Adaptación e implementación de un modelo praxeológico del talento matemático: Análisis de la actividad matemática creativa en el aula de matemáticas

Néstor Enrique Ramírez Contreras

Código: 2192030

Trabajo de grado presentado como requisito para optar el título de

Licenciado en Matemáticas

Directora

Dora Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2024

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mis padres Elizabeth y Ernesto, quienes durante este proceso de formación nunca me han dejado solo. Gracias por tanto esfuerzo y dedicación para lograr aportar en mí formación como persona y profesional integro, los amo con alma vida y corazón ustedes se merecen esto y mucho más son la inspiración de mi vida.

Agradecimientos

A Dios por darme las fuerzas y el valor necesario para lograr perseguir mis sueños y nunca desfallecer en el arduo camino.

A mi madre, por todos sus consejos y actos que me recordaban lo capaz que soy

A mi padre, quien es un ejemplo de vida para mí y me ha enseñado a ser quien soy, un ser humano luchador, honesto y confiado de Dios.

A mi hermano Julián, que siempre ha estado ahí para apoyarme y ser el mejor compañero de vida que Dios y mis padres me concedieron

A mi pareja Diana, que no me ha dejado solo desde el día que llego a mi vida, siempre me ha acompañado y alentado en los días más difíciles, siendo paciente y amorosa durante este proceso de mi vida. Gracias por todo mi amor.

A mi profesora Solange quien es mi referente en el entorno profesional. Gracias por la oportunidad de aprender juntos, además, de su dedicación y compromiso con este trabajo.

A Andrey, mi amigo y hermano leal que la vida y Dios pusieron en mi camino. Gracias por absolumante todo.

A mi buen amigo Deiby quien he conocido durante el trayecto de esta carrera y hemos disfrutado de muchos momentos de aprendizaje.

A la Universidad Industrial de Santander y la Escuela de Matemáticas, por contribuir en mi formación como profesional y ser humano.

Tabla de Contenido

Lista de Tablas

Pág.

Lista de Figuras

Pág.

Lista de Apéndices

Resumen

Título: Adaptación e implementación de un modelo praxeológico del talento matemático: Análisis de la actividad matemática creativa en el aula de matemáticas*

Autor: Néstor Enrique Ramírez Contreras**

Palabras clave: Talento Matemático, Creatividad Matemática, Secuencias, aula regular, Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD), Modelo Praxeológico del Talento Matemático (MPTM).

Descripción:

En el presente documento se reportar un trabajo de investigación de corte cualitativo cuyo objetivo corresponde en adaptar y aplicar el modelo praxeológico del talento matemático (MPTM) para potenciar en estudiantes de básica el desarrollo del talento matemático a través de su participación en una actividad matemática creativa.

El fundamento teórico de esta investigación corresponde a la actividad matemática creativa y el desarrollo del talento matemático a través del modelo praxeológico por Barraza (2020), y el estudio de secuencias y patrones en niveles tempranos del ciclo escolar. De igual forma, se cuenta con la TAD como elemento teórico requerido para el funcionamiento del MPTM. Respecto al enfoque metodológico se sigue la estructura desarrollada por Barraza (2020) el cual presenta un enfoque óptimo para esta investigación realizado en tres fases: *i) adaptación de un MER acerca las sucesiones reales infinitas; ii) análisis a priori de las tareas generadoras establecidas en la adaptación al diseño; iii) implementación y análisis a posteriori del diseño didáctico.*

Durante la implementación del diseño didáctico, se emplean elementos para la recolección de datos, como guías de trabajo y transcripciones de las grabaciones en video de las sesiones de clase. Estos instrumentos no solo garantizan mayor precisión en los resultados, sino que también fortalecen la credibilidad del estudio realizado.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Directora: Dra. Dora Solange Roa Fuentes.

Abstract

Title: Adaptation and implementation of a praxeological model of mathematical talent: analysis of creative mathematical activity in the mathematics classroom*

Author: Néstor Enrique Ramírez Contreras

Key words: Mathematical talent, Mathematical creativity, Sequences, Regular classroom, Anthropological Theory of the Didactic (ATD), Praxeological model of the mathematical talent (PMMT).

Description:

In the present document, a qualitative research study is reported, aiming to adapt and apply the Praxeological Model of Mathematical Talent (PMMT) to enhance the development of mathematical talent in elementary students through their participation in a creative mathematical activity.

The theoretical foundation of this research corresponds to creative mathematical activity and the development of mathematical talent through the Praxeological Model by Barraza (2020), and the study of sequences and patterns in the early levels of the school cycle. Additionally, the ATD is included as a theoretical element required for the functioning of the PMMT. Regarding the methodological approach, it follows the structure developed by Barraza (2020), which presents an optimal approach for this research carried out in three phases: *i) adaptation of a MER on infinite real sequences; ii) a priori analysis of the generating tasks established in the adaptation to the design; iii) implementation and a posteriori analysis of the didactic design.*

During the implementation of the didactic design, elements for data collection are employed, such as work guides and transcriptions of video recordings of class sessions. These instruments not only ensure greater accuracy in the results but also strengthen the credibility of the study conducted.

* Bachelor thesis

** Science Faculty. Mathematics School. Bachelor's degree in mathematics. Director: Dra. Dora Solange Roa Fuentes.

Introducción

Cuestionar las capacidades que se pueden lograr o no en la clase de matemáticas es limitar el alcance de esta, por lo que objetos de estudio como el desarrollo del talento matemático y la capacidad creativa en el aula de matemáticas direccionan el rumbo de esta investigación. En primer lugar, se define como talento desarrollable la capacidad progresiva de alcanzar un dominio sobresaliente de toda actividad matemática; además, la eficiencia de esta capacidad trae consigo la intervención de factores externos como: el acompañamiento pedagógico por parte del maestro, la integración del aula de clase y el desarrollo de actividades novedosas. En segundo lugar, la creatividad en matemáticas será la capacidad encargada de guiar y potenciar la construcción del talento matemático. Si bien cada una de estas capacidades de forma individual tienen un papel destacado, será la unificación de estas un factor determinante en el proceso investigativo.

Diversas son las investigaciones en las que el talento se constituye como una capacidad desarrollable y la creatividad como su estímulo principal; sin embargo, estas han sido realizadas en espacios extracurriculares como: semilleros matemáticos, grupos de olimpiadas, entre otros; puesto que los investigadores aseguran que esta clase de espacios favorecen la participación y el interés del alumno en cuanto al desarrollo de la actividad matemática, lo que beneficia directamente la creatividad y el desarrollo del talento.

Por esta razón surge el interés de investigar la manera de desarrollar cada una de las capacidades ya mencionadas dentro el aula de matemáticas, razones como: la posibilidad de integrar la totalidad de los alumnos sin ningún tipo de condición, hacer del aula de un espacio divergente en el que los alumnos fortalezcan capacidades como el trabajo en equipo, la participación y la toma de decisiones, entre otras; son suficientes para encarar el reto de convertir el aula tradicional en un espacio promotor de talento y creatividad matemática.

El marco metodológico empleado para esta investigación es de corte cualitativo. A su vez, la recolección de datos dentro del trabajo de campo se ajusta a una metodología de observación, de modo que, registros escritos y audiovisuales se consideran pertinentes para fines investigativos. En cuanto al método, se destacan cuatro principales funciones para el estudio y construcción de un análisis detallado de cada uno de los momentos de la investigación, las cuales son:

- Función 1: Construcción del modelo epistemológico de referencia (MER) acerca de las sucesiones reales infinitas.
- Función 2: Conformación de la praxeología local, sucesiones reales infinitas y análisis a priori.
- Función 3: Implementación y análisis in vivo
- Función 4: Análisis a posteriori

Siendo estas funciones elementos resultantes del marco conceptual, el cual tiene como protagonistas el modelo praxeológico del talento matemático (MPTM), el componente creativo y el componente matemático. Sumado a esto, se describen cuatro elementos establecidos por la teoría antropológico de lo didáctico (TAD), puesto que, cada uno de los elementos son imprescindible para el funcionamiento óptimo del método, los apartados cuatro y cinco de este documento profundizan las particularidades del marco conceptual y metodológico mencionados previamente.

Por último, el desarrollo de las funciones del método y el uso de elementos conceptuales liderado por el (MPTM), centran su apoyo en la búsqueda del siguiente objetivo: Adaptar y aplicar el modelo praxeológico del talento matemático (MPTM) para potenciar en estudiantes de básica el desarrollo del talento matemático a través de su participación en una actividad matemática creativa.

1. El Talento Matemático y la Creatividad desde la Perspectiva de la Educación Matemática

En esta sección se presenta un análisis de algunos de los antecedentes que son parte fundamental de la presente investigación.

El estudio del talento y la creatividad matemática durante muchos años ha sido un constante tema de investigación de la comunidad de educadores matemáticos. Sin embargo, no existe una definición única del talento matemático y se tienen diversas maneras de comprender la creatividad en matemáticas. Una de las formas de definir talento matemático es asociarlo a una destreza matemática, tomando las ideas de Wenderlin (1958) se pueden definir cuatro aspectos fundamentales.

- La habilidad para comprender la naturaleza de los problemas, símbolos, métodos y reglas matemáticas.
- La aptitud para aprenderlas, retenerlas en la memoria y reproducirlas.
- La facilidad para combinarlas con otros problemas, símbolos, métodos y reglas.
- La competencia para emplearlas en la resolución de tareas matemáticas.

Si bien cada uno de estos cuatro aspectos sujetan la definición de talento en las características del estudiante considerado talentoso, no es suficiente para cubrir las necesidades que giran alrededor de este tema dentro el aula regular. En particular Barraza (2020) cita a Kozlowski (2019), quien plantea que:

> El talento matemático es el nombre que le daremos al conjunto único de habilidades matemáticas que abre la posibilidad de un desempeño exitoso en la actividad matemática,

o teniendo en cuenta a los niños en edad escolar, la posibilidad de un dominio creativo de la disciplina. (p. 77)

Esta afirmación relaciona de manera directa la definición de talento y el concepto de creatividad, como un factor para favorecer las habilidades del alumno en la construcción del aprendizaje. No obstante, la creatividad matemática es una de las capacidades poco estudiadas respecto a otros aspectos de investigación en matemática educativa.

De modo que, las definiciones ofrecidas por Kozlowski (2019) y Wenderlin (1958) comprenden una visión de talento como fruto de la preconcepción del ser humano. Es decir, el alumno considerado talentoso ya posee una serie de características que le permiten sobresalir entre los demás alumnos del aula de clase.

Por lo que, gran parte de las investigaciones enfocadas al talento son orientadas a su identificación; sin embargo, no significa que los demás alumnos no tengan la posibilidad de alcanzar un dominio sobresaliente de tan anhelada capacidad.

En este sentido, Benavides (2008) plantea que es posible considerar dos tipos de talento: el primero, el Talento actual, que se caracteriza porque el sujeto ha puesto en evidencia el desarrollo de capacidades que permiten identificarlo como talentoso; mientras que, en el segundo, el Talento potencial, el sujeto presenta las características de un estudiante regular o bueno en el aula de clase.

