

**FRACTURAS EN ESFERAS AUTOGRAVITANTES ANISÓTROPAS
MODELADAS POR ECUACIONES DE ESTADO NO BARÓTROPAS EN
RELATIVIDAD GENERAL**

DANIEL FELIPE SUÁREZ URANGO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2018**

**FRACTURAS EN ESFERAS AUTOGRAVITANTES ANISÓTROPAS
MODELADAS POR ECUACIONES DE ESTADO NO BARÓTROPAS EN
RELATIVIDAD GENERAL**

DANIEL FELIPE SUÁREZ URANGO

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Físico

Director
LUIS ALBERTO NÚÑEZ DE VILLAVICENCIO MARTÍNEZ
Físico. PhD.
Codirector
JUSTO OSPINO ZÚÑIGA
Físico. PhD.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2018

Índice general

Introducción	10
1. Modelado de fluidos anisótropos	12
1.1. Ecuaciones de campo para configuraciones anisótropas hidrostáticas	12
1.2. Ecuación de equilibrio hidrostático	13
1.3. Condiciones de frontera y solución exterior	14
1.4. Extensión cuasilocal de ecuación de estado politropa	14
1.5. Ecuación de estado no local	16
2. Fracturas	22
3. Esquemas de perturbación	24
3.1. Esquema de perturbación para ecuación de estado politropa cuasilocal	24
3.2. Esquema de perturbación para ecuación de estado no local	27
4. Resultados	30
5. Conclusiones	33
Referencias bibliográficas	36
A. Ecuación de Lane-Emden anisótropa	37
A.1. Ecuación de equilibrio perturbada adimensional	39
B. Código en Python para ecuación de Lane-Emden	42

Índice de figuras

1.1.	Perfil de masa a partir de la ecuación de Lane-Emden anisótropa para ecuación de estado politropa cuasilocal.	18
1.2.	Perfil de densidad a partir de la ecuación de Lane-Emden anisótropa para ecuación de estado politropa cuasilocal.	18
1.3.	Perfil de presión a partir de la ecuación de Lane-Emden anisótropa para ecuación de estado politropa cuasilocal.	19
1.4.	Velocidades del sonido, radial y tangencial, a partir de la ecuación de Lane-Emden anisótropa para ecuación de estado politropa cuasilocal.	19
1.5.	Perfil de masa para modelo de B. W. Stewart, con $K = 0,16$	20
1.6.	Perfil de densidad para modelo de B. W. Stewart, con $K = 0,16$	20
1.7.	Perfil de presión para modelo de B. W. Stewart, con $K = 0,16$	21
3.1.	Función $\beta(r)$	29
4.1.	Ecuación de equilibrio perturbada para esquema con ecuación de estado politropa cuasilocal. $C = 0,25$	30
4.2.	Ecuación de equilibrio perturbada para esquema con ecuación de estado politropa cuasilocal. $C = 0,5$	31
4.3.	Ecuación de equilibrio perturbada para esquema con ecuación de estado no local.	32

Agradecimientos

A mis padres, a mis hermanos. A pakotita. A mi director. A todos.

Resumen

TÍTULO: FRACTURAS EN ESFERAS AUTOGRAVITANTES ANISÓTROPAS MODELADAS POR ECUACIONES DE ESTADO NO BARÓTROPAS EN RELATIVIDAD GENERAL *

AUTOR: DANIEL FELIPE SUÁREZ URANGO **

PALABRAS CLAVES: Fracturas, ecuaciones de estado no barótropas, esferas anisótropas, perturbaciones locales no constantes.

Los efectos de las inestabilidades en objetos autogravitantes son clave en la Astrofísica y han sido estudiados por décadas al analizar el comportamiento de las ecuaciones de estado bajo perturbaciones de sus variables físicas. La forma más simple de una ecuación de estado que detalla el estado de la materia dentro de un objeto compacto es aquella en donde la presión de la configuración depende únicamente de la densidad en un punto, pues estas son suficientes para cerrar las ecuaciones de campo de Einstein estáticas con simetría esférica. Sin embargo, en la naturaleza, las ecuaciones de estado que describen la materia dependen, con seguridad, de más de un parámetro o variable física.

En este trabajo se analiza la estabilidad de esferas autogravitantes anisótropas bajo perturbaciones locales no constantes de la densidad representadas por funciones de soporte compacto, en Relatividad General, al extender concepto de fractura a ecuaciones de estado no barótropas con el fin de modelar configuraciones materiales termodinámicamente más consistentes. Este concepto consiste en analizar la distribución de fuerzas a lo largo de la configuración material justo después de que esta abandone del equilibrio.

Dos modelos son estudiados. En el primer modelo analizado se dispuso de una presión radial politropa barótropa, y una presión tangencial politropa cuasilocal la cual es función de la presión radial (por tanto de la densidad) y la compacidad (no barótropa). En el segundo modelo se tomó una ecuación de estado no local para la presión radial en la que esta es función de la densidad y la compacidad; y la presión anisótropa Δ/r proporcional al término $(\rho + P)\nu'/2$ en la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

*Trabajo de Grado.

**Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Luis Alberto Núñez de Villavicencio Martínez. Codirector: Justo Ospino Zúñiga.

Abstract

TITLE: CRACKING OF ANISOTROPIC SELF-GRAVITATING SPHERES MODELED BY NON-BAROTROPIC EQUATIONS OF STATE IN GENERAL RELATIVITY

AUTHOR: DANIEL FELIPE SUÁREZ URANGO ****

KEYWORDS: Cracking, non-barotropic equations of state, anisotropic spheres, local non-constant perturbations.

The effects of instabilities in self-gravitating objects are key in astrophysics and have been studied for decades when analyzing the behavior of state equations under the perturbations of their physical variables. The simplest form of an equation of state that details the state of matter within a compact object is one in which the pressure of the configuration depends only on the density at one point, since these are sufficient to close the static Einstein field equations with spherical symmetry. However, in nature, the equations of state that describe matter depend, for sure, on more than one physical parameter or variable.

In this work, the stability of anisotropic self-gravitating spheres under local non-constant density perturbations represented by compact support functions is analyzed in General Relativity, by extending the cracking concept to non-barotropic equations of state to model material configurations thermodynamically more consistent. This concept consists in analyzing the distribution of forces along the material configuration just after it leaves equilibrium.

Two models are studied. In the first model analyzed, a barotropic polytropic radial pressure was applied, and a quasi-local tangential polytropic pressure which is a function of radial pressure (therefore of density) and compactness (non-barotropic). In the second model, a non-local equation of state was taken for the radial pressure in which this is a function of density and compactness; and the anisotropic pressure Δ/r proportional to the term $(\rho + P)\nu'/2$ in the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation.

*** Degree Work.

**** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Luis Alberto Núñez de Villavicencio Martínez. Codirector: Justo Ospino Zúñiga.

Introducción

Este trabajo

La temperatura (T), presión (P), y los potenciales electroquímicos (μ_j) son derivadas parciales de una función de la entropía (S), el volumen (V), y el número de moles ($N_1 \dots N_r$); y consecuentemente son también función de S, V, $N_1 \dots N_r$. Se tiene entonces un conjunto de relaciones funcionales,

$$T = T(S, V, N_1 \dots N_r), \quad (1)$$

$$P = P(S, V, N_1 \dots N_r), \quad (2)$$

$$\mu_j = \mu_j(S, V, N_1 \dots N_r). \quad (3)$$

Tales relaciones, que expresan parámetros intensivos en términos de los parámetros extensivos independientes, son llamadas ecuaciones de estado [1]. Entonces, el contenido material de objetos autogravitantes son modelados macroscópicamente a través de ecuaciones de estado que relacionan sus variables físicas e intentan describir los procesos físicos microscópicos más importantes que ocurren en su interior; tanto así, que estas son de vital importancia a la hora de estudiar la estabilidad bajo cualquier tipo de perturbación en este tipo objetos.

Así, en el mejor de los casos, la ecuación de estado que describe el comportamiento de la configuración material dependerá de la presión, la temperatura, los potenciales electroquímicos y de las variables extensivas para que el sistema esté termodinámicamente completo.

La forma más simple de una ecuación de estado, que detalla el estado de la materia dentro de un objeto compacto, es aquella en donde la presión radial de la configuración depende únicamente de la densidad en un punto. A este tipo de ecuaciones se le llama ecuación de estado barótrópica, y es la manera más sencilla de modelar esferas autogravitantes pues son suficientes para cerrar las ecuaciones de campo de Einstein estáticas con simetría esférica. Sin embargo, en la naturaleza, las ecuaciones de estado que describen la materia dependen, con seguridad, de más de un parámetro o variable física; incluso la ecuación de estado que modela el comportamiento de un gas bajo condiciones ideales es no barótrópica pues en esta tenemos la presión en función de la temperatura, el número de moles y el volumen del gas.

Lo anterior motiva a extender el esquema de perturbación desarrollado por González, Navarro y Núñez [2] a ecuaciones de estado no barótrópicas con el fin de analizar la estabilidad de configuraciones materiales termodinámicamente más consistentes bajo per-

turbaciones locales no constantes de la densidad representadas por funciones de soporte compacto.

Antecedentes

L. Herrera y colaboradores [3–6] propusieron el enfoque de “fracturas” para estudiar las inestabilidades en distribuciones de materiales relativistas, justo después que la configuración se aleja de su equilibrio. Ellos estudiaron la aceleración de marea generada por una perturbación en elementos fluidos contiguos mostrando que es posible identificar una distribución de la fuerza radial total, que cambia de signo dentro del sistema. Para estudiar las fracturas suponen perturbaciones constantes y simultáneas de la densidad y de la anisotropía de las presiones, identificando fractura cada vez que la fuerza total cambia de signo.

Otra contribución al marco conceptual de las fracturas en Relatividad General ha sido hecha por Abreu, Hernández y Núñez [7], y más recientemente por González, Navarro y Núñez [8]. En ambos casos se consideran fluidos anisótropos con ecuaciones de estado barótropas para los perfiles de presiones radiales y tangenciales, $P = P(\rho)$ y $P_{\perp} = P_{\perp}(\rho)$. Los primeros autores presentan un criterio para identificar posibles inestabilidades por fractura, asociado al cambio de signo de la diferencia entre la velocidad del sonido tangencial y radial; mientras que los últimos asumen fluctuaciones no constantes en la densidad (las cuales también afectan el gradiente de presión) determinando las fracturas cuando se presenta un cambio de signo en la ecuación de equilibrio perturbada.

En [9], D. Horvat y colaboradores, utilizan ecuaciones de estado politropas cuasilocales para determinar la estabilidad de objetos compactos por medio del método estándar $M(R)$. Este método utiliza la densidad de energía central como parámetro al encontrar familias de soluciones a las ecuaciones de Einstein empleando la misma ecuación de estado. Para cada valor de la densidad de energía central, al ir incrementando este, corresponde un único valor de M y R (masa total y radio total del objeto) respectivamente; así, el primer máximo en una curva R contra M indica la frontera entre configuraciones estables e inestables. De otra parte, una ecuación de estado no local es empleada en [10] para obtener configuraciones materiales anisótropas admisibles, con simetría esférica, a partir de perfiles de densidad conocidos.

Estructura del documento

La organización de este trabajo es la siguiente. En el capítulo 2 se exponen las ecuaciones de estructura de las configuraciones materiales a estudiar, estas son las ecuaciones de campo de Einstein y las ecuaciones de estado que describen las interacciones en la materia entre las variables físicas que la componen; además, se dan a conocer las condiciones de aceptabilidad física que deben tener los modelos para ser considerados válidos. En el capítulo 3 se muestra el esquema de perturbación a extender para estudiar la estabilidad de esferas autogravitantes modeladas por ecuaciones de estado no barótropas. En el capítulo 4 se desarrolla la extensión del esquema planteado en el capítulo 3. Por último, en el capítulo 5 y 6 se presentan los resultados obtenidos y las conclusiones, respectivamente.

Capítulo 1

Modelado de fluidos anisótropos

1.1. Ecuaciones de campo para configuraciones anisótropas hidrostáticas

A lo largo de este trabajo se consideran distribuciones de materia en equilibrio hidrostático las cuales son esféricamente simétricas; además se utilizan unidades geometrizadas tales que $c = G = 1$, siendo estas la velocidad de la luz y la constante gravitacional de Newton respectivamente. Dicho esto, el elemento de línea en coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) puede escribirse como

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.1)$$

donde todas las funciones dependen únicamente de la coordenada radial. Esta métrica debe satisfacer las ecuaciones de Einstein dadas por

$$R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2} g^\nu{}_\mu R = -8\pi T^\nu{}_\mu, \quad (1.2)$$

las cuales relacionan la medida de la curvatura, por medio del tensor de Ricci ($R^\nu{}_\mu$) y el escalar de curvatura (R), con el tensor de energía-momento de materia ($T^\nu{}_\mu$).

El tensor de energía-momento más general compatible con simetría esférica para una configuración de materia anisótropa con densidad de energía ρ , presión radial P_r y presión tangencial P_\perp es

$$T^\nu{}_\mu = \text{diag}(\rho, -P_r, -P_\perp, -P_\perp). \quad (1.3)$$

Entonces, las ecuaciones de campo de Einstein para esta geometría y distribución de materia son

$$-8\pi T^t{}_t = 8\pi\rho = \frac{1}{r^2} + \frac{e^{-\lambda}}{r} \left(\lambda' - \frac{1}{r} \right), \quad (1.4)$$

$$-8\pi T^r{}_r = 8\pi P_r = -\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-\lambda}}{r} \left(\nu' + \frac{1}{r} \right) \quad \text{y} \quad (1.5)$$

$$-8\pi T_{\theta}^{\theta} = 8\pi P_{\perp} = \frac{e^{-\lambda}}{4} \left[2\nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' + \frac{2(\nu' - \lambda')}{r} \right] = -8\pi T_{\phi}^{\phi}, \quad (1.6)$$

donde la prima denota derivación respecto a la coordenada radial r .

1.2. Ecuación de equilibrio hidrostático

Aunque las ecuaciones de campo de Einstein contienen toda la información requerida para describir la interacción entre la gravedad y la materia, es útil transformar estas de tal forma que las propiedades hidrostáticas del sistema sean más evidentes en una única ecuación. Para esto, se reescribe la ecuación (1.4) como

$$\left(re^{-\lambda} \right)' = 1 - 8\pi \rho r^2,$$

con el fin de integrarla y obtener

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (1.7)$$

en donde se ha definido la función masa $m(r)$ como

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho \bar{r}^2 d\bar{r}, \quad (1.8)$$

correspondiente a la masa encerrada en una esfera de radio r . Esta última ecuación también puede escribirse de forma diferencial como

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (1.9)$$

Utilizando (1.7) en (1.5) se tiene

$$\frac{1}{2}\nu' = \frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)}. \quad (1.10)$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio hidrostático se obtiene al diferenciar la ecuación (1.5) respecto a r e introducirla en (1.6), quedando

$$P_r' = -(\rho + P_r) \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r} (P_{\perp} - P_r). \quad (1.11)$$

Esta ecuación es conocida como ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [11], y también puede ser obtenida al derivar covariantemente las componentes del tensor energía-momento dando como resultado las ecuaciones de conservación.

Con el fin de resolver la ecuación de equilibrio hidrostático es necesario definir ecuaciones de estado que relacionen las presiones con las variables física del sistema; además, se deben cumplir ciertas condiciones de frontera y criterios de aceptabilidad física.

1.3. Condiciones de frontera y solución exterior

Como primera medida se requiere que la solución sea regular en el origen, lo cual impone que la función masa $m(r)$ tienda a cero a medida que r tiende a cero; además, si P_r es finito en el origen entonces ν' también tiende a cero a medida que r tiende a cero. Entonces el gradiente de P_r será finito en el origen siempre y cuando $(P_\perp - P_r)$ sea cero a medida que r tiende a cero, condición que se cumple al tener en cuenta que en una configuración con simetría esférica $P_r(r=0) = P_\perp(r=0)$.

El radio de la esfera es determinado por la condición $P_r(R) = 0$, siendo $r = R$ el borde de la distribución. De aquí que la masa total de la configuración sea $M = m(R)$.

Para que los modelos sean físicamente aceptables se requiere que las presiones y la densidad sean positivas para todo r dentro de la distribución, y además que sus gradientes sean negativos

$$P_r > 0 ; \quad P_\perp > 0 ; \quad \rho > 0 ; \quad \frac{dP_r}{dr} \leq 0 ; \quad \frac{d\rho}{dr} \leq 0.$$

Adicionalmente las velocidades del sonido, radial y tangencial, deben ser menores que la velocidad de la luz (c), esto es

$$v_r^2 = \frac{dP_r}{d\rho} < 1 ; \quad v_\perp^2 = \frac{dP_\perp}{d\rho} < 1.$$

El espacio-tiempo fuera de la distribución de materia es descrito por medio de la métrica de Schwarzschild exterior [12], definida como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.12)$$

Se hace necesario acoplar la solución exterior con la interior en el borde de la configuración con el fin de evitar discontinuidades en la superficie; para esto se debe cumplir con la continuidad de la primera forma fundamental, es decir

$$e^{\nu_R} = 1 - \frac{2M}{R}, \quad (1.13)$$

$$e^{-\lambda_R} = 1 - \frac{2M}{R}, \quad (1.14)$$

$$P_R = 0, \quad (1.15)$$

donde el subíndice R indica que la variable es evaluada en la superficie.

1.4. Extensión cuasilocal de ecuación de estado politropa

En [9] se estudiaron las propiedades de las soluciones con simetría esférica para un fluido anisótropo descrito por las ecuaciones de estado

$$P_r = P_r(\rho) = K\rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad y \quad (1.16)$$

$$\Delta = P_{\perp} - P_r = \Delta(\rho; \mu) = CP_r(\rho)\mu . \quad (1.17)$$

La primera relación es una ecuación de estado politropa barótropa que vincula la densidad de energía con la presión radial. La constante K y n son conocidas como constante politropa e índice politropo respectivamente. Las propiedades de este tipo de ecuaciones de estado han sido estudiadas en diversas ocasiones [13, 14], recientemente por [15, 16], y son utilizadas como una buena aproximación a modelos estelares más realistas [17]. Tal ecuación de estado, al introducirse en la ecuación de TOV, tiene la ventaja de poder expresar esta última en términos de variables adimensionales por medio de la ecuación de Lane-Emden [15].

La segunda ecuación es una extensión cuasilocal de la primera, en donde se relaciona la presión anisótropa (Δ) con la densidad de energía ρ y, además, con la compacidad de la configuración dada por

$$\mu = \frac{2m(r)}{r} . \quad (1.18)$$

Este tipo de ecuación de estado politropa no local, que depende no solo de un punto en el espacio sino de una vecindad de puntos alrededor de este, ha sido empleada para encontrar soluciones a estrellas gravitacionales de vacío [18] que satisfacen las condiciones esperadas para un objeto de este tipo [19]. La constante C es una medida de la cantidad de anisotropía presente en la configuración.

El perfil de densidad para la configuración material es obtenido al integrar numéricamente el sistema de ecuaciones que la describe, el cual es conformado por las ecuaciones (1.20), (1.21), (1.22) y (1.23) para la condición de frontera $\psi(\xi_1) = 0$, y valores iniciales $\psi(\xi = 0) = 1$ y $\eta(\xi = 0) = 0$, donde ξ_1 define el borde de la configuración (ver apéndice B). Los perfiles de masa, densidad y presión son representados gráficamente en las figuras 1.1, 1.2 y 1.3, respectivamente; además, se presenta la velocidad del sonido, tanto radial como tangencial, para esta configuración en la figura 1.4, donde se puede observar que todo cumple con las condiciones físicas requeridas. Las gráficas son obtenidas para un valor de $C = 0,25$ e índice politropo $n = 2$.

Ecuación de Lane-Emden anisótropa

La ecuación de Lane-Emden en principio es una forma adimensional de la ecuación de Poisson utilizada para modelar el campo gravitatorio de una configuración material con simetría esférica constituida por un fluido politropo; para esto, se utiliza el siguiente cambio de variables [15]

$$\psi^n(\xi) = \frac{\rho}{\rho_0} , \quad \eta(\xi) = \frac{mA^3}{4\pi\rho_0} \Rightarrow m = \frac{4\pi\rho_0\eta}{A^3} , \quad \alpha = \frac{P_{r0}}{\rho_0} = K_1 , \quad r = \frac{\xi}{A} , \quad A^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\alpha(n+1)} , \quad (1.19)$$

en las ecuaciones que componen el sistema politropo, es decir las ecuaciones (1.9), (1.11), (1.16) y (1.17), quedando (ver apéndice A)

$$\xi \frac{d\psi}{d\xi} \left(\frac{\xi - 2(n+1)\alpha\eta}{1 + \alpha\psi} \right) + (\eta + \alpha\xi^3\psi^{n+1}) + \left(\frac{2\Delta\psi^{-n}}{n\alpha\rho_0} \right) \left(\frac{\xi - 2(n+1)\alpha\eta}{1 + \alpha\psi} \right) = 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \xi^2\psi^n, \quad (1.21)$$

$$P_r = K_1\rho_0\psi^{n+1}; \quad K_1 = K\rho_0^{\frac{1}{n}}, \quad (1.22)$$

$$\Delta = K_A \frac{\psi^{n+1}\eta}{\xi}; \quad K_A = 2CK_1\rho_0\alpha(n+1), \quad (1.23)$$

siendo este el nuevo sistema a tener en cuenta que describe la configuración material anisótropa esféricamente simétrica, en donde el subíndice 0 quiere decir que la variable ha sido evaluada en el centro de la configuración.

Como es de notar, la variable ψ relaciona la densidad de energía con la presión, η es proporcional a la función masa $m(r)$, y ξ es una variable radial adimensional.

1.5. Ecuación de estado no local

Este tipo de ecuación de estado proporciona la presión radial P_r en función de la densidad de energía ρ , en un punto, y además considera la distribución de toda la configuración de materia encerrada hasta ese punto; permitiendo que cualquier variación de la densidad de energía dentro de un volumen se vea reflejado en la presión radial [10]. Dicha ecuación de estado, en el límite estático, está dada por

$$P_r(r) = \rho(r) + \frac{2}{r^3} \int_0^r \rho(\bar{r})\bar{r}^2 d\bar{r}, \quad (1.24)$$

la cual puede reescribirse como una ecuación diferencial, así

$$P_r(r) = \rho(r) + \frac{2}{r^3} \int_0^r \rho(\bar{r})\bar{r}^2 d\bar{r} \quad \Leftrightarrow \quad \rho - 3P_r + r(\rho' - P_r') = 0. \quad (1.25)$$

Esto permite escribir las ecuaciones de campo de Einstein, para una ecuación de estado no local [10], de la siguiente manera

$$8\pi\rho = \frac{2m'}{r^2}, \quad (1.26)$$

$$8\pi P_r = \frac{2m'}{r^2} - \frac{4m}{r^3}, \quad (1.27)$$

de donde se puede obtener el gradiente de presión derivando la ecuación (1.27) respecto a r así

$$8\pi P_r' = \frac{2m''}{r^2} - \frac{4m'}{r^3} - \frac{4m'}{r^3} + \frac{12m}{r^4}. \quad (1.28)$$

Además se propone definir la presión anisótropa, $\Delta = P_{\perp} - P_r$, como múltiplo del primer término del lado derecho [20] en la ecuación de TOV, es decir

$$P_{\perp} = \beta(r) (\rho + P_r) \left[\frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} \right] r + P_r, \quad (1.29)$$

donde $\beta(r)$ mide la anisotropía del sistema y es una función de r .

Es claro que, si se proporciona un perfil de densidad $\rho(r)$, todas las variables físicas (masa, presiones y gradiente de presión) pueden ser determinadas a partir de las ecuaciones anteriores.

Perfil de densidad

El perfil de densidad escogido fue propuesto por B. W. Stewart [21] para describir una configuración anisótropa estática conformemente plana, es decir, una configuración en la que cada punto dentro de esta tiene una vecindad la cual puede ser mapeada a un espacio plano por medio de una transformación.

El perfil proporcionado es

$$\rho = \frac{m'}{4\pi r^2} = \frac{1}{8\pi r^2} \frac{(e^{2Kr} - 1)(8Kre^{2Kr} + e^{4Kr} - 1)}{(e^{2Kr} + 1)^3}, \quad (1.30)$$

sí y solo sí

$$m = \frac{r}{2} \left(\frac{e^{2Kr} - 1}{e^{2Kr} + 1} \right)^2. \quad (1.31)$$

Al reemplazar (1.30) y (1.31) en (1.27) se obtiene el perfil de presión radial para la configuración:

$$P_r = \frac{1}{8\pi r^2} \frac{(e^{2Kr} - 1)(8Kre^{2Kr} - e^{4Kr} + 1)}{(e^{2Kr} + 1)^3}. \quad (1.32)$$

K puede ser obtenido de la condición de frontera $M = m(r = R)$ como

$$K = \frac{1}{2R} \ln \left[\frac{1 + \left(\frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \left(\frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]. \quad (1.33)$$

En las figuras 1.5, 1.6 y 1.7, se muestran los perfiles de masa, densidad y presión, respectivamente, correspondientes a un objeto esférico compacto representativo con $R = 10[km]$, $M = 2,16[M_{\odot}]$ y densidad central $\rho_0 = 1,91 \times 10^{18}[kg/m^3]$, para $K = 0,16$, el cual cumple con las condiciones físicas deseadas [7].

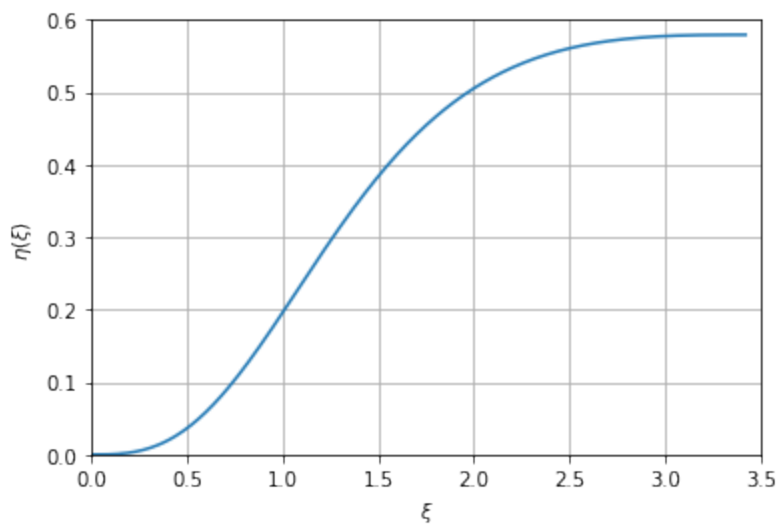


Figura 1.1: Perfil de masa a partir de la ecuación de Lane-Emden anisótropa para ecuación de estado politropa cuasilocal.

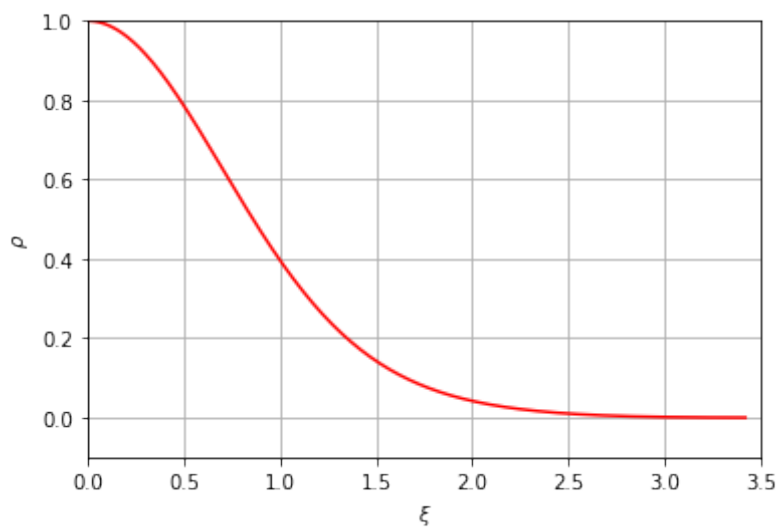


Figura 1.2: Perfil de densidad a partir de la ecuación de Lane-Emden anisótropa para ecuación de estado politropa cuasilocal.

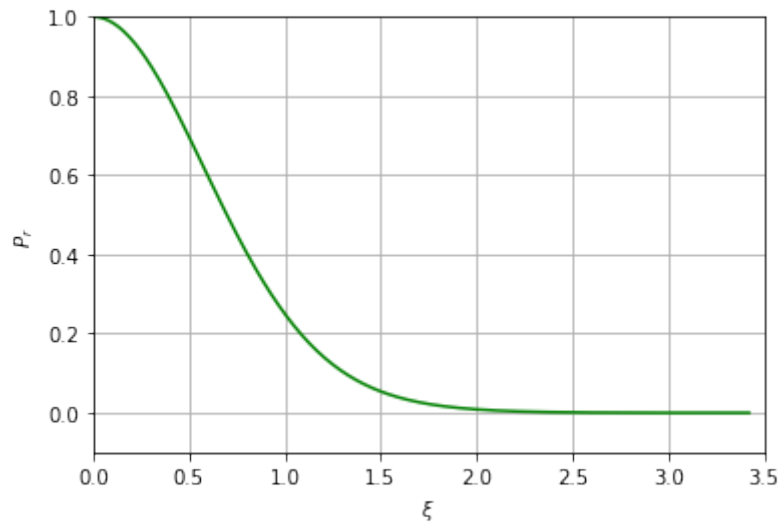


Figura 1.3: Perfil de presión a partir de la ecuación de Lane-Emden anisótropa para ecuación de estado politropa cuasilocal.

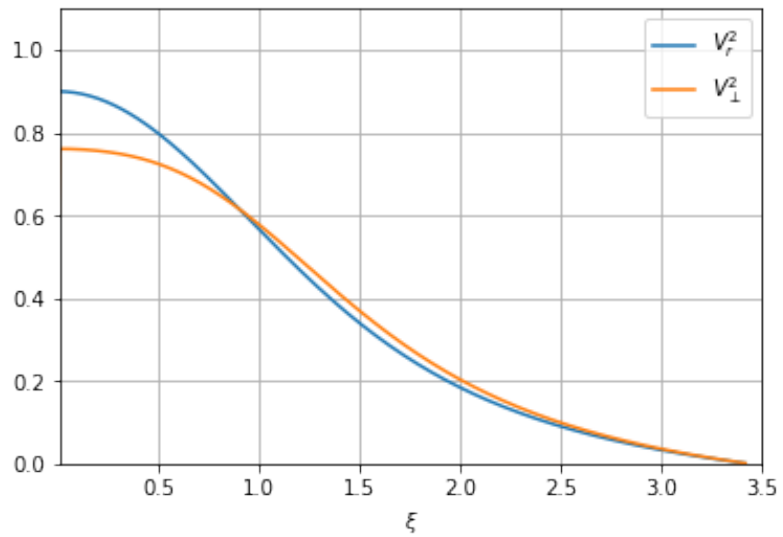


Figura 1.4: Velocidades del sonido, radial y tangencial, a partir de la ecuación de Lane-Emden anisótropa para ecuación de estado politropa cuasilocal.

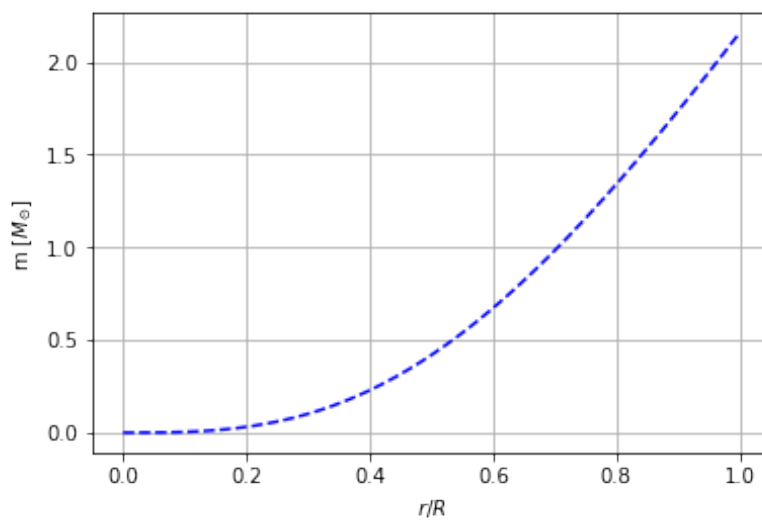


Figura 1.5: Perfil de masa para modelo de B. W. Stewart, con $K = 0,16$

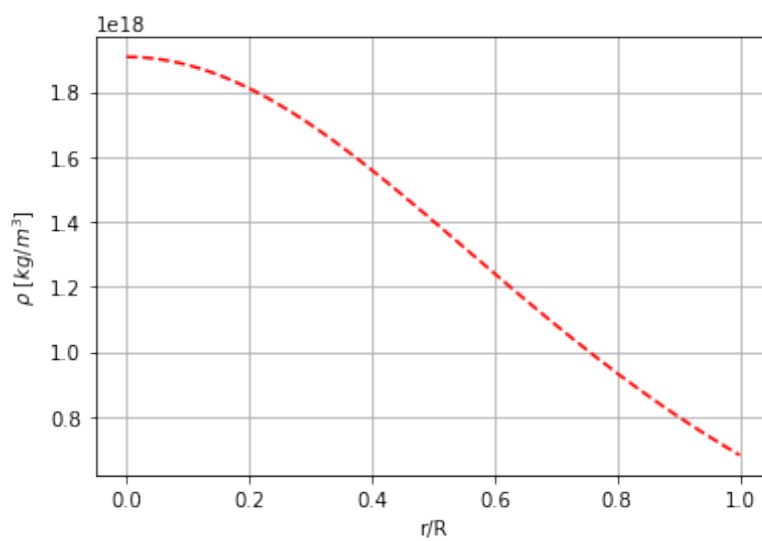


Figura 1.6: Perfil de densidad para modelo de B. W. Stewart, con $K = 0,16$

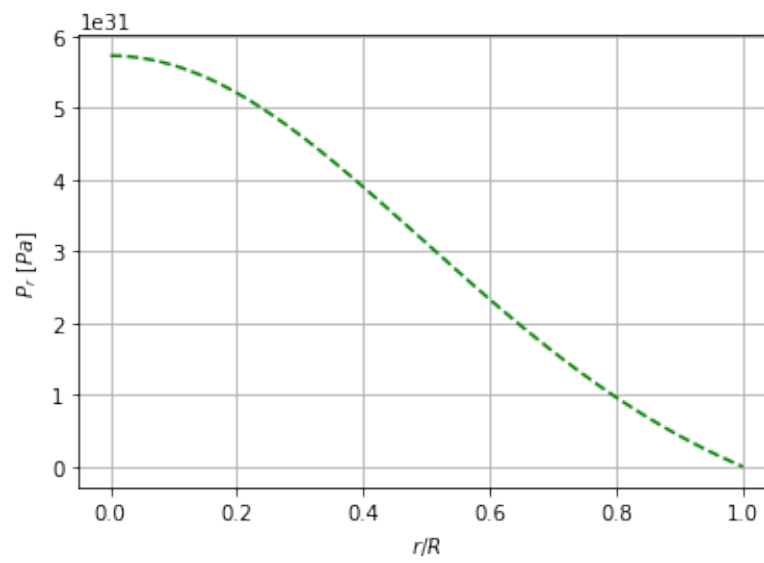


Figura 1.7: Perfil de presión para modelo de B. W. Stewart, con $K = 0,16$

Capítulo 2

Fracturas

El concepto de fracturas fue introducido por Herrera y colaboradores [3–6] para describir el comportamiento de configuraciones materiales autogravitantes anisótropas, justo después de partir del equilibrio, cuando la fuerza radial cambia su signo en algún valor de la coordenada radial dentro de la configuración.

Así, la ecuación de equilibrio hidrostático que describe esta configuración material anisótropa está dada por

$$\mathcal{R} = \frac{dP_r}{dr} + (\rho + P_r) \frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} - \frac{2(P_\perp - P_r)}{r} = 0, \quad (2.1)$$

donde el término $P_\perp - P_r = \Delta$ surge de la anisotropía en la configuración, y es conocido como presión anisótropa. La ecuación (2.1) también representa la distribución de fuerzas dentro del sistema.

El enfoque de fracturas desarrollado por González, Navarro y Núñez [2] propone un nuevo esquema para analizar la estabilidad de esferas autogravitantes al examinar las influencias de las fluctuaciones locales de la densidad en la estabilidad de configuraciones de materia.

Una perturbación en la densidad, $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho$, induce una perturbación de su gradiente,

$$\rho'(\rho + \delta\rho) \approx \rho'(\rho) + \delta\rho' = \rho'(\rho) + \frac{d\rho'}{d\rho} \delta\rho, \quad (2.2)$$

donde las variables primadas expresan derivadas respecto a la coordenada radial, y esta debe ser consistente con la expresión

$$\frac{d}{dr}[\rho + \delta\rho] = \rho'(r) + \delta\rho' = \rho'(r) + \frac{d}{dr} \delta\rho, \quad (2.3)$$

de tal manera que se pueda intercambiar la prima y la δ así

$$\delta\rho' = \frac{d\rho'}{d\rho} \delta\rho = \frac{d}{dr} \delta\rho. \quad (2.4)$$

Para tener un esquema de perturbación consistente, se debe considerar perturbaciones locales de la densidad, las cuales pueden ser descritas apropiadamente por cualquier

función de soporte compacto, $\delta\rho = \delta\rho(r)$, definida en un intervalo cerrado $\Delta\tilde{r} \ll R$, siendo R el radio total de la configuración.

Estas perturbaciones locales generan fluctuaciones en la masa, la presión radial, la presión tangencial y el gradiente de presión, las cuales pueden ser representadas por términos lineales en la fluctuación de la densidad como

$$P_r(\rho + \delta\rho) \approx P_r(\rho) + \delta P_r \approx P_r(\rho) + \frac{dP_r}{d\rho} \delta\rho, \quad (2.5)$$

$$P_\perp(\rho + \delta\rho) \approx P_\perp(\rho) + \delta P_\perp \approx P_\perp(\rho) + \frac{dP_\perp}{d\rho} \delta\rho, \quad (2.6)$$

$$P'_r(\rho + \delta\rho) \approx P'_r(\rho) + \delta P'_r \approx P'_r(\rho) + \frac{dP'_r}{d\rho} \delta\rho, \quad (2.7)$$

$$m(\rho + \delta\rho) \approx m(\rho) + \delta m \approx m(\rho) + \frac{dm}{d\rho} \delta\rho, \quad (2.8)$$

donde la última parte en cada ecuación representa la variable perturbada calculada por medio de una expansión en series de Taylor a primer orden.

Para establecer el efecto de las perturbaciones en la fuerza total, se expande (2.1) como

$$\mathcal{R} \approx \mathcal{R}_0(\rho, P_r, P_\perp, P'_r, m) + \delta\mathcal{R}, \quad (2.9)$$

donde

$$\delta\mathcal{R} = \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho} \delta\rho + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial m} \delta m + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P_r} \delta P_r + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P_\perp} \delta P_\perp + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P'_r} \delta P'_r, \quad (2.10)$$

y

$$\mathcal{R}_0(\rho, P_r, P_\perp, P'_r, m) = 0 \quad (2.11)$$

ya que inicialmente la configuración está en equilibrio.

Las fracturas serán identificadas cuando se presente un cambio de signo en la ecuación de equilibrio perturbada (2.10).

Capítulo 3

Esquemas de perturbación

3.1. Esquema de perturbación para ecuación de estado politropa cuasilocal

El esquema de perturbación para una configuración material anisótropa esféricamente simétrica modelada por las ecuaciones (1.9), (1.11), (1.16) y (1.17), en donde la presión tangencial (y por tanto la presión anisótropa Δ) no depende únicamente de la densidad de energía ρ , se determina al perturbar la ecuación de equilibrio hidrostático

$$\mathcal{R} = \frac{dP_r}{dr} + (\rho + P_r) \frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} - \frac{2\Delta}{r} = 0. \quad (3.1)$$

Entonces, siguiendo el esquema planteado en el capítulo anterior, se tiene que

$$\mathcal{R} \approx \mathcal{R}_0 + \delta\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \approx \delta\mathcal{R},$$

en donde

$$\delta\mathcal{R} = \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial m}\delta m + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P_r}\delta P_r + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\Delta}\delta\Delta + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P'_r}\delta P'_r \quad (3.2)$$

es la ecuación de equilibrio perturbada.

Calculando las derivadas parciales de \mathcal{R} respecto a cada variable física se obtiene

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho} = \frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial m} = \frac{(\rho + P_r)(1 + 8\pi r^2 P_r)}{(r - 2m)^2}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P_r} = \frac{m + 4\pi r^3(\rho + 2P_r)}{r(r - 2m)}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\Delta} = -\frac{2}{r}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P_r'} = 1. \quad (3.7)$$

Para completar el esquema de perturbación se debe hallar la perturbación de cada variable, esto es

$$\delta P_r = \frac{dP_r}{d\rho} \delta\rho = v_r^2 \delta\rho, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \delta\Delta &= \frac{\partial\Delta}{\partial\rho} \delta\rho + \frac{\partial\Delta}{\partial\mu} \delta\mu \\ &= \frac{\partial\Delta}{\partial\rho} \delta\rho + \frac{\partial\Delta}{\partial\mu} \frac{d\mu}{dm} \frac{dm}{d\rho} \delta\rho \\ &= \left(\frac{\partial\Delta}{\partial P_r} \frac{dP_r}{d\rho} + \frac{\partial\Delta}{\partial\mu} \frac{d\mu}{dm} \frac{dm}{d\rho} \right) \delta\rho, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \delta P_r' &= \frac{dP_r'}{d\rho} \delta\rho = \frac{d}{d\rho} \left[\frac{dP_r}{dr} \right] \delta\rho = \frac{d}{d\rho} \left[\frac{dP_r}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} \right] \delta\rho \\ &= \frac{d}{d\rho} [v_r^2 \rho'] \delta\rho = \frac{1}{\rho'} \frac{d}{dr} [v_r^2 \rho'] \delta\rho = \left[(v_r^2)' + v_r^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right] \delta\rho, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\delta m = \frac{dm}{d\rho} \delta\rho = \frac{dm}{dr} \left(\frac{dr}{d\rho} \right) \delta\rho = \frac{m'}{\rho'} \delta\rho = \frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'} \delta\rho, \quad (3.11)$$

siendo $\frac{dP_r}{d\rho} = v_r^2$ la velocidad radial del sonido al cuadrado.

Ahora, al reemplazar las ecuaciones (3.3) - (3.7) y (3.8) - (3.11) en (3.2) se tiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{R} &= \frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r-2m)} \delta\rho + \frac{(\rho + P_r)(1 + 8\pi r^2 P_r)}{(r-2m)^2} \frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'} \delta\rho + \left[\frac{m + 4\pi r^3 (\rho + 2P_r)}{r(r-2m)} \right] v_r^2 \delta\rho \\ &\quad - \frac{2}{r} \left(\frac{\partial\Delta}{\partial P_r} \frac{dP_r}{d\rho} + \frac{\partial\Delta}{\partial\mu} \frac{d\mu}{dm} \frac{dm}{d\rho} \right) \delta\rho + \left[(v_r^2)' + v_r^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right] \delta\rho. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Entonces, si $\Delta = CP_r(\rho)\mu$,

$$\delta\Delta = \left(\frac{\partial\Delta}{\partial P_r} \frac{dP_r}{d\rho} + \frac{\partial\Delta}{\partial\mu} \frac{d\mu}{dm} \frac{dm}{d\rho} \right) \delta\rho = \left(C\mu v_r^2 + \frac{8\pi CP_r r \rho}{\rho'} \right) \delta\rho, \quad (3.13)$$

y la ecuación de equilibrio perturbada es

$$\tilde{\mathcal{R}} = \tilde{\mathcal{R}}_1 + \tilde{\mathcal{R}}_2 + \tilde{\mathcal{R}}_3 + \tilde{\mathcal{R}}_4 + \tilde{\mathcal{R}}_5, \quad (3.14)$$

siendo

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}}_1 &= \frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} , \\
\tilde{\mathcal{R}}_2 &= \frac{(\rho + P_r)(1 + 8\pi r^2 P_r)}{(r - 2m)^2} \frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'} , \\
\tilde{\mathcal{R}}_3 &= \left[\frac{m + 4\pi r^3 (\rho + 2P_r)}{r(r - 2m)} \right] v_r^2 , \\
\tilde{\mathcal{R}}_4 &= -\frac{2}{r} \left(C\mu v_r^2 + \frac{8\pi C P_r r \rho}{\rho'} \right) , \text{ y} \\
\tilde{\mathcal{R}}_5 &= \left[(v_r^2)' + v_r^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right] .
\end{aligned}$$

Los términos $\tilde{\mathcal{R}}_1$ y $\tilde{\mathcal{R}}_3$ siempre será positivos puesto que dependen de la masa, la presión radial y la densidad. Por lo contrario, el término $\tilde{\mathcal{R}}_2$ siempre será menor que cero pues se sabe que el gradiente de la densidad es negativo ya que esta disminuye a medida que r aumenta. Los términos $\tilde{\mathcal{R}}_4$ y $\tilde{\mathcal{R}}_5$ pueden ser tanto positivo como negativo, dependiendo del valor de r dentro de la configuración. Este esquema difiere del encontrado en [2] en el término $\tilde{\mathcal{R}}_4$ donde es notoria la influencia de la ecuación de estado politropa no barótropa dada para la presión tangencial al ser esta función de una variable no local como lo es la compacidad. Entonces, cualquier cambio de signo en la ecuación de equilibrio perturbada será debido al dominio que tenga $\tilde{\mathcal{R}}_2$ sobre $\tilde{\mathcal{R}}_1$ y $\tilde{\mathcal{R}}_3$, y el comportamiento de $\tilde{\mathcal{R}}_4$ y $\tilde{\mathcal{R}}_5$ a lo largo de la distribución dependiendo de la ecuación de estado que se esté tratando.

Realizando el cambio de variables propuesto en (1.19) se puede adimensionalizar el sistema de ecuaciones y la ecuación de equilibrio perturbada.

Hallando (3.14) en término de las nuevas variables se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\mathcal{R}}_1}{A} &= \frac{\alpha(n+1)(\eta + \xi^3 K_1 \psi^{n+1})}{\xi(\xi - 2\alpha n \eta - 2\alpha \eta)} = \bar{\mathcal{R}}_1 \\
\frac{\tilde{\mathcal{R}}_2}{A} &= \frac{\psi^{n+1} \xi^2 \alpha(n+1)(1 + K_1 \psi) [1 + 2\xi^2 K_1 \alpha(n+1) \psi^{n+1}]}{n\psi'(\xi - 2\eta \alpha n - 2\eta \alpha)^2} = \bar{\mathcal{R}}_2 \\
\frac{\tilde{\mathcal{R}}_3}{A} &= \frac{\alpha(n+1)^2 K_1 \psi (\eta + \xi^3 \psi^n + 2K_1 \xi^3 \psi^{n+1})}{n\xi(\xi - 2\alpha n \eta - 2\alpha \eta)} = \bar{\mathcal{R}}_3 \\
\frac{\tilde{\mathcal{R}}_4}{A} &= -\frac{4C\eta \alpha(n+1)^2 K_1 \psi}{n\xi^2} - \frac{4C\alpha(n+1) K_1 \psi^{n+2}}{n\psi'} = \bar{\mathcal{R}}_4 \\
\frac{\tilde{\mathcal{R}}_5}{A} &= \frac{K_1(n+1) [n(\psi')^2 + \psi \psi'']}{n\psi'} = \bar{\mathcal{R}}_5 \\
\bar{\mathcal{R}} &= \bar{\mathcal{R}}_1 + \bar{\mathcal{R}}_2 + \bar{\mathcal{R}}_3 + \bar{\mathcal{R}}_4 + \bar{\mathcal{R}}_5 , \tag{3.15}
\end{aligned}$$

donde

$$\psi' = \frac{d\psi}{d\xi} , \quad \psi'' = \frac{d\psi'}{d\xi} .$$

3.2. Esquema de perturbación para ecuación de estado no local

La configuración de materia ahora es modelada por las ecuaciones

$$P_r = P_r(\rho; \mu) = \rho - \frac{\mu}{4\pi r^2} , \quad (3.16)$$

$$P' = P'(\rho, \rho', \mu) = \rho' - \frac{2\rho}{r} + \frac{3\mu}{4\pi r^3} , \quad (3.17)$$

$$P_\perp = \beta(r) (\rho + P_r) \left[\frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} \right] r + P_r , \quad (3.18)$$

donde (3.16) y (3.17) corresponden a las ecuaciones (1.27) y (1.28), respectivamente, escritas en función de ρ' , ρ y la compacidad μ .

La ecuación (3.18) puede ser escrita como

$$\frac{P_\perp - P_r}{r} = \beta(r) (\rho + P_r) \left[\frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} \right] ,$$

que en términos de μ queda

$$\frac{P_\perp - P_r}{r} = \beta(r) (\rho + P_r) \left[\frac{\mu + 8\pi r^2 P_r}{2r(1 - \mu)} \right] . \quad (3.19)$$

Al reemplazar esta última expresión en la ecuación de equilibrio hidrostático, en términos de ρ' , ρ y la compacidad μ , se obtiene

$$\mathcal{R} = P'_r + (\rho + P_r) \left[\frac{\mu + 8\pi r^2 P_r}{2r(1 - \mu)} \right] - 2\beta(r) (\rho + P_r) \left[\frac{\mu + 8\pi r^2 P_r}{2r(1 - \mu)} \right] .$$

Entonces la ecuación de equilibrio hidrostático es

$$\mathcal{R} = P'_r + (\rho + P_r) \left[\frac{\mu + 8\pi r^2 P_r}{2r(1 - \mu)} \right] [1 - 2\beta(r)] = \mathcal{R}(\rho, \mu, P_r, P'_r) . \quad (3.20)$$

Siendo consecuente con lo que se ha hecho en el apartado anterior, tenemos que la ecuación de equilibrio perturbada para la ecuación de estado no local en cuestión es

$$\delta\mathcal{R} = \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mu}\delta\mu + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P_r}\delta P_r + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P'_r}\delta P'_r , \quad (3.21)$$

donde

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho} = \frac{(\mu + 8\pi r^2 P_r) [1 - 2\beta(r)]}{2r(1 - \mu)} , \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mu} = \frac{(\rho + P_r)(1 + 8\pi r^2 P_r) [1 - 2\beta(r)]}{2r(1 - \mu)^2} , \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P_r} = \frac{[\mu + 8\pi r^2(\rho + 2P_r)] [1 - 2\beta(r)]}{2r(1 - \mu)} , \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P'_r} = 1, \quad (3.25)$$

y, además

$$\delta \mu = \frac{d\mu}{d\rho} \delta \rho = \frac{d\mu}{dm} \frac{dm}{d\rho} \delta \rho = \frac{8\pi r \rho}{\rho'} \delta \rho, \quad (3.26)$$

$$\delta P_r = \frac{\partial P_r}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial P_r}{\partial \mu} \delta \mu = \delta \rho - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{8\pi r \rho}{\rho'} \delta \rho = \left(1 - \frac{2\rho}{r\rho'}\right) \delta \rho, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \delta P'_r &= \frac{\partial P'_r}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial P'_r}{\partial \rho'} \delta \rho' + \frac{\partial P'_r}{\partial \mu} \delta \mu = -\frac{2}{r} \delta \rho + \delta \rho' + \frac{3}{4\pi r^3} \frac{8\pi r \rho}{\rho'} \delta \rho \\ &= -\frac{2}{r} \delta \rho + \frac{d\rho'}{d\rho} \delta \rho + \frac{6\rho}{r^2 \rho'} \delta \rho = \delta \rho \left(\frac{d\rho'}{d\rho} - \frac{2}{r} + \frac{6\rho}{r^2 \rho'} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Reemplazando (3.22) - (3.25) y (3.26) - (3.28) en (3.21) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{R} &= \frac{(\mu + 8\pi r^2 P_r) [1 - 2\beta(r)]}{2r(1 - \mu)} \delta \rho + \frac{(\rho + P_r)(1 + 8\pi r^2 P_r) [1 - 2\beta(r)]}{2r(1 - \mu)^2} \frac{8\pi r \rho}{\rho'} \delta \rho \\ &\quad + \frac{[\mu + 8\pi r^2(\rho + 2P_r)] [1 - 2\beta(r)]}{2r(1 - \mu)} \left(1 - \frac{2\rho}{r\rho'}\right) \delta \rho + \left(\frac{d\rho'}{d\rho} - \frac{2}{r} + \frac{6\rho}{r^2 \rho'}\right) \delta \rho. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Entonces, la ecuación de equilibrio perturbada para este caso es

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}} = \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \rho} &= \frac{(\mu + 8\pi r^2 P_r) [1 - 2\beta(r)]}{2r(1 - \mu)} + \frac{4\pi \rho(\rho + P_r)(1 + 8\pi r^2 P_r) [1 - 2\beta(r)]}{\rho'(1 - \mu)^2} \\ &\quad + \frac{[\mu + 8\pi r^2(\rho + 2P_r)] [1 - 2\beta(r)]}{2r(1 - \mu)} \left(1 - \frac{2\rho}{r\rho'}\right) + \left(\frac{d\rho'}{d\rho} - \frac{2}{r} + \frac{6\rho}{r^2 \rho'}\right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Donde la función $\beta(r)$, mostrada en la figura 3.1, es hallada por medio de

$$\beta(r) = \frac{dP_r}{dr} \left[\frac{r(1 - \mu)}{(\mu + 8\pi r^2 P_r)(\rho + P_r)} \right] + \frac{1}{2} \quad (3.31)$$

con el fin de asegurar que la ecuación de equilibrio hidrostático sin perturbar (3.20) sea cero.

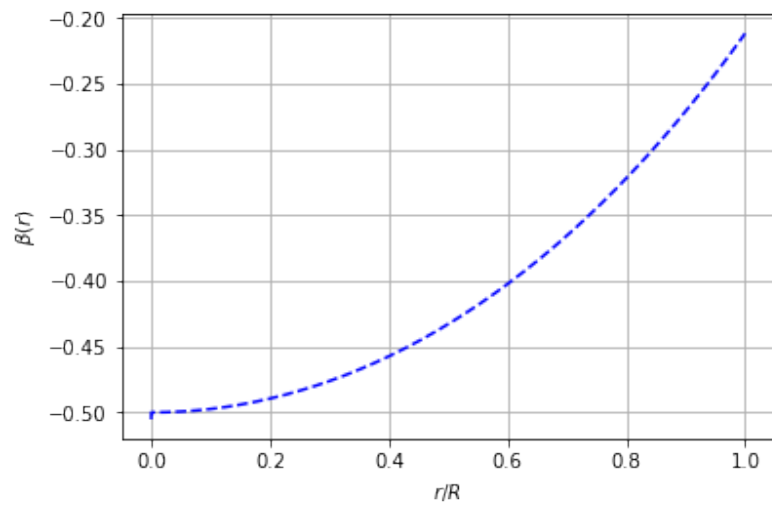


Figura 3.1: Función $\beta(r)$

Capítulo 4

Resultados

Los resultados obtenidos son mostrados en las figuras 4.1 y 4.2 para el esquema desarrollado en la sección 3.1 correspondiente a configuraciones materiales modeladas por ecuaciones de estado politropas cuasilocales.

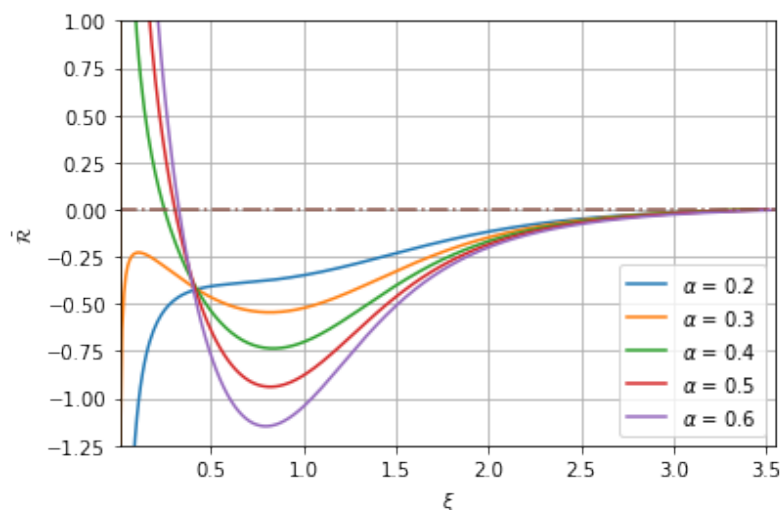


Figura 4.1: Ecuación de equilibrio perturbada para esquema con ecuación de estado politropa cuasilocal. $C = 0,25$

En la figura 4.1 se observa compresión (cambio de signo, de la distribución de fuerza en la configuración, de positivo a negativo) en configuraciones con $\alpha > 0,3$ y constante anisótropa $C = 0,25$. Mientras que en la figura 4.2, donde la constante anisótropa es el doble que la anterior, la compresión es encontrada para todos los valores del parámetro α . Las configuraciones muestran compresión en el núcleo del objeto, en donde las presiones y velocidades del sonido son altas para el modelo; mientras que cerca de la superficie la distribución de la fuerza llega a ser casi nula o cero.

El resultado obtenido, para el esquema desarrollado en la sección 3.2, es mostrado en la figura 4.3 correspondiente a configuraciones materiales modeladas por ecuaciones de estado

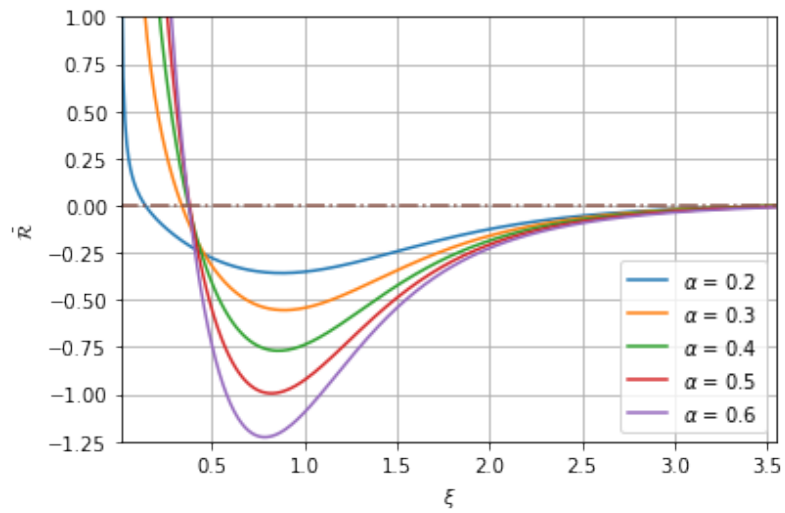


Figura 4.2: Ecuación de equilibrio perturbada para esquema con ecuación de estado politropa cuasilocal. $C = 0,5$

no local. En esta no se evidencia cambio de signo en la ecuación de equilibrio perturbada, lo que indica que no hay fractura ni compresión para esta configuración material. La distribución de fuerza dentro de la configuración se acerca al equilibrio a medida que se aproxima a la superficie.

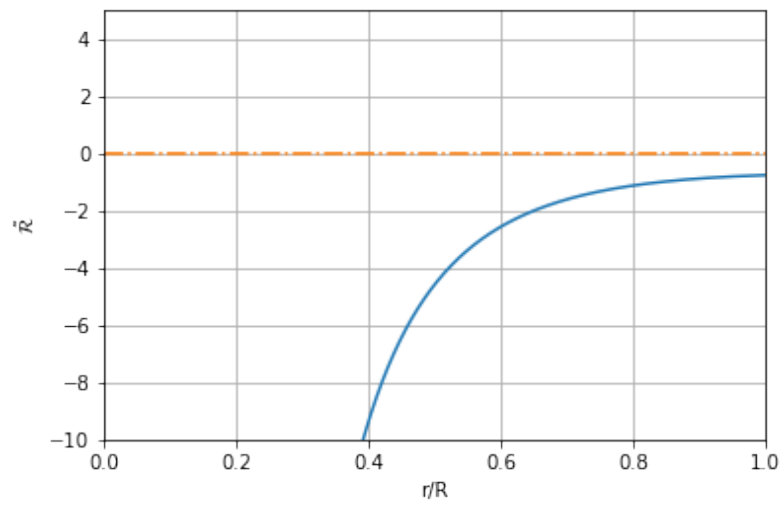


Figura 4.3: Ecuación de equilibrio perturbada para esquema con ecuación de estado no local.

Capítulo 5

Conclusiones

Los efectos de las inestabilidades en objetos autogravitantes son clave en la Astrofísica y han sido estudiados por décadas al analizar el comportamiento de las ecuaciones de estado bajo perturbaciones de sus variables físicas.

En este trabajo se determinó la estabilidad de configuraciones materiales anisótropas esféricamente simétricas bajo perturbaciones locales no constantes en la densidad, descritas apropiadamente por una función de soporte compacto, al evaluar la ecuación de equilibrio hidrostático perturbada justo después de salir del equilibrio. Se mostró que este tipo de perturbaciones conlleva a fluctuaciones de las variables físicas y sus gradientes, dando como resultado un esquema complementario a los desarrollados anteriormente bajo el concepto de fracturas [3–7].

Las ecuaciones de estado, que detallan el estado de la materia dentro de un objeto compacto, dependerán en el mejor de los casos de la presión, la temperatura, los potenciales electroquímicos y de las variables extensivas que componen el sistema [1]. Con base en esto, se extendió el esquema de perturbación desarrollado en [2] a ecuaciones de estado no barótropas con el propósito de obtener sistemas termodinámicamente más consistentes.

En el primer modelo analizado se dispuso de una presión radial politropa barótropa, y una presión tangencial politropa cuasilocal [9] la cual es función de la presión radial (por tanto de la densidad) y la compacidad (no barótropa). Para este caso, en el que no se cuenta con un perfil de densidad dado, se integró el sistema de ecuaciones Lane-Emden dado por las ecuaciones (1.20) - (1.23). El resultado obtenido para este modelo es que presenta compresión para distintos valores de α (con índice politropo $n = 2$), siendo esta la relación entre la presión radial y la densidad de energía en el origen. Se encontró que a medida que α aumenta es inestable el modelo, presentando compresión cerca del origen, donde la densidad de energía, al ser muy alta, tiene un rol importante. También, al aumentar la constante de anisotropía C se obtuvo que los modelos que eran estables se convirtieran en inestables. Este resultado es complementario al obtenido en [9], en donde se estudió la estabilidad de objetos compactos modelados por las mismas ecuaciones de estado utilizadas en este trabajo, mostrando que este tipo de configuraciones presenta inestabilidad bajo el método estándar $M(R)$, modos normales de pulsaciones radiales y bajo fluctuaciones locales no constantes en la densidad consideradas en este trabajo.

En el segundo modelo se tomó una ecuación de estado no local para la presión radial en la que esta es función de la densidad y la compacidad, ecuación (3.16); y la presión

anisótropa Δ/r proporcional al término $(\rho + P)\nu'/2$ en la ecuación de TOV. Además se proporcionó un perfil de densidad [21] el cual modela un objeto compacto típico con $R = 10[km]$, $M = 2,16[M_{\odot}]$ y densidad central $\rho_0 = 1,91 \times 10^{18}[kg/m^3]$. Es claro que, al tener el perfil de densidad, todas las variables en la ecuación de TOV pueden ser obtenidas a través de las ecuaciones planteadas para el modelo. Para este caso se encontró que es estable bajo perturbaciones no constantes y locales en la densidad al no presentar fractura ni compresión dentro de la configuración material.

Referencias bibliográficas

- [1] H. B. Callen, *Thermodynamics*. Wiley and Sons, New York, 1960.
- [2] G. A. Gonzalez, A. Navarro, and L. A. Nunez, “Cracking isotropic and anisotropic relativistic spheres,” *Canadian Journal of Physics*, vol. 95, no. 11, pp. 1089–1095, 2017.
- [3] L. Herrera, “Cracking of self-gravitating compact objects,” *Physics Letters A*, vol. 165, no. 3, pp. 206–210, 1992.
- [4] A. Di Prisco, E. Fuenmayor, L. Herrera, and V. Varela, “Tidal forces and fragmentation of self-gravitating compact objects,” *Physics Letters A*, vol. 195, no. 1, pp. 23–26, 1994.
- [5] A. Di Prisco, L. Herrera, and V. Varela, “Cracking of homogeneous self-gravitating compact objects induced by fluctuations of local anisotropy,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 29, no. 10, pp. 1239–1256, 1997.
- [6] L. Herrera, E. Fuenmayor, and P. Leon, “Cracking of general relativistic anisotropic polytropes,” *Physical Review D*, vol. 93, no. 2, p. 024047, 2016.
- [7] H. Abreu, H. Hernandez, and L. Núñez, “Sound speeds, cracking and the stability of self-gravitating anisotropic compact objects,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 24, no. 18, p. 4631, 2007.
- [8] G. A. González, A. Navarro, and L. A. Núñez, “Cracking of anisotropic spheres in general relativity revisited,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 600, p. 012014, IOP Publishing, 2015.
- [9] D. Horvat, S. Ilijić, and A. Marunović, “Radial pulsations and stability of anisotropic stars with a quasi-local equation of state,” *Classical and quantum gravity*, vol. 28, no. 2, p. 025009, 2010.
- [10] H. Hernández and L. A. Núñez, “Nonlocal equation of state in anisotropic static fluid spheres in general relativity,” *Canadian journal of physics*, vol. 82, no. 1, pp. 29–51, 2004.
- [11] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, “On massive neutron cores,” *Physical Review*, vol. 55, no. 4, p. 374, 1939.

- [12] J. Droste, “The field of a single centre in einstein’s theory of gravitation, and the motion of a particle in that field,” *Ned. Acad. Wet., SA*, vol. 19, p. 197, 1917.
- [13] S. Chandrasekhar, *An introduction to the study of stellar structure*, vol. 2. Courier Corporation, 1957.
- [14] R. F. Tooper, “General relativistic polytropic fluid spheres,” *The Astrophysical Journal*, vol. 140, p. 434, 1964.
- [15] L. Herrera and W. Barreto, “General relativistic polytropes for anisotropic matter: The general formalism and applications,” *Physical Review D*, vol. 88, no. 8, p. 084022, 2013.
- [16] L. Herrera, A. Di Prisco, W. Barreto, and J. Ospino, “Conformally flat polytropes for anisotropic matter,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 46, no. 12, p. 1827, 2014.
- [17] S. Thirukkanesh and F. Ragel, “Exact anisotropic sphere with polytropic equation of state,” *Pramana*, vol. 78, no. 5, pp. 687–696, 2012.
- [18] A. DeBenedictis, D. Horvat, S. Ilić, S. Kloster, and K. Viswanathan, “Gravastar solutions with continuous pressures and equation of state,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 23, no. 7, p. 2303, 2006.
- [19] C. Cattoen, T. Faber, and M. Visser, “Gravastars must have anisotropic pressures,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 22, no. 20, p. 4189, 2005.
- [20] M. Cosenza, L. Herrera, M. Esculpi, and L. Witten, “Some models of anisotropic spheres in general relativity,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 22, no. 1, pp. 118–125, 1981.
- [21] B. Stewart, “Conformally flat, anisotropic spheres in general relativity,” *Journal of Physics A Mathematical General*, vol. 15, pp. 2419–2427, 1982.

Apéndice A

Ecuación de Lane-Emden anisótropa

La ecuación de Lane-Emden es una forma adimensional de la ecuación de Poisson utilizada para modelar el campo gravitatorio de una configuración material con simetría esférica constituida por un fluido politropo; para esto, se introduce la nueva variable

$$P_r = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \equiv P_{r0}\psi^{n+1}, \quad \rho = \rho_0\psi^n,$$

con condiciones de frontera, a partir de las condiciones para la presión radial, dadas por

$$\psi(0) = 1, \quad \psi(R) = 0.$$

Entonces, la ecuación de equilibrio hidrostático

$$P_r' = -(\rho + P_r)\frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r}(P_\perp - P_r) \tag{A.1}$$

puede ser escrita como

$$P_{r0}(n+1)\psi^n \frac{d\psi}{dr} = -\rho_0\psi^n(1+\alpha\psi)\frac{\nu'}{2} + \frac{2\Delta}{r} \tag{A.2}$$

siendo Δ la presión anisótropa y $\alpha = \frac{P_{r0}}{\rho_0}$.

Despejando ν' de la ecuación anterior se tiene

$$\frac{d\nu}{dr} = -\frac{2\alpha(n+1)}{1+\alpha\psi} \frac{d\psi}{dr} + \frac{4\Delta}{\rho_0 r \psi^n (1+\alpha\psi)}. \tag{A.3}$$

Se define una función auxiliar

$$u(r) = \frac{m(r)}{M},$$

donde la función $m(r)$ puede ser despejada de (1.7) así

$$m(r) = \left(1 - e^{-\lambda}\right) \frac{r}{2}, \tag{A.4}$$

quedando

$$u(r) = \frac{r}{2M} \left(1 - e^{-\lambda}\right), \quad (\text{A.5})$$

siendo M la masa total de la configuración, con condiciones de frontera

$$u(0) = 0, \quad u(R) = 1,$$

y que satisfice

$$Mu' = 4\pi\rho r^2, \quad (\text{A.6})$$

acorde con la ecuación (1.9).

Despejando $e^{-\lambda}$ de la ecuación (A.5) se tiene

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M}{r}u. \quad (\text{A.7})$$

La ecuación de campo de Einstein (1.5) puede ser escrita como

$$\frac{e^{-\lambda}\nu'r}{2} + \frac{e^{-\lambda} - 1}{2} - 4\pi r^2 P_r = 0. \quad (\text{A.8})$$

Reemplazando (A.7) y (A.3) en la ecuación anterior, y utilizando (A.6) se tiene

$$\frac{\alpha(n+1)\psi'r}{1+\alpha\psi} \left(1 - \frac{2M}{r}u\right) + \frac{2\Delta}{\rho_0\psi^n(1+\alpha\psi)} \left(1 - \frac{2M}{r}u\right) + \frac{M}{r}u + M\alpha\psi u' = 0. \quad (\text{A.9})$$

Realizando el cambio de variables dado por

$$r = \frac{\xi}{A}, \quad \eta = \frac{mA^3}{4\pi\rho_0}, \quad A^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\alpha(n+1)},$$

donde ξ es una variable radial adimensional y η es proporcional a la función masa $m(r)$, se tiene que (A.9) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha(n+1)\xi}{1+\alpha\psi} \frac{d\psi}{d\xi} \left[1 - \frac{2\alpha(n+1)\eta}{\xi}\right] + \frac{2\Delta\psi^{-n}}{\rho_0(1+\alpha\psi)} \left[1 - \frac{2\alpha(n+1)\eta}{\xi}\right] \\ & + \frac{\alpha(n+1)\eta}{\xi} + \alpha\psi^{n+1}\alpha(n+1)\xi^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{\xi}{\alpha(n+1)}$ se tiene la ecuación de Lane-Emden anisótropa

$$\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \left[\frac{1 - 2\alpha(n+1)\eta/\xi}{1 + \alpha\psi} \right] + \frac{2\Delta\psi^{-n}\xi}{P_{r_0}(n+1)} \left[\frac{1 - 2\alpha(n+1)\eta/\xi}{1 + \alpha\psi} \right] + \eta + \alpha\xi^3\psi^{n+1} = 0, \quad (\text{A.11})$$

junto con

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \xi^2 \psi^n \quad (\text{A.12})$$

obtenida a partir de la ecuación (A.6), siendo

$$\frac{dm}{dr} \equiv \frac{d}{d\left(\frac{\xi}{A}\right)} \left(\frac{4\pi\rho_0\eta}{A^3} \right) = A \frac{4\pi\rho_0}{A^3} \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4\pi\rho_0}{A^2} \frac{d\eta}{d\xi}.$$

Si se tiene que

$$\Delta = CP_{r\mu},$$

entonces

$$\Delta \equiv C (P_{r_0} \psi^{n+1}) \left(\frac{8\pi\rho_0\eta A}{\xi A^3} \right) = K_A \frac{\psi^{n+1}\eta}{\xi}$$

donde

$$K_A = 2C\rho\alpha^2(n+1)$$

A.1. Ecuación de equilibrio perturbada adimensional

Ahora se halla la ecuación de equilibrio perturbada (3.14) en término de las nuevas variables:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_1 &= \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \equiv \frac{\frac{4\pi\rho_0\eta}{A^3} + \frac{4\pi\xi^3(K_1\rho_0\psi^{n+1})}{A^3}}{\frac{\xi}{A} \left(\frac{\xi}{A} - \frac{2(4\pi\rho_0\eta)}{A^3} \right)} = \frac{\left(\frac{4\pi\rho_0\eta}{A^2} + \frac{4\pi\xi^3 K_1\rho_0\psi^{n+1}}{A^2} \right) A}{\xi \left(\xi - \frac{8\pi\rho_0\eta}{A^2} \right)} \\ &\Rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{R}}_1}{A} = \frac{\frac{4\pi\rho_0\eta\alpha(n+1)}{4\pi\rho_0} + \frac{4\pi\xi^3 K_1\rho_0\psi^{n+1}}{4\pi\rho_0}}{\xi \left(\xi - \frac{2(4\pi\rho_0\eta)}{4\pi\rho_0} \right)} = \frac{\alpha(n+1)\eta + \xi^3 K_1\psi^{n+1}\alpha(n+1)}{\xi [\xi - 2\alpha(n+1)\eta]} \\ &\Rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{R}}_1}{A} = \frac{\alpha(n+1)(\eta + \xi^3 K_1\psi^{n+1})}{\xi(\xi - 2\alpha n\eta - 2\alpha\eta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}}_2 &= \frac{(\rho + P)(1 + 8\pi r^2 P)}{(r - 2m)^2} \frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'} \\
&\equiv \frac{(\rho_0 \psi^n + K_1 \rho_0 \psi^{n+1}) \left(1 + \frac{8\pi \xi^2 K_1 \rho_0 \psi^{n+1}}{A^2}\right) \frac{4\pi \xi^2 \rho_0 \psi^n}{A^2}}{\left(\frac{\xi}{A} - \frac{8\pi \rho_0 \eta}{A^3}\right)^2} \frac{A \rho_0 n \psi^{n-1} \psi'}{A} \\
&\Rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{R}}_2}{A} = \frac{A (\rho_0 \psi^n + K_1 \rho_0 \psi^{n+1}) \left(1 + \frac{8\pi \xi^2 K_1 \rho_0 \psi^{n+1} \alpha(n+1)}{4\pi \rho_0}\right) \frac{4\pi \xi^2 \rho_0 \psi^n \alpha(n+1)}{4\pi \rho_0}}{\left(\xi - \frac{8\pi \rho_0 \eta \alpha(n+1)}{4\pi \rho_0}\right)^2} \frac{A \rho_0 n \psi^{n-1} \psi'}{A} \\
&\Rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{R}}_2}{A} = \frac{\psi^n (1 + K_1 \psi) [1 + 2\xi^2 K_1 \alpha(n+1) \psi^{n+1}] \xi^2 \psi^n \alpha(n+1)}{(\xi - 2\eta \alpha n - 2\eta \alpha)^2} \frac{n \psi^{n-1} \psi'}{n \psi^{n-1} \psi'} \\
&\Rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{R}}_2}{A} = \frac{\psi^{n+1} \xi^2 \alpha(n+1) (1 + K_1 \psi) [1 + 2\xi^2 K_1 \alpha(n+1) \psi^{n+1}]}{n \psi' (\xi - 2\eta \alpha n - 2\eta \alpha)^2}
\end{aligned}$$

$$\text{donde } \rho' = A \frac{d(\rho_0 \psi^n)}{d\xi} = A \rho_0 n \psi^{n-1} \psi'$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}}_3 &= \left[\frac{m + 4\pi r^3 (\rho + 2P)}{r(r - 2m)} \right] v^2 \equiv \frac{\frac{4\pi \rho_0 \eta}{A^3} + \frac{4\pi \xi^3}{A^3} (\rho_0 \psi^n + 2K_1 \rho_0 \psi^{n+1})}{\frac{\xi}{A} \left(\frac{\xi}{A} - \frac{2(4)\pi \rho_0 \eta}{A^3}\right)} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) K_1 \psi \right] \\
&\Rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{R}}_3}{A} = \frac{\frac{4\pi \rho_0 \eta \alpha(n+1)}{4\pi \rho_0} + \frac{4\pi \xi^3 \alpha(n+1)}{4\pi \rho_0} (\rho_0 \psi^n + 2K_1 \rho_0 \psi^{n+1})}{\xi (\xi - 2\alpha n \eta - 2\alpha \eta)} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right) K_1 \psi \right] \\
&\Rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{R}}_3}{A} = \frac{\eta \alpha(n+1) + \xi^3 \alpha(n+1) (\psi^n + 2K_1 \psi^{n+1})}{\xi (\xi - 2\alpha n \eta - 2\alpha \eta)} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right) K_1 \psi \right] \\
&\Rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{R}}_3}{A} = \frac{\alpha(n+1) (\eta + \xi^3 \psi^n + 2K_1 \xi^3 \psi^{n+1})}{\xi (\xi - 2\alpha n \eta - 2\alpha \eta)} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right) K_1 \psi \right] \\
&\Rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{R}}_3}{A} = \frac{\alpha(n+1)^2 K_1 \psi (\eta + \xi^3 \psi^n + 2K_1 \xi^3 \psi^{n+1})}{n \xi (\xi - 2\alpha n \eta - 2\alpha \eta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}}_4 &= \frac{2}{r} \left(\frac{2Cm v^2}{r} + \frac{8\pi C P r \rho}{\rho'} \right) \equiv \frac{2A}{\xi} \left(\frac{2C \frac{4\pi \rho_0 \eta}{A^3} \left(\frac{n+1}{n}\right) K_1 \psi}{\frac{\xi}{A}} + \frac{8\pi C \frac{\xi}{A} \rho_0 \psi^n K_1 \rho_0 \psi^{n+1}}{A \rho_0 n \psi^{n-1} \psi'} \right) \\
&\Rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{R}}_4}{A} = \frac{4C \frac{4\pi \rho_0 \eta \alpha(n+1)}{4\pi \rho_0} \left(\frac{n+1}{n}\right) K_1 \psi}{\xi^2} + \frac{16\pi C \xi \rho_0 \psi^n K_1 \rho_0 \psi^{n+1}}{A^2 \xi \rho_0 n \psi^{n-1} \psi'} \\
&\Rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{R}}_4}{A} = \frac{4C \eta \alpha(n+1)^2 K_1 \psi}{n \xi^2} + \frac{16\pi C \alpha(n+1) K_1 \rho_0 \psi^{n+2}}{4\pi \rho_0 n \psi'} \\
&\Rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{R}}_4}{A} = \frac{4C \eta \alpha(n+1)^2 K_1 \psi}{n \xi^2} + \frac{4C \alpha(n+1) K_1 \psi^{n+2}}{n \psi'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}_5 &= \left[(v^2)' + v^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right] = \frac{P''}{\rho'} \equiv \frac{A^2 K_1 \rho_0 (n+1) \psi^{n-1} [n(\psi')^2 + \psi \psi'']}{A \rho_0 n \psi^{n-1} \psi'} \\ \Rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{R}}_5}{A} &= \frac{K_1 (n+1) [n(\psi')^2 + \psi \psi'']}{n \psi'}\end{aligned}$$

Apéndice B

Código en Python para ecuación de Lane-Emden

A continuación se muestra el código en Python utilizado para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones (1.20) - (1.23)

```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

def funciones(y,xi, alpha, n, C):
    psi_ , v_ , psi1_ , v1_ = y
    dydxi = [(v_ + alpha * xi**(3) * psi_**(n+1))*(1 + alpha * psi_) /
              xi / (2 * (n+1) * alpha * v_ - xi ) - (4 * C * alpha * (n+1) *
              psi_ * v_ / n / xi**(2))
              ,xi**(2) * psi_**(n)
              ,((v1_ + 3 * alpha * xi**(2) * psi_**(n+1) + alpha * xi**(3)
              * (n+1) * psi_**(n) * psi1_) * (alpha * psi_ + 1) / xi
              / (2 * (n+1) * alpha * v_ - xi)) + (alpha * psi1_ * (v_
              + alpha * xi**(3) * psi_**(n+1)) / xi / (2 * (n+1) *
              alpha * v_ - xi)) - ((1 + alpha * psi_) * (v_ + alpha *
              xi**(3) * psi_**(n+1)) / xi**(2) / (2 * (n+1) * alpha *
              v_ - xi) ) - ((1 + alpha * psi_) * (v_ + alpha * xi**(3)
              * psi_**(n+1)) * (2 * (n+1) * alpha * v1_ - 1) / xi /
              ((2 * (n+1) * alpha * v_ - xi)**(2))) - (4 * C * alpha *
              (n+1) * psi1_ * v_ / n / xi**(2)) - (4 * C * alpha * (n
              +1) * psi_ * v1_ / n / xi**(2)) + (8 * C * alpha * (n+1)
              * psi_ * v_ / n / xi**(3))
              ,2 * xi * psi_**(n) + xi**(2) * n * psi_**(n-1) * psi1_]
    return dydxi

C = 0.25
n = 2.0
xi0 = 10**(-5)
```

```

xifinal = 1000
Numxi = math.floor((xifinal-xi0)*100)

Alpha0 = 0.2
Alphafinal = 0.6
NumAlpha = 6
Lista_alpha = np.linspace(Alpha0, Alphafinal, NumAlpha)
ListaModelos = []

for i in range(len(Lista_alpha)) :
    ListaModelos.append([])

for i in range(len(Lista_alpha)) :
    alpha = Lista_alpha[i]

    Psi0 = 1.0
    Vv0 = 0.0
    Psi10 = (Vv0 + alpha * xi0**(3) * Psi0**(n+1))*(1 + alpha * Psi0) /
            xi0 / (2 * (n+1) * alpha * Vv0 - xi0) - (4 * C * alpha * (n
            +1) * Psi0 * Vv0 / n / xi0**(2))
    Vv10 = xi0**(2) * Psi0**(n)

    y0 = [Psi0, Vv0, Psi10, Vv10]

    xi = np.linspace(xi0, xifinal, Numxi)

    from scipy.integrate import odeint

    soluciones = odeint(funciones, y0, xi, args=(alpha, n, C))

    Psi = soluciones[:,0]
    Vv = soluciones[:,1]
    Psi1 = soluciones[:,2]
    Vv1 = soluciones[:,3]

    DondePsiNeg = np.where(Psi <0)

    if len(DondePsiNeg[0]) == 0 :
        print ("insuficiente intervalo de integracion xi por favor
        aumentelo")
    else :
        IndiceBorde = np.min(DondePsiNeg)-1
        xi = xi[:IndiceBorde]
        Psi = Psi[:IndiceBorde]
        Vv = Vv[:IndiceBorde]
        Psi1 = Psi1[:IndiceBorde]
        Vv1 = Vv1[:IndiceBorde]

```

$$\begin{aligned} \text{Psi11} = & ((\text{Vv1} + 3 * \alpha * \text{xi}^{**}(2) * \text{Psi}^{**}(\text{n}+1) + \alpha * \text{xi}^{**}(3) \\ & * (\text{n}+1) * \text{Psi}^{**}(\text{n}) * \text{Psi1}) * (\alpha * \text{Psi} + 1) / \text{xi} / (2 * (\text{n} \\ & +1) * \alpha * \text{Vv} - \text{xi})) + (\alpha * \text{Psi1} * (\text{Vv} + \alpha * \text{xi}^{**}(3) \\ & * \text{Psi}^{**}(\text{n}+1)) / \text{xi} / (2 * (\text{n}+1) * \alpha * \text{Vv} - \text{xi})) - ((1 + \\ & \alpha * \text{Psi}) * (\text{Vv} + \alpha * \text{xi}^{**}(3) * \text{Psi}^{**}(\text{n}+1)) / \text{xi}^{**}(2) / \\ & (2 * (\text{n}+1) * \alpha * \text{Vv} - \text{xi})) - ((1 + \alpha * \text{Psi}) * (\text{Vv} + \\ & \alpha * \text{xi}^{**}(3) * \text{Psi}^{**}(\text{n}+1)) * (2 * (\text{n}+1) * \alpha * \text{Vv1} - 1) / \\ & \text{xi} / ((2 * (\text{n}+1) * \alpha * \text{Vv} - \text{xi})^{**}(2))) - (4 * \text{C} * \alpha * \\ & (\text{n}+1) * \text{Psi1} * \text{Vv} / \text{n} / \text{xi}^{**}(2)) - (4 * \text{C} * \alpha * (\text{n}+1) * \text{Psi} \\ & * \text{Vv1} / \text{n} / \text{xi}^{**}(2)) + (8 * \text{C} * \alpha * (\text{n}+1) * \text{Psi} * \text{Vv} / \text{n} / \\ & \text{xi}^{**}(3)) \end{aligned}$$

$$\text{V2r} = \alpha * (1 + 1/\text{n}) * \text{Psi}$$

$$\begin{aligned} \text{V2t} = & \alpha * (1 + 1/\text{n}) * \text{Psi} + (2 * \text{C} * \text{Vv} * \alpha * (\text{n} + 1)^{**}(2) * \\ & \alpha * \text{Psi} / \text{n} / \text{xi}) + (2 * \text{C} * \alpha * (\text{n} + 1) * \alpha * \text{Psi} \\ & ** (\text{n} + 2) * \text{xi} / \text{n} / \text{Psi1}) \end{aligned}$$

$$\text{DondeV2r1} = \text{np.where}(\text{V2r} < 0)$$

$$\text{DondeV2r2} = \text{np.where}(\text{V2r} > 1)$$

$$\text{DondeV2t1} = \text{np.where}(\text{V2t} < 0)$$

$$\text{DondeV2t2} = \text{np.where}(\text{V2t} > 1)$$

```
if (len(DondeV2r1[0]) != 0) or (len(DondeV2r2[0]) != 0) or (len(
    DondeV2t1[0]) != 0) or (len(DondeV2t2[0]) != 0) : #or (len(
    DondeV2dif[0]) != 0) or (len(DondeV2dif[0]) != 0) :
    print ("Velocidad del sonido invalida en el intervalo de
           integracion V2r < 0 o V2r >= 1")
    break
```

```
else :
```

$$\text{RadioMax} = \text{xi}[\text{IndiceBorde} - 1] * \text{math.sqrt}(\alpha * (\text{n} + 1))$$

$$\text{MasaMax} = \text{Vv}[\text{IndiceBorde} - 1] * (\text{math.sqrt}(\alpha * (\text{n} + 1)))^{**}3$$

$$\begin{aligned} \text{deltaR1} = & (\text{n}+1) * \alpha * (\text{Vv} + \text{xi}^{**}(3) * \alpha * \text{Psi}^{**}(\text{n}+1)) / \text{xi} \\ & / (\text{xi} - 2 * \alpha * \text{n} * \text{Vv} - 2 * \alpha * \text{Vv}) \\ \text{deltaR2} = & \text{Psi}^{**}(\text{n}+1) * \text{xi}^{**}(2) * \alpha * (\text{n}+1) * (1 + \alpha * \text{Psi}) \\ & * (1 + 2 * \text{xi}^{**}(2) * \alpha * \alpha * (\text{n}+1) * \text{Psi}^{**}(\text{n}+1)) / \text{n} / \\ & \text{Psi1} / ((\text{xi} - 2 * \text{Vv} * \alpha * \text{n} - 2 * \text{Vv} * \alpha)^{**}(2)) \\ \text{deltaR3} = & \alpha * (\text{n}+1)^{**}(2) * \alpha * \text{Psi} * (\text{Vv} + \text{xi}^{**}(3) * \text{Psi}^{**}(\text{n} \\ & + 2 * \alpha * \text{xi}^{**}(3) * \text{Psi}^{**}(\text{n}+1)) / \text{n} / \text{xi} / (\text{xi} - 2 * \\ & \alpha * \text{n} * \text{Vv} - 2 * \alpha * \text{Vv}) \\ \text{deltaR4} = & (4 * \text{C} * \text{Vv} * \alpha * (\text{n}+1)^{**}(2) * \alpha * \text{Psi} / \text{n} / \text{xi} \\ & ** (2)) + (4 * \text{C} * \alpha * (\text{n}+1) * \alpha * \text{Psi}^{**}(\text{n}+2) / \text{n} / \text{Psi1} \\ &) \end{aligned}$$

```

deltaR5 = alpha * (n+1) * (n * Psi1**(2) + Psi * Psi11) / n / Psi1

deltaAniPoliNoBar = deltaR1 + deltaR2 + deltaR3 + deltaR5 - deltaR4

if any(np.diff(np.sign(deltaAniPoliNoBar)) != 0) :
    ListaModelos[i].append([n, alpha, RadioMax, MasaMax, xi, Psi,
        deltaAniPoliNoBar, Vv, Psi1, 1])
else :
    ListaModelos[i].append([n, alpha, RadioMax, MasaMax, xi, Psi,
        deltaAniPoliNoBar, Vv, Psi1, 0])

plt.plot(ListaModelos[0][0][4], ListaModelos[0][0][6], ListaModelos
    [1][0][4], ListaModelos[1][0][6], ListaModelos[2][0][4], ListaModelos
    [2][0][6], ListaModelos[3][0][4], ListaModelos[3][0][6], ListaModelos
    [4][0][4], ListaModelos[4][0][6])

plt.legend((r'$\alpha$ = 0.2', r'$\alpha$ = 0.3', r'$\alpha$ = 0.4', r'$\alpha$
    = 0.5', r'$\alpha$ = 0.6'), loc=4)
plt.title(r' ')
plt.plot(ListaModelos[i][0][4], np.zeros(len(ListaModelos[i][0][4])),
    '-.')
plt.xlabel(r'$\xi$ ')
plt.ylabel(r'$\bar{\mathcal{R}}$ ')
plt.axis([0.01, 3.55, -1.25, 1.0])
plt.grid()
plt.show()

```