laberinto”.....	196
Anexo 7. Actividad B “Las 7 Maravillas Del Mundo”.....	198
Anexo 8. Actividad c “Representando situaciones aditivas en la recta numérica”.....	201
Anexo 9. Actividad D “En Busca del Tesoro”.....	203
Anexo 10. Actividad E “La Cafetería”	206
Anexo 11. Actividad F “Sustracción de Números Enteros”.....	208
Anexo 12. Actividad G “Campeonato Interligas”.....	214
Anexo 13. Actividad H “El Clima”	218
Anexo 14. Prueba Final.....	220
Anexo 15. Evaluación del proceso de solución de los problemas de la Prueba Diagnóstica para cada estudiante	223
Anexo 16. Evaluación del proceso de solución de los problemas de la Prueba Final para cada estudiante.....	231

RESUMEN

TÍTULO: DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO: UNA MIRADA DESDE EL ENFOQUE DE PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS*

AUTOR: Leonor Pinto Cristancho**

PALABRAS CLAVE: *números enteros, adición, sustracción, resolución de problemas.*

DESCRIPCIÓN:

Esta investigación toma como fundamento teórico el *Enfoque de Resolución y Planteamiento de Problemas* para buscar elementos pedagógicos y didácticos que contribuyan al desarrollo del pensamiento numérico, en el paso del concepto de número natural a número entero. Específicamente, en esta investigación se plantea una propuesta metodológica para la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros en diferentes contextos, mediante una secuencia didáctica (SD) que se basa en los principios teóricos del enfoque de investigación y en los elementos conceptuales de Santos y Moreno (2013) para orientar los momentos del desarrollo de cada actividad. Para llevar a cabo el análisis de datos se tomaron las categorías propuestas por Schoenfeld (1992): *dominio del conocimiento o recursos, estrategias cognitivas o métodos heurísticos, estrategias metacognitivas y sistemas de creencias*, y algunos instrumentos de evaluación de Santos (2013) con el propósito de analizar el comportamiento de los estudiantes y caracterizar los elementos que influyen en el proceso de solución de problemas.

Los principales resultados de la investigación muestran que la mayoría de los estudiantes logró fortalecer la competencia de comunicación y representación en la comprensión del objeto matemático de investigación, a través de una dinámica de discusión en pequeños grupos, que permitió a los estudiantes trabajar colaborativamente, asumir un rol más activo en la construcción de las ideas matemáticas, explorar diferentes caminos de solución y defender con argumentos sus ideas.

* Trabajo de grado.

** Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Directora: Mg. Belki Yolima Torres Rueda. Magíster en Pedagogía

ABSTRACT

TITLE: Numerical thinking development in students of 7th grade: a sight from the statement and resolution of problems approach *

AUTHOR: Leonor Pinto Cristancho**

KEY WORDS: Integer numbers, addition, subtraction, problem resolution.

DESCRIPTION:

This research project has as a foundation theory the resolution and statement of problems approach in order to find pedagogical and didactic elements that will contribute to the development of the numerical thinking, in the transit from the concept of natural numbers to integer numbers. Specifically, this research states a methodological proposal for the process of teaching addition and subtraction of integer numbers in different contexts through the implementation of a didactic sequence (DS) which is based in the theory principles of the research approach as well as the conceptual elements from Santos & Moreno (2013) to guide the moments of the development of each activity. To carry out the analysis of data, the categories proposed by Schoenfeld (1992) were taken: *knowledge or resources domain, cognitive strategies or heuristic methods, metacognitive strategies and systems of believes*, and some assessment instruments from Santos (2013) with the purpose to analyze the behavior of the students and characterize the elements that have influence in the resolution of problems process.

The main results of the research show that most of the students achieved the strengthening of the communicative competence and the representation in the understanding of the mathematical object of investigation, through a dynamic of discussion in small groups, allowing the students to work collaboratively, assuming a more active role in the construction of mathematical ideas, exploring different ways of solution and defending their ideas using arguments.

* Graduation paper

** Faculty of Human Sciences. School of Education. Director: Mg. Belki Yolima Torres Rueda. Magister en Pedagogía

INTRODUCCIÓN

La calidad educativa es un elemento fundamental para que un país pueda conseguir esos desafíos que impone una sociedad en constante cambio, es por ello, que las políticas educativas se han enfocado en los diversos factores que se asocian con la calidad, como son: el currículo y la evaluación, los recursos y las prácticas pedagógicas, la organización de las escuelas y la cualificación docente.

Las políticas educativas a nivel nacional desde diferentes documentos, Estándares y Lineamientos Curriculares (Ministerio de Educación Nacional, 1998; 2006), señalan la importancia del desarrollo del pensamiento matemático (pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento variacional y pensamiento aleatorio) en la actividad matemática, donde se enfatiza en el fortalecimiento de competencias desde procesos generales, tales como: razonamiento y argumentación, comunicación, representación y modelación, planteamiento y resolución de problemas.

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas¹ respecto al pensamiento numérico, pensamiento en el que se centra esta propuesta de investigación, plantea para séptimo grado, población objeto de estudio, que los estudiantes justifiquen procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones, y formulen y resuelvan problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. Sin embargo, los estudiantes presentan muchas dificultades en la comprensión de los números enteros, al respecto Gallardo y Hernández señalan que “*el cero y los*

¹ MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Competencias en Leguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Primera edición. Ed. Ministerio de Educación Nacional, 2006.

*negativos se han ido transformando en un objeto de estudio, exhibiendo una serie de hechos que dificultan su comprensión cabal*².

Otro aspecto importante, propuesto por las políticas educativas nacionales es *la Solución y el Planteamiento de Problemas* como el mejor método para el fortalecimiento de competencias matemáticas, incluso afirman que el objetivo fundamental de la enseñanza matemática es la resolución de problemas.

Con este panorama se consideró realizar una investigación con estudiantes de séptimo grado, adoptando el *Enfoque de Resolución y Planteamiento de Problemas* en la que se buscaba el fortalecimiento de la competencia de comunicación y representación, a través de una secuencia didáctica que permitiera potenciar el desarrollo del pensamiento numérico. Esta investigación se realizó con un enfoque cualitativo, estuvo dirigida a un grupo de 15 estudiantes, seleccionados de una Institución Educativa de la ciudad de Mogotes.

Este documento está conformado por cinco secciones:

La primera sección "*Problema*" presenta el planteamiento del problema de investigación, con base en el análisis de los resultados obtenidos en pruebas nacionales e internacionales en los últimos años. También se presenta la justificación de este trabajo junto con los objetivos generales y específicos.

En la segunda sección "*Marco Teórico*" se expone una síntesis y análisis de algunas investigaciones relacionadas con las fuentes de dificultad en la comprensión de los números enteros o propuestas didácticas para su enseñanza. Luego, se presentan las características generales del *Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas* y un modelo de análisis desde este enfoque teórico.

² GALLARDO, A. y HERNÁNDEZ, A. Emergencia de los números enteros. 2007. Recuperado el 20 de mayo del 2013.Documento en: <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf>

En la tercera sección “*Método*” se define el diseño metodológico, el contexto, los participantes, las técnicas e instrumentos que se utilizaron y los criterios éticos asumidos en esta investigación.

En el cuarto capítulo “*Análisis e Interpretación de Resultados*” se presenta el análisis de la prueba diagnóstica, el análisis preliminar de la Secuencia Didáctica (SD), el análisis de las actividades implementadas de la SD y el análisis de la prueba final, a partir de las categorías propuestas por Schoenfeld para el análisis de los individuos en el proceso de resolución de problemas.

Finalmente, en el quinto capítulo “*Conclusiones*” se exponen los resultados más relevantes de esta investigación. Además, se presentan las referencias bibliográficas en que se basó este estudio y los anexos relacionados con la secuencia didáctica.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 ANÁLISIS Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En el ámbito académico, el proceso de aprendizaje se ve afectado por las dificultades de los estudiantes en la comprensión de los objetos matemáticos, lo cual se manifiesta en bajos desempeños en los actuales resultados las pruebas internacionales (PISA y TIMSS) y nacionales (Pruebas Saber 3°, 5° y 9°, Saber 11°) en matemáticas, las cuales se encargan de valorar la capacidad de los estudiantes para desarrollar situaciones matemáticas en diversos contextos. Particularmente, en el área de matemáticas se evalúan las competencias (razonamiento y argumentación; comunicación, representación y modelación; planteamiento y resolución de problemas) y los componentes (numérico – variacional; geométrico – métrico; aleatorio). La valoración de este tipo de resultados permite a cada una de las instituciones analizar debilidades y fortalezas de los estudiantes, para buscar estrategias pedagógicas a partir de sus necesidades, que contribuyan al mejoramiento de las competencias matemáticas de los estudiantes.

Con relación a la participación de Colombia en Pruebas Internacionales, en el área de matemáticas, nuestro país ha participado en PISA³ (*Programme for International Student Assessment - Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes*) en algunas ocasiones.

El programa internacional para la evaluación de estudiantes, consiste en aplicar una encuesta sobre lectura, matemáticas y ciencias, cada tres años a jóvenes de 15 años de edad, con el propósito de evaluar los sistemas de educación mundial valorando las habilidades y conocimientos. Este programa es una iniciativa de la

³ ICFES. Informe PISA. Documento en línea: <http://www.icfes.gov.co/investigadores-posgrado-2/evaluaciones-internacionales-inves/programa-para-la-evaluacion-internacional-de-estudiantes-pisa> [Citado 06/06/2016]

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE)⁴, que tiene como finalidad producir indicadores de calidad educativa e investigaciones sobre los factores que la afectan. También, compara resultados entre países, los cuales son útiles para monitorear los avances en educación en periodos de tiempo. Hasta la fecha, han participado en la evaluación más de 70 países.

Colombia ha participado en tres ocasiones en esta prueba, por primera vez en el año 2006, en segunda ocasión en el 2009 y la más reciente en el 2012. En la prueba realizada en el 2012 fueron evaluados aproximadamente 510.000 estudiantes de 65 países, incluidos: México, Brasil, Chile, Uruguay, Argentina, Costa Rica y Perú. La muestra en Colombia estuvo conformada por 9.073 estudiantes de instituciones educativas oficiales y privadas, urbanas y rurales. Los resultados obtenidos por Colombia son los siguientes: con relación a los puntajes promedio en cada área a evaluar, en matemáticas obtuvo un promedio de 376, en lectura 403 y en ciencias de 399. En comparación con los países latinoamericanos se situó en el penúltimo lugar, antes de Perú. El país latinoamericano con mejores resultados fue Chile con un promedio en matemáticas de 423, en lectura de 441 y en ciencias de 445, mientras que el de más bajos resultados fue Perú, con un promedio en matemáticas de 368, en lectura de 384 y en ciencias 373. El promedio OCDE en matemáticas fue de 494, en lectura de 496 y en ciencias de 501, al contrastar estos resultados con los obtenidos por nuestro país, se puede evidenciar que los puntajes de Colombia están muy por debajo del promedio OCDE en las áreas evaluadas. No obstante, la OCDE resalta que Colombia, ha mejorado su desempeño en lectura desde la primera vez que participó (en 2006) mostrando un promedio anual de mejoramiento de 3 puntos por año (de 385 puntos en 2006 a 403 puntos en 2012), lo cual atribuye al compromiso del Gobierno Nacional en cuanto al mejoramiento del acceso y calidad de la educación.

⁴ ICFES. Resumen ejecutivo de los resultados de Colombia en PISA 2012. Disponible en: <http://www.icfes.gov.co/investigacion/evaluaciones-internacionales/pisa>

A partir de los resultados expuestos anteriormente, se puede afirmar que los resultados obtenidos por los estudiantes colombianos, están muy lejos de los puntajes promedio establecidos en la prueba PISA, lo cual pone en manifiesto, particularmente en el área de matemáticas, la necesidad de fortalecer el pensamiento matemático y desarrollar las competencias asociadas al área, que permita a los estudiantes colombianos aplicar su conocimiento a situaciones de la vida real. En el análisis de pruebas nacionales Saber 2015⁵ se evidencia bajos resultados en la resolución de problemas y su dificultad en el área de matemáticas, donde no se logró superar en su totalidad los niveles de insuficiencia y obtener niveles avanzados como se muestra a continuación:

A nivel nacional los estudiantes en la Prueba Saber 3°, 5° y 9° de 2015⁶ obtuvieron los siguientes resultados: En **tercer grado**, el 19% de los estudiantes se ubicó en el nivel insuficiente, el 28% en el nivel mínimo, el 26% en el nivel satisfactorio y solo el 27% en el nivel avanzado. En **quinto grado**, el 36% de los estudiantes se ubicó en el nivel insuficiente, el 30% en el nivel mínimo, el 21% en el nivel satisfactorio y el 13% en el nivel avanzado. Por último, en **noveno grado**, se situó el 23% de los estudiantes en el nivel insuficiente, el 53% en el nivel mínimo, el 20% en el nivel satisfactorio y el 4% en el nivel avanzado.

El informe también muestra que a nivel departamental hay grandes diferencias entre los resultados alcanzados por instituciones no oficiales en comparación con las oficiales. En **tercer grado**, el 14% de los estudiantes de instituciones oficiales urbanas y el 18% de los planteles rurales se ubican en el **nivel insuficiente**, frente a un 4% de los estudiantes de establecimientos privados. Las proporciones de los que logran el **nivel avanzado** son 32%, 31% y 49%, respectivamente. De igual manera esta diferencia también se presenta en quinto y noveno grado.

En los resultados anteriores se puede apreciar que el desempeño en términos

⁵ ICFES. Saber 3°, 5° y 9° 2015. Resultados Censales. Documento en línea: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.aspx>

⁶ ICFES. Saber 3°, 5° y 9° 2015. Resultados Censales. Documento en línea: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.aspx>[Citado 10/06/2016]

generales de los estudiantes de tercero, quinto y noveno grado en el área de matemáticas es deficiente a nivel nacional, lo cual demuestra que los estudiantes tienen dificultades y que aún no han logrado desarrollar competencias matemáticas para poder tener un buen desempeño en este tipo de prueba.

En cuanto a los resultados obtenidos por la Institución objeto de estudio en la Prueba Saber 3°, 5° y 9° de 2015⁷ muestran que aproximadamente el 20% de los estudiantes de tercero, el 65% de los estudiantes de quinto grado y el 66% de los estudiantes de noveno grado, se sitúan en los niveles de desempeño inferiores (insuficiente y mínimo) en el área de matemáticas.

Con respecto a los resultados obtenidos por los estudiantes de tercer grado en matemáticas, el informe muestra que el 5% de los estudiantes están ubicados en el **nivel Insuficiente**, lo cual significa que terminan de cursar tercer grado y no alcanzan los desempeños mínimos establecidos en la evaluación. En el **nivel mínimo**, se encuentra 15% de los estudiantes, en este nivel son capaces de solucionar problemas rutinarios utilizando la estructura aditiva cuando estos implica una sola operación y establecen relaciones de equivalencia entre expresiones que involucran sumas de números naturales; reconocen diferentes representaciones y usos del número y describen secuencias numéricas y geométricas; localizan objetos de acuerdo con instrucciones dadas; e interpretan información sencilla en diagramas de barras y pictogramas. El 3% de los estudiantes demuestran las competencias establecidas para el **nivel satisfactorio**, es decir, además de hacer lo definido en el nivel anterior, saben resolver problemas de estructura aditiva que implican más de una operación e interpretan la multiplicación como adición repetida de una misma cantidad; reconocen patrones e instrumentos de medida para longitud, área y tiempo y atributos de las figuras planas y los sólidos; reconocen y determinan frecuencias en un conjunto de datos e interpretan datos a partir de dos formas de representación. El 77% de los estudiantes se ubican en el **nivel**

⁷ ICFES. Saber 3°, 5° y 9° 2015. Resultados Censales. Documento en línea: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.aspx>[Citado 10/06/2016]

avanzado, además de saber y usar adecuadamente los conceptos mencionados anteriormente, también interpretan condiciones necesarias para la solución de problemas que requieren el uso de estructuras aditivas y reconocen fracciones comunes en presentaciones usuales; usan operaciones y propiedades de los números naturales para establecer relaciones y regularidades; reconocen las condiciones para la construcción de figuras bidimensionales e identifica las magnitudes asociadas a figuras tridimensionales.

Sin embargo, cuando los estudiantes avanzan a quinto grado los informes señalan un cambio abrupto en los resultados de las pruebas, un aumento del 40% en los estudiantes que se ubican en los niveles insuficiente y mínimo, comparado con los resultados de la Prueba Saber 3°. En quinto grado se observa que el 38% de los estudiantes se ubican en el **nivel insuficiente**, evidenciándose que no alcanzan los desempeños mínimos establecidos en el área al finalizar la educación básica primaria. El 27% de los estudiantes de los estudiantes que se encuentran en el **nivel mínimo**, están en capacidad de hacer recubrimientos de figuras planas, de utilizar operaciones básicas para solucionar problemas, de identificar información relacionada con la medición y de organizar y clasificar información estadística. En el **nivel satisfactorio** se encuentra el 21% de los estudiantes, donde no sólo hacen lo establecido en el nivel mínimo, sino que también están en capacidad de resolver problemas relacionados con la estructura aditiva y multiplicativa de los números naturales, reconocen diferentes maneras de representar una fracción propia en relaciones parte-todo, describen algunas transformaciones en el plano cartesiano y estiman la probabilidad de un evento para resolver situaciones en contextos de juegos o en acontecimientos cotidianos. Tan solo el 14% de los estudiantes se ubicaron en el **nivel avanzado**, además de hacer lo establecido en los niveles precedentes, solucionan problemas correspondientes a la estructura multiplicativa de los naturales, reconocen y utilizan la fracción como operador, comparan diferentes atributos de figuras y sólidos a partir de sus medidas y establecen relaciones entre ellos, establecen conjeturas sobre un conjunto de datos a partir de

las relaciones entre diferentes formas de representación, e interpretan el grado de probabilidad de un evento aleatorio.

Al continuar avanzando a grados superiores, como noveno grado, el porcentaje de estudiantes que no alcanzan los desempeños mínimos aumenta. En cuanto a los resultados de noveno grado, el informe manifiesta que el 11% de los estudiantes se situó en el **nivel insuficiente**, lo cual indica que no logran superar las preguntas de menor complejidad de la prueba. En el **nivel mínimo**, se encuentra el 55% de los estudiantes, en este nivel solucionan problemas en contextos aditivos y multiplicativos; reconocen distintas maneras de representar una función; identifican algunos movimientos rígidos en el plano e identifican algunas de las propiedades de las figuras planas y sólidos. El 33% de los estudiantes, que se ubicó en el **nivel satisfactorio**, además de hacer correctamente lo establecido en el nivel anterior, utilizan expresiones algebraicas y representaciones gráficas para modelar situaciones sencillas de variación; utilizan las propiedades de la potenciación, radicación y/o logaritmación para solucionar un problema; reconocen y aplican movimientos rígidos a figuras planas en un sistema de coordenadas y establecen relaciones entre los sólidos y sus desarrollos planos. Sólo el 2% de los estudiantes se encuentra en el **nivel avanzado**, en el cual demuestra dominio de los conceptos mencionados en los niveles anteriores, también logra pasar de la representación algebraica a las propiedades de una función o sucesión y viceversa; establece equivalencias entre expresiones algebraicas y numéricas; enuncia propiedades relativas a determinados subconjuntos numéricos, entre otras.

De los resultados expuestos anteriormente se puede inferir que un gran porcentaje de los estudiantes de tercero, quinto y noveno grado, no comprenden ni utilizan adecuadamente los conceptos básicos en matemáticas correspondientes a su grado para poder responder correctamente las preguntas de menor complejidad de la Prueba Saber 3°, 5° y 9°.

Los resultados de las Pruebas Saber 3°, 5° y 9° también suministran información sobre las fortalezas y debilidades de los estudiantes en cada grado, con relación a

las competencias y componentes evaluados en cada área que integra la prueba. Particularmente, al comparar la institución objeto de estudio con otras instituciones con puntajes promedio similares en el área de matemáticas en quinto y noveno grado se obtuvieron los siguientes resultados, en cuanto a las competencias y componentes evaluados en el año 2013⁸, 2014⁹ y 2015. A continuación, se presenta los resultados obtenidos en los siguientes cuadros.

AÑO	COMPETENCIA	COMPONENTE
2013	Débil en Razonamiento y argumentación.	Débil en el componente Numérico-variacional.
	Fuerte en Comunicación, representación y modelación.	Fuerte en el componente Geométrico-métrico.
	Fuerte en Planteamiento y resolución de problemas.	Muy fuerte en el componente Aleatorio.
2014	Débil en Razonamiento y argumentación.	Fuerte en el componente Numérico variacional.
	Débil en Comunicación, representación y modelación.	Débil en el componente Geométrico-métrico.
	Fuerte en Planteamiento y resolución de problemas.	Débil en el componente Aleatorio.
2015	Similar en Razonamiento y argumentación.	Similar en el componente Numérico-variacional.

⁸ ICFES. Saber 3°, 5° y 9° 2013. Resultados Censales. Documento en línea: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jsp>

⁹ ICFES. Saber 3°, 5° y 9° 2014. Resultados Censales.

Documento en línea <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jsp>

	Débil en Comunicación, representación y modelación.	Débil en el componente Geométrico-métrico.
	Fuerte en Planteamiento y resolución de problemas.	Similar en el componente Aleatorio.

Tabla 1. Relación de competencias y componentes evaluados en matemáticas en quinto grado (2013- 2015)

AÑO	COMPETENCIA	COMPONENTE
2013	Muy fuerte en Razonamiento y argumentación. Muy débil en Comunicación, representación y modelación. Fuerte en Planteamiento y resolución de problemas.	Débil en el componente Numérico-variacional. Muy fuerte en el componente Geométrico-métrico. Débil en el componente Aleatorio.
2014	Débil en Razonamiento y argumentación. Muy fuerte en Comunicación, representación y modelación. Muy débil en Planteamiento y resolución de problemas.	Similar en el componente Numérico-variacional. Muy débil en el componente Geométrico-métrico. Muy fuerte en el componente Aleatorio.
2015	Débil en Razonamiento y argumentación. Débil en Comunicación, representación y modelación.	Fuerte en el componente Numérico-variacional. Débil en el componente Geométrico-métrico. Fuerte en el componente Aleatorio.

	Muy fuerte en Planteamiento y resolución de problemas.	
--	--	--

Tabla 2. Relación de competencias y componentes evaluados en matemáticas en noveno grado (2013-2015)

Aunque los resultados son muy similares a los resultados obtenidos por otras instituciones educativas, al analizar los resultados individuales se observan puntajes muy altos y otros muy bajo, esta alta heterogeneidad registrada entre los puntajes genera un alto nivel de incertidumbre, por lo que se puede inferir que solo unos estudiantes, más no todos, tienen fortalezas en alguno de los componentes.

A nivel institucional otra herramienta importante que las políticas educativas nacionales ofrecen es el índice sintético de calidad, el cual evalúa la calidad educativa a partir de cuatro componentes: progreso, desempeño, eficiencia y ambiente escolar. El índice sintético de calidad es un valor en una escala de 0 a 10, que se puede calcular al sumar la puntuación en cada uno de los componentes establecidos.

Los resultados globales de la Institución Educativa objeto de estudio durante los dos últimos años en el ciclo de básica secundaria, donde la meta propuesta era alcanzar un nivel por encima de la escala Nacional, muestran un descenso preocupante respecto al año inmediatamente anterior. A continuación, se presentan las gráficas sobre el índice sintético de la institución correspondiente al año 2015 y 2016.



Figura 1. Índice Sintético de Calidad Educativa de Básica Secundaria 2015¹⁰



Figura 2. Índice Sintético de Calidad Educativa de Básica Secundaria 2016

En estas gráficas se puede observar el descenso en más de una unidad en la escala del índice de calidad, lo cual ubica a la institución por debajo del índice nacional y departamental. Por tanto, se ve claramente la necesidad de modificar los planes de mejoramiento y las estrategias pedagógicas en la institución.

A continuación, se analiza cada uno de los componentes del índice de calidad del año 2016 para entender el significado de ese resultado para la institución objeto de estudio y hacia dónde se deben dirigir los esfuerzos de la comunidad educativa.

En el primer componente, *Progreso*, se evalúan los resultados a nivel interno de las pruebas Saber en relación al año anterior. A continuación, se presenta la gráfica de este componente:

¹⁰ ISCE. Índice Sintético de la Calidad Educativa 2015. Ministerio De Educación Nacional. Colombia aprende, 2015.



Figura 3. Resultados de progreso de calidad educativa de Básica secundaria Pruebas Saber 2016

En la gráfica se puede evidenciar que los resultados no fueron los esperados, aunque los niveles de insuficiencia disminuyeron en el área de matemática en un 12%, el nivel avanzado no registró progreso; en el área de lenguaje del 1% de nivel insuficiente aumento a un 11% en el 2015. Estos resultados revelan la necesidad de revisar las estrategias de enseñanza y compromisos de cada uno de los integrantes de la comunidad educativa de la institución, padres de familia, docentes y estudiantes para alcanzar las metas que propone el MEN para cada año.

En el segundo componente, *Desempeño*, se evalúan los resultados de la institución con respecto a los resultados nacionales en las pruebas Saber 9°. La siguiente gráfica presenta los puntajes promedio Saber 9° del año 2015 en matemáticas y lenguaje.



Figura 4. Resultados de desempeño de calidad educativa de Básica secundaria Pruebas Saber 2016

En la gráfica, se logra inferir que los desempeños en las áreas de matemáticas y

lenguaje están por encima del promedio nacional de las pruebas Saber 9° que se realizan cada año. Pero buscando que el desempeño de los estudiantes vaya siempre en ascenso para lograr un nivel avanzado, se debe continuar en la búsqueda de estrategias pedagógicas que contribuyan al mejoramiento continuo.

En el tercer componente, *Eficiencia*, se evalúa el número de estudiantes que aprueban el año escolar en la institución. El siguiente gráfico presenta el porcentaje de este componente.



Figura 5. Resultados de Eficiencia de calidad educativa de Básica secundaria Pruebas Saber 2016

Este indicador refleja un alto nivel de eficiencia de la institución, pero se debe continuar trabajando hasta lograr que el 100% de los estudiantes día a día estén aprendiendo más y mejor.

En el cuarto componente, *Ambiente escolar*, se evalúan las condiciones propicias para el aprendizaje en la escuela, como son: la disciplina, la sana convivencia, motivación, recreación, etc.



Figura 6. Ambiente Escolar de calidad educativa de Básica secundaria Pruebas Saber 2016

Este componente refleja las falencias en infraestructura en la institución, ya que esta no cuenta con espacios propicios como salones especializados y zonas deportivas, influyendo así en los desempeños en los estudiantes, que en su mayoría se encuentran en niveles básicos.

Por lo anterior, la Institución en su Plan de Mejoramiento Institucional (PMI) plantea en el área de matemáticas *“promover espacios por los docentes en la aplicación de pruebas a los alumnos con estrategias activas que potencialicen el pensamiento matemático para propiciar mejores resultados”*¹¹ con miras a mejorar los bajos resultados obtenidos tanto en las pruebas saber y en las pruebas internas, así, como incentivar el cumplimiento de responsabilidades académicas en el área de matemáticas.

Después de realizado el análisis de las pruebas PISA, Saber y el Índice Sintético de Calidad, además de las falencias de los grupos de la institución objeto de estudio se optó por realizar una investigación con los estudiantes de séptimo grado (2017), donde se busca el desarrollo del pensamiento numérico, a través de una secuencia didáctica sobre números enteros que permita fortalecer las competencias científicas en los estudiantes de séptimo grado.

A partir del análisis expuesto anteriormente surgen las siguientes preguntas:

¹¹ INSTITUCIÓN EDUCATIVA PITIGUAO. Plan de Mejoramiento Institucional 2015 – 2017. Mogotes, Santander.

¿Cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes de séptimo grado en la comprensión de los números enteros?

¿Qué estrategias y acciones didácticas se pueden desarrollar con estudiantes de séptimo grado para potenciar el desarrollo del pensamiento numérico?

¿Una secuencia didáctica planteada desde el Enfoque de Resolución y Planteamiento de Problemas desarrolla en los estudiantes competencias matemáticas que les permiten resolver con suficiencia problemas en diferentes contextos?

Por tanto, el reto desde el proceso investigativo como profesora investigadora será tratar de responder a la siguiente pregunta: **¿Cómo fortalecer en los estudiantes de séptimo grado la competencia de comunicación y representación en la comprensión de números enteros para desarrollar el pensamiento numérico?**

1.2 JUSTIFICACIÓN

La sociedad actual siempre está en constante cambio tecnológico, científico, político etc. Por tanto, en un mundo tan cambiante los individuos deben “ser flexibles y desarrollar habilidades que les permitan entender y valorar los avances”¹². La escuela tiene la responsabilidad de generar esos espacios académicos de discusión que lleven al estudiante a un desarrollo integral, que le permita participar y competir en un medio académico y laboral.

En este sentido, la implementación de secuencias didácticas desde el *Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas* es una alternativa que posibilita al estudiante desarrollar su pensamiento matemático a través de la resolución de problemas en diferentes contextos, aprendizajes que no solo le servirán en la escuela, sino en el medio donde vive.

¹² SANTOS TRIGO, Luis. La Resolución de problemas matemáticos: Fundamentos Cognitivos. México D. F.: Editorial Trillas, 2007. p. 95. ISBN 978-968-24-7929-8.

El desarrollo de esta propuesta de investigación permite promover acciones pedagógicas que contribuyen a la superación de las dificultades de los estudiantes sobre la noción de números enteros, favoreciendo un aprendizaje significativo, lo que puede incidir en los resultados de pruebas internas y externas.

El impacto social de la investigación es la motivación de los estudiantes para que realicen las actividades, así como el mejoramiento de su rendimiento académico, para que proyecten su futuro como sujetos independientes, creativos, y logren impactar su entorno. Por otro lado, los profesores se familiarizan con el proceso de reflexión sobre su práctica pedagógica, de lectura de su propia realidad, por tanto, hace posible que el profesor se pueda adaptar más fácilmente a nuevas condiciones y a las exigencias del desarrollo histórico-cultural, logrando coherencia entre el ideal de profesor que tiene y lo que hace en realidad.

1.3 OBJETIVOS

Con base en la problemática anteriormente expuesta, se planteó el objetivo general y los objetivos específicos de estudio, los cuales impulsaron y dirigieron el desarrollo de esta investigación.

1.3.1 Objetivo General.

Fortalecer en los estudiantes de séptimo grado la competencia de comunicación y representación en la comprensión de números enteros para desarrollar el pensamiento numérico.

1.3.1.1 Objetivos Específicos

- Identificar las dificultades que presentan los estudiantes de séptimo grado en la comprensión de números enteros.
- Diseñar e implementar una secuencia didáctica sobre números enteros en diferentes contextos basada en los principios del Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas para estudiantes de séptimo grado que contribuyan a fortalecer la competencia de comunicación y representación.
- Evaluar la incidencia de la secuencia didáctica en la comprensión de números enteros por parte de los estudiantes de séptimo grado.

2 MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presenta los antecedentes y los elementos teóricos del *Enfoque de Resolución y Planteamiento de Problemas* que fundamentan esta investigación.

2.1 ANTECEDENTES

El propósito de esta sección es presentar una revisión seleccionada de investigaciones de diferentes autores a nivel local, nacional e internacional que han estudiado sobre la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros. En estas investigaciones se profundiza sobre el pensamiento numérico en aspectos relacionados a las formas de razonamiento y las fuentes de dificultad de los estudiantes en la comprensión de los números enteros. Además, se muestran diferentes propuestas didácticas para la enseñanza de los números enteros desde diferentes perspectivas teóricas.

2.1.1 Antecedentes a nivel internacional. Bahamonte y Vicuña en su tesis titulada "*Resolución de problemas matemáticos*"¹³ plantean como objetivo general incrementar los niveles cognitivos de análisis, pensamiento lógico y reflexivo. La investigación la desarrollaron con estudiantes de tercero de primaria, en el Liceo Nobeliuss, uno de los 10 centros educativos más relevantes de la Región de Magallanes. Los autores tomaron como referente teórico a Polya, tanto en su marco teórico como en el diseño metodológico descriptivo cualitativo, en el que enfatizaron en las estrategias heurísticas de la resolución de problemas. Las actividades implementadas se realizaron en dos etapas, en la primera etapa daban orientaciones a los estudiantes sobre resolución de problemas, luego manejaban actividades en la clase de matemáticas utilizando diferentes esquemas y la técnica

¹³ BAHAMONTE, Sebastián, y VICUÑA, Judith. Resolución de problemas matemáticos. Tesis de Maestría. Chile: Universidad de Magallanes. 2011.

de interrogación. Los resultados más relevantes obtenidos en la investigación muestran que los alumnos lograron analizar problemas matemáticos simples, incluso llegaron al planteamiento de problemas con las características básicas. Por otro lado, los autores reportan que los estudiantes identificaron las partes esenciales de cada problema y resolvieron problemas matemáticos a partir de lo planteado. Los autores también señalan que el aprendizaje asociado a problemas matemáticos se puede lograr usando diversas estrategias, enfatizando el tipo de solución problemática y la reformulación verbal.

En la investigación de Borjas titulada "*Aprendizaje de los números enteros una experiencia significativa en estudiantes de séptimo grado de la escuela nacional de música*"¹⁴ se planteó como objetivo general explorar el conocimiento matemático relativo a la adición y sustracción de números enteros en alumnos de séptimo grado de educación secundaria. La investigación se desarrolló en Tegucigalpa desde el enfoque cualitativo, ya que el tema estaba enfocado en mejorar el aprendizaje de las matemáticas haciéndolo más agradable y fácil. Este trabajo abarca aspectos relacionados con problemas en adición y sustracción de números enteros, en la dimensión conceptual se define la adición como añadir, y restar significa lo contrario. En las actividades implementadas los estudiantes usaron signos operativos, representaciones gráficas como la recta numérica. Dentro de los resultados obtenidos, los estudiantes lograron un progreso hacia la extensión del dominio numérico. Además, se identificaron algunas dificultades operativas en los estudiantes en las operaciones de adición y sustracción de números enteros. Sin embargo, los estudiantes no lograron apropiarse de las operaciones de adición y sustracción de números enteros durante la intervención de aula.

¹⁴ BORJAS, Dania Yulisa. Aprendizaje de los números enteros una experiencia significativa en estudiantes de séptimo grado de la escuela nacional de música. Trabajo de Maestría. Tegucigalpa: Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, 2009.

Por último, los autores Pérez y Ramírez en su trabajo documental¹⁵ sobre el estado del arte de investigaciones realizadas por diferentes autores en el campo de la resolución de problemas, se centraron en analizar los fundamentos teóricos-metodológicos de la resolución de problemas matemáticos, así como de las estrategias que deben ser utilizadas para su enseñanza. Este estudio tuvo como objetivo desarrollar habilidades en los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, a través de diversas estrategias. La metodología aplicada fue investigación documental en la revisión de fuentes bibliográficas, con análisis cualitativos. En el desarrollo de esta investigación se concluyó que en la enseñanza de las matemáticas se deben utilizar mecanismos nuevos para estimular los procesos y no sólo realizar ejercicios rutinarios. Además, evidenció que el profesor debe reconocer las características sobre la resolución de problemas y manejar los marcos conceptuales para lograr incluir en el aula estrategias apropiadas en la resolución de problemas.

2.1.2 Antecedentes a nivel nacional. Las autoras Agudelo, Bedoya y Restrepo en su investigación “Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos”¹⁶, se enfocaron en estudiar las variables y analizar las dificultades de los estudiantes en el desarrollo de problemas matemáticos. Este trabajo investigativo fue de carácter cuantitativo, se establecieron variables a través del método heurístico de Polya para la resolución de problemas. Una vez identificadas las variables independientes se logró generar categorías de análisis e indicadores. Entre sus resultados de investigación notaron que el bajo rendimiento en el área de matemáticas y la falta de habilidad para la resolución de problemas se debe a la dificultad en la comprensión lectora, y en la falta de claridad de los estudiantes para seguir en el proceso de resolución de problemas los pasos propuesto por Polya.

¹⁵ PÉREZ, Yenny y RAMÍREZ, Raquel. Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. Caracas, Venezuela. En: Revista de Investigación, 2011. vol. 35, no. 73, ISSN 0798-0329.

¹⁶AGUDELO, Gloria; BEDOYA, Vanesa, y RESTREPO, Alejandra. Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos. Trabajo de grado en licenciatura. Pereira Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira, 2008.

Una investigación a nivel nacional que estudió el mismo objeto matemático que esta investigación fue la de Castillo, titulada “Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos”¹⁷. El autor planteó como objetivo principal diseñar e implementar objetos físicos para la enseñanza aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros en estudiantes del grado séptimo, a través de actividades pedagógicas. En el proceso metodológico el autor utilizó la investigación acción con el fin de conocer la verdadera problemática y profundizar en aspectos clave. En la metodología de investigación propuso 4 etapas: 1. Planificación de acciones para reconocer la información; 2. Ejecutar acciones deliberando y controlando; 3. Asumir la observación y recoger evidencias; y 4. Reflexión sobre la acción generando la solución y el proceso. En los resultados de la investigación, el autor señala que con la implementación de la secuencia didáctica logró mejorar los procesos en la enseñanza de adición y sustracción de números enteros. También, observó el agrado de los estudiantes con los cambios de ambientes de aprendizaje y evidenció como el trabajo colaborativo mejoró el avance de los aprendizajes de los estudiantes.

La investigación “Resolución de problemas matemáticos para fortalecer el pensamiento numérico en estudiantes de grado séptimo de la Institución educativa adventista del municipio de Puerto Tejada Cauca”¹⁸ de las autoras Mejía y Loango, tuvo como objetivo fortalecer el pensamiento numérico de los estudiantes del grado séptimo de una Institución Educativa Adventista. El modelo investigativo aplicado fue la investigación cualitativa, con implementación de diversas estrategias para resolver problemas. En el proceso de metodológico se tuvieron en cuenta cuatro fases: inicio, planificación, acción y reflexión final. En este estudio la documentación y el análisis de las producciones de los estudiantes se realizó teniendo cuenta las

¹⁷ CASTILLO ANGULO, Cesar. Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos. Trabajo de Maestría. Palmira Colombia: Universidad Nacional de Colombia, 2014.

¹⁸ MEJÍA VIAFARA, Aida y LOANGO NÚÑEZ, Miriam. Resolución de problemas matemáticos para fortalecer el pensamiento numérico en estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Adventista del Municipio de Puerto Tejada Cauca. Trabajo de licenciatura en Matemáticas. Cali, Colombia: Universidad Católica de Colombia, 2014.

emociones, el rendimiento académico, las conductas y motivaciones sociales. Como conclusiones las autoras reconocen la importancia de perfeccionar la metodología en la enseñanza de resolución de problemas y el uso de material didáctico de apoyo en la implementación de diseños de aula.

2.1.3 Antecedentes a nivel local. En el tema de resolución de problemas a nivel local, se encuentra el estudio de los autores Cárdenas y Barrientos “La comprensión e interpretación de problemas matemáticos: el caso de las ecuaciones de primer grado”¹⁹. El objetivo general que se plantearon fue identificar mediante un trabajo de aula las dificultades que tienen los estudiantes del grado noveno en la comprensión e interpretación de problemas en ecuaciones de primer grado. Con este trabajo se intentó conocer los factores que inciden en la construcción de ecuaciones algebraicas, específicamente en la interpretación de ecuaciones de primer grado. Como marco teórico los autores utilizaron las estrategias heurísticas de Polya, enfatizando en la primera etapa la importancia de entender el problema. La investigación se desarrolló con estudiantes de noveno de dos instituciones públicas de Barrancabermeja y Rio Negro. Inicialmente se implementaron las actividades a doce estudiantes, pero luego se escogió una muestra de seis estudiantes aleatoriamente para profundizar en los análisis. En esta investigación se implementó la metodología de estudio descriptivo, narrando las características de los estudiantes en comprensión lectora como herramienta para facilitar la comprensión de problemas. La metodología consistió en aplicar una serie de talleres, donde los investigadores tuvieron en cuenta tres aspectos: la observación, el análisis y síntesis²⁰. Durante la implementación de los talleres se logró evidenciar las dificultades y fortalezas de los estudiantes en la comprensión lectora, lo cual permitió un rediseño de las actividades para incrementar el grado de dificultad de cada situación problémica. La principal dificultad identificada en esta investigación

¹⁹ CÁRDENAS, Elio y BARRIENTOS, Orlando. La comprensión e interpretación de problemas matemáticos: el caso de las ecuaciones de primer grado. Trabajo de especialización en Educación Matemática. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2010.

²⁰ *Ibíd.*, p. 32.

fue la dificultad de los estudiantes en la transición del lenguaje matemático al lenguaje verbal. A partir de los primeros resultados obtenidos, los autores complementaron el trabajo investigativo aplicando actividades individuales a los estudiantes como el planteamiento de enunciados con ecuaciones, a partir de una ecuación dada. En conclusiones generales los autores observaron que algunos de los seis estudiantes no realizan las acciones correspondientes a las situaciones planteadas. Además, los estudiantes al expresar las ecuaciones realizaron incorrectamente la interpretación de las operaciones de adición y sustracción, omitiendo la variable que debe tener toda ecuación de primer grado.

Por último, se encontró la investigación de Méndez titulada “Diseño y validación de la estrategia didáctica “math match” para mejorar la enseñanza en el área de matemáticas”. Esta investigación se enfocó en la elaboración de una propuesta a partir de un modelo pedagógico para dar solución a una problemática de orden práctico y satisfacer las necesidades de los estudiantes y docentes de la Institución Educativa objeto de estudio. La metodología de investigación fue de corte cuantitativo causi-experimental y se realizó con dos grupos naturales o intactos. La población objeto de estudio se seleccionó de dos sedes rurales de la Institución Educativa la Ceiba de Rionegro del grado quinto de primaria, participaron 65 estudiantes, en edades de 9 a 12 años. En la fundamentación teórica se tomó como referente pedagógico a Ausbel con el aprendizaje lúdico y activo, y como referente teórico los postulados de Vigostky²¹. En el proceso metodológico se utilizó como instrumento una prueba pre-test y post-test en un grupo control y en un grupo experimental, lo que facilitó la validación de los datos. Los resultados obtenidos dan cuenta de cada uno de los objetivos propuestos: el primero, fue lograr que los estudiantes de una escuela rural tuvieran un aprendizaje de calidad; y en el segundo, se despertó el interés por el aprendizaje, haciendo de la matemática una materia activa y creativa. Otra de las conclusiones obtenidas fue que no existen

²¹ Ibíd., p. 60-63.

diferencias significativas en los niveles de competencia logrados por los estudiantes del grupo control comparado con el grupo experimental.

2.2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este apartado se presentan una noción de los números enteros y sus fuentes de dificultad, desde diferentes autores, y los elementos teóricos del enfoque de investigación desde la perspectiva de Schoenfeld.

2.2.1 La Noción de números enteros y sus fuentes de dificultad. En el aprendizaje de las matemáticas la noción de número está presente durante todo el ciclo de educación básica. Según Piaget, la construcción de la noción de número se da en forma progresiva, "implica acción, inicialmente, sensoriomotriz manipulativa sobre objetos y, posteriormente, mental mediante el establecimiento y coordinación de relaciones"²². Por tanto, se inicia en la etapa sensoriomotriz, y es en la etapa de operaciones concretas que el individuo puede llegar a entender las ideas centrales de número, correspondencia uno a uno y conservación.

Esta investigación se centra específicamente en la noción de números enteros, definido como el conjunto de números formado por: el conjunto de los naturales, el conjunto de los números negativos y el cero. Para Gallardo y Hernández²³ cuando se inicia con la enseñanza de los números enteros, muchas veces no se enfatiza en la importancia del cero y la negatividad, es por esto que muchos estudiantes luego pueden presentar dificultades para entender las operaciones con este tipo de números.