Esta definición permite ampliar la visión de dicho concepto y abre la puerta para aquellos alumnos que pueden verse excluidos por ser considerados regulares en su desempeño frente a las diferentes actividades matemáticas. El Talento potencial de acuerdo con Villarraga et al. (2004) es:

[…] el talento que aún no se ha desarrollado o evidenciado, es decir que el sujeto está en potencia de desarrollar y demostrar, pero que a causa de uno o más factores no lo ha podido mostrar en sus esquemas de acción. (p. 27)

Acortando así un sinnúmero de brechas académicas y sociales entre un alumno considerado talentoso y el alumno bueno, puesto que direcciona la visión del talento como una capacidad desarrollable (Benavides, 2008; Boaler, 2016).

Diversas investigaciones afirman que la creatividad desempeña un papel destacado en cuanto al desarrollo del talento matemático. Renzulli (1978) por ejemplo, asegura que la creatividad es un elemento necesario para el desarrollo del talento, ya que, su participación está inmersa en la resolución de problemas y el desarrollo de nuevos esquemas mentales. A su vez, Vygotsky (1930/1984), asocia la creatividad a un proceso de imaginación presente en el alumno para la construcción y concepción de un nuevo objeto de estudio. Por lo que la creatividad emerge como una ruta de salida al modelo tradicional ofrecido dentro la mayoría de las instituciones educativas, proporcionando así un giro en la enseñanza y el aprendizaje de cara al dominio creativo de la actividad matemática, no solo dentro del aula, sino también, fuera de ella.

Por su parte, Silver (1997, p.75) destaca la existencia de dos perspectivas acerca de la creatividad: La creatividad del genio y la creatividad progresiva. Respecto a la creatividad del genio, el autor señala que el alumno presenta esta habilidad matemática interiorizada y difícilmente podría desaparecer; mientras que, la creatividad progresiva, puede desarrollarse de manera gradual mediante espacios de formación adecuados y creativos, junto con un acompañamiento pedagógico acertado.

De manera que la creatividad, al igual que el talento matemático se pueden considerar desarrollables en beneficio del alumno. Por lo que, Barraza (2020) manifiesta la importancia de la incorporación del talento matemático en la escuela bajo un enfoque creativo de la disciplina; ya que de esta manera se contribuye a la formación de futuros líderes críticos y ejemplares para la sociedad.

A lo largo de los años la búsqueda por implementar una serie de estrategias y modelos que permitan llevar a cabo la concepción del talento y la creatividad, como capacidades desarrollables dentro el aula de clase se han intensificado en diversas partes del mundo. Incluso surcando barreras históricas como: La desigualdad escolar, condiciones socioeconómicas, diferencias culturales, religiosas, entre otras. Puesto que, cada uno de estos obstáculos repercute de forma significativa en cuanto al desarrollo del talento y creatividad matemática.

Por consiguiente, Lekin (2009) propone un modelo que permite analizar la evaluación de la creatividad a partir de tareas de solución múltiple. El modelo se basa en tres componentes principales: la flexibilidad, la originalidad y la fluidez; cada uno de estos relacionados de manera directa con el objetivo de no permitir el detrimento del pensamiento creativo.

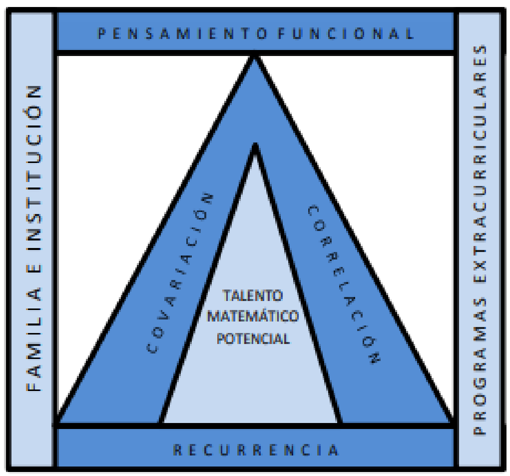
Los resultados presentados por Lekin (2011) en cuanto a la aplicación de su modelo en nuevas investigaciones, ha generado su validación, ya que las evidencias respecto al componente de la originalidad son contundentes. Es decir, el aumento de la flexibilidad beneficia de manera directa la originalidad de los alumnos frente a la resolución de tareas.

Corroborado lo ya dicho por Lekin (2009), quien establece a la originalidad como el componente determinante para la concepción de la habilidad creativa. Por su parte Pineda (2017) plasma un modelo para favorecer el desarrollo del pensamiento funcional, en el cual el talento matemático potencial es el eje principal de la investigación. Dado que para desarrollar el pensamiento funcional es necesario la adaptación de distintos factores y habilidades, entre ellas el talento.

Por lo que Pineda (2017) presenta como base conceptual y metodológica, el modelo multifactorial del talento diseñado por Mönks (1992) y la adaptación realizada a este mismo por Mora, et al (2009) para alumnos colombianos, como se observa en la siguiente figura.

Figura 1

Relación entre los principales elementos que potencian el talento matemático



Nota: Esta figura fue tomada de Construcción de pensamiento funcional: una experiencia en un programa de enriquecimiento extracurricular (p. 55), por M. Pineda y R. Solange, 2019.

En el caso de Pineda (2017), el accionar de cada uno de los elementos de su modelo permite evidenciar la correlación que existe entre el desarrollo del talento matemático y el desarrollo del pensamiento funcional. Como se observa en la figura 1, a este modelo también se suman tres relaciones funcionales presentadas por Smith (2008): Correspondencia, Recurrencia y Covariación.

Este modelo fue diseñado y desarrollado en un espacio extracurricular, el cual permite que el alumno tome un rol activo dentro del desarrollo de la clase, al punto de generar debates con sus compañeros respecto a una postura previamente determinada durante el desarrollo de la actividad matemática; contribuyendo así al desarrollo de estudiantes críticos y participativos dentro del aula.

Investigaciones como la de Barraza (2020) y Pineda (2017) asociadas al talento matemático son diseñadas y desarrolladas en escenarios extracurriculares; esto parece estar motivado por las limitaciones del aula regular que promueve condiciones tradicionales que no fomentan o no permiten fomentar el desarrollo del talento.

Colombia en comparación con otros países reporta pocas investigaciones relacionadas con el desarrollo del talento y la creatividad matemática. No obstante, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), atendiendo la normatividad establecida por la Ley 115, Ley General de Educación, Capítulo I (Art. 46, 47, 48 y 49) plantea elementos relacionados con la atención a la población con limitaciones o capacidades excepcionales.

Por consiguiente, el MEN (2006b) propone una serie de orientaciones dirigidas hacia el maestro para la atención e identificación de estudiantes con capacidades o talentos excepcionales dentro del aula de clase. Inicialmente se destacan cuatro características acerca de la expresión de la excepcionalidad, estas son: I. Las capacidades excepcionales globales; II. los talentos excepcionales específicos; III. capacidades o talentos excepcionales y discapacidades asociadas: doble excepcionalidad; y IV. el hiperestímulado; cada una de estas, se consideran expresiones de talento.

Como consecuencia, de la caracterización realizada anteriormente, nace la necesidad de desarrollar herramientas y métodos que permitan la identificación de la excepcionalidad. Este es considerado un proceso complejo, determinar quién es excepcional o no. De modo que el MEN (2006) ofrece dos tipos de técnicas para la identificación rigurosa de la excepcionalidad.

La primera, corresponde a las técnicas no formales, estas son: el papel de los padres en el proceso de identificación, los pares en el proceso de identificación, los maestros como fuente de identificación, el alumno excepcional como fuente de identificación de sus propias habilidades. Si bien, cada una de estas técnicas se distinguen por concebirse dentro un entorno familiar y escolar, no significa que sean irrelevantes durante el transcurso del reconocimiento formal de excepcionalidad, ya que son los entornos donde inicialmente el alumno da muestras de su condición.

Por otra parte, el MEN (2006b) propone las técnicas formales, estas las define como: a diferencia de las mencionadas anteriormente cuentan con un proceso más intrincado, ya que reúne no solo una comunidad educativa y familiar, sino también parte de la comunidad médico-científica, psicológica y demás expertos en la materia, con el objetivo de no apresurar un diagnóstico de excepcionalidad, estas técnicas ofrecidas son: test de inteligencia, el test de ejecución, el test de aptitudes específicas, intereses y actitudes, evaluación de personalidad, creatividad, evaluación del desarrollo, y habilidades metacognitivas.

Dentro de este tipo de técnicas para fines de esta investigación se destaca la técnica formal llamada Creatividad, puesto que, en esta aparece este concepto como una capacidad necesaria de la excepcionalidad o del talento. Además, destaca aptitudes fundamentales inmersas en la creatividad como: la fluidez, la flexibilidad y la originalidad, que a su vez también son destacadas por Lekin (2009) en la elaboración de su modelo para la evaluación de la creatividad.

Otro de los aspectos importantes dentro lo establecido por el MEN (2006a) es la manera de abordar el currículo, preguntas como: ¿Qué enseñar? ¿Cuándo enseñar? y ¿Cómo enseñar?, en aulas con diversidad, son un reto para la comunidad educativa. En Colombia, la característica principal del currículo es la flexibilidad de este, ya que así lo garantiza la Resolución 2343 de 1996, así como su autonomía, Ley 115 de 1994, con el objetivo de posibilitar la realización de adaptaciones en cuanto a la búsqueda de un aula unificada e integrada.

Del mismo modo, prevalecen intereses basados en promover actividades que favorezcan el crecimiento motivacional del alumno, ya que estas influyen en cuanto al proceso de formación académica. El MEN (2006a) apoyado en Larraguibel (2003), plantea que los centros educativos que presenten alumnos con condición de excepcionalidad requieren de un currículo dotado de características y especificaciones como: el equilibrio, la capacidad de adaptación y el enfoque significativo del aprendizaje, entre otras; estas características consolidan la posibilidad de subyacer las necesidades globales y particulares que se presentan durante el desarrollo de cierta actividad dentro el aula de clase.

Si bien, este documento presentado por el MEN atiende aspectos determinantes de lo que conlleva la caracterización e identificación de la excepcionalidad, no es posible apreciar la construcción de rutas específicas para hacer del aula de clase un espacio clave para potenciar el talento. Donde por medio de potencializar capacidades como la expresión y el dominio de la creatividad, el alumno pueda desarrollar nuevos objetos de estudio. Del mismo modo, el acompañamiento pedagógico oportuno, tendrá un papel principal en la búsqueda de un aula integrada y no solamente un aula inclusiva. Sumado a esto, es necesario plantear la necesidad de no solo de identificar los estudiantes talentosos en matemáticas, sino también, el tipo de atención que deben recibir y cómo promover el desarrollo del talento matemático como un asunto de equidad en la educación matemática.

Bajo este panorama a continuación se presenta el problema que se aborda en esta investigación, centrado principalmente en la aplicación de un modelo que permita potenciar el talento matemático en un grupo regular de estudiantes de una institución educativa de Santander.

2. Planteamiento del Problema

A partir de cada uno de los elementos mencionados en la sección anterior, se precisa la importancia y necesidad de implementar el desarrollo del talento y creatividad matemática dentro del aula regular. Esto con base en el argumento inicial, donde el talento y la creatividad se definen como capacidades ¨desarrollables¨, y que, a su vez, presentan relación directa en beneficio mutuo para potenciar el desarrollo de pensamiento matemático de los estudiantes. Aparece también, la necesidad por reproducir un modelo que permita la máxima expresión de estas dos capacidades durante el desarrollo de la actividad matemática, en consecuencia, cada una de estas afirmaciones inclinan la balanza hacia la necesidad de un cambio en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula.

