SELECCIÓN DE SUBSUCESIONES DE FUNCIONES USANDO IDEALES.

JORGE ARMANDO MARTÍNEZ QUINTERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

SELECCIÓN DE SUBSUCESIONES DE FUNCIONES USANDO IDEALES.

JORGE ARMANDO MARTÍNEZ QUINTERO

Trabajo de grado como requisito para optar al título de:

Matemático

Director:

CARLOS ENRIQUE UZCÁTEGUI AYLWIN

Dr. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

"La imaginación del hombre es tan grande que se sorprende a sí mismo".

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos:

⋆ A Dios por ayudarme a comprender que con fe todo es posible.

⋆ Al profesor Ph. D Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, director de este proyecto, por su apoyo y recomendaciones en el transcurso de la carrera.

⋆ A mis padres por el apoyo que me brindaron para llevar a cabo la realización de mis estudios.

⋆ A mis compañeros y demás profesores que me ayudaron a crecer como persona.

Tabla de contenido

RESUMEN

TÍTULO: SELECIÓN DE SUBSUCESIONES DE FUNCIONES USANDO IDEALES. *

AUTOR: JORGE ARMANDO MARTÍNEZ QUINTERO.**

PALABRAS CLAVES: EQUICONTINUO, IDEALES, SUBMEDIDA, CONVERGENCIA.

DESCRIPCIÓN:

Un teorema fundamental de la recta es el Teorema de Bolzano Weierstrass que dice que toda sucesión acotada de números reales posee una subsucesión convergente. En este trabajo se mostrarán unas generalizaciones a espacios de funciones de este teorema. Más precisamente, se estudiaron los siguientes resultados:

(Teorema de Arzela-Ascoli). Si $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones de valores reales, definidas sobre $[0,1]$, es uniformemente acotada y equicontinua, entonces existe una subsucesión $\langle f_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ uniformemente convergente.

(Teorema de Helly). Si $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones monótonas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ uniformemente acotada, entonces existe una subsucesión $\langle f_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ puntualmente convergente.

Un ideal $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ que es cerrado bajo subconjuntos y uniones finitas, y $\mathbb{N} \notin \mathcal{P}(\mathbb{N})$. En este trabajo se analizó la siguiente cuestión. Dada una sucesión $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, como en el Teorema de Helly, considere la colección de subconjuntos de $\mathbb{N}$ dada por:

$$\mathcal{H} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \langle f_n \rangle_{n\in A} \text{ es puntualmente convergente}\}.$$

Para cuáles ideales $\mathcal{I}$ se cumple lo siguiente: Para todo $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \notin \mathcal{I}$, existe $B \subseteq A$ tal que $B \notin \mathcal{I}$ y $B \in \mathcal{H}$. Esta cuestión dio lugar a estudiar la propiedad BW^*; se dice que el par $(X, \mathcal{I})$ tiene dicha propiedad, con X un espacio topológico Hausdorff, si

* Trabajo de grado.

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

dada $\langle x_n \rangle_{n \in A}$ una sucesión en X y $A \notin \mathcal{I}$, existe $B \subseteq A$ tal que $B \notin \mathcal{I}$ y $\langle x_n \rangle_{n \in B}$ es convergente.

ABSTRACT

TITLE: SELECTION OF SUBSEQUENCES OF FUNCTIONS USING IDEALS. ***
AUTOR: JORGE ARMANDO MARTÍNEZ QUINTERO. ****
KEY WORDS: EQUICONTINUOUS, IDEALS, SUBMEASURE, CONVERGENCE.
DESCRIPTION:

A fundamental theorem of the real straight is the Bolzano Weierstrass Theorem which says that every bounded sequence of real numbers has a convergent subsequence. In this project some generalizations to spaces of functions of this theorem are shown. More precisely, the following results was studied:

(Arzela-Ascoli's Theorem). If $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ is a uniformly bounded sequence and equicontinuous of functions on $[0,1]$ then there is a subsequence $\langle f_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ which is uniformly convergent;

(Helly's Theorem). If $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ is a uniformly bounded sequence of monotone real-valued functions defined on $\mathbb{R}$ then there is a subsequence $\langle f_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ which is pointwise convergent.

An ideal $\mathcal{I}$ on $\mathbb{N}$ is a subset of $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ which is closed under subsets and finite sum, and $\mathbb{N} \notin \mathcal{P}(\mathbb{N})$. In this paper the following question was analyzed. Given a sequence $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ as in the statement of Helly's Theorem, consider the collection of subsets of $\mathbb{N}$ given by:

$$\mathcal{H} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \langle f_n \rangle_{n\in A} \text{ is pointwise convergent}\}.$$

For what ideals $\mathcal{I}$ the following is true: For all $A \subseteq \mathbb{N}$ with $A \notin \mathcal{I}$ there is $B \subseteq A$ such that $B \notin \mathcal{I}$ y $B \in \mathcal{H}$. This question let to study the property BW^*. The pair $(X, \mathcal{I})$ has this property, with X a Hausdorff topological space, if every $\langle x_n \rangle_{n\in A}$ a sequence on X and $A \notin \mathcal{I}$, there is $B \subseteq A$ such that $B \notin \mathcal{I}$ and $\langle x_n \rangle_{n\in B}$ is convergent.

*** Grade work.
**** Mathematics School. Sciences Faculty. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

INTRODUCCIÓN

Un teorema fundamental de la topología de la recta es el Teorema de Bolzano Weierstrass el cual dice que toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente. Este teorema ha sido generalizado a espacios de funciones. En este trabajo se estudiaron algunas generalizaciones de dicho teorema.

Teorema 0.0.1. *(Arzela-Ascoli). Si una sucesión $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de valores reales, definidas sobre $[0, 1]$, es uniformemente acotada y equicontinua, entonces existe una subsucesión $\langle f_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ uniformemente convergente.*

La necesidad de agregar a la hipótesis la equicontinuidad de la sucesión radica en que cuando se consideran sucesiones de funciones en lugar sucesiones de reales el resultado no es cierto. Más precisamente, existe una sucesión de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ uniformemente acotada que no posee una subsucesión uniformemente convergente.

Por otra parte, si no suponemos que las funciones son continuas tenemos el siguiente teorema clásico.

Teorema 0.0.2. *(Helly). Si $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones monótonas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ uniformemente acotada, entonces existe una subsucesión $\langle f_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ puntualmente convergente.*

En este trabajo estamos interesados en estudiar los teorema anteriores modificando el tipo de subsucesión permitida. La referencia principal que hemos usado es el artículo de Filipów, R., Mrożek, N., Recław, I. & Szuca, P. [3].

Un ideal $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{N}$ es una familia no vacía en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ que es cerrada bajo uniones finitas y subconjuntos. Se estudió bajo qué condiciones sobre $\mathcal{I}$ se cumplen las siguientes versiones de los teoremas anteriores:

(1) Para cada sucesión $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones uniformemente acotada y equicontinua en $C([0, 1]) = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f \text{ es continua}\}$, existe $A \notin \mathcal{I}$ tal que $\langle f_n \rangle_{n\in A}$ es uniformemente convergente.

(2) Para cada sucesión $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones monótonas a valores reales uniformemente acotada sobre $\mathbb{R}$, existe $A \notin \mathcal{I}$ tal que $\langle f_n \rangle_{n\in A}$ es puntualmente convergente.

La idea detrás de estos resultados es la siguiente. Dada una sucesión $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, como en el enunciado del Teorema de Helly, consideremos la siguiente colección de subconjuntos de $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{H} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \langle f_n \rangle_{n\in A} \text{ es puntualmente convergente}\}.$$

El Teorema de Helly se puede enunciar de la siguiente manera: Para todo $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito, existe $B \subseteq A$ infinito tal que $B \in \mathcal{H}$. Un problema que se estudió de manera parcial fue, para cuáles ideales $\mathcal{I}$ se cumple lo siguiente: Para todo $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \notin \mathcal{I}$, existe $B \subseteq A$ tal que $B \notin \mathcal{I}$ y $B \in \mathcal{H}$. El Teorema de Arzela-Ascoli dice que el ideal de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ tiene esa propiedad.

La interacción entre las propiedades de los ideales y diferentes nociones de convergencia en espacios topológicos ha recibido bastante atención en los últimos años (ver por ejemplo [5] y [2]).

La tesis está dividida en 4 capítulos. En el segundo presentamos algunos preliminares que serán usados como herramientas básicas para demostrar algunos de los teoremas que se desarrollarán en el trabajo. En el Capítulo 3 presentamos la demostración del Teorema de Arzela-Ascoli (como se presenta en el libro de Munkres [6]) y también la demostración de que el espacio de las funciones crecientes de $[0,1]$ en $[0,1]$ es compacto, primero numerable y no metrizable (como se presenta en el libro [7] pero completando muchos de los detalles que el texto omite).

El Capítulo 4 es donde presentamos los resultados que le dan sentido al título de la tesis. El Teorema 3.3.7 es quizá el más representativo de las ideas tratadas en este trabajo. La versión que presentamos generaliza el resultado análogo demostrado en [3].