²²Documento en línea:http://soda.ustadistancia.edu.co/enlinea/AngelaGutierrezMom_1_Pensamiento_%20Matemati coAngelaGutierrez/concepto_de_numero.html

²³ GALLARDO, A. Hernández, A. *Emergencia de los números enteros*. 2007. Recuperado el 20 de mayo del 2013. Documento en línea:<http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asisg5/Agallardo.pdf>[citado 09/09/2016]

Glaeser citado por Cid²⁴ describe seis obstáculos epistemológicos que surgen en el desarrollo histórico de la noción de número negativo:

- *Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas.* Indica que, aunque se efectúen operaciones (sustracción, multiplicación, que lleva incluso al uso de la ley de los signos), no se acepta la existencia de números negativos aislados.
- *Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.* Está asociada a la no aceptación de los números negativos como cantidades reales, por lo que se asocian a cantidades ficticias.
- *Dificultad para unificar la recta real.* El hecho de concebir los números negativos como opuestos a los números positivos, induce al entender la recta numérica como un modelo de dos semirrectas opuestas.
- *La ambigüedad de los dos ceros.* El autor se refiere que en el desarrollo de la historia del cero se presentaron muchas contrariedades para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente.
- *El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas.* Esta dificultad está asociada a la inconveniencia de relacionar todas las operaciones de objetos matemáticos con el mundo físico, ya que algunas operaciones sólo se pueden justificar de manera formal, basándose en las necesidades internas de las matemáticas.
- *Deseo de un modelo unificador.* El autor señala la dificultad de encontrar un modelo sencillo de entender los números enteros, por ejemplo, el modelo de ganancias y pérdidas, sólo explica la estructura aditiva, pero a costa de convertirse en un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa.

²⁴ CID, E. Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza. Disponible en: <http://www.urg.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf>

Por otro lado, Bruno reporta que en la resolución de problemas con enunciado verbal los estudiantes presentan muchas dificultades, resulta más complicado para ellos resolver problemas, que mecanizar procedimientos o algoritmos. Según la autora la resolución de problemas implica “pasar de la dimensión contextual, en la que se presenta el problema, a la dimensión abstracta o puramente matemática”²⁵, para luego volver a la luz de las condiciones iniciales del problema, y analizar la solución encontrada en la dimensión abstracta. Las dificultades que presentan los estudiantes están “asociadas a variables tales como la estructura, el tipo de números, el contexto y la posición de la incógnita”²⁶. Entre sus principales resultados, la autora señala la importancia que los estudiantes distingan las estructuras de los problemas y reflexionen sobre el rol de la incógnita respecto a las operaciones que se proponen en el problema. Por otro lado, Bruno manifiesta que entre las principales causas de las dificultades de los estudiantes a la hora de resolver problemas aditivos se encuentra la comprensión de textos y la transferencia entre la dimensión contextual y la abstracta.

Otros autores que han investigado sobre las dificultades de los estudiantes en la comprensión de números enteros es Becerra, et al.²⁷, quienes señalan que una dificultad es un conocimiento parcial que conlleva a los estudiantes a incurrir en errores conceptuales o procedimentales al abordar tareas concretas. Algunas de las dificultades que identificaron son:

- Dificultad en la utilización del lenguaje matemático y verbal en situaciones aditivas.
- Dificultad en la utilización de la recta numérica para la adición y sustracción de números enteros.

²⁵ BRUNO, A. Los alumnos redactan problemas aditivos de números negativos En: Revista EMA, 2000, vol. 5, no. 3, p. 236-251.

²⁶ Ibíd., p. 236-251

²⁷ BECERRA, O., BUITRAGO, M., CALDERÓN, S., CAÑADAS, M., y GÓMEZ, P. Serie de unidades didácticas en Educación Matemática, Adición y sustracción de números enteros. Primera edición. Bogotá D.C: Ediciones SM, 2016. ISBN: 978-958-773-853-7. p. 9.

- Dificultad para realizar operaciones que involucran números enteros.
- Dificultad para dar sentido a un resultado negativo.
- Dificultad en la utilización del valor absoluto.

2.2.1 Enfoque de Resolución y Planteamiento de Problemas.

Propuestas curriculares internacionales como los Estándares para Matemáticas de la NCTM²⁸ consideran fundamentales en el desarrollo del pensamiento matemático “aspectos como la resolución de problemas, la necesidad de comunicarse matemáticamente y la búsqueda de las conexiones de las matemáticas con otras disciplinas”²⁹. Esta propuesta curricular de la NCTM ha sido un referente importante en la construcción de la propuesta curricular a nivel nacional, por tanto, las políticas educativas nacionales proponen al *Enfoque de Resolución de Problemas* como un método que debe guiar la actividad matemática del individuo para fortalecer las competencias científicas.

De igual forma, en el campo de la Educación este enfoque teórico y metodológico ha sido un aspecto prioritario de estudio e investigación. En este sentido, Heyworth señala a la resolución de problemas como uno de los objetivos fundamentales en el desarrollo de la ciencia, “la enseñanza en las ramas de ciencia tiene generalmente como fin alcanzar dos objetivos: la adquisición de un cuerpo de conocimiento organizado en un dominio particular y la habilidad para resolver problemas en ese dominio”³⁰. Luego, la resolución de problemas constituye un tipo de tarea que la escuela debe promover en el proceso educativo de los estudiantes.

²⁸ NCTM. Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2000. ISBN 0-87353-480-8.

²⁹ SANTOS TRIGO, Op. cit., p. 24.

³⁰ HEYWORTH, R. Procedural and conceptual knowledge of expert and novice students for the solving of a basic problem in chemistry. En: International Journal Science Education, 1999. vol. 21, no. 2. p. 195-211.

Entre los pioneros en la investigación en Educación Matemática del *Enfoque de Resolución y Planteamiento de Problemas* se encuentran las contribuciones de Polya, según Santos “las heurísticas identificadas por Polya se enmarcan en comunicar su propia experiencia como matemático al resolver problemas. Polya compartía que las estrategias y preguntas de un experto al resolver problemas podían ser modeladas por los maestros en el salón de clase”³¹. El proceso para resolver problemas propuesto por Polya³² pone especial énfasis a los métodos heurísticos, este proceso se basa en tres etapas: a) entendimiento del problema; b) configurar un plan; y c) ejecutar el plan.

Sin desconocer las importantes contribuciones de Polya a la investigación sobre resolución de problemas, cabe señalar que la resolución de problemas va más allá de la enseñanza de heurísticas y estrategias. Begle³³ mencionó que no existían directrices claras sobre las estrategias de resolución de problemas, y cómo su complejidad no podía reducirse a mejorar las habilidades de los estudiantes, pues en el proceso de resolver problemas influyen tanto las características del individuo como de la situación. Con base en lo anterior, Schoenfeld propone algunos aspectos importantes en la cognición cuando se resuelven problemas: a) conocimiento de base; b) estrategias de resolución de problemas; c) estrategias metacognitivas (monitoreo y control); y d) aspectos afectivos, sistema de creencias y sistema de prácticas.

A pesar de la importancia de este enfoque teórico en el desarrollo de competencias en los estudiantes, se observa que el impacto de la investigación en resolución de problemas en el aula es muy poco, los estudiantes persisten en trabajar de forma mecánica sobre las matemáticas, Lester y Kehle³⁴. La manera tradicional como se

³¹ SANTOS TRIGO, Op. cit., p. 30-31.

³² POLYA, G. *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

³³ BEGLE, E. *Critical variables in mathematics education*. Washington DC: Mathematical Association of America, 1979.

³⁴ LESTER, F. y KEHLE, P. From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In: R. A. Lesh & H. M. Doerr (Eds.). *Beyond*

ha implementado en el aula la resolución de problemas, en donde este enfoque es visto como una temática aislada del desarrollo de importantes ideas matemáticas, genera que las matemáticas se asocien con la mecanización de procedimientos o algoritmos desprovistos de significado, English y Sriraman³⁵.

Lester y Kehle³⁶ indican que la enseñanza desde este enfoque teórico debería ser encarada como una comprensión conceptual que posibilite el desarrollo en los estudiantes la habilidad de aplicar lo aprendido con flexibilidad y criterio. Además, proveer la oportunidad de explicar un amplio rango de problemas y situaciones problemáticas, que vayan desde los ejercicios hasta los problemas abiertos y situaciones de exploración, ayudando a desarrollar “*un punto de vista matemático*”. Al respecto, Schoenfeld indica que el proceso de enseñanza debe estar caracterizado por la habilidad de analizar y comprender, de percibir estructuras y relaciones estructurales, de expresarse oralmente y por escrito con argumentos claros y coherentes. En suma, debería preparar a los estudiantes para convertirse, lo más posible, en aprendices independientes, intérpretes y usuarios de la matemática. Otro aspecto que Schoenfeld destaca es la importancia de simular la actividad matemática dentro del salón de clase, en lo que define como el desarrollo de un “*microcosmos matemático*”³⁷, en el cual el estudiante reflexiona sobre diversos aspectos del problema y las formas de solución, y puede desarrollar sus ideas a partir de la discusión de sus propias ideas, así como de las ideas de otros. Con este tipo de dinámica de clase, el proceso evaluativo también se transforma, ya no sólo se centra en verificar si el estudiante obtuvo o no la respuesta correcta a la situación planteada, sino que se consideran otros aspectos como las estrategias cognitivas, estrategias metacognitivas y sistemas de creencias.

Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 2013. p. 501-518.

³⁵ SRIRAMAN, B. y ENGLISH, L. (2010). Problem Solving for the 21st Century. En: Theories of Mathematics Education, Advances in Mathematics Education: Seeking New Frontiers. Berlin: Springer-Verlag, 2010. p. 261-301.

³⁶ LESTER y KEHLE. Op. cit., p. 501-518.

³⁷ SCHOENFELD, A. Mathematical problem solving. New York: Academic Press, 1985.

Con este panorama, para esta investigación se entendió la resolución de problemas más como una forma de pensar, caracterizada por potenciar procesos como: la interpretación, la reflexión, la argumentación, la generalización y la demostración, en el que estudiantes y profesores buscan a través de la dinámica de discusión de ideas matemáticas para trascender de la sola aplicación de algoritmos al desarrollo de competencias matemáticas. Especialmente, fortalecer la competencia de comunicación y representación, según Santos Trigo en este enfoque teórico la comunicación y la interacción social desempeñan un papel fundamental en el aprendizaje “Las ideas matemáticas se aprenden por medio de un proceso de comunicación. Los estudiantes necesitan oportunidades no sólo para escuchar, sino para comunicar sus ideas matemáticas”³⁸. Esta visión de las matemáticas como una construcción social implica que el estudiante sea un sujeto activo que discuta y defienda sus ideas matemáticas dentro de una comunidad matemática.

2.2.1.1 Significado de problema matemático

El término problema en matemáticas resulta muy difícil de precisar, ya que el término está ligado a la relatividad del esfuerzo que implica para el sujeto resolver el problema, tal como lo menciona Santos “*mientras que para algunos estudiantes puede representar un gran esfuerzo intentar resolver un problema, para otros puede ser un simple ejercicio rutinario*”³⁹.

En esta investigación se tomó la definición de problema matemático dada por Santos, en la que señala que un problema matemático está compuesto por los siguientes elementos:

- *La existencia de un interés; es decir, una persona o grupo de individuos quiere o necesita encontrar una solución.*
- *La no existencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea. Por ejemplo, la aplicación*

³⁸ SANTOS TRIGO, Op. cit., p. 96.

³⁹ *Ibíd.*, p.48.

directa de algún algoritmo o conjunto de reglas no es suficiente para determinar la solución.

- *La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico). Aquí, también se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución.*
- *La atención por parte de una persona o grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendentes a resolver esa tarea. Es decir, un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo.⁴⁰*

La mayoría de los problemas matemáticos planteados en los libros de textos y que utilizan muchos profesores en sus clases tienen una única respuesta, y sólo refuerzan la aplicación de las cuatro operaciones aritméticas básicas, incluso en palabras de Schoenfeld sólo serían ejercicios que pueden ser resueltos en poco tiempo, “raramente la presentación de la solución de un problema por parte del maestro dura más de cinco o diez minutos. A los estudiantes nunca le queda la impresión de que uno puede dedicar horas (mucho menos días, semanas o meses), trabajando en un problema”⁴¹. Este tipo de problemas se pueden clasificar según Schoenfeld como problemas rutinarios, son típicos problemas de libro de texto, que requieren un proceso mecánico o la aplicación directa de un algoritmo, también se observa que todos los problemas pueden ser abordados en cuestión de minutos, y no generan una discusión entre los estudiantes que vaya más allá de la escuela. Por otro lado, no representan una tarea en la cual el sujeto pueda plantear conjeturas, contraejemplos o diferentes estrategias.

En relación a esta investigación se tuvieron en cuenta en el diseño de la secuencia didáctica situaciones que se desarrollan en contextos diferentes, a partir de estas situaciones se plantearon algunos problemas, los primeros asequibles para involucrar a los estudiantes en la actividad y los demás problemas de mayor complejidad, como una forma de generar discusión entre los pequeños grupos que posibilitara a los estudiantes profundizar en ideas matemática clave.

⁴⁰ *Ibíd.*, p.51

⁴¹ SCHOENFELD, Mathematical problem solving, Op. cit., p. 368-369.

2.2.1.2 Dinámica de trabajo al interior del aula.

Al asumir el *Enfoque de Resolución de Problemas* en esta investigación se buscaba generar una dinámica de trabajo al interior del aula que promoviera la discusión y el análisis propio de una comunidad matemática, mediada a través de una secuencia didáctica sobre adición y sustracción de números enteros. Esta metodología desarrollada, así como lo plantea Schoenfeld citado en Santos, estuvo caracterizada por:

Las discusiones en pequeños grupos de estudiantes le proporcionan al maestro una oportunidad única de intervenir directamente cuando los estudiantes resuelven problemas, y no solamente de enfrentarse a un problema determinado.

Resolver problemas en grupos pequeños provoca discusiones acerca de los caminos potenciales para resolver los problemas. Cuando un estudiante se enfrenta individualmente a un problema, la primera opción que se le ocurre siempre se lleva a cabo. Las discusiones grupales permiten evaluar el potencial de varias alternativas, que es precisamente lo esencial en el desarrollo de las ideas matemáticas.

La resolución de problemas no es una tarea solitaria. En el salón de clases, las discusiones grupales ofrecen a los estudiantes la oportunidad de trabajar colaborativamente y desarrollar estrategias para defender sus ideas matemáticas.

Los estudiantes se sienten inseguros acerca de sus debilidades matemáticas, especialmente cuando se enfrentan a diversos problemas. Trabajar problemas con otros estudiantes les muestra que la mayoría de las veces también sus compañeros deben batallar con las ideas matemáticas. Además, la participación dentro del grupo les muestra que sus ideas son importantes en el proceso de resolución de los problemas.⁴²

Otro factor importante en esta dinámica de clase es que el profesor guíe la discusión del grupo sin excluir ideas más o menos válidas que los estudiantes han intentado en el proceso de resolución del problema, promoviendo la comunicación de esas ideas, para que ellos justifiquen sus elecciones y puedan analizar si sus respuestas son coherentes a la luz de las condiciones iniciales del problema.

Por otro lado, es importante mencionar que para la secuencia didáctica en esta investigación se diseñaron dos actividades en el software dinámico “Geogebra”,

⁴² SANTOS TRIGO, Op. cit., p. 91.

según Santos y Moreno⁴³ el uso de este tipo de herramientas computacionales ofrece un gran potencial para que los estudiantes desarrollen diferentes estrategias de solución, así como el fortalecimiento de procesos como conjeturar, argumentar y justificar.

Con el fin de realmente posibilitar esos espacios de reflexión matemática en las distintas fases asociadas a la resolución de problemas, en esta investigación se usaron los elementos conceptuales en el marco de resolución de problemas propuestos Santos y Moreno⁴⁴ para orientar los momentos del desarrollo de cada actividad, tanto en el diseño como para la implementación de la secuencia didáctica:

Una exploración visual y empírica. En esta etapa se espera que los estudiantes generen una solución empírica del problema, construcción de un modelo del problema, por ejemplo: una representación gráfica, que les permita visualizar y explorar el problema desde distintas perspectivas. En esta fase inicial, los autores recomiendan formular y hacer discusiones generales que contribuyan a identificar los parámetros, información relevante, conceptos asociados a los objetos matemáticos y a dar sentido al enunciado del problema.

Búsqueda de múltiples métodos de solución. La búsqueda y discusión de múltiples métodos de solución de un problema son fundamentales en el proceso de comprender ideas matemáticas y en el desarrollo de competencias en la resolución de problemas. Este proceso permite formular conjeturas acerca de la solución del problema.

⁴³ SANTOS TRIGO, L. y MORENO L. Sobre la construcción de un marco conceptual en la resolución de problemas que incorpore el uso de herramientas computacionales. En: ROJANO, M. (Ed.). Las Tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas. México D. F.: Editorial Trillas, 2013. p. 69-81.

⁴⁴ *Ibíd.*, p. 69-81.

Un momento final de reflexión. Es esencial el proceso de reflexión en cada una de las etapas, y al final se puede hacer una reflexión general para contrastar los procesos y estrategias utilizados en los diversos acercamientos de solución.

2.2.1.3 Un modelo de Análisis en la Resolución de Problemas.

Schoenfeld propone cuatro categorías de análisis en la resolución de problemas, cada categoría exhibe importantes aspectos en la cognición y el comportamiento del individuo que provee un equilibrio en el análisis. Además, hace posible caracterizar algunos elementos e identificar posibles dificultades en el proceso de resolución de problemas. Las categorías de análisis propuestas por Schoenfeld⁴⁵: en la resolución de problemas son: *dominio del conocimiento o recursos, estrategias cognitivas o métodos heurísticos, estrategias metacognitivas y sistemas de creencias.*

Dominio de conocimiento o recursos. Se refiere a los saberes que tiene el individuo, cómo almacena, organiza y adquiere el conocimiento, además, cómo accede a información relevante para solucionar adecuadamente la situación a la que se enfrenta. Schoenfeld identifica cinco tipos de conocimientos que influyen en el uso de los recursos: a) conocimiento informal e intuitivo acerca del dominio o del problema por resolver, b) hechos y definiciones, c) procedimientos rutinarios, d) conocimiento acerca del discurso del dominio.

Estrategias cognitivas o métodos heurísticos. En esta categoría se ubican las estrategias generales que pueden ser útiles para entender o avanzar en la resolución del problema. Santos⁴⁶ expone los siguientes ejemplos de heurísticas: analogías, introducir elementos auxiliares en el problema descomponer o combinar algunos elementos, dibujar figuras, entre otras.

⁴⁵ SCHOENFELD, A Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En: D. A. Grouws (Ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Reston, VA: NCTM, 1992. p. 334-370.

⁴⁶ SANTOS TRIGO, Op. cit., p. 56.

Estrategias metacognitivas. Esta categoría consiste en el monitoreo o autoevaluación del proceso de resolución de problemas. Según Santos Trigo, para Schoenfeld “la metacognición se refiere al conocimiento de nuestro propio proceso cognoscitivo, al monitoreo activo y a la consecuente regulación y orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de un problema”⁴⁷. Para Schoenfeld las estrategias metacognitivas se pueden entender a partir de tres subcategorías: a) conocimiento acerca de nuestro propio proceso, b) control y autorregulación y c) creencias e intuiciones.

Sistemas de creencias. Las concepciones que tiene un individuo sobre las matemáticas determinan la forma cómo elige los recursos, las heurísticas y estrategias de control cuando resuelve un problema. Es decir, “existe una relación entre la forma de cómo se percibe a las matemáticas y la forma de trabajar con problemas matemáticos”.⁴⁸

2.2.2 Lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias en matemáticas

El Ministerio de Educación Nacional propone los Estándares básicos de competencias en Matemáticas, los cuales orientan cómo organizar cada uno de los procesos curriculares en el plan de estudios y en los proyectos transversales, encaminados a desarrollar un aprendizaje significativo en los estudiantes que les permitan llegar a ser competentes en matemáticas, en las matemáticas ser competente es:⁴⁹

- *Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas. Ello requiere analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con*

⁴⁷ *Ibíd.*, p. 59.

⁴⁸ *Ibíd.*, p. 62.

⁴⁹ MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Primera edición. Ed. Ministerio de Educación Nacional, 2006.

situaciones semejantes; formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros; formular distintos problemas, posibles preguntas y posibles respuestas que surjan a partir de ella. Este proceso general requiere del uso flexible de conceptos, procedimientos y diversos lenguajes para expresar las ideas matemáticas pertinentes y para formular, reformular, tratar y resolver los problemas asociados a dicha situación. Estas actividades también integran el razonamiento, en tanto exigen formular argumentos que justifiquen los análisis y procedimientos realizados y la validez de las soluciones propuestas.

- *Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir, dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos.*
- *Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración.*
- *Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. Así se vincula la habilidad procedimental con la comprensión conceptual que fundamenta esos procedimientos.*

Ser matemáticamente competente se concreta específicamente en el pensamiento lógico y en el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamientos que proponen los lineamientos curriculares⁵⁰:

- El pensamiento numérico y los sistemas numéricos.
- El pensamiento espacial y los sistemas geométricos.
- El pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas.
- El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos.
- El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

⁵⁰ *Ibíd.*, p. 82-83.

2.2.2.1 El Pensamiento Numérico y los Sistemas Numéricos

Los lineamientos curriculares de matemáticas plantean el desarrollo de los procesos y la organización de actividades centradas principalmente en el uso y el significado de los números y de la numeración, el pensamiento numérico,

“...se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos. Es importante el desarrollo de métodos de cálculo, la invención de un algoritmo y su aplicación, la comprensión del significado de los números, el reconocimiento del valor de los números, la apreciación del efecto de las distintas operaciones, la utilización de las operaciones y de los números en la formulación y resolución de problemas”⁵¹.

En esta investigación se busca potenciar el pensamiento numérico, porque los resultados del análisis de las Pruebas Saber 5° y 9° de la institución objeto de estudio muestran en los componentes y competencias evaluados que este tipo de pensamiento requiere que se fortalezca en los estudiantes, a través de actividades didácticas que los lleven a un aprendizaje significativo.

2.2.2.2 Competencia comunicativa.

Antes de definir las competencias comunicativas es importante precisar acerca de la comunicación. Según Domínguez⁵² la comunicación humana se puede manifestar a través del lenguaje, oral o escrito, pero también puede establecerse una comunicación no verbal por medio de diferentes recursos semióticos como gestos, tonos o material audiovisual, entre otros.

La propuesta curricular de la NCTM⁵³ define que: “la comunicación matemática puede ocurrir cuando los estudiantes trabajan en grupos cooperativos, cuando un estudiante explica un algoritmo para resolver ecuaciones, cuando un estudiante

⁵¹ COLOMBIAAPRENDE. Pensamiento numérico. Documento en línea. [_http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/w3-propertyvalue-48255.html](http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/w3-propertyvalue-48255.html)

⁵² Domínguez G., I. *Comunicación y discurso*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 2003.

⁵³ NCTM, Op. cit., p. 96.

presenta un método único para resolver un problema, cuando un estudiante construye y explica una representación gráfica de un fenómeno del mundo real, o cuando un estudiante propone una conjetura sobre una figura geométrica. El énfasis debería hacerse sobre todos los estudiantes y no justamente sobre los que se expresan mejor”.

En este sentido la NCTM establece que la escuela regular debe guiar a los estudiantes para:

- Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación.
- Comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas.
- Analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los demás.
- Usar el lenguaje matemático con precisión para expresar ideas matemáticas.

Por tanto, la comunicación desempeña un papel fundamental en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, donde el aula de clase se convierte en un espacio que privilegie la interacción social, generando la posibilidad del intercambio de ideas, de compartir estrategias o procesos de solución de problemas, de discutir ideas matemáticas, de escuchar y ser escuchado.

2.2.3 Marco Legal

Para el desarrollo de la investigación se tuvieron en cuenta las siguientes leyes:

- La Constitución Política de Colombia⁵⁴ de 1991 consagra en el Artículo 67 el derecho de todo colombiano a la educación pública que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura. Este servicio es ofrecido y supervisado por el Estado.

⁵⁴ CONSTITUCIÓN POLÍTICA DE COLOMBIA. Artículo 67, 1991. Disponible en: <http://www.constitucioncolombia.com/titulo-2/capitulo-2/articulo-67>

- Ley 115 de Febrero 8 de 1994.

Artículo 77. Autonomía escolar. Dentro de los límites fijados por la presente ley y el proyecto educativo institucional, las instituciones de educación formal gozan de autonomía para organizar las áreas fundamentales de conocimientos definidas para cada nivel, introducir asignaturas optativas dentro de las áreas establecidas en la ley, adaptar algunas áreas a las necesidades y características regionales, adoptar métodos de enseñanza y organizar actividades formativas, culturales y deportivas, dentro de los lineamientos que establezca el Ministerio de Educación Nacional.

Artículo 79. Plan de estudios. “El plan de estudios es el esquema estructurado de las áreas obligatorias y fundamentales y de áreas optativas con sus respectivas asignaturas, que forman parte del currículo de los establecimientos educativos.”

Artículo 23. AREAS OBLIGATORIAS Y FUNDAMENTALES. Para el logro de los objetivos de la educación básica se establecen áreas obligatorias y fundamentales del conocimiento y de la formación que necesariamente se tendrán que ofrecer de acuerdo con el currículo y el Proyecto Educativo Institucional. Los grupos de áreas obligatorias y fundamentales que comprenderán un mínimo del 80% del plan de estudios, son los siguientes:

1. Ciencias naturales y educación ambiental.
2. Ciencias sociales, historia, geografía, constitución política y democrática.
3. Educación artística.
4. Educación ética y en valores humanos.
5. Educación física, recreación y deportes.
6. Educación religiosa.
7. Humanidades, lengua castellana e idiomas extranjeros.

8. Matemáticas.

9. Tecnología e informática.”

Artículo 5. FINES DE LA EDUCACIÓN. La ley 115 o ley General de educación de 1994 en su artículo 5° establece los fines de la educación en Colombia⁵⁵.

En el numeral 5, la adquisición y generación de los conocimientos científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos, y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales, adecuados para el desarrollo del saber.

Numeral 9, el desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico, y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural, y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país.

Numeral 13, la promoción en la persona y en la sociedad de la capacidad para crear, investigar, adoptar la tecnología que se requiere en los procesos de desarrollo del país y le permita al educando ingresar al sector productivo.

Artículo 20. En de la Ley General de Educación, en lo concerniente a los objetivos generales de la educación básica, establece los siguientes objetivos en los literales a y c:

a) Propiciar una formación general mediante el acceso, de manera crítica y creativa, al conocimiento científico, tecnológico, artístico y humanístico y de sus relaciones con la vida social y con la naturaleza, de manera tal que prepare al educando para los niveles superiores del proceso educativo y para su vinculación con la sociedad y el trabajo.

c) Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana.

ARTÍCULO 38. Plan de estudios.

El plan de estudios debe relacionar las diferentes áreas con las asignaturas y con los proyectos pedagógicos y contener al menos los siguientes aspectos:

1. La identificación de los contenidos, temas y problemas de cada asignatura y proyecto pedagógico, así como el señalamiento de las diferentes actividades pedagógicas.

⁵⁵ LEY GENERAL DE EDUCACIÓN. Artículo 5, 20,1994. Disponible en: <https://rectoriaiejoseacevedoygomez.pbworks.com/.../FINES+DE+LA+EDUCACION>

2. La distribución del tiempo y las secuencias del proceso educativo, señalando el período lectivo y el grado en que se ejecutarán las diferentes actividades.
 3. La metodología aplicable a cada una de las asignaturas y proyectos pedagógicos, señalando el uso del material didáctico, de textos escolares, laboratorios, ayudas, audiovisuales, la informática educativa o cualquier otro medio o técnica que oriente o soporte la acción pedagógica. (...)
- La Ley 1341 del 30 de Julio de 2009 ⁵⁶es fundamento de todo proyecto basado en el uso de las Tecnologías de la información y las comunicaciones pues conforma un marco jurídico para el desarrollo del sector tecnológico en Colombia lo cual incluye su influencia en el ámbito educativo, esta ley contempla los derechos de los usuarios de internet, ampliación de cobertura de banda ancha, Cambio de nombre del ministerio de las comunicaciones por el de Ministerio de las TIC promoviendo su uso en todos los sectores sociales, académicos y económicos de Colombia.

⁵⁶ LEY 1341, 2009. Disponible en: www.mintic.gov.co/portal/604/w3-article-3707.html.

3 MÉTODO

Esta investigación es de corte cualitativo, pues su principal interés estuvo en buscar elementos pedagógicos y didácticos que permitieran plantear estrategias para guiar a los estudiantes a un aprendizaje significativo de los números enteros, a través del *Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas*. En este sentido, se consideró pertinente utilizar el diseño de investigación-acción (IA) definida por Elliott, quien señala que “la investigación acción integra enseñanza y desarrollo del profesor, desarrollo del curriculum y evaluación, investigación y reflexión filosófica en una concepción unificada de práctica reflexiva educativa”⁵⁷. Por tanto, se siguieron elementos del modelo de ELLIOTT,

- Identificación de una idea general. Descripción e interpretación del problema que hay que investigar.
- Exploración o planteamiento de las hipótesis de acción como acciones que hay que realizar para cambiar la práctica.
- Construcción del plan de acción, como el primer paso de la acción, abarca: la revisión del problema inicial y las acciones concretas requeridas; la visión de los medios para empezar la acción siguiente, y la planificación de los instrumentos para tener acceso a la información.

Siguiendo los criterios de la IA, se tomó como parte fundamental de reflexión todo el proceso de enseñanza para lograr una verdadera transformación de la práctica pedagógica, pues “cuando se pretende mejorar la práctica, hay que considerar conjuntamente los procesos y los productos. Los procesos deben tenerse en cuenta a la luz de la calidad de los resultados del aprendizaje y viceversa”⁵⁸. Al considerar tanto la dimensión cognitiva, como la dimensión ética del individuo en el proceso de enseñanza se puede influir positivamente en el desarrollo de competencias.

⁵⁷ ELLIOT, J. El cambio educativo desde la investigación – acción. Madrid: Morata, 1991, p. 73.

⁵⁸ *Ibíd.*, p. 68.

3.1 POBLACIÓN

La Institución Educativa objeto de estudio se encuentra situada en zona rural de Mogotes a una distancia de 8 Km de la cabecera municipal. Esta institución es de carácter oficial, presta servicios educativos a estudiantes de niveles socioeconómicos bajos (0, 1 y 2), que provienen del tipo de familia extendida.

La Institución Educativa Pitiguao que en el año 2013 fue catalogada como Institución, antes era un centro Educativo. Desde sus inicios ha trabajado la metodología de Escuela Nueva* en el nivel de básica primaria, siguiendo las directrices del Ministerio de Educación Nacional. Con relación al nivel de Básica Secundaria la institución lleva un proceso de enseñanza en el sistema tradicional con algunos elementos del modelo pedagógico social cognitivo.

3.2 MUESTRA

Esta investigación estuvo dirigida a un grupo de 15 estudiantes seleccionado de un grupo de séptimo grado de educación básica secundaria de la sede principal de la Institución Educativa objeto de estudio, en la jornada de la mañana durante el primer semestre de 2017.

El grupo de 7° está conformado por 8 niñas y 7 niños, cuyas edades están comprendidas entre 12 y 14 años. Cabe destacar que este grupo ha sido dirigido desde el grado sexto por la profesora investigadora y que no había recibido previamente instrucción alguna sobre el conjunto de los números enteros.

3.3 PROCESO METODOLÓGICO

* El Ministerio de Educación Nacional, la define como “un modelo educativo dirigido, principalmente, a la escuela multigrado de las zonas rurales, caracterizadas por la alta dispersión de su población; por tal razón, en estas sedes educativas los niños y niñas de tres o más grados cuentan con un solo docente que orienta su proceso de aprendizaje”.

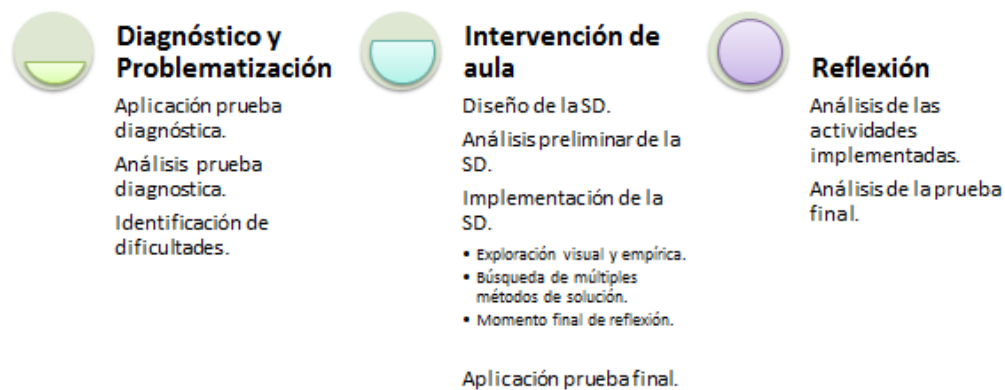


Figura 7. Estructura metodológica de la investigación

La investigación comprendió tres etapas fundamentales para su desarrollo:

3.3.1 Diagnóstico y problematización.

En esta etapa se aplicó una prueba diagnóstica para identificar las principales dificultades de los estudiantes de séptimo grado en la comprensión de números enteros y se analizaron aspectos de la cognición y el comportamiento de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas siguiendo las categorías o dimensiones definidas Schoenfeld⁵⁹: *dominio del conocimiento o recursos, estrategias cognitivas o métodos heurísticos, estrategias metacognitivas y sistemas de creencias.*

⁵⁹ SCHOENFELD, Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, Op. cit., 334-370.

3.3.2 Intervención en el aula.

La segunda etapa del proceso investigativo inició con el diseño de una secuencia didáctica (SD) que respondiera a la superación de las dificultades de los estudiantes participantes en la comprensión del objeto matemático de estudio. Por tanto, se tuvieron en cuenta los objetivos del currículo, los Estándares Básicos de Competencias, los Lineamientos Curriculares, los Derechos Básicos de Aprendizaje respecto al pensamiento numérico, así como los objetivos de investigación y algunos elementos del enfoque teórico.

Para la SD se seleccionaron 8 actividades, 2 actividades para trabajar con el software libre “Geogebra” y 6 actividades a lápiz y papel. Otro aspecto fundamental en el diseño fue el análisis preliminar de secuencia didáctica, el cual se realizó en dos fases: la primera, planeación general de la SD; y la segunda, sistematización de cada una de las actividades que conformaron la SD. En el diseño, los momentos de cada actividad se orientaron con las tres fases planteadas por Santos y Moreno⁶⁰: *Exploración visual y empírica, búsqueda de múltiples métodos de solución y momento final de reflexión*. El análisis preliminar de la secuencia didáctica se presenta detalladamente en el capítulo 4.

En cuanto a la implementación de la SD, las sesiones estuvieron dirigidas por la profesora investigadora, quien estuvo acompañada de un observador participante encargado de la toma de datos. Durante todo el proceso de implementación la profesora investigadora estuvo reflexionando sobre el proceso llevado a cabo en el aula para determinar si las actuaciones pedagógicas y didácticas que se estaban haciendo en aspectos inesperados de la actividad eran apropiadas, además, para realizar las modificaciones necesarias oportunamente en las actividades o en el tipo de configuraciones propuestas. Por último, en esta etapa se aplicó una evaluación final para valorar el razonamiento de los estudiantes después del proceso de implementación de la SD.

⁶⁰ SANTOS TRIGO, y MORENO. Op. cit., pág. 69 - 81.

3.3.3 Reflexión.

En esta etapa se realizó una reflexión sobre todo el proceso investigativo. Una vez recolectados los datos, se pasaron a un proceso de transcripción, selección, triangulación y análisis de datos.

Los criterios fundamentales de selección de los datos fueron: la pregunta de investigación, el objetivo de la investigación, además de algunos de los principios y conceptos teóricos del *Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas*. Esto permitió dar sentido a los datos, un análisis más riguroso del problema de investigación y documentar con rigor y especificidad el fenómeno observado. Seleccionados los datos, se pasaron a un proceso de transcripción para su respectivo análisis. Constituidos los datos de la investigación, se continuó con el proceso de triangulación, comparando y contrastando los datos de observaciones e informes desde diferentes perspectivas de las sesiones implementadas (diarios de campo del profesor investigador, notas de campo del observador participante, diarios de algunos estudiantes) para determinar los aspectos en los que coincidían, diferenciaban o se oponían.

En el análisis se describieron los elementos cognitivos y comportamentales que más influyeron en los estudiantes en el proceso de resolución de problemas de números enteros en diferentes contextos durante el desarrollo de las sesiones y en la prueba final, tomando como categorías de análisis las categorías propuestas por Schoenfeld. Al igual que el análisis preliminar, el análisis de la implementación de la secuencia didáctica se presenta en el capítulo 4.

3.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

Las técnicas utilizadas en el proceso investigativo fueron:

a) *Observación participante*, McKernan⁶¹ la define como “*la práctica de hacer investigación tomando parte en la vida del grupo social o institución que se está*

⁶¹ MCKERNAN, J. Investigación – acción y currículum. Madrid: Morata, 1996. p. 84.

investigando”. En este sentido, la investigadora asumió también el rol de profesora y como se mencionó anteriormente, se contó con el apoyo de un observador participante. El proceso de observación se centró en la actividad matemática de los estudiantes durante el periodo de intervención de aula, con el fin de comprender el razonamiento de los estudiantes, sus avances conceptuales y sus comportamientos a la luz del marco teórico de la investigación.

b) *Cuestionario administrado en grupo*, según McKernan⁶² para aplicar el cuestionario se reúne al grupo de individuos objeto de estudio en un lugar para que respondan todas las preguntas propuestas en el cuestionario. Durante la investigación se aplicaron dos cuestionarios: el primero, una prueba diagnóstica, y el segundo, una prueba final para evaluar el proceso de intervención de aula.

c) *Secuencia didáctica*, según Pérez y Gardey⁶³ “una secuencia didáctica hace referencia al conjunto de actividades educativas que, encadenadas, permiten abordar de distintas maneras un objeto de estudio”. Las actividades se deben organizar de forma articulada y coherente en torno a un tema para crear las condiciones necesarias y planear las acciones pedagógicas que posibiliten al estudiante alcanzar la comprensión de un saber específico. Para Pérez⁶⁴ la secuencia didáctica tiene tres fases: *preparación, producción y evaluación*; y cada *actividad* de la secuencia debe estar caracterizada por: a) Tener un propósito de enseñanza b) Estar mediada por un objeto de saber c) Ser de carácter colectivo d) Estar compuesta por acciones que tengan una conexión coherente y se organicen en una secuencia progresiva y e) Conducir a un producto académico que manifieste la conquista del propósito de enseñanza.

⁶² *Ibíd.*, p. 146.

⁶³ PÉREZ PORTO, Julián y GARDEY Ana. Definición de secuencia didáctica. 2014. Disponible en: (<http://definicion.de/secuencia-didactica/>)

⁶⁴ PÉREZ, A. Mini Curso- Taller: Fundamentación, Diseño y Análisis de Situaciones Didácticas para el Trabajo en Aula en el Campo del Lenguaje. Bucaramanga, primer semestre académico. 2012, p.12.

La secuencia didáctica propuesta en esta investigación estuvo orientada hacia un aprendizaje significativo que potenciara el desarrollo del pensamiento numérico, por esto se propusieron problemas de complejidad creciente, variando el contexto de los mismos. Además, enfatizando en el posicionamiento crítico de los estudiantes y su proceso de comunicación en lenguaje natural y escrito, a través de la discusión de pequeños grupos.

Los instrumentos utilizados en el proceso fueron:

a) *Diario de campo*, en esta investigación este instrumento lo llevaron tanto la profesora investigadora como algunos estudiantes, la idea fue registrar de forma permanente las observaciones, reflexiones, hipótesis e interpretaciones personales, de tal manera que se lograra percibir todo lo que realmente ocurrió en clase.

b) *Grabaciones en video*, las sesiones de clase se grabaron completas, para lo cual se contó con la colaboración del observador participante, que fue quien manejó la cámara, esto permitió a la profesora investigadora intervenir de manera oportuna para problematizar las distintas soluciones de los estudiantes a los problemas propuestos en la SD. Las grabaciones en video luego pasaron a un proceso de transcripción, lo que posibilitó la selección de los episodios más relevantes de acuerdo al marco teórico de la investigación.

c) *Análisis de documentos*, la revisión de las hojas de trabajo de los estudiantes brindó información importante sobre el comportamiento de los estudiantes durante la implementación de la SD de acuerdo a las categorías definidas por Schoenfeld.

3.5 CRITERIOS ÉTICOS

Las cuestiones éticas asumidas para el desarrollo de esta investigación siguieron algunos de los criterios éticos propuestos por McKernan⁶⁵:

- ✓ Autorización por escrito de los directivos de la institución educativa para el desarrollo de la investigación.
- ✓ Autorización por escrito de los representantes legales de los estudiantes, aclarando que la participación de los estudiantes era voluntaria.
- ✓ El proceso investigativo inició una vez se obtuvieron los permisos de los representantes legales de los estudiantes y directivos de la institución.
- ✓ Informe a directivos, profesores del área de matemáticas, estudiantes y sus representantes legales sobre el objeto de investigación.
- ✓ Estricta confidencialidad de toda la información obtenida, protegiendo los nombres y datos de los participantes.
- ✓ Los resultados de la investigación se dieron a conocer a los miembros de la comunidad educativa.

⁶⁵ MCKERNAN, Op. cit., p. 262.

4 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis de la prueba diagnóstica, el análisis de cada actividad que conforma la secuencia didáctica y el análisis de la prueba final. Para llevar a cabo el análisis de datos se tomaron las categorías propuestas por Schoenfeld⁶⁶: *dominio del conocimiento o recursos, estrategias cognitivas o métodos heurísticos, estrategias metacognitivas y sistemas de creencias*, con el propósito de explicar el comportamiento de los estudiantes y caracterizar algunos elementos que influyen en el proceso de resolución de problemas relacionados con números enteros.

Con el fin de poder contrastar la prueba diagnóstica con la final se utilizaron dos instrumentos propuestos por Santos Trigo⁶⁷ para describir el trabajo mostrado por los estudiantes: el primero, un instrumento de evaluación de carácter cuantitativo; y el segundo, un instrumento con los indicadores asociados a la resolución de problemas.

Puntos	Trabajo mostrado por los estudiantes
0-1	Nada de trabajo o ideas sin relación.
2-3	Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno
4-5	Usa los datos, pero la estrategia no es clara.
6-7	Introduce un plan apropiado, pero éste es incompleto o es pobremente implantado.
8-9	Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta.
10	Solución completa y clara.

Tabla 3. Instrumento de evaluación de carácter cuantitativo, tomado de Santos Trigo

⁶⁶ SCHOENFELD, Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, Op. cit., 334-370.

⁶⁷ SANTOS Trigo, Op. cit., p. 173.

Solución	Desarrollo	Estrategias usadas
Correcta	Completo	Operaciones numéricas
Incorrecta	Incompleto	Uso de álgebra
Indeterminada	No requerido	Lista sistemática, tablas o un diagrama
En blanco	Sin unidades	Ensayo y error
	Sin conteo	Búsqueda de patrones
	Sin desarrollo	Casos simples
		Indeterminada

Tabla 4. Indicadores asociados a la solución del problema, tomado de Santos Trigo

4.1 ANÁLISIS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

La prueba diagnóstica pretendía indagar los conocimientos previos de los estudiantes e identificar las dificultades más comunes entre ellos cuando resuelven problemas relacionados con números enteros. De las respuestas dadas por los 15 estudiantes participantes se trató de inferir la comprensión del objeto matemático de investigación desde el enfoque teórico de Planteamiento y Resolución de Problemas.

En esta investigación se acogió la definición de dificultad dada por Becerra *et al.*, quienes señalan que “una dificultad es un conocimiento parcial que el estudiante tiene sobre un tema y, con motivo de este, incurre en errores cuando aborda tareas concretas”⁶⁸. Para el análisis de la prueba diagnóstica se consideraron las dificultades que han sido reportadas por Becerra *et al.*⁶⁹, Cid⁷⁰ y Bruno⁷¹, las cuales apoyaron el proceso de identificación de las dificultades que presentaron los estudiantes en la comprensión de números enteros.