La búsqueda del desarrollo del talento a través de la creatividad matemática desempeña un rol principal en el marco de la presente investigación, sin restar protagonismo a la identificación directa de aquellos alumnos considerados talentosos dentro del aula; el cual ha sido objeto principal de estudio de algunas investigaciones nacionales e internacionales. La decisión de no realizar la identificación pretende que la comunidad estudiantil logre desarrollar al máximo cada una de sus capacidades sin la premisa de etiquetamientos, ya que estos en la mayoría de las ocasiones generan fragmentación al interior del aula, como consecuencia del desempeño mostrado por los estudiantes en la resolución de distintas actividades matemáticas.

De acuerdo con lo planteado anteriormente por Benavides (2008), se precisa que cada uno de los estudiantes cuenta con las capacidades necesarias para desarrollar talento matemático. Esto siempre y cuando existan ciertas condiciones como: el acompañamiento pedagógico, espacios formativos para acrecentar la capacidad creativa, actividades novedosas, entre otros. Sumado a esto, se destaca la suficiencia y el dominio del maestro para construir un aula de clase integrada, ya que, a diferencia de un aula inclusiva, esta no fracciona el curso en pequeños grupos, sino que posibilita la expresión máxima de cada una de estas capacidades.

Por consiguiente, se define la siguiente pregunta de investigación, la cual tiene el papel de dirigir este proyecto ¿De qué manera la implementación de un Modelo Praxeológico del Talento Matemático en el aula regular puede posibilitar el desarrollo del talento matemático a través de la participación de los estudiantes en una actividad matemática creativa?

Del mismo modo, la necesidad por dar respuesta a la pregunta de investigación previamente definida constituye la construcción del siguiente objetivo: Adaptar y aplicar el modelo praxeológico del talento matemático (MPTM) para potenciar en estudiantes de básica el desarrollo del talento matemático a través de su participación en una actividad matemática creativa.

Cada uno de los elementos mencionados anteriormente son pieza clave para el desarrollo preciso de los intereses de esta investigación. Por lo que a continuación se produce el marco teórico, este se caracteriza por dar soporte a los resultados obtenidos en cada una de las actividades previamente diseñadas e implementadas bajo el funcionamiento de este.

3. Modelo Praxeológico del Talento Matemático (MPTM)

Escenarios de investigación demarcados por intereses educativos constituyen consigo el manejo de elementos teórico - conceptuales que permitan desarrollar un análisis riguroso y validar los resultados logrados. Por esta razón, bajo el marco de esta investigación se destaca la intervención del Modelo praxeológico del talento matemático (MPTM) planteado por Barraza (2020). El diseño y desarrollo del modelo tiene como objetivo ofrecer un análisis no solo cognitivo del desarrollo del talento, sino también, un estudio del talento matemático bajo una perspectiva institucional promovida por capacidades como la creatividad. Acoplándose de buena manera con algunos intereses demarcados en este proyecto, se destaca que durante el desarrollo de la investigación el modelo podría adquirir cambios estructurales y funcionales, sin alterar su objetivo previamente establecido.

Ahora bien, el diseño y funcionamiento del modelo MPTM cuenta con elementos teóricos definidos por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), planteada por Chevallard (1999). Por lo tanto, aspectos como la generalidad y flexibilidad de esta teoría son determinantes para la incorporación de nuevos objetos de estudio, como es el caso de la creatividad para fines de esta investigación. Si bien esta teoría cuenta con una gran cantidad de elementos, son solo cuatro los elegidos para sustentar el MPTM en cuanto al soporte teórico-conceptual de la investigación, estos elementos son: Institución, Praxeología, Modelo Epistemológico de Referencia (MER) y los Momentos de Estudio.

Constituir un espacio para el desarrollo de una investigación es indispensable a fin de comprender el comportamiento de agentes internos y/o externos que puedan incidir de manera positiva o negativa en los resultados deseados. En virtud de ello, la TAD propone un elemento teórico llamado ***institución***. En particular Castela y Romo (2011) plantean que estas se definen como:

> Organizaciones sociales estables que permiten enfrentar tareas problemáticas de manera eficaz, gracias a los recursos materiales e intelectuales que ponen a disposición de sus sujetos, así como a las restricciones que definen para la realización de dichas tareas (p. 85)

Esta afirmación, expande el concepto de institución a algo más que un recinto perceptible a los sentidos del ser humano. Por lo que la familia, las ferias de ciencia, los semilleros extraescolares, el aula de clase, los grupos de investigación, entre otros espacios, son constituidos como una institución; incluso un canal disponible en plataformas digitales como YouTube, puede llegar a ser una institución. Es cierto que para eso debe contar con herramientas suficientes como videoclips dentro del canal que permitan la resolución de tareas, entre otros aspectos fundamentales que puede contribuir en el desarrollo tecnológico para la educación.

El segundo elemento de la TAD que da paso a la concepción del modelo MPTM es la ***praxeología:*** definida como la unidad mínima de análisis de toda la actividad humana (Chevallard, 2019). Este constructo se define a través de cuatro componentes que describen su funcionamiento, estos son: I. tipo de tarea (T), II. técnica (τ), III. tecnología (θ), y IV. teoría (Θ). Un aspecto para destacar es la incidencia que tiene la institución sobre elementos como: las técnicas, las tecnologías y las teorías; ya que las reglas establecidas dentro una organización limitan la existencia de perspectivas novedosas y arriesgadas que podrían atentar contra las reglas de la institución.

Algo similar sucede con los objetos propios de la institución, si bien la TAD se destaca por su capacidad de generalizar, existen situaciones, objetos y actividades propias de cada institución. Un ejemplo claro de ello es la baraja española vista como un juego de mesa en un casino, y otro la baraja española como estrategia para construir conceptos propios de la matemática dentro del aula de clase, tales como: la probabilidad, el espacio muestral, el diagrama de árbol, entre otros.

Cada uno de los cuatro componentes iniciales de la praxeología son los encargados de sustentar el modelo MPTM. No obstante, la creatividad se constituye también como un componente más dentro del funcionamiento del modelo, así como el componente matemático. Conforme a lo dicho anteriormente, se precisa la necesidad de establecer cada uno de los componentes del MPTM, así como definir cómo estos ayudan a potenciar el talento matemático

I. **Tipo de tarea (T):** Existen diversas formas de constituir el significado de tarea. Barraza (2020) plantea que una tarea puede ser vista como una serie de instrucciones que pueden ser designadas de forma escrita: en libros, pizarras, entre otros; o de manera verbal. Un ejemplo ajustado a lo planteado por Barraza es ‘‘Calcule el área sombreada de la figura geométrica”. Ahora bien, la TAD a cada una de estas concepciones de tarea, las constituye como: acciones a realizar, concertando así el campo de acción de este componente dentro la institución ya definida.

II. **Técnica (τ):** Se le denomina a la forma en que los alumnos desarrollan las tareas establecidas por el maestro. De modo que, el maestro cuenta con la potestad de limitar el uso de técnicas en cuanto a la realización de tareas si así lo requiere. Por lo que, Barraza del (2020) demarca que las tareas y las técnicas conforman la praxis técnico-práctica.

III. **Tecnología (θ):** Este tercer componente del modelo, corresponde a los discursos que producen una justificación con el propósito de validar las técnicas aplicadas en la resolución de tareas previas (Bosch, 1994). Por consiguiente, este elemento propicia un espacio perfecto para que el alumno emplee el uso de tecnología matemática como: axiomas, teoremas, reglas teóricas, entre otras; estas propician el desarrollo de competencias como el razonamiento y modelamiento matemático. Por consiguiente, si de justificaciones se trata es indispensable para el desarrollo de esta investigación definir dos nuevos componentes tecnológicos, el primero corresponde a: ***La componente tecnológica matemática*** θ^m, corresponde las explicaciones que soportan la construcción del talento matemático por medio de habilidades matemáticas como: Interpretar, comprender, razonar, modelar, solucionar, generalizar, entre otras. Mientras que, el segundo: ***La componente tecnológica creativa*** θ_c ***,*** consiste en permitir la producción de técnicas únicas, inusuales, novedosas, fluidas y flexibles; para potenciar la creatividad propicia, que busca fomentar el desarrollo del talento matemático. Si bien, cada una de estas tecnologías ocupan un papel destacado, se requiere de cada uno de los elementos del modelo para su funcionamiento óptimo.

IV. **Teoría (Θ):** En último lugar, pero no menos importante aparece la Teoría con el objetivo de validar teóricamente el uso de las tecnologías utilizadas dentro las técnicas. Es decir, la teoría a diferencia de la tecnología ocupa de un respaldo teórico mayor que el presentado en el componente tecnológico. En el caso de tareas que involucren matemáticas, como es el caso de la investigación, la demostración del teorema de Pitágoras puede considerarse como el componente teórico.

No obstante, para comprender el elemento praxeológico es indispensable reconocer también los seis momentos predeterminados para la construcción y reconstrucción de una praxeología: : el encuentro con la tarea (M1) se trata de un primer acercamiento a algún elemento de la praxeología; el momento exploratorio (M2), donde surge la necesidad de proponer una o más técnicas para resolver la cuestión problemática; el momento del trabajo con la técnica (M3), donde se exploran variantes de las técnicas producidas e incluso se mejoran; el tecnológico teórico (M4), en el que se reconocen elementos comunes en las técnicas desarrolladas, identificando sus limitaciones y alcances; el momento de institucionalización (M5) permite identificar los tipos de tareas de manera precisa, las técnicas asociadas y el discurso tecnológico que las sostiene, y el momento de la evaluación (M6) en el que se determina la amplitud de las técnicas producidas y la pertinencia del discurso tecnológico (Chevallard, 2002).

El componente praxeológico, es considerado el elemento más extenso y complejo dentro la constitución del modelo y su funcionamiento propio. Ya que no son solo componentes, o los momentos de estudio centrados en la praxis, sino también cuenta con niveles de complejidad dentro su implementación, estos son: puntual, local, regional y global demarcados (Chevallard, 2002). Cada uno de estos niveles serán precisados durante el desarrollo de la investigación. Así mismo, la concepción de cada uno de estos niveles permite organizar la actividad matemática por el (MER) por lo que Barraza del 2020 cita a (Sierra, 2006) quien plantea que:

> El MER puede expresarse en forma de una sucesión de praxeologías que corresponden a la elaboración de respuestas parciales a una cuestión problemática inicial. Cada praxeología de la sucesión surge como ampliación o desarrollo de la praxeología anterior, ante las limitaciones de esta para aportar respuestas a las cuestiones que se plantean. (p. 47)

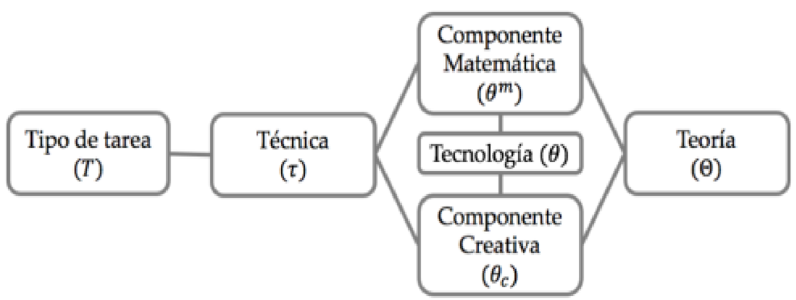
De allí la importancia del desarrollo óptimo de cada uno de los niveles de complejidad establecidos en la praxeología por medio de las tareas planteadas y las técnicas que generan cada uno de los estudiantes. Cada de los elementos definidos en esta sección corresponden al funcionamiento general del modelo establecido por Barraza (2020). En los siguientes apartados se analiza el comportamiento del modelo bajo una perspectiva creativa la cual es eje principal de la investigación, además, se explicita la articulación del modelo general junto con el componente creativo; en cuanto al diseño investigativo propio, se presentan algunas de las adaptaciones realizadas.