Capítulo 1

PRELIMINARES

La topología que usaremos en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es la topología producto, es decir, consideraremos la topología generada por los abiertos sub-básicos $\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x(j) = 0\}$ y $\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x(j) = 1\}$ para algún $j \in \mathbb{N}$. En consecuencia los abiertos básicos serán intersecciones finitas de éstos.

Definición 1.0.1. Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es F_σ, si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ con cada C_n cerrado en X.

Definición 1.0.2. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Definamos

$$\mathcal{B}_P = \left\{ \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j) : U_j \text{ es abierto de } X_j \text{ y } J \text{ es subconjunto finito de } I \right\}.$$

Donde, para cada $j \in I$, $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ denota la proyección sobre X_j. La topología generada por la base $\mathcal{B}_P$ se conoce como la **topología producto** sobre $\prod_{i \in I} X_i$.

Teorema 1.0.3. *(Teorema de Tychonoff [6]). El producto arbitrario de espacios compactos es compacto en la topología producto.*

Definición 1.0.4. Sean X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Diremos que $\mathcal{A}$ tiene la **propiedad de intersección finita** (P.I.F.) si dados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en $\mathcal{A}$, se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing.$$

Teorema 1.0.5. *[8]. Sea X un espacio topológico. X es compacto si y solo si toda familia de cerrados con la (P.I.F.) tiene intersección no vacía.*

Teorema 1.0.6. *[6]. Sea (X, d) un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es separable.*
2. *X es segundo numerable.*

Teorema 1.0.7. *[6]. Sea X un espacio topológico compacto. Si Y es un subespacio cerrado de X, entonces Y es compacto.*

Definición 1.0.8. Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ y $f : X \to \mathbb{R}$

(1) f es **creciente**, cuando dados $x, y \in X$, si $x < y$, entonces $f(x) \leq f(y)$.

(2) f es **decreciente**, cuando dados $x, y \in X$, si $x < y$, entonces $f(x) \geq f(y)$.

Si f es creciente o decreciente, se dice que f es **monótona**.

Teorema 1.0.9. *[1]. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces el conjunto de puntos $D \subset I$ en los que f es discontinua, es un conjunto contable.*

Definición 1.0.10. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una función.

(1) $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ **converge puntualmente** a $f : X \to \mathbb{R}$ si y solo si dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(2) $\langle f_n \rangle_n$ **converge uniformemente** a $f : X \to \mathbb{R}$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall x \in X$.

La topología que se usará en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es la inducida por $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Lema 1.0.11. *Sean $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\zeta : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dadas por $\phi(A, B) = A \cap B$ y $\zeta(A, B) = A \cup B$. Entonces ϕ y ζ son continuas.*

Demostración.

ϕ es continua:

Sea $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $\phi(A,B) = A \cap B$. Observemos que

$$\pi_n \circ \phi(A,B) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin (A \cap B), \\ 1 & \text{si } n \in (A \cap B). \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl} (\pi_n \circ \phi(A,B))^{-1}(0) & = & \{(A,B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : n \notin (A \cap B)\} \\ & = & \{(A,B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : n \notin A \text{ ó } n \notin B)\} \\ & = & [\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : n \notin A\} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})] \cup [\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : n \notin B\}]. \end{array}$$

Como $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : n \notin A\} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : n \notin B\}$ son abiertos sub-básicos concluimos que $(\pi_n \circ \phi(A,B))^{-1}(0)$ es abierto. Análogamente se demuestra que $(\pi_n \circ \phi(A,B))^{-1}(1)$ es abierto. Por lo tanto ϕ es continua.

ζ es continua:

Se demuestra análogamente como se hizo para la función ϕ. O de forma alternativa, observamos que la función $A \mapsto \mathbb{N} \setminus A$ es un homeomorfismo y $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$.

$\square$

Capítulo

2

ESPACIOS DE FUNCIONES

En este capítulo se demostrarán los dos teoremas más importantes de este trabajo, Helly y Arzela-Ascoli. Como se dijo en la introducción, el interés de estudiar estos teoremas está motivada por ejemplos como el siguiente[1]:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ como $f_n(x) = sen(nx)$. Observemos que $M = 1$ es una cota uniforme para la sucesión $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, $|f_n(x)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [0, 2\pi]$. Afirmamos que $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene una subsucesión uniformemente convergente.

Supongamos que existe dicha subsucesión $\langle f_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente. Entonces

$$(sen(n_k x) - sen(n_{k+1}x))^2$$

converge uniformemente a cero. Por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} (sen(n_k x) - sen(n_{k+1}x))^2 dx = 0.$$

Pero es fácil ver que

$$\int_0^{2\pi} (sen(n_k x) - sen(n_{k+1}x))^2 dx = 2\pi \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Lo cual es una contradicción. Este ejemplo muestra que hace falta algo más

[1]Ortega, J., *Material didáctico - Sucesiones de Funciones*, [En línea]. México. CIMAT, p. 172. (Recuperado el 13 de Junio 2018). Disponible en: http://www.cimat.mx/~jortega/MaterialDidactico/Analisis/Cap9v4.pdf

para garantizar la existencia de una subsucesión uniformemente convergente. Esa condición adicional es la equicontinuidad como lo establece el Teorema de Arzela-Ascoli.

2.1 Topología en espacios de funciones.

En esta sección presentaremos los conceptos básicos de las topologías en espacios de funciones que usaremos en este trabajo.

Definición 2.1.1. Sean X e Y espacios topológicos. Para un punto $x \in X$ y un conjunto abierto U del espacio Y, sea

$$S(x, U) = \{f \in Y^X : f(x) \in U\}.$$

Los conjuntos $S(x, U)$ determinan una subbase para una topología sobre Y^X la cual se conoce como ***topología de la convergencia puntual***. Observemos que esta topología es la topología producto en Y^X.

Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. El espacio de funciones continuas de X en Y se denota por $C(X, Y)$.

Definición 2.1.2. Sean (Y, d) un espacio métrico y X un espacio métrico compacto. Se define la métrica del **supremo** o métrica **uniforme** sobre $C(X, Y)$ de la siguiente manera:

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\} \text{ para } f, g \in C(X, Y).$$

Definición 2.1.3. Sean (Y, d) un espacio métrico y X un espacio métrico compacto. Dados un elemento f en $C(X, Y)$ y un número $\varepsilon > 0$, sea

$$B(f, \varepsilon) = \{g \in C(X, Y) : \ \rho(f, g) < \varepsilon\}.$$

Los conjuntos $B(f, \varepsilon)$ con $f \in C(X, Y)$ y $\varepsilon > 0$, conforman una base para una topología sobre $C(X, Y)$ llamada ***topología de la convergencia uniforme***.

Definición 2.1.4. Si (Y, d) es un espacio métrico, un subconjunto $\mathcal{F}$ de $C(X, Y)$ se dice que es ***puntualmente acotado*** respecto a d, si para cada $a \in X$, el subconjunto

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$$

de Y, está acotado respecto a la distancia d.

Definición 2.1.5. Un espacio métrico (X, d) se dice que está ***totalmente acotado*** si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un cubrimiento finito de X por bolas de radio ε.

Definición 2.1.6. Sean (X, d') y (Y, d) espacios métricos. Un conjunto H de funciones de X en Y se dice **equicontinuo** en x_0 si y solamente si

$$(\forall r > 0)(\exists \delta > 0)(\forall f \in H)(x \in B_{d'}(x_0, \delta) \to f(x) \in B_d(f(x_0), r)).$$

Se dice que H es **equicontinuo** si lo es para todo $x_0 \in X$. Observemos que esta definición implica que todas las funciones en H son continuas en x_0 y además un sólo δ sirve para todas.

2.2 Teorema de Arzela.

Definición 2.2.1. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es **secuencialmente compacto** si cada sucesión en X contiene una subsucesión convergente.

Teorema 2.2.2. *Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es compacto.*
2. *X es secuencialmente compacto.*

El siguiente resultado es bien conocido (ver [6]).

Teorema 2.2.3. *Un espacio métrico (X, d) es compacto si y solo si es completo y está totalmente acotado.*

Lema 2.2.4. *Sean X un espacio topológico compacto e (Y, d) un espacio métrico. Si un subconjunto $\mathcal{F}$ de $C(X, Y)$ está totalmente acotado, entonces $\mathcal{F}$ es equicontinuo.*

Demostración.

Supongamos que $\mathcal{F}$ está totalmente acotado. Sean $0 < \varepsilon < 1$ y $x_0 \in X$. Tomemos $\delta = \varepsilon/3$ y recubramos a $\mathcal{F}$ con una cantidad finita de δ-bolas abiertas

$$B_\rho(f_1, \delta), \ldots, B_\rho(f_n, \delta)$$

en $C(X,Y)$. Cada aplicación f_i es continua; por tanto, podemos escoger un entorno U de x_0 tal que, para $i = 1, \dots, n$,

$$d(f_i(x), f_i(x_0)) < \delta$$

siempre que $x \in U$.

Sea $f \in \mathcal{F}$ arbitrario. Entonces f pertenece al menos a una de las δ-bolas anteriores, supongamos que es $B_\rho(f_i, \delta)$. Luego, para $x \in U$, tenemos

$$d(f(x), f_i(x)) < \delta,$$

$$d((f_i(x), f_i(x_0)) < \delta,$$

$$d(f_i(x_0), f(x_0)) < \delta.$$

La primera y la tercera desigualdad se deben a que $\rho(f, f_i) < \delta$, y la segunda se tiene porque $x \in U$. Entonces,

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0)) < \varepsilon,$$

para todo $x \in U$, como deseábamos probar.