⁶⁸ BECERRA, O., *et al.*, Op. cit., 9.

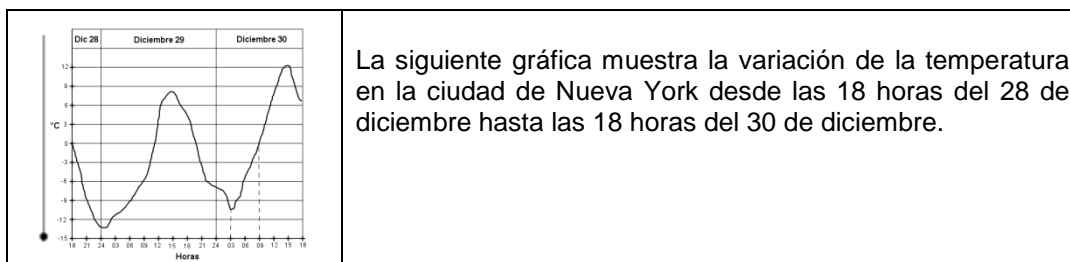
⁶⁹ *Ibíd.*, p. 9.

⁷⁰ CID, E., Op. cit., p. 4-5.

⁷¹ BRUNO, A., Op. cit., p. 236-251.

La prueba diagnóstica estuvo conformada por doce ítems: ocho ítems con formato de selección múltiple, en los que unas opciones de respuesta estaban asociadas con posibles errores o alguna dificultad; y cuatro ítems con formato abierto, que posibilitaron no sólo la descripción de las dificultades que presentaban los estudiantes, sino también se pudo evidenciar en las hojas de trabajo el proceso de resolución de los problemas para el análisis de las categorías. A continuación, se presenta una descripción de cada ítem de la prueba diagnóstica y el análisis de las respuestas de los estudiantes.

Los ítems 1 y 2 fueron tomados de la Prueba Saber 7° grado⁷², respetando el formato original de múltiple respuesta, situaba al estudiante en un contexto natural de variación de una magnitud, ya que pedía a los estudiantes que interpretaran una gráfica relacionada con el cambio de la temperatura en la ciudad de Nueva York. En estos ítems los recursos y técnicas que los estudiantes debían utilizar eran: números signados, recta numérica, expresiones aritméticas y adición de números enteros para poder hallar la medida de la temperatura en cada situación específica.



Ítem 1

De acuerdo con la gráfica, la menor temperatura que se presentó en estos días fue:

- A. -15°
- B. -13°
- C. 0°
- D. 12°

⁷² PRUEBA SABER 7°. Cuadernillo Simulacro Prueba Saber 7°. N. 201500892, 2017. p. 3. Disponible en: www.instruimos.com

La situación planteada en este ítem estuvo orientada a evaluar si los estudiantes identificaban el signo de un número entero teniendo en cuenta el contexto, es decir, si ellos asociaban los números positivos con expresiones de temperatura por encima de cero y los números negativos con expresiones de temperatura bajo cero. Se esperaba que los estudiantes usaran el diagrama o gráfica para que identificaran que la menor temperatura correspondía al punto más bajo de la gráfica, luego la opción correcta es la B.

En las respuestas dadas por los estudiantes a este ítem se observó que 40% de los estudiantes escogieron la opción A, 13% escogieron la opción B, 27% la opción C y 20% la opción D. La dificultad de los estudiantes que escogieron la opción A fue la lectura de la gráfica en un contexto, ya que no tomaron ningún punto que perteneciera a la curva de la variación de la temperatura. En cuanto a los estudiantes que escogieron la opción C o D posiblemente la dificultad fue dar sentido a un resultado negativo, al tomar el valor cero como el menor valor posible o al no considerar los valores negativos para la temperatura más baja.

Ítem 2

El 30 de diciembre a las 03 horas el termómetro marcó -10° y a las 09 horas del mismo día marcó -1° , esto significa que la temperatura en este lapso de tiempo:
A. aumentó 9°
B. disminuyó 9°
C. aumentó 11°
D. disminuyó 11°

El segundo ítem requería plantear una expresión aritmética de una situación aditiva que permitiera dar sentido a los datos. Para resolver este ítem era necesario que los estudiantes usaran como estrategia una operación numérica, es decir, realizaran una adición con las medidas suministradas, por lo tanto, la respuesta es la opción A.

Al analizar las respuestas de los estudiantes a este ítem se encontró que 20% escogió la opción A, 40% escogió la opción B, 27% la opción C y 13% la opción D. Aquellos estudiantes que escogieron la opción B, C o D probablemente la dificultad

estuvo en plantear una expresión aritmética, malinterpretando expresiones como disminuyó y/o aumentó. También, puede asociarse este tipo de errores a dificultades en la utilización del lenguaje matemático y/o verbal en situaciones aditivas.

Ítem 3

Si un automóvil avanzó 150 km y luego retrocedió 100 km. ¿Qué distancia recorrió?
A. 100 km
B. - 250 km
C. 250 km
D. 50 km

El tercer ítem, tomado de Borjas⁷³, se desarrolla en un contexto de cinemática, ya que se relacionaba con el desplazamiento de un cuerpo. Durante el proceso de resolución de este ítem el estudiante necesitaba utilizar los conceptos de números signados, recta numérica y valor absoluto. En este caso en particular $a = 150$ y $r = 100$, los estudiantes podían usar estrategias de tipo numérico o un diagrama para hallar la distancia entre estos dos números, como $|150 - 100| = 50$ y la distancia está dada en kilómetros, la respuesta correcta es 50 km, opción D.

Se observó que 53% de los estudiantes escogieron la opción C, 47% la opción D, ningún estudiante escogió la opción A, ni la opción B. Se consideró que la mayoría de los estudiantes presentó en este ítem dificultad en la utilización de la recta numérica para la adición de números enteros, en el lenguaje matemático y/o verbal en situaciones aditivas o en procedimiento relacionados con el valor absoluto.

Ítem 4

LA SIGUIENTE TABLA REGISTRA LA TEMPERATURA MEDIA APROXIMADA EN LA SUPERFICIE DE LOS PLANETAS:

⁷³ BORJAS, Op. cit., p. 102.

Mercurio	464 °C
Venus	400 °C
Tierra	20 °C
Marte	- 22 °C
Júpiter	- 130 °C
Saturno	- 180 °C
Urano	- 190 °C
Neptuno	- 220 °C
Plutón	- 250 °C

Si un astronauta sale de Neptuno, llega a otro planeta y al llegar lee en sus instrumentos que la temperatura ha variado 30 grados, ¿A qué planeta llegó? De las siguientes proposiciones verdaderas elige la más adecuada.

- A. A Plutón, porque la diferencia entre $- 220$ y $- 250$ es 30° .
- B. A Urano, porque al viajar de Neptuno a Urano la temperatura aumenta en 30° .
- C. A Plutón, porque al viajar de Neptuno a Plutón la temperatura disminuye en 30° .
- D. Puede haber llegado a Urano o a Plutón, porque en ambos casos la diferencia es 30°

El cuarto ítem, tomado de Camargo⁷⁴, al igual que el ítem 1 y 2 se ubica en un contexto natural de variación de una magnitud, ya que pedía a los estudiantes que interpretaran una tabla de datos sobre la temperatura media de los planetas del sistema solar. En este ítem, algunos de los recursos y técnicas que el estudiante necesitaba para plantear una solución eran: números signados, asociación de expresiones como aumenta o disminuye con las operaciones de adición y sustracción de números enteros. Se esperaba que los estudiantes se dieran cuenta que varias soluciones podían ajustarse, pero que debían reportar la respuesta más adecuada a las condiciones del problema, luego la respuesta es la opción D. En el proceso de solución del problema los estudiantes podían recurrir a estrategias de ensayo y error, operaciones numéricas o diagramas.

En este ítem 40% de los estudiantes seleccionaron la opción A, 27% la opción B, 13% la opción C y 20% la opción D. La dificultad en este ítem pudo estar relacionada con la interpretación inadecuada del lenguaje matemático y verbal en situaciones aditivas, malinterpretando expresiones como aumenta o disminuye.

⁷⁴ CAMARGO URIBE, Leonor. Pruebas Saber de Matemáticas, grado séptimo. Colombia: Editorial Norma, S. A, 2002, p. 3-4.

Ítem 5

Si al resultado de dos veces -3 , restado con -5 y sumado con 6 , se le resta -7 y se vuelve a restar 12 , ¿qué número se obtiene?

- A. -24
- B. 0
- C. 12
- D. 24

Este ítem, tomado de la Prueba Discovery⁷⁵, situaba a los estudiantes en un contexto operacional. El ítem contemplaba que los estudiantes necesitarían entre sus recursos para la resolución del problema conceptos como: números signados, adición y sustracción de enteros y signos de agrupación. Para resolver esta situación los estudiantes tenían que usar una estrategia operacional, es decir, plantear una expresión aritmética usando signos de agrupación a partir del enunciado propuesto, por tanto, la respuesta correcta es la B.

El análisis de las respuestas mostró que 7% de los estudiantes no respondió e este ítem, 7% escogió la opción A, 33% escogió la opción B, 40% la C y 13% la D. Los resultados mostraron que la mayoría de estudiantes presentaban dificultades asociadas a la comprensión del lenguaje matemático en situaciones aditivas y/o dificultad para realizar operaciones de adición y sustracción en números enteros.

Ítem 6

En un juego, Pamela tiene 120 puntos a favor ($+120$) y 150 puntos en contra (-150). ¿Qué puntaje tiene Pamela en el juego?

- A. 270 puntos
- B. 30 puntos
- C. (-30) puntos
- D. (-270) puntos

El sexto ítem, adaptada de la Prueba Discovery⁷⁶, se ubicaba en un contexto familiar para los estudiantes, pues estaba asociado a la asignación de puntos en un juego.

⁷⁵ PRUEBA DISCOVERY. Cuadernillo Saber 7. N. 201500837, 2017. p. 6. Disponible en: www.instruimos.com

⁷⁶ PRUEBA DISCOVERY. Cuadernillo Saber 7. N. 201500888, 2017 p. 7. Disponible en: www.instruimos.com

Con este ítem se pretendía indagar si los estudiantes comprendían conceptos como números signados, signos de agrupación y adición de números enteros. Para definir el puntaje final de Pamela en el juego, los estudiantes debían recurrir a una estrategia aditiva, es decir, sumar los puntos a favor con los puntos en contra, para un total de -30 puntos.

En este ítem 33% de los estudiantes seleccionaron la opción A, 27% opción B, 20% opción C, 7% la opción D, y no respondió 13% de los estudiantes. La dificultad al realizar la operación planteada pudo estar relacionada a errores como prescindir del signo de los números enteros al realizar la operación.

Ítem 7

Con la intención de restringir el uso de su computador por otras personas. Lucía lo configura de modo que la contraseña para iniciar sesión sea la respuesta correcta al ítem que se muestra en la pantalla.

Ingrese un término cuyo resultado sea igual a -3

De las siguientes expresiones, la que le permite iniciar sesión es:

- A. $\{- [+ (- 3)]\}$
- B. $\{- [- (+ 3)]\}$
- C. $\{- [+ (+ 3)]\}$
- D. $\{+ [- (- 3)]\}$

El séptimo ítem, al igual que los anteriores fue tomado de Prueba Saber 7° grado⁷⁷, se desarrolla en un contexto tecnológico. Este ítem se centró en los conceptos y procedimientos relacionados con número signado, ley de signos y uso de signos de agrupación. Para hallar el término que permitía iniciar la sesión en el computador los estudiantes tenían que suprimir signos de agrupación teniendo en cuenta la ley de los signos, por tanto, es la opción C.

En las respuestas a este ítem se encontró que 33% de los estudiantes escogieron la opción A, 13% la opción B, 27% la opción C, 20% la opción D y 7% no respondió. La mayoría de los estudiantes no respondió correctamente a este ítem, las

⁷⁷ PRUEBA SABER 7°. Cuadernillo Simulacro Prueba Saber 7°. N. 201500892, 2017. p. 7. Disponible en: www.instruimos.com

dificultades estuvieron asociadas a la omisión de los signos de agrupación al resolver una operación aritmética o al uso inadecuado de la ley de los signos.

Ítem 8

Observa la recta numérica.

¿Qué número se debe escribir en ?

A. 15
B. -15
C. -5
D. 30

El octavo ítem, adaptada de la Prueba Saber 5° 2012⁷⁸, se ubica en un contexto geométrico, pretendía evaluar el conocimiento relevante asociado con el dominio de recursos como números signados, orden de los números enteros, recta numérica, y correspondencia de los números enteros en la recta numérica. En este ítem, los estudiantes podían recurrir a heurísticas como el uso de diagramas, o sea, el uso de la recta numérica para ubicar el número entero en la misma posición del cuadrado en la recta numérica, luego la opción correcta es la C.

En este ítem se observó que 7% de los estudiantes escogieron la opción A, 7% la opción B, 86% la opción C y 0% la opción D. La mayoría de estudiantes escogió la opción correcta. No obstante, algunos estudiantes tuvieron dificultades en el uso de la recta numérica, ya que, incurrieron en errores como ordenar de manera inapropiada los números negativos y positivos en la recta numérica extrapolando el orden de los naturales a los negativos, o establecieron inadecuadamente la correspondencia entre el conjunto de los números enteros y los puntos de la recta numérica.

⁷⁸ SABER 3°, 5° y 9° 2012. Cuadernillo de Prueba Matemáticas 5° grado. Segunda Edición, MEN, 2012. p. 13. Disponible en: [file:///C:/Users/a/Downloads/Ejemplos%20de%20preguntas%20saber%209%20matematicas%202013%20v3%20\(5\).pdf](file:///C:/Users/a/Downloads/Ejemplos%20de%20preguntas%20saber%209%20matematicas%202013%20v3%20(5).pdf)

Los ítems 9 y 10, tomados de Becerra et al.⁷⁹, son ítems de formato abierto presentados en un contexto deportivo, un torneo de fútbol, que retomaron conceptos como: números signados y relativos, adición y orden de números enteros. Para resolver estos ítems los estudiantes necesitaban leer e interpretar la información presentada en la siguiente tabla.

Equipos	Primera ronda		Segunda ronda		Puntajes		Resultado final
	Puntos a favor	Puntos en contra	Puntos a favor	Puntos en contra	Primera ronda	Segunda ronda	
A	1	0	5	0			+6
B	0	4	0	3			-7
C	5	0	2	0			+7
D	0	2	0	4			-6
E	3	0	0	5	+3	-5	-2
F	1	2	2	4	-1	-2	-3
G	4	0	6	1		+5	+9

En la siguiente tabla se muestran los puntos a favor y en contra de los equipos participantes en un torneo interno de fútbol para los diferentes cursos de grado séptimo.

Ítem 9

- a) Para la primera ronda, entre los equipos A y C ¿quién obtuvo mayor puntaje?;
 b) Entre B y D ¿quién obtuvo mayor puntaje en la segunda ronda?

El noveno ítem permitió evaluar que los estudiantes asociaran expresiones con números enteros, es decir, que representaran “los puntos a favor” como enteros positivos y “los puntos en contra” como enteros negativos. Además, evaluaba que los estudiantes logaran establecer relaciones de orden entre números enteros para que decidieran cuál equipo obtuvo el mayor puntaje. En el ítem (a) para definir el equipo con mayor puntaje en la primera ronda entre A y C, los estudiantes podían recurrir a una estrategia de conteo de los puntos a favor, por ende, A tiene +1 y C tiene +5, luego C es el equipo con mayor puntaje. En ítem (b) para definir el equipo con mayor puntaje en la segunda ronda entre B y D, los estudiantes podían de nuevo

⁷⁹ BECERRA, O., et al. Op. cit., p. 13.

recurrir a una estrategia de conteo, pero de los puntos en contra, por tanto, B tiene -3 y D tiene -4, luego B obtuvo mayor puntaje.

En el análisis de las respuestas al ítem (a) se evidenció que la mayoría de estudiantes escogió correctamente el equipo con mayor puntaje. Sin embargo, en el ítem (b) los estudiantes al enfrentar este problema presentaron dificultad para dar sentido a los resultados negativos, pues consideraron que el puntaje de los equipos era el mismo, o que los equipos por tener puntos en contra ninguno podía tener mayor puntaje, o simplemente ignoraron el signo negativo. Esto se pudo observar en los argumentos dados por ellos, por ejemplo: E-14: "Entre los equipos A y C obtuvo mayor puntaje fue el equipo C, entre los equipos D y B juntos obtuvieron el mismo resultado"; E-13: "Primer ronda A y C el mayor puntaje C. Segunda ronda B y D, el mayor puntaje D". A continuación, se presenta la figura 8 con las justificaciones dadas por los estudiantes, a la izquierda la respuesta de E-04 y a la derecha la respuesta de E-12:

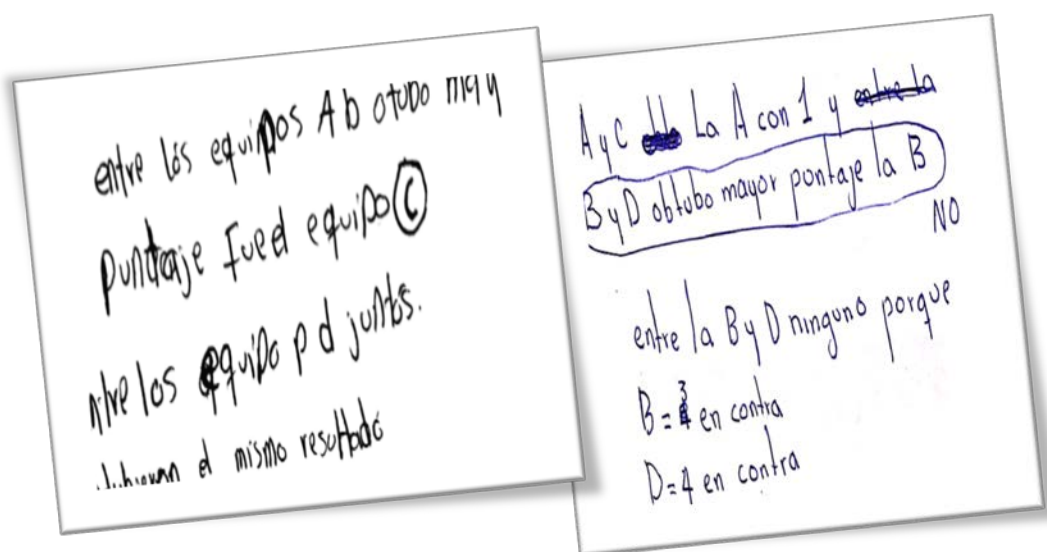


Figura 8. Procesos de solución de los estudiantes E-04 y E-12 en el ítem 9

Ítem 10

De acuerdo con la tabla, ¿cuál es el orden de la premiación?

El décimo ítem estuvo orientado a evaluar en los estudiantes el dominio de los recursos de adición en el conjunto de los enteros y sus relaciones de orden. Se esperaba que los estudiantes plantearan una estrategia operacional, es decir, usaran la adición entre números enteros de igual signo, correspondientes a los puntos de cada equipo obtenidos en la primera y segunda ronda, para hallar el resultado final. Luego, con los resultados finales, los estudiantes establecieran relaciones de orden para organizar la premiación. Por tanto, los estudiantes tenían que ordenar los resultados finales de manera descendente como se muestran a continuación:

EQUIPO	G	C	A	E	F	D	B
RESULTADO FINAL	+9	+7	+6	-2	-3	-6	-7

Analizando las respuestas al ítem 10 se hallaron respuestas incompletas, donde los estudiantes se limitaron a presentar el equipo con mayor puntaje, por ejemplo: E-12: *“La letra G con 4 puntos”*; E-09: *“Resultados finales. La letra G”*. Solo algunos estudiantes justificaron sus respuestas e hicieron visible el procedimiento utilizado. Se pudo observar que el error en que incurrieron estuvo al ordenar los números negativos y positivos, extrapolando el orden de los naturales a los negativos, para asignar el orden en la premiación, tal como E-04 y E-07, a continuación, se presentan sus hojas de trabajo, a la izquierda la respuesta de E-04 y a la derecha la respuesta de E-07:

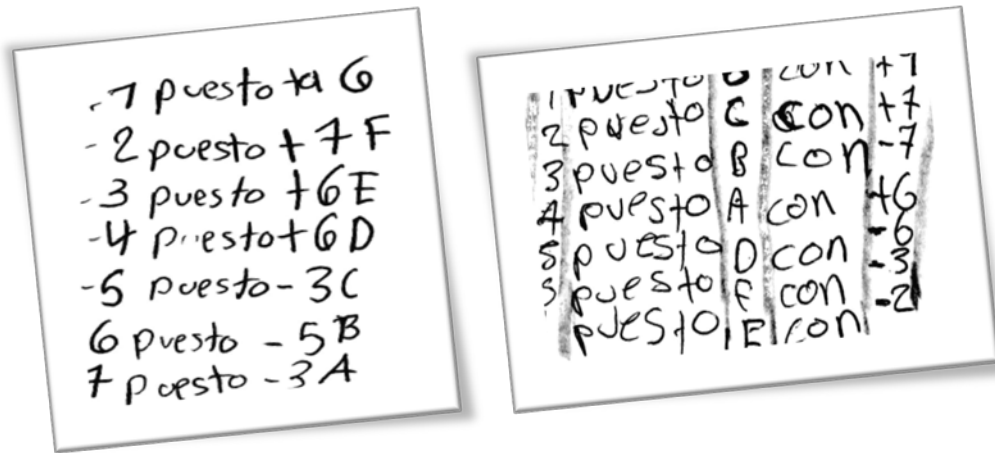


Figura 9. Procesos de solución de los estudiantes E-04 y E-07 en el ítem 10

Ítem 11

Con el número + 20 indicamos la posición de un globo con respecto al mar. ¿Qué números asignarías al avión, al barco y al submarino?



El undécimo ítem fue adaptado de Borjas⁸⁰, se situaba en un contexto natural. Para resolver el problema planteado, los recursos que el estudiante necesitaba eran números signados, recta numérica y valor absoluto, y los procedimientos estaban relacionados con la correspondencia de los enteros en la recta. En este ítem los estudiantes tenían que tomar un punto de referencia, el cero, para empezar a asignar un número entero que representara la altura o la profundidad de los objetos respecto a ese punto. Las posibles estrategias cognitivas que los estudiantes podían usar incluían métodos heurísticos como representación gráfica de la recta numérica, diagramas y/o establecimiento de una escala de medida.

⁸⁰ BORJAS, Op. cit., p. 70.

En las respuestas dadas por los estudiantes se pudo observar que una de las dificultades en este ítem fue asociar la altura de los objetos ubicados sobre el nivel del mar con enteros positivos, la profundidad de objetos bajo el nivel del mar con enteros negativos y el nivel del mar con la posición cero. Otra dificultad que se presentó en los estudiantes fue que no tuvieron en cuenta la recta numérica y asignaron números a los objetos sin reparar que el espacio entre números enteros consecutivos debe ser igual, esto se puede observar en las hojas de trabajo de E-05 y E-09, que aparecen a continuación en su respectivo orden.

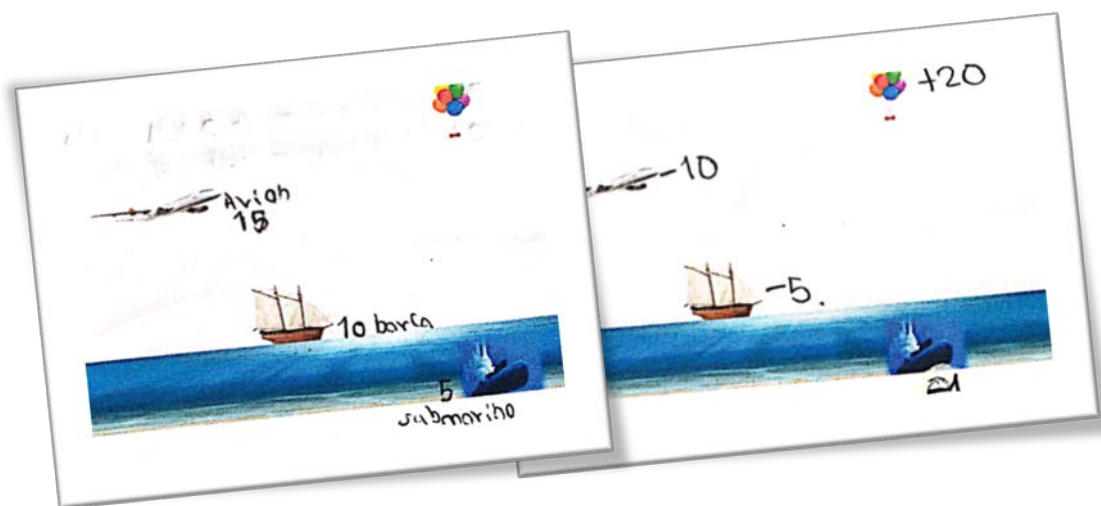
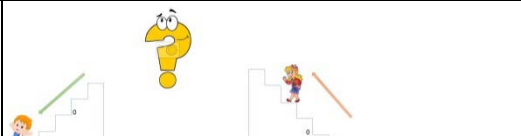


Figura 10. Procesos de solución de los estudiantes E-05 y E-09 en el ítem 11

En la figura 10 se puede observar que los estudiantes no seleccionaron las estrategias que se habían considerado en el diseño de la prueba, ellos asignaron un valor numérico a cada objeto sin tener en cuenta la recta numérica. Al parecer los estudiantes utilizaron la estrategia de asignar un valor numérico a cada objeto, y no sintieron la necesidad de cambiar esa estrategia, ya que no se evidencian procedimientos alternos en las hojas de trabajo.

Ítem 12

<p>Expresa con un número los desplazamientos que realizan Martha y Pablo en cada escalera.</p>	
--	--

Por último, el ítem 12 fue adaptado de Borjas⁸¹ a un contexto familiar, con algunas modificaciones del formato original. Al igual que el ítem anterior, en este ítem los estudiantes debían tener dominio de los siguientes recursos: números signados, orden de los números enteros, recta numérica y correspondencia de los números enteros en la recta numérica. En este ítem se pedía a los estudiantes expresar en lenguaje matemático los desplazamientos de dos niños. Inicialmente los estudiantes podían usar el diagrama que el mismo problema proporciona o usar directamente la recta numérica.

Una de las dificultades observadas en las respuestas a este ítem fue que algunos estudiantes no tomaron la posición del cero como punto de referencia, por lo cual no logran asociar los desplazamientos hacia arriba, a partir de cero, con los enteros positivos y los desplazamientos hacia abajo, a partir de cero, con los enteros negativos. Otra dificultad de los estudiantes al abordar este tipo de tareas fue dar sentido a los números negativos en un contexto diferente al matemático.

⁸¹ BORJAS, Op. cit., p. 74.

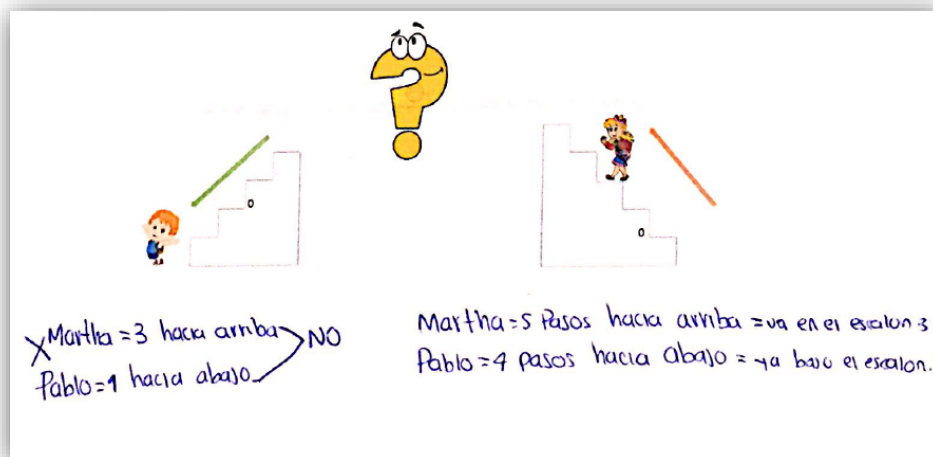
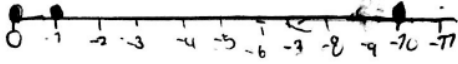


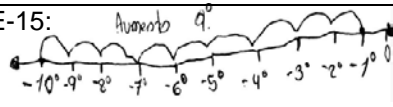
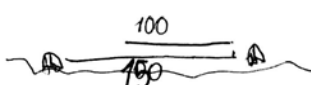
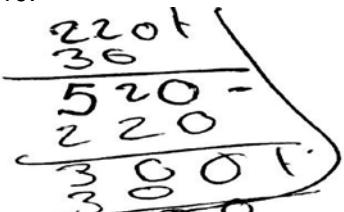
Figura 11. Proceso de solución del estudiante E-13 en el ítem 13

En la figura 11 se puede observar que el estudiante tachó el procedimiento inicial, donde había considerado el cero como una de las condiciones relevantes del problema. La segunda estrategia muestra que el estudiante tuvo dificultad en la utilización de la recta numérica y que prescindió del signo negativo, por lo cual E-13 se limitó a usar una estrategia de conteo de los escalones de la figura y a indicar la dirección de la flecha, por tanto, en su respuesta asoció un desplazamiento de 4 pasos hacia abajo para Pablo y 5 pasos hacia arriba para Martha. A continuación, se presenta en la tabla 5 la evaluación cuantitativa del trabajo mostrado por los estudiantes a cada ítem de la prueba diagnóstica, para cada fase asociada al proceso de solución del problema se muestran ejemplos de algunas de las respuestas dadas por los estudiantes.

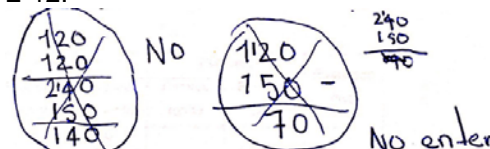
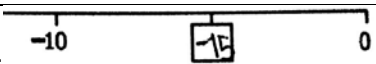
Para finalizar el análisis de la prueba diagnóstica se presentan dos tablas resumen. La primera concierne a las principales dificultades que se observaron en los estudiantes participantes en cuanto a la comprensión del objeto matemático de esta investigación. La segunda tabla corresponde a una evaluación a nivel general del proceso de solución de cada problema de la prueba diagnóstica, no obstante, en el

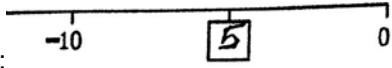

anexo 15 se presenta una evaluación similar para cada estudiante. A continuación, se presenta la primera tabla, en esta tabla se puede observar en la primera columna los recursos necesarios para resolver los problemas de la prueba, en la segunda

Prueba diagnóstica				
Problema	Puntos	Trabajo mostrado por los estudiantes	Estudiantes	Ejemplos de algunas respuestas dadas por los estudiantes
1	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación		E-01, E-02, E-03, E-04, E-06, E-07, E-08, E-09, E-10, E-11, E-12, E-13, E-14, E-15	E-11: Sero
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.			
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara			
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado			
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta			
	[10] Solución completa y clara			
2	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación		E-03, E-04, E-05, E-06, E-08, E-10, E-11, E-13	E-04: $03 \rightarrow -10^\circ$ $\begin{array}{r} 03 \\ -10 \\ \hline 09 \\ 12 + 11^\circ \end{array}$
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.			
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara		E-01, E-02, E-07, E-09, E-12, E-14	E-09: $\begin{array}{r} 3 \text{ horas/marco} - 10^\circ \\ 9 \text{ horas/marco} - 1^\circ \\ \hline \text{disminuye } 9^\circ \end{array}$ $\begin{array}{r} 10 \\ -1 \\ \hline 9 \end{array}$ E-01:  E-07: $\begin{array}{r} 9 + \\ \hline 3 \\ 12 \end{array}$ $\begin{array}{r} 12 - \\ \hline 7 \\ 11 \end{array}$

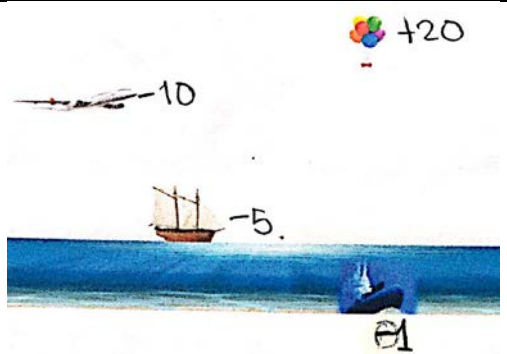
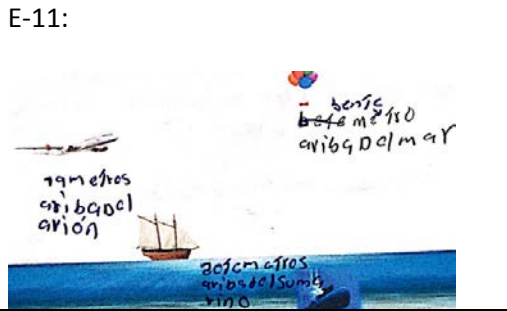
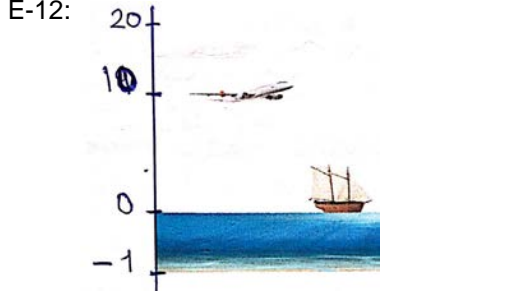
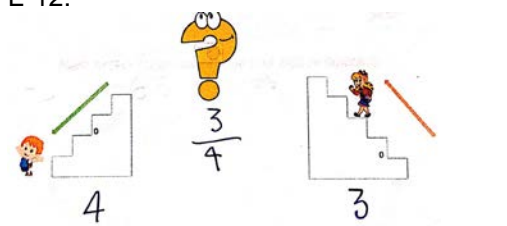
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta	E-15	E-15: 
	[10] Solución completa y clara		
3	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-05	"Nada de trabajo"
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.	E-15	E-15: 
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-01, E-03, E-06, E-07, E-10, E-12, E-13, E-14	E-13: $\begin{array}{r} 150+ \\ 100 \\ \hline 250 \text{ km} \end{array}$
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-02, E-08, E-09, E-04, E-11	E-02: $\begin{array}{r} 150 \\ -100 \\ \hline 050 \text{ km} \end{array}$
4	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-03, E-04, E-05, E-06, E-08, E-10, E-11, E-12, E-13, E-14	E-10: 
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.	E-01, E-15	E-15: $-220 - 190 \text{ Urano}$ Disminuye 30°
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-07, E-09	E-09: $\begin{array}{r} 220+ \\ 30+ \\ \hline 250 = \text{pluton} \end{array}$

	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado	
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta	
	[10] Solución completa y clara	E-02 E-02: $\begin{array}{r} 150 \\ -100 \\ \hline 050 \text{ km} \end{array}$
5	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-03, E-04, E-05, E-08, E-11 E-03: $\begin{array}{r} 30 - 25 \\ \hline 5 \\ 25 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{25} \\ \hline \cancel{41} \end{array}$
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.	E-02, E-06, E-15 E-02: $\begin{array}{ccccccc} & 16 & & & & & \\ -3 & -5 & 6 & -7 & 12 & & \end{array}$
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-01, E-06, E-07, E-09, E-10, E-12, E-13, E-14, E-15 E-13: $-3 + -3, -5 = 1 + 6 = 8? \text{ X No.}$ E-06: $\begin{array}{ccccccc} -3 & -5 & 6 & -7 & 12 & & \\ \hline -3 & 8 & 11 & -7 & 12 & & \\ 8 & 11 & 17 & 12 & 13 & & \end{array}$
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado	
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta	
	[10] Solución completa y clara	
6	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-05, E-06, E-11 E-11: $\{ \{ 2 + (-3) \} \} \quad 5 - 2 = 3$ $\{ \{ 2 + 3 \} \}$ $\{ \{ 3 + 3 \} \}$

	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.		
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-01, E-03, E-04, E-07, E-08, E-09, E-10, E-12, E-13, E-15	E-08: $\begin{array}{r} 120 \\ 150 + \\ \hline 270 \end{array}$ E-12: 
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-02, E-14	E-02: $(+120) + (-150) = -30$
7	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-02, E-03, E-04, E-05, E-06, E-07, E-08, E-09, E-10, E-11, E-12, E-13, E-14, E-15	E-15: $+x - = -3$
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.		
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-01	E-01: $+E = (+30)$ Por que nos por tener respuesta y que el otro (-3)
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara		
8	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-03, E-04, E-09	E-09: 
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.		

	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara		
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta	E-01, E-11	E-11: 
	[10] Solución completa y clara	E-02, E-05, E-06, E-07, E-08, E-10, E-12, E-13, E-14, E-15	E-08: 
9A	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-02, E-08, E-13	E-08: A: de A Porque cuando son mas ^{pequeños} grandes los numeros son mas altos.
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno	E-03, E-12, E-15	E-15: Entre A y C (hay) obtuvo mayor: A A C 5 1
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara		
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-04, E-05, E-06, E-07, E-09, E-10, E-11, E-14	E-05: Primer ronda A y C el mayor puntaje C segunda ronda B y D el mayor puntaje D
9B	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-02, E-03, E-10, E-12	E-10: El A y B tubo el mayor porque tubo a favor
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.	E-04, E-11	entre 10 y 11 obtubieron el mismo resultado
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-05, E-06, E-08, E-09, E-13	E-04: E-13: Entre B y D = las 2 equipos tienen la misma cantidad de numeros (10) puntaje.

	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-07, E-14, E-15	<p>obtuvo B y D Mayor : B</p> <p>con puntos en contra B 0 en contra 3 4.</p>
10	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-02, E-03	<p>E-03:</p> <p>los que reciben la premiación los ACB Reciben la premiación</p> <p>AG+ C7+ G9+ E2.</p>
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.	E-05 E-06, E-09, E-11, E-12	<p>E-06:</p> <p>G 9 porque tiene mas puntos</p>
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-07, E-04, E-08, E-10	<p>E-04:</p> <p>- 7 puesto + G - 2 puesto + F F - 3 puesto + E - 4 puesto + D - 5 puesto - 3 C - 6 puesto - 5 B 7 puesto - 3 A</p>
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-13, E-14, E-15	<p>E-13:</p> <p>A = +6 B = -7 C = +7 D = -6 E = -2 F = -3 G = +9</p> <p>Orden A = 3 Puesto B = 7 Puesto C = 2 Puesto D = 6 Puesto E = 4 Puesto F = 5 Puesto G = 1 Puesto</p>

11	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-02, E-03, E-04, E-07, E-09, E-13	
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno	E-01, E-05, E-06, E-08, E-10, E-11, E-14, E-15	E-11: 
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-12	E-12: 
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara		
12	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-03, E-04, E-07, E-09, E-10, E-12, E-13, E-14	E-12: 

columna los ítems relacionados a esos recursos, en la tercera columna y última, las dificultades que se evidenciaron en las respuestas de los estudiantes en esos ítems.

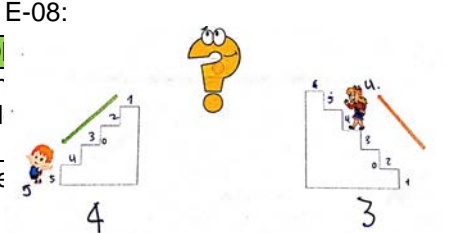
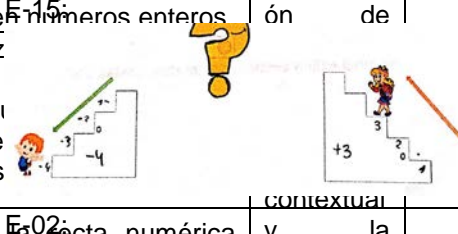
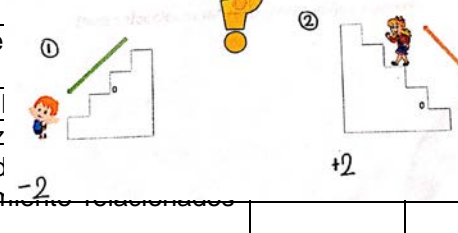
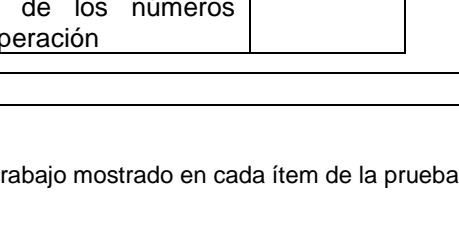
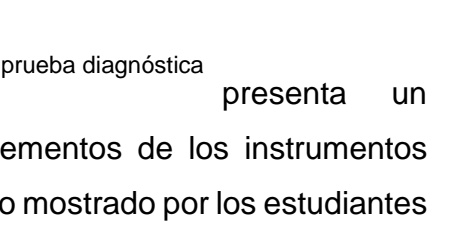
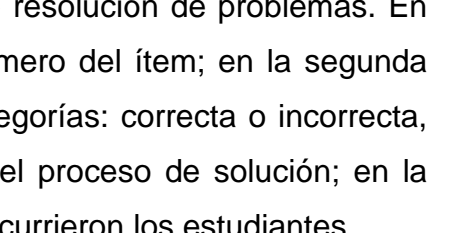

RECURSOS	ÍTEMS	D	E-05 E-06, E-08:
Números Signados y/o relativos	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	Dificultad para dar ser negativo o prescindir d	
Adición y Sustracción	1, 2, 5, 6, 10	Dificultad para plante aritmética. Dificultad para realiz	
Recta numérica	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara 8, 8, 11, 12	Dificultad en la utiliz numérica. Establecer adecu correspondencia entre números enteros y los numérica.	
Orden en los enteros	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado 1, 8, 9, 10, 11, 12	Definir la escala de (unidades de medida) Extrapolar el orden de negativos	
Ley de signos	7	Uso inapropiado de la	
Valor absoluto	3	Dificultad en la utiliz numérica para la ad enteros o en procedin	
Signos agrupación	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta de 8, 7	Prescindir del signo de los números enteros al realizar la operación	
	[10] Solución completa y clara		

Tabla 5. Evaluación cuantitativa de los estudiantes de acuerdo al trabajo mostrado en cada ítem de la prueba diagnóstica

Tabla 6. Dificultades identificadas en la prueba diagnóstica

La siguiente tabla presenta un resumen de tipo cuantitativo, que toma algunos elementos de los instrumentos propuestos por Santos Trigo⁸², para describir el trabajo mostrado por los estudiantes y algunos indicadores asociados a sus procesos de resolución de problemas. En esta tabla se observa en la primera columna el número del ítem; en la segunda columna el tipo de solución, subdividida en dos categorías: correcta o incorrecta, cada una acompañada de una breve descripción del proceso de solución; en la tercera y última columna, las estrategias a las que recurrieron los estudiantes.

⁸² SANTOS TRIGO, Op. cit., p. 173- 174.