3.1. La creatividad y su funcionamiento con relación al MPTM

En el marco investigativo la creatividad matemática se ha definido como una capacidad desarrollable o progresiva (Silver, 1997). Esta capacidad dentro el funcionamiento del MPTM tiene como objetivo potenciar la construcción del talento matemático, por medio de la producción de técnicas únicas, inusuales, novedosas, fluidas y flexibles. En consecuencia, *la componente tecnológica creativa* θ_c, será la encargada de abanderar cada uno de los intereses planteados por la creatividad matemática. A continuación, se presenta (ver figura 2) un esquema gráfico del funcionamiento del modelo MPTM a través de la praxeología creativa $Pc = [T, \tau, \theta c\ m, \Theta]$.

Figura 2

Representación de la praxeología creativa del MPTM



Nota: Este gráfico permite identificar la relación que existe entre cada uno de los elementos del modelo y el componente creativo. Tomado de *Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad,* por Z. Barraza (p.38), 2020.

Ahora bien, para comprender la componente tecnológica creativa θ_c, es preciso determinar sus cuatro funciones tecnológicas, que a su vez están relacionadas con los momentos de estudio definidos durante la praxeología.

La primera función (F1): corresponde a la producción de técnicas únicas, esta función comprende el M1 y el M2 ya que son estos en los que los alumnos realizan una interacción inicial con la tarea definida y, además, proporciona una búsqueda diversa de soluciones posibles. Seguida de esta la función (F2): centra su interés en optimizar las técnicas promovidas durante la F1, esta función presenta una relación directa con los M3 y M4 del estudio praxeológico, ya que direcciona la solución de un problema a el uso de solo una técnica, es posible afirmar que esta etapa se ajusta a la capacidad para tomar decisiones.

Por su parte, la función (F3): considera las tareas establecidas desde diferentes ángulos, es decir, esta no se estanca en áreas científicas que permitan la resolución de la tarea, sino que trae consigo herramientas como: el arte, la cultura, las vivencias, incluso de la música; esta función es perceptible durante el desarrollo de los momentos M2 y M3. Por último, la función (F4): consiste en adaptar una técnica, siendo compatible con los momentos M2 y M4.

Si bien cada una de estas funciones dentro la realización de una tarea es indispensable, no necesariamente existe un orden de aparición o desarrollo de estas, ya que sería contradecir el concepto de creatividad; pues este se ajusta a características como el caso de la flexibilidad. Por lo tanto, dichas funciones podrían intervenir sin preservar alguna secuencia entre ellas, no obstante, la relación entre cada una de estas es innegable frente a la resolución de actividades matemáticas creativas.

3.2. Particularidades investigativas ajustadas a la implementación MPTM

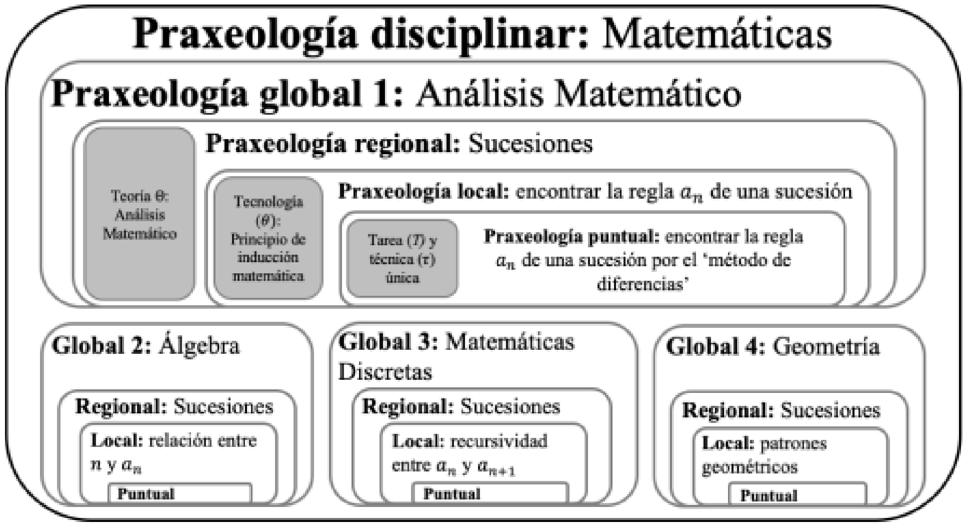
La revisión y el análisis bibliográfico favorece la elección del MPTM como el óptimo para estudiar el desarrollo del talento matemático mediante un dominio creativo de la actividad matemática. Es por eso, que cada uno de los componentes del modelo praxeológico y algunos elementos de la TAD han sido especificados previamente. Por lo tanto, definir el ente referente a la institución es sin duda el primer paso para comenzar el abordaje del modelo dentro la presente investigación.

Además, este elemento aporta componentes de análisis determinantes para el estudio praxeológico del modelo; en consecuencia, con base en los constructos de la TAD y según diversos autores se define como institución ¨el aula regular de matemáticas¨, siendo la organización principal donde esta investigación se lleva a cabo. La elección de esta organización prioriza las características del aura regular de matemáticas por encima de las particularidades de los alumnos que conforman el aula, puesto que el modelo garantiza un estudio del talento matemático bajo un enfoque institucional.

Sin lugar a duda, otro elemento necesario para el desarrollo de esta investigación es el objeto matemático de estudio; ya que este propicia las adaptaciones necesarias referentes a los diseños de tarea que permitan llevar a cabo el desarrollo del talento matemático dentro la institución preconcebida. Posteriormente, se define el tema de ¨sucesiones infinitas¨implementado por Barraza (2020), con el objetivo de construir praxeologías matemáticas creativas desde un nivel puntual hasta la globalidad, así pues, capacidades matemáticas para reconocer y comprender patrones de cualquier tipo y la generalización de estos, dirigen el diseño e implementación de tareas.

Figura 3

Anidamiento de praxeologías matemáticas



Nota: El gráfico permite analizar la complejidad praxeológica en relación con el tema de sucesiones infinitas. Tomado de *Actividad Matemática creativa y desarrollo del talento matemático a través del modelo praxeológico* (p. 3), por M. Barraza, A. Romo, y S. Roa, 2022.

El análisis de cada uno de los elementos y niveles presentados en la figura anterior corresponden al estudio del objeto matemático en relación con el componente praxeológico. Este mismo posibilita identificar los elementos que inciden dentro su funcionamiento, al igual la concepción y funcionamiento de los niveles con relación al componente tecnológico matemático θ^m. Por último, se considera que este marco conceptual, incluyendo el MPTM produce destellos importantes en cuanto a la respuesta para la pregunta de investigación: ¿De qué manera la implementación de un Modelo praxeológico del Talento matemático en el aula regular puede posibilitar el desarrollo del talento matemático a través de la participación de los estudiantes en una actividad matemática creativa?

4. Metodología de la Investigación

Este capítulo contempla cada uno de los sucesos presentes en cuanto al desarrollo de la investigación, esto con el fin de apoyar la conquista de intereses previos. En consecuencia, se fija un modelo de investigación de corte cualitativo, el cual permite continuar con el estudio del desarrollo del talento matemático asociado a las capacidades creativas de los estudiantes dentro del aula regular de matemáticas.

Barraza (2020), precisa la incorporación de las cuatro fases constituidas en la ingeniería didáctica (Artigue, 2008) para el desarrollo metodológico de la investigación. No obstante, con fines de esta investigación, se conceptúa la forma en que estas cuatro fases han sido adaptadas por Barquero y Bosch (2015) referentes en la TAD. Estas fases son definidas de la siguiente manera: I. Adaptación de un MER de las sucesiones reales infinitas, II. Conformación de la praxeología local de sucesiones reales infinitas y análisis a priori, III. Implementación y análisis in vivo, IV. Análisis a posteriori. Cada una de estas fases son reinterpretadas a la luz de los objetivos de esta investigación, tomando como referente el desarrollo e implementación del modelo MPTM.

4.1. Adaptación de un MER acerca las Sucesiones Reales Infinitas

Con base en lo expuesto en las secciones anteriores dentro de las decisiones de diseño y desarrollo de la investigación, el MER se convierte en pieza fundamental de la misma. Puesto que sustenta el MPTM, además, es una guía dentro del desarrollo de las fases de investigación. Ahora bien, construir un MER no ocupará la atención principal de este apartado, por consiguiente, se ha constituido para fines investigativos adaptar e implementar el MER ya establecido por Barraza (2020). Ya que este modelo se encarga de estudiar la esencia y las particularidades de las sucesiones reales infinitas en torno al componente creativo matemático para alumnos de quinto y sexto grado.

Si bien, el estudio de las sucesiones reales infinitas pareciera ser únicamente un contenido más de la clase de matemáticas, no será el caso para esta investigación. Puesto que, como se plantea en Barraza (2020) el estudio de este objeto matemático articula diferentes aspectos de análisis como: Su evolución histórica, la influencia en cuanto al desarrollo del talento matemático, el enfoque educativo asociado a la enseñanza y aprendizaje, el panorama por parte de los estándares del NCTM (AÑO), además, de lo que implica un estudio en cuanto al rigor de la ciencia matemática. Ahora bien, como factor propio de esta investigación, se incluye un análisis acerca de lo que plantean el Ministerio de Educación Nacional Colombiana (MEN) con base a los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006) y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) de cara a la enseñanza y el aprendizaje de las sucesiones reales infinitas en la educación básica, particularmente para el grado 5to primaria. Cada uno de los aspectos mencionados anteriormente encadenan una dimensión que permite abordar el problema planteado por esta investigación. De modo que, el MER propicie herramientas favorables para una implementación óptima del MPTM en búsqueda de potenciar el desarrollo del talento matemático y la creatividad a partir de actividades innovadoras y retadoras.

Negociar el significado de sucesión real infinita, es el primer paso para la constitución y adaptación del MER en esta investigación. Por ende, este eje se encarga de establecer el fundamento epistemológico respecto al objeto matemático principal de la investigación. Durante muchos años se ha identificado que algunos de los problemas presentes en nuestra sociedad involucran de manera directa o indirecta la comprensión de este objeto matemático, por lo que, su enseñanza ha tomado un papel destacado en los diferentes niveles educativos. En consecuencia, las sucesiones reales infinitas se convierten también en instrumento para potenciar el talento matemático y la creatividad de niños y jóvenes. No obstante, no será posible construir una definición única de este concepto a lo largo de la investigación, ya que el alcance de este objeto matemático se verá acotado por los diferentes niveles académicos, limitando así la posibilidad de estudiar perspectivas diversas como el significado de sucesión real en el análisis matemático y a su vez, el principio de inducción matemática determinado como la tecnología en términos de la TAD, dentro de este concepto.