$\square$

Lema 2.2.5. *Sean X un espacio topológico compacto e (Y,d) un espacio métrico compacto. Si un subconjunto $\mathcal{F}$ de $C(X,Y)$ es equicontinuo, entonces $\mathcal{F}$ está totalmente acotado.*

Demostración.

Supongamos que $\mathcal{F}$ es equicontinuo. Dado $\varepsilon > 0$, mostremos que $\mathcal{F}$ se puede cubrir por una cantidad finita de bolas de radio ε.

Tomemos $\delta = \varepsilon/3$. Dado $a \in X$, existe un entorno U_a de a tal que $d(f(x), f(a)) < \delta$, para todo $x \in U_a$ y toda $f \in \mathcal{F}$. Por la compacidad de X podemos cubrir a X con una cantidad finita de tales entornos U_a, para $a = a_1, \dots, a_k$; denotemos U_{a_i} por U_i. Por la compacidad de Y, podemos cubrir también Y con una cantidad finita de conjuntos abiertos $V_1, \dots, V_m$ de diámetro menor que δ.

Sea J la colección de todas las aplicaciones $\alpha : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, m\}$ tal que existe una aplicación f de $\mathcal{F}$ tal que $f(a_i) \in V_{\alpha(i)}$, para cada $i = 1, \dots, k$. Fijemos, para cada $\alpha \in J$, una función $f_\alpha \in \mathcal{F}$ con esa propiedad. Afirmamos que las bolas abiertas $B_\rho(f_\alpha, \varepsilon)$, para $\alpha \in J$, recubren a $\mathcal{F}$.

Sea $f \in \mathcal{F}$. Para cada $i = 1, \ldots, k$, escojamos un entero $\alpha(i)$ tal que $f(a_i) \in V_{\alpha(i)}$. Entonces la aplicación α está en J. Afirmamos que f pertenece a la bola $B_\rho(f_\alpha, \varepsilon)$.

Sea $x \in X$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x \in U_i$. Entonces

$$d(f(x), f(a_i)) < \delta,$$

$$d(f(a_i), f_\alpha(a_i)) < \delta,$$

$$d(f_\alpha(a_i), f_\alpha(x)) < \delta.$$

La primera y la tercera desigualdad se verifican porque $x \in U_i$, y la segunda desigualdad es cierta porque $f(a_i)$ y $f_\alpha(a_i)$ están en $V_{\alpha(i)}$. Por lo tanto,

$$d(f(x), f_\alpha(x)) \leq d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), f_\alpha(a_i)) + d(f_\alpha(a_i), f_\alpha(x)) < \varepsilon.$$

Como esta desigualdad es cierta para todo $x \in X$,

$$\rho(f, f_\alpha) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $f \in B_\rho(f_\alpha, \varepsilon)$, como deseábamos probar.

$\square$

El siguiente resultado es clásico (ver [6]).

Teorema 2.2.6. *Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones continuas del espacio topológico X al espacio métrico Y. Si $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, entonces f es continua.*

El teorema que sigue da una caracterización de la compacidad en la topología uniforme.

Teorema 2.2.7. *(Teorema de Arzela-Ascoli). Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones en el espacio $C(X, \mathbb{R})$, donde el espacio métrico (X, d) es compacto. Dotemos a $C(X, \mathbb{R})$ con la topología de la convergencia uniforme. Entonces $\mathcal{F}$ tiene clausura compacta si y solo si $\mathcal{F}$ es equicontinuo y puntualmente acotado.*

Demostración. Denotemos a la clausura de $\mathcal{F}$ por $\mathcal{G}$.

1. Mostremos que si $\mathcal{G}$ es compacto, entonces es equicontinuo y puntualmente acotado.

   Como $\mathcal{G}$ es compacto, por el Teorema 2.2.3 es totalmente acotado respecto a ρ, luego por el Lema 2.2.4 $\mathcal{G}$ es equicontinuo respecto a $|\cdot|$.

   Como $\mathcal{G}$ está totalmente acotado, sea $M > 0$ tal que $\rho(f,g) \leq M$ para todo f y g en $\mathcal{G}$. En particular, para $x \in X$, $|f(x) - g(x)| \leq M$, es decir, $\mathcal{G}_x = \{g(x) : g \in \mathcal{G}\}$ está acotado. Por tanto, $\mathcal{G}$ es puntualmente acotado.

2. Si $\mathcal{F}$ es equicontinuo y puntualmente acotado, entonces $\mathcal{G}$ es equicontinuo y puntualmente acotado.

   Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Mostraremos que $\mathcal{G}$ es equicontinuo en x_0. Como $\mathcal{F}$ es equicontinuo en x_0, existe $\delta > 0$, tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3$ para todo $x \in B_d(x_0, \delta)$ y todo $f \in \mathcal{F}$.

   Sea $g \in \mathcal{G}$, elijamos $f \in \mathcal{F}$ tal que $\rho(f,g) < \varepsilon/3$. Luego:

   $$|g(x)-g(x_0)| \leq |g(x)-f(x)|+|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)-g(x_0)| < \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3 = \varepsilon$$

   para todo $x \in B_d(x_0, \delta)$. Por lo tanto $\mathcal{G}$ es equicontinuo en x_0. Como x_0 fue arbitrario, se concluye que $\mathcal{G}$ es equicontinuo.

   Ahora veamos que $\mathcal{G}$ es puntualmente acotado.

   Sea $x_0 \in X$. Como $\mathcal{F}$ es puntualmente acotado, sea $M > 0$ tal que:

   $$|f(x_0) - h(x_0)| \leq M$$

   para todo $f, h \in \mathcal{F}$. Sean $g, g' \in \mathcal{G}$, elijamos $f, f' \in \mathcal{F}$ tal que $\rho(f,g) < 1$ y $\rho(f', g') < 1$. Entonces,

   $$|g(x_0) - g'(x_0)| \leq |g(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f'(x_0)| + |f'(x_0) - g'(x_0)| < M + 2.$$

   Por tanto, $\mathcal{G}$ es puntualmente acotado.

3. Probemos que si $\mathcal{G}$ es equicontinuo y puntualmente acotado, entonces existe un subespacio compacto $\mathcal{Y}$ de $\mathbb{R}$ que contiene a la unión de los conjuntos $g(X)$ para $g \in \mathcal{G}$.

   Como $\mathcal{G}$ es equicontinuo, para cada $a \in X$ existe δ_a, tal que $|g(x) - g(a)| < 1$

para $x \in B_d(a, \delta_a)$ y $g \in \mathcal{G}$. Por tanto, tenemos que:

$$X = \bigcup_{a \in X} B_d(a, \delta_a).$$

Y como X es compacto, existen $a_1, a_2, \dots, a_k$ en X tal que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} B_d(a_i, \delta_{a_i}).$$

Como los conjuntos $\mathcal{G}_{a_i}$ están acotados para $i = 1, 2, \dots, k$, entonces $\mathcal{G}_{a_1} \cup \dots \cup \mathcal{G}_{a_k}$ también está acotada y podemos suponer que está contenida en el intervalo $(-N, N)$ para algún $N > 0$. Entonces para toda $g \in \mathcal{G}$, el conjunto $g(X)$ está contenido en $(-N-1, N+1)$. Ya que, dado $x \in X$ y $g \in \mathcal{G}$, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x \in B_d(a_i, \delta_{a_i})$, luego $|g(a_i) - g(x)| < 1$, y como $|g(a_i)| < N$, se tiene que:

$$|g(x)| = |g(x) - g(a_i) + g(a_i)| \leq |g(x) - g(a_i)| + |g(a_i)| < N + 1.$$

Sea $\mathcal{Y} = [-N-1, N+1]$. Esto concluye lo que queríamos mostrar.

4. Mostremos que si $\mathcal{F}$ es equicontinuo y puntualmente acotado, entonces $\mathcal{G}$ es completo y totalmente acotado.

   Veamos que $\mathcal{G}$ es completo. Sea $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon/2$. Por tanto, para cada $x \in X$ se tiene que $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \rho(f_n, f_m)$, para todo m, n, esto se traduce en que la sucesión $f_1(x), f_2(x), \dots$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Por tanto la sucesión $\langle f_n(x) \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto y_x. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = y_x$. Afirmamos que la sucesión $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f con la distancia ρ. En efecto, se tiene que si $n, m \geq N$, entonces $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$ con $x \in X$. Manteniendo n y x fijos y haciendo tender m a infinito, obtenemos que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2.$$

   Lo cual es cierto para todo $x \in X$, siempre que $n \geq N$. Por consiguiente,

$$\rho(f_n, f) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

   para $n \geq N$, como deseábamos probar.

Para mostrar que $\mathcal{G}$ está totalmente acotado partimos del hecho de que $\mathcal{F}$ es equicontinuo y puntualmente acotado, entonces $\mathcal{G}$ es equicontinuo y puntualmente acotado por el ítem 2. En consecuencia, por el ítem 3 existe un subespacio $\mathcal{Y}$ de $\mathbb{R}$ compacto que contiene a todas las imágenes de las funciones que están en $\mathcal{G}$ y por el Lema 2.2.5 $\mathcal{G}$ está totalmente acotado respecto a ρ.