Ítem	Solución				Estrategias usadas
	Correcta	Trabajo mostrado	Incorrecto	Trabajo mostrado	
1	14%	Sin procedimiento alguno	86%	Nada de trabajo o ideas sin relación.	Indeterminada
2	21%	Sólo el 7% presentó una solución completa y clara.	79%	Usa datos, pero la estrategia no es clara.	Operaciones numéricas Recta numérica
3	47%	Sólo el 33% presentó una solución completa y clara.	57%	Usa datos, pero la estrategia no es clara.	Operaciones numéricas Recta numérica
4	20%	Sólo el 7% presentó una solución completa y clara.	80%	Nada de trabajo o ideas sin relación.	Operaciones numéricas
5	33%	Usa datos, pero la estrategia no es clara.	67%	Usa datos, pero la estrategia no es clara.	Operaciones numéricas
6	20%	Solución completa y clara.	80%	Usa datos, pero la estrategia no es clara.	Operaciones numéricas
7	27%	Nada de trabajo o ideas sin relación.	73%	Sin procedimiento alguno.	Indeterminada
8	86%	Sin procedimiento alguno	14%	Sin procedimiento alguno.	Indeterminada
9	a.7%	Solución completa y clara.	93%	Identifica los datos, pero no introduce un plan apropiado	Lista sistemática
	b.7%		93%		
10	54%	Sólo el 27% presentó una solución completa y clara.	46%	Identifica los datos, pero no introduce un plan apropiado	Indeterminada
11	7%	Solución completa y clara	93%	Nada de trabajo o ideas sin relación	Recta numérica Números sobre objetos.
12	0%	Nada de trabajo o ideas sin relación	100%	Nada de trabajo o ideas sin relación	Números sobre objetos

Tabla 7. Indicadores asociados al proceso de resolución de problemas en la prueba diagnóstica

A nivel grupal, se observó en el análisis de la prueba diagnóstica que la mayoría de los estudiantes respondió de forma incorrecta a los ítems de la prueba, cabe señalar que no fue igual en los problemas que sólo implicaban números positivos, como los ítems 3 y 9 (a). También, resulta interesante ver que en las respuestas de los

estudiantes al ítem 8 el 86% respondieron correctamente, sin embargo, en los demás ítems relacionados con el uso de la recta numérica y orden de los enteros (3, 11 y 12) se evidenció poco dominio en el uso de esos recursos.

Por otra parte, en los problemas 11 y 12 surgió el obstáculo epistemológico de la ambigüedad entre los dos ceros reportado por Cid⁸³, los estudiantes presentaron muchas contrariedades para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente. Otras dificultades identificadas a nivel general en todos los ítems, que han sido reportadas por Bruno⁸⁴, fueron la comprensión de textos y la transferencia entre la dimensión contextual a la abstracta.

4.2 ANÁLISIS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En esta investigación, el segundo paso en la etapa de diagnóstico y problematización fue el diseño de la secuencia didáctica para estudiantes de séptimo grado de nivel básico (secundaria) con el objeto de potenciar el pensamiento numérico. Específicamente, esta secuencia posibilita al estudiante el trabajo de situaciones problemáticas sobre el conjunto de los números enteros en diferentes contextos. La secuencia didáctica se implementó en las clases regulares de matemática en la institución educativa objeto de estudio. Al finalizar la implementación de la secuencia didáctica se esperaba que los estudiantes fortalecieran la competencia de comunicación y representación en la comprensión de números enteros.

El análisis de la SD se organizó en dos partes: análisis preliminar y análisis de la implementación de la SD, siguiendo los instrumentos propuesto por Pérez⁸⁵. En el análisis preliminar se realizó la planeación general de la SD y luego una planeación de cada una de las actividades propuestas. En el análisis de la implementación de la

⁸³ CID. Op. cit., p. 4-5.

⁸⁴ BRUNO. Op. cit., p. 236-251.

⁸⁵ PÉREZ. Op. cit., p. 12.

SD se realizó una descripción y categorización de los elementos que influyen en el proceso de resolución de problemas a la luz del enfoque teórico.

4.2.1 Análisis preliminar de la secuencia didáctica.

El proceso de análisis preliminar se realizó en dos fases siguiendo los instrumentos de Pérez Abril: la primera fase comprende la planeación general de la SD en la que se modificó el instrumento con algunos elementos de la estructura propuesta por Díaz Barriga⁸⁶; y la segunda fase corresponde a la sistematización de cada una de las ocho actividades que conforman la SD.

A continuación, se presenta la planeación general de la secuencia didáctica “Resolución de problemas de situaciones aditivas con números enteros en diferentes contextos”.

Planeación General SD	
Asignatura	Matemáticas
Unidad temática	Números enteros
Tema general	Adición y sustracción de números enteros
Contenidos	El conjunto de los números enteros Representación en la recta numérica de los números enteros Adición de números enteros Sustracción de números enteros Propiedades de la adición y sustracción de números enteros Planeamiento y solución de problemas con números enteros
Duración de la secuencia y número de sesiones previstas	La secuencia didáctica tiene una duración aproximada de 24 horas, está integrada por 8 sesiones de 3 horas cada una, anexos 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. La primera sesión pretende familiarizar a los estudiantes con el tipo de trabajo que se quiere instaurar en el aula de clase y las demás se centran desarrollar competencias matemáticas a través de alguno de los contenidos propuestos en la SD. En las actividades 1, 2, 4, 5, 7 y 8 se trabajan adición y la sustracción de números enteros a lápiz y papel, y en las actividades 3 y 6 con el software libre “Geogebra”. Sesión 1. Actividad A “El laberinto”.

⁸⁶ DÍAZ BARRIGA, A. Guía para la elaboración de una Secuencia Didáctica. Comunidad de Conocimiento UNAM. Disponible en: http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluaci%C3%B3n/Factores%20de%20Evaluaci%C3%B3n/Pr%C3%A1ctica%20Profesional/Gu%C3%ADa-secuencias-didacticas_Angel%20D%C3%ADaz.pdf

	<p>Sesión 2. Actividad B “Las 7 maravillas del mundo”.</p> <p>Sesión 3. Actividad C “Representando Situaciones Aditivas en la Recta Numérica”.</p> <p>Sesión 4. Actividad D “En busca del tesoro”.</p> <p>Sesión 5. Actividad E “La Cafetería”.</p> <p>Sesión 6. Actividad F “Sustracción de números enteros en la recta numérica”.</p> <p>Sesión 7. Actividad G “Campeonato Interligas”.</p> <p>Sesión 8. Actividad H “El clima”.</p>
Estándar	<p>Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.</p> <p>Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.</p> <p>Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.</p>
Referentes teóricos, de enfoque, metodológicos, pedagógicos y/o didácticos	<p>Enfoque de planteamiento y resolución de problemas.</p> <p>Nociones sobre números enteros y sus fuentes de dificultad.</p> <p>Elementos conceptuales en la resolución de problemas que incorporan el uso de herramientas computacionales.</p> <p>Derechos básicos de aprendizaje.</p> <p>Estándares básicos de competencias matemáticas.</p> <p>Lineamientos curriculares.</p>
Objetivo	Fortalecer en los estudiantes de séptimo grado la competencia de comunicación y representación en la comprensión de números enteros para desarrollar el pensamiento numérico.
Orientaciones generales para la evaluación	Evaluación, Autoevaluación, Coevaluación, Heteroevaluación.
Línea de la secuencia didáctica	<p>Actividades de apertura: Sesión 1.</p> <p>Actividades de desarrollo: Sesión 2, 3, 4, 5, 6 y 7.</p> <p>Actividades de cierre: Sesión 8</p>
Recursos	<p>Protocolo de las actividades.</p> <p>Materiales escolares (cartulina, lápiz, papel, tijeras, pegamento, entre otros).</p> <p>Software libre “Geogebra”.</p>
Productos académicos y ritual de cierre	<p>Desarrollo del protocolo de cada actividad.</p> <p>Exposiciones en las que cada grupo socializará las apreciaciones sobre lo que aprendieron durante el trabajo en clase.</p> <p>Discusiones generales, registro en notas adhesivas de las ideas matemáticas clave para colocarlos una cartelera dispuesta en el aula de clases o en el tablero.</p>
Mecanismos previstos para la evaluación y seguimiento de los aprendizajes	<p>Instrumentos:</p> <p><i>Diario de campo:</i> Registrar mediante este instrumento de forma permanente las observaciones, reflexiones, hipótesis e interpretaciones personales, de tal manera que se logre percibir todo lo ocurrido en clase.</p>

	<p><i>Protocolo de la Actividad:</i> Seguir en la implementación las tres fases en la resolución de problemas: 1. Exploración visual y empírica; 2. Búsqueda de múltiples métodos de solución; y 3. Momento final de reflexión</p> <p><i>Grabaciones de video:</i> Registro audiovisual de todas las sesiones de trabajo de los estudiantes en el proceso de resolución de los problemas planteados en la SD.</p> <p>Evaluación: El proceso de evaluación será soportado en los siguientes registros observables: video, exposiciones de los grupos de trabajo, hojas de trabajo de los estudiantes y rejilla de evaluación.</p>
Nombre de la docente investigadora que elaboró la secuencia	Leonor Pinto Crisancho

Tabla 8. Planeación general de la SD

Los siguientes cuadros corresponden al instrumento de sistematización de las actividades A, B, C, D, E, F, G y H, donde se observa la planeación y descripción de los resultados que se esperan en cada actividad:

Planeación de la Actividad A			
<i>Actividad N°1</i>	Primera actividad		
<i>Sesiones estimadas</i>	Una sesión desarrollada en el marco de la SD		
<i>Fecha en la que se implementará</i>	Inicio: 3 de mayo de 2017		
<i>Nombre de la actividad y vínculo (s) con las demás actividades de la SD</i>	"El laberinto"		
<i>Referentes teóricos, pedagógicos o didácticos</i>	Rediseñada de la actividad "La pista de los enteros" propuesta por Chaparro ⁸⁷ et al.		
<i>Listado y breve descripción de los resultados de aprendizaje esperados de los estudiantes (didácticos /formativos)</i>	Identificar el signo de un número teniendo en cuenta el contexto de la situación planteada. Familiarizar al estudiante con los aspectos generales de los números enteros y el vocabulario de trabajo.		
<i>Descripción de la actividad, tal</i>	<i>Momentos de la actividad</i>	<i>Lo que se espera de los niños...</i>	<i>Consignas del docente...Posibles intervenciones</i>
	Exploración visual y empírica Se organizan los equipos de trabajo al azar (grupos de 3	Exploren el dado de signos. Distribuyan los roles en el grupo.	Antes de iniciar la primera actividad la docente dará la bienvenida a los estudiantes, las directrices del trabajo en

⁸⁷ CHAPARRO, O., POVEDA, D., y FERNÁNDEZ, R. Jugando con los números enteros. pág. 25-29. Disponible en: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articulos-110453_archivo.pdf.

<p><i>como se planea. Acciones de los estudiantes e intervenciones del docente.</i></p>	<p>estudiantes). Estos grupos se mantendrán igual durante la implementación de la SD.</p> <p>Se entregará a cada estudiante el protocolo de la actividad A, ver Anexo 6. Además, a cada equipo se le hará la entrega de tres fichas, una para cada jugador, y tres dados, dos numéricos y uno de signos.</p>	<p>Realicen una lectura comprensiva de las reglas del juego “El laberinto”</p>	<p>el aula y la planeación general de la SD. La idea es motivarlos a la participación activa en las diferentes actividades a desarrollar en el transcurso de la aplicación de la SD.</p> <p>Luego, la profesora presenta el material a los estudiantes e indagará sobre las instrucciones del juego.</p>
	<p>Búsqueda de múltiples métodos de solución</p> <p>Búsqueda de la estrategia ganadora.</p> <p>Registro de los de puntos en la casilla correspondiente según el color, los positivos en la azul y los negativos en la roja.</p> <p>En caso de equivocarse algún jugador en el registro de puntos, deben solucionarlo de manera respetuosa.</p>	<p>Lleven un proceso de registro cuidadoso de los puntos.</p> <p>Al finalizar el juego realicen la suma de los puntos a favor y en contra.</p> <p>Concluyan cual jugador perdió y por qué.</p> <p>Se cuestionen respecto a ¿En qué momento finaliza el juego?</p> <p>¿Cómo elegir al ganador si ningún jugador llega a la salida del laberinto?</p>	<p>“Cada grupo debe realizar la actividad asignada en forma organizada”.</p> <p>El docente estará monitoreando los pequeños grupos para verificar que hayan entendido las instrucciones dadas para jugar en el laberinto.</p> <p>Pasar por los diferentes grupos y observar ¿Qué interpretación dan los estudiantes a los puntos azules y los puntos rojos?,</p>
	<p>Momento final de reflexión</p> <p>Cada grupo socializará ante sus compañeros los resultados del juego y el ganador de la actividad.</p> <p>Los estudiantes deben explicar la forma como hicieron para asignar el primer lugar, segundo y tercer lugar.</p>	<p>Los estudiantes realizarán ante sus compañeros la socialización de la actividad en forma organizada y que aprendieron de este juego.</p> <p>Asocian los puntos azules con los números positivos y los puntos rojos con los números negativos.</p>	<p>“Debemos escuchar a los compañeros”.</p> <p>El docente organizará la forma en que realizarán la exposición de los trabajos y realizará preguntas que los hagan reflexionar sobre los conceptos implícitos en el juego.</p> <p>Se tomarán fotografías en el transcurso del desarrollo de las actividades.</p>

	Explicar si el ganador fue el jugador que obtuvo mayor cantidad de puntos azules.	Realicen operaciones de adición de números de igual signo. Proponer una solución justa para el caso en que un jugador no pueda retroceder todas las casillas que indica el valor numérico de los dados.	
--	---	--	--

Tabla 9. Planeación de la actividad A “El laberinto”

Planeación de la Actividad B			
<i>Actividad N°2</i>	Segunda actividad		
<i>Sesiones estimadas</i>	Una sesión desarrollada en el marco de la SD		
<i>Fecha en la que se implementará</i>	Inicio: 09 de mayo de 2017		
<i>Nombre de la actividad y vínculo (s) con las demás actividades de la SD</i>	“Las 7 maravillas del mundo”		
<i>Referentes teóricos, pedagógicos o didácticos</i>	Rediseñada de la actividad “Usando la línea de Tiempo y los inventos” propuesta por Chaparro ⁸⁸ et al.		
<i>Listado y breve descripción de los resultados de aprendizaje esperados de los estudiantes (didácticos /formativos)</i>	<p>Compara y establece la relación de orden entre dos o más números enteros.</p> <p>Establecer la correspondencia entre el conjunto de los números enteros y los puntos de la recta numérica.</p> <p>Ubicar números positivos y negativos en la recta numérica, tomando al cero como referente.</p>		
	<i>Momentos de la actividad</i>	<i>Lo que se espera de los niños...</i>	<i>Consignas del docente...Posibles intervenciones</i>
	<p>Exploración visual y empírica</p> <p>Se entregará a cada estudiante el protocolo de la actividad B, ver Anexo 7.</p> <p>Socialización de los datos tomados de la observación del video por cada uno de los integrantes del grupo y discusión al interior del grupo sobre los datos registrados</p>	<p>Observen el video y registren en forma organizada la fecha en que fue construida cada una de las maravillas del mundo.</p> <p>A la hora de organizar los grupos lo hagan en forma organizada y en silencio.</p> <p>Posibles preguntas que pueden surgir:</p>	<p>Al iniciar la actividad B se darán algunas orientaciones generales a los estudiantes.</p> <p>“Para escuchar el video es necesario estar en completo orden y silencio”.</p> <p>“Lean con mucha atención cada ítem de la actividad”.</p>

⁸⁸ *Ibíd.*, p. 10-15.

<p>Descripción de la actividad, tal como se planea. Acciones de los estudiantes e intervenciones del docente.</p>		¿Qué significa antes de Cristo y después de Cristo?	
	<p>Búsqueda de múltiples métodos de solución</p> <p>Entrega de materiales a cada grupo para la elaboración de la línea del tiempo”</p> <p>Establecimiento de criterios para la construcción de la línea de tiempo al interior de cada pequeño grupo.</p> <p>Cada integrante del grupo debe escribir tres situaciones donde se utilicen números enteros y argumentar sus ideas a sus compañeros.</p>	<p>Asocien los números positivos con fechas antes de Cristo y los números negativos con fechas después de Cristo.</p> <p>Tomen un punto de referencia para ubicar el cero en la recta numérica.</p> <p>Elaboración de la línea del tiempo.</p> <p>Se distribuyan funciones para la elaboración de la línea del tiempo.</p>	<p>La docente estará monitoreando los grupos, tomando fotografías, dinamizando la discusión al interior del grupo y mediando posibles conflictos.</p> <p><i>“Hay que respetar las opiniones de los compañeros”</i></p> <p><i>“Utilicen los materiales entregados para la elaboración de la línea del tiempo. En caso que falten soliciten más, y en el caso contrario, por favor entreguen los materiales sobrantes al finalizar la actividad”.</i></p> <p><i>“Es importante que todos colaboren en la construcción de la línea del tiempo”.</i></p>
	<p>Momento final de reflexión</p> <p>En forma organizada cada grupo hará la socialización de su línea del tiempo y de todo el proceso para su construcción. Además, argumentarán la selección del grupo de las 3 situaciones reales que consideraron requiere el uso de los números enteros.</p> <p>Se realizará la retroalimentación de la actividad según se requiera.</p>	<p>Argumentes y justifiquen los criterios que establecieron al interior de cada pequeño grupo para construir la línea de tiempo.</p> <p>Que tengan claridad sobre la ubicación de los números enteros en una recta numérica y los asocien a situaciones de la vida real.</p> <p>Realicen preguntas si tienen dudas sobre la actividad realizada.</p> <p>Describan situaciones que estén relacionadas con la utilización de los números enteros en diferentes contextos.</p>	<p>La docente dirigirá el orden de las exposiciones y realizará preguntas a los integrantes de cada grupo sobre el trabajo realizado y las posibles dificultades que se les presentaron.</p> <p><i>“Aprendamos a escuchar a nuestros compañeros”</i></p> <p>Se tomarán fotografías sobre los trabajos socializados y estos serán expuestos en el tablero.</p> <p>Después de finalizada la socialización de las actividades, la docente aclarará dudas que hayan surgido durante</p>

			el desarrollo de la actividad B.
--	--	--	----------------------------------

Tabla 10. Planeación de la actividad B “Las 7 maravillas del mundo”

Planeación de la Actividad C			
<i>Actividad N°3</i>	Tercera actividad		
<i>Sesiones estimadas</i>	Una sesión desarrollada en el marco de la SD		
<i>Fecha en la que se implementará</i>	Inicio: 12 de mayo de 2017		
<i>Nombre de la actividad y vínculo (s) con las demás actividades de la SD</i>	“Representando Situaciones Aditivas en la Recta Numérica”		
<i>Referentes teóricos, pedagógicos o didácticos</i>	Diseño de la investigadora.		
<i>Listado y breve descripción de los resultados de aprendizaje esperados de los estudiantes (didácticos /formativos)</i>	Establecer la correspondencia entre el conjunto de los números enteros y los puntos de la recta numérica. Realizar adiciones de números enteros utilizando la recta numérica.		
<i>Descripción de la actividad, tal como se planea. Acciones de los estudiantes e intervenciones del docente.</i>	<i>Momentos de la actividad</i>	<i>Lo que se espera de los niños...</i>	<i>Consignas del docente...Posibles intervenciones</i>
	Exploración visual y empírica Exploración libre del software Geogebra. Posteriormente se hará la una exploración dirigida de las funciones del software que se requieren en la actividad. Se hará la entrega del protocolo de la actividad a cada uno de los estudiantes.	Estén motivados por la integración de las TIC a las clases de matemáticas. Realicen la organización de los grupos en orden y una lectura comprensiva del protocolo de la actividad. Posibles interrogantes que pueden surgir: ¿Qué es Geogebra? ¿Qué es un software dinámico?	La docente presenta la actividad C. Hará énfasis en la importancia de escribir cada respuesta y justificarla. Además, motivará a los integrantes del grupo a usar el software. La docente activará en cada uno de los equipos el programa <i>aTube Catcher</i> para llevar registro audiovisual de la pantalla del computador y de los comentarios que realicen los estudiantes.
	Búsqueda de múltiples métodos de solución Finalizada la tarea uno, cada grupo socializará las actividades desarrolladas hasta el momento y dificultades presentadas	Discutan al interior del grupo las ideas matemáticas que surjan sobre los vectores rojos, azules y verdes. Explore el software de Geogebra y realicen las tareas propuestas.	“Lean cuidadosamente cada uno de los ítems de la actividad”. “Recuerden preguntar si hay dificultades y argumentar sus respuestas”.

	La docente pasará por cada uno de los grupos y verificará que la tarea 1 haya sido resuelta por todos para da inicio a la tarea 2 la cual ser.	Registren sus respuestas en las hojas del protocolo. Escriban la justificación de cada una de sus respuestas.	“Hay que respetar las opiniones de los compañeros” La docente debe monitorear los grupos y dinamizar la discusión entre los estudiantes.
	<p>Momento final de reflexión</p> <p>Cada pequeño grupo presentará ante todos sus compañeros los resultados que emanaron de las discusiones a nivel interno.</p> <p>Un integrante de cada grupo dará las conclusiones del trabajo y hará comentarios sobre el trabajo con el software dinámico.</p> <p>Se realizará la retroalimentación de la actividad.</p>	<p>Compartan el proceso y estrategias de resolución de la actividad en forma respetuosa y ordenada.</p> <p>Tengan dominio del lenguaje matemático y verbal en situaciones aditivas.</p> <p>Claridad sobre la ubicación de enteros en la recta numérica.</p> <p>Resuelvan con facilidad adición con enteros.</p>	<p>La docente problematizará las soluciones de los estudiantes.</p> <p>Resolverá las inquietudes de los estudiantes.</p>

Tabla 11. Planeación de la actividad C “Representando Situaciones Aditivas en la Recta Numérica”.

Planeación de la Actividad D			
<i>Actividad N°4</i>	Cuarta actividad		
<i>Sesiones estimadas</i>	Una sesión desarrollada en el marco de la SD		
<i>Fecha en la que se implementará</i>	Inicio: 16 de mayo de 2017		
<i>Nombre de la actividad y vínculo (s) con las demás actividades de la SD</i>	“En Busca del Tesoro”		
<i>Referentes teóricos, pedagógicos o didácticos</i>	Rediseñada de la actividad “El joven y el mar” propuesta por Becerra ⁸⁹ et al.		
<i>Listado y breve descripción de los resultados de aprendizaje esperados de los estudiantes (didácticos /formativos)</i>	<p>Establecer la correspondencia entre el conjunto de los números enteros y los puntos de la recta numérica.</p> <p>Interpreta la adición y sustracción de números enteros en la resolución de problemas aditivos.</p> <p>Realizar adiciones y sustracciones de números enteros utilizando la recta numérica.</p>		
	<i>Momentos de la actividad</i>	<i>Lo que se espera de los niños...</i>	<i>Consignas del docente...Posibles intervenciones</i>

⁸⁹ BECERRA. O., et al. Op. cit., p. 16-18.

<p><i>Descripción de la actividad, tal como se planea. Acciones de los estudiantes e intervenciones del docente.</i></p>	<p>Exploración visual y empírica</p> <p>Feedback de la actividad C por parte de los estudiantes.</p> <p>Entrega del protocolo de la actividad D.</p>	<p>Estén motivados a participar de la actividad.</p> <p>En forma individual exploren las situaciones planteadas en el protocolo y planteen posibles soluciones.</p>	<p>Al iniciar la actividad D se darán algunas orientaciones generales a los estudiantes.</p> <p>“Antes de pasar a sus respectivos grupos, espero reflexionen y analicen en forma individual las situaciones planteadas y escriban las posibles soluciones para que, luego, cuando formen los grupos, cada uno tenga argumentos y puedan discutir las diferentes formas de solución de los problemas”.</p>
	<p>Búsqueda de múltiples métodos de solución</p> <p>Establecer estrategias heurísticas como uso de diagramas u operaciones numéricas para intentar solucionar el problema.</p> <p>Discutir distintas formas de solución.</p> <p>Establecer argumentos matemáticamente válidos para justificar las respuestas.</p>	<p>Expresen sus ideas de manera respetuosa.</p> <p>Tomen el cero como referente, y a partir de este valor, asignen números positivos a objetos ubicados sobre el nivel del mar y enteros negativos a objetos ubicados bajo el nivel del mar.</p> <p>Ordenen en forma ascendente los elementos que están por encima del nivel del mar.</p> <p>Realicen la representación gráfica a las situaciones planteadas.</p>	<p>Coordinará la discusión en los diferentes grupos.</p> <p>Posibilitar la participación de los estudiantes en el desarrollo de las ideas matemáticas clave en la comprensión de la recta numérica.</p> <p>“Recuerden escuchar las opiniones de sus compañeros de manera respetuosa”</p> <p>“Recuerden que el trabajo es de todos, no es de uno solo”</p>
	<p>Momento final de reflexión</p> <p>Reflexión general para contrastar los procesos y estrategias utilizados en la resolución del problema.</p>	<p>Defiendan sus ideas matemáticas.</p> <p>Expongan ante todos sus compañeros la forma como resolvieron cada una de las situaciones planteadas y las dificultades presentadas.</p>	<p>La docente dirigirá el desarrollo de las exposiciones de cada grupo y realizará preguntas a los integrantes respecto al trabajo realizado para dinamizar la discusión general.</p>

	Se realizará la retroalimentación de la actividad.		“Nuestros compañeros merecen respeto, debemos aprender a escuchar”
--	--	--	--

Tabla 12. Planeación de la actividad D “En Busca del Tesoro”

Planeación de la Actividad E			
<i>Actividad N°5</i>	Quinta actividad		
<i>Sesiones estimadas</i>	Una sesión desarrollada en el marco de la SD		
<i>Fecha en la que se implementará</i>	Inicio: 24 de mayo de 2017		
<i>Nombre de la actividad y vínculo (s) con las demás actividades de la SD</i>	“La Cafetería”		
<i>Referentes teóricos, pedagógicos o didácticos</i>	Rediseñada de la Actividades sobre las propiedades de los enteros del libro Aventura ⁹⁰ , Matemáticas Séptimo.		
<i>Listado y breve descripción de los resultados de aprendizaje esperados de los estudiantes (didácticos /formativos)</i>	<p>Interpreta la adición y sustracción de números enteros en la resolución de problemas aditivos.</p> <p>Aplica las propiedades de la adición y sustracción de números enteros en la resolución de problemas aditivos.</p> <p>Identificar las cantidades y datos relevantes para la resolución de un problema.</p> <p>Plantear la operación a realizarse (adición o sustracción) de acuerdo con la situación propuesta en un problema.</p>		
<i>Descripción de la actividad, tal como se planea. Acciones de los estudiantes e intervenciones del docente.</i>	<i>Momentos de la actividad</i>	<i>Lo que se espera de los niños...</i>	<i>Consignas del docente...Posibles intervenciones</i>
	Exploración visual y empírica Se hará la entrega del protocolo E a cada integrante de los diferentes grupos. Identificación de los hechos relevantes del problema, las condiciones y las metas del problema. Consideración de varios caminos de solución.	Den su opinión sobre el trabajo que se ha venido realizando en el marco de la SD hasta el momento. Organicen los grupos ordenadamente. Interpreten la información relevante en las situaciones planteadas y propongan alternativas de solución.	Dialogar con los estudiantes sobre su percepción de las actividades de la SD realizadas hasta ese momento. Dará las orientaciones generales de la actividad E. Cuestionar a los estudiantes sobre el entendimiento del problema, por ejemplo: ¿cuáles son las condiciones del problema?, ¿podrían

⁹⁰ BERNAL BUITRAGO, Himelda. Aventura, Cuaderno de actividades, Matemáticas 7. Bogotá D. C.: Editorial Norma S. A., 1998. p. 34. Serie 958-04-4734-9. ISBN 958-04-4741-1.

		Posibles interrogantes que puedan surgir: ¿Cómo interpreto la información de la tabla? ¿Qué operación debo hacer?	explicar con sus propias palabras de qué trata el problema?
	Búsqueda de múltiples métodos de solución Cada uno de los integrantes del grupo dará sus opiniones sobre la estrategia más adecuada para solucionar los diferentes ítems y posteriormente decidirán cuál es la más adecuada y por qué.	En cada grupo realicen pequeñas discusiones sobre las posibles soluciones de las situaciones planteadas y lleguen a acuerdos para seleccionar la estrategia o proceso. Planteen adiciones y sustracciones de números enteros que se ajusten a las condiciones del problema. Revisar el proceso de resolución y evaluar las soluciones dadas.	Incentivar a los estudiantes a reflexionar sobre las posibles soluciones a la luz de las condiciones iniciales del problema. Valorar y motivar la discusión en el salón de clase.
	Momento final de reflexión Finalizada la actividad uno o dos integrantes de cada grupo harán la socialización del trabajo realizado.	Escuchen con atención a todos los grupos y realicen preguntas si lo creen conveniente. El grupo decida cual solución es la más adecuada desde el punto de vista matemático.	La docente discuta con los estudiantes ventajas y limitaciones de las estrategias usadas en la resolución del problema.

Tabla 13. Planeación de la actividad E “La Cafetería”

Planeación de la Actividad F	
Actividad N°7	Séptima actividad
Sesiones estimadas	Una sesión desarrollada en el marco de la SD
Fecha en la que se implementará	Inicio: 30 de mayo de 2017
Nombre de la actividad y vínculo (s) con las demás actividades de la SD	“Sustracción de números enteros en la recta numérica”
Referentes teóricos, pedagógicos o didácticos	Diseño de la investigadora.

<p>Listado y breve descripción de los resultados de aprendizaje esperados de los estudiantes (didácticos /formativos)</p>	<p>Establecer la correspondencia entre el conjunto de los números enteros y los puntos de la recta numérica. Realizar sustracciones de números enteros utilizando la recta numérica.</p>		
<p>Descripción de la actividad, tal como se planea. Acciones de los estudiantes e intervenciones del docente.</p>	<p><i>Momentos de la actividad</i></p>	<p><i>Lo que se espera de los niños...</i></p>	<p><i>Consignas del docente...Posibles intervenciones</i></p>
	<p>Exploración visual y empírica</p> <p>Se instalará el archivo actividad2.ggb de Geogebra diseñado para esta sesión y se hará la entrega del protocolo G de la actividad a cada uno de los estudiantes.</p>	<p>Discutan al interior del grupo las similitudes y diferencias sobre el comportamiento de los vectores rojos, azules y verdes en la sustracción.</p> <p>Explore el software de Geogebra y realicen más ejercicios de los propuestos en el protocolo de la actividad.</p>	<p>La docente dará las instrucciones generales para el desarrollo de la actividad G.</p> <p>La docente activará en cada uno de los equipos el programa aTube Catcher para llevar registro audiovisual de la pantalla del computador y de los comentarios que realicen los estudiantes.</p> <p>Hará énfasis en la importancia de escribir cada respuesta y justificarla, además de incentivar a que todos integrantes del grupo trabajen en el computador.</p>
	<p>Búsqueda de múltiples métodos de solución</p> <p>Evaluar el potencial de las estrategias que cada participante del grupo plantee.</p>	<p>Interpreten la sustracción de números enteros y utilicen bien los números signados.</p> <p>Tengan claridad sobre la manera como se utilizan los signos de agrupación y resuelvan con facilidad adición y sustracción con enteros.</p>	<p>Motivar a los estudiantes a que implanten sus propios caminos de solución.</p> <p>“Recuerden preguntar si hay dificultades y escribir las respuestas en las hojas del protocolo entregado a cada uno”.</p>
<p>Momento final de reflexión</p> <p>Cada grupo explica las relaciones matemáticas que ha observado en la actividad de Geogebra. Además, el proceso de</p>	<p>Evalúe y contraste las estrategias usadas por los diferentes grupos.</p> <p>Expresen sus ideas de manera respetuosa.</p>	<p>Discutir con los estudiantes las cualidades de las diversas estrategias de solución.</p> <p>Posibles preguntas: ¿Podrías haber resuelto el problema de otra</p>	

	solución de los problemas y las estrategias usadas.	Interpreten y resuelvan todos los problemas.	forma?, ¿cómo se relaciona tu procedimiento con la solución?
--	---	--	--

Tabla 14. Planeación de la actividad F “Sustracción de Números Enteros”

Planeación de la Actividad G			
<i>Actividad N°6</i>	Sexta actividad		
<i>Sesiones estimadas</i>	Una sesión desarrollada en el marco de la SD		
<i>Fecha en la que se implementará</i>	Inicio: 25 de mayo de 2017		
<i>Nombre de la actividad y vínculo (s) con las demás actividades de la SD</i>	“Campeonato Interligas”.		
<i>Referentes teóricos, pedagógicos o didácticos</i>	Tomado de Colombiaaprende ⁹¹ cartilla “Números enteros y racionales invenciones humanas para resolver problemas”, matemáticas, grado séptimo.		
<i>Listado y breve descripción de los resultados de aprendizaje esperados de los estudiantes (didácticos /formativos)</i>	Interpreta la adición y sustracción de números enteros en la resolución de problemas aditivos. Aplica las propiedades de la adición y sustracción de números enteros en la resolución de problemas aditivos. Identificar las cantidades y datos relevantes para la resolución de un problema. Plantear la operación a realizarse (adición o sustracción) de acuerdo con la situación propuesta en un problema.		
<i>Descripción de la actividad, tal como se planea. Acciones de los estudiantes e intervenciones del docente.</i>	<i>Momentos de la actividad</i>	<i>Lo que se espera de los niños...</i>	<i>Consignas del docente...Posibles intervenciones</i>
	Exploración visual y empírica Se hará la entrega del protocolo F a cada integrante de los diferentes grupos. Consideren las condiciones iniciales del problema y analicen las metas.	Estén motivados a participar, ya que los problemas se sitúan en un contexto deportivo. Aportar elementos de su experiencia previa en juegos inter-clases para interpretar las situaciones aditivas del protocolo F.	Indicaciones generales de la actividad F. Ayudar a los estudiantes a que acepten los retos que le plantean los problemas. “Expresen sus ideas matemáticas de manera espontánea”
	Búsqueda de múltiples métodos de solución	Evalúen durante el proceso de resolución del problema los	La docente monitorea los grupos y dinamiza la

⁹¹ COLOMBIAAPRENDE. Grado 7° Matemáticas, Números enteros y racionales, invenciones humanas para resolver problemas. p. 4-7. Disponible en: <http://aprendecolombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/ContenidosAprender/index.html>

	<p>Discutir la viabilidad de los métodos heurísticos propuestos por cada integrante del grupo.</p>	<p>avances en el camino de solución que hayan seleccionado.</p> <p>Tengan en cuenta los dos posibles casos en la suma de enteros, suma de números con igual signo y suma de números con diferente signo.</p>	<p>discusión entre los estudiantes.</p> <p>“Las soluciones planteadas a cada interrogante deben ser escritas a lapicero en las hojas del protocolo entregado a cada uno”.</p>
	<p>Momento final de reflexión</p> <p>Explicar por qué las estrategias y/o procedimientos son los más adecuados para la resolución de los problemas.</p>	<p>Compartan el compromiso de valorar y criticar las ideas matemáticas de sus compañeros.</p> <p>Argumenten el sentido de sus respuestas.</p>	<p>La docente organizará la socialización del trabajo realizado, resolverá las inquietudes de los estudiantes y se hará la retroalimentación de la temática trabajada.</p>

Tabla 15. Planeación de la actividad G “Campeonato Interligas”

Planeación de la Actividad H	
<i>Actividad N°7</i>	Séptima actividad
<i>Sesiones estimadas</i>	Una sesión desarrollada en el marco de la SD
<i>Fecha en la que se implementará</i>	Inicio: 31 de mayo de 2017
<i>Nombre de la actividad y vínculo (s) con las demás actividades de la SD</i>	“El clima”
<i>Referentes teóricos, pedagógicos o didácticos</i>	Tomado de Colombiaaprende ⁹² cartilla “Números enteros y racionales invenciones humanas para resolver problemas”, matemáticas, grado séptimo.
<i>Listado y breve descripción de los resultados de aprendizaje esperados de los estudiantes (didácticos /formativos)</i>	<p>Realizar sustracciones de números enteros utilizando la recta numérica.</p> <p>Aplica las propiedades de la adición y sustracción de números enteros en la resolución de problemas aditivos.</p> <p>Identificar las cantidades y datos relevantes para la resolución de un problema.</p> <p>Plantear la operación a realizarse (adición o sustracción) de acuerdo con la situación propuesta en un problema.</p>

⁹² COLOMBIAAPRENDE. Grado 7° Matemáticas, Números enteros y racionales, invenciones humanas para resolver problemas. p. 17-18. Disponible en: <http://aprendecolombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/ContenidosAprender/index.html>

<p><i>Descripción de la actividad, tal como se planea. Acciones de los estudiantes e intervenciones del docente.</i></p>	<p><i>Momentos de la actividad</i></p>	<p><i>Lo que se espera de los niños...</i></p>	<p><i>Consignas del docente...Posibles intervenciones</i></p>
	<p>Exploración visual y empírica</p> <p>Entrega del protocolo de la actividad H a cada uno de los estudiantes.</p> <p>Identificación de los componentes importantes del problema.</p>	<p>Estén motivados en el desarrollo de la actividad.</p> <p>Organicen los grupos de forma ordenada.</p> <p>Identifiquen los datos relevantes de las situaciones planteadas en el protocolo entregado.</p>	<p>Dará las directrices para el desarrollo de la actividad H.</p> <p>“Leer con mucha atención cada parte de la actividad”</p>
	<p>Búsqueda de múltiples métodos de solución</p> <p>Evaluar diferentes métodos heurísticos relacionados con la solución del problema.</p> <p>Diseño de un plan de la forma como se va a solucionar el problema.</p>	<p>Tomen el cero como referente, y a partir de este valor, asignen números positivos a temperaturas sobre cero y enteros negativos a temperaturas bajo cero.</p> <p>Tengan claridad sobre la manera como se utilizan los signos de agrupación y resuelvan con facilidad adición y sustracción con enteros.</p>	<p>La docente pasará por cada uno de los grupos y escuchará las opiniones de los estudiantes.</p> <p>Incentivar a los estudiantes a analizar sus respuestas según las condiciones dadas en el problema.</p>
	<p>Momento final de reflexión</p> <p>Socializar la actividad en forma ordenada y dar las respectivas conclusiones.</p>	<p>Expresen sus ideas de manera respetuosa y escuchen con atención a sus compañeros.</p> <p>Argumenten el sentido de sus respuestas.</p>	<p>Incentivar a los estudiantes a que expliquen porque sus acciones fueron las más apropiadas en el proceso de resolución del problema.</p> <p>Discutir la plausibilidad de las soluciones.</p>

Tabla 16. Planeación de la actividad H “El Clima”

4.2.2 Análisis de la secuencia didáctica implementada.

En este apartado se describen los elementos que influyeron en el proceso de resolución de problemas durante el desarrollo de las sesiones analizando las competencias matemáticas, en especial la competencia de comunicación y representación, y el comportamiento de los estudiantes de acuerdo a las categorías definidas por Schoenfeld⁹³: *dominio del conocimiento o recursos, estrategias cognitivas o métodos heurísticos, estrategias metacognitivas y sistemas de creencias.*

El análisis del desarrollo de las sesiones se presenta en tres momentos, que corresponden a las tres fases planteadas por Santos y Moreno⁹⁴ (*Exploración visual y empírica, búsqueda de múltiples métodos de solución y momento final de reflexión*), las cuales fueron usadas en el diseño e implementación de la SD. Constituidos los datos de la investigación, se continuó con el proceso de triangulación, según Elliott *“el principio básico que subyace a la idea de triangulación es el de reunir observaciones e informes sobre una misma situación (o sobre algunos aspectos de la misma) efectuados desde diversos ángulos o perspectivas, para compararlos y contrastarlos”*⁹⁵. Los datos analizados provienen de diferentes fuentes (estudiantes, profesora investigadora y observador participante) y de diferentes tipos de registro (audiovisuales, diarios de campo y las hojas de protocolo de cada actividad) lo que permitió realizar la triangulación de los datos para una interpretación desde los elementos teóricos de esta investigación.

En el proceso de documentación se describieron y analizaron los episodios más destacados a la luz de los elementos teóricos, en lo posible las transcripciones están acompañan de imágenes de los estudiantes que intervinieron o de sus producciones. Para las transcripciones a cada estudiante se le asignó un código: E-

⁹³ SCHOENFELD. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, Op. cit., p. 334-370.

⁹⁴ SANTOS TRIGO y MORENO. Op. cit., p. 69 - 81.

⁹⁵ ELLIOTT. Op. cit., p. 103.

01 a E-15, las intervenciones de los participantes se indican con L1, L2, L3, para cada una de las actividades se inicia el conteo desde L1, los diálogos están escritos en letra cursiva, las notas de campo o comentarios de la investigadora en corchetes “[]” y los puntos suspensivos “...” son utilizados para indicar omisión de algunas palabras.

ACTIVIDAD A “EL LABERINTO”. Esta actividad se implementó en la fecha que se tenía programada, la única variación estuvo en el tiempo de la sesión, ya que se había programado para 3 horas, pero para el desarrollo de la actividad sólo se necesitaron 2 horas. Como se había mencionado anteriormente en la planeación, la primera actividad pretendía familiarizar a los estudiantes con el tipo de trabajo que se quería instaurar en el aula, así que mediante el juego del Laberinto los estudiantes lograron identificar aspectos generales, como los signos en los números enteros, empezaron a usar el vocabulario apropiado al nombrar los puntos azules como números positivos, y los puntos rojos como números negativos. Además, en la actividad la profesora indujo, de forma implícita, a los estudiantes a sumar números de igual signo al solicitar que cada grupo definiera primer, segundo y tercer lugar, una vez terminado el juego.

Exploración visual y empírica. Inicialmente se instauraron cinco grupos de tres estudiantes con el fin de promover la discusión, tal como lo plantea Schoenfeld⁹⁶. En general los estudiantes comprendieron gradualmente las instrucciones del juego “*El laberinto*” a medida que realizaron una lectura conjunta. Luego, la profesora indagó a los estudiantes para saber si comprendían las condiciones iniciales del juego, como se muestra en el siguiente diálogo.

⁹⁶ SCHOENFELD. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, Op. cit., p. 334-370.



Figura 12. Exploración visual y empírica en la actividad A

- L1. Profesora: *“¿Qué entendieron del juego?, ¿qué les llamó la atención?”*
 L2. E-15: *“Es un juego de pensar, de entender los números y de tener bastante concentración... como para no equivocarnos, por ejemplo: si él saca un número y yo otro, tener conciencia de cuál es el mayor para saber quién empieza primero”.*
 L3. Profesora: *Bueno, al grupo dos, ¿Qué le llamó la atención de esta actividad?*
 L4. E-01: *“Es un juego de resolución de problemas... porque para poder ganar debemos tener los puntos positivos”*

Transcripción 1. Actividad A “El laberinto”, primera fase.

En el diálogo se puede observar que los estudiantes tienen una perspectiva global del juego, donde toman relevancia recursos como orden en los números enteros y la distinción entre los puntos azules y los puntos rojos, claramente relacionados con los números positivos y los números negativos. Otro aspecto relevante en el diálogo son las creencias de los estudiantes, en la expresión “*es un juego de pensar, de entender los números y de tener bastante concentración... como para no equivocarnos*” se observa que asocian las matemáticas con certeza, con la idea que hay que saberlo todo y que el objetivo central es obtener la respuesta correcta.

Búsqueda de múltiples métodos de solución. En esta fase los estudiantes realizaron los lanzamientos del dado con signos y los dados numéricos, asociando el sentido del movimiento con el signo, signo positivo para avanzar, y signo negativo para retroceder.



Figura 13. Búsqueda de múltiples métodos de solución en la actividad A, parte 1

La mayoría de los grupos usaron como estrategias el uso de la tabla para llevar el registro de los avances y retrocesos. A nivel general los estudiantes presentaron dificultad en la asignación de puntos en los avances y retrocesos de las fichas, por ejemplo: E-02 expresó que “ si nosotros avanzamos cuatro casillas entonces nos asignan doce puntos, ... por cada casilla nos dan 4 puntos,...”. Estas dificultades al inicio de la actividad estuvieron asociadas al poco entendimiento de las condiciones generales del problema. A diferencia de los demás, uno de los grupos recurrió al uso de diagramas, es decir, trazar una línea en todo el laberinto desde el inicio hasta la salida. A continuación, presentamos la conversación del grupo con la profesora.