Como resultado de lo anterior, Barraza (2020), encamina la construcción del concepto y el diseño de tareas analizando particularmente las tres siguientes perspectivas.

I. La enseñanza de las sucesiones en primaria bajo la mirada del NCTM (2000) y algunos documentos establecidos por la Secretaría de Educación Pública en México (SEP).

Bajo el contexto en el que será implementado esta investigación, se hace necesario considerar el marco legal de la educación colombiana, liderado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). En este marco, los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas se constituyen como los documentos orientadores para analizar la enseñanza de las sucesiones reales infinitas en el grado quinto de primaria. Este enfoque se realiza de manera análoga a la investigación de Barraza (2020), que se basa en los documentos establecidos por la Secretaría de Educación Pública (SEP) de México.

No obstante, se mantiene también la perspectiva ofrecida por los Estándares Básicos de Competencia del NCTM (2000), con el fin de analizar el panorama internacional acerca de lo que implica la enseñanza de este objeto matemático para determinado nivel académico.

Si bien los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, son documentos con perspectivas distintas, comparten entre sí un elemento principal llamado el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos; este se encarga de estudiar los objetos matemáticos de estudio asociados a la variación. Por su parte los Lineamientos proponen:

> El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. (MEN, 1998, p.50)

Si bien la perspectiva anterior se caracteriza por ofrecer un panorama general acerca la enseñanza y aprendizaje de este pensamiento, es valioso destacar el apoyo hacia la enseñanza de conceptos como las sucesiones en los primeros años del ciclo escolar. Este objeto matemático está directamente relacionado con el fenómeno de la variación, por consiguiente, se fortalece uno de los argumentos empleados durante el desarrollo de la investigación, sumado a esto, se resalta la importancia de plantear escenarios donde el concepto esté asociado a la vida cotidiana, lo que podría considerarse como una tarea novedosa y motivadora.

Ahora bien, los Estándares son un documento fundamentado en los Lineamientos Curriculares, sin embargo, en este ya se encuentra una división del ciclo escolar. Es decir, en este se plantea de manera explícita las competencias que esperan ser alcanzadas por los estudiantes frente a los pensamientos ya establecidos de acuerdo con el nivel escolar en el que se encuentren, así pues, el MEN (2006) plantean como estándares para el grado de cuarto y quinto de primaria en cuanto al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos que:

- El estudiante describe e interpreta variaciones presentadas en diferentes tipos de gráficos.
- La predicción de patrones de variación en los diferentes tipos de secuencia: numérica, geométrica o gráfica.
- El estudiante relacione patrones numéricos con tablas y reglas verbales

Cada una de estas competencias contribuyen al planteamiento de un análisis a priori del alcance y dominio de los alumnos frente a las posibles tareas donde aparece inmerso este concepto matemático. Si bien, no se presenta una tarea o actividad explícita dentro estos documentos, la incorporación del Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos es determinante para seleccionar y justificar adecuadamente las tareas establecidas por Barraza (2020) que serán llevadas a cabo dentro la fase II y III establecidas previamente en la metodología.

Este pensamiento matemático plantea aspectos importantes de cara al aprendizaje de los alumnos en cada uno de los diferentes niveles escolares, dentro la actividad matemática existen cinco procesos generales que se desarrollan durante todo el ciclo escolar, de modo que las actividades aplicadas por el maestro dentro el aula de clase fomenten de forma individual o conjunta el desarrollo de cada uno de estos procesos, estos son: el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación, la modelación y elaboración, la comparación y ejercitación. Por lo tanto, la manera adecuada de promover un avance significativo de dicho pensamiento es desarrollando cada uno de estos procesos dentro las diferentes actividades que se realicen en el aula de clase.

En consecuencia, de lo mencionado por los Estándares y los Lineamientos se pondera el iniciar de manera temprana el desarrollo y fortalecimiento del Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, implementando así actividades que fortalezcan los cinco procesos ya mencionados. Respecto a las actividades el MEN (2006a) considera pertinente que:

> Para desarrollar este pensamiento desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria son muy apropiadas, entre otras, las siguientes actividades: analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la

> secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. (p. 67)

Referente a lo establecido anteriormente se identifican elementos muy importantes para los intereses de esta investigación. Principalmente, se destaca que el objeto matemático en el que se precisan las actividades anteriores posiciona como concepto principal de estudio el concepto de sucesiones, sumado a este, aparecen otros componentes como patrón, fórmula o algoritmo, los cuales son afines a dicho objeto matemático de estudio. Lo que permite asentar de manera oportuna el MPTM establecido por Barraza (2020), ya que el tipo de tareas identificados en este modelo no es ajeno a las actividades que propicia el MEN.

Específicamente Barraza (2020) determina los dos siguientes tipos de tarea: la primera $T1$, se espera que el alumno encuentre los primeros términos para una sucesión a partir de la regla a_n. La segunda tarea $T2$ se caracteriza por construir el término a_{n+1} a partir de los términos anteriores de la sucesión. Estos tipos de tarea fueron identificados por Barraza (2020), dentro del análisis documental de los documentos emitidos por la SEP. En este mismo orden de ideas, estos dos tipos de tareas se relacionan con las actividades establecidas anteriormente por el MEN, si bien, se consideran diversas particularidades entre una y otra tarea, el objetivo principal de estas se direcciona en un mismo lugar. Por consiguiente, este modelo no solo será útil para acrecentar el talento y la creatividad de los estudiantes, sino que también permitirá desarrollar conjuntamente el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Con respecto al análisis y revisión de Barraza (2020) de cara a las actividades que presenta los estándares dados por la NCTM, para así cerrar esta primera perspectiva de análisis, articulando así un panorama nacional e internacional del estudio de este concepto matemático para el grado de quinto primaria, se destaca la aparición de la tarea $T3$, la cual consiste en construir una expresión para el término n- ésimo de la sucesión. Barraza (2020) afirma que una de las características de esta tarea es la diversidad de técnicas a la hora de dar solución a este tipo de tarea, a su vez este tipo de tarea abre el camino a la concentración de creatividad matemática por parte de los estudiantes. En conclusión, cada uno de los tipos de tarea caracterizados previamente propician un entorno de investigación contextualizado y concreto frente al significado de la enseñanza y el aprendizaje de este objeto matemático, además, de articular la capacidad creativa como elemento fundamental para desarrollar el talento matemático.

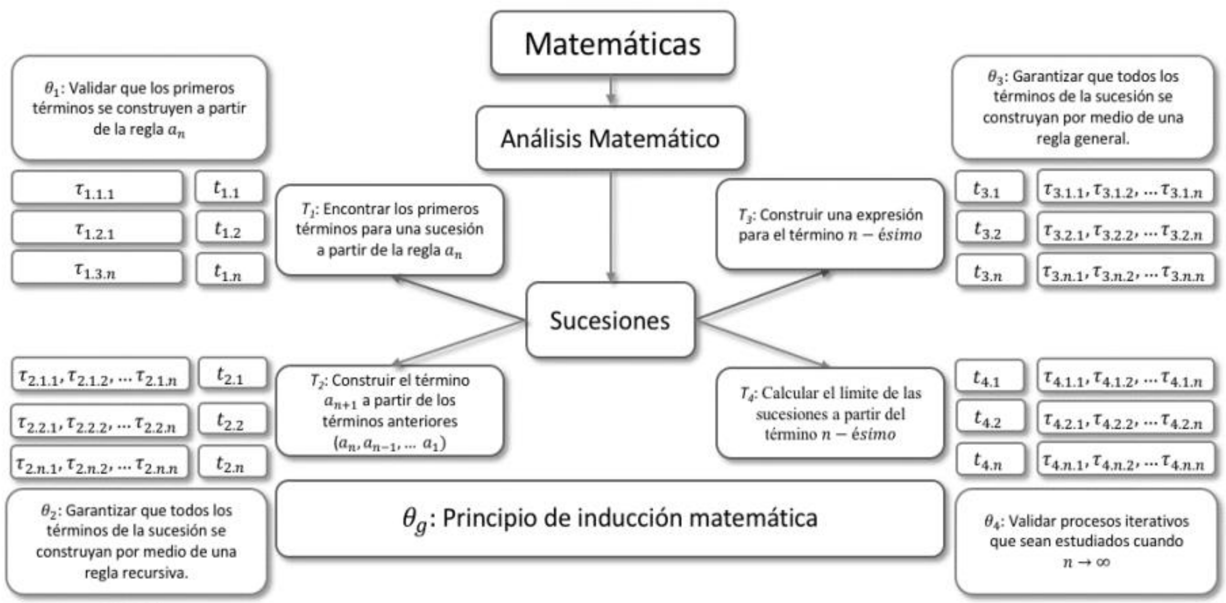
II. Las sucesiones en el estudio del talento matemático.

Si bien, el talento matemático se posiciona como el elemento teórico principal de la investigación, es necesario establecer e identificar la incidencia que tiene el objeto matemático de estudio para la investigación, puesto que, esta potencia el desarrollo de dicha capacidad. Dentro lo establecido por Barraza (2020), esta perspectiva debe responder a la búsqueda de actividades y tareas en material académico en el que el tema de las sucesiones cobre protagonismo. Particularmente se identifican dos perspectivas, la primera responde a resolver situaciones que involucran secuencias figurales y numéricas, mientras que, la segunda interviene procesos avanzados de matemáticas. Es en esta última perspectiva donde se identifica el tipo de tarea $T4$: Calcular el límite de las sucesiones a partir del término n- ésimo.

Por su parte Barraza (2020) cita algunos estudios de diferentes autores con los que sustenta la práctica del tipo de tarea anterior, entre los más destacados tenemos a Roa-Fuentes (2012), referente a las curvas fractales. Mientras que Srireman (2003) con el principio de Dirichlet. Por ende, es posible pensar en un diseño centrado en este objeto matemático que promueva el desarrollo del talento y la creatividad en matemáticas, la siguiente figura permite observar a partir de un enfoque estructural del funcionamiento del MPTM, en torno a las tareas definidas anteriormente.

Figura 4

Esquema praxeológico sobre el estudio de las sucesiones reales infinitas



Nota: La figura anterior se presenta el esquema praxeológico sobre el objeto matemático de estudio y su relación con el MPTM. Tomado de *Actividad matemática creativa y desarrollo del talento matemático a través del modelo praxeológico*, por Z. Barraza, A. Romo, y S. Roa (p. 96), 2022.

El esquema anterior, es claro y conciso respecto al funcionamiento los fundamentos y objetivos del MPTM, en este se evidencian cada uno de los tipos de tareas identificados y contextualizados en la realidad de la educación colombiana. Además, es posible observar una relación progresiva entre cada una de las tareas, no obstante, no significa que se deba establecer un proceso rígido y secuencial, ya que así podría verse afectado el proceso de creatividad de cada uno de los estudiantes.

Finalmente, Barraza (2020), es clara con el alcance de su modelo, si bien su investigación tuvo como campo de acción un grupo determinado de estudiantes fuera de lo que se pueda considerar un aula común, establece que el modelo puede ser llevado al aula regular, siempre y cuando el rango de edades y el nivel académico de los estudiantes coincidan con cada uno de los elementos planteados a lo largo de la investigación. Por lo tanto, el desarrollo propio de esta investigación se acoge de manera acertada a cada una de estas recomendaciones y busca el acondicionamiento de factores que puedan influir directamente en la implementación del modelo, puesto que, cada una de las investigaciones tiene intereses propios.