$\square$

Como corolario tenemos el siguiente resultado (que en algunos textos lo llaman el Teorema de Arzela-Ascoli):

Teorema 2.2.8. *Si una sucesión $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas a valores reales, definidas sobre $[0,1]$, es uniformemente acotada y equicontinua, entonces existe una subsucesión $\langle f_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ uniformemente convergente.*

Demostración.

Sea $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de valor real definidas en $[0,1]$ que es uniformemente acotada y equicontinua.

Sea $\mathcal{G} = \overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Como $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente acotado y equicontinuo, por el Teorema 2.2.7, $\mathcal{G}$ es compacto. Ya que $C([0,1])$ es un espacio métrico con la distancia ρ, e $\mathcal{G} \subseteq C([0,1])$, entonces $\mathcal{G}$ es un subespacio métrico de $C([0,1])$ y como $\mathcal{G}$ es compacto, entonces por el Teorema 2.2.2 $\mathcal{G}$ es secuencialmente compacto y por tanto, $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\langle f_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Así, la subsucesión $\langle f_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente con la distancia del supremo ρ.

$\square$

Ahora precisaremos una observación sobre el Teorema de Arzela-Ascoli que se mencionó en la introducción. Sea $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de valor real definidas sobre $[0,1]$, uniformemente acotada y equicontinua. Consideremos la colección de subconjuntos de $\mathbb{N}$ dada por:

$$\mathcal{S} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \langle f_n \rangle_{n\in A} \text{ es uniformemente convergente}\}.$$

Afirmamos que dado cualquier conjunto infinito $A \subseteq \mathbb{N}$ existe $B \subseteq A$ tal que $\langle f_n \rangle_{n\in B}$ es uniformemente convergente. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito. Por tanto existe

$h : \mathbb{N} \to A$ biyectiva y estrictamente creciente. Por el Teorema 2.2.8 $\left\langle f_{h(n)} \right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente, $\left\langle f_{h(n_k)} \right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$. Basta tomar $B = \{h(n_k) : k \in \mathbb{N}\}$.

2.3 Teorema de Helly.

Definición 2.3.1. El espacio de Helly es el subespacio H de $[0,1]^{[0,1]}$ con la topología producto que consiste de todas las funciones crecientes.

El siguiente resultado es bien conocido. Hemos seguido la presentación hecha en el libro [7] completando los detalles que ellos omitieron.

Teorema 2.3.2. *El espacio de Helly satisface las siguientes propiedades:*

(1) Es compacto.

(2) Es 1^{er}-numerable.

(3) No es metrizable.

Demostración.

1. Para mostrar que H es compacto, demostraremos que $[0,1]^{[0,1]} \setminus H$ es abierto, en consecuencia tendremos que H es cerrado y por el Teorema 1.0.7 H es compacto.

   Sea $f \in [0,1]^{[0,1]} \setminus H$, entonces existen $x, y \in [0,1]$ tales que $x < y$ y $f(x) > f(y)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que:

   $$\varepsilon < \frac{1}{2}[f(x) - f(y)]$$

   y sean $U_x = B(f(x), \varepsilon)$ y $U_y = B(f(y), \varepsilon)$. Afirmamos que:

   $$U = \pi_x^{-1}(U_x) \cap \pi_y^{-1}(U_y)$$

   es una vecindad de f disyunta de H. Ya que si $U \cap H \neq \varnothing$, sea $g \in U \cap H$, como $g \in U$, $g(x) \in B(f(x), \varepsilon)$ y $g(y) \in B(f(y), \varepsilon)$, por tanto, $g(x) > g(y)$, además, también $g \in H$, es decir, $g(x) \leq g(y)$, lo cual no es posible. Esto concluye que H es cerrado y como es subespacio de un espacio compacto, se concluye que H es compacto.

2. Sea $f \in H$, como f es creciente y su dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces f tiene a lo más un número contable de discontinuidades. Sea A_f el conjunto de puntos de discontinuidades de f junto con los números racionales en el intervalo $[0,1]$; entonces A_f es un conjunto contable. Afirmamos que el conjunto de todas las intersecciones finitas de las $\pi_a^{-1}(B(f(a),1/j))$ para $a \in A_f$ y $j \in \mathbb{N}$ es una base local contable para f. Para verificar esto debemos ver que cada vecindad $\pi_y^{-1}(B(f(y),\varepsilon))$, de la subbase de f, contiene un elemento de nuestra familia contable. Sean $\varepsilon > 0$ e $y \in [0,1]$. Para probar lo anterior, debemos dividir esto en dos casos:

   (a) f es discontinua en y. Es decir, $y \in A_f$. Seleccionamos $j \in \mathbb{N}$ tal que $1/j < \varepsilon$, y observemos que

   $$\pi_y^{-1}(B(f(y),1/j)) \subseteq \pi_y^{-1}(B(f(y),\varepsilon)).$$

   (b) f es continua en y. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$, $f(x) \in B(f(y),\varepsilon)$. Sean a un número racional en el intervalo $(y, y+\delta)$ y $j \in \mathbb{N}$ tal que $B(f(a),1/j) \subset B(f(y),\varepsilon)$; y similarmente, sean b un número racional en el intervalo $(y-\delta, y)$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $B(f(b),1/k) \subset B(f(y),\varepsilon)$. Afirmamos que

   $$[\pi_a^{-1}(B(f(a),1/j)) \cap \pi_b^{-1}(B(f(b),1/k))] \subseteq \pi_y^{-1}(B(f(y),\varepsilon)).$$

   Para mostrar esto, sea $g \in \pi_a^{-1}(B(f(a),1/j)) \cap \pi_b^{-1}(B(f(b),1/k))$, entonces $g(a) \in B(f(a),1/j)$ y $g(b) \in B(f(b),1/k)$, por tanto, $g(a)$ y $g(b)$ están en $B(f(y),\varepsilon)$. Como g es creciente y $b < y < a$, entonces $g(b) \leq g(y) \leq g(a)$; en consecuencia, $g(y) \in B(f(y),\varepsilon)$.

   Con esto termina la demostración de que H es primero numerable.

3. Para ver que H no es metrizable, usaremos el Teorema 1.0.6. Más específicamente veamos que H es separable, pero no es segundo numerable.

   (a) Consideremos los conjuntos de los números diádicos cuyo denominador es una potencia de dos:

   $$D_i = \left\{ \frac{k}{2^i} : k \in \mathbb{N}, k \leq 2^i \right\}$$

   donde $i \in \mathbb{N}$. Sean $i \in \mathbb{N}$ y Y_i el conjunto de funciones que cumplen que:

1. Son crecientes y continuas.
2. Lineales a trozos, donde los trozos van a estar definidos por los elementos de D_i; es decir, dados dos números diádicos consecutivos en D_i se tiene que la función definida entre esos dos números es lineal.
3. Si $f \in Y_i$, entonces $f(m) \in \mathbb{Q}$ para todo $m \in D_i$.

Con estas condiciones, se tiene que cada Y_i es numerable y en consecuencia:

$$Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$$

es numerable. Faltaría ver que:

$$\overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i} = H.$$

Sean $f \in H$ y U_f un abierto básico que contiene a f, entonces:

$$U_f = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}(B(f(x_i), \varepsilon))$$

con $\varepsilon > 0$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puntos en $[0, 1]$. Vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están ordenados de forma creciente. Debemos ver que existe $h \in Y \cap U_f$. Sea $\delta = \text{mín}\{|x_i - x_j| : i \neq j \wedge i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$, entonces por la propiedad arquimediana de la recta, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{1}{2^s} < \delta.$$

Sea $m = 3s$. Llamaremos al cardinal de D_m como N (notemos que $N = 2^m + 1$). Sean $a_1, a_2, \ldots, a_N$ los elementos de D_m en orden estrictamente creciente. Observemos que para cada x_i existe $k \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $a_{k-1} \leq x_i \leq a_k$ y por la escogencia del m no puede ocurrir que $x_i, x_j \in [a_{k-1}, a_k]$ si $i \neq j$. Además, para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, existe k tal que

$$x_i < a_{k-1} < a_k < x_{i+1}$$

donde a_{k-1} y a_k son números consecutivos de D_m. Construimos h de la siguiente manera:

Definamos por inducción las imágenes de los elementos de D_m.

1. Definimos $h(a_1)$ tal que $h(a_1) \in B(f(x_1), \varepsilon)$.

2. Si $a_i \leq x_1$, con $i \in \{2, \ldots, N-1\}$, definimos $h(a_i) = h(a_1)$.
3. Sea a_k el menor número diádico tal que $x_1 < a_k$, entonces definimos $h(a_k) = h(a_1)$ y a $h(a_{k+1}) \in B(f(x_2), \varepsilon)$ con $h(a_k) \leq h(a_{k+1})$.
4. Análogamente que en el ítem (3.), si $a_i \leq x_2$, para $i \in \{k+2, \ldots, N-1\}$, definimos $h(a_i) = h(a_{k+1})$. De esta manera seguimos escogiendo los valores de $h(a)$ con $a \in D_m$.
5. Supongamos que tenemos elegido el valor $h(a_j)$ para $N > j > k+1$. Si $a_j \leq x_n$, veamos cómo definimos $h(a_{j+1})$. Sea $x_r = \text{mín}\{x_i : x_i > a_j\}$, si $a_j = \text{mín}\{b \in D_m : b \in (x_{r-1}, x_r]\}$, entonces definimos $h(a_{j+1})$ de tal manera que $h(a_{j+1}) \in B(f(x_r), \varepsilon)$ con $h(a_j) \leq h(a_{j+1})$, de lo contrario, sea $h(a_{j+1}) = h(a_j)$. Ahora si $a_j > x_n$, definimos $h(a_{j+1}) = h(a_j)$.