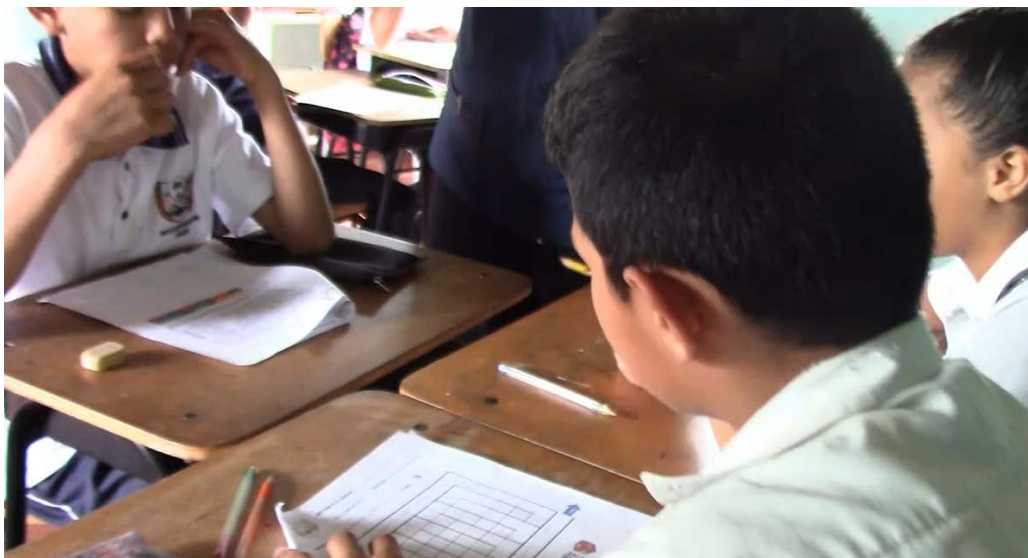


Figura 14. Búsqueda de múltiples métodos de solución en la actividad A, parte 2

- L5. Profesora: *¿Cómo hiciste para llenar el laberinto?*
L6. E-07: *“Completé el laberinto, porque vi que las líneas negras” [El estudiante muestra con su dedo índice izquierdo la dirección de las líneas que trazó]*

Transcripción 2. Actividad A “El laberinto”, segunda fase.

La forma en que el grupo de E-07 enfrentó esta nueva experiencia (el laberinto) está enmarcada en sus experiencias previas. Se puede observar que la estrategia plateada por el grupo está ligada a la idea de laberinto como pasatiempo gráfico, el cual consiste en trazar una línea desde un punto de inicio hasta un punto de salida. Es interesante ver la gran influencia que tienen los recursos en los estudiantes cuando se enfrentan a nuevos problemas, aunque todos los estudiantes habían hecho una lectura previa de las instrucciones del juego, simplemente el grupo decidió resolver el laberinto con técnicas con las que en el pasado habían tenido éxito. Cabe destacar que el grupo luego de evaluar junto con la profesora las instrucciones del juego, reconsideraron ese camino de solución.

Momento final de reflexión. La mayoría de los estudiantes estuvieron motivados en el desarrollo de la actividad. En esta fase la profesora sugirió a cada grupo definir

primer, segundo y tercer lugar. Cada grupo presentó en la discusión general los resultados de la premiación del juego.



Figura 15. Momento de reflexión final en la actividad A

- L7. Profesora: *¿Cómo organizaron primero, segundo y tercer puesto?*
- L8. E-02: *“Para definir el ganador del juego sumamos los positivos y después también sumamos los negativos y cada uno dio un resultado y después de eso los restamos. En nuestro caso fueron 35 menos 42, 35 los positivos y 42 los negativos, entonces igual a 7 negativos, ¿por qué?, porque los negativos fueron más, el mayor número. En mi grupo el ganador fue Juan con 29 puntos positivos, porque él tenía 56 azules y 30 rojos; la segunda fue Dayana con 16 negativos, 45 azules y 33 rojos; y la tercera fui yo, con 7 negativos, 42 azules menos 35 rojos”*
- L9. Profesora: *Siguiente grupo.*
- L10. E-13: *“Nosotros organizamos la premiación restando al número positivo el número negativo y quien quedaba más cerca a la meta...”*

Transcripción 3. Actividad A “El laberinto”, tercera fase.

En las explicaciones de los estudiantes se observó que tomaron conciencia de los números signados al plantear operaciones con números de la misma naturaleza, ellos realizaron separadamente adiciones de números positivos y adiciones de números negativos. En este sentido, la expresión en L8 “*después de eso los restamos*” indica que los estudiantes conciben la adición sólo en el caso en que los números son de igual signo. En el otro caso de adición de enteros, donde los números son de diferente signo, los estudiantes expresaron que la operación

numérica que plantearon fue una resta, extrapolando las propiedades de la sustracción de naturales a la adición de números enteros de diferente signo.

ACTIVIDAD B “LAS 7 MARAVILLAS DEL MUNDO”. Al igual que la actividad A, la actividad B se llevó a cabo en las fechas planeadas. En la implementación de esta actividad se modificó un poco la formación de los grupos, aunque que se había planeado mantener los 5 grupos durante la implementación de la SD, se organizaron sólo 3 grupos, dos de 5 estudiantes y uno de 4 estudiantes, teniendo como condiciones para su conformación la afinidad y la integración de géneros. Otra variación del diseño fue el tiempo de la sesión, inicialmente se había programado una sesión de 3 horas, pero fue necesaria una hora más, por lo que la sesión tuvo una duración total de 4 horas. La estrategia didáctica de construir una línea de tiempo con diferentes materiales permitió a los estudiantes ubicar números positivos y negativos en la recta numérica y reconocer la importancia del cero como un punto de referencia que se escoge arbitrariamente.

Exploración visual y empírica. En esta fase, los estudiantes observaron un video sobre las 7 maravillas del mundo moderno, al mismo tiempo que iban tomando nota de los datos que necesitaban para la construcción de la línea de tiempo. Algunos estudiantes tomaron los datos del video rápidamente, pero otros lo lograron hasta la tercera reproducción del video.



Figura 16. Exploración visual y empírica en la actividad B

Posteriormente, los estudiantes compartieron la información recolectada al interior de los pequeños grupos con el fin de consolidar los datos.

Búsqueda de múltiples métodos de solución. La profesora hizo entrega a los grupos diferentes materiales (papel iris, cartulina, marcadores, pegante, tijeras, entre otros), pero no les explicó cómo construir la línea de tiempo. La mayoría de estudiantes manifestó no tener idea de lo que iban a hacer, cómo organizar la información, ni dónde debían ubicar exactamente cada una de las maravillas. Las estrategias usadas por los estudiantes para construir la línea de tiempo fueron: tablas de registro, para recolectar datos del video; la recta numérica o pirámide, para ubicar las fechas de construcción de las 7 maravillas del mundo moderno; y figuras de flechas para indicar según su dirección el signo de la fecha de construcción de las maravillas. A continuación, se presenta un diálogo sobre las dificultades que tuvo uno de los grupos en el proceso de construcción de la línea de tiempo.



Figura 17. Búsqueda de múltiples métodos de solución en la actividad B

- L1. Profesora: *¿Qué dificultades tuvieron cuando iban a hacer la línea del tiempo?...*
L2. E-01: *Nuestra dificultad fue al principio, porque no sabíamos cómo empezar, porque unos decían que hiciéramos una pirámide, otros que hiciéramos una línea. Hubo discusiones, pero después... cada uno aportó lo que pensaba. A lo último, cuando hicimos allá [señala la cúspide de la pirámide] lo de antes de Cristo nos dimos cuenta que iba al revés... y volvimos a comenzar.*

Transcripción 4. Actividad B “Las 7 maravillas del mundo”, segunda fase.

En el diálogo se observa un monitoreo activo de los estudiantes, es decir los estudiantes autoevalúan el proceso utilizado en la resolución de problemas tomando conciencia de sus capacidades y limitaciones en la construcción de la línea del tiempo. Se evidencia una discusión al interior del grupo sobre algunas formas de construir la línea de tiempo, luego se ve un avance en un intento de solución y finalmente una reflexión de lo que se hizo, que los llevó a cambiar los datos antes de Cristo a la parte inferior y los datos después de Cristo a la parte superior de la pirámide. La constante discusión grupal de los posibles caminos de solución de un problema puede incidir positivamente en los estudiantes para que cambien la idea de que cuando se resuelve un problema sólo hay una respuesta posible o que se debe tener una estrategia lista, incluso antes de iniciar.

Momento final de reflexión. Los estudiantes asumieron la actividad con mucha responsabilidad y compromiso. Para finalizar la actividad los estudiantes expusieron sus construcciones ante todo el grupo, lo cual contribuyó en el desarrollo de la competencia de comunicación.



Figura 18. Momento final de reflexión en la actividad B

- L3. Profesora: *Bueno, eh... ¿Qué significado tiene para ustedes esas flechas que van hacia arriba, que tienen color rojo?*
- L4. E-01: *Esta roja representa el signo menos [señala la flecha hacia abajo] y esta representa el signo más [señala la flecha hacia arriba].*

Transcripción 5. Actividad B “Las 7 maravillas del mundo”, tercera fase.

En el anterior episodio se muestra que los estudiantes del grupo 3 construyeron “una pirámide de tiempo” ordenando los números enteros que correspondían a los datos de las 7 maravillas vistos en el video y asociando los números positivos con fechas antes de Cristo y los números negativos con fechas después de Cristo. Sin embargo, no distribuyeron correctamente los espacios entre los números enteros. En cuanto al cero, los estudiantes tomaron el nacimiento de Cristo como punto de referencia para la ubicación de las fechas en la pirámide, los números positivos arriba del cero y los números negativos abajo del cero. En este sentido, una idea

generalizada en todo el grupo fue que el cero debe estar ubicado en el centro de sus construcciones, esto se evidenció en las expresiones verbales y escritas de los estudiantes, por ejemplo: E-07: “El cero yo lo ubico en la mitad para tener un orden de cada número” y E-05: “El cero debe quedar en el centro de los números positivos y negativos, y el cero no puede ser negativo ni positivo”, en estas expresiones se observa que los estudiantes no comprendieron que podían hacer corresponder al cero un punto en la recta y, a partir de él, ubicar los puntos correspondientes a las fechas de las 7 maravillas del mundo moderno.

ACTIVIDAD C “Representando Situaciones Aditivas en la Recta Numérica”. La actividad C estuvo conformada por dos tareas que implicaban el uso de Geogebra, la tarea uno involucraba la representación gráfica de la adición de números enteros mediante la recta numérica, y la segunda tarea una representación simbólica. La actividad se desarrolló en una sesión de 3 horas como se tenía previsto. Sin embargo, fue implementada el 5 de julio, poco más de un mes después de la fecha propuesta en el diseño debido a acciones sindicales de los maestros. En cuanto a los resultados esperados, se observó que, al incorporar el uso de herramientas tecnológicas, como el software Geogebra, en la resolución de problemas sobre adición de números enteros los estudiantes tuvieron la posibilidad de visualizar gráficamente el comportamiento de puntos en la recta numérica, los números enteros **a** y **b**, y la representación gráfica de la adición de estos, **a + b**, lo que contribuyó a que los estudiantes comprendieran esta operación.

Exploración visual y empírica. La sesión de clase inició con una exploración libre del software de Geogebra. Posteriormente, los grupos pasaron a examinar y analizar las preguntas planteadas en la tarea uno de la actividad, esta exploración dirigida facilitó que descubrieran por sí mismos ideas matemáticas clave. A continuación, se presenta una discusión al interior de un grupo sobre el ítem 2.

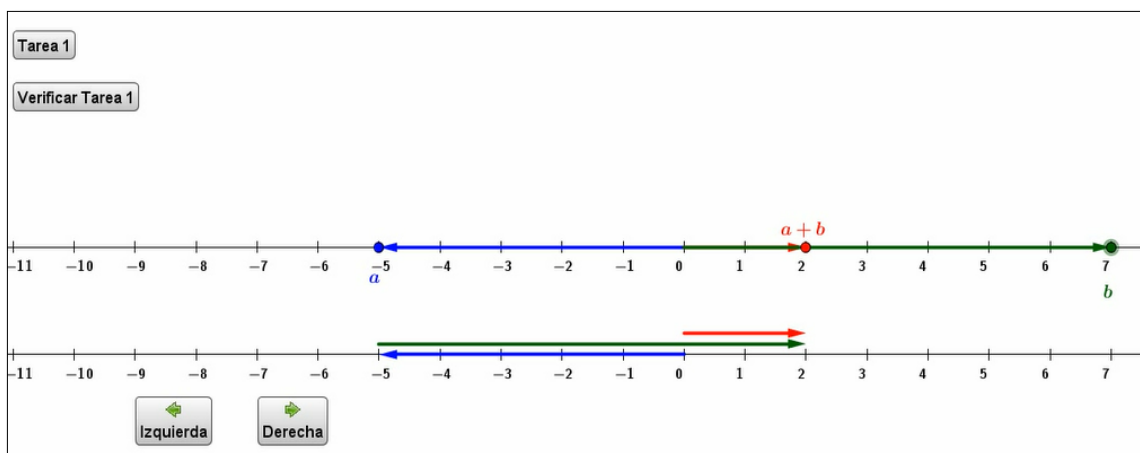


Figura 19. Adición de números enteros usando el modelo de la recta numérica en “Geogebra”, primera fase

- L1. E-01: *¿Dónde estaría ubicado $a + b$ si a se ubicara en -5 y b en 7?*
 L2. E-13: *Ay, ya, ya... mire -5, ese es el número -5, y el otro número 7, mire en 2.*
 L3. E-01: *¿En 2?*
 L4. E-13: *Claro, mire [señala la fecha roja en la pantalla del computador].*

Transcripción 6. “Representando Situaciones Aditivas en la Recta Numérica”, primera fase.

Al pedirles la ubicación de $a + b$ en la recta numérica la estrategia que los estudiantes utilizaron fue arrastrar con el *mouse* los puntos a y b a distintas posiciones en la recta numérica, esto les permitió percibir que el vector azul estaba representando el punto a , el vector verde estaba representando el punto b , y el vector rojo la suma de estos dos números, $a + b$. Además, descubrieron que al cambiar los valores de a y b , el vector que representaba $a + b$ también cambiaba de posición, por lo que podían saber la suma de $a + b$ con sólo visualizar el vector rojo en la pantalla. El proceso descrito les permitió a los estudiantes responder correctamente el ítem 2, como se observa en el diálogo anterior.

Búsqueda de múltiples métodos de solución. En esta fase, el objetivo fue inducir a los estudiantes a realizar los cálculos de $a + b$ mentalmente o a lápiz y papel, por lo que se les pidió la ubicación de la suma de $a = -13$ y $b = -9$, que intencionalmente

no podían ver en sus pantallas, pues en el diseño de la recta numérica de la actividad en Geogebra se tomó el intervalo $[-20, 20]$. En el siguiente diálogo se muestra el trabajo de los estudiantes con adiciones que no podían visualizar gráficamente en sus pantallas.

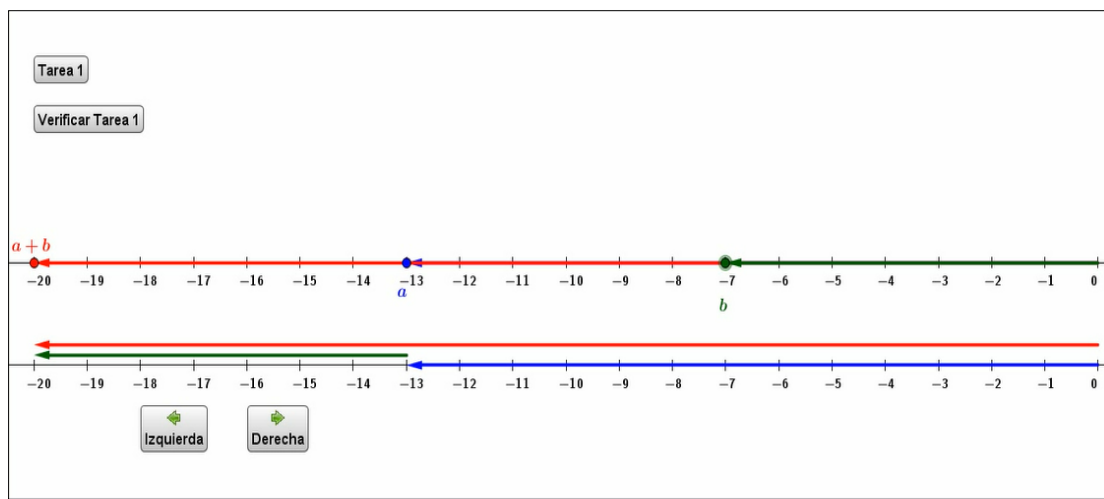


Figura 20. Adición de números enteros usando el modelo de la recta numérica en “Geogebra”, segunda fase

- L5. E-01: *Mire [indica la pantalla], si echamos más para allá [mueve el punto b en el intervalo [-6 a -9]], entonces ahí se pierde.*
- L6. E-13: *Entonces mire, si usted lo echa un poquito más para allá [señala el punto b, indicando un movimiento hacia la izquierda], entonces sería 1, 2, entonces sería -22.*

Transcripción 7. “Representando Situaciones Aditivas en la Recta Numérica”, segunda fase.

En el diálogo se observa que la restricción impuesta en el diseño de la actividad llevó a los estudiantes a sumar números enteros de igual signo sin necesidad de visualizar el vector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Otro aspecto importante en este proceso fue el rol de la profesora, pues estuvo pendiente de los diferentes grupos al enfrentar las dificultades del ítem 3.



Figura 21. Búsqueda de múltiples métodos de solución en la actividad C

El hecho de comprender que en el proceso de resolución no siempre hay un camino directo o inmediato para solucionar los problemas fortaleció la actitud de confianza de los estudiantes para atacar los problemas. Además, la profesora motivó a los estudiantes a ir más allá, es decir, a plantear hipótesis, al pedir explicar cómo ubicar $a + b$ para cualquier valor de a y de b .

Momento final de reflexión. En la fase de discusión general cada grupo comunicó los resultados de las dos tareas de la actividad C. Los estudiantes manifestaron que la visualización gráfica de los puntos a y b les facilitó calcular $a + b$. Sin embargo, algunos estudiantes no se fijaron en la segunda recta numérica que aparecía en la parte inferior de la pantalla y que les facilitaba aún más la visualización. En cuanto a la tarea dos, los estudiantes tuvieron problemas con la adición de números enteros de diferente signo, pues sumaban los números y dejaban el signo de la cantidad con mayor valor absoluto, por ejemplo: $-5 + 2 = -7$, es decir, ellos no diferenciaban los dos casos de adición de números enteros. El desarrollo de la segunda tarea de Geogebra, que tenía botones interactivos que permitían a los estudiantes verificar los resultados y contar los aciertos, ayudó a los estudiantes a replantear el método para sumar los enteros de diferentes signos. Sólo el grupo 3 no modificó la estrategia incorrecta, pues evitaba sumar números enteros con diferente signo

usando el botón interactivo “nuevo intento”, que cambiaba los dos números enteros en la adición.

ACTIVIDAD D “En busca del tesoro”. La actividad D se implementó el 6 de julio, en una sesión de 2 horas, una hora menos respecto a la planeación inicial. La estrategia didáctica permitió a los estudiantes la transferencia entre un contexto natural a un lenguaje simbólico, establecer una correspondencia de los números enteros y la recta numérica, y llegar a plantear operaciones para solucionar problemas aditivos.

Exploración visual y empírica. En esta fase inicial, los estudiantes colorearon y comentaron sobre los elementos que aparecían en la imagen, por ejemplo: el buzo, las algas, el tesoro, entre otros.

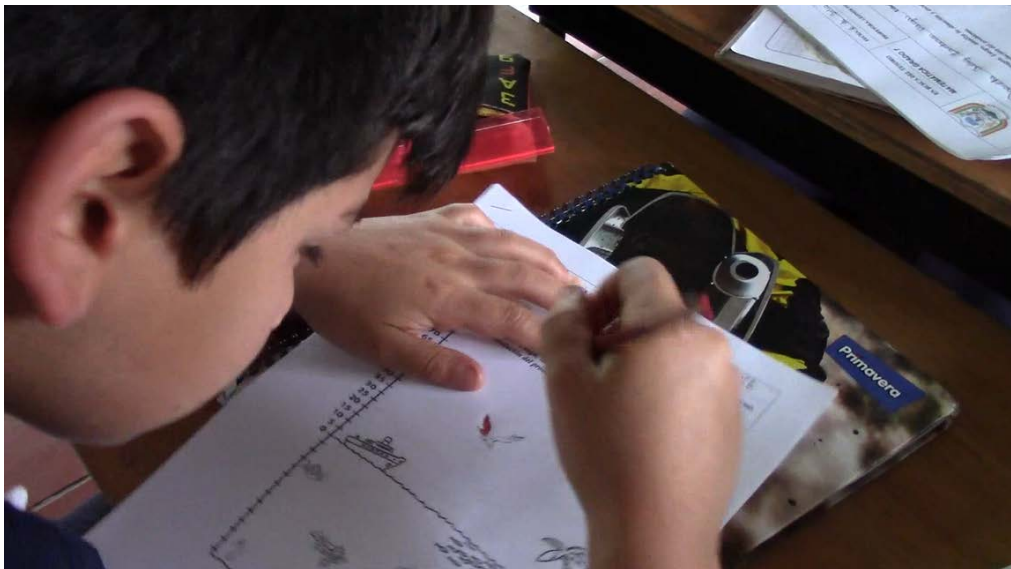


Figura 22. Exploración visual y empírica en la actividad D

Los primeros cuatro ítems del protocolo, que estaban enfocados a establecer la ubicación de los elementos del dibujo, fueron resueltos por los estudiantes mediante una estrategia basada en el uso de la recta numérica. Los integrantes de los

diferentes grupos intercambiaron ideas y compararon sus soluciones. A continuación, se presenta una discusión al interior de un grupo sobre el ítem 1.

- L1. E-10 *Profesora, nosotras decimos que el nivel del mar está en cero [señala el gráfico de las ondas de mar], pero él [señala a su compañero de grupo] dice que está a 75.*
- L2. Profesora: *Bueno, y ustedes ¿por qué no argumentan sus respuestas?*
- L3. E-10: *Si el nivel del mar estuviera en 75, el mar estaría arriba, si vemos acá [señala el dibujo de las ondas de mar] está en cero respecto a la recta.*

En este episodio se observa que las representaciones gráficas facilitaron a los estudiantes **Transcripción 8.** Actividad D “En busca del tesoro”, primera fase. tomar el nivel del mar como cero, así como posteriormente asignar números enteros positivos a objetos ubicados sobre el nivel del mar y números negativos a objetos ubicados bajo el nivel del mar.

Búsqueda de múltiples métodos de solución. En esta fase la profesora recordó a los estudiantes escribir con lapicero todos los procedimientos, además de tener en cuenta encerrar en un paréntesis lo que debieran corregir, todo esto con el fin de monitorear el proceso de resolución de problemas y revisar si habían abandonado algún camino de solución. A continuación, se muestra en la siguiente transcripción los recursos y estrategias utilizados por la mayoría de los estudiantes en la solución del ítem 6.

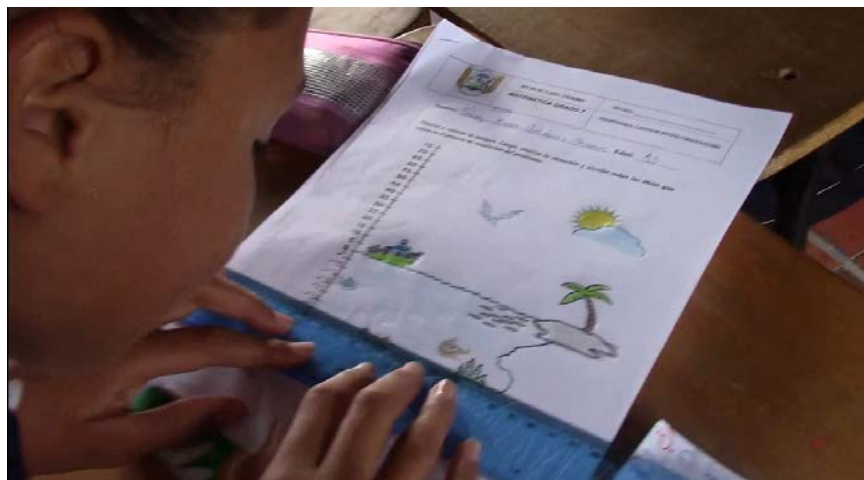


Figura 23. Búsqueda de múltiples soluciones en la actividad D

- L4. E-09: *[Lee] Si el buceador quiere encontrar el tesoro, ¿cuántos metros debe recorrer? ¿Usted cuánto coloco?*

- L5. E-02: *No... [el estudiante revisa las hojas del protocolo y vuelve a la imagen]*
L6. E-09: *El buceador está en -35 metros, pero dice que él quiere llegar al tesoro. Esto quiere decir que me ubico en -35, y 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, la respuesta es 45. Porque estaría casi donde está el tesoro, como en -80.*

Transcripción 9. Actividad D “En busca del tesoro”, segunda fase.

En las explicaciones dadas por E-09 se evidencia que identificó los números enteros, realizó hábilmente desplazamientos en la recta numérica y usó los conceptos de valor absoluto para hallar la solución del problema. También, se observa la facilidad para transferir su solución de la dimensión abstracta a la dimensión contextual, y así llegar a expresar la distancia que el buzo debía recorrer para encontrar el tesoro.

Momento final de reflexión. Para la discusión con toda la clase se escogieron al azar los estudiantes que iban a realizar la socialización de las soluciones de cada grupo, no obstante, buscando la participación de todos los estudiantes la profesora pidió al resto de los integrantes explicar el por qué pensaban que la solución de su compañero de grupo era correcta. En el siguiente episodio se presenta la socialización del grupo 1 sobre la solución del ítem 8.

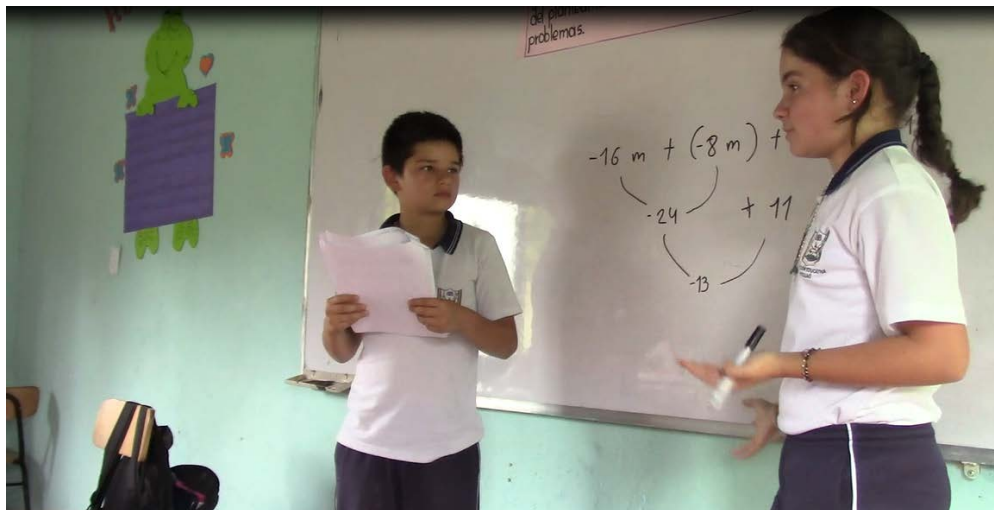


Figura 24. Momento final de reflexión en la actividad D

- L7. E-15: *Nosotros al principio lo queríamos hacer en la recta numérica, pero de un momento a otro se nos ocurrió hacerlo así [muestra los símbolos en el tablero], porque queríamos salirnos un poco de esa parte y hacerlo más como ejercicio.*
- L8. Profesora: *O sea, trabajar adición y sin la recta numérica, ... Entonces ¿Por qué ubicaron esos números allá?*
- L9. E-14: *¿Estos? [Toca el tablero].*
- L10. E-15: *Bueno profesora...*
- L11. E-14: *Es que aquí dice [empieza a leer el problema] que el pez está a 16 metros bajo el mar, entonces es menos, y baja 8 metros, entonces le tenemos que sumar -8 y sube 11, por eso lo pusimos positivo... entonces es -13 metros.*

Transcripción 10. Actividad D “En busca del tesoro”, tercera fase.

En este episodio se observa que los estudiantes pasan de una representación verbal de la situación a una representación simbólica, no sin antes considerar que también se podía resolver el problema mediante una representación gráfica, en estos cambios en las estrategias de solución se evidencia la aplicación de estrategias metacognitivas. También, se evidencia que los estudiantes asociaron expresiones como “sube” o “baja” con las operaciones básicas entre números enteros. En esta actividad empezó a hacerse evidente que las discusiones en pequeños grupos habían fortalecido el proceso de resolución de problemas, se observa que los estudiantes son más concientes que pueden existir muchas maneras de llegar a la respuesta, que no existe un único camino legitimado por la profesora o por la forma de instrucción, además los estudiantes empiezan a tomar un papel más activo en la toma de decisiones sobre cuál es el método de solución más apropiado para sus intereses. Sin embargo, el grupo 3 continuó teniendo dificultad para solucionar los problemas planteados y entender las soluciones dadas por sus compañeros, aunque la profesora estuvo pendiente y tomó acciones pedagógicas para integrar y orientar a sus miembros, no surgieron el efecto que se esperaba.

ACTIVIDAD E “La Cafetería”. La actividad E se implementó el 11 de julio, en una sesión de 2 horas y 35 minutos, terminó pocos minutos antes de lo programado.

Otro de los cambios en la planeación inicial de la actividad E fue la redistribución de los grupos, como el grupo 3 venía presentando bajo desempeño en las actividades y problemas de comunicación entre sus miembros la profesora finalmente decidió reorganizar todos los estudiantes para dejar solo 4 grupos. Por otro lado, durante la implementación de la actividad fue evidente que mediante la estrategia didáctica los estudiantes alcanzaron los resultados de aprendizaje esperados, ya que identificaron los datos relevantes de la tabla y lograron plantear operaciones para solucionar los problemas aditivos con números enteros.

Exploración visual y empírica. En esta fase la profesora motivó al grupo a trabajar la actividad teniendo en cuenta las experiencias previas que los estudiantes habían tenido con los personajes de “Mafalda” y con el contexto en el que se desarrolla la situación problema. Luego, los estudiantes pasaron a trabajar en los pequeños grupos, colorearon la imagen e hicieron la lectura del protocolo. A continuación, se presenta el trabajo del grupo 1 alrededor del ítem b.



Figura 25. Exploración visual y empírica en la actividad E

- L1. E-15: *Profesora no entendemos como Guillermo hace para lograr su propósito. Ya sumamos todo lo que daría para pagar la cuenta, entonces le queda haciendo falta \$8.500.*
- L2. Profesora: *¿Y usted, no logró interpretar tampoco esa parte? [Indaga a E-14]*

- L3. E-14: *No profe...*
L4. Profesora: *¿Y usted? [Indaga a E-01]*
L5. E-01: *No, yo tampoco.*
L6. Profesora: *¿Qué es lograr un propósito para ustedes?... leamos.*

Transcripción 11. Actividad E “La Cafetería”, primera fase.

En este episodio se observó que los estudiantes no tuvieron dificultades para asociar expresiones como “pedido o gastos” con valores negativos y expresiones como “dinero disponible” con valores positivos, ni para efectuar las operaciones adecuadas; la verdadera dificultad estuvo en reportar una respuesta que respondiera a las condiciones del problema. Por lo cual, los estudiantes con ayuda de la profesora evaluaron la respuesta obtenida. Como primer paso para la evaluación de la respuesta, la profesora sugirió a cada estudiante precisar el significado de los términos desconocidos y releer el problema con el fin de ganar claridad. En el proceso de resolución de problemas es fundamental el entendimiento acerca de lo que trata el problema, así como el constante monitoreo y evaluación del proceso de resolución para que los estudiantes tengan mejores criterios para discutir sobre las alternativas de solución.

Búsqueda de múltiples métodos de solución. Para solucionar los problemas planteados en la actividad E los estudiantes usaron como estrategias de solución operaciones numéricas, así como la estrategia de ensayo y error. A continuación, se muestran dos diferentes soluciones dadas por los estudiantes y un diálogo del grupo 2 alrededor del ítem c.

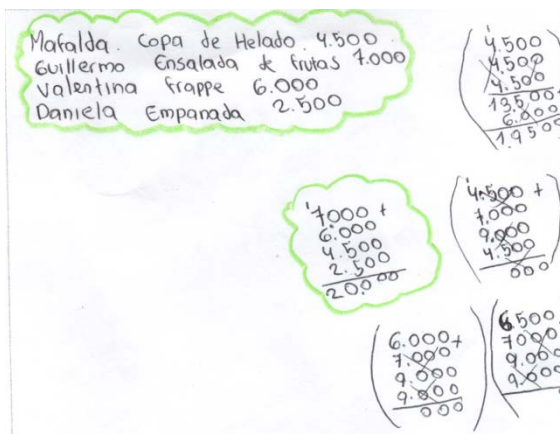


Figura 27. Proceso de solución E-15, ítem c

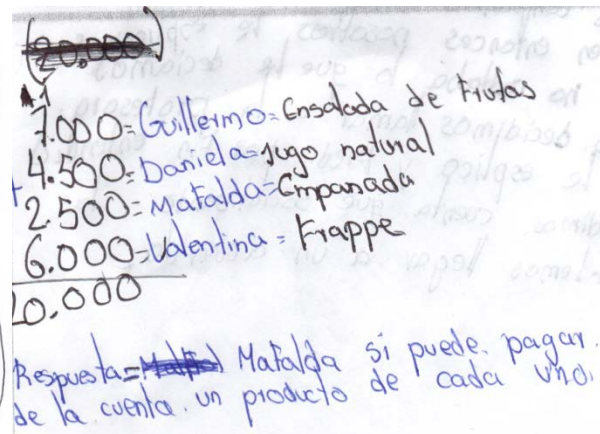


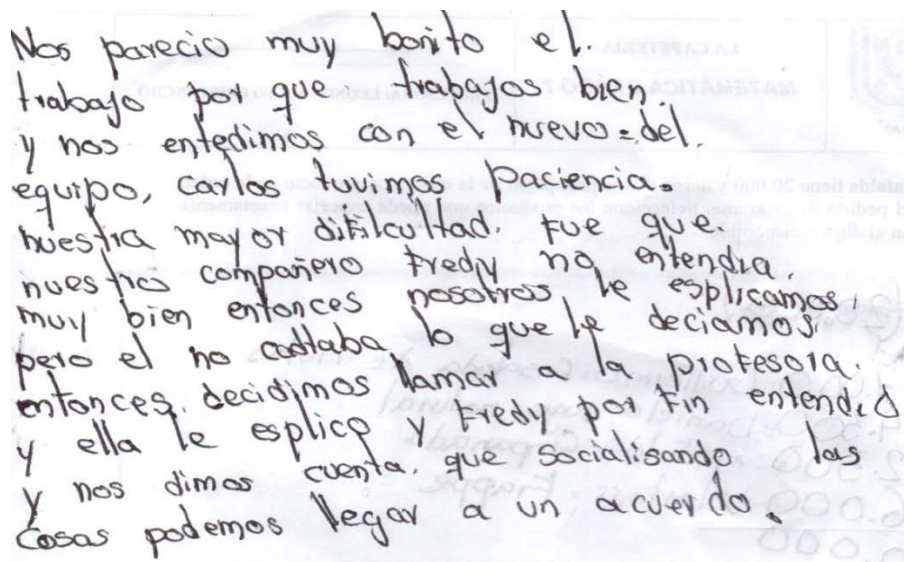
Figura 26. Proceso de solución E-09, ítem c

- L7. Profesora: ¿Tuvieron que hacer varias operaciones o sólo una operación? [Indaga a E-09]
- L8. E-09: No...pues yo al principio no lo entendía hasta que mis compañeros me explicaron y caí en cuenta, porque no...y entonces mi compañero me explicó que buscara hasta que me diera \$20.000, y lo hice... y me dio... y cómo la pregunta me dice que: Si Mafalda que era la que tenía los \$20.000 podía pagar a cada niño un producto de la cuenta de cada uno, entonces yo escribí que sí...

Transcripción 12. Actividad E “La Cafetería”, primera fase.

Tanto en las dos imágenes como en el diálogo se observa que los estudiantes lograron diseñar un plan de acción basado en la estrategia de ensayo y error para solucionar el problema, además, que establecieron relaciones de cooperación entre los miembros del grupo.

Momento final de reflexión. Durante la implementación de la actividad se evidenció que a los estudiantes se les facilitó responder correctamente a todos los ítems. Por otro lado, se observó que la modificación en la distribución de los equipos favoreció el trabajo de los pequeños grupos, los estudiantes se mostraron más tolerantes con las opiniones de sus compañeros y se notó el entusiasmo con el que desarrollaron la actividad. A continuación, se presentan los comentarios del grupo 2.



Nos pareció muy bonito el trabajo por que trabajamos bien y nos entendimos con el nuevo del equipo, Carlos tuvimos paciencia. Nuestra mayor dificultad fue que nuestro compañero Fredy no entendía, muy bien entonces nosotros le explicamos, pero el no callaba lo que le decíamos entonces decidimos llamar a la profesora y ella le explico y Fredy por fin entendió y nos dimos cuenta que socializando las cosas podemos llegar a un acuerdo.

Figura 28. Conclusiones del grupo 3, actividad E

El tipo de trabajo cooperativo instaurado en la clase de matemáticas llevó a los estudiantes a replantear la idea que esta disciplina sólo se puede desarrollar en forma individual, para entenderla como una práctica dentro de una comunidad que depende de la comunicación y la colaboración entre sus miembros para crear un ambiente propicio que les permita pensar y razonar acerca de las matemáticas.

ACTIVIDAD F “Sustracción de números enteros en la recta numérica”. La actividad F se implementó el 12 de julio, en una sesión de 4 horas, fue necesaria una hora más de lo previsto. Esta actividad estuvo conformada por tres tareas que involucraban el uso de Geogebra promoviendo una valiosa interacción de los estudiantes con diferentes tipos de representación para una mejor comprensión de la sustracción de números enteros. La primera tarea implicaba una representación gráfica de la sustracción de números enteros en la recta numérica, la segunda una representación simbólica de la sustracción de los números enteros, y la tercera planteaba diferentes preguntas alrededor de una animación de una tortuga sobre la recta numérica. El uso de Geogebra en esta actividad permitió que los estudiantes visualizaran la representación gráfica y simbólica de a , b y $a - b$, además resolver y

plantear diferentes problemas, lo cual permitió que los estudiantes comprendieran la sustracción de números enteros.

Exploración visual y empírica. Los ítems de la primera tarea estaban enfocados a que los estudiantes logaran visualizar el comportamiento de $a - b$ al mover los puntos a y b a diferentes posiciones. En esta fase los estudiantes relacionaron fácilmente el vector azul con el punto a , el vector verde con el punto b , y el vector rojo con la sustracción de estos dos números enteros, $a - b$, ya que las tareas de esta actividad tenían un formato semejante a las tareas implementadas en la actividad C. Se presenta a continuación una discusión al interior del grupo 1 alrededor del ítem 4 de la primera tarea.

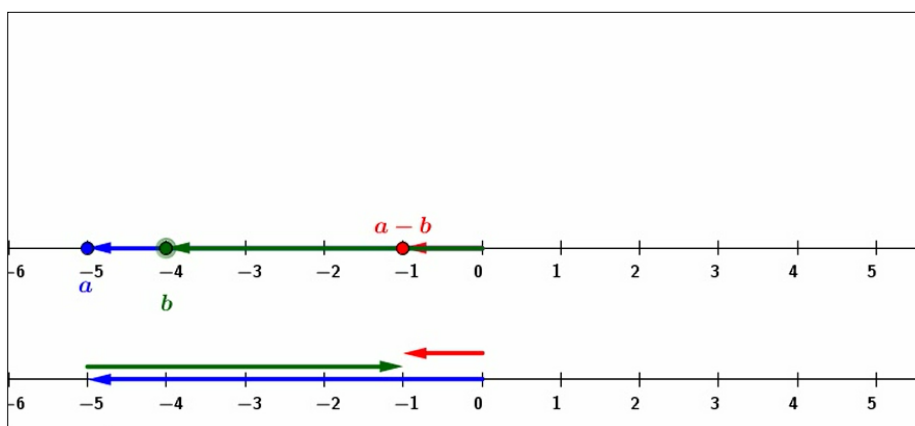


Figura 29. Sustracción de números enteros usando el modelo de la recta numérica en “Geogebra”

- L1. E-14: ¿Dónde estaría ubicado $a - b$ si a se ubicara en -5 y b en -4?
- L2. E-15: $a - b$ estaría ubicado en -1. [señala el vector rojo en la pantalla]

Transcripción 13. Actividad F “Sustracción de números enteros en la recta numérica”, primera fase.

En el diálogo se evidencia que la estrategia usada por los estudiantes para resolver la primera tarea fue la representación gráfica de $a - b$, se observa que los estudiantes

respondieron correctamente el ítem 4 apoyando sus razonamientos en la visualización de los puntos **a**, **b** y **a-b** en sus pantallas.

Búsqueda de múltiples métodos de solución. En esta fase los estudiantes pasaron de las estrategias basadas en la representación gráfica a estrategias basadas en la representación simbólica de la sustracción de números enteros, ya que los estudiantes empezaron a plantear operaciones numéricas en sus hojas de trabajo, porque no podían visualizar los resultados a partir del ítem 5, pues el archivo en Geogebra restringía el uso de la recta numérica a un intervalo de $[-20, 20]$.



Figura 30. Búsqueda de múltiples métodos de solución en la actividad F

- L3. E-12: *Profesora este como no tiene signo es positivo, entonces sería 13 menos - 9.*
L4. Profesora: *Si señora, es positivo.*
L5. E-08: *Si porque negativo con negativo... menos por menos da más, entonces ahí se suma.*
L6. Profesora: *Exactamente, lo que su compañera les dice, entonces, acá [señala el ítem 5]...*
L7. E-12: *Entonces sería 13 más 9, 22.*

Transcripción 14. Actividad F “Sustracción de números enteros en la recta numérica”, segunda fase.

En el diálogo se observa que las estudiantes hallaron la diferencia entre **13** y **-9**, sumando el minuendo con el opuesto del sustraendo. Además, surgió de manera

natural la ley de signos, esto se evidencia en la línea 5 con la expresión de la estudiante E-10 “menos por menos da más”, cabe recordar que ellos no habían tenido instrucción previa sobre números enteros.

Momento final de reflexión. Durante toda la sesión los estudiantes mostraron mucho interés en el trabajo con las nuevas tecnologías y las actividades propuestas. El empleo del software permitió a los estudiantes trabajar diferentes representaciones matemáticas en forma dinámica. Los estudiantes usaron la recta numérica como una estrategia para comprobar las respuestas cuando las cantidades eran pequeñas, sin embargo, una creencia que prevalece en el grupo es que las representaciones gráficas son soluciones débiles, y prefieren recurrir a las representaciones simbólicas para tener mayor seguridad, por ejemplo, algunos estudiantes expresaron que iban a resolver los problemas “*matemáticamente*” cuando usan como estrategia de resolución operaciones numéricas. A nivel general, los estudiantes comunicaron sus ideas matemáticas con más confianza ante sus compañeros, argumentaron el sentido de sus soluciones y expusieron las dificultades que tuvieron en el proceso de resolución de los problemas.