III. El estudio de las sucesiones en el análisis matemático y el principio de inducción como tecnología general θ_g

De cara al proceso de aplicación del MER, es necesario analizar esta tercera perspectiva, si bien, no suele ser común presenciar este tipo conceptos matemáticos dentro estos niveles académicos básicos, dichos elementos se encargan particularmente en la investigación de direccionar un horizonte novedoso para la educación matemática tradicional. Por su parte, Courant (1999) afirma que toda sucesión de números naturales da lugar fundamental al principio de inducción matemática. Lastimosamente los estudiantes tienen su primer contacto con este elemento matemático al momento de cursar estudios de formación superior, desaprovechando así la posibilidad de explotar aún más este tipo de elementos matemáticos en un contexto formal y riguroso. Por lo que, O' Regan (2016) establece que el principio de inducción matemática se percibe como una herramienta esencial de demostración, empleada para afirmar la veracidad de una proposición en relación con todos los números enteros positivos

Dicho esto, la realidad de transportar un principio no tan sencillo de las matemáticas a cierto nivel del ciclo regular escolar no será sencillo, no obstante, la articulación del MPTM y los tipos de tarea seleccionados serán fundamentales para conseguir este objetivo. Por lo tanto, para el análisis respectivo a la producción de técnicas de generalización Barraza (2020) establece los siguientes pasos:

- P1: Esta corresponde al estudio de los primeros términos y se asocia con los momentos (M1 y M2 de estudio)
- P2: Se constituye por parte del alumno una regla de generalización que modele el ejercicio inicial.
- P3: Implementación de la regla encontrada en la técnica anterior, para calcular n-términos

El esquema presentado en la figura 4, es preciso en cuanto a la ruta que se pretende trazar para ver el principio de inducción matemática como una tecnología general θ_g propia del modelo. Considerando válidas las practicas recursivas por parte de los estudiantes en búsqueda de la generalización de sucesiones geométricas o numéricas, con el fin de, constituir en un carácter inferencial una regla general, en la que los estudiantes implementen elementos propios del principio de inducción como el paso base y el pase inductivo.

4.2. Aspectos Metodológicos Referentes al Diseño y Características de la Institución

Previo a la implementación del MPTM, es necesario establecer características propias de la institución y las diferentes estrategias implementadas de cara a la aplicación del modelo. Este particularmente dio lugar en la institución educativa de Lebrija (Santander, Colombia) de nombre Jorge Eliecer Gaitán de modalidad académica, nacionalizado y certificado para los niveles preescolar, básica primaria, básica secundaria y media vocacional, de naturaleza privada, carácter mixto y jornada mañana en calendario A.

En esta investigación entendemos el *aula regular*, como un salón de clase convencional en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, guiada por un marco institucional que espera propiciar en los alumnos competencias y objetivos específicos definidos por las directrices nacionales. Así mismo, la población participante en esta investigación corresponde a los estudiantes que han cursado satisfactoriamente el nivel quinto primaria. Es decir, al momento de realizar las sesiones de trabajo con los estudiantes estos se encuentran cursando el primer semestre del grado **sexto**, correspondiente al nivel uno de secundaria. Ahora bien, la premisa de caracterizar a los estudiantes talentosos no es un factor fundamental, sin embargo, bajo un análisis documentado si es preciso mencionar que no se identificó ningún estudiante con necesidad educativa especial, lo cual permite realizar de igual manera el desarrollo y manejo de actividades para todo el curso.

El grupo está conformado por **dieciocho alumnos**, respectivamente la misma cantidad de pupitres correspondientes a trabajo individual, un tablero, un televisor y acceso a internet de ser requerido por parte del maestro. La metodología empleada para la resolución de tareas comprende tanto la producción individual como el trabajo colaborativo, para así percibir las diferentes rutas de razonamiento y creatividad entorno a la resolución de la tarea propuesta, la exploración de ideas y el análisis colectivo, son factores indispensables para fomentar en el espacio una participación y de respeto por los demás.

Finalmente, la intervención se desarrolla durante tres semanas, dos sesiones por semana cada una de ellas de dos horas. Las sesiones son orientadas directamente por el autor de esta tesis, particularmente la última sesión estuvo centrada en integrar y compartir con los estudiantes los aprendizajes construidos durante la actividad matemática creativa y el reconocimiento de su esfuerzo con algunos aperitivos y recordatorios.

4.3. Implementación y Adaptación de un Diseño Didáctico para Desarrollar el Talento Matemático

Respecto a las actividades que comprenden la aplicación de esta fase de la investigación, es preciso destacar que el estudio realizado para cada una de las perspectivas anteriores implementadas por Barraza (2020) para la consolidación del MER, y su vez los elementos propios de la TAD, hacen posible la adaptación e incorporación de este modelo al contexto educativo colombiano, cada uno de estos elementos propician un engranaje eficaz de cara al funcionamiento del MPTM.

Por lo tanto, se ha determinado implementar parte del diseño de tareas ya establecido por Barraza (2020), inicialmente este diseño cuenta con total de seis situaciones problemáticas, cada una de estas precisa una o más de los cuatro tipos de tareas ya establecidos en el apartado anterior ($T1, T2, T3, T4$). Además, estas cuentan con elementos propios de análisis de parte la TAD como, la técnica (τ), la tecnología (θ), y la teoría (Θ), los cuales se encargan de justificar teóricamente las respuestas emitidas por el alumno, con el fin, de potenciar el e desarrollo del talento matemático y respectivamente su habilidad creativa en respuesta a la aplicación del modelo.

Ahora bien, como respuesta al objetivo de investigación es importante continuar con la adaptación del MPTM, por lo tanto, tan solo tres de las seis tareas generadoras establecidas por Barraza (2020) serán consideradas en esta investigación. Esta decisión permite un mejor análisis en las tareas desarrolladas por cada uno de los estudiantes, puesto que, al ser el aula regular de matemáticas la institución definida para la aplicación del modelo no es apropiado desplegar una gran cantidad de situaciones en la que el estudio tendrá un enfoque superficial de lo acontecido, claro, esto se debe también a la gran cantidad de estudiantes.

No obstante, es pertinente aclarar que desarrollar menos actividades de las que están establecidas en el diseño principal tampoco perjudica el objetivo de la investigación y el del mismo modelo, por el contrario, esta decisión permite enfocar mayor cantidad de tiempo al análisis de resultados obtenidos posterior a la solución de tareas seleccionadas. Lo que implica un examen de todos y cada uno de los elementos que conforman el MPTM, para así contribuir de mejor manera en el desarrollo del talento y la creatividad matemática de cada uno de los estudiantes.

Tabla 1

Situaciones y tareas para el diseño didáctico algunas cosas tomadas

Situación problemática	*Tareas*
Sillas y mesas.	Tarea 1.1: Determinar cuántas sillas pueden acomodarse en cualquier número de mesas. Tarea 1.2: Determinar cuántos cuadrados son necesarios para construir cualquier término de la secuencia. Tarea 1.3: Determinar cuántos cuadrados sombreados son necesarios para construir cualquier imagen.
Doblado de papel.	Tarea 2.1: Determinar el área de la superficie de la hoja resultante al realizar cualquier número de dobleces Tarea 2.2: Determinar el perímetro de la superficie de la hoja resultante al realizar cualquier número de dobleces.

Triángulo Sierpiński.	Tarea 3.1: Determinar el cambio en la cantidad de triángulos al construir el Triángulo de Sierpiński. Tarea 3.2: Determinar el cambio del área al construir el Triángulo de Sierpiński. Tarea 3.3: Determinar el cambio del perímetro al construir el Triángulo de Sierpiński

Nota: En la tabla se presenta el conjunto de situaciones problema a desarrollar junto con las tareas establecidas por Barraza (2020)

Cada una de las actividades establecidas en la Tabla 1, conforman la adaptación del diseño didáctico que es implementado dentro esta investigación, cada una de estas comprende un apartado para presentar la manera en que se lleva a cabo cada actividad y en qué consiste la misma. Además, presenta un análisis a priori, con el fin de predecir elementos de análisis y discusión que se pueden generar a partir del desarrollo de cada una de las tareas presentadas.

Por otro parte, cada una de estas situaciones presentan tareas y subtareas relacionadas entre sí, lo que implica la presencia de la actividad matemática creativa frente a estas tareas novedosas. Así mismo, el trabajo en equipo por parte de los estudiantes es determinante para el desarrollo del diseño, ya que este fomenta la participación de los estudiantes, además, contempla la variedad de perspectivas frente a la resolución de una tarea.

4.4. Presentación y Descripción de Cada Una de las Tareas Generadoras

El apartado anterior proporcionó grosso modo el nombre y algunas de las preguntas que aparecen dentro las tres tareas generadoras seleccionadas del MPTM. Sin embargo, no es suficiente para comprender a profundidad cada una de estas, incluso la manera en que serán presentadas y desarrolladas por los estudiantes, por la tanto esta sección apunta a la descripción y profundización de las tres tareas generadoras que hacen parte de este trabajo.

4.4.1. Situación problemática 1: sillas y mesas

El desarrollo de esta situación de aprendizaje resulta apropiado para el desarrollo del talento y creatividad matemática, puesto que invita a la reflexión y solución del que podría ser un problema recurrente de la vida cotidiana. Así mismo, vincula elementos propios de la matemática como piezas fundamentales para la resolución y comprensión de sucesos que articulan las aplicaciones de dicha ciencia.

En literatura relacionada con este tipo de tareas, se analiza la forma en que éstas pueden ser introducidas desde los primeros niveles escolares. e. Así mismo, se enfatiza la importancia de aprovechar al máximo la aplicabilidad de las matemáticas en situaciones reales y cercanas a los estudiantes, lo que permite un acercamiento al rigor de la ciencia matemática, como se demuestra en contexto de esta tarea.

Barraza (2020) propone un total de dos tareas para esta situación de aprendizaje. Cada una de ellas abarca diversas subtareas diseñadas para orientar la reflexión sobre la secuencia de figuras generada, con niveles de dificultad graduales que se ajustan a las necesidades de los estudiantes.

- **Tarea 1.1**

Tarea: 1.1 Determinar cuántas sillas podrían acomodarse en cualquier número de mesas

La formulación y contextualización de dicha situación problema se precisa en el apéndice 1, en este contemplan las diferentes tareas y subtareas propuestas para el desarrollo del talento y la creatividad matemática. Así mismo, esta situación problemática establece el aula de clase como contexto para la tarea a realizar, esta misma, comprende un total de tres subtareas estas son:

Subtarea 1.1.1: De acuerdo con la información de la figura 7 responda las siguientes preguntas.

¿Determine el número de personas que podrían sentarse con un total 5 mesas unidas?

¿Determine el número de personas que podrían sentarse con un total de 16 mesas unidas?

Subtarea 1.1.2: ¿Cómo se podría obtener el número de sillas necesarias para cualquier número de mesas?

Subtarea 1.1.3 Determinar ¿cuántas mesas se necesitan para ubicar 42 personas? y ¿cuántas para acomodar 100 personas?

Para cada Tarea se realiza un análisis a priori detallado que se presenta en la siguiente sección. Ahora bien, la segunda tarea comprende una dinámica similar, sin embargo, el cambio de algunos elementos abre la puerta a diferentes técnicas para el desarrollo de esta.

Tarea 1.2: Determinar cuántas sillas podrían acomodarse en cualquier número de mesas.

En la tarea anterior se implementó un prototipo de mesa de forma cuadrada, mientras que en la presente tarea se emplea una mesa de forma trapezoidal, cuya ilustración se encuentra en el apéndice 2, este corresponde a las guías de trabajo otorgada a los estudiantes titulada "Sesión Dos de Clase". A partir de esta dicha situación, se proponen las siguientes tres preguntas, que se constituyen como subtareas dentro la tarea mencionada anteriormente. Estas son:

Subtarea 1.2.1: Determine cuántas personas se podrían sentar si acomodamos 6 mesas juntas y determine cuántas para 16 mesas juntas.

Subtarea 1.2.2: Determine cómo podríamos obtener el número de sillas para cualquier organización de mesas.

Subtarea 1.2.3: Determine cuántas mesas necesitamos para acomodar a 62 personas.

Las tareas 1.1 y 1.2 cuentan con características similares, por lo tanto, es acorde que su nivel de dificultad sea el mismo, específicamente un nivel medio. Ahora bien, un estudio más afondo de cada una de estas tareas y la relación que tiene entre ellas se percibe de forma concisa en el análisis a priori de esta investigación.

4.4.2. Situación problemática 2: doblado de una hoja de papel

Esta situación completa en su totalidad el total de tres problemas tomadas del modelo implementado por Barraza (2020) para el desarrollo de esta investigación. No obstante, solo se consideran dos de tres de los problemas para esta investigación. Ahora bien, este conjunto de tareas proporciona un reto tangible a los estudiantes, es decir, contemplar la existencia de una tarea matemática a partir de una situación tan común como doblar una hoja de papel resulta novedoso y estimulante para los estudiantes.

Existen diferentes formas de doblar una hoja de papel y cada una de estas se considera valida de acuerdo con el contexto que se define. No obstante, para precisar un desarrollo óptimo de cada una de las tareas que involucra esta situación problemática, considere la siguiente manera de doblar una hoja de papel para el desarrollo de las tareas que surgen posteriormente, además, dicha hoja de papel9 cuadrada l cuenta con 20 cm de longitud en uno de sus lados y 0.1 mm de grosor.

Con base en lo establecido anteriormente, se establecen un total de dos tareas generadoras, cada una de estas centra su interés en diferentes propósitos, además, contine diferentes subtareas que permiten procesar de mejor manera el desarrollo cada uno de estos. No obstante, cada una de estas se relacionan entre sí y no exime la posibilidad de que el estudiante las aborde en el orden que el considere apropiado, puesto que, de lo contrario se vería limitada la capacidad creativa.

- **Tarea 2.1 Determinar el área de la superficie de la hoja resultante al realizar cualquier número de dobleces**

La contextualización anterior permite considerar el área como uno de los objetos matemáticos de análisis dentro esta tarea. Consecuentemente, se consideran un total de tres subtareas para abordar el objetivo de esta tarea, además de considerar nuevos elementos de estudio a partir de su desarrollo.

- **Subtarea 2.1.1** Si repetimos el proceso de doblar la hoja 5 veces, ¿cuál es el área y perímetro de la superficie resultante?
- **Subtarea 2.1.2**: ¿Cómo podríamos obtener el área de la superficie de la hoja resultante para cualquier número de dobleces?
- **Subtarea 2.1.3**: ¿Cómo podríamos obtener el perímetro de la superficie de la hoja resultante para cualquier número de dobleces?

La profundización referente a las implicaciones de cada una de estas subtareas se ven referidas bajo el análisis a priori establecido en el siguiente apartado de esta investigación.

- **Tarea 2.2 Determinar el grosor generado por el doblado de la hoja para cualquier número de dobleces**

En esta tercera tarea, la manipulación del material concreto sigue siendo protagonista dentro el momento exploratorio de los estudiantes para abordarla. Sin embargo, no resulta suficiente para alcanzar la solución, por lo que Barraza (2020) considera oportuno diseñar las tres subtareas.

- **Subtarea 2.2.1**: Supongamos que tu hoja mide 1 milímetro de grosor. Si la doblamos una vez, ¿cuál es ahora el grosor generado por este doblez?
- **Subtarea 2.2.2:** Supongamos que la doblamos 5 veces, ¿cuál será ahora el grosor generado por este doblez?
- **Subtarea 3.2.3:** ¿Cómo podríamos obtener el grosor generado por el doblado de la hoja para cualquier doblez?

Se espera que el estudiante consiga establecer la regla de generalización del perímetro a partir de un análisis enfocado en los primeros términos de estudio. Por lo que, las subtareas establecidas son clave en el apoyo de la construcción de una solución que implica un dominio creativo de la matemática y respectivamente al desarrollo del talento matemático.

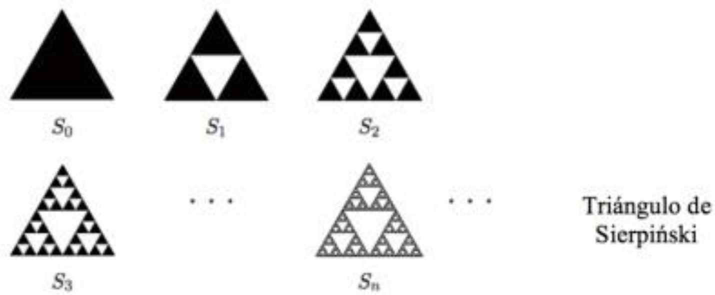
4.4.3. Situación problemática 3: triangulo Sierpiński

La situación problemática número se propone en el contexto de construcción del triángulo de Sierpiński, este corresponde a un fascinante patrón fractal que se obtiene mediante un proceso iterativo de subdivisión geométrica. Ahora bien, Barraza (2020) afianza esta actividad como promotora del talento y creatividad matemática apoyada en Roa y Oktaç (2014) quienes en un estudio particular del talento con énfasis en el concepto de infinito utilizaron esta situación problemática. Sin embargo, para el interés de esta investigación el enfoque de esta tarea va hacia la generalización de determinada expresión matemática.

- **Tarea generadora 3:** La sucesión de figuras, s_0 , s_1 , s_2, s_3 ….. s_n se acercan a una figura en particular, esta figura límite es el Triángulo de Sierpiński

Figura 5

Construcción del triángulo de Sierpiński



Nota: La figura anterior fue tomada Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad, por Z. Barraza (p. 89), 2020.

Ahora bien, suponga se sugiere al alumno construir exhaustivamente el triángulo de Sierpiński, a partir de esta tarea Barraza (2020) define tres preguntas que se pueden validar a lo largo de este proceso iterativo, estas son: *¿Qué pasa con el número de triángulos? ¿Qué pasa con el área sombreada del triángulo de Sierpiński? ¿Qué pasa con el perímetro?*

Esta situación y su conjunto de tareas busca identificar distintas técnicas creativas y posibles recursos empleados por los estudiantes a la hora de enfrentarse a cada una de las tareas y subtareas planteadas; a continuación, se proponen de manera específica las Tareas:

Tomando como referencia la idea anterior, considere la pregunta anterior: ¿Qué pasa con el número de triángulos que se van formando en cada iteración de construcción del triángulo de

Sierpiński? como la **tarea 3.1**, a partir de esta surgen dos subtareas enfocadas en la comprensión de los primeros términos de estudio.

- **Subtarea 3.1.1** Observa el siguiente triángulo equilátero sombreado de negro S_0.

Figura 6

S_0 como elemento inicial para la construcción del triángulo Sierpiński

S_0

- **Subtarea 3.1.2** La sucesión que se va logrando parece "acercarse" a una figura en particular, esta figura límite es el triángulo de Sierpiński. Imagina que aplicas el proceso de construcción hasta obtener el Triángulo de Sierpiński, ¿qué pasa con la cantidad de triángulos?

En este orden de ideas la pregunta: ¿Cómo va cambiando el área sombreada cada vez que nos acercamos al triángulo de Sierpiński? Responde a la **tarea 3.2**, esta consecuentemente desarrolla un total de dos subtareas.

- **Subtarea 3.2.1:** Si el área del triángulo S0 es igual 1 cm^2 , encuentra el área total sombreada de cada una de las figuras (S0, S1, S2, S3, …), hasta donde te sea posible.

- **Subtarea 3.2.2**: Si seguimos haciendo el mismo procedimiento una y otra vez, ¿cuál es el área cuando tienes el Triángulo de Sierpiński o cuando estás muy cerca al triángulo?

A diferencia de las subtareas establecidas en la tarea 1.1, el desarrollo de estas proporciona no solo un primer acercamiento al problema inicial, puesto que, se requiere por parte del estudiante la exploración e implementación de técnicas para la solución de cada una de estas.

Finalmente, la **tarea 3.3.** fundamentada en ¿Qué pasa con el perímetro? El desarrollo de esta tarea implica la formulación de nuevas preguntas, estas son consideradas como subtareas, su objetivo es facilitar el manejo y resolución de una tarea más grande.

- **Tarea 3.3** Determinar cómo cambia el perímetro de las curvas que preceden al Triángulo de Sierpiński, al determinarlo como un proceso iterativo.

De cara al desarrollo óptimo de esta tarea Barraza (2020) plantea las siguientes subtareas.

- **Subtarea 3.3.1:** Supongamos que cada lado del triángulo S0 tiene una longitud de 1 cm. *Encuentra su perímetro. Si nos fijamos en la figura S1, ¿cuál es su perímetro? Si nos fijamos en la figura S2, ¿cuál es su perímetro?*

- **Subtarea 3.3.2:** Imagina que aplicas este mismo proceso hasta obtener el Triángulo de Sierpiński, ¿qué pasa con el perímetro cada vez que te acercas al triángulo de Sierpiński?

Si bien, cada una de las tareas y subtareas anteriores responden a diferentes objetivos. El conjunto de estas construye una ruta de aprendizaje que promueve el desarrollo autónomo de técnicas y recursos para el desarrollo del talento matemático y la actividad creativa. Por consiguiente, el MPTM se consolida como herramienta principal para comprender e interpretar el avance que presente cada uno de los estudiantes de cara al desarrollo de ciertas tareas generadoras.

5. Análisis A Priori de las Tareas Generadoras Establecidas en la Adaptación al Diseño

La investigación en educación matemática considera el análisis a priori como una herramienta valiosa para comprender, abordar e interpretar diferentes situaciones problemáticas centradas en la matemática. Por lo tanto, esta investigación no resulta ajena a dicho enfoque metodológico, en consecuencia, un análisis a cada una de las tres situaciones problemáticas presentadas en el apartado anterior tomando como fundamento el MPTM. Por consiguiente, la presencia de la técnica (τ), la tecnología (θ) y la teoría (Θ) propias del modelo, adquiere relevancia significativa en el análisis de los resultados obtenidos durante la ejecución de cada una de las tareas.