Con estas condiciones podemos definir la función continua, creciente y lineal donde los extremos de cada trozo van a estar definidos por cada par de elementos consecutivos en D_m. Observemos que para cada x_i, escojemos a_{k-1} y a_k en D_m de tal modo que $x_i \in [a_{k-1}, a_k]$ y $h(a_{k-1})$, $h(a_k)$ están en $B(f(x_i), \varepsilon)$, por tanto como h es creciente, se tiene que $h(x_i) \in B(f(x_i), \varepsilon)$. En consecuencia, $h \in Y \cap U_f$.

(b) Para ver que H no es segundo numerable, consideremos el subespacio D de H que consiste en todas las funciones f_x con $x \in [0, 1]$ definidas de la siguiente manera:

$$f_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x, \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = x, \\ 1 & \text{si } t > x. \end{cases}$$

Dotemos a D con la topología inducida de subespacio. Afirmamos que D es discreto. Para ver esto, sean $x \in [0, 1]$ y $f_x \in D$, tomemos $\varepsilon = 1/4$, entonces

$$\pi_x^{-1}(B(f_x(x), 1/4)) \cap D = \pi_x^{-1}(B(1/2), 1/4) \cap D = \{f_x\}.$$

Ya que si $x_1 \in [0, 1]$ y $x_1 \neq x$, entonces $|1/2 - f_{x_1}(x)| = 1/2 > 1/4$; con esto se concluye que $f_{x_1} \notin B(1/2, 1/4)$, es decir, D es discreto. Además, se puede observar que D no es contable y como es discreto, no es segundo numerable y en consecuencia H tampoco lo es.

□

La idea de considerar el conjunto D en la demostración del teorema anterior para ver que H no es segundo numerable, es de suma importancia. En particular al definir para cada función $x \in [0,1]$, $f_x(x) = 1/2$ en lugar de usar funciones características. Esto se debe a que el conjunto de funciones características $\mathcal{A}$ en el espacio de Helly no es discreto. Para ver esto, sea $g_x = \chi_{[x,1]}$ para $x \in [0,1]$. Fijemos x y sea $\varepsilon > 0$, sin pérdida de generalidad podemos considerar el siguiente abierto U_{g_x} que contiene a g_x, como sigue:

$$U_{g_x} = \bigcup_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}(B(g_x(t), \varepsilon))$$

Para $t \in [0,1]$. Sean $\alpha = \max\{x_i : x_i < x,\ i \in \{1, \dots, n\}\}$ y $\beta = \min\{x_i : x_i \geq x,\ i \in \{1, \dots, n\}\}$. Sean $\gamma = (\beta + \alpha)/2$ y

$$g_\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \gamma, \\ 1 & \text{si } t \geq \gamma. \end{cases}$$

Entonces, $g_\gamma(x_i) \in B(f_x(x_i), \varepsilon)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. De lo anterior concluimos que $\mathcal{A}$ no es discreto como subespacio de H.

La importancia de que el espacio de Helly H con la topología producto sea compacto y primero numerable la da el siguiente Teorema.

Teorema 2.3.3. *Si $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones monótonas de $[0,1]$ en $[0,1]$, entonces existe una subsucesión $\langle f_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ que converge puntualmente.*

Demostración.

(1) Sea $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones crecientes de $[0,1]$ en $[0,1]$. Supongamos que no existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A = \{n \in \mathbb{N} : f_n = f_{n_0}\}$ es infinito, porque de lo contrario ya terminamos.

Por el Teorema 2.3.2 H es compacto y primero numerable con la topología producto. Por tanto, por el Teorema 1.0.7 se tiene que $\overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}$ es compacto. Sea $f \in \overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}} \setminus \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, como H es primero numerable, existe una subsucesión de $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ que converge puntualmente a f.

(2) Sea $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones decrecientes de $[0,1]$ en $[0,1]$. Entonces $\langle -f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones crecientes y usamos (1).

$\square$

El siguiente teorema permite dar una versión más general del Teorema 2.3.2

Teorema 2.3.4. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $H' = \{g \in [a,b]^{\mathbb{R}} : g$ *es creciente* $\}$. *Entonces* H' *con la topología producto es compacto y primero numerable.*

Demostración.

(1) Para demostrar que H' es compacto se sigue un argumento análogo al que se hizo en el Teorema 2.3.2 para mostrar que el espacio de Helly es compacto: H' es cerrado en el compacto $[a,b]^{\mathbb{R}}$.

(2) Para ver que H' es primero numerable, sea $f \in H'$, como f es creciente y su dominio es $\mathbb{R}$, entonces f tiene a lo más un número contable de discontinuidades. Sea A_f el conjunto de puntos de discontinuidades de f junto con los números racionales; entonces A_f es un conjunto contable. Afirmamos que el conjunto de todas las intersecciones finitas de las $\pi_a^{-1}(B(f(a), 1/j))$ para $a \in A_f$ y $j \in \mathbb{N}$ es una base local contable para f. Esto se tiene siguiendo un argumento similar al que se usó para mostrar que el espacio de Helly H es primero numerable (ver Teorema 2.3.2).

□

El otro teorema clásico que mencionamos en la introducción es el siguiente el cual es tomado de [3].

Teorema 2.3.5. *(Helly). Si* $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de funciones monótonas de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *uniformemente acotada, entonces existe una subsucesión* $\langle f_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ *la cual converge puntualmente.*

Demostración.

(1) Sea $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones crecientes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ uniformemente acotada. Entonces, existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$. Supongamos que no existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A = \{n \in \mathbb{N} : f_n = f_{n_0}\}$ es infinito, porque de lo contrario ya terminamos.

Por el Teorema 2.3.4 $H' = \{g \in [-M, M]^{\mathbb{R}} : g$ es creciente $\}$ es compacto y primero numerable con la topología producto. Por tanto, por el Teorema 1.0.7 se tiene que $\overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}$ es compacto. Sea $f \in \overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}} \setminus \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, como H' es primero numerable, existe una subsucesión de $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ que converge puntualmente a f.

(2) Sea $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones decrecientes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ uniformemente acotada. Entonces $\langle -f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones crecientes y usamos (1).

$\square$

Ahora precisaremos una observación sobre el Teorema de Helly que se mencionó en la introducción. Sea $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones crecientes, definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, uniformemente acotada. Consideremos la colección de subconjuntos de $\mathbb{N}$ dada por:

$$\mathcal{H} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \langle f_n \rangle_{n\in A} \text{ es puntualmente convergente}\}.$$

Afirmamos que dado cualquier conjunto infinito $A \subseteq \mathbb{N}$ existe $B \subseteq A$ tal que $\langle f_n \rangle_{n\in B}$ es puntualmente convergente. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito. Por tanto existe $h : \mathbb{N} \to A$ biyectiva y estrictamente creciente. Por el Teorema 2.3.5 $\langle f_{h(n)} \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión puntualmente convergente, $\langle f_{h(n_k)} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$. Basta tomar $B = \{h(n_k) : k \in \mathbb{N}\}$.

Capítulo 3

SELECCIÓN DE SUBSUCESIONES USANDO IDEALES

En este capítulo los ideales y la propiedad de Bolzano-Weierstrass (BW) juegan un papel importante. El estudio de estos ideales y la propiedad BW permite saber bajo qué condiciones se puede garantizar que dada una sucesión de funciones $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ con las hipótesis del Teorema de Arzela-Ascoli o del Teorema de Helly (respectivamente), se puede garantizar que existe A que no está en el ideal tal que $\langle f_n \rangle_{n\in A}$ es uniformemente convergente o puntualmente convergente (respectivamente).

3.1 Ideales.

Definición 3.1.1. Un **ideal** sobre X es una familia $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que

(1) $A \subset B$ y $B \in \mathcal{I}$, entonces $A \in \mathcal{I}$.

(2) $A, B \in \mathcal{I}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.

(3) $X \notin \mathcal{I}$ y $\varnothing \in \mathcal{I}$.

Sea $\mathcal{I}$ es un ideal sobre $\mathbb{N}$. Notación, $\mathcal{I}^+ = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}^* = \{\mathbb{N} \setminus A : A \in \mathcal{I}\}$. $\mathcal{I}^+$ es llamado *coideal* e $\mathcal{I}^*$ es llamado el *filtro dual*.

Ejemplo 3.1.2. $FIN = \{A \subseteq \mathbb{N} : A$ es finito $\}$ es un ideal sobre $\mathbb{N}$.

Definición 3.1.3. Un conjunto $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se dice que es **hereditario**, si es cerrado bajo subconjuntos.

Ejemplo 3.1.4. Todo ideal $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{N}$ es hereditario, por la definición de ideal.

Definición 3.1.5. Una función $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ es una **submedida** sobre $\mathbb{N}$ si:

(1) $\varphi(\varnothing) = 0$.

(2) $\varphi(A) \leq \varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$ para todo $A, B \subseteq \mathbb{N}$.

(3) $\varphi(\mathbb{N}) = \infty$.

Se dice que una submedida φ es **semicontinua inferiormente** si para todo $A \subseteq \mathbb{N}$ se tiene que

$$\varphi(A) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}).$$

Definimos $Fin(\varphi) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \varphi(A) < \infty\}$. Observemos que $Fin(\varphi)$ es un ideal.

Ejemplo 3.1.6. Sea $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ dada por:

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \varnothing, \\ \sum_{n\in A} \frac{1}{n+1} & \text{si } A \neq \varnothing. \end{cases}$$

Veamos que φ es una submedida y además que es semicontinua inferiormente.

φ **es una submedida:**

(1) Por la definición de φ tenemos que $\varphi(\varnothing) = 0$.

(2) Sean $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Observemos que si $\varphi(A \cup B) < \infty$, entonces:

$$\varphi(A \cup B) = \sum_{n\in(A\cup B)} \frac{1}{n+1} = \begin{cases} \sum_{n\in A} \frac{1}{n+1} & \text{si } (B \setminus A) = \varnothing, \\ \sum_{n\in A} \frac{1}{n+1} + \sum_{n\in(B\setminus A)} \frac{1}{n+1} & \text{si } (B \setminus A) \neq \varnothing. \end{cases}$$

De lo anterior se tiene que $\varphi(A) \leq \varphi(A \cup B)$. Además,

$$\varphi(A) \leq \varphi(A \cup B) \leq \varphi(A \cup B) + \sum_{n\in(A\cap B)} \frac{1}{n+1} = \varphi(A) + \varphi(B).$$

De lo cual se concluye que $\varphi(A) \leq \varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$.

Ahora, si $\varphi(A \cup B) = \infty$, entonces $\varphi(A) = \infty$ o $\varphi(B) = \infty$. Por tanto, $\varphi(A) \leq \varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$.

(3) Como la serie
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} \text{ diverge,}$$
tenemos que $\varphi(\mathbb{N}) = \infty$.

Esto muestra que φ es una submedida.

φ es semicontinua inferiormente:

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, es claro que

$$\varphi(A) = \lim_{m \to \infty} \varphi(\{0, \ldots, m-1\} \cap A)$$

por la definición de serie convergente.

Los ideales sobre $\mathbb{N}$ se verán como subconjuntos de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ identificando cada subconjunto de $\mathbb{N}$ con su función característica. Esto nos permite asignar una complejidad topológica a los ideales, precisamente, la complejidad que tienen como subconjunto de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Diremos que un conjunto X es un ideal F_σ, si X es un ideal y es F_σ.

Teorema 3.1.7. *Dado G un ideal F_σ, existe una familia $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos cerrados hereditarios tal que $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ y $B_n \subseteq B_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall A, B \in B_n)\ ((A \cup B) \in B_{n+1}).$$

Demostración.

Sea $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $\phi(A, B) = A \cap B$. Sea $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ donde D_n es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$F_m = \phi(\left(\bigcup_{k \leq m} D_k\right) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})).$$

Como ϕ es continua, por el Lema 1.0.11, entonces F_m es cerrado. Notemos que F_m es hereditario para cada m. Como G es hereditario, entonces $F_m \subseteq G$ para todo $m \in \mathbb{N}$, es decir, $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m \subseteq G$. Observemos que por la definición de F_m, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $D_m \subseteq F_m$. De lo cual concluimos que $G \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m$.

Veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subseteq F_{n+1}$. Esto se tiene porque:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \phi\big(\big(\textstyle\bigcup_{k\leq n+1} D_k\big) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})\big) = \phi\big(\big(\textstyle\bigcup_{k\leq n} D_k\big) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})\big) \ \cup\ \phi(D_{n+1} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})) \\ &= F_n \ \cup\ \phi(D_{n+1} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})). \end{aligned}$$

Ahora definamos inductivamente $B_0 = F_0, \ldots, B_{n+1} = \zeta(B_n \times B_n) \cup F_{n+1}, \ldots$, donde $\zeta : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ está dada por $\zeta(A, B) = A \cup B$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A, B \in B_n$, como $\zeta(B_n \times B_n) \subseteq B_{n+1}$, entonces $A \cup B \in B_{n+1}$. $\square$

Todos los ideales F_σ son caracterizados por el siguiente Teorema de Mazur [4].

Teorema 3.1.8. *(Mazur [4]) Las siguientes condiciones son equivalentes para un ideal $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{N}$:*

(1) $\mathcal{I}$ es un ideal F_σ;

(2) $\mathcal{I} = Fin(\varphi)$ para alguna submedida semicontinua inferiormente φ sobre $\mathbb{N}$.

Demostración.

$(1) \to (2)$ Como $\mathcal{I}$ es un ideal F_σ, entonces existe una familia $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ como en el Teorema 3.1.7. Por tanto, para cada $A \in \mathcal{I}$ definimos $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ como

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \varnothing, \\ \text{mín}\{n+1 : A \in B_n\} & \text{si } A \in \mathcal{I} \setminus \{\varnothing\}, \\ \infty & \text{si } A \notin \mathcal{I}. \end{cases}$$

Veamos que φ es una submedida.

(a) $\varphi(\varnothing) = 0$, por definición de φ.

(b) Sean $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ no vacíos. Sean

$$\varphi(A) = \text{mín}\{n+1 : A \in B_n\} = a_1,$$

$$\varphi(B) = \text{mín}\{n+1 : B \in B_n\} = a_2,$$

$$\varphi(A \cup B) = \text{mín}\{n+1 : (A \cup B) \in B_n\} = a_3.$$

Como los B_n son hereditarios, se tiene que $A, B \in B_{a_3}$. Por tanto, $a_1 \leq a_3$ y $a_2 \leq a_3$. Supongamos que $a_1 + a_2 < a_3$. Sea $l = \max\{a_1, a_3\}$. Entonces, $A, B \in B_l$, lo cual implica que $(A \cup B) \in B_{l+1}$. Observemos que $l + 1 < a_3$, lo cual es una contradicción.

(c) Como $\mathcal{I}$ es un ideal, se tiene que $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$, luego $\varphi(\mathbb{N}) = \infty$.

Claramente φ es semicontinua inferiormente.

$(2) \to (1)$

Sea $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ una submedida semicontinua inferiormente sobre $\mathbb{N}$ tal que $\mathcal{I} = Fin(\varphi)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$F_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : \forall k \, [\varphi(A \cap \{0, 1, \ldots, k-1\}) \leq n]\}.$$

Observemos que para k fijo, el conjunto $\{A \subseteq \mathbb{N} : \varphi(A \cap \{0, 1, \ldots, k-1\}) \leq n\}$ es una unión finita de conjuntos abiertos-cerrados básicos, por tanto F_n es cerrado e $\mathcal{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

□

Ejemplo 3.1.9. Los siguientes son ejemplos de ideales F_σ:

(1) FIN es F_σ, por ser un conjunto numerable.

(2) $\mathcal{I}_{1/(n+1)} = \left\{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} \frac{1}{n+1} < \infty\right\}$ es F_σ, por el Teorema 3.1.8.

Lema 3.1.10. *Sea $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ una submedida semicontinua inferiormente, entonces para cada $U \notin Fin(\varphi)$ se tiene que dado $k \in \mathbb{N}$ existe $A_k \subset U$ finito, tal que*

$$\varphi(A_k) \geq k.$$

Demostración. Sea $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ una submedida semicontinua inferiormente. Por definición $\varphi(\mathbb{N}) = \infty$. Supongamos que existen $U \notin Fin(\varphi)$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $A \subset U$ finito

$$\varphi(A) < k.$$

Entonces tenemos que

$$\varphi(U) = \lim_{n \to \infty} \varphi(\{0, 1, \ldots, n-1\} \cap U) \leq k$$

lo cual es una contradición.

□

Sean A y B conjuntos, diremos que $A \subseteq^* B$ si $A \setminus B$ es finito.

Definición 3.1.11. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X. Diremos que $\mathcal{I}$ es p^+, si dada una secuencia $\langle U_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente, con $U_n \in \mathcal{I}^+$, $n \in \mathbb{N}$, existe $U \in \mathcal{I}^+$ tal que $U \subseteq^* U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La demostración que presentamos en este resultado es la dada en [3].

Teorema 3.1.12. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal F_σ sobre $\mathbb{N}$, entonces $\mathcal{I}$ es p^+.*

Demostración. Sean $\mathcal{I}$ un ideal F_σ sobre $\mathbb{N}$ y $\langle U_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia decreciente con $U_n \in \mathcal{I}^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{I}$ es F_σ, por el Teorema 3.1.8 existe una submedida φ semicontinua inferiormente, tal que $\mathcal{I} = Fin(\varphi)$. Por el Lema 3.1.10, para cada k sea $A_k \subset U_k$ finito, tal que $\varphi(A_k) \geq k$. Sea

$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

Observemos que $U \notin \mathcal{I}$, ya que $\varphi(U) = \infty$. Notemos que $U \setminus U_n \subseteq A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ y por lo tanto $U \subseteq^* U_n$ para todo n.

□

Definición 3.1.13. Diremos que un ideal $\mathcal{I}$ se puede extender a un ideal F_σ, si existe $\mathcal{J}$ ideal F_σ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$.

Un ejemplo de un ideal que no se puede extender a un ideal F_σ se mostrará a continuación. Para este fin, diremos que un subconjunto A contenido en $\mathbb{Q}$ es una sucesion convergente si A es el rango de una sucesion convergente. Consideremos la familia

$$\mathcal{C} = \{A \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1] : A \text{ es una sucesión convergente o } A \text{ es finito } \}.$$

Diremos que $B \in \mathsf{conv} \Leftrightarrow B \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$, donde $A_i \in \mathcal{C}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Observemos que conv es un ideal, con lo cual se sigue el siguiente teorema.

Teorema 3.1.14. conv *no se puede extender a un ideal F_σ.*

Demostración.

Supongamos que conv se puede extender a un ideal F_σ y sea $\mathcal{J}$ el ideal F_σ, tal que conv $\subseteq \mathcal{J}$. Entonces existe una submedida φ semicontinua inferiormente, tal que $\mathcal{J} = Fin(\varphi)$ (ver Teorema 3.1.8). Por definición de submedida, $\varphi(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = \infty$. Por tanto, $\varphi(\mathbb{Q}\cap[0,1/2]) = \infty$ ó $\mathbb{Q}\cap[1/2,1]) = \infty$, ya que si no fuese así, se tiene que $\mathbb{Q}\cap[0,1] \in \mathcal{J}$, lo cual es absurdo. Llamaremos I_1 a uno de los dos intervalos que satisface la condición anterior, es decir, que $\varphi(\mathbb{Q}\cap I_1) = \infty$. De la misma manera a como se hizo con $\mathbb{Q}\cap[0,1]$, dividimos a I_1 en dos intervalos cerrados, con intersección sólo un punto, con la misma longitud y definimos I_2 al intervalo que satisface que $\varphi(\mathbb{Q}\cap I_2) = \infty$. Supongamos que ya tenemos definido I_n, entonces lo dividimos en dos intervalos cerrados del mismo tamaño, sólo con un punto en común, y definimos I_{n+1} a uno de los intervalos que cumple que $\varphi(\mathbb{Q}\cap I_{n+1}) = \infty$.

Se ha definido una sucesión de intervalos encajados donde cada uno intersectado con $\mathbb{Q}$ tiene submedida infinita, por el Lema 3.1.10, para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos A_n finito tales que $A_n \subset \mathbb{Q}\cap I_n$ y $\varphi(A_n) \geq n$. Sea

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Claramente $\varphi(A) = \infty$, pero $A \in$ conv, ya que A es el rango de una sucesión que converge a x, donde

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

□

3.2 La propiedad de Bolzano-Weierstrass.

La propiedad más importante que se estudió en este trabajo es la siguiente.

Definición 3.2.1. [3] Se dice que el par $(X,\mathcal{I})$ tiene la **propiedad** BW (propiedad de Bolzano-Weierstrass) si toda sucesión $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ en X tiene una subsucesión convergente $\langle x_n\rangle_{n\in A}$ con $A \in \mathcal{I}^+$.

Diremos que $\mathcal{I}$ tiene la propiedad BW, si el par $([0,1],\mathcal{I})$ tiene la propiedad BW.

Si sucede esto, escribiremos que $\mathcal{I}$ es un ideal BW. [1]

Ejemplo 3.2.2. FIN es un ideal BW.

Un ejemplo de un ideal $\mathcal{I}$ que no tiene la propiedad BW se muestra a continuación.

Sea $ND(\mathbb{Q})$ el ideal sobre $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ de los conjuntos nunca densos, definido por

$$A \in ND(\mathbb{Q}) \Leftrightarrow Int(\bar{A}) = \varnothing.$$

Sea $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ biyectiva. Afirmamos que el ideal sobre $\mathbb{N}$ dado por

$$B \in \mathcal{I} \Leftrightarrow h(B) \in ND(\mathbb{Q}),$$

no tiene la propiedad BW. Sea $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,1]$. Si $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\langle x_n \rangle_{n\in A}$ con $A \subset \mathbb{N}$, entonces $A \in \mathcal{I}$. Ya que $Int(\overline{\{x_n : n \in A\}}) = \varnothing$.

Teorema 3.2.3. *El espacio $2^{\mathbb{N}}$ con la topología producto es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $[0,1]$.*

El siguiente teorema será usado y se enunciará sin demostración (ver [8]).

Teorema 3.2.4. *Todo espacio métrico compacto X es imagen continua del espacio $2^{\mathbb{N}}$.*

El siguiente resultado nos hace falta más adelante y no lo ha visto en la literatura consultada.

Teorema 3.2.5. *Sean B un subespacio cerrado de un espacio topológico compacto X e $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$ tal que $(X,\mathcal{I})$ tiene la propiedad BW. Entonces, $(B,\mathcal{I})$ tiene la propiedad BW.*

Demostración. Sean B un subespacio cerrado de un espacio topológico X e $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$, tal que $(X,\mathcal{I})$ tiene la propiedad BW. Sea $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en B. Como $(X,\mathcal{I})$ tiene la propiedad BW, existe $A \in \mathcal{I}^+$ tal que $\langle x_n \rangle_{n\in A}$ es

[1] En el trabajo [3] estudian varias propiedades similares a BW. La que nosotros estudiamos ellos la denominan $FinBW$ (y dejan BW para denotar una propiedad más débil que la nuestra).

convergente. Como $B \subseteq X$ es cerrado, entonces $\langle x_n \rangle_{n \in A}$ converge en B. De esto concluimos que $(B, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW.

$\square$

El siguiente teorema es presentado en [3] sin demostración.

Teorema 3.2.6. *Sean X e Y espacios topológicos, tal que Y es imagen continua de X. Si $(X, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW, entonces $(Y, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW.*

Demostración. Sean X e Y espacios topológicos e $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$, tal que Y es imagen continua de X y que $(X, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW. Por tanto, existe $f : X \to Y$ continua, tal que $f(X) = Y$. Sea $\langle y_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en Y. Como f es sobreyectiva, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in f^{-1}(x_n)$. Observemos que $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X. Luego existe $A \in \mathcal{I}^+$ tal que $\langle x_n \rangle_{n \in A}$ es convergente, y por la continuidad de f tenemos que $\langle y_n \rangle_{n \in A}$ es convergente. Lo cual muestra que $(Y, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW.

$\square$

Teorema 3.2.7. *[3]. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\mathcal{I}$ tiene la propiedad BW.

(2) $(2^{\mathbb{N}}, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW.

Demostración.

$(1) \to (2)$ Por el Teorema 3.2.3 tenemos que $2^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $[0, 1]$ y por el Teorema 3.2.6 se tiene que $(2^{\mathbb{N}}, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW.

$(2) \to (1)$ Por el Teorema 3.2.4 $[0, 1]$ es imagen continua de $2^{\mathbb{N}}$ y aplicando el Teorema 3.2.6 concluimos que $\mathcal{I}$ tiene la propiedad BW.

$\square$

Teorema 3.2.8. *[3]. Si $\mathcal{I}$ es un ideal BW, entonces $(X, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW para todo espacio métrico compacto X.*

Demostración.

Sean X un espacio métrico compacto e $\mathcal{I}$ tiene la propiedad BW. Por el Teorema 3.2.4 X es imagen continua de $2^{\mathbb{N}}$. Además, por el Teorema 3.2.7 $(2^{\mathbb{N}}, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW, y aplicando el Teorema 3.2.6, tenemos que $(X, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW.

□

3.3 Teorema de Arzela-Ascoli y Teorema de Helly usando ideales.

Ahora enunciaremos los resultados más importantes que se estudiaron en este trabajo.

Teorema 3.3.1. *(Teorema de Arzela-Ascoli con ideales [3]). Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathcal{I}$ es un ideal BW.

(2) Para cada sucesión de funciones $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ uniformemente acotada y equicontinua en $C([0,1])$, existe $A \in \mathcal{I}^+$ tal que $\langle f_n \rangle_{n\in A}$ es uniformemente convergente.

Demostración.

$(1) \to (2)$. Sea $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones uniformemente acotada y equicontinua en $C([0,1])$ con la métrica ρ. Sea $\mathcal{G} = \overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Como $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo y uniformemente acotado, entonces por el Teorema 2.2.7 $\mathcal{G}$ es compacto. Por hipótesis $\mathcal{I}$ tiene la propiedad BW, luego por el Teorema 3.2.8, $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW. Es decir, existe $A \in \mathcal{I}^+$ tal que $\langle f_n \rangle_{n\in A}$ es convergente. Así, la subsucesión $\langle f_n \rangle_{n\in A}$ es uniformemente convergente.

$(2) \to (1)$. Sea $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales en $[0,1]$. Definamos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x_n$. Observemos $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua. Por (2) existe $A \in \mathcal{I}^+$ tal que $\langle f_n \rangle_{n\in A}$ es uniformemente convergente. Con lo cual concluimos que $\langle x_n \rangle_{n\in A}$ converge; por tanto, $\mathcal{I}$ es un ideal BW.

$\square$

Observemos que cuando $\mathcal{I}$ es FIN, el teorema anterior se convierte en el Teorema de Arzela-Ascoli (ver Teorema 2.2.7).

Un espacio topológico Hausdorff X satisface la siguiente condición $(\star)$, si

La clausura de todo conjunto numerable en X es compacto y primero numerable.

El siguiente resultado lo enuncian en [3] sin demostración.

Teorema 3.3.2. *Un espacio X es compacto si y solo si para todo $\mathcal{I}$ ideal sobre X existe $x \in X$ tal que toda vecindad de x está en $\mathcal{I}^+$.*

Demostración.

(⇒) Sean X un espacio compacto e $\mathcal{I}$ un ideal sobre X. Denotemos al conjunto de todas las vecindades de x por $\mathcal{V}_x$, para algún $x \in X$. Entonces

$$\mathcal{F} = \mathcal{I}^* = \{X \setminus A : A \in \mathcal{I}\},$$

tiene la propiedad de intersección finita (P.I.F). Entonces

$$A = \bigcap_{E \in \mathcal{F}} \overline{E} \neq \varnothing.$$

Sea $x \in A$. Por tanto,

$$(\forall V \in \mathcal{V}_x)(\forall E \in \mathcal{F})(V \cap E \neq \varnothing)$$

Lo cual es equivalente a decir que,

$$(\forall V \in \mathcal{V}_x)(\forall A \in \mathcal{I})(V \cap (X \setminus A) \neq \varnothing)$$

Con lo cual concluimos que para todo $V \in \mathcal{V}_x$, $V \notin \mathcal{I}$.

(⇐) Sea $\mathcal{A} = \{E_\alpha : \alpha \in A\}$ una colección de conjuntos cerrados con la P.I.F. donde A es una enumeración. Sea $\mathcal{I} = \langle\{X \setminus E_\alpha : \alpha \in A\}\rangle$ el ideal generado por los complementos de los conjuntos en $\mathcal{A}$, más precisamente

$$B \in \mathcal{I} \Leftrightarrow B \subseteq (X \setminus E_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup (X \setminus E_{\alpha_n}),$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ están en A. Afirmamos que $X \notin \mathcal{I}$. Observemos que si $X \in \mathcal{I}$,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus E_i),$$

donde $E_1, \ldots, E_n$ pertenecen a $\mathcal{A}$. Entonces,

$$\varnothing = \bigcap_{i=1}^{n} E_i.$$

Lo cual no es posible, porque $\mathcal{A}$ tiene la P.I.F.

Por hipótesis, existe $x \in X$ tal que toda vecindad de x está en $\mathcal{I}^+$. Afirmamos que

$$x \in \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha.$$

Porque si no es así, existe $\alpha \in A$, tal que $x \notin E_\alpha$, entonces $x \in X \setminus E_\alpha$. Como $X \setminus E_\alpha$ es un abierto que contiene a x, $X \setminus E_\alpha \in \mathcal{I}^+$, lo cual es una contradicción. Luego, por el Teorema 1.0.5 X es compacto.

□

Definición 3.3.3. Diremos que $(X, \mathcal{I})$ tiene la **propiedad** BW^* si dada $\langle x_n \rangle_{n \in A}$ una sucesión en X con $A \in \mathcal{I}^+$, existe $B \subseteq A$ tal que $B \in \mathcal{I}^+$ y $\langle x_n \rangle_{n \in B}$ es convergente.

Ejemplo 3.3.4. $([0,1], FIN)$ tiene la propiedad BW^*.

El siguiente teorema se podría considerar una versión general del Teorema 2.3.5 y a su vez es más general que el resultado análogo presentado en [3].

Teorema 3.3.5. *Suponga que X un espacio topológico Hausdorff satisface la condición $(\star)$. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$ que contiene a todos los conjuntos finitos. Si $\mathcal{I}$ puede ser extendido a un ideal F_σ, entonces $(X, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW^*.*

Demostración. Sean $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$ que se puede extender a un ideal F_σ y $\langle x_n \rangle_{n \in A}$ una sucesión en X con $A \in \mathcal{I}^+$. Por tanto, existe $\mathcal{J}$ ideal F_σ, tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$. Por el Teorema 3.1.12, $\mathcal{J}$ es p^+. Sea $D = \overline{\{x_n : n \in A\}}$. Definamos un ideal $\mathcal{S}$ sobre D como

$$B \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \{n : x_n \in B\} \in \mathcal{J}.$$

Por el Teorema 3.3.2 existe $x \in D$ con la propiedad que toda vecindad (en D) de x está en $\mathcal{S}^+$. Por tener X la propiedad $(\star)$, D es primero numerable. Fijemos una base de vecindades decreciente $\langle U_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ de x. Para cada k definimos

$$A_k = \{n \in A : x_n \in U_k\}.$$

Como $U_k \notin \mathcal{S}$ entonces $A_k \notin \mathcal{J}$. Por ser $\mathcal{J}$ un ideal p^+, existe $B \in \mathcal{J}^+$ tal que $B \subseteq^* A_n$ para cada n. Por tanto, $\langle x_n \rangle_{n \in B}$ es convergente a x. Observemos que $B \subseteq A$ y $B \in \mathcal{I}^+$, ya que $\mathcal{J}^+ \subseteq \mathcal{I}^+$. Con esto concluimos la prueba.

$\square$

Ejemplo 3.3.6. Como el ideal $\mathcal{I}_{1/(n+1)}$ es un ideal F_σ y contiene a todos los conjuntos finitos de $\mathbb{N}$ y el intervalo $[0,1]$ cumple la condición $\star$, entonces el par $([0,1], \mathcal{I}_{1/(n+1)})$ tiene la propiedad BW^* por el Teorema 3.3.5.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal como en el Teorema 3.3.5, se puede ver que BW^* implica BW. Por tanto, el siguiente teorema, el cual es presentado en [3], se puede ver como un corolario del anterior cuando $FIN \subseteq \mathcal{I}$.

Teorema 3.3.7. *Suponga que X un espacio topológico Hausdorff satisface la condición $(\star)$. Si $\mathcal{I}$ puede ser extendido a un ideal F_σ, entonces $(X, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW.*

Ahora demostraremos una versión del Teorema de Helly usando ideales.

Teorema 3.3.8. *[3]. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$. Suponga que $\mathcal{I}$ puede ser extendido a un ideal F_σ. Entonces, para cada sucesión $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones monótonas a valores reales uniformemente acotada sobre $\mathbb{R}$, existe $A \in \mathcal{I}^+$ tal que la subsucesión $\langle f_n \rangle_{n \in A}$ es puntualmente convergente.*

Demostración.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$. Supongamos que $\mathcal{I}$ se puede extender a un ideal F_σ.

(1) Sea $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones crecientes a valores reales uniformemente acotada sobre $\mathbb{R}$, entonces existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, cada f_n está definida de $\mathbb{R}$ a $[-M, M]$. Como el espacio de funciones $H = \{g \in [-M, M]^{\mathbb{R}} : g \text{ es creciente}\}$ con la topología producto es primero numerable y compacto, entonces cumple la

condición $(\star)$ y por el Teorema 3.3.7 $(H, \mathcal{I})$ tiene la propiedad BW, es decir, existe $A \in \mathcal{I}^+$ tal que la subsucesión $\langle f_n \rangle_{n \in A}$ puntualmente convergente.

(2) Sea $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones decrecientes a valores reales uniformemente acotada sobre $\mathbb{R}$. Entonces, $\langle -f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones crecientes, por lo tanto aplicamos (1).

$\square$

REFERENCIAS

[1] Ortega, J., *Material didáctico - Sucesiones de Funciones*, CIMAT, [En línea]. México, p. 172. (Recuperado el 13 de Junio 2018). Disponible en: http://www.cimat.mx/~jortega/MaterialDidactico/Analisis/Cap9v4.pdf

BIBLIOGRAFÍA

[1] Bartle, R. & Sherbert, D., *Introducción al análisis matemático de una variable*, LIMUSA WILEY, (2004) 194.

[2] Filipów, R., Mrożek, N., Recław, I. & Szuca, P., *Ideal convergence of bounded sequences*, J. Symbolic Logic, 72, (2), (2007), 501-512.

[3] Filipów, R., Mrożek, N., Recław, I. & Szuca, P., *$\mathcal{I}$-selection principles for sequences of functions*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 396, (2012), 680-688.

[4] Mazur, K., *F_σ-ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps in the Boolean algebras $P(\omega)/\mathcal{I}$*, Fund. Math, 138 (2) (1991) 103-111.

[5] Mrożek, N., *Ideal version of Egorov's theorem for analytic P-ideals*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 349, (2), (2009), 452-458.

[6] Munkres, J. *Topología*. Prentice Hall, (2000).

[7] Steen, L., & Seebach, J. *Counterexamples in topology*. Springer-Verlag, (1978) 127.

[8] S. Willard. *General Topology*. Dover Publications, New York (2004) 118, 217.