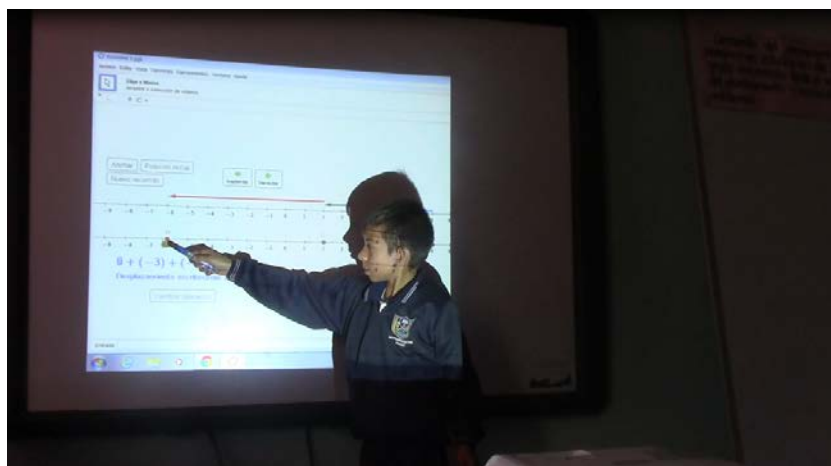


Figura 31. Momento final de reflexión en la actividad F

En la imagen se observa a un estudiante presentando a sus compañeros un problema que planteó con su grupo sobre los diferentes puntos en que se detenía

la tortuga utilizando adición y sustracción de números enteros. Durante toda la implementación de la actividad se observó que los estudiantes avanzaron rápidamente, expresaban las situaciones en forma de adición y sustracción sin dificultades, manejaban correctamente los signos, utilizaron signos de agrupación por iniciativa propia para sumar sólo dos números, algunos incluso ya realizaban las operaciones mentalmente.

ACTIVIDAD G “Campeonato Interligas”. La actividad G se implementó el 18 de julio en una sesión de hora y media, ya que los estudiantes habían progresado en la comprensión de la adición y sustracción de enteros a medida que se fue avanzado en el desarrollo de la SD. La estrategia didáctica permitió que los estudiantes aplicaran las propiedades de la adición y sustracción de números enteros en la resolución de problemas aditivos.

Exploración visual y empírica. En esta fase los estudiantes realizaron la lectura cuidadosa del protocolo G para entender las condiciones iniciales del problema, identificando el contexto de la situación, los equipos participantes, interpretando la tabla de registro de los resultados de los partidos y el lenguaje matemático. En el siguiente episodio se muestra el diálogo entre el grupo 2 y la profesora sobre el ítem 1.



Figura 32. Exploración visual y empírica en la actividad G

- L1. Profesora: *¿Cuáles equipos jugaron el primer partido? y ¿cómo quedó el marcador?*
- L2. E-08: *Atlético FC contra Real FC, con 4 goles a favor y 2 en contra.*
- L3. Profesora: *¿Entonces quién ganó?*
- L4. E-12: *Atlético FC con dos goles de diferencia.*
- L5. Profesora: *Entonces ¿qué no entienden de ahí?*
- L6. Estudiantes: *Ah..., ya.*

Transcripción 15. Actividad G “Campeonato Interligas”, primera fase.

Aquí se hizo evidente que los estudiantes comprendieron los dos posibles casos en la suma de enteros, suma de números con igual signo y suma de números con diferente signo. Además, que los estudiantes lograron asociar expresiones como “goles a favor” con números positivos y “goles en contra” con números negativos, y luego plantear una adición para hallar los goles de diferencia.

Búsqueda de múltiples métodos de solución. En la búsqueda de soluciones y argumentos válidos la mayoría de los estudiantes para resolver los problemas propuestos utilizó como estrategia plantear operaciones numéricas de adición de números enteros. Otra estrategia a la que recurrieron los estudiantes fue la representación gráfica en la recta numérica de los puntos a favor y en contra del equipo Atlético FC correspondiente a cada uno de los partidos jugados. E-02, E-09, E-15

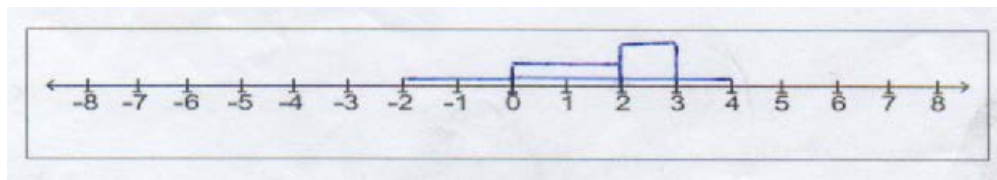


Figura 33. Proceso de solución E-02, Actividad G, ítem 1

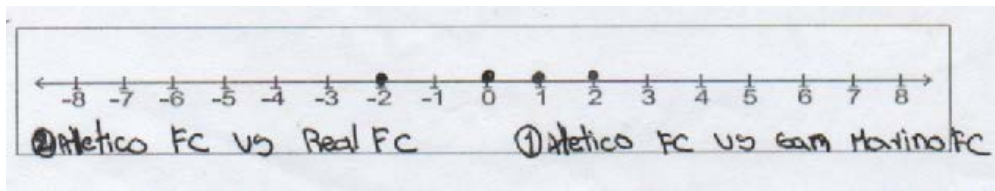


Figura 34. Proceso de solución E-09, Actividad G, ítem 1

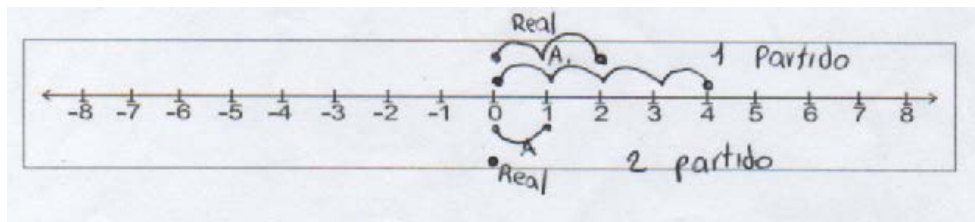


Figura 35. Proceso de solución E-15, Actividad G, ítem 1

En las imágenes anteriores se observa la forma como los estudiantes representaron los goles de diferencia mediante el dibujo de puntos, saltos equidistantes y líneas en la recta numérica tanto para el primer, como para el segundo partido jugado por el Atlético FC. Sin embargo, aunque los estudiantes conocían la estrategia de representar las operaciones de adición y sustracción de números enteros por medio de vectores, pues se había trabajado en las actividades C y F, aún no hace parte de sus recursos, por lo tanto, se sugiere que participen en experiencias similares a estas actividades.

Momento final de reflexión. Como la actividad G se desarrollaba en un contexto deportivo a los estudiantes se les facilitó la comprensión de la situación problémica. El hecho de trabajar con situaciones bastante familiares, en este caso un campeonato de fútbol, contribuyó a que los estudiantes percibieran estas situaciones desde un punto de vista matemático, es decir, realizar la transferencia de lo contextual a lo abstracto. También, permitió a los estudiantes compartir sus experiencias futbolísticas y argumentar con propiedad el ¿por qué? de sus respuestas, lo que los llevó a sentirse parte activa de su comunidad matemática.

ACTIVIDAD H “El Clima”. La actividad H se implementó el 25 de julio en una sesión de una hora y media, sin más modificaciones que el tiempo, pues la actividad se desarrolló en la mitad de lo previsto. La estrategia didáctica implementada permitió que los estudiantes aplicaran las propiedades de adición y sustracción de números enteros, identificaran datos relevantes para la resolución de los problemas planteados, incluso llegaron a plantear problemas en un contexto familiar.

Exploración visual y empírica. Como la actividad H fue la última de la SD, esta fase se inició con una reflexión donde los estudiantes compartieron sus apreciaciones de cada una de las actividades de la SD implementadas. Posteriormente, se organizaron en los pequeños grupos, realizaron la lectura del protocolo y resolvieron los problemas propuestos.



Figura 36. Exploración visual y empírica en la actividad H

Un aspecto importante en el éxito de los estudiantes en su proceso de resolución de problemas fue el monitoreo constante de la profesora, quien ayudaba a los estudiantes a reflexionar sobre las ideas que ellos comunicaban para que pudieran aprovecharlas al máximo y motivarlos a proponer un plan de acción.

Búsqueda de múltiples métodos de solución. Las estrategias usadas por los estudiantes fueron de tipo gráfico y numérico. A través del trabajo en equipo los

estudiantes llegaron a tomar cero grados como referente, asociaron las temperaturas sobre cero con números positivos y las temperaturas bajo cero con números negativos, comprendieron la operación adecuada para la variación de la temperatura, temperatura máxima menos temperatura mínima, y tomaron conciencia que la sustracción es equivalente a la suma del minuendo con el opuesto aditivo del sustraendo. En el siguiente episodio se muestra como los estudiantes del grupo 2 incorporaron a su lenguaje términos matemáticos y empezaron a proponer problemas desde situaciones de su vida cotidiana.



Figura 37. Búsqueda de múltiples métodos de solución en la actividad H

- L1. Profesora: Lea la situación que usted propuso [Se dirige a E-09].
 L2. E-09: En Colombia en estos últimos meses el clima ha estado lluvioso, en el corregimiento de *Pitigüao el clima ha estado lluvioso* estos últimos tres días, la temperatura han sido -5°C , -8°C y 9°C . ¿Cuánto ha sido la variación de la temperatura estos últimos tres días?
 L3. Profesora: ¿Cuánto ha variado la temperatura?, ¿Qué otro interrogante podemos plantear?, ¿Cuál día ha...
 L4. E-07: ¡Sí!... ¿Cuál día ha tenido la mayor temperatura?

Transcripción 16. Actividad H “El Clima”, segunda fase.

En este episodio se observa que los estudiantes discutieron sobre el clima en su región usando los elementos matemáticos vistos en clase sobre la variación de la

temperatura. Además, se ve como la profesora dinamiza la discusión al animar a los estudiantes a sugerir otras preguntas sobre la misma situación.

Momento final de reflexión. En la discusión colectiva cada grupo expuso y defendió la solución a los problemas que ellos mismos habían planteado. En este aspecto, se considera que el trabajo en pequeños grupos fue un elemento clave que contribuyó al fortalecimiento de la competencia de comunicación y representación, pues los estudiantes demostraron más liderazgo, facilidad para expresarse y explicar a sus compañeros sus ideas matemáticas.



Figura 38. Momento final de reflexión en la actividad H

- L5. Profesora: Tiene 3 minuticos para exponer, luego sigue el grupo 4 [Se dirige a E-03].
- L6. E-03: Ayer la temperatura de Mogotes fue de 7° centígrados y la mínima fue de menos 3° C. Para hoy la mínima será de -2° y se espera una máxima de 8° centígrados. ¿Qué operación debe realizar para hallar la variación de la temperatura? La operación que se debe realizar es una resta. [Luego, la estudiante escribe en el tablero una adición entre las temperaturas]...
- L7. Profesora: ...Me dicen que van a plantear una resta, si es una resta ¿cómo la debo plantear'?
- L8. E-05: Yo le pondría el signo menos.

Transcripción 17. Actividad H "El Clima", tercera fase.

En el diálogo anterior se aprecia como la profesora, con el fin de crear una atmósfera de confianza para que los estudiantes compartan las soluciones y puedan

evaluarlas con sus compañeros, organizó y guio la discusión de las ideas matemáticas de los estudiantes, más que la naturaleza del problema lo fundamental de este episodio fue como los estudiantes se involucraron para refutar los argumentos de su compañera y construir en comunidad acuerdos para llegar a la solución correcta. Una de las dificultades de los estudiantes en el desarrollo de la actividad fue desligar la medida de la temperatura y la fecha en que se tomaba, pues definían la temperatura mínima como la temperatura de la fecha más reciente.

4.3 ANÁLISIS DE LA PRUEBA FINAL

El objetivo de la prueba final fue evaluar el efecto de la implementación de la SD en el fortalecimiento de la competencia de comunicación y representación en la comprensión de los números enteros en estudiantes de séptimo grado, al mismo tiempo determinar en qué medida los estudiantes superaron las dificultades y errores identificados en la primera etapa de la investigación. En la aplicación de la prueba final participaron todos los estudiantes que recibieron el proceso de instrucción, se dispuso un tiempo estimado de 2 horas para responder a todos los ítems. Al igual que en la prueba diagnóstica los recursos evaluados en esta prueba fueron: números signados, números relativos, orden en los números enteros, ley de signos, uso de la recta numérica, adición y sustracción de números enteros, valor absoluto y uso de signos de agrupación.

La prueba final estuvo conformada por diez ítems: siete ítems con formato de selección múltiple y tres ítems con formato abierto. No obstante, la mayoría de las respuestas de los estudiantes presenta algún tipo de procedimiento matemático, por lo que para el análisis de cada uno de los ítems se seleccionaron algunas respuestas representativas que muestran con claridad el camino de solución y los argumentos dados por los estudiantes. Las categorías de análisis utilizadas en la prueba final son las categorías propuestas Schoenfeld⁹⁷: *dominio del conocimiento*

⁹⁷ SCHOENFELD. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, Op. cit., p. 334-370.

o recursos, estrategias cognitivas o métodos heurísticos, estrategias metacognitivas y sistemas de creencias; además, se consideran las dificultades encontradas en los estudiantes en la prueba diagnóstica. A continuación, se presenta una descripción de cada ítem de la prueba final y el análisis según el enfoque teórico de la investigación.

Ítem 1

Para elegir quién irá a comprar las entradas para ver una película, 4 amigos sacaron cada uno de una bolsa un número, así:



Juan



Ana



David



María

Si debe ir quien tenga el número mayor, las entradas las compra:

- A. Juan
- B. Ana
- C. David
- D. Lucía

El primer ítem, tomado de la Prueba Instruimos⁹⁸, se desarrolla en un contexto familiar para los estudiantes como es el entretenimiento del séptimo arte. Los recursos evaluados en este ítem fueron: números signados y orden en los números

⁹⁸ PRUEBA SABER 7°. Cuadernillo Simulacro Prueba Saber 7°. N. 201500892, 2017. p. 7. Disponible en: www.instruimos.com

que respondió de forma incorrecta, el tipo de errores presentados pueden asociarse a dificultades en la comprensión del lenguaje matemático y/o verbal de la situación problemática, pues escogieron una opción que no estaba relacionada con los datos del problema.

Ítem 2

Una lombriz se encuentra 26 cm por debajo de la superficie de la tierra. Una representación numérica adecuada, en centímetros, para la posición de la lombriz con respecto a la superficie terrestre es:

- A. 26 cm
- B. -26 cm
- C. 0,26 cm
- D. -0, 26 cm

El segundo ítem, que ha sido tomado de la Prueba Saber 7° grado⁹⁹, sitúa al estudiante en un contexto natural. Este ítem proporciona algunos datos, de los cuales se pide al estudiante establecer la posición de una lombriz, por lo que se supone que los estudiantes deben comprender los siguientes recursos: números signados y uso de la recta numérica. A partir de los datos, los estudiantes debían asociar los números positivos a expresiones como “sobre la superficie” y los números negativos a expresiones como “por debajo de la superficie”, además, tomar el cero como referente. Al tomar la superficie terrestre como cero, entonces la ubicación de la lombriz por debajo de la superficie estaría representada por enteros negativos, por lo tanto, la posición de la lombriz con respecto a la superficie terrestre sería de -26 cm.

Una vez analizadas las respuestas dadas por los estudiantes a este ítem se encontró que 93% escogieron la opción B y 7% escogió la opción A. En este ítem la

⁹⁹ PRUEBA SABER 7°. Cuadernillo Simulacro Prueba Saber 7°. N. 201500824, 2017. Disponible en: www.instruimos.com

mayoría de las respuestas se asemejan al proceso de solución que se esperaba, el cual se describió anteriormente. A continuación, se presentan algunos ejemplos de las respuestas dadas por los estudiantes E-13 y E-04.

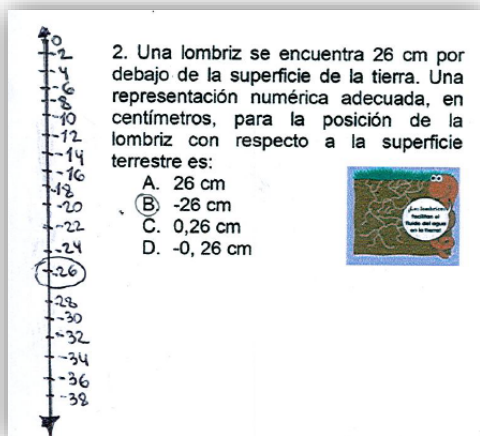


Figura 42. Proceso de solución E-13, ítem 2

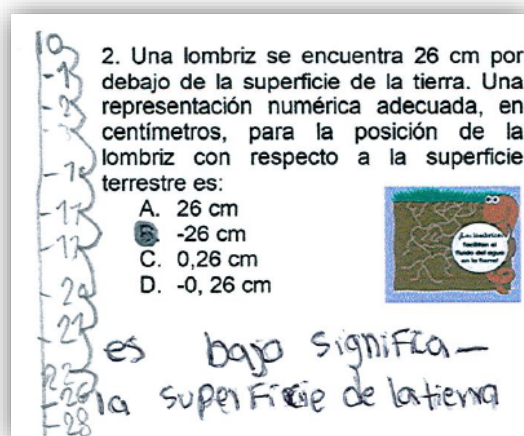


Figura 41. Proceso de solución E-04, ítem 2

En estas respuestas se observa que los estudiantes usaron como estrategia la recta numérica y que lograron asociar los números negativos con la expresión “bajo la superficie de la tierra”. Sin embargo, en la solución de E-04 aparecen errores al definir la escala de la recta numérica, pues no utiliza una unidad de medida adecuada. Por otro lado, el 7% de los estudiantes que escogieron la opción incorrecta, opción A, tuvieron errores al seleccionar la respuesta, como se muestra a continuación.

2. Una lombriz se encuentra 26 cm por debajo de la superficie de la tierra. Una representación numérica adecuada, en centímetros, para la posición de la lombriz con respecto a la superficie terrestre es:

A. 26 cm
 B. -26 cm
 C. 0,26 cm
 D. -0,26 cm




Figura 43. Proceso de solución E-09, ítem 2

Ítem 3

Se han registrado cuatro diferentes temperaturas durante un mes en la ciudad de Moscú, con el siguiente termómetro.



Día 1 10°
 Día 2 -10°
 Día 3 -20°
 Día 4 0°

La diferencia entre las temperaturas de los días 3 y 1 fue:

- A. -10°
 B. 10°
 C. 20°
 D. 30°

El tercer ítem, tomado de Pruebas Saber 7° grado¹⁰⁰, se ubica en un contexto natural, se centra en la estimación de la variación de la temperatura a partir de una tabla con datos de diferentes temperaturas. Este ítem evaluaba si los estudiantes comprendían números signados, números relativos, orden en los enteros, uso de signos de agrupación, ley de signos y sustracción en números enteros. La solución del ítem requiere identificar la temperatura máxima y la temperatura mínima, luego plantear una sustracción entre estos dos datos. Luego, como la temperatura máxima es 10° en el día 1 y la temperatura mínima es -20° en el día 3, al realizar la sustracción entre estas dos temperaturas, $10^\circ - (-20) = 10^\circ + 20^\circ = 30^\circ$, la respuesta correcta es la D.

Al analizar las respuestas de los estudiantes a este ítem se encontró que 26% escogió la opción A, 7% escogió la opción B, 7% la opción C y 60% la opción D. La mayoría de los estudiantes que respondieron correctamente a este ítem usaron como estrategia operaciones numéricas, solo algunos apoyaron sus razonamientos en la recta numérica, como se puede observar en los siguientes ejemplos de los estudiantes E-09 y E-14.

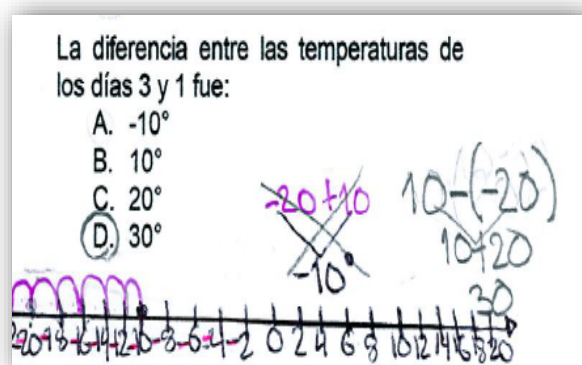


Figura 45. Proceso de solución E-09, ítem 3

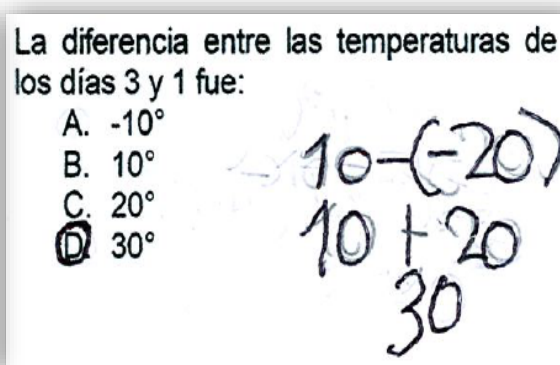


Figura 44. Proceso de solución E-14, ítem 3

¹⁰⁰ PRUEBA SABER 7°. Cuadernillo Simulacro Prueba Saber 7°. N. 201500824, 2017. Disponible en: www.instruimos.com

En el proceso de solución de E-09 se observa que intentó tres caminos de solución diferentes, así como una constante revisión a la luz de las condiciones del problema para decidir cuándo abandonar esos caminos con base en la evaluación. El análisis de los resultados de la prueba también indica que 40% de los estudiantes tuvo dificultad para resolver este ítem, probablemente dificultad asociada a la confusión para determinar la temperatura máxima o para plantear una sustracción para la variación de la temperatura, temperatura máxima menos temperatura mínima, dificultades que algunos estudiantes presentaron durante la implementación de la actividad H.

Ítem 4

Un escalador quiere llegar a la cima del Monte Everest y esta se encuentra a una altitud de 8.848 sobre el nivel del mar. Si al escalador le falta 4.640 metros para llegar a la cima, entonces está a _____ sobre el nivel del mar.

- A. 4.208 m.
- B. 13.488 m.
- C. -4.208 m.
- D. -13.488 m.

El cuarto ítem, tomado de la Prueba Saber 7° grado¹⁰¹, se desarrolla en un contexto natural. Los recursos y técnicas que se evalúan en este ítem son: números signados, números relativos y sustracción de números enteros. Los estudiantes debían identificar los hechos relevantes del problema, así como las condiciones y las metas, es decir, tomar el nivel del mar como cero, asociar expresiones como “la altitud de objetos sobre el nivel del mar” como números positivos y expresiones

¹⁰¹ PRUEBA SABER 7°. Cuadernillo Simulacro Prueba Saber 7°. N. 201500824, 2017. Disponible en: www.instruimos.com

como “falta” con la sustracción de enteros, así como dar sentido a la situación para plantear la operación adecuada. Para conocer la altitud a la que se encontraba el escalador era necesario efectuar una sustracción entre la altitud del monte Everest y altitud que le faltaba al escalador para llegar a la cima, por tanto, la respuesta correcta es la opción A.

En las respuestas a este ítem se encontró que 80% de los estudiantes escogieron la opción A, y 20% la opción B. La mayoría de estudiantes respondieron correctamente a este ítem usando como estrategia operaciones numéricas. A continuación, se muestra las respuestas de los estudiantes E-07 y E-01.

4. Un escalador quiere llegar a la cima del Monte Everest y esta se encuentra a una altitud de 8.848 sobre el nivel del mar. Si al escalador le falta 4.640 metros para llegar a la cima, entonces está a 4.208 sobre el nivel del mar.

A. 4.208 m.
 B. 13.488 m.
 C. -4.208 m.
 D. -13.488 m.

$$\begin{array}{r}
 -8.848 \\
 4.640 \\
 \hline
 4.208
 \end{array}$$

Figura 46. Proceso de solución E-07, ítem 4

4. Un escalador quiere llegar a la cima del Monte Everest y esta se encuentra a una altitud de 8.848 sobre el nivel del mar. Si al escalador le falta 4.640 metros para llegar a la cima, entonces está a 4.208 sobre el nivel del mar.

A. 4.208 m.
 B. 13.488 m.
 C. -4.208 m.
 D. -13.488 m.

$$\begin{array}{r}
 4.640 \\
 4.208 + \\
 \hline
 8.848
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8.848 - \\
 4.640 \\
 \hline
 4.208
 \end{array}$$

Figura 47. Proceso de solución E-01, ítem 4

Se observa en los ejemplos que los estudiantes plantearon la operación adecuada, identificando correctamente el minuendo y el sustraendo para hallar la altitud del escalador. En cuanto a las estrategias metacognitivas, en el proceso de solución de E-01 se muestra una revisión de la solución en la que reconoce el efecto de cada operación y la relación entre estas, y así lograr reportar la respuesta. Por otro lado,

los demás estudiantes (20%) que respondieron de manera incorrecta probablemente tuvieron dificultad para dar sentido a los datos y llegar a plantear la operación adecuada, pues sumaron los datos que proporcionaba el problema, como se muestra en la respuesta dada por E-10.

4. Un escalador quiere llegar a la cima del Monte Everest y esta se encuentra a una altitud de 8.848 sobre el nivel del mar. Si al escalador le falta 4.640 metros para llegar a la cima, entonces está a _____ sobre el nivel del mar.

A. 4.208 m.
B. 13.488 m.
C. -4.208 m.
D. -13.488 m.

8848 +
4640

13488

Figura 48. Proceso de solución E-10, ítem 4

Ítem 5

En una feria se juega tiro al blanco: por cada acierto se ganan \$3.000 y por cada desacierto se pierde \$1.000. Si Arturo lanzó tres veces y acertó una vez en el blanco. ¿Cuánto dinero ganó o perdió al final de los tres lanzamientos?

A. Ganó \$1.000
B. Ganó \$3.000
C. Perdió \$2.000
D. Perdió \$4.000

El quinto ítem, tomado del Cuadernillo¹⁰² de Prueba Saber 3°, 5° y 9° 2013, es una situación de variación que se desarrolla en una feria. Para resolver el problema se

¹⁰² SABER 3°, 5° y 9° 2013. Cuadernillo de Prueba Matemáticas 9° grado. Segunda Edición, MEN, 2013. p. 7. Disponible en:

requieren conocimientos de los siguientes dominios y técnicas: números signados, números relativos, adecuada interpretación de expresiones como “ganar” y “perder”, y los dos casos de la adición de enteros. Para calcular el dinero que Arturo ganó o perdió en el juego, los estudiantes primero debían asociar las expresiones “ganar” con los enteros positivos y “perder” con los enteros negativos, luego precisar cuánto dinero había ganado y cuánto dinero había perdido. Por último, requería plantear una adición. Un posible camino de solución, podría seguir el siguiente proceso, como Arturo acertó una vez tendría +3.000, pero perdió 2 veces, entonces serían -2.000, luego $+3000 - 2.000 = +1.000$, por tanto, la opción correcta es A.

Con respecto a este ítem 80% de los estudiantes respondieron correctamente al escoger la opción A, lo que indica que la mayoría de ellos logró realizar un proceso de solución semejante al descrito anteriormente, por ejemplo, los procesos de E-08 y E-10.

5. En una feria se juega tiro al blanco: por cada acierto se ganan \$3.000 y por cada desacierto se pierde \$1.000. Si Arturo lanzó tres veces y acertó una vez en el blanco. ¿Cuánto dinero ganó o perdió al final de los tres lanzamientos?

A. Ganó \$1.000
 B. Ganó \$3.000
 C. Perdió \$2.000
 D. Perdió \$4.000

acerto 1 y gana 3000
 y perdio 2 2000
 1.000

Figura 50. Proceso de solución E-08, ítem 5

5. En una feria se juega tiro al blanco: por cada acierto se ganan \$3.000 y por cada desacierto se pierde \$1.000. Si Arturo lanzó tres veces y acertó una vez en el blanco. ¿Cuánto dinero ganó o perdió al final de los tres lanzamientos?

A. Ganó \$1.000
 B. Ganó \$3.000
 C. Perdió \$2.000
 D. Perdió \$4.000

3.000 gana
 2.000 perdio
 1.000

Figura 49. Proceso de solución E-10, ítem 5

En las imágenes se observa que los estudiantes recurrieron al lenguaje natural y simbólico para solucionar el problema, las estrategias usadas son operaciones numéricas. No obstante, no queda claro si tomaron las pérdidas como una cantidad

negativa o como una sustracción de números enteros, por la ubicación del signo menos. En cuanto el 20% restante de los estudiantes que escogió la opción incorrecta, la dificultad estuvo en precisar cuánto realmente había perdido Arturo en el juego, es decir, no tuvieron en cuenta que perdió dos veces, por tanto, al plantear la expresión aritmética la respuesta daba como resultado 2.000. Esta dificultad probablemente estuvo asociada a la comprensión del lenguaje matemático y/o verbal en situaciones aditivas.

5. En una feria se juega tiro al blanco: por cada acierto se ganan \$3.000 y por cada desacierto se pierde \$1.000. Si Arturo lanzó tres veces y acertó una vez en el blanco. ¿Cuánto dinero ganó o perdió al final de los tres lanzamientos?

A. Ganó \$1.000
 B. Ganó \$3.000
 C. Perdió \$2.000
 D. Perdió \$4.000

$$\begin{array}{r} 3.000 - \\ 1.000 \\ \hline 2.000 \end{array}$$

Figura 51. Proceso de solución E-03, ítem 5

Ítem 6

En una ciudad de Rusia se registró la temperatura a cuatro horas distintas, los datos se encuentran en la siguiente tabla:

Hora	Temperatura
7:00 a.m.	-9° C
10:00 a.m.	0° C
2:00 p.m.	-5° C
6:00 p.m.	1° C

La mayor temperatura se registró a las:

- A. 7:00 a.m., porque -9 es el mayor de los números.
 B. 10:00 a.m., porque la máxima temperatura siempre es cero.
 C. 2:00 p.m., porque a esta hora siempre hace más calor.
 D. 6:00 p.m., porque 1 es el mayor de los cuatro números.

Este ítem, tomado de la Prueba Instruimos¹⁰³, estuvo orientado al igual que el ítem 1 a evaluar si los estudiantes identificaban los números signados, números relativos y el orden de los números enteros. Para resolverlo correctamente los estudiantes debían interpretar la situación, asociando los números positivos con temperaturas por encima de cero, los números negativos con temperaturas bajo cero, además de tomar el cero como referente. Por tanto, como hay números negativos y positivos, el estudiante debía tener en cuenta que cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo, luego -9°C y -5°C no podrían ser las temperaturas más altas, además, descartar al cero, porque no tiene signo, entonces la mayor temperatura de los datos registrados en el problema es 1°C , por lo tanto, la opción correcta es la D.

En el análisis de las respuestas al sexto ítems se observó que 7% de los estudiantes escogió la opción A y 93% la opción D. El alto porcentaje de éxito en este ítem da entender que los estudiantes lograron interpretar las condiciones iniciales del problema y establecer relaciones de orden en los números enteros para resolver la situación problémica. A continuación, se presentan como ejemplos las respuestas dadas por los estudiantes E-04 y E-06.

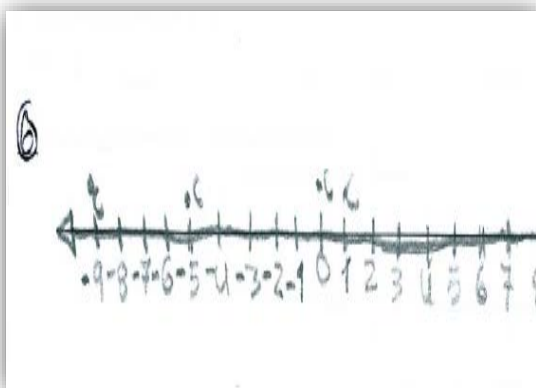


Figura 52. Proceso de solución E-04, ítem 6

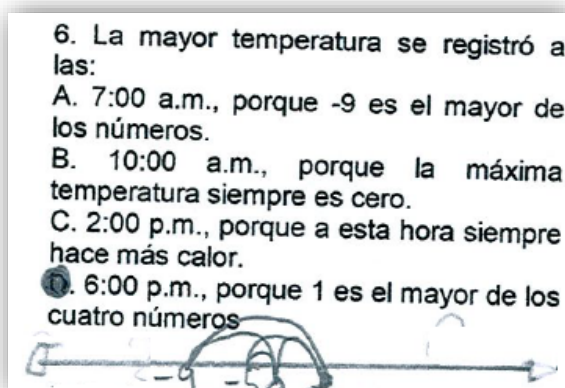


Figura 53. Proceso de solución E-06, ítem 6

¹⁰³ PRUEBA SABER 7°. Cuadernillo Simulacro Prueba Saber 7°. N. 201500531, 2017. p. 2. Disponible en: www.instruimos.com

Los estudiantes basaron sus respuestas en estrategias de tipo gráfico, se puede observar que los estudiantes eligieron 1° C como la mayor temperatura por ser el único número ubicado a la derecha del cero en la recta numérica. En cuanto al 7% de los estudiantes que respondió de forma incorrecta, señalando que la mayor temperatura era -9° C, este tipo de errores puede relacionarse con la dificultad para dar sentido a los números negativos, al ignorar el signo negativo, o dificultad en la comprensión del lenguaje matemático y/o verbal de las situaciones problemáticas.

Ítem 7

Con la intención de restringir el uso de su computador por otras personas. Lucia lo configura de modo que la contraseña para iniciar sesión sea la respuesta correcta a la pregunta que se muestre en la pantalla. Si la pregunta es el resultado del siguiente polinomio aritmético: $\{[(-7) + (-13) - (-15)] + [23 - (18) - (-6)]\}$
La contraseña será:

- A. 11
- B. 6
- C. 5
- D. -5

El séptimo ítem, fue tomado de Prueba Saber 7° grado¹⁰⁴, se desarrolla en un contexto tecnológico. Al igual que el ítem 7 de la prueba diagnóstica tiene el mismo enunciado y evalúa los mismos recursos y técnicas, números signados, números relativos, ley de signos y uso de signos de agrupación. Sin embargo, tiene un grado mayor de dificultad, ya que el polinomio aritmético tiene más términos y signos de agrupación, por lo que también se incluiría en los recursos evaluados la adición y sustracción de números enteros. Para resolver este problema el estudiante debía suprimir los signos de agrupación teniendo en cuenta la ley de los signos y sumar los términos, por tanto, la opción correcta es la B.

¹⁰⁴ PRUEBA SABER 7° . Cuadernillo Simulacro Prueba Saber 7° . N. 201500892, 2017. p. 7-8. Disponible en: www.instruimos.com

Con respecto al séptimo ítem 86% de los estudiantes respondió correctamente, lo cual indica que ellos comprendían la adición de enteros, la ley de signos y usaban adecuadamente los signos de agrupación. A continuación, se presenta el proceso de solución de los estudiantes E-02 y E-08.

Solución.

$$7. \{ [(-7) + (-13) - (-15)] + [23 - (18) - (6)] \}$$

$$\{ [-7 - 13 + 15] + [23 - 18 + 6] \}$$

$$\{ [-20 + 15] + [5 + 6] \}$$

$$-5 + 11$$

$$= 6.$$

Esta es la contraseña es 6.

Figura 55. Proceso de solución E-02, ítem 7

$$7. \{ [(-7) + (-13) - (-15)] + [23 - (18) - (6)] \}$$

$$\{ [-7 + 13 + 15] + [23 - 18 - 6] \}$$

$$\{ -6 + 15 - 5 - 6 \}$$

11 - 11

mal 11.

$$7. \{ [(-7) - (13) - (-15)] + [23 - (18) - (-6)] \}$$

$$\{ -7 - 13 + 15 - [23 + 18 + 6] \}$$

$$\{ -5 - 46 \}$$

$$-51$$

Figura 54. Proceso de solución E-08, ítem 7

En los procedimientos de los estudiantes E-02 y E-08 se observa que recurrieron a operaciones numéricas para encontrar la contraseña de Lucía. También, se ve que E-08 utiliza estrategias metacognitivas, ya que evalúa las operaciones planteadas y luego corrige, volviendo a desarrollar las operaciones de adición y sustracción. Por otro lado, los estudiantes que respondieron incorrectamente, 7% de los estudiantes escogieron la opción B y el otro 7% escogió la opción D, la dificultad en este ítem pudo estar relacionada a errores al efectuar las operaciones o a dificultades en la comprensión de la adición de números enteros, como se muestra en la siguiente imagen.

$$[(-7)+(-13)-(-15)]+[23-(-18)-(-6)]$$

$$[-7-13+15]+[23+18+6]$$

$$-7-13 = -20$$

$$-20+15 = -5$$

$$23+18 = 41$$

$$41+6 = 47$$

$$-5+47$$

Figura 56. Proceso de solución E-11, ítem 7

En la hoja de trabajo de E-11 se observa que no tiene suficiente claridad para hallar el inverso aditivo de los números enteros que están precedidos de signo menos, y que toma el número con mayor valor absoluto al sumar dos enteros. El estudiante E-11 venía presentando bajo desempeño en la implementación de la SD, se muestra cierto avance en algunos conceptos de los números enteros, sin embargo, no superó todas sus dificultades mediante el proceso de instrucción.

Ítem 8

Fredy un niño de 12 años está preocupado porque la semana pasada no supo manejar su dinero para la merienda y por eso quedó debiendo en la cafetería de la escuela \$ 2.500, al dueño de la fotocopidora \$1.000 y a Sebastián su amigo \$3.000. Para esta semana su papá le entregó lo de costumbre \$ 25.000 y se dispuso a controlarlos para que no le sucediera igual. Contando con lo que le dieron a Fredy para la semana, después de pagar sus deudas, ¿con cuánto cuenta realmente para sus gastos?

El octavo ítem, tomado de Colombiaaprende¹⁰⁵, tiene un formato abierto, sitúa al estudiante en un ambiente familiar como es su contexto escolar. Este ítem estuvo orientado a evaluar en los estudiantes el dominio de los recursos de adición en el conjunto de los enteros. Para resolverlo los estudiantes tenían que asociar expresiones como “deber”, “gastos” o “deudas” con enteros negativos y expresiones como “tener” con enteros positivos. Además, identificar los datos relevantes de la situación para plantear operaciones numéricas que los llevará a ayudar a Fredy a controlar sus gastos.

En el análisis de los procesos de solución de los estudiantes se observó que 67% de los estudiantes lograron resolver correctamente el problema usando estrategias de tipo numérico, sumaron los gastos, y luego restaron de la mesada de Fredy el total de los gastos, esto se puede evidenciar en las hojas de trabajo de E-02 y E-09.

• quedo debiendo en la cafetería = \$2.500
 • al dueño de la fotocopiadora = \$1.000
 • y a Sebastián su amigo = \$3.000
 • a su padre le regalo = \$25.000

$$\begin{array}{r}
 \$2500 \\
 + \$1.000 \\
 + \$3.000 \\
 \hline
 6.500
 \end{array}$$

que quedo debiendo en total \$6.500

$$\begin{array}{r}
 25.000 \\
 - 6.500 \\
 \hline
 18.500
 \end{array}$$

Respuesta: Fredy cuenta realmente para sus gastos \$18.500.

Figura 57. Proceso de solución E-09, ítem 8

$$\begin{array}{r}
 2500 \\
 1000 \\
 3000 \\
 \hline
 6500
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 25.000 \\
 - 6.500 \\
 \hline
 18.500
 \end{array}$$

Rta: Fredy para sus gastos tiene \$18.500

Figura 58. Proceso de solución E-02, ítem 8

Los estudiantes que lograron resolver completamente el problema, 26% mostraron una solución parcial y 7% no lograron resolverlo.

¹⁰⁵ COLOMBIAAPRENDE. Grado 7° Matemáticas, Números enteros y racionales, invenciones humanas para resolver problemas. p. 2. Disponible en: <http://aprendecolombiaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/ContenidosAprender/index.html>

Ítem 9

Un minero está a 12 metros bajo tierra. El minero desciende 15 metros más y luego debe subir 20 metros a dejar materiales a un depósito ubicado en esta posición. ¿A cuántos metros bajo tierra se encuentra el minero?

- Realiza un gráfico donde se pueda visualizar los desplazamientos del minero.
- ¿Cuál es el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos? ¿Por qué?
- ¿Qué desplazamientos debe hacer el minero desde su posición inicial, si el depósito está en la superficie de la tierra? ¿a 2 metros bajo tierra? ¿a 5 metros sobre la tierra?

El noveno ítem fue tomado de la Prueba Instruimos¹⁰⁶, es de formato abierto, sitúa al estudiante en un contexto poco familiar como es el sector minero. Este ítem está conformado por tres partes, la primera plantea una situación aditiva, donde se evalúa números signados, números relativos, uso adecuado de la recta numérica, adición y sustracción de números enteros; la segunda parte evalúa la comprensión del cero como punto de referencia; y la tercera evalúa sustracción de números enteros y valor absoluto. En este ítem se requiere que los estudiantes asocien expresiones como “bajo la superficie” con números negativos, “sobre la superficie” con números positivos, “descender” con la sustracción y “subir” con la adición de números enteros para plantear las operaciones numéricas adecuadas.

En el análisis de las respuestas a la primera parte del ítem se evidenció que la mayoría de estudiantes (93%) halló fácilmente la posición del minero mediante la representación gráfica del desplazamiento del minero sobre la recta numérica, también se encontró un estudiante sólo escribió su razonamiento en lenguaje natural. A continuación, se presentan las hojas de trabajo de los estudiantes E-10 y E-13.

¹⁰⁶ BAUTISTA BALLÉN, Mauricio, Hipertexto, Matemáticas 7. Bogotá D. C.: Editorial Santillana, 2007. ISBN 958-24-1059-0. p. 19.



Figura 60. Proceso de solución E-10, ítem 9.a



Figura 59. Proceso de solución E-13, ítem 9.a

En cuanto al 7% de los estudiantes restantes que no respondió correctamente a esta parte del ítem, se evidenció que hizo la representación gráfica que se solicitaba, sin embargo, no realizó correctamente los desplazamientos del minero. En la segunda parte del ítem los resultados muestran un bajo porcentaje (21%) de los estudiantes que tomaron la superficie de la tierra como punto de referencia, asignándole el cero como se muestra en las respuestas de E-08 y E-14.

b. El punto de referencia es 0 para salir para los números negativos y los números positivos

Figura 62. Proceso de solución E-08, ítem 9.b

b. El cero porque de ahí es donde se empieza.

Figura 61. Proceso de solución E-14, ítem 9.b

La mayor parte de los estudiantes, 79%, respondió de manera incorrecta. Esta parte del ítem generó confusión entre los estudiantes, quienes asignaron como punto de referencia la posición inicial del minero (-12). En la tercera parte del ítem, sólo 7% de los estudiantes lograron resolver completamente el problema, 26% lo resolvieron parcialmente, 34% presentó un plan claro, pero en sus procedimientos aparecen errores de cálculos o la respuesta es incorrecta, por último, el 33% no presentó procedimiento alguno. A continuación se presentan las soluciones de E-02 y E-13.

a 2 m bajo tierra: 10
a 5 m sobre tierra: 17

Figura 64. Proceso de solución E-02, ítem 9.c

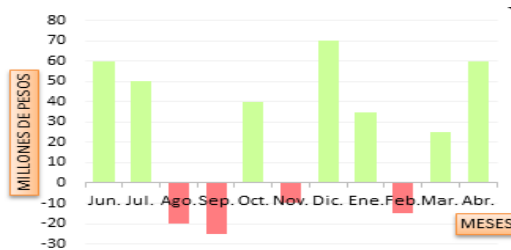
C: desde 12 a 0 hay 12 metros, de 12 hasta 2 hay 10 metros
y de 12 a 5 hay 7 metros bajo la tierra

Figura 63. Proceso de solución E-13, ítem 9.c

En general los errores presentados en este ítem probablemente están asociados a la falta de entendimiento de las condiciones iniciales y del lenguaje matemático y/o verbal de las situaciones problemáticas.

Ítem 10

Observa la siguiente gráfica que muestra las ganancias y las pérdidas de una fábrica de vestidos de baño entre junio de 2008 y abril de 2009.

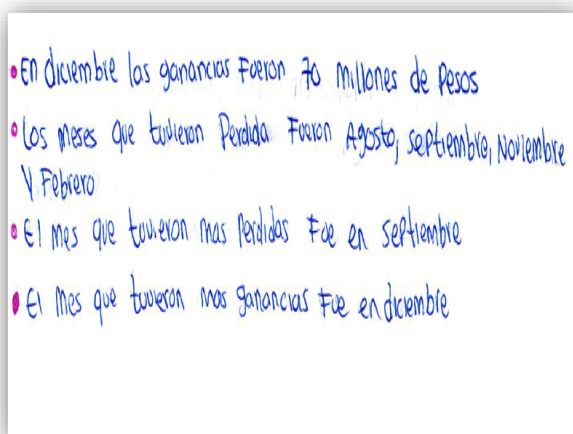


Responde:

- ¿De cuánto fueron las ganancias en diciembre?
- ¿En cuáles meses tuvieron pérdidas?
- ¿En cuál mes tuvieron más pérdidas?
- ¿En cuál mes tuvieron más ganancias?

El último ítem, tomado de un texto de Matemáticas de séptimo¹⁰⁷, tiene un formato abierto, sitúa al estudiante en un contexto empresarial. Este ítem evalúa los siguientes recursos: números signados, orden en los enteros, correspondencia de los enteros en la recta e interpretación de gráficas. Para resolver este ítem los estudiantes debían realizar una correspondencia de las barras que están representando los meses con los números de la recta numérica, barras de color verde con los números positivos y las barras de color rojo con los números negativos, así como asociar expresiones como “ganancias” con enteros positivos y expresiones como “pérdidas” con enteros negativos, luego para finalmente responder las preguntas.

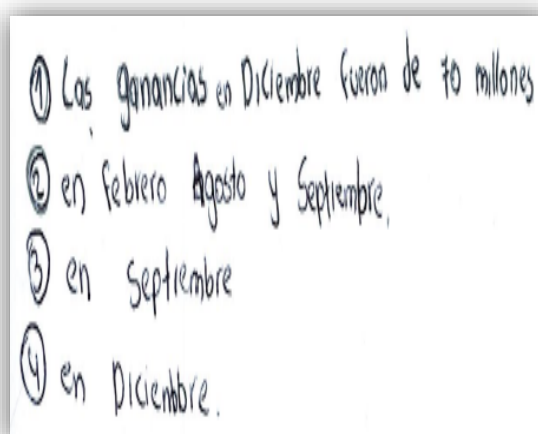
En el análisis de las producciones de los estudiantes se observó que todos realizaron el proceso de solución, un 54% lograron resolver correctamente el problema presentando una solución completa, y los demás estudiantes (46%) presentaron una solución parcial, por ejemplo: las producciones de E-13 y E-15.



Handwritten student solution for item E-13, showing a list of four bullet points in blue ink:

- En diciembre las ganancias fueron 70 millones de pesos
- Los meses que tuvieron pérdida fueron Agosto, septiembre, noviembre y febrero
- El mes que tuvieron más pérdidas fue en septiembre
- El mes que tuvieron más ganancias fue en diciembre

Figura 66. Proceso de solución E-13, ítem 10



Handwritten student solution for item E-15, showing a list of four numbered points in black ink:

- ① Las ganancias en diciembre fueron de 70 millones
- ② en febrero agosto y septiembre,
- ③ en septiembre
- ④ en diciembre.

Figura 65. Proceso de solución E-15, ítem 10

¹⁰⁷ CIFUENTES, J. y SALAZAR, F. Hipertexto, Matemáticas 7. Bogotá, Editorial Santillana, 2010. ISBN 978-958-24-1365-1. p. 19.

Como se puede observar en las hojas de trabajo, los estudiantes escribieron sus razonamientos en lenguaje natural apoyándose en las representaciones gráficas que proporcionaba el ítem.

A continuación, se presenta en una tabla la evaluación cuantitativa del trabajo mostrado por los estudiantes a cada ítem de la prueba final, para cada fase asociada al proceso de solución del problema se muestran ejemplos de algunas de las respuestas dadas por los estudiantes.

Para concluir el análisis de la prueba final, al igual que en la prueba diagnóstica se presentan dos tablas resumen que fueron descritas en ese apartado: una tabla corresponde a las dificultades que persisten en los estudiantes después del proceso de instrucción y la otra a una evaluación a nivel general del proceso de resolución de problemas mostrado por los estudiantes en la prueba final, no obstante en el anexo 16 se presenta una evaluación cuantitativa similar para cada uno de los estudiantes.

A continuación, se presenta la tabla resumen muestra las dificultades que aún persisten en los estudiantes después del proceso de instrucción respecto al objeto

Tabla 17. Evaluación cuantitativa de los estudiantes de acuerdo al trabajo mostrado en cada ítem de la prueba final

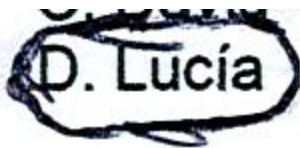
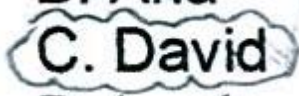
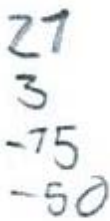

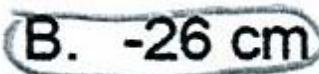
matemático de estudio.

RECURSOS	ÍTEMS	DIFICULTAD
Números Signados y/o relativos	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	Dificultad para realizar operaciones de adición y sustracción en números enteros.
Adición y Sustracción	3, 4, 5, 7, 8, 9	
Recta numérica	2, 9	Definir la escala de la recta numérica (unidades de medida).
Orden en los enteros	1, 3, 6, 10	Dificultad en la comprensión de textos y la transferencia entre la dimensión contextual y la abstracta.
Ley de signos	7, 3	
Valor absoluto	9	


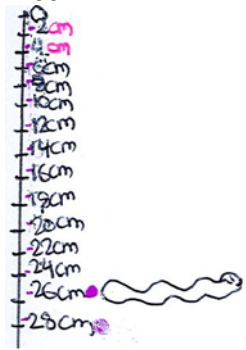
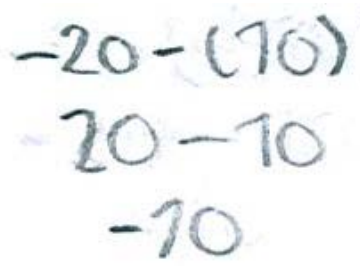
Tabla 18. Dificultades identificadas en la prueba final

Signos de agrupación	3, 7	
----------------------	------	--


Al contrastar la tabla 18 con la tabla 6 de la fase diagnóstica, se observa una notable disminución de las dificultades. Además, se evidencia en las hojas de respuesta de

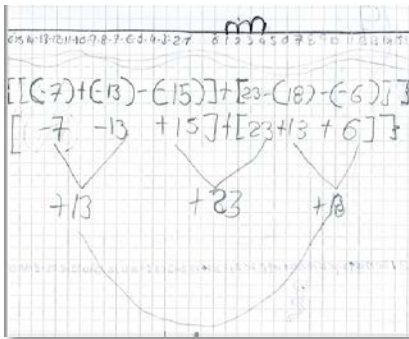
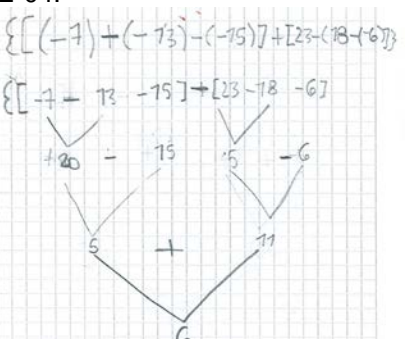
Prueba final				
Problema	Puntos	Trabajo mostrado por los estudiantes	Estudiantes	Ejemplos de algunas respuestas dadas por los estudiantes
1	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación		E-11	E-11: 
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.		E-02, E-03, E-06, E-08, E-09, E-12, E-13, E-15	E-03: 
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara			
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado			
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta			
	[10] Solución completa y clara		E-01, E-04, E-05, E-07, E-10, E-14	E-01: 
2	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación		E-02, E-14	E-14: 
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.		E-08, E-13	E-08: 


la prueba final que estas dificultades no están tan marcadas en los estudiantes, ya que al abordar una situación problémica identifican los datos y proponen un plan de solución. Sin embargo, la dificultad en la comprensión de textos no les permite tener

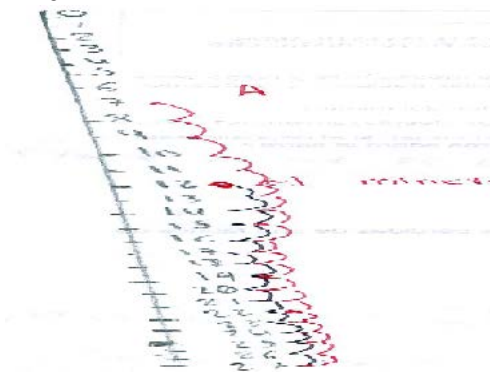
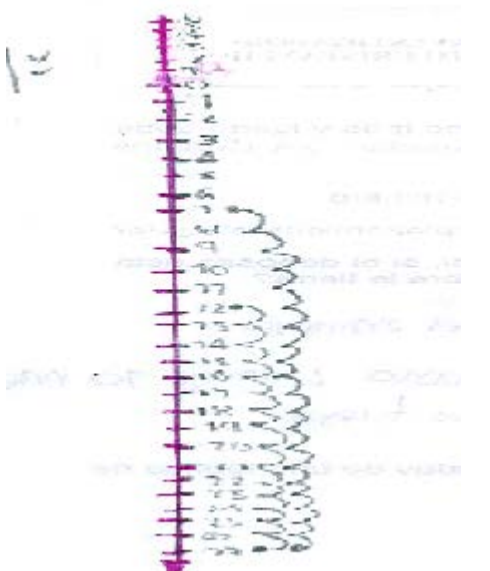

	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara		
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado	E-04, E-05, E-11	E-11: 
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-03, E-06, E-07, E-09, E-10, E-12, E-15	E-09: 
3	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación		
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.		
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-03, E-07, E-13	E-13: 
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en	E-04, E-05, E-06	E-06:

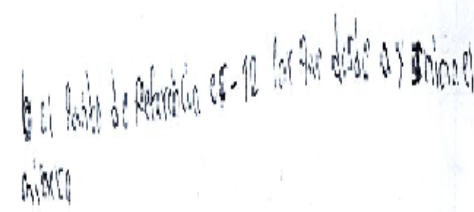


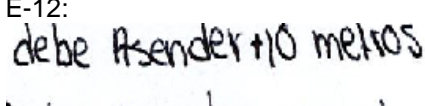
	los cálculos o la respuesta es incorrecta		$-10(-20) = 30$
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-02, E-08, E-09, E-10, E-11, E-12, E-14, E-15	E-01: $10 + (-20)$ $10 + 20$ 30
4	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación		
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.		
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-03, E-10	E-10: $\begin{array}{r} 8848 + \\ 4640 \\ \hline 13488 \end{array}$
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-02, E-04, E-05, E-06, E-07, E-08, E-09, E-11, E-12, E-13, E-14, E-15	E-02: $\begin{array}{r} 8848 \\ 4640 - \\ \hline 4208 \end{array}$
5	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-04, E-11	"Nada de trabajo"
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.		

	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-03	E-03: $\begin{array}{r} 3.000 - \\ 1.000 \\ \hline 2.000 \end{array}$
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta	E-15	E-15: $\begin{array}{r} 3.000 - \\ 1.000 \\ 1.000 \\ \hline 1.000 \end{array}$
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-02, E-05, E-06, E-07, E-08, E-09, E-10, E-12, E-13, E-14	E-08: $\begin{array}{r} 3.000 \text{ Gano} \\ 2.000 \text{ Perdio} \\ \hline 1.000 \end{array}$
6	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-07, E-10, E-11, E-14	"Nada de trabajo"
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.	E-02, E-08	E-02: 6:00 p.m., porque 1 es el mayor de los cuatro números
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-03, E-09	
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado	E-04	E-04: 
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		

	[10] Solución completa y clara	E-01, E-05, E-06, E-12, E-13, E-15	E-12: 0. 501 p.n., porque 1 es el mayor de los cuatro números D. i porque es el mayor número de los 4 porque cuando es positivo es mayor
7	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación		
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.		
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-11	E-11: 
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado	E-04	E-04: $\{ [(-7) + (-13) - (-15)] + [23 - (-8) - (-6)] \}$ $\{ [-7 - 13 - 15] + [23 - 18 - 6] \}$ 
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta	E-06, E-14	E-14: $\{ [(-7) + (-13) - (-15)] + [23 - (-8) - (-6)] \}$ $\{ [-7 - 13 + 15] + [-5 - 18 + 6] \}$ $-7 + 15 - 15 + 23 - 18 - 6$ $20 + 15 + 23 - 18 - 6$ $-5 + 23 - 18 + 6$ $0 + 6$ 6
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-02, E-03, E-05, E-07, E-08, E-09, E-10, E-12, E-13, E-15	E-03: $\{ [-7 - 13 + 15] + 5 + 6 \}$ $\{ -20 + 20 + 6 \}$ $06.$

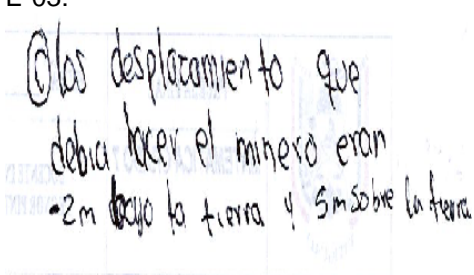
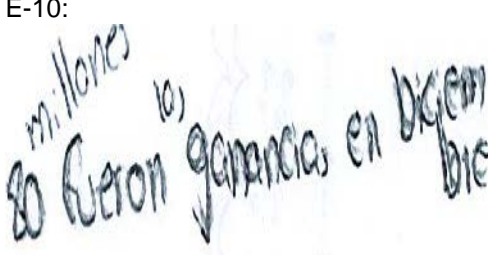
	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación		
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.		
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara		
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado	E-07, E-11	E-11: cafe tenia 2800 al dueño de la fotocopiadora 1.000 asociación 500 mi so 3.000 2500 + 1000 3.000 6.500
8	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta	E-04, E-07, E-08, E-10	E-10: 25.000 - 6500 <hr/> 19.500 RTA le sobio 19.000 a fiedy
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-02, E-03, E-05, E-06, E-09, E-12, E-13, E-14, E-15	E-15: ① Las ganancias en Diciembre fueron de 70 millones ② en febrero Agosto y Septiembre. ③ en Septiembre ④ en Diciembre.
	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-11	
9A	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno	E-04	E-04: 

	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara		
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado	E-10	E-10: 
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-02, E-03, E-05, E-06, E-07, E-08, E-09, E-12, E-13, E-14, E-15	E-13. 
9B	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-02	E-02: $b = a \text{ 2 m bajo tierra: } \rho$
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.	E-04, E-07, E-11	E-12: 

	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-01, E-05, E-09, E-10, E-12, E-15	E-12: 
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-03, E-06, E-08, E-13, E-14	E-08: 
C1	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-02, E-03, E-04, E-05, E-06, E-07, E-08, E-10, E-11, E-14	E-07: 
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno.		
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-09, E-12, E-13	E-12: 
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-15	E-15:

claridad suficiente para decidir el camino de solución adecuado, ni cuándo y cómo utilizar las diversas estrategias que conocen.

			debe subir 10 m. hacia la superficie, que es 0.
9C2	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-04, E-05, E-06, E-11	E-05: Si el minero bajaba 2 metros debería bajar con el Recorrido
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno	E-14	E-14: del dos negativo sube 5 y queda en 3 Positivos
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-01, E-03, E-07, E-08, E-10	E-08: a - 2 m bajo tierra son 12
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-02, E-09, E-12, E-13, E-15	E-15: hasta -2 debe subir 10
9C3	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-04, E-05, E-06, E-14	E-07:

		95 metros sobre la tierra
[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno		
[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-01, E-03, E-07, E-08, E-10, E-11, E-13	E-03: 
[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
[10] Solución completa y clara	E-02, E-09, E-12, E-15	E-15: hasta 5 m. sobre la tierra: sube 11
[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación		
[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno		
[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-10	E-10: 
[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en		

10ª

	los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-02, E-03, E-04, E-05, E-06, E-07, E-08, E-09, E-11, E-12, E-13, E-14, E-15	E-06: <p>en los meses de peste septiembre noviembre febrero</p>
10B	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación		
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno		
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara	E-04	E-04: <p>marzo enero octubre</p>
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado	E-03	E-03: <p>en marzo, enero y octubre, agosto, septiembre y febrero</p>
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-02, E-05, E-06, E-07, E-08, E-09, E-10, E-11, E-12, E-13, E-14, E-15	E-13: <p>Los meses que tuvieron peste fueron agosto, septiembre, noviembre y febrero</p>
10C	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación		
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno	E-01, E-03, E-04, E-05, E-07, E-09, E-10, E-11, E-14	E-01: <p>en noviembre</p>
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara		
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		

	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-02, E-06, E-08, E-12, E-13, E-15	E-12: fue el mes septiembre
10D	[0- 1] Nada de trabajo o ideas sin relación	E-04, E-14	E-14: fueron abril, Diciembre, Julio y Julio
	[2- 3] Identifica los datos, pero sin procedimiento alguno	E-10, E-11	E-11: Diciembre Abril Junio
	[4- 5] Usa datos, pero la estrategia no es clara		
	[6- 7] Introduce un plan apropiado, pero este es pobremente implantado		
	[8- 9] Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incorrecta		
	[10] Solución completa y clara	E-01, E-02, E-03, E-05, E-06, E-07, E-08, E-09, E-12, E-13, E-15	E-05: en Diciembre.

En la segunda tabla resumen, se presenta a nivel general el tipo de trabajo de los estudiantes y algunos indicadores asociados a sus procesos de resolución de problemas en la prueba final.

Ítem	Solución				Estrategias usadas
	Correcta	Trabajo mostrado	Incorrecto	Trabajo mostrado	
1	93%	Solución completa y clara.	7%	Nada de trabajo o ideas sin relación.	Lista sistemática
2	93%	Solución completa y clara.	7%	Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en reportar la respuesta correcta.	Uso de la recta numérica
3	60%	Solución completa y clara.	40%	Usa los datos, pero la estrategia no es clara.	Operaciones numéricas Uso de la recta numérica
4	80%	Solución completa y clara.	20%	Usa los datos, pero la estrategia no es la apropiada.	Operaciones numéricas
5	80%	Solución completa y clara.	20%	Usa no usan los datos apropiadamente.	Operaciones numéricas
6	93%	Solución completa y clara.	7%	Nada de trabajo o ideas sin relación.	Uso de la recta numérica
7	86%	Solución completa y clara.	14%	Introduce un plan apropiado, pero éste es incompleto o es pobremente implantado.	Operaciones numéricas
8	67%	Solución completa y clara.	33%	Introduce un plan apropiado, pero éste es incompleto o es pobremente implantado.	Operaciones numéricas
9	a. 93%	Solución completa y clara.	a. 7%	Identifica los datos, pero no introduce un plan apropiado.	Operaciones numéricas Uso de la recta numérica
	b. 21%		b. 79%		
	c. 7%		c. 93%		
10	54%	Solución completa y clara.	46%	Introduce un plan apropiado, pero éste es incompleto o es pobremente implantado.	Interpretación de gráficas, búsqueda de relaciones.

Tabla 19. Indicadores asociados al proceso de resolución de problemas en la prueba final

A nivel general, se observó en el análisis de la prueba final que la mayoría de los estudiantes respondió correctamente a todos los ítems, no obstante, en los ítems 9 y 10 de formato abierto el porcentaje de éxito fue menor. Al comparar esta tabla con la tabla 7 de la prueba diagnóstica el porcentaje de respuestas correctas aumentó considerablemente. Además, como se había dicho anteriormente en las hojas de trabajo de la prueba final de todos los estudiantes aparece un proceso de solución, donde usan diversas estrategias. En conclusión, la implementación de la SD contribuyó en la superación de algunas de las dificultades identificadas en los estudiantes en la fase diagnóstica, y a su vez, en el fortalecimiento de la competencia de comunicación y representación en la comprensión de números enteros en diversos contextos.

5 CONCLUSIONES

En este apartado se presentan las conclusiones del proceso investigativo, donde se da respuesta a la pregunta de investigación articulada a partir de los objetivos trazados. En este sentido, se mencionan algunas observaciones generales del desarrollo del trabajo teórico y metodológico, se reflexiona sobre la pertinencia de actividades concebidas desde el Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas, así como su incidencia en el desarrollo del pensamiento numérico. Por último, se plantean nuevas posibilidades para futuras investigaciones en esta misma línea de investigación.

Uno de los propósitos de esta investigación fue identificar las dificultades de los estudiantes de séptimo grado en la comprensión de números enteros. Por tanto, en la primera etapa de investigación se implementó una prueba diagnóstica, en la cual se logró identificar que los estudiantes presentaban:

1. Dificultad para dar sentido a un resultado negativo o prescindían del signo negativo.
2. Dificultad para realizar operaciones de adición y sustracción de números enteros.
3. Dificultad para plantear una expresión aritmética.
4. Dificultad en la utilización de la recta numérica.
5. Dificultad para establecer adecuadamente la correspondencia entre el conjunto de los números enteros y los puntos de la recta numérica.
6. Dificultad para definir la escala de la recta numérica (unidades de medida).
7. Extrapolar el orden de los naturales a los negativos.
8. Uso inapropiado de la ley de los signos.
9. Dificultad en la utilización de la recta numérica para la adición de números enteros o en procedimiento relacionados con el valor absoluto.
10. No usan los signos en los números enteros al realizar la operación.

11. Dificultad en la comprensión de textos y la transferencia entre la dimensión contextual y la abstracta.

Cabe señalar que después de la implementación de la SD se observó que en los estudiantes hubo un avance significativo en la superación de esas dificultades, sin embargo, aún persisten en algunos de ellos las dificultades 2, 6 y 11.

El diseño de la secuencia didáctica fue orientado desde el Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas a partir de las necesidades reales de aprendizaje de los estudiantes, que fueron identificadas en la fase diagnóstica. Además, se contempló un contexto diferente para cada actividad teniendo en cuenta los intereses de los estudiantes, en los que las cantidades y magnitudes tenían sentido en los números enteros, con el fin de crear un ambiente de clase propicio en el que los estudiantes tuvieran la posibilidad de construir su propio conocimiento. Así mismo, se pudo observar en el análisis que cada una de las actividades que conforman la SD fue pertinente para alcanzar los resultados de aprendizaje esperados en el diseño.

El proceso de implementación de la SD fue un reto grande, porque algunos estudiantes eran un poco tímidos o apáticos, pero durante el proceso de implementación de la SD todos los estudiantes tuvieron la oportunidad de expresar sus ideas, justificar y argumentar sus soluciones. Se observó que la SD permitió a la mayoría de los estudiantes apropiarse de los siguientes recursos relacionados a las operaciones de adición y sustracción de números enteros: números signados, números relativos, orden en los números enteros, ley de signos, uso de la recta numérica, adición y sustracción de números enteros, valor absoluto y uso de signos de agrupación. En cuanto a las estrategias o heurísticas que más usaron los estudiantes en sus procesos de solución de problemas fueron: operaciones numéricas, recta numérica, diagramas, dibujos, ensayo y error, visualización gráfica del comportamiento de los objetos matemáticos, tablas y listas sistemáticas. Por otro lado, con relación a las estrategias metacognitivas, los estudiantes tomaron

conciencia de la importancia del constante monitoreo y evaluación de su proceso de resolución de problemas para tener mejores criterios para discutir sobre las alternativas de solución. En la última categoría de análisis, se observó que los estudiantes cambiaron ciertas creencias como: a) los problemas solo tienen una única solución, b) deben tener una estrategia lista antes de iniciar a resolver el problema, o c) esperar que el profesor les diga la solución. No obstante, otras creencias se mantuvieron fijas fueron: a) la asociación de las matemáticas con certeza, con la idea que hay que saberlo todo y que el objetivo central es obtener la respuesta correcta y que b) las representaciones gráficas son soluciones débiles, como se había mencionado en el análisis de la actividad F los estudiantes prefieren recurrir a las representaciones simbólicas para tener mayor seguridad en sus soluciones.

Unos de los aspectos de vital importancia para alcanzar estos logros fueron: el compromiso de los estudiantes con sus estudios y la destreza de la profesora para problematizar las situaciones. Por otro lado, una limitante en el desarrollo de la SD fue que la institución objeto de estudio solo cuenta con cinco computadores y estos son utilizados en el área de informática en todos los grados, por lo que su uso estuvo limitado a la disponibilidad.

Respecto a los elementos teóricos y metodológico se observó que contribuyeron notablemente a generar una dinámica de discusión en la que todos los estudiantes tuvieron la oportunidad de interpretar, explicar sus ideas matemáticas, justificar y argumentar sus soluciones, así como de reconocer sus propias capacidades y las de sus compañeros al abordar una situación problémica. El trabajo en pequeños grupos mejoró la comunicación y la interacción social y contribuyó a fortalecer las competencias matemáticas en los estudiantes, ya que las ideas matemáticas se aprenden por medio de un proceso de comunicación. En este sentido, el análisis de la SD y de las pruebas aplicadas permitió evidenciar que la mayoría de los estudiantes logró fortalecer la competencia de comunicación y representación en la comprensión del objeto matemático de investigación. Por otro lado, estos elementos

teóricos y metodológicos también contribuyeron a la transformación del rol de la profesora y de los estudiantes al generar dinámicas de discusión en el aula de clase. El rol de la profesora cambió a nivel profesional y personal, antes de la intervención didáctica la profesora sólo se limitaba a decirles a los estudiantes si sus procedimientos estaban bien o mal, era costumbre decirles que operación debían hacer o qué camino tomar. Durante el proceso de intervención, la reflexión constante de la profesora la llevó a reconocer la importancia de: a) cambiar el modelo tradicional enseñanza para implementar estrategias didácticas, b) crear espacios de participación para los estudiantes, y c) motivar a los estudiantes a meditar sobre las ideas que ellos mismos proponen durante la actividad para que las puedan aprovecharlas al máximo y llegar a concretarlas en un plan de acción. La constante discusión grupal también logró incidir positivamente en los estudiantes, ellos asumieron un rol más activo en la construcción de las ideas matemáticas, se cuestionaban, exploraban diferentes caminos de solución y defendían con argumentos sus ideas.

Para finalizar, se considera que el tipo de trabajo concebido desde *el Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas* en la clase de matemáticas llevó a los estudiantes a replantear la idea de que esta disciplina sólo se puede desarrollar en forma individual, para entenderla como una práctica dentro de una comunidad que depende de la comunicación y la colaboración entre sus miembros para crear un ambiente propicio que les permita pensar y razonar acerca de las matemáticas. Por tanto, se considera esencial que los estudiantes continúen participando en actividades escolares similares a las desarrolladas en esta investigación, que les posibilite seguir avanzando en el desarrollo de su pensamiento numérico. También, sería interesante explorar en futuras investigaciones a profundidad el papel que desempeña el uso de herramientas computacionales en el desarrollo del pensamiento numérico. De igual manera, continuar con estudios longitudinales que incorporen aspectos teóricos y metodológicos del Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas en otros tipos de pensamiento matemático.

REFERENCIAS

AGUDELO, Gloria; BEDOYA, Vanesa, y RESTREPO, Alejandra. Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos. Trabajo de grado en licenciatura. Pereira Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira, 2008.

BAHAMONTE, Sebastián, y VICUÑA, Judith. Resolución de problemas matemáticos. Tesis de Maestría. Chile: Universidad de Magallanes. 2011.

BAUTISTA BALLÉN, Mauricio, Hipertexto, Matemáticas 7. Bogotá D. C.: Editorial Santillana, 2007. ISBN 958-24-1059-0. p. 19.

BEGLE, E. Critical variables in mathematics education. Washington DC: Mathematical Association of America, 1979.

BERNAL BUITRAGO, Himelda. Aventura, Cuaderno de actividades, Matemáticas 7. Bogotá D. C.: Editorial Norma S. A., 1998. p. 34. Serie 958-04-4734-9. ISBN 958-04-4741-1.

BORJAS, Dania Yulisa. Aprendizaje de los números enteros una experiencia significativa en estudiantes de séptimo grado de la escuela nacional de música. Trabajo de Maestría. Tegucigalpa: Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, 2009.

BRUNO, A. Los alumnos redactan problemas aditivos de números negativos. *Revista EMA*, 5(3), 2000, p. 236-251.

CAMARGO URIBE, Leonor. Pruebas Saber de Matemáticas, grado séptimo. Colombia: Editorial Norma, S. A, 2002.

CÁRDENAS, Elio y BARRIENTOS, Orlando. La comprensión e interpretación de problemas matemáticos: el caso de las ecuaciones de primer grado. Trabajo de especialización en Educación Matemática. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2010.

CASTILLO ANGULO, Cesar. Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos. Trabajo de Maestría. Palmira Colombia: Universidad Nacional de Colombia, 2014.

CHAPARRO, O., POVEDA, D., y FERNÁNDEZ, R. Jugando con los números enteros. pág. 25-29. Disponible en: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-110453_archivo.pdf.

CID, E. Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza. Disponible en: <http://www.urg.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf>

CIFUENTES, J. y SALAZAR, F. Hipertexto, Matemáticas 7. Bogotá, Editorial Santillana, 2010. ISBN 978-958-24-1365-1

COLOMBIAAPRENDE. Grado 7° Matemáticas, Números enteros y racionales, invenciones humanas para resolver problemas. p. 2. Disponible en: <http://aprendecolombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/ContenidosAprender/index.html>

COLOMBIAAPRENDE. Pensamiento numérico. Documento en línea. : <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/w3-propertyvalue-48255.html>

CONSTITUCIÓN POLÍTICA DE COLOMBIA. Artículo 67, 1991. Disponible en: <http://www.constitucioncolombia.com/titulo-2/capitulo-2/articulo-67>

DOMÍNGUEZ G., I. *Comunicación y discurso*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 2003.

ELLIOT, J. *El cambio educativo desde la investigación – acción*. Madrid: Morata, 1991.

GALLARDO, A. y HERNÁNDEZ, A. *Emergencia de los números enteros*. 2007. Recuperado el 20 de mayo del 2013. Documento en línea: <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf> [citado 08/09/2016]

HEYWORTH, R. Procedural and conceptual knowledge of expert and novice students for the solving of a basic problem in chemistry. En: *International Journal Science Education*, 1999. vol. 21, no. 2.

ICFES. Informe PISA. Documento en línea: <http://www.icfes.gov.co/investigadores-posgrado-2/evaluaciones-internacionales-inves/programa-para-la-evaluacion-internacional-de-estudiantes-pisa> [Citado 06/06/2016]

ICFES. Resumen ejecutivo de los resultados de Colombia en PISA 2012. Disponible en: <http://www.icfes.gov.co/investigacion/evaluaciones-internacionales/pisa>

ICFES. Saber 3°, 5° y 9° 2013. Resultados Censales. Documento en línea: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jsp>

ICFES. Saber 3°, 5° y 9° 2014. Resultados Censales.

Documento en línea
<http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jsp>

INSTITUCIÓN EDUCATIVA PITIGUAO. Plan de Mejoramiento Institucional 2015 – 2017. Mogotes, Santander.

ISCE. Índice Sintético de la Calidad Educativa 2015. Ministerio De Educación Nacional. Colombia aprende, 2015.

LESTER, F. y KEHLE, P. From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In: R. A. Lesh & H. M. Doerr (Eds.). Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 2013. p. 501-518.

LEY 1341, 2009. Disponible en: www.mintic.gov.co/portal/604/w3-article-3707.html.

LEY GENERAL DE EDUCACIÓN. Artículo 5, 20,1994. Disponible en: <https://rectoriaiejoseacevedoygomez.pbworks.com/.../FINES+DE+LA+EDUCACION>

MACKERNAN, J. Investigación – acción y curriculum. Madrid: Morata, 1996.

MEJIA VIAFARA, Aida y LOANGO NÚÑEZ, Miriam. Resolución de problemas matemáticos para fortalecer el pensamiento numérico en estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Adventista del Municipio de Puerto Tejada Cauca. Trabajo de licenciatura en Matemáticas. Cali, Colombia: Universidad Católica de Colombia, 2014.

MÉNDEZ GONZÁLEZ, Jazmín. Diseño y validación de la estrategia didáctica math match para mejorar la enseñanza en el área de matemáticas. Trabajo de maestría. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2013.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Primera edición. Ed. Ministerio de Educación Nacional, 2006.

NCTM. Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2000. ISBN 0-87353-480-8.

PÉREZ PORTO, Julián y GARDEY Ana. Definición de secuencia didáctica. 2014. Disponible en: (<http://definicion.de/secuencia-didactica/>)

PÉREZ, A. Mini Curso- Taller: Fundamentación, Diseño y Análisis de Situaciones Didácticas para el Trabajo en Aula en el Campo del Lenguaje. Bucaramanga, primer semestre académico. 2012, p.12.

PÉREZ, Yenny y RAMÍREZ, Raquel. Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. Caracas, Venezuela. En: Revista de Investigación, 2011. vol. 35, no. 73, ISSN 0798-0329.

POLYA, G. How to Solve It. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

PRUEBA DISCOVERY. Cuadernillo Saber 7. N. 201500837, 2017. Disponible en: www.instruimos.com

PRUEBA DISCOVERY. Cuadernillo Saber 7. N. 201500888, 2017. Disponible en: www.instruimos.com

PRUEBA SABER 7°. Cuadernillo Simulacro Prueba Saber 7°, N. 201500892, 2017.
Disponible en: www.instruimos.com

PRUEBA SABER 7°. Cuadernillo Simulacro Prueba Saber 7°. N. 201500824, 2017.
Disponible en: www.instruimos.com

PRUEBA SABER 7°. Cuadernillo Simulacro Prueba Saber 7°. N. 201500531, 2017.
Disponible en: www.instruimos.com

PRUEBA SABER 7°. Cuadernillo Simulacro Prueba Saber 7°. N. 201500892, 2017.
Disponible en: www.instruimos.com

SABER 3°, 5° y 9° 2012. Cuadernillo de Prueba Matemáticas 5° grado. Segunda Edición, MEN, 2012. p. 13. Disponible en: [file:///C:/Users/a/Downloads/Ejemplos%20de%20preguntas%20saber%209%20matematicas%202013%20v3%20\(5\).pdf](file:///C:/Users/a/Downloads/Ejemplos%20de%20preguntas%20saber%209%20matematicas%202013%20v3%20(5).pdf)

SABER 3°, 5° y 9° 2013. Cuadernillo de Prueba Matemáticas 9° grado. Segunda Edición, MEN, 2013. p. 7. Disponible en: [file:///C:/Users/a/Downloads/Ejemplos%20de%20preguntas%20saber%209%20matematicas%202013%20v3%20\(4\).pdf](file:///C:/Users/a/Downloads/Ejemplos%20de%20preguntas%20saber%209%20matematicas%202013%20v3%20(4).pdf)

SANTOS TRIGO, L. y MORENO L. Sobre la construcción de un marco conceptual en la resolución de problemas que incorpore el uso de herramientas computacionales. En: ROJANO, M. (Ed.). Las Tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas. México D. F.: Editorial Trillas, 2013. p. 69-81.

SANTOS TRIGO, Luis. La Resolución de problemas matemáticos: Fundamentos Cognitivos. México D. F.: Editorial Trillas, 2007. ISBN 978-968-24-7929-8.

SCHOENFELD, A. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Reston, VA: NCTM. 1992.

SCHOENFELD, A. Mathematical problem solving. New York: Academic Press, 1985.

SRIRAMAN, B. y ENGLISH, L. (2010). Problem Solving for the 21st Century. En: Theories of Mathematics Education, *Advances in Mathematics Education: Seeking New Frontiers*. Berlin: Springer-Verlag, 2010.

ANEXOS

Anexo 1. Solicitud de Intervención de Aula a la Institución Educativa

Mogotes, 20 de febrero de 2017

Rectora

LAURA HERMINIA ACEROS OROZCO

Institución Educativa Pitiguao

Mogotes

Respetada rectora:

Me permito solicitar a usted autorizar a la profesora **LEONOR PINTO CRISTANCHO**, Licenciada en Matemáticas, estudiante de la Maestría en Pedagogía de la Universidad Industrial de Santander, realizar la intervención de aula en el grupo de séptimo grado de la sede A de su Institución, para continuar el desarrollo de la propuesta de investigación, titulada, “**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO: UNA MIRADA DESDE EL ENFOQUE DE PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**”.

La realización de este trabajo de investigación busca caracterizar las potencialidades de una secuencia didáctica sobre números enteros desde el *Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas* para el desarrollo del pensamiento numérico en estudiantes de séptimo grado. Los resultados de esta investigación se darán a conocer a directivos de la institución Educativa y docentes del área de matemáticas.

Agradezco su atención.

BELKI YOLIMA TORRES RUEDA

Magíster en Pedagogía

Directora del trabajo de investigación

Universidad Industrial de Santander

Anexo 2. Consentimiento informado para los padres de familia de los estudiantes participantes de la investigación



INSTITUCIÓN EDUCATIVA “PITIGÜAO” Resolución Aprobación Estudios No. 017812 de octubre 2 de 2014

Mogotes, Febrero 20 de 2017

PROYECTO: “DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO: UNA MIRADA DESDE EL ENFOQUE DE PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS”

La profesora investigadora **LEONOR PINTO CRISTANCHO**, Licenciada en Matemáticas, estudiante de la Maestría en Pedagogía de la Universidad Industrial de Santander, realizará una intervención de aula en el grupo de séptimo grado de la sede A de la Institución Educativa Pitigüao para continuar el desarrollo de la propuesta de investigación, titulada, “**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO: UNA MIRADA DESDE EL ENFOQUE DE PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**”, en la cual se ha invitado a su hijo(a) a participar. Por tanto, su decisión de aprobar la participación de su hijo(a) en el presente estudio es voluntaria. Si usted decide dar su consentimiento, es importante que lea cuidadosamente este documento y lo firme.

Las actividades se desarrollarán en el mismo horario de clases de matemáticas, en las instalaciones de la institución educativa Pitigüao. Se estima que el trabajo de intervención de aula se realizará durante 8 sesiones de 3 horas cada una, dirigidas por la profesora investigadora, durante los meses de marzo y abril del año lectivo.

Objetivo del Estudio

Caracterizar las potencialidades de una secuencia didáctica sobre números enteros desde el *Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas* para el desarrollo del pensamiento numérico en estudiantes de séptimo grado.

Confidencialidad

Toda la información obtenida en esta investigación se mantendrá bajo estricta confidencialidad. Los nombres y datos de los participantes serán identificados mediante códigos. Los resultados de esta investigación se darán a conocer a directivos de la institución Educativa y docentes del área de matemáticas. Si el representante legal desea conocer los informes, serán suministrados únicamente cuando los solicite personalmente.

Mayor información:

LEONOR PINTO CRISTANHO

Licenciada en Matemáticas

Estudiante de Maestría en Pedagogía, Universidad Industrial de Santander

Profesora Institución Educativa Pitigüao

leopincris@hotmail.com, Teléfono: 3167606297



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "PITIGUAO"

Resolución Aprobación Estudios No. 017812 de octubre 2 de 2014

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Motivo: Consentimiento informado para la intervención de aula del proyecto "**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO: UNA MIRADA DESDE EL ENFOQUE DE PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**" dirigido por la profesora **LEONOR PINTO CRISTANCHO**.

He leído toda la información al respecto del proyecto, además la investigadora ha explicado el proceso de intervención de aula y contestado mis inquietudes. Voluntariamente Yo:

_____ , identificado(a) con C.C. _____ de _____ manifiesto que he decidido autorizar a mi hijo(a) _____ o _____ acudido:

_____ de la Institución Educativa: _____, del grado séptimo de quien soy el representante legal o tutor, dada su imposibilidad de firmar este documento con plena autonomía por tratarse de un menor de edad. Además, expresamente autorizo al equipo de investigación para utilizar la información codificada en futuras investigaciones. En constancia, firmo este documento de consentimiento informado, en la ciudad de _____ el día ___ del mes de _____ del año 2017.

Firma,

Representante Legal: _____ Teléfono: _____

Anexo 3. Autorización de la institución educativa para los estudiantes participantes en la investigación



INSTITUCIÓN EDUCATIVA “PITIGUAO”

Resolución Aprobación Estudios No. 017812 de octubre 2 de 2014

Mogotes, _____ de 2017

Profesora:
Leonor Pinto Cristancho

REFERENCIA: INVESTIGACIÓN SOBRE EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO.

A continuación, relaciono los estudiantes de grado séptimo inscritos para participar en las actividades organizadas por la docente investigadora para el desarrollo de su proyecto de investigación en las instalaciones de la Institución Educativa Pitigüao en los meses de marzo y abril del presente año.

Nombre	Edad	Número Telefónico

Firma,

LAURA HERMINIA ACEROS OROZCO
Rectora Institución Educativa Pitigüao

Anexo 4. Diario de campo

MAESTRIA EN PEDAGOGÍA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DOCENTE: LEONOR PINTO CRISTANCHO

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO:
UNA MIRADA DESDE EL ENFOQUE DE PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

DIARIO DE CAMPO

Este instrumento se diligencia para el grado 7° de la Institución Educativa Pitiguao de Mogotes compuesto por 15estudiantes de los cuales 8 son mujeres y 7 hombres, con edades entre 11 y 14 años, para el área de matemáticas.	
Sesión N°:	Lugar:
Nombre de la actividad:	Objetivo:
Fecha:	
Hora de inicio.	Hora de finalización:
Participantes: _____ _____ _____	
Registro: _____ _____ _____	
Hallazgos: _____ _____ _____	
Apreciaciones personales: _____ _____ _____	

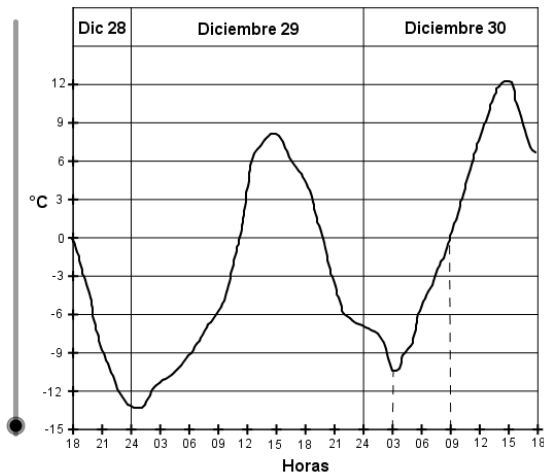
Anexo 5. Prueba diagnóstica

Nombre: _____ Grado: _____

Instrucciones: A continuación se presentan una serie de problemas, resuélvelos en forma clara y ordenada dejando todos los procedimientos por escrito, respuestas sin justificación no tienen validez.

RESPONDA LAS PREGUNTAS 1 Y 2 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACION

La siguiente gráfica muestra la variación de la temperatura en la ciudad de Nueva York desde las 18 horas del 28 de diciembre hasta las 18 horas del 30 de diciembre.



- De acuerdo con la gráfica, la menor temperatura que se presentó en estos días fue:
A. -15°
B. -13°
C. 0°
D. 12°
- El 30 de diciembre a las 03 horas el termómetro marcó -10° y a las 09 horas del mismo día marcó -1° , esto significa que la temperatura en este lapso de tiempo:
A. aumentó 9°
B. disminuyó 9°
C. aumentó 11°
D. disminuyó 11°
- Si un automóvil avanzó 150 km y luego retrocedió 100 km. ¿Qué distancia recorrió?
A. 100 km
B. - 250 km
C. 250 km
D. 50 km

LA SIGUIENTE TABLA REGISTRA LA TEMPERATURA MEDIA APROXIMADA EN LA SUPERFICIE DE LOS PLANETAS:

Mercurio	464 °C
Venus	400 °C
Tierra	20 °C
Marte	- 22 °C
Júpiter	- 130 °C
Saturno	- 180 °C
Urano	- 190 °C
Neptuno	- 220 °C
Plutón	- 250 °C

4. Si un astronauta sale de Neptuno, llega a otro planeta y al llegar lee en sus instrumentos que la temperatura ha variado 30 grados, ¿A qué planeta llegó? De las siguientes proposiciones verdaderas elige la más adecuada.

- A. A Plutón, porque la diferencia entre - 220 y - 250 es 30°.
- B. A Urano, porque al viajar de Neptuno a Urano la temperatura aumenta en 30°.
- C. A Plutón, porque al viajar de Neptuno a Plutón la temperatura disminuye en 30°.
- D. Puede haber llegado a Urano o a Plutón, porque en ambos casos la diferencia es 30°.

5. Si al resultado de dos veces - 3, restado con - 5 y sumado con 6, se le resta -7 y se vuelve a restar 12, ¿qué número se obtiene?

- A. -24
- B. 0
- C. 12
- D. 24

6. En un juego, Pamela tiene 120 puntos a favor (+120) y 150 puntos en contra (-150). ¿Qué puntaje tiene Pamela en el juego?

- A. 270 puntos
- B. 30 puntos
- C. (-30) puntos
- D. (-270) puntos

7. Con la intención de restringir el uso de su computador por otras personas. Lucia lo configura de modo que la contraseña para iniciar sesión sea la respuesta correcta a la pregunta que se muestra en la pantalla.

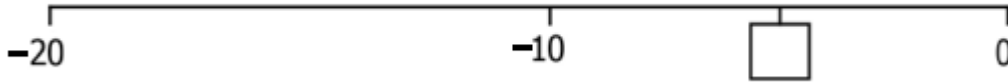
Ingrese un término cuyo resultado sea igual a -3

De las siguientes expresiones, la que le permite iniciar sesión es

- A. $\{- [+ (- 3)]\}$

- B. $\{-[-(+3)]\}$
- C. $\{-[+(+3)]\}$
- D. $\{+[-(-3)]\}$

8. Observa la recta numérica.



¿Qué número se debe escribir en ?

- A. 15
- B. -15
- C. -5
- D. 30

RESPONDE LAS PREGUNTAS 9 Y 10 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACION

En la siguiente tabla se muestran los puntos a favor y en contra de los equipos participantes en un torneo interno de fútbol para los diferentes cursos de grado séptimo.

Equipos	Primera ronda		Segunda ronda		Puntajes		Resultado final
	Puntos a favor	Puntos en contra	Puntos a favor	Puntos en contra	Primera ronda	Segunda ronda	
A	1	0	5	0			+6
B	0	4	0	3			-7
C	5	0	2	0			+7
D	0	2	0	4			-6
E	3	0	0	5	+3	-5	-2
F	1	2	2	4	-1	-2	-3
G	4	0	6	1		+5	+9

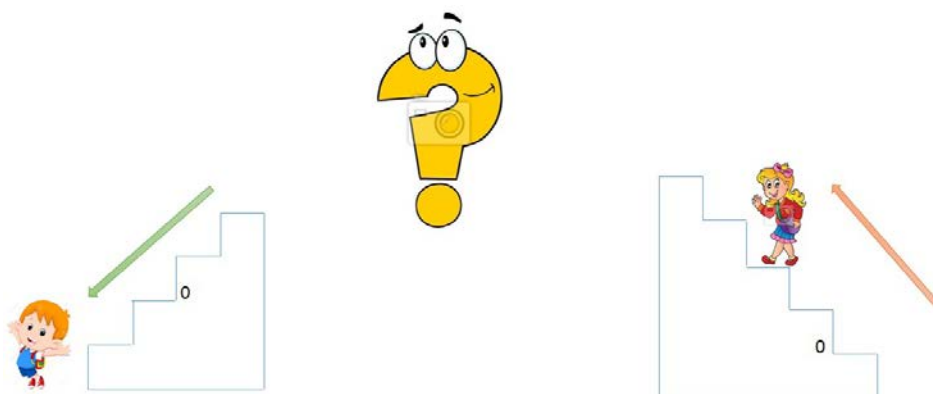
9. Para la primera ronda, entre los equipos A y C ¿quién obtuvo mayor puntaje?; entre B y D ¿quién obtuvo mayor puntaje en la segunda ronda?;

10. De acuerdo con la tabla, ¿cuál es el orden de la premiación?

11. Con el número + 20 indicamos la posición de un globo con respecto al mar. ¿Qué números asignarías al avión, al barco y al submarino?

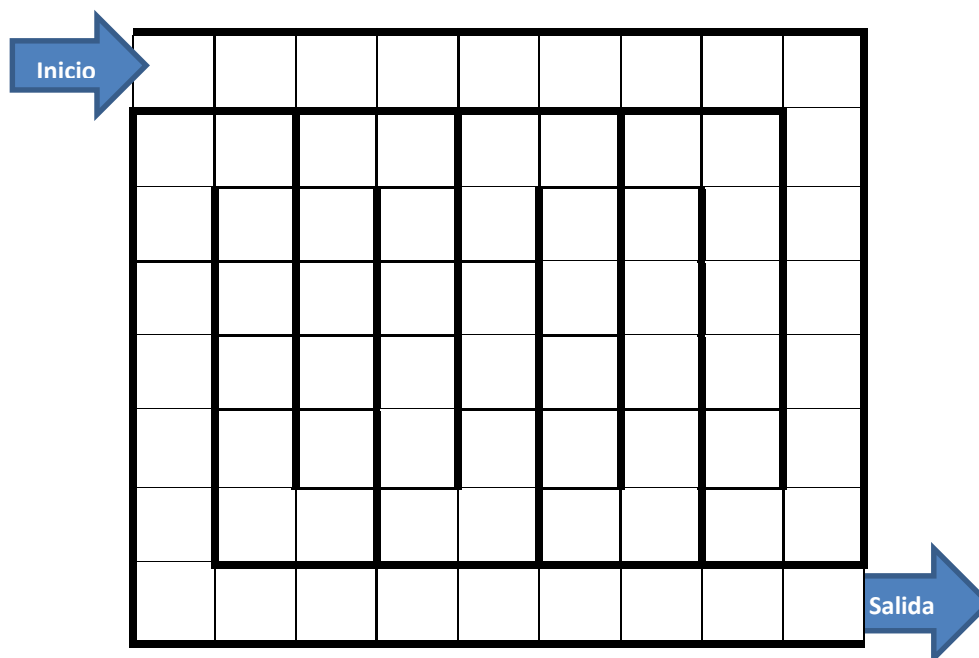


12. Expresa con un número los desplazamientos que realizan Martha y Pablo en cada escalera.



Anexo 6. Actividad A “El Laberinto”

Nombre: _____ Edad: _____



Jugador 1 

Jugador 2 

Jugador 3 



INSTRUCCIONES:

1. Cada jugador lanza un dado numérico, el que obtenga el número mayor inicia el juego.
2. Para jugar, el jugador lanza inicialmente el dado de signos para determinar el sentido del movimiento, signo positivo (+) indica que el jugador puede avanzar hacia adelante, y el signo negativo (-) indica que el jugador debe retroceder. Luego, el jugador lanza los dados numéricos y suma los resultados obtenidos, el total de la suma indica el número de casillas que debe avanzar o retroceder.

3. En este juego a los participantes se les asigna tres puntos por cada desplazamiento hacia adelante y se les disminuyen dos puntos por cada desplazamiento hacia atrás. Por ejemplo, si un participante tiene cuatro desplazamientos hacia adelante, obtendría **12** puntos azules, y si tiene siete desplazamientos hacia atrás, obtendría **14** puntos rojos, cada punto azul es eliminado con un punto rojo, por tanto el puntaje total sería de **2** puntos rojos.
4. El ganador será el jugador que tenga el mayor número de puntos azules.




Registra los puntos obtenidos en la siguiente tabla, desplazamientos hacia adelante con color azul en la primera columna y los desplazamientos hacia atrás con color rojo en la segunda columna.





Jugadores	Jugador 1		Jugador 2		Jugador 3	
Resultado	+	-	+	-	+	-
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
TOTAL						

Anexo 7. Actividad B “Las 7 Maravillas Del Mundo”

Nombre: _____ **Edad:** _____

1. Observa con mucha atención el video “Las siete maravillas del mundo moderno”
2. Registra el nombre y la fecha en que fue construida cada una de las maravillas del mundo mencionadas en el video.

Las Maravillas del Mundo Moderno	Nombre	Fecha de Construcción
		
		
		

3. Responde y analiza:

- a. ¿Qué significa antes de Cristo y después de Cristo?
- b. Especifica el lugar dónde ubica el cero en la recta numérica para determinar la posición respecto a él de otras cantidades. Concluye al respecto.

- c. Reflexiona sobre el hecho que a las fechas antes de Cristo se les asigna el signo menos y las fechas después de Cristo el signo más. Escribe tus apreciaciones al respecto.
4. Construye con ayuda de tus compañeros una línea de tiempo en la historia para ubicar cada una de las maravillas del mundo moderno. Para ello, utiliza los siguientes materiales e instrumentos:
- Papel bond o cartulina.
 - Lápices, colores y grafos.
 - Regla o escuadra.
 - Palillos negros y rojos.
 - Imágenes de las maravillas del mundo moderno.
5. Describe 3 situaciones reales en las que se requiera el uso de números enteros.

Anexo 8. Actividad c “Representando situaciones aditivas en la recta numérica”

Nombre: _____ **Edad:** _____

Para desarrollar esta actividad abre el archivo **Actividad 1.ggb** y sigue las instrucciones que se indican en cada tarea.

Primera tarea: presiona el botón **Tarea 1**. Los puntos ***a*** y ***b*** representan dos números enteros en la recta numérica, arrástralos con el ratón para ponerlos en distintas posiciones y observa la figura para responder a las siguientes preguntas.

1) ¿Es $a + b$ un número entero?

2) ¿Dónde estaría ubicado $a + b$ si a se ubicara en -5 y b en 7?

3) ¿Dónde estaría ubicado $a + b$ si a se ubicara en -13 y b en -9?

- 4) ¿Explica cómo ubicar $a + b$ en la recta conociendo las posiciones de los números a y b ? Haz un dibujo si es necesario.



- 5) ¿Se procede igual cuando b está a la derecha de cero que cuando está a la izquierda?



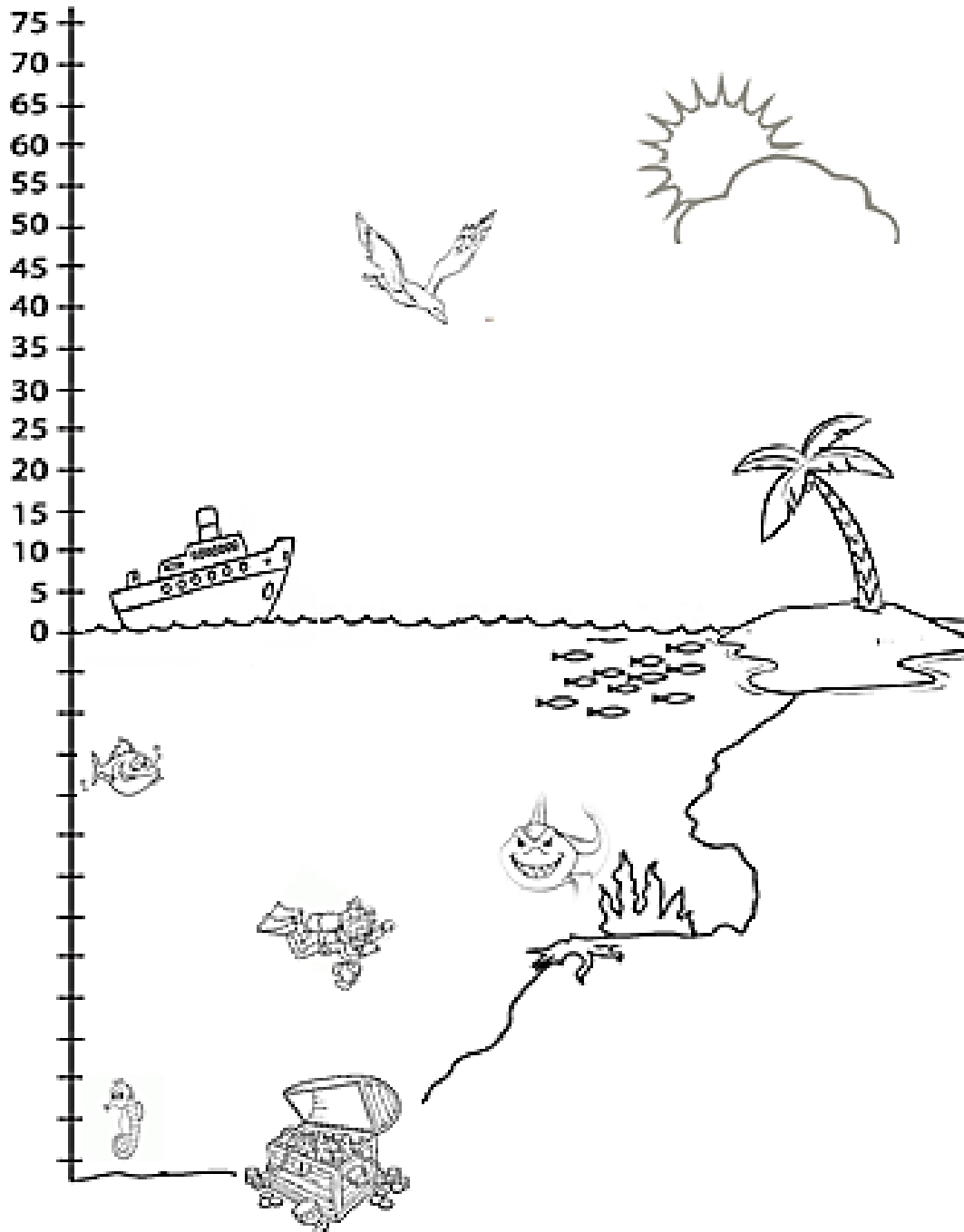
Segunda tarea: presiona el botón **Tarea 2**. Escribe el resultado de la suma de los enteros a y b , luego **presiona el botón continuar**, acierta 5 veces.



Anexo 9. Actividad D “En Busca del Tesoro”

Nombre: _____ Edad: _____

Observa y colorea la imagen. Luego, analiza la situación y escribe todas las ideas que surjan en el proceso de resolución del problema.



1. ¿A cuántos metros está el nivel del mar?

2. ¿A qué altura sobre el nivel del mar se encuentra la gaviota?

3. ¿Cómo representarías las alturas dentro del agua?

4. Ordena cada uno de los elementos de la imagen según la altura en que se encuentran respecto al nivel del mar.

5. ¿A qué profundidad respecto al nivel del mar se encuentra el tesoro?

6. Si el buceador quiere encontrar el tesoro, ¿cuántos metros debe recorrer?

7. Si el buceador quiere escapar del tiburón ¿Qué distancia debe recorrer para llegar al barco?

8. Si un pez está a 16 metros bajo el nivel del mar. Luego, baja 8 metros y unos minutos después, sube 11 metros, ¿a cuántos metros bajo el nivel del mar se encuentra ahora?

Anexo 10. Actividad E “La Cafetería”

Nombre: _____ Edad: _____

Observa y colorea la imagen. Luego, analiza la situación y escribe todas las ideas que surjan en el proceso de resolución del problema.



En la siguiente tabla se muestra la orden de pedido de cuatro amigos que van a la cafetería del centro comercial “El Puente”; analiza los datos presentados y responde:

Producto	Valor \$	Orden de pedido			
		Mafalda	Guillermo	Valentina	Daniela
Ensalada de frutas	7.000		X		
Frappe	6.000			X	
Jugo natural	4.500	X			X
Sándwich	9.000			X	X
Empanada	2.500	X			X
Copa de helado	4.500	X	X	X	

a. ¿Cuánto debe cancelar cada uno por su pedido?

- b. Guillermo se ofrece a pagar toda la cuenta con un billete de \$50.000. Logra su propósito ¿por qué?

- c. Mafalda tiene 20.000 y desea darlos para pagar de la cuenta un producto de la orden del pedido de cada uno. Selecciona los productos que puede cancelar exactamente con el dinero disponible.

Anexo 11. Actividad F “Sustracción de Números Enteros”

Nombre: _____ Edad: _____

Para desarrollar esta actividad abre el archivo **Actividad 2.ggb** y sigue las instrucciones que se indican en cada tarea.

Primera tarea: presiona el botón **Tarea 1**. Los puntos ***a*** y ***b*** representan dos números enteros en la recta numérica, arrástralos con el ratón para ponerlos en distintas posiciones y observa la figura para responder a las siguientes preguntas.

1) ¿Es $a - b$ un número entero?

2) ¿Dónde estaría ubicado $a - b$ si a se ubicara en 3 y b en 7?

3) ¿Dónde estaría ubicado $a - b$ si a se ubicara en -6 y b en -2?

4) ¿Dónde estaría ubicado $a - b$ si a se ubicara en -5 y b en -4?

5) ¿Dónde estaría ubicado $a - b$ si a se ubicara en 13 y b en -9?

6) ¿Dónde estaría ubicado $a - b$ si a se ubicara en -15 y b en 10?

7) ¿Explica cómo ubicar $a - b$ en la recta conociendo las posiciones de los números a y b ? Haz un dibujo si es necesario.

8) ¿Se procede igual cuando b está a la derecha de cero que cuando está a la izquierda?

Segunda tarea: presiona el botón **Tarea 2**. Escribe el resultado de la resta de los enteros a y b , luego presiona el botón **continuar**, acierta 5 veces.

Tercera tarea: Una tortuga se desplaza en dirección recta entre cuatro puntos distintos. Tu labor consiste en representar el desplazamiento de la tortuga como la suma y resta de números enteros. Abre el archivo **Actividad3.ggb** y realiza las siguientes tareas.

1) Los puntos A, B, C y D representan números enteros en la recta numérica, presiona el botón **Animar** para que la tortuga se desplace desde el punto A hasta el punto D , pasando por B y C . Observa que en la otra recta numérica se muestra el recorrido hecho por la tortuga. También se muestra la suma de cuatro números enteros, que representa el desplazamiento de la tortuga (puedes cambiar la suma por resta o combinarlas, presionando el botón **Cambiar operación**).

Presiona el botón **Posición inicial** para que la tortuga retorne al punto A , si deseas repetir el movimiento. Haz clic en el botón **Nuevo recorrido** para cambiar las posiciones de los puntos A, B, C y D con el fin de obtener un recorrido distinto.

Responde a las siguientes preguntas:

1) Si la tortuga empieza el recorrido en -5 , luego va hasta 6 , continúa hacia -8 y termina en 2 :

a) Escribe el desplazamiento de la tortuga como la suma de cuatro números enteros.

b) Escribe el desplazamiento de la tortuga como la resta de cuatro números enteros.

c) Completa las siguientes operaciones que representan el desplazamiento de la tortuga como una suma y una resta de cuatro números enteros. $\quad _ +$

$$_ - _ - _ = _$$

2) Si la tortuga empieza el recorrido en -13 , luego va hasta 8 , continúa hacia 3 y termina en 21 :

a) Escribe el desplazamiento de la tortuga como la suma de cuatro números enteros.

b) Escribe el desplazamiento de la tortuga como la resta de cuatro números enteros.

- 3) Si el recorrido de la tortuga se escribe como $4 + (-7) + 10 + (-12)$ cuáles serían las posiciones de los puntos **A, B, C y D**.

- 4) Si el recorrido de la tortuga se escribe como $-3 - (-5) - (-12) - 7$ cuáles serían las posiciones de los puntos **A, B, C y D**.

- 5) Si el recorrido de la tortuga se escribe como $-8 - (-4) + 6 - 11$ cuáles serían las posiciones de los puntos **A, B, C y D**.

- 6) Explica cómo escribir el desplazamiento de la tortuga como suma o resta de números enteros.

- 7) Crea una situación relacionada con el desplazamiento de la tortuga, donde utilice la adición y sustracción de números enteros.



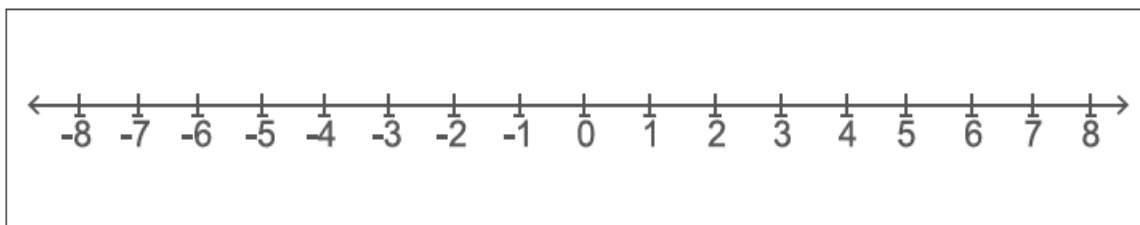
Anexo 12. Actividad G¹⁰⁸ “Campeonato Interligas”



La imagen ilustra uno de los juegos de futbol de un campeonato interligas disputado en la primera fase por un grupo de 6 equipos, la tabla que sigue señala como el equipo Atlético FC se enfrentó con el resto de equipos y sus resultados.

Juego N°	Equipo 1		Vs		Equipo 2
1	Atlético FC.	4	Vs		Real FC. 2
2	Atlético FC.	1	Vs		San Marino FC. 0
3	Atlético FC.	1	Vs		Club Celeste FC. 5
4	Atlético FC.	1	Vs		Cóndores FC. 3
5	Atlético FC.	6	Vs		Campito FC. 0

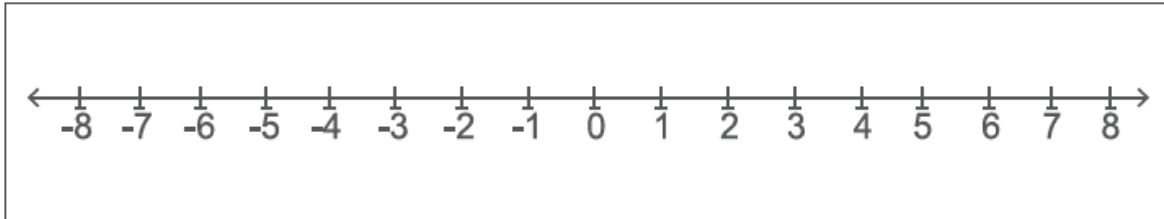
Según la tabla, se indica que el primer partido, fue ganado por dos goles de diferencia y el segundo por uno de diferencia, ¿Cómo representarías en la recta numérica esta situación?



¹⁰⁸ COLOMBIAAPRENDE. Material...

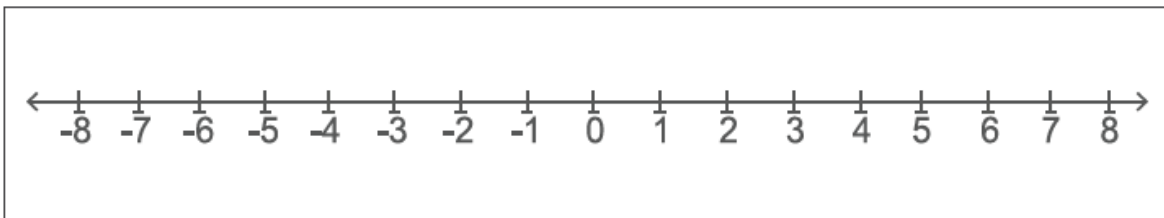
¿Cuántos goles a favor lleva el equipo hasta el 5 encuentro y cómo lo calcularías matemáticamente?

El tercer encuentro fue una derrota para el equipo Atlético FC por 4 goles de diferencia en ese caso, ¿Cómo representarías en la recta numérica esta situación?



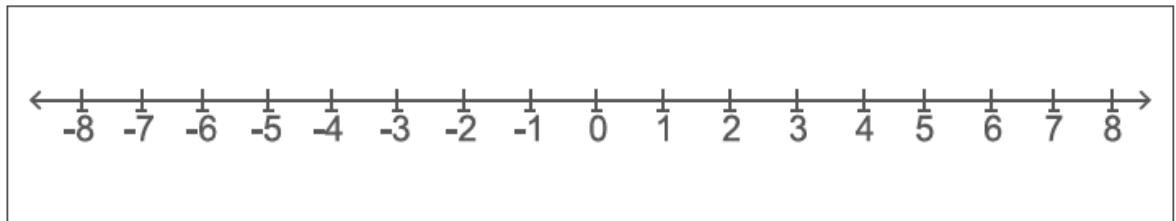
¿Cuál es operación que muestra la diferencia de goles que tendría el equipo ahora?

Si en el siguiente juego, el equipo Atlético FC desafortunadamente vuelve a perder por 3 goles de diferencia, ¿Qué mostraría la recta numérica ahora?



¿Cómo se mostraría matemáticamente?

Finalmente se repone con una victoria abultada por 6 goles a favor, la recta numérica, ¿qué mostraría?:



¿Cuál es entonces la diferencia de goles total del equipo?

¿Qué tienen en común las operaciones (I) y (III)?

¿Qué tienen en común las operaciones (II) y (IV)?

**Suma de números enteros.**

Para sumar enteros hay que tomar en cuenta dos casos posibles

Suma de enteros de igual signo, para dar el resultado en este caso basta sumar los valores absolutos de los sumandos y colocar el signo que llevaban los mismos; positivo en el caso que eran ambos positivos y negativos en el caso que ambos fueron negativos por ejemplo lo sucedido en los casos (I) y (III) del ejercicio anterior.

Suma de enteros de diferente signo, para dar el resultado en este caso toca restar los valores absolutos de los sumandos y se coloca el signo de la cantidad con mayor valor absoluto, por ejemplo tenemos los casos (II) y (IV) anteriores.

Anexo 13. Actividad H "El Clima"

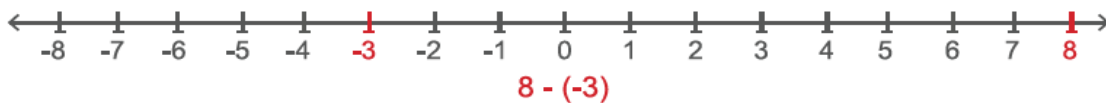


Observa la imagen y responde:

- ¿Qué operación se debe plantear para saber la variación de temperatura?

- Coloca observando la representación en la recta de cada variación el resultado correcto.

AYER

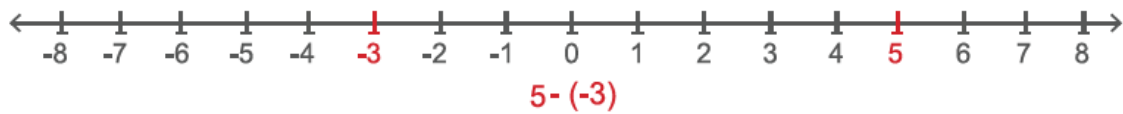


El resultado de la variación de temperatura es:

Temperatura máxima – Temperatura mínima

$$8 - (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

HOY



El resultado de la variación de temperatura es:

Temperatura máxima – Temperatura mínima

$$5 - (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Definición.

Si **a** y **b** **Z**, **(a – b)** es la sustracción de “a” (**minuendo**), menos “b” (**sustraendo**), la cual es equivalente a la suma del minuendo con el opuesto aditivo del sustraendo así:

$$a - b = a + (-b)$$

Sustracción	Suma equivalente	Resultado
4 - 8		
9 - (-5)		
	4 + (-5)	
	-7 + 11	
	16 + (-15)	
	25 + ()	2
	356 + ()	41
	() + (-6)	-12
	-15 + (-24)	
	189 + (-189)	

- Plantea una situación problema sobre variación de temperatura teniendo en cuenta las condiciones climáticas de tu región.

Anexo 14. Prueba Final

Nombre: _____ Grado: _____

Instrucciones: A continuación se presentan una serie de problemas, resuélvelos en forma clara y ordenada dejando todos los procedimientos por escrito, respuestas sin justificación no tienen validez.

De acuerdo con la siguiente información, responde la pregunta 1.

Para elegir quién irá a comprar las entradas para ver una película, 4 amigos sacaron cada uno de una bolsa un número, así:



1. Si debe ir quien tenga el número mayor, las entradas las compra:

- A. Juan
- B. Ana
- C. David
- D. Lucía

2. Una lombriz se encuentra 26 cm por debajo de la superficie de la tierra. Una representación numérica adecuada, en centímetros, para la posición de la lombriz con respecto a la superficie terrestre es:

- A. 26 cm
- B. -26 cm
- C. 0,26 cm
- D. -0, 26 cm



3. Se han registrado cuatro diferentes temperaturas durante un mes en la ciudad de Moscú, con el siguiente termómetro.



Día 1	10°
Día 2	-10°
Día 3	-20°
Día 4	0°

La diferencia entre las temperaturas de los días 3 y 1 fue:

- E. -10°

- F. 10°
- G. 20°
- H. 30°

4. Un escalador quiere llegar a la cima del Monte Everest y esta se encuentra a una altitud de 8.848 sobre el nivel del mar. Si al escalador le falta 4.640 metros para llegar a la cima, entonces está a _____ sobre el nivel del mar.

- E. 4.208 m.
- F. 13.488 m.
- G. -4.208 m.
- H. -13.488 m.

5. En una feria se juega tiro al blanco: por cada acierto se ganan \$3.000 y por cada desacierto se pierde \$1.000. Si Arturo lanzó tres veces y acertó una vez en el blanco. ¿Cuánto dinero ganó o perdió al final de los tres lanzamientos?

- A. Ganó \$1.000
- B. Ganó \$3.000
- C. Perdió \$2.000
- D. Perdió \$4.000

De acuerdo a la siguiente información, responde la pregunta 6.

En una ciudad de Rusia se registró la temperatura a cuatro horas distintas, los datos se encuentran en la siguiente tabla:

Hora	Temperatura
7:00 a.m.	-9° C
10:00 a.m.	0° C
2:00 p.m.	-5° C
6:00 p.m.	1° C

6. La mayor temperatura se registró a las:

- A. 7:00 a.m., porque -9 es el mayor de los números.
- B. 10:00 a.m., porque la máxima temperatura siempre es cero.
- C. 2:00 p.m., porque a esta hora siempre hace más calor.
- D. 6:00 p.m., porque 1 es el mayor de los cuatro números

7. Con la intención de restringir el uso de su computador por otras personas. Lucia lo configura de modo que la contraseña para iniciar sesión sea la respuesta correcta a la pregunta que se muestre en la pantalla. Si la pregunta es el resultado del siguiente polinomio aritmético: $\{[(-7) + (-13) - (-15)] + [23 - (18) - (-6)]\}$

La contraseña será:

- E. 11

- F. 6
- G. 5
- H. -5

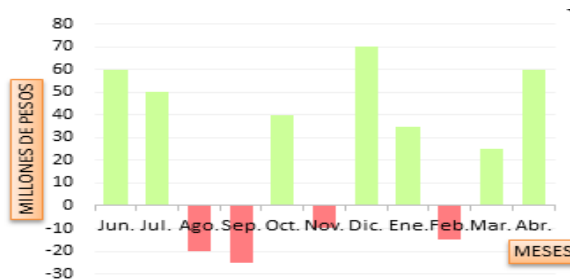
8. Fredy un niño de 12 años está preocupado porque la semana pasada no supo manejar su dinero para la merienda y por eso quedó debiendo en la cafetería de las escuela \$ 2.500, al dueño de la fotocopiadora \$1.000 y a Sebastián su amigo \$3.000. Para esta semana su papá le entregó lo de costumbre \$ 25.000 y se dispuso a controlarlos para que no le sucediera igual.

Contando con lo que le dieron a Fredy para la semana, después de pagar sus deudas, ¿con cuánto cuenta realmente para sus gastos?

9. Un minero está a 12 metros bajo tierra. El minero desciende 15 metros más y luego debe subir 20 metros a dejar materiales a un depósito ubicado en esta posición. ¿A Cuántos metros bajo tierra se encuentra el minero?

- a. Realiza un gráfico donde se pueda visualizar los desplazamientos del minero.
- b. ¿Cuál es el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos?
¿Por qué?
- c. ¿Qué desplazamientos debe hacer el minero desde su posición inicial, si el depósito está en la superficie de la tierra? ¿a 2 metros bajo tierra? ¿a 5 metros sobre la tierra?

10. Observa la siguiente gráfica que muestra las ganancias y las pérdidas de una fábrica de vestidos de baño entre junio de 2008 y abril de 2009.



Responde:

- ¿De cuánto fueron las ganancias en diciembre?
- ¿En cuáles meses tuvieron pérdidas?
- ¿En cuál mes tuvieron más pérdidas?
- ¿En cuál mes tuvieron más ganancias?

Anexo 15. Evaluación del proceso de solución de los problemas de la Prueba Diagnóstica para cada estudiante

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
1	1					En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1		1				En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1			1			En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1				1		En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1					1	En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
1	1					En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1		1				En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1			1			En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1				1		En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1					1	En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
1	1					Incorrecta	No requerido	Sin Estrategia
1		1				En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1			1			En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1				1		En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1					1	En blanco	Sin desarrollo	Sin Estrategia

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
2	5					Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
2		5				Incorrecto	Sin desarrollo	Sin estrategia
2			1			En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
2				5		Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
2					1	En blanco	Sin desarrollo	Operaciones numéricas
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
2	1					Incorrecto	Sin desarrollo	Sin estrategia
2		5				Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
2			1			En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
2				5		Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
2					1	En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia

Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
2	1					En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
2		5				Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
2			1			En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
2				5		Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
2					9	Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
3	5					Incorrecto	No requerido	Operaciones numéricas
3		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
3			5			Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
3				10		Correcta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
3					1	En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia

Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
3	5					Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
3		5				Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
3			10			Correcta	Completo	Operaciones numéricas
3				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
3					5	Correcta	Completo	Operaciones numéricas

Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
3	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
3		5				Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
3			5			Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
3				5		Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
3					3	Incorrecto	Incompleto	Sin estrategia

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
4	3					Indeterminada	No requerido	Sin estrategia
4		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
4			1			En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
4				1		En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
4					1	En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia

Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
4	1					En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
4		5				En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
4			1			En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia

4				5		Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
4					1	Incorrecto	No requerido	Sin estrategia
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
4	1					En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
4		1				En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
4			1			En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
4				1		En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
4					3	Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
5	5					Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
5		3				Incorrecto	Sin desarrollo	Sin estrategia
5			1			Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
5				1		En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
5					1	En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
5	3					Incorrecto	No requerido	Operaciones numéricas
5		5				Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
5			1			En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
5				5		Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
5					5	Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
5	1					En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
5		5				Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
5			5			Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
5				5		Incorrecto	Incompleto	Operaciones numéricas
5					5	Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
6	1					Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
6		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
6			5			Correcta	Completo	Operaciones numéricas
6				5		Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
6					1	En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
6	1					En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
6		5				Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
6			5			Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas

6				5		Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
6					5	Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15		Desarrollo	Estrategia
6	1					En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
6		3				Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
6			5			Correcta	Completo	Operaciones numéricas
6				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
6					5	Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
7	5					En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
7		1				En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
7			1			En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
7				1		En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
7					1	En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
7	1					En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
7		1				En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
7			1			En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
7				1		En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
7					1	En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
7	1					Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
7		1				En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
7			1			En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
7				1		En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
7					1	Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
8	9					Correcta	Sin desarrollo	Lista sistemática, tabla o un diagrama
8		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama
8			1			Correcta	Sin desarrollo	Sin estrategia
8				1		En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
8					10	Correcta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia

8	10					Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama
8		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama
8			10			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama
8				1		Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama
8					10	Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
8	9					Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
8		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama
8			10			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama
8				10		Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama
8					10	Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
9A	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
9 A		1				Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 A			3			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama
9 A				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
9 A					10	Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 A	10					Correcta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama
9A		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
9 A			5			Incorrecta	No requerida	Sin estrategia
9 A				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
9 A					10	Correcta	Completo	Operaciones numéricas
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 A	10					Correcta	Incompleto	Operaciones numéricas
9 A		3				Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
9 A			1			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama

9 A				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
9 A					3	Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 B	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
9 B		1				Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 B			1			Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 B				3		Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
9 B					5	Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 B	5					Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 B		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
9 B			5			Incorrecta	No requerido	Sin estrategia
9 B				5		Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
9 B					1	Correcta	Completo	Operaciones numéricas
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 B	3					En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 B		1				Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
9 B			5			Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
9 B				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
9 B					10	Correcta	Completo	Operaciones numéricas

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
10	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
10		3				Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
10			1			Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
10				5		Incorrecta	No requerido	Sin estrategia
10					3	Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
10	3					Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
10		5				Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama
10			5			Incorrecta	No requerido	Sin estrategia
10				3		Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
10					5	Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
10	3					Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama

10		3				Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
10			10			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama
10				10		Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama
10					10	Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
11	3					Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
11		5				Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
11			1			Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
11				1		En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
11					3	Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
11	3					Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
11		1				Incorrecta	No requerido	Sin estrategia
11			3			Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
11				1		Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
11					3	Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
11	3					Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
11		5				Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama
11			1			Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
11				3		Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
11					3	Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
12	5					Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
12		7				Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
12			1			Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
12				1		En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
12					3	En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
12	3					Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
12		1				Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
12			3			Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
12				1		Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas

12					1	En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
12	3					Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
12		1				Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
12			1			Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
12				1		Incorrecta	Incompleto	Sin estrategia
12					5	Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas

Anexo 16. Evaluación del proceso de solución de los problemas de la Prueba Final para cada estudiante

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
1	10					Correcta	Completo	Lista sistemática
1		3				Correcta	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1			3			Correcta	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1				10		Correcta	Completo	Lista sistemática
1					10	Correcta	Completo	Lista sistemática
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
1	3					Correcta	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
1			3			Correcta	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1				3		Correcta	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1					10	Correcta	Completa	Lista sistemática
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
1	1					Incorrecta	Sin desarrollo	Sin Estrategia
1		3				Correcta	Sin desarrollo	Sin desarrollo
1			3			Correcta	Sin desarrollo	Sin desarrollo
1				10		Correcta	Completo	Lista sistemática
1					3	Correcta	Sin desarrollo	Sin desarrollo

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
2	10					Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
2		1				Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
2			10			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
2				7		Correcta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
2					7	Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
2	10					Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

2		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
2			3			Correcta	Sin desarrollo	Sin estrategia
2				10		Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
2					10	Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
2	7					Correcta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
2		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
2			3			Correcta	Sin desarrollo	Sin estrategia
2				1		Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
2					10	Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
3	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
3		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
3			5			Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
3				9		Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
3					9	Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
3	9					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
3		5				Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
3			10			Correcta	Completo	Operaciones numéricas
3				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
3					10	Correcta	Completo	Operaciones numéricas
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
3	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
3		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
3			5			Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
3				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
3					10	Correcta	Completo	Operaciones numéricas

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
4	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
4		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
4			5			Incorrecta	Completo	Operaciones numéricas

4				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
4					10	Correcta	Completo	Operaciones numéricas
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
4	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
4		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
4			10			Correcta	Completo	Operaciones numéricas
4				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
4					5	Incorrecta	Completo	Operaciones numéricas
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
4	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
4		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
4			10			Correcta	Completo	Operaciones numéricas
4				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
4					10	Correcta	Completo	Operaciones numéricas

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
5	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
5		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
5			5			Incorrecta	Completo	Operaciones numéricas
5				1		En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
5					10	Correcta	Completo	Operaciones numéricas
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
5	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
5		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
5			10			Correcta	Completo	Operaciones numéricas
5				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
5					10	Correcta	Completo	Operaciones numéricas
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
5	1					En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
5		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
5			10			Correcta	Completo	Operaciones numéricas
5				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
5					9	Incorrecta	Completo	Operaciones numéricas

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
6	10					Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

6		3				Correcta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
6			5			Correcta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
6				7		Correcta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
6					10	Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
6	10					Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
6		1				Correcta	Sin desarrollo	Sin Estrategia
6			3			Correcta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
6				5		Correcta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
6					1	Correcta	Sin desarrollo	Sin Estrategia
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
6	1					Incorrecta	Sin desarrollo	Sin Estrategia
6		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
6			10			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
6				1		Correcta	Sin desarrollo	Sin Estrategia
6					10	Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
7	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
7		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
7			10			Correcta	Completo	Operaciones numéricas
7				7		Correcta	Incompleto	Operaciones numéricas
7					10	Correcta	Completo	Operaciones numéricas
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
7	9					Incorrecta	Completo	Operaciones numéricas
7		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
7			10			Correcta	Completo	Operaciones numéricas
7				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
7					10	Correcta	Completo	Operaciones numéricas
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia

7	5					Incorrecta	Incompleta	Operaciones numéricas
7		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
7			10			Correcta	Completo	Operaciones numéricas
7				9		Incorrecta	Completo	Operaciones numéricas
7					10	Correcta	Completo	Operaciones numéricas

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
8	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
8		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
8			10			Correcta	Completo	Operaciones numéricas
8				9		Incorrecta	Completo	Operaciones numéricas
8					10	Correcta	Completa	Operaciones numéricas

Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
8	10					Correcta	Completo	Operaciones numéricas
8		7				Incorrecta	Incompleto	Operaciones numéricas
8			9			Incorrecta	Completo	Operaciones numéricas
8				10		Correcta	Completa	Operaciones numéricas
8					9	Incorrecta	Completo	Operaciones numéricas

Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
8	7					Incorrecta	Incompleta	Operaciones numéricas
8		10				Correcta	Completo	Operaciones numéricas
8			10			Correcta	Completo	Operaciones numéricas
8				10		Correcta	Completo	Operaciones numéricas
8					10	Correcta	Completo	Operaciones numéricas

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
9A	10					Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 A		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 A			10			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 A				3		Incorrecta	Sin Unidades	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 A					10	Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 A	10					Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

9A		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 A			10			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 A				10		Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 A					7	Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 A	1					Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 A		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 A			10			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 A				10		Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 A					10	Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 B	5					Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 B		1				Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 B			10			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 B				3		Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 B					5	Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 B	10					Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 B		3				Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 B			10			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 B				5		Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 B					5	Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 B	3					Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 B		5				Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 B			10			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 B				10		Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 B					5	Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 C1	10					Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C1		1				Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C1			1			Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C1				1		Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C1					1	Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia

Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 C1	1					Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C1		1				Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C1			1			Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C1				5		Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C1					1	Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia

Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 C1	1					En blanco	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C1		5				Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C1			5			Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C1				1		Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C1					10	Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 C2	5					Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

9 C2		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C2			5			Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C2				1		Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C2					1	Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 C2	1					Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C2		5				Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C2			5			Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C2				10		Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C2					5	Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 C2	1					Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C2		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C2			10			Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C2				1		Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C2					10	Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 C3	5					Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C3		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C3			5			Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C3				1		Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C3					1	Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 C3	1					Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C3		5				Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C3			5			Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

9 C3				10		Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C3					5	Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
9 C3	5					Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C3		10				Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C3			5			Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática, tabla o un diagrama.
9 C3				1		Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
9 C3					10	Correcta	Completo	Lista sistemática, tabla o un diagrama.

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
10 A	10					Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 A		10				Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 A			10			Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 A				10		Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 A					10	Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
10 A	10					Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 A		10				Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 A			10			Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 A				10		Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 A					5	Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática y lectura de gráficos
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
10 A	10					Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos

10 A		10				Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 A			10			Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 A				10		Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 A					10	Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
10 B	10					Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 B		10				Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 B			7			Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 B				5		Incorrecta	Incompleto	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 B					10	Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
10 B	10					Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 B		10				Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 B			10			Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 B				10		Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 B					10	Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
10 B	10					Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 B		10				Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 B			10			Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 B				10		Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 B					10	Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
10 C	3					Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 C		10				Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 C			3			Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 C				3		Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 C					3	Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática y lectura de gráficos
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
10 C	10					Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 C		3				Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 C			10			Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 C				3		Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 C					3	Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática y lectura de gráficos
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
10 C	3					Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 C		10				Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 C			10			Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 C				3		Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 C					10	Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos

Problema	E-01	E-02	E-03	E-04	E-05	Solución	Desarrollo	Estrategia
10 D	10					Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 D		10				Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos

10 D			10			Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 D				1		Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
10 D					10	Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
Problema	E-06	E-07	E-08	E-09	E-10	Solución	Desarrollo	Estrategia
10 D	10					Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 D		10				Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 D			10			Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 D				10		Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 D					3	Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática y lectura de gráficos
Problema	E-11	E-12	E-13	E-14	E-15	Solución	Desarrollo	Estrategia
10 D	3					Incorrecta	Incompleta	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 D		10				Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 D			10			Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos
10 D				1		Incorrecta	Sin desarrollo	Sin estrategia
10 D					10	Correcta	Completo	Lista sistemática y lectura de gráficos