Así mismo, Barraza (2020) plantea también como elementos principales de dicho análisis, seis momentos de estudio plantados por Serrano (2013), los tres pasos de la técnica general θ_{m} como eje central de actividad; además, de la componente θ_{c} creativa y sus funciones dentro cada una de las situaciones. Por lo tanto, considerar estos aportes resulta apropiado para el desarrollo de esta investigación, no obstante, la situación problema número dos presenta un análisis novedoso, debido a que Barraza (2020) no la contempla dentro su análisis realizado. En contraste, con los elementos contemplados para el análisis a priori se suma el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, caracterizado por justificar el accionar matemático bajo las orientaciones establecidas por el MEN.

5.1. Análisis a priori de la situación problemática 1: sillas y mesas

El estudio de las tareas y subtareas siguientes, consideradas dentro del contexto problemático de sillas y mesas, a diferencia de lo observado en el caso del Triángulo de Sierpiński, es una contribución única de esta investigación. Sin embargo, los fundamentos teóricos y conceptuales presentados para la predicción de la actividad matemática por parte de los estudiantes se adhieren a los principios previamente establecidos por el marco teórico. Del mismo modo, la situación de aprendizaje mencionada fomenta el desarrollo del talento y la creatividad matemática, ya que estimula la reflexión y la resolución de problemas potencialmente recurrentes en la vida cotidiana. Además, establece una conexión entre elementos inherentes a las matemáticas y su aplicación práctica, destacándolos como fundamentales para la comprensión y resolución de fenómenos relacionados con esta disciplina científica.

- **Tarea 1.1 Determinar cuántas sillas podrían acomodarse en cualquier número de mesas**

El desarrollo de esta tarea se fundamenta en la situación planteada en la tabla 2. Por lo que, Barraza (2020) despliega tres subtareas en beneficio a la capacidad matemática y creativa del estudiante tras enfrentarse a tareas desafiantes.

- La subtarea **1.1.1** corresponde a la respuesta de las siguientes preguntas: ¿Determine el número de personas que podrían sentarse con un total 5 mesas juntas? ¿Determine el número de personas que podrían sentarse con un total de 16 mesas juntas?

El análisis de las preguntas previas puede llevarse a cabo de manera conjunta. Además, se distingue claramente el estudio de los primeros términos (P1). Por consiguiente, este se considera el primer acercamiento del estudiante a la tarea generadora (M1). En consecuencia, se elabora la tabla 2 con el propósito de registrar cada una de las técnicas empleadas por los estudiantes para determinar la cantidad de personas que pueden sentarse en un número específico de mesas.

Tabla 2

Subtarea 1.1 de la guía correspondiente a la sesión 1

Momento	Total, de sillas	Momento	Total, de sillas
0	4	9	

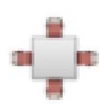
1	10
2	11
3	12
4	13
5	14
6	15
7	16
8	17

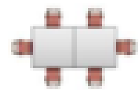
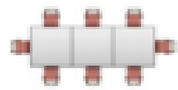
Nota: Elemento de recopilación de técnicas y concepciones logradas de cara al cambio entre la cantidad de mesas y el total de personas que se pueden ubicar en ellas.

El $M_{0,}$ corresponde a la existencia de una mesa en forma de cuadrilátero, particularmente un rectángulo. Por lo tanto, se pueden ubicar un total de 4 personas. Por su parte, M_1, se produce al juntar una mesa con uno de los lados del cuadrilátero inicial, propiciando así, la posibilidad de aumentar dos sillas más, como se observa posteriormente.

Tabla 3

Estudio de los primeros términos tarea 1.1

Número de mesas	Representación gráfica	Número de sillas
$\boldsymbol{M_0}$		$S_0 = 4$

$\boldsymbol{M_1}$		$S_1 = 6$
$\boldsymbol{M_2}$		$S_2 = 8$

Nota: La tabla presenta la secuencia formada por el número de mesas y la cantidad de sillas, en donde la representación gráfica fue tomada de Z. Barraza (p. 114), 2022.

A partir de M_4, se produce un proceso exploratorio (M2), este podría identificarse como la relación entre $S_n\, y\, S_{n+1}$ por la producción de una nueva técnica (P1). Dicha acción da respuesta a la **Subtarea 1.1.2:** ¿Cómo se podría obtener el número de sillas necesarias para cualquier número de mesas? Dicha respuesta corresponde al patrón numérico evidenciado en el número de veces que incremente S_{n+1} con respecto a la anterior $S_{n.}$ Una vez que los estudiantes identifiquen los cambios en cada momento: $S_0 = 2(1) + 2 = 4$, $S_1 = 2(2) + 2 = 6$,$S_3 = 2(3) + 2 = 8, S_4 = 2(4) + 2 = 10, S_5 = 2(5) + 2 = 12$, se espera que para constituir una generalización recursiva (P2) los estudiantes construyan una relación entre $S_n\, y\, M_n$ y determinen la formulación verbal de la siguiente regla $S_n = 2(M_n) + 2$. Es decir, una expresión de la siguiente manera: “Para determinar el número de sillas posibles de acuerdo con el número de mesas, debemos multiplicar el número de mesas por dos y luego a ese resultado sumarle dos, puesto que, a medida que unimos una mesa nueva conseguimos espacio para dos sillas más”.

Esta regla recursiva permite dar respuesta por completo a la subtarea 1.1.1, además de completar la tabla 3 en la que n = 16 es el termino mayor, sin embargo, es posible que los estudiantes prolonguen en cálculo de sillas para n > 16. Implementando así la regla obtenida para calcular n-términos (P3), esto se debe a que el contexto del problema resulta estimulante de cara a la aplicación de la matemática en situaciones de la vida cotidiana.

Subtarea 1.1.3 ¿Determinar cuántas mesas se necesitan para ubicar 42 personas y cuántas para acomodar 100 personas?

Dar respuesta a la subtarea anterior, es posible mediante una técnica similar a la del número de sillas correspondiente al número de mesas (F4), es decir, a comparación de la subtarea anterior considere el número de sillas como elemento independiente, mientras, las mesas ahora dependen del número de sillas. Por lo tanto, una adaptación a la técnica encontrada en la tarea anterior podría dar respuesta a la pregunta, incluso para $S = 42$ sillas es posible que los alumnos recurran a proporcionar más elementos en la tabla 6, consiguiendo así la respuesta para esta.

No obstante, este resulta ser poco ortodoxo a medida que el número de sillas sea muy grande. Por lo que, considerar el estudio de los primeros termino (P1), por lo que para $S_0 = 4\, sillas,$ se requiere una mesa (M_0), $S_1 = 6\, sillas,\ corespondiente\ a\ 2\, mesas(M_1)$, $S_2 = 8\, sillas$, para un total de 3 mesas. De modo que mientras, el número de sillas después S_0 aumenta de 2 en 2, es decir $S_{n+1} = S_n + 2$, mientras que el aumento de $M_{n+1} = M_n + 1$. Ahora bien, considerando el razonamiento anterior es posible considerar que la nueva técnica de generalización (F1), corresponde a $M_n = \frac{S_n - 2}{2}$, en este orden de ideas verifique para n = 42 y n = 100 sillas respectivamente:

$M_n = \frac{42-2}{2} =$ 20 mesas se requieren para acomodar 42 personas.

$M_n = \frac{100-2}{2} = 49$ mesas se requieren para acomodar 100 personas.

Aunque es factible que los alumnos no presenten esta regla de generalización de manera explícita como se indica anteriormente, existe la posibilidad de que perciban verbalmente el resultado de la misma. Por ejemplo, podrían expresar: "Para calcular el número de mesas en relación con el número de sillas dado inicialmente, es necesario dividir el número de sillas menos dos entre dos. De esta manera, podemos calcular para cualquier conjunto de sillas S_n el número de mesas M_n correspondiente. Asimismo, es imperativo asegurarse de que los estudiantes abstengan el uso de subíndices para representar el número de mesas y sillas en su totalidad, de manera que, mediante la verbalización se identifique dicha notación matemática.

Tarea 1.2: Determinar cuántas sillas podrían acomodarse en cualquier número de mesas Siguiendo una estructura similar al análisis presentado en la tarea anterior, el enfoque y la investigación de esta se centran en la tabla 6. Específicamente, se incorporan un total de tres subtareas delineadas por Barraza (2020), comenzando con la subtarea 1.2.1, que se enfoca en las dos siguientes preguntas: 1) ¿Determine el número de personas que podrían sentarse con un total 6 mesas juntas? 2) ¿Determine el número de personas que podrían sentarse con un total de 16 mesas juntas?

El análisis de las preguntas previas puede llevarse a cabo de manera conjunta. Además, se distingue claramente el estudio de los primeros términos (P1). Por consiguiente, este se considera el primer acercamiento del estudiante a la tarea generadora (M1). En consecuencia, se elabora la tabla 5 con el propósito de registrar cada una de las técnicas empleadas por los estudiantes para determinar la cantidad de personas que pueden sentarse en un número específico de mesas

Tabla 4

Recopilación de técnicas y concepciones logradas.

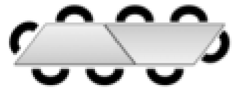
Momento	Total, de sillas	Momento	Total, de sillas
0	5	9	
1		10	
2		11	
3		12	
4		13	
5		14	
6		15	
7		16	
8			

Si bien, el análisis de esta nueva subtarea no resulta ajeno a lo sucedido en la tarea 1.1. puesto que sus preguntas cuentan con el mismo objetivo. Además, bajo el análisis de los primeros tres términos de la situación Se constata que la única modificación radica en la geometría de la mesa, específicamente a un trapecio. Por lo tanto, se registra una variación en la cantidad de sillas que pueden ser acomodadas.

Tabla 5

Estudio de los primeros términos de la tarea 2.2

Número de mesas	Representación gráfica	Número de sillas
$\boldsymbol{M_0}$		$S_0 = 5$

$\boldsymbol{M_1}$		$S_1 = 8$
$\boldsymbol{M_2}$		$S_2 = 11$

Nota: La tabla presenta la secuencia formada por el número de mesas y la cantidad de sillas, en donde la representación gráfica fue tomada de Z. Barraza (p. 114), 2022.

Mediante un estudio recursivo de la secuencia estructurada, es posible dar respuesta por completo a la subtarea **1.2.1**, además de completar la tabla establecida en la que n = 16 es el termino mayor, sin embargo, es posible que los estudiantes prolonguen en cálculo de sillas para n > 16. Implementando así la regla obtenida para calcular n-términos (P3), esto se debe a que el contexto del problema, el cual resulta estimulante de cara a la aplicación de la matemática en situaciones de la vida cotidiana.

Por otro lado, a partir de M_4, se produce un proceso exploratorio (M2), este podría identificarse como la relación entre $S_n \, y \, S_{n+1}$ por la producción de una nueva técnica (P1). Dicha acción da respuesta a la **Subtarea 1.1.2:** ¿Cómo se podría obtener el número de sillas necesarias para cualquier número de mesas?

Dicha respuesta corresponde al patrón numérico evidenciado en el número de veces que incremente S_{n+1} con respecto a la anterior $S_{n.}$ Una vez que los estudiantes identifiquen los cambios en cada momento: $S_0 = 3(1) + 2 = 6$, $S_1 = 3(2) + 2 = 8$, $S_3 = 3(3) + 2 = 11, S_4 = 3(4) + 2 = 14, S_5 = 3(5) + 2 = 17$, se espera que para constituir una generalización recursiