

**SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO-LINEALES MEDIANTE LA  
TÉCNICA DE OPTIMIZACIÓN GLOBAL POR ANÁLISIS DE INTERVALOS**

**LUIS ANTONIO GÓMEZ ARDILA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE  
TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA**

**2012**

**SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO-LINEALES MEDIANTE LA  
TÉCNICA DE OPTIMIZACIÓN GLOBAL POR ANÁLISIS DE INTERVALOS**

**LUIS ANTONIO GÓMEZ ARDILA**

**Trabajo de Grado para optar al título de  
INGENIERO ELECTRÓNICO**

**Director**

**PhD. CARLOS RODRIGO CORREA CELY**

**Co-director**

**Mg. EDILBERTO JOSÉ REYES GONZÁLEZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE  
TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA**

**2012**

## **AGRADECIMIENTOS**

A los profesores PhD. Rodrigo Correa Cely y Edilberto Reyes González, por toda la colaboración que me brindaron para poder realizar mi proyecto de grado.

Al grupo de investigación CEMOS de la Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones de la Universidad Industrial de Santander por avalar mi propuesta de proyecto de grado.

A los Profesores Edilberto José Reyes González, Rafael Isaacs Giraldo, Gildardo Guzmán Barbosa, Rafael Castro y Sonia Sabogal Pedraza por compartir conmigo su conocimiento y su gran gusto por las matemáticas.

Muy especialmente al Ing. Ricardo Monturiol Martínez, profesor de la Escuela de Matemáticas de la UIS, por su amistad, el continuo apoyo y la confianza recibida de su parte durante mi estancia en la UIS como estudiante.

Al profesor Dr. Siedfreg M. Rump del Institute for Reliable Computing en Hamburgo, Alemania, por permitirme usar la toolbox INTLAB, la cual fue usada para manejar todo lo relacionado con el análisis de intervalos.

A mi amada esposa, Paola C.,  
por todo su amor, apoyo, paciencia  
y comprensión, pero en especial  
porque cada día me hace muy feliz.

## CONTENIDO

	<b>Pág.</b>
INTRODUCCIÓN	11
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	13
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	13
2.1 Minimización.	13
2.2 Sistemas de Ecuaciones y Optimización.	14
2.3 Sucesiones.	16
2.4 Intervalos y Cajas en $\mathbb{R}^n$ .	17
2.5 Conjuntos Compactos y Funciones Continuas.	19
2.6 Aritmética y Análisis de Intervalos.	20
3. ALGORITMO	25
4. ANÁLISIS DEL ALGORITMO	27
4.1 Funcionamiento del Algoritmo.	27
4.2 Convergencia del Algoritmo.	28
4.3 Consideraciones acerca de la velocidad del Algoritmo.	30
5. IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO, PRUEBAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	31
6. OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES	39
REFERENCIAS	40

## TABLAS

	<b>Pág.</b>
TABLA 1. RESULTADOS PRUEBA PRIMER EJEMPLO	32
TABLA 2. RESULTADOS PRUEBA SEGUNDO EJEMPLO	34
TABLA 3. RESULTADOS PRUEBA TERCER EJEMPLO	36

## RESUMEN

### TÍTULO

**SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO-LINEALES MEDIANTE LA TÉCNICA DE OPTIMIZACIÓN GLOBAL POR ANÁLISIS DE INTERVALOS\***

### AUTOR

Luis Antonio Gómez Ardila\*\*

### PALABRAS CLAVES

SISTEMAS DE ECUACIONES NO-LINEALES, OPTIMIZACIÓN GLOBAL, MINIMIZACIÓN, ANÁLISIS DE INTERVALOS, CAJA EN  $\mathbb{R}^n$ .

### DESCRIPCIÓN

Este artículo presenta un algoritmo para la solución numérica de sistemas de ecuaciones no-lineales usando un método de optimización global mediante análisis de intervalos. Para este propósito el sistema de ecuaciones no-lineales se convierte en una función de valor real para luego ser minimizada, en el sentido global, en un dominio inicial dado (una caja en  $\mathbb{R}^n$ ) usando análisis de intervalos. Las soluciones del sistema de ecuaciones, si existen dentro de la caja dada, son expresadas mediante encerramientos por sub-cajas cuyo tamaño es menor que la exactitud establecida. Es posible que dada una caja el sistema de ecuaciones no tenga solución dentro de ella, pero sí exista solución al sistema dentro de otra caja distinta; por tanto este algoritmo tiene la capacidad de determinar la existencia o no de soluciones al sistema de ecuaciones en una caja dada. No hay restricción acerca de la relación entre el número de ecuaciones y el número de incógnitas del sistema. Se presenta una descripción detallada del funcionamiento del algoritmo, se realiza además un análisis de la convergencia del algoritmo, se presentan algunas consideraciones acerca de la velocidad de convergencia del algoritmo, y se muestran los resultados de su aplicación para algunos problemas de prueba.

---

\* Trabajo de Grado.

\*\* Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director: Carlos Rodrigo Correa Cely. Codirector: Edilberto José Reyes González.

## SUMMARY

### TITLE

**SOLUTION OF NON-LINEAR EQUATIONS SYSTEMS USING THE TECHNIQUE OF GLOBAL OPTIMIZATION BY INTERVAL ANALYSIS\***

### AUTHOR

Luis Antonio Gómez Ardila\*\*

### KEYWORDS

NON-LINEAR EQUATIONS SYSTEMS, GLOBAL OPTIMIZATION, MINIMIZATION, INTERVAL ANALYSIS, BOX IN  $\mathbb{R}^n$ .

### DESCRIPTION

This article presents an algorithm for the numerical solution of systems of non-linear equations using a method of global optimization by means of analysis of intervals. For this purpose the system of non-linear equations becomes a function of real value which will be minimized, in the global sense, in a given initial domain (a box in  $\mathbb{R}^n$ ) using analysis of intervals. The solutions of the system of equations, if they exist inside the given box, they are expressed by means of enclosures by sub-boxes whose size is smaller than the established accuracy. It is possible that given a box the system of equations has no solution in it, but there is solution to the system within a separate box, so this algorithm has the ability to determine the existence or not of solutions to a system of equations in a given box. There is no restriction on the relationship between the number of equations and the number of unknowns of the system. A detailed description of the operation of the algorithm is presented, it is also carried out an analysis of the convergence of the algorithm, some considerations are presented about the speed of convergence of the algorithm, and the results of their application are shown for some test problems.

---

\* Degree Work.

\*\* Faculty of Physic-Mechanical Engineering. School of Electric, Electronic and Telecommunications Engineerings. Project Director: Carlos Rodrigo Correa Cely. Project Co-director: Edilberto José Reyes González.

## INTRODUCCIÓN

El problema de obtener métodos para hallar todas las soluciones, dentro de un dominio dado, de un sistema de ecuaciones no-lineales, además de ser un tema de interés en matemática pura, es un tema de gran importancia en ingeniería. En el análisis y/o síntesis de modelos matemáticos de procesos, por lo general, se requiere la resolución de sistemas de ecuaciones no-lineales para la determinación de estados de las variables del sistema que permitan que el proceso tenga un comportamiento deseado.

Se requiere, además, que la técnica usada en el proceso de resolución de sistemas de ecuaciones no-lineales suministre una alta exactitud<sup>1</sup> en los resultados obtenidos. Lo anterior debido a que la no-linealidad en los sistemas prácticos, y por tanto en sus modelos, hace posible que el sistema se comporte de una manera indeseada al no poder controlar la exactitud de las variables que determinan el desempeño del proceso.

Un método para afrontar esta situación es transformar el problema, de uno en el cual se tienen que hallar todas las soluciones a un sistema de ecuaciones no-lineales en un dominio dado, en otro equivalente en el cual se tienen que hallar todos los puntos de óptimo global (en este caso mínimo global) de una función objetivo sobre el dominio dado [1] [2]. Una vez resuelto el problema de optimización global asociado al sistema de ecuaciones no-lineales es posible determinar si este último tiene o no solución; si es así, la solución al sistema de ecuaciones será la misma que la solución al problema de optimización global asociado [2].

Debido a que, en la práctica, la búsqueda por métodos numéricos de soluciones a sistemas de ecuaciones no-lineales (así como la resolución de problemas de

---

<sup>1</sup> Esto también depende de la exactitud del computador.

optimización) está restringida a una región acotada del espacio determinado por las variables presentes en el sistema, y que las expresiones que determinan el sistema de ecuaciones a resolver son, por lo general, funciones continuas (o, al menos, acotadas), es posible emplear métodos basados en análisis de intervalos<sup>2</sup> para la resolución de esta clase de problemas.

El Análisis de Intervalos, la cual es una herramienta matemática de fácil comprensión, además de tener la capacidad de suministrar una gran exactitud en los resultados obtenidos al trabajar con sus métodos, tiene la ventaja de ya estar implementado en algunos sistemas de computo simbólico como MATLAB<sup>®</sup> [7]. No obstante, un problema siempre presente en cálculos numéricos extensos es la propagación de errores debido a la representación en máquina de los números reales. El **redondeo hacia fuera** es una herramienta que permite controlar este problema. INTLAB, una toolbox para MATLAB desarrollada por Siegfried M. Rump, tiene la capacidad de implementar aritmética de intervalos usando redondeo hacia fuera, e implementar funciones elementales cuyos argumentos son intervalos [3].

---

<sup>2</sup> Esta teoría fue originalmente propuesta, por R. E. Moore, como una solución al problema de la acumulación de errores por redondeo en computadoras digitales.

## 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea  $\mathbb{R}$  el conjunto de los números reales, y sea  $\mathbb{X}$  un subconjunto no-vacío de  $\mathbb{R}^n$ . Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_1(x) = \mathbf{0} \\ \vdots \\ f_m(x) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n \quad (*).$$

Donde, para  $i = 1, \dots, m$ ,  $f_i$  es una función cuyo dominio contiene a  $\mathbb{X}$ , y con recorrido en los números reales.

El problema entonces se puede establecer como sigue: diseñar e implementar un algoritmo que permita hallar todas las soluciones del sistema (\*) en el conjunto  $\mathbb{X}$ . Es decir, hallar todas las  $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$  tales que  $f_i(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$  para  $i = 1, \dots, m$ .

## 2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

### 2.1 Minimización.

**Definición 1.** Sean  $X, Y$  conjuntos,  $A \subseteq X$  y  $f: X \rightarrow Y$  una función. Se define la **imagen directa** de  $A$  bajo  $f$  como el conjunto  $f[A] := \{f(x): x \in A\}$ .

Note que  $f[A] \subseteq Y$  para todo  $A \subseteq X$ .

**Teorema 1<sup>3</sup>.** Sean  $X, Y$  conjuntos y  $f: X \rightarrow Y$  una función. Supóngase que  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$  es una colección de subconjuntos de  $X$ . Entonces,

---

<sup>3</sup> Las demostraciones de los resultados básicos de la Teoría de Conjuntos y del Análisis Clásico aquí presentados pueden ser consultadas en [14] [16].

$$f[\cup_{\alpha \in J} X_{\alpha}] = \cup_{\alpha \in J} f[X_{\alpha}].$$

**Definición 2.** Sean  $X, Y$  conjuntos,  $a \in X$  y  $f: X \rightarrow Y$  una función. Si  $Y$  es un conjunto totalmente ordenado<sup>4</sup>, entonces se dice que  $f$  obtiene su mínimo sobre  $X$  en  $a$  si, y sólo si,  $f(a) \leq f(x)$  para todo  $x \in X$ .

## 2.2 Sistemas de Ecuaciones y Optimización.

Lo que sigue a continuación fue tomado de [2], donde se propone una demostración del Teorema sobre la Relación entre Sistemas de Ecuaciones en Números Reales y El Problema de Optimización.

Considere el problema planteado en el numeral 2. Sea  $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:

$$f(x) := \sum_{i=1}^m [f_i(x)]^2 \quad \text{con } x \in \mathbb{X} \quad (**)$$

Note que  $f$  está bien definida, y además que la imagen de  $f$  sobre  $\mathbb{X}$  consiste sólo de números reales no-negativos.

Luego, dado que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{X}$  y que  $\mathbb{R}$  es *completamente ordenado* [14], existe el ínfimo de  $f[\mathbb{X}]$  sobre  $\mathbb{R}$  y además este ínfimo es no-negativo. Por tanto, si existe el mínimo de  $f$  sobre  $\mathbb{X}$  este mínimo debe ser no-negativo. Más aún, si el sistema (\*) tiene solución en la caja dada  $\mathbb{X}$ , el mínimo de  $f$  sobre  $\mathbb{X}$  existe y es cero; esto se muestra en el siguiente resultado:

---

<sup>4</sup> Para un estudio detallado de los conjuntos totalmente ordenados y completamente ordenados ver [15] [16].

**Teorema 2.** Suponga que el sistema (\*) tiene solución en  $\mathbb{X}$ , y sea  $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$ . Entonces:

$\mathbf{a}$  es una solución para el sistema (\*) si, y sólo si,  $\mathbf{a}$  minimiza  $f$ .

**Demostración.** Si  $\mathbf{a}$  satisface el sistema (\*) entonces  $f_i(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$  para cada  $i = 1, \dots, m$ . Luego,  $f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$  y, como  $f(x) \geq \mathbf{0}$  para todo  $x \in \mathbb{X}$ , entonces  $\mathbf{a}$  es un punto de mínimo para  $f$ .

Ahora, si  $\mathbf{a}$  minimiza a  $f$  pero no satisface el sistema (\*) entonces  $f(\mathbf{a})$  debe ser positivo, ya que  $f(x) \geq \mathbf{0}$  para todo  $x \in \mathbb{X}$ . Como el sistema tiene solución en  $\mathbb{X}$ , existe  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{X}$  tal que  $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{a}$ . Luego,  $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{a})$  lo cual contradice que  $\mathbf{a}$  sea un punto de mínimo para  $f$ .

■

Note la importancia de la condición general sobre la consistencia del sistema (\*) en  $\mathbb{X}$ , ya que dado un sistema de ecuaciones siempre es posible construir  $f$ , y si  $\mathbf{a}$  la minimiza esto no implica en general que el sistema tenga solución.

Por tanto, podemos convertir el problema de hallar soluciones a un sistema de ecuaciones (no-lineales) en un conjunto  $\mathbb{X}$  dado, en un problema de optimización (en este caso minimización), para una función  $f$  (construida como se muestra más arriba) en el conjunto  $\mathbb{X}$ .

Un algoritmo básico, fundamentado en el anterior teorema, para la búsqueda de las soluciones del sistema (\*) en el conjunto  $\mathbb{X}$ , es el siguiente:

*Entrada:* El sistema de ecuaciones dado (\*) y el conjunto  $\mathbb{X}$ .

*Paso 1* : Construir  $f$ .

*Paso 2* : Minimizar  $f$  sobre  $\mathbb{X}$ .

*Paso 3* : Sea  $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$  un punto de mínimo para  $f$ . Si  $f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$  entonces  $\mathbf{a}$  satisface (\*), en caso contrario el sistema (\*) no tiene solución en  $\mathbb{X}$ .

Es necesario, al aplicar este algoritmo, asegurar la existencia del mínimo de  $f$  requerida en el paso 2; para este fin, más adelante, se darán condiciones suficientes sobre  $f$ , y por tanto sobre las funciones  $f_i$ , para que este mínimo se obtenga.

### 2.3 Sucesiones.

**Definición 3.** Sea  $X$  un conjunto no-vacío. Una **sucesión en  $X$**  es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y con recorrido en el conjunto  $X$ .

Por lo general, si  $s: \mathbb{N} \rightarrow X$  es una sucesión entonces se acostumbra identificar a  $s$  con el listado de sus imágenes. Por tanto, la sucesión  $s$  se representa con el símbolo  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Definición 4.** Una sucesión  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos en  $\mathbb{R}^n$  es llamada una **sucesión anidada** si, y sólo si,  $X_{i+1} \subseteq X_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

**Definición 5.** Sea  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales. Se dice que  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una **sucesión convergente** si existe  $s \in \mathbb{R}$  tal que, dado cualquier  $\delta > 0$  exista  $n^* \in \mathbb{N}$  tal que  $|s_n - s| < \delta$  para todo  $n \geq n^*$ . El número real  $s$  se denomina el **límite de la sucesión**.

Sea  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales convergente. Si  $s \in \mathbb{R}$  es el límite de esta sucesión entonces se acostumbra a usar la notación  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow s$  para expresar que la sucesión converge a dicho número.

Uno de los principales resultados acerca de sucesiones de números reales es que si  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión convergente entonces el límite de la sucesión es único.

## 2.4 Intervalos y Cajas en $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 6.** Sean  $a, b$  números reales tales que  $a \leq b$ . El intervalo acotado cerrado en  $\mathbb{R}$  con extremos  $a$  y  $b$ , el cual se representa como  $[a, b]$ , se define como sigue:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}.$$

Es inmediato que todo intervalo acotado cerrado en  $\mathbb{R}$  es un subconjunto no-vacio, ya que al menos  $a$  y  $b$  pertenecen al intervalo. La colección de todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}$  de esta forma se denota con  $I(\mathbb{R})$ ; esto es:

$$I(\mathbb{R}) := \{X \subseteq \mathbb{R}: X \text{ es un intervalo acotado cerrado no - vacio}\}.$$

Luego, si  $X \in I(\mathbb{R})$  existen  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $a \leq b$ , tales que  $X = [a, b]$ . En general, por brevedad en la notación, el extremo inferior  $a$  de  $X$  se denota como  $\underline{X}$  y el extremo superior  $b$  como  $\overline{X}$ ; así, si  $X \in I(\mathbb{R})$ , entonces  $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ . Si  $X \in I(\mathbb{R})$  es tal que  $\underline{X} = \overline{X}$  entonces se dice que el intervalo  $X$  es un *intervalo degenerado* o un *intervalo punto*. Luego, si  $X$  es un intervalo degenerado, existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $X = [x, x]$ . Por tanto se puede identificar el conjunto de los números reales con el subconjunto de  $I(\mathbb{R})$  consistente de todos los intervalos degenerados; esto es  $x \equiv [x, x]$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . En general, si  $D \subseteq \mathbb{R}$  es no-vacio, entonces  $I(D)$  se define como la colección de todos los subconjuntos de  $D$ , los cuales son intervalos acotados cerrados no-vacios.

**Definición 7.** Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $I(\mathbb{R})$  y sea  $a \in \mathbb{R}$ . Se dice que la sucesión  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $a$  si, y sólo si, las correspondientes sucesiones de

extremos inferiores y extremos superiores de los intervalos convergen a  $a$ . Esto es,

$$(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a \text{ si, y sólo si, } (\underline{X}_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a \text{ y } (\overline{X}_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a.$$

**Definición 8.** Sean  $X, Y \in I(\mathbb{R})$ . Se dice que  $X \leq Y$  si, y sólo si,  $\overline{X} \leq \underline{Y}$ .

**Definición 9.** Sea  $X \in I(\mathbb{R})$ . El *punto medio* y el *ancho* de  $X$ , los cuales se denotan respectivamente por  $m(X)$  y  $\omega(X)$ , se definen por:

$$m(X) := \frac{1}{2}(\overline{X} + \underline{X}),$$

$$\omega(X) := \overline{X} - \underline{X}.$$

**Definición 10.** Si un subconjunto  $\mathbb{X}$  de  $\mathbb{R}^n$  es un paralelepípedo rectangular cerrado acotado con lados paralelos a los ejes coordenados decimos que es una caja o una celda en  $\mathbb{R}^n$ .

Note que toda caja en  $\mathbb{R}^n$  es un subconjunto acotado cerrado en  $\mathbb{R}^n$ . Más aún,  $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  es una caja si, y sólo si,  $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^n X_i$  donde  $X_i \in I(\mathbb{R})$  para  $i = 1, \dots, n$ . Es decir, una caja de  $\mathbb{R}^n$  es un producto cartesiano de  $n$  elementos de  $I(\mathbb{R})$ . Por tanto una caja en  $\mathbb{R}^n$  puede ser representada por una  $n$ -upla ordenada de intervalos en  $I(\mathbb{R})$ ; específicamente, la caja  $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^n X_i$  puede ser representada por  $(X_1, \dots, X_n)$ . El *ancho* de la caja  $\mathbb{X}$  se define como  $\omega(\mathbb{X}) := \max\{\omega(X_i) : i = 1, \dots, n\}$ , y su punto medio está definido como  $m(\mathbb{X}) := (m(X_1), \dots, m(X_n))$ .

Se denota por  $I(\mathbb{R}^n)$  al conjunto de todas las cajas en  $\mathbb{R}^n$  y, en general, si  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  es un subconjunto no-vacio,  $I(D)$  denota el conjunto de todas las cajas contenidas en  $D$ .

**Teorema 3.** Sea  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión anidada de cajas en  $\mathbb{R}^n$ , entonces existe  $a \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a \in X_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Más aún, si el ancho de la sucesión de cajas anidadas converge a cero, esto es  $(\omega(X_i))_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ , entonces tal elemento es único.

## 2.5 Conjuntos Compactos y Funciones Continuas.

**Definición 11.** Un conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  se llama **compacto** si, y sólo si, es un conjunto acotado cerrado. En particular, toda caja en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto compacto.

**Teorema 4.** Sea  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$  una colección de subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces:

- i) La intersección  $\bigcap_{\alpha \in J} X_\alpha$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ .
- ii) Si el conjunto de índices  $J$  es finito, entonces la unión  $\bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 5.** Sea  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión anidada de subconjuntos compactos no-vacios de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces la intersección  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i$  es un subconjunto compacto no-vacio de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 12.** Sean  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $a \in X$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $f$  es continua en  $a$  si, y sólo si, para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in X$ ,  $\|x - a\| < \delta$  implica  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

**Teorema 6.** Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto no-vacio, y sea  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua sobre  $X$ . Entonces, existen  $a, b \in X$  tales que  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

para todo  $x \in X$ . Más aún, si  $X$  es una caja en  $\mathbb{R}^n$  entonces la imagen de  $f$  sobre  $X$  es un intervalo acotado cerrado en  $\mathbb{R}$ ; esto es  $f[X] \in I(\mathbb{R})$ .

Luego, para la función  $f$  definida en (\*\*), si  $X$  es compacto y  $f$  es continua sobre  $X$ , entonces existe el mínimo de  $f$  sobre  $X$ . Además para que  $f$  sea continua sobre  $X$  es suficiente que cada  $f_i$  sea también continua sobre  $X$ .

Por tanto, para el desarrollo y subsecuente análisis de la convergencia del algoritmo, supondremos que el conjunto  $X$  es una caja en  $\mathbb{R}^n$ , y que cada  $f_i$  es una función continua sobre  $X$ . Con esto se asegura la existencia del mínimo para  $f$  requerido en el paso 2 del algoritmo general.

## 2.6 Aritmética y Análisis de Intervalos.

Se define a continuación la aritmética de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  en términos de la aritmética de números reales.

**Definición 13.** Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  subconjuntos no-vacios, y supóngase que  $\circ$  representa cualquiera de las operaciones aritméticas usuales de suma, resta, multiplicación o división  $(+, -, \cdot, /)$ . Entonces:

$$A \circ B := \{a \circ b \in \mathbb{R} : a \in A, b \in B\}.$$

En el caso de la división, para que la operación esté bien definida, se debe cumplir que  $0 \notin B$ . La suma y la multiplicación así definidas cumplen las propiedades asociativa y conmutativa, y además existen identidades para estas dos operaciones. Los siguientes dos teoremas se deducen inmediatamente de la definición de la aritmética de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 7.** (*Principio de Inclusión*) Sean  $A, B, C, D \subseteq \mathbb{R}$ , subconjuntos no-vacios, tales que  $C \subseteq A$  y  $D \subseteq B$ . Entonces  $C \circ D \subseteq A \circ B$ ; donde  $\circ$  es cualquiera de la operaciones de suma, resta, multiplicación o división (en el caso de la división  $0 \notin D$  y  $0 \notin B$ ).

**Demostración.** Sea  $u \in C \circ D$  entonces existen  $a \in C$  y  $b \in D$  tales que  $u = a \circ b$ . Como  $C \subseteq A$  y  $D \subseteq B$  entonces  $a \in A$  y  $b \in B$ ; luego  $u \in A \circ B$ . ■

En lo que sigue, si  $A, B$  son subconjuntos no-vacíos de  $\mathbb{R}$  entonces el producto  $A \cdot B$  será representado por  $AB$ .

**Teorema 8.** (*Ley Sub-Distributiva*) Sean  $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$  subconjuntos no-vacios, entonces  $A(B + C) \subseteq AB + AC$ .

**Demostración.** Sea  $u \in A(B + C)$ , entonces existen  $a \in A$ ,  $b \in B$  y  $c \in C$  tales que  $u = a(b + c)$ . Luego, dado que en la aritmética de números reales se cumple la ley distributiva del producto respecto a la suma, se tiene  $u = ab + ac$ . Por tanto  $u \in AB + AC$ . ■

Note que en general no se cumple la igualdad  $A(B + C) = AB + AC$  para subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . Por ejemplo, tomando  $A = [1, 4]$ ,  $B = [-1, 2]$  y  $C = [1, 2]$  se tiene que  $A(B + C) = [1, 4][0, 4] = [0, 16]$  pero  $AB + AC = [-4, 8] + [1, 8] = [-3, 16]$ . Luego, se verifica para este caso que  $A(B + C) \subseteq AB + AC$  pero  $A(B + C) \neq AB + AC$ .

Si las operaciones antes definidas se restringen a  $I(\mathbb{R})$  entonces estas operaciones son cerradas en el sentido de que si  $A, B \in I(\mathbb{R})$  entonces  $A \circ B \in$

$I(\mathbb{R})$ . Específicamente, si  $A = [a, b]$  y  $B = [c, d]$  son intervalos acotados cerrados, entonces:

$$A + B = [a + c, b + d]$$

$$A - B = [a - d, b - c]$$

$$AB = [\min(S_1), \max(S_1)]$$

$$A/B = [\min(S_2), \max(S_2)]$$

En el caso de la división se debe asegurar que  $0 \notin B$ . Los conjuntos  $S_1$  y  $S_2$  se definen como sigue:

$$S_1 = \{ac, ad, bc, bd\},$$

$$S_2 = \{a/c, a/d, b/c, b/d\}.$$

**Definición 14.** Sean  $X$  una caja en  $\mathbb{R}^n$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua sobre  $X$ . Se define  $\bar{f}: I(X) \rightarrow I(\mathbb{R})$  por  $\bar{f}(Y) := f[Y]$  para todo  $Y \in I(X)$ .

Según el teorema 6, dado que  $f$  es continua, se tiene que  $\bar{f}(Y) \in I(\mathbb{R})$  para todo  $Y \in I(X)$ ; por tanto esta función está bien definida. Además note que la función  $\bar{f}$  calcula para cada elemento en  $I(X)$  su imagen directa bajo la función  $f$ . Luego, dado que  $X$  es una caja en  $\mathbb{R}^n$  se tiene que  $X \in I(X)$  y por tanto  $\bar{f}(X)$  contiene el valor mínimo de la función  $f$  sobre  $X$ . Más aún  $f(x) \equiv \bar{f}([x, x])$  para todo  $x \in X$ .

**Definición 15.** Sean  $X$  una caja en  $\mathbb{R}^n$  y  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua sobre  $X$ . Se dice que una función  $F: I(X) \rightarrow I(\mathbb{R})$  es una **función de inclusión** para  $f$  si, y sólo si, para todo  $Y \in I(X)$  se tiene que  $\bar{f}(Y) \subseteq F(Y)$ .

**Definición 16.** Sean  $X$  una caja en  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua sobre  $X$  y  $F: I(X) \rightarrow I(\mathbb{R})$  una función de inclusión para  $f$ .  $F$  se llama **isótoma** si, y sólo si, para  $Y, Z \in I(X)$ ,

$Y \subseteq Z$  implica que  $F(Y) \subseteq F(Z)$ .

Es de resaltar que no toda función de inclusión es isótona; por ejemplo, sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \mathbf{1}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , y considere la función  $F: I(\mathbb{R}) \rightarrow I(\mathbb{R})$  definida para todo  $[a, b] \in I(\mathbb{R})$  por:

$$F([a, b]) = \begin{cases} [0, 2] & \text{si } a \geq 0 \\ [1, 2] & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

La función  $F$  es una función de inclusión para  $f$ . No obstante esta función de inclusión no es isótona ya que si  $Y = [0, 1]$  y  $Z = [-1, 1]$  entonces  $Y \subseteq Z$  pero no se cumple que  $F(Y)$  esté contenido en  $F(Z)$ ; más aún  $F(Y)$  contiene estrictamente a  $F(Z)$ , esto es  $F(Y) = [0, 2] \supset [1, 2] = F(Z)$ .

Si  $X$  es una caja en  $\mathbb{R}$  (un intervalo acotado cerrado) y  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua para la cual el cálculo de su imagen sobre sub-cajas contenidas en  $X$  no representa dificultad alguna (como *Sin*, *Exp*, *Log*, etc.), se puede definir una función de inclusión  $G$  para  $g$  a través de  $\bar{g}$ ; es decir,  $G(Y) := \bar{g}(Y)$  para todo  $Y \in I(X)$ . Más aún,  $G$  definida de esta forma es isótona. Por lo general funciones de este tipo están **pre-declaradas** en los sistemas de computo simbólico, y nos referiremos a ellas con este término.

Las funciones de inclusión para funciones pre-declaradas, definidas como se muestra en el párrafo anterior, se denominan **funciones de inclusión pre-declaradas**.

**Definición 17.** (*Extensión Natural de Intervalo*) Sea  $X$  una caja en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua sobre  $X$  tal que la expresión que la determina no contiene conectivos lógicos. Supóngase que  $F: I(X) \rightarrow I(\mathbb{R})$  es una función de inclusión para  $f$ . Si  $F$  se obtiene al reemplazar, en la expresión que determina la

función  $f$ , cada ocurrencia de la variable  $x$  (la cual toma valores en  $X$ ) por la variable  $Y$  (la cual toma valores en  $I(X)$ ) y cada ocurrencia de una función pre-declarada  $g$  en  $f$  por su función de inclusión pre-declarada  $G$ , y si las operaciones aritméticas usuales en  $f$  son reemplazadas por las correspondientes operaciones de la aritmética de intervalos, entonces  $F$  se llama una **extensión natural de intervalo** de  $f$ .

Por ejemplo, si  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $f(x, y) = x^2 + \sin(x + y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ , entonces la función de inclusión tipo extensión natural de intervalo  $F: I(\mathbb{R}^2) \rightarrow I(\mathbb{R})$  queda determinada por  $F(X, Y) = X^2 + \sin(X + Y)$  para todo  $X, Y \in I(\mathbb{R})$ .

Las funciones de inclusión tipo extensión natural de intervalo, además de ser isótonas, son de sumo interés ya que  $\bar{f}([x, x]) = F([x, x])$  para todo  $x \in X$ ; esto es  $f(x) \equiv F([x, x])$  para todo  $x \in X$ . Más aún, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 9.** Sea  $X$  una caja en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua sobre  $X$ . Supóngase que  $F: I(X) \rightarrow I(\mathbb{R})$  es una extensión de intervalo natural para  $f$ . Entonces, para todo  $Y \in I(X)$ ,

$$\omega(F(Y)) \rightarrow 0 \text{ si } \omega(Y) \rightarrow 0.$$

Algunos paquetes de computo simbólico que implementa aritmética de intervalos, como INTLAB, automáticamente crea extensiones naturales de intervalo para funciones continuas en varias variables, lo cual facilita la construcción de funciones de inclusión isótonas para una gran variedad de funciones.

### 3. ALGORITMO

Dada una caja  $\mathbb{X}$  en  $\mathbb{R}^n$  y el sistema de ecuaciones no-lineales (\*), se construye para cada  $f_i$  su respectiva función de inclusión  $F_i$  (una extensión natural de intervalo). La función de inclusión tipo extensión natural de intervalo para la función  $f$  definida por (\*\*) queda determinada, para todo  $Y \in I(\mathbb{X})$ , por

$$F(Y) := \sum_{i=1}^m [F_i(Y)]^2.$$

Note que de esta forma,  $F(Y) \geq \mathbf{0}$  para todo  $Y \in I(\mathbb{X})$ .

El siguiente algoritmo permite desarrollar los pasos 2 y 3 del algoritmo básico propuesto en el numeral 2.2.

Entradas: Número  $n$  de dimensiones a trabajar. Caja inicial  $\mathbb{X}$ . Exactitud deseada en la determinación de las soluciones ( $\delta$ ). Margen de error ( $\varepsilon$ ) para el valor mínimo.

1. Establecer  $Y = \mathbb{X}$ .
2. Calcular  $F(Y)$ . Establecer  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] := F(Y)$ .
3. Si  $\mathbf{u} > 0$  ó  $\mathbf{v} < 0$ , entonces ir al paso 18.
4. Si  $\omega([\mathbf{u}, \mathbf{v}]) < \varepsilon$  y  $\omega(Y) < \delta$ , entonces la caja inicial  $\mathbb{X}$  es un encerramiento de una posible solución para el sistema (\*). Fin.
5. Hacer  $(Y_1, [\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1], \mathbf{w}_1, \mathbf{r}_1) = (Y, [\mathbf{u}, \mathbf{v}], \omega(Y), \omega([\mathbf{u}, \mathbf{v}]))$ . Se inicializa la lista  $L = \{(Y_1, [\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1], \mathbf{w}_1, \mathbf{r}_1)\}$ .
6. Sea  $(Y, [\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}, \mathbf{r})$  el primer elemento de la lista  $L$ ; donde  $Y = \prod_{i=1}^n I_i$ , y cada  $I_i \in I(\mathbb{R})$ .
7. Sea  $k := \min\{i: \mathbf{w} = \omega(I_i)\}$ .
8. Se bisecta  $Y$  en la dirección  $k$  obteniéndose las sub-cajas  $V_1$  y  $V_2$ .

9. Para  $i \in \{1, 2\}$ , se calcula  $[u_i, v_i] = F(V_i)$ ,  $w_i = \omega(V_i)$  y  $r_i = \omega([u_i, v_i])$ .
10. Si para algún  $i$ ,  $u_i > 0$  ó  $v_i < 0$ , entonces se elimina  $V_i$ . En caso contrario se agrega  $(V_i, [u_i, v_i], w_i, r_i)$  al final de la lista  $L$ .
11. Se elimina  $(Y, [u, v], w, r)$  de la lista  $L$ .
12. Si  $L = \emptyset$  (el conjunto vacío), entonces ir al paso 18.
13. Si  $L \neq \emptyset$  se reenumeran los elementos, teniendo en cuenta el orden en que se agregaron y que los  $w_i$  sean decrecientes.
14. Si  $w_1 \geq \delta$ , entonces ir al paso 6.
15. Si para todo  $j$ ,  $r_j < \varepsilon$  entonces cada sub-caja  $Y_j$  en la lista  $L$  es un encerramiento de una posible solución para el sistema (\*). Fin.
16. Si para algún  $j$ ,  $r_j \geq \varepsilon$  entonces se reenumera la lista  $L$  en orden decreciente de los  $r_i$ .
17. Se procesa la lista como sigue:
  - a) Sea  $(Y, [u, v], w, r)$  el primer elemento de la lista  $L$ ; donde  $Y = \prod_{i=1}^n I_i$ , y cada  $I_i \in I(\mathbb{R})$ .
  - b) Sea  $k := \min\{i: w = \omega(I_i)\}$ .
  - c) Se bisecta  $Y$  en la dirección  $k$  obteniéndose las sub-cajas  $V_1$  y  $V_2$ .
  - d) Para  $i \in \{1, 2\}$ , se calcula  $[u_i, v_i] = F(V_i)$ ,  $w_i = \omega(V_i)$  y  $r_i = \omega([u_i, v_i])$ .
  - e) Si para algún  $i$ ,  $u_i > 0$  ó  $v_i < 0$ , entonces se elimina  $V_i$ . En caso contrario se agrega  $(V_i, [u_i, v_i], w_i, r_i)$  a la lista  $L$ .
  - f) Se elimina  $(Y, [u, v], w, r)$  de la lista  $L$ .
  - g) Si  $L = \emptyset$  (el conjunto vacío), entonces ir al paso 18.
  - h) Si  $L \neq \emptyset$  se reenumeran los elementos, teniendo en cuenta que los  $r_i$  queden en orden decreciente. Ir al paso 15.
18. El sistema (\*) no tiene solución en  $\mathbb{X}$ . Fin.

## 4. ANÁLISIS DEL ALGORITMO

### 4.1 Funcionamiento del Algoritmo.

El funcionamiento del algoritmo se basa, fundamentalmente, en suprimir iterativamente sub-cajas donde es seguro no se encuentran soluciones al sistema de ecuaciones (\*) debido a que para todo elemento en esas sub-cajas se tiene que la función objetivo  $f$  definida en (\*\*) tiene imagen estrictamente positiva.

En cada iteración del algoritmo se evalúa la función de inclusión  $F$  en la primer sub-caja  $Y$  de mayor ancho presente en la lista  $L$ . Si la imagen de  $F$  sobre esta sub-caja consta sólo de valores positivos la sub-caja es eliminada de la lista, de lo contrario se procede a biseccionar  $Y$  a lo largo del lado de mayor longitud de la sub-caja, creándose así las nuevas sub-cajas  $V_1$  y  $V_2$ ; se elimina  $Y$  de la lista. Si  $F(V_i)$  consta sólo de valores positivos, para algún  $i \in \{1, 2\}$ , se elimina  $V_i$ , de lo contrario se agrega a la lista. Si en alguna iteración la lista  $L$  está vacía, entonces el sistema no tiene solución en la caja dada; de lo contrario se repite el proceso.

Si en alguna iteración todas las sub-cajas  $Y$  presentes en la lista  $L$  satisfacen  $\omega(Y) < \delta$ , entonces se procede a determinar  $\omega(F(Y))$  para cada una de ellas. Si se satisface  $\omega(F(Y)) < \varepsilon$  para todas las sub-cajas de la lista entonces el algoritmo termina y cada una de estas sub-cajas es un encerramiento de una posible solución para el sistema de ecuaciones. En caso contrario, si para alguna sub-caja  $Y$  se tiene que  $\omega(F(Y)) \geq \varepsilon$  entonces esta sub-caja se procesa de forma análoga a como se explica en el párrafo anterior. El proceso continua hasta que la lista quede vacía, en cuyo caso el sistema no tendría solución, o hasta que todo elemento de la lista satisfaga  $\omega(F(Y)) < \varepsilon$ , en cuyo caso cada sub-caja de la lista sería un posible encerramiento de una solución para el sistema de ecuaciones.

Por tanto, si después de aplicar el algoritmo a un sistema de ecuaciones, la lista  $L$  es no-vacía, entonces cada sub-caja de la lista es un encerramiento para una posible solución del sistema, cuyo ancho es menor que la exactitud  $\delta$  establecida. Además, para todo elemento  $x$  de cada sub-caja, se cumple  $|f(x)| < \varepsilon$  y, por tanto,  $|f_i(x)| < \sqrt{\varepsilon}$  para cada  $i = 1, \dots, m$ .

Luego, si el sistema de ecuaciones (\*) tiene solución en  $\mathbb{X}$ , es posible que, además de las sub-cajas que encierran dichas soluciones, existan otras sub-cajas en la lista  $L$  que no contienen soluciones al sistema (\*) pero sobre las cuales la función  $f$  determinada por (\*\*) satisfaga  $|f(x)| < \varepsilon$  para todo elemento  $x$  de estas sub-cajas; esto se debe a la propiedad de continuidad que adquiere la función  $f$  al ser construida a partir de las funciones  $f_i$  las cuales son continuas. Estos puntos son llamados *pseudo-soluciones generadas por el algoritmo* para el sistema (\*). Por tanto el conjunto obtenido al aplicar este algoritmo es un *superconjunto* del conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones (\*) en  $\mathbb{X}$ .

Note además que no se impone restricción acerca de la relación entre el número de ecuaciones y la cantidad de incógnitas del sistema, lo que permite considerar problemas más generales; tampoco se impone restricción alguna acerca del posible número de soluciones del sistema de ecuaciones (\*); ya que el algoritmo puede determinar todas las sub-cajas necesarias para encerrar dichas soluciones incluso si la cantidad es infinita, esto debido a que todo subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  puede ser encerrado por una unión de cajas.

#### 4.2 Convergencia del Algoritmo.

Considere, nuevamente, el problema planteado en el numeral 2. Sea  $\mathbb{X}^* \subseteq \mathbb{X}$  el conjunto solución al sistema (\*) en  $\mathbb{X}$ , y sea  $L_n$  la colección de sub-cajas

generadas en la  $n$ -ésima iteración del algoritmo. Note que  $L_n$  consta a lo máximo de  $n$  elementos.

Supóngase, para el análisis de la convergencia del algoritmo, que se establece la exactitud deseada en la determinación de las soluciones como cero, esto es  $\delta = \mathbf{0}$ , y que durante el proceso no se satisfacen los criterios de terminación del algoritmo. Luego,  $L_n \neq \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y, además, esto implica que  $\mathbf{0} \in F(\mathbb{X})$ . Más aún, para todo  $n \in \mathbb{N}$  y para todo  $Y \in L_n$  se tiene que  $\mathbf{0} \in F(Y)$  (p1), de lo contrario si para algún  $n > 1$  existiera un  $Y$  en  $L_n$  tal que  $F(Y) > 0$  entonces esta sub-caja hubiera sido eliminada en la iteración  $n - 1$ .

El proceso de bisección, tal como se define en el algoritmo, implica que la sucesión de los máximos de los anchos de las sub-cajas presentes en la listas converge a cero; esto es,

$$(\max\{\omega(Y): Y \in L_n\})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{0} \text{ (p2).}$$

Además, como  $f$  es continua y  $F$  es isótona, se tiene,

$$(\max\{\omega(F(Y)): Y \in L_n\})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{0} \text{ (p3).}$$

Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$  se define  $\mathbf{u}_n := \cup_{Y \in L_n} Y$ . Es inmediato que  $\mathbf{u}_n \neq \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  debido a que la lista  $L_n$  es no-vacía. Además, como cada elemento de lista  $L_n$  es un subconjunto compacto, entonces cada  $\mathbf{u}_n$  también lo es. Más aún, debido al proceso de bisección, la sucesión  $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión anidada de subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$ .

Se define  $\mathbf{u} := \cap_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{u}_n$ . Note que  $\mathbf{u}$  es un subconjunto no-vacio y compacto en  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición 1.** Si  $L_n \neq \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\mathbb{X}^*$  es no-vacío.

**Prueba.** Supóngase que  $\mathbb{X}^*$  es vacío. Como  $\mathbb{X}$  es compacto no-vacío en  $\mathbb{R}^n$  y  $f$  es continua sobre  $\mathbb{X}$ , existe  $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$  tal que  $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ . Además se tiene que  $f(\mathbf{a}) > 0$ . Dado que se cumple (p3) existe  $n^* \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq n^*$ ,

$$\max\{\omega(F(Y)): Y \in L_n\} < f(\mathbf{a})/10.$$

Sea  $Y \in L_n$ . Entonces se cumple que  $F(Y) < f(\mathbf{a})/10$  y, dado que  $f[Y] \subseteq F(Y)$ , se tiene que  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})/10$  para todo  $\mathbf{x} \in Y$ ; lo cual contradice que  $\mathbf{a}$  sea un punto de mínimo para  $f$  en  $\mathbb{X}$  ■.

El número 10, usado en la prueba de la proposición anterior, se eligió teniendo en cuenta el redondeo hacia fuera.

**Proposición 2.** Si  $L_n \neq \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\mathbb{X}^* \subseteq \mathcal{U}$ .

**Prueba.** Sea  $\mathbf{x} \in \mathbb{X}^*$ . Como  $f(\mathbf{x}) = 0$  se tiene que cualquier sub-caja que contenga a  $\mathbf{x}$  no será eliminada en el proceso. Luego, para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe  $Y$  en  $L_n$  tal que  $\mathbf{x} \in Y$ , y por tanto  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Así, por consiguiente  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$  ■.

Luego, las proposiciones 1 y 2 demuestran que el conjunto solución que se obtiene al aplicar el algoritmo converge a un superconjunto del conjunto solución del sistema de ecuaciones (\*) como se había mencionado.

#### 4.3 Consideraciones Acerca de la Velocidad del Algoritmo.

La velocidad del algoritmo está determinada por el ancho de la caja inicial  $\omega(\mathbb{X})$ , el número de ecuaciones  $m$ , el número de dimensiones del dominio  $n$  (esto es, el

número de incógnitas), la exactitud deseada en las soluciones  $\delta$ , el margen de error establecido para el proceso de optimización  $\varepsilon$  y, especialmente, el número de soluciones al sistema dentro del dominio dado, entre otras cosas.

Además, en la aritmética real puede existir más de una forma de representar la expresión que determina una función dada. Por ejemplo, las expresiones  $x + x \cdot x$  y  $x \cdot (1 + x)$  determinan el mismo valor para todo  $x \in \mathbb{R}$  y por tanto representan una misma función de valor real; sin embargo, la expresión  $X + X \cdot X$  y la expresión  $X \cdot (1 + X)$  determinan intervalos diferentes para algunos elementos  $X$  en  $I(\mathbb{R})$ ; por ejemplo, tome  $X = [-1, 0]$ . Más aún,  $X \cdot (1 + X) \subseteq X + X \cdot X$  para todo  $X \in I(\mathbb{R})$ . Luego, la velocidad de convergencia del algoritmo también depende de la forma en que se escriben las expresiones para cada una de las funciones que determinan el sistema de ecuaciones. Por tanto, para aumentar la velocidad de convergencia del algoritmo es necesario reescribir la expresión que determina cada función de tal forma que, en lo posible, cada variable sólo ocurra una vez.

## 5. IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO, PRUEBAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

La implementación del algoritmo fue realizada en MATLAB, usando la toolbox INTLAB. La implementación consta de dos programas tipo *script* donde el segundo de ellos se utiliza para definir las funciones que determinan el sistema.

Como primer ejemplo considere el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 5 - y^2 - x = 0 \\ e^x - y = 0 \end{cases}$$

Al aplicar el programa a este sistema en la caja determinada por  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  el resultado obtenido fue:

El sistema de ecuaciones no tiene solución en la caja dada.

Por tanto en esta caja no existe solución al sistema dado. No obstante, en la caja  $[-1, 5] \times [-1, 5]$  el resultado obtenido fue:

Cada una de las siguientes cajas son un encerramiento de una posible solución para el sistema de ecuaciones:

**Tabla 1. Resultados de prueba primer ejemplo.**

Caja		Extremo Inferior	Extremo Superior
1	$x =$	0.72624576091766	0.72624611854554
	$y =$	2.06730556488037	2.06730628013611
2	$x =$	0.72624611854553	0.72624683380127
	$y =$	2.06730556488037	2.06730628013611

Fuente: Elaboración propia.

La exactitud en las soluciones es menor que:

ancho =

$$7.152557373046875e-007$$

Para cada  $x$  en las sub-cajas, y cada función que determina el sistema de ecuaciones,  $\text{abs}(f_i(x))$  es menor que:

ans =

$$2.582377455379701e-006$$

Lo cual muestra que en esta nueva caja sí hay solución. Para el computo se usó  $\delta = 1 \times 10^{-6}$  y  $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$ . Luego una solución, a seis cifras decimales, para el

sistema es  $x = 0.726246, y = 2.067306$ , y se observa que cada caja satisface el requerimiento establecido para la exactitud, y además para cada punto en las sub-cajas presentadas se tiene que al evaluar las expresiones que determinan el sistema, la distancia a cero es menor que  $2.6 \times 10^{-6}$  lo cual es mucho menor que  $\sqrt{\varepsilon} = 0.001$  la cual es una cota superior para el margen de error esperado según se explicó antes.

Luego, aunque el sistema de ecuaciones no tenía solución en la primer caja dada, sí la tenía en la segunda, lo que muestra la importancia en la selección de la caja inicial. Lo anterior también demuestra la capacidad del algoritmo para determinar si dentro de una caja dada existen soluciones al sistema de ecuaciones, y en caso afirmativo las computa.

A continuación presentamos una serie de pruebas que tienen como dominio cajas cuyos lados son el intervalo  $[-20, 20]$ . Se establece  $\delta = 1 \times 10^{-8}$  y  $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$ .

Considere el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} z^2 - y + \text{Sin}(\pi x) = 0 \\ y^2 - 2x + z = 0 \\ e^{x-1} - 2y + z = 0 \\ xe^{-|y-1|} - z^2 = 0 \end{cases}$$

Al aplicar el programa a este sistema se obtuvo el siguiente resultado:

Cada una de las siguientes cajas son un encerramiento de una posible solución para el sistema de ecuaciones:

**Tabla 2. Resultados de prueba segundo ejemplo.**

<b>Caja</b>		<b>Extremo Inferior</b>	<b>Extremo Superior</b>
<b>1</b>	$x =$	0.99999998230487	0.99999998696149
	$y =$	0.99999998696148	0.99999999627471
	$z =$	0.99999997764825	0.99999998696149
<b>2</b>	$x =$	0.99999999627470	1.00000000558794
	$y =$	0.99999998696148	0.99999999627471
	$z =$	0.99999999627470	1.00000000558794
<b>3</b>	$x =$	0.99999998696148	0.99999999627471
	$y =$	0.99999999627470	1.00000000558794
	$z =$	0.99999998696148	0.99999999627471
<b>4</b>	$x =$	0.99999999627470	1.00000000558794
	$y =$	0.99999999627470	1.00000000558794
	$z =$	0.99999998696148	0.99999999627471
<b>5</b>	$x =$	0.99999998696148	0.99999999627471
	$y =$	0.99999999627470	1.00000000558794
	$z =$	0.99999999627470	1.00000000558794
<b>6</b>	$x =$	0.99999999627470	1.00000000558794
	$y =$	0.99999999627470	1.00000000558794
	$z =$	0.99999999627470	1.00000000558794
<b>7</b>	$x =$	0.99999998696148	0.99999999627471
	$y =$	0.99999998696148	0.99999999627471
	$z =$	0.99999997764825	0.99999998696149
<b>8</b>	$x =$	1.00000000558793	1.00000001490117
	$y =$	0.99999999627470	1.00000000558794
	$z =$	1.00000000558793	1.00000001490117
<b>9</b>	$x =$	0.99999999627470	1.00000000558794
	$y =$	1.00000000558793	1.00000001490117

	$z =$	0.99999999627470	1.00000000558794
<b>10</b>	$x =$	0.99999998696148	0.99999999627471
	$y =$	0.99999998696148	0.99999999627471
	$z =$	0.99999998696148	0.99999999627471

Fuente: Elaboración propia.

La exactitud en las soluciones es menor que:

ancho =

9.313225746154785e-009

Para cada  $x$  en las sub-cajas, y cada función que determina el sistema de ecuaciones,  $\text{abs}(f_i(x))$  es menor que:

ans =

8.139288356488952e-008

Según los resultados obtenidos, cada sub-caja presentada por el programa satisface la condición de exactitud impuesta, y además para cada punto en las sub-cajas presentadas se tiene que al evaluar las expresiones que determinan el sistema, la distancia a cero es menor que  $8.14 \times 10^{-8}$ .

Al analizar los resultados se puede observar que una posible solución para este sistema es  $x = 1, y = 1, z = 1$  y de hecho lo es. Las demás sub-cajas que no contienen esta solución sugieren que podría haber la posibilidad de que existan soluciones muy cercanas a la ya encontrada. No obstante, la presencia de estas regiones se explica mejor por la continuidad de la función objetivo, como se explicó antes.

Considere ahora el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x(x + 1) + 2y - 18 = 0 \\ x + (y - 6)^2 - 26 = 0 \end{cases}$$

Al aplicar el programa se obtuvo:

Cada una de las siguientes cajas son un encerramiento de una posible solución para el sistema de ecuaciones:

**Tabla 3. Resultados de prueba tercer ejemplo.**

Caja		Extremo Inferior	Extremo Superior
1	$x =$	1.53528000693768	1.53528001159430
	$y =$	10.94618235714733	10.94618236646057
2	$x =$	2.72933876141906	-2.72933875210583
	$y =$	11.35997562669217	11.35997563600541
3	$x =$	1.53528001159429	1.53528002090753
	$y =$	10.94618235714733	10.94618236646057
4	$x =$	-2.72933875210584	-2.72933874279260
	$y =$	11.35997562669217	11.35997563600541

Fuente: Elaboración propia.

La exactitud en las soluciones es menor que:

ancho =

9.313225746154785e-009

Para cada  $x$  en las sub-cajas, y cada función que determina el sistema de ecuaciones,  $\text{abs}(f_i(x))$  es menor que:

ans =

9.243792935043797e-008.

Se observa que  $x = 1.5352800, y = 10.9461823$  y  $x = -2.729338, y = 11.3599756$  son dos posibles soluciones al sistema. Cada sub-caja tiene un ancho menor al establecido, y la distancia a cero de cada expresión que determina el sistema para puntos en las sub-cajas obtenidas es menor a  $9.25 \times 10^{-8}$ .

En adelante, para cada sistema de prueba, sólo se presentaran las posibles soluciones, la exactitud con que se hallaron  $\delta_s$  y la distancia a cero de las imágenes de las funciones que determinan el sistema sobre las cajas producidas  $\varepsilon_s$ .

Para el sistema,

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 0 \\ 3xy^2 - x^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Al aplicar el programa al sistema de ecuaciones y analizar sus resultados se obtuvo las siguientes posibles soluciones:

$$x = 0.5, y = 0.86602540$$

$$x = 0.5, y = -0.86602540$$

Con  $\delta_s$  menor al establecido y  $\varepsilon_s$  menor a  $5.72 \times 10^{-8}$ .

Para el sistema,

$$\begin{cases} (x_1 - 5x_2)^2 + 40\text{Sin}(10x_3)^2 = 0 \\ (x_2 - 2x_3)^2 + 40\text{Sin}(10x_1)^2 = 0 \\ (3x_1 + x_3)^2 + 40\text{Sin}(10x_2)^2 = 0 \end{cases}$$

Se obtuvo que la solución es  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ , con  $\delta_s$  menor al establecido y  $\varepsilon_s$  menor a  $6.04 \times 10^{-13}$ .

Considere ahora el siguiente sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2.3x_1 + x_2^2 + 2x_4 + 0.01x_5 - 1.45 = 0 \\ -x_2 + 1.3x_5 + 9 = 0 \\ x_2x_3 - x_5^2 - 5 = 0 \\ x_1^3 - 2x_4x_3 + x_5^2 - 0.8 = 0 \\ -5x_3 - x_5 - 3x_5x_4x_3 + 3.6 = 0 \end{array} \right.$$

Se obtuvo que la solución, satisfaciendo la exactitud requerida y con un  $\varepsilon_s$  menor a  $1.6 \times 10^{-6}$ , es:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2.56756527 \\ x_2 &= 2.6133588 \\ x_3 &= 11.1487223 \\ x_4 &= 0.2874417 \\ x_5 &= -4.9128008 \end{aligned}$$

## 6. OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

*a)* El algoritmo desarrollado, el cual está basado en la aritmética de intervalos, al no imponer condiciones sobre la relación entre la cantidad de ecuaciones y la cantidad de incógnitas brinda un método general para la resolución numérica de sistemas de ecuaciones no-lineales, el cual proporciona una alta exactitud en las soluciones halladas, no obstante un posible alto tiempo de computo, según los parámetros del problema.

*b)* Algunos métodos para acelerar la búsqueda de soluciones a sistemas de ecuaciones en un dominio dado son: *i)* dividir la caja inicial en sub-cajas para aplicar el algoritmo a cada una de ellas por separado, *ii)* aplicar el algoritmo con una exactitud baja, por ejemplo 0.001, y luego aplicar otros métodos que, aunque no suministren gran exactitud al aplicarlos solos, si proporcionan más velocidad de computo.

*c)* Es importante la selección de la caja inicial, y del tamaño de la misma, tanto para acelerar el computo como para tener seguridad de encerrar soluciones del sistema si estas existiesen.

## REFERENCIAS

- [1] Richard L. Burden y J. Douglas Faires, Análisis Numérico, séptima edición, Math Learning, Thomson Editores, 2002, pp. 628.
- [2] Luis A. Gómez, Propuesta de demostración del teorema sobre la relación entre sistemas de ecuaciones y el problema de optimización, Comunicación interna UIS, Nov. 11, 2010, pp. 1-2.
- [3] R. E. Moore, R. B. Kearfott y M. J. Cloud, Introduction to Interval Analysis, SIAM, 2009.
- [4] E. R. Hansen, Global Optimization Using Interval Analysis: The One-Dimensional Case, JOTA, Vol. 29, No. 3, pp. 331-344, 1979.
- [5] E. R. Hansen, Global Optimization Using Interval Analysis: The Multi-Dimensional Case, Numer. Math. 34, 247-270 (1980).
- [6] H. Munack, On Global Optimization Using Interval Arithmetic, Computing 48, 319-336 (1992).
- [7] E. R. Hansen, Global Optimization Using Interval Analysis, Marcel Dekker, Inc. and Sun Microsystems, Inc., 2004.
- [8] R. E. Moore, On Computing the Range of a Rational Function of  $n$  Variables over a Bounded Region, Computing 16, 1-15 (1976).
- [9] H. Ratschek, Inclusion Functions and Global Optimization, Mathematical Programming 33 (1985) 300-317.

- [10] R. E. Moore y H. Ratschek, Inclusion Functions and Global Optimization II, *Mathematical Programming* 41 (1988) 341-356.
- [11] H. Ratschek y R. L. Voller, What Can Interval Analysis Do for Global Optimization?, *Journal of Global Optimization* 1: 111-113, 1991.
- [12] K. Ichida y Y. Fujii, An Interval Arithmetic Method for Global Optimization, *Computing* 23, 85-97 (1979).
- [13] N. S. Asaithambi, Shen Zuhe y R. E. Moore, On Computing the Range of Values, *Computing* 28, 225-237 (1982).
- [14] Robert G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 1964.
- [15] Mícheál Ó Searcóid, *Metric Spaces*, Springer, 2007.
- [16] Yiannis Moschovakis, *Notes on Set Theory, Second Edition*, Springer, 2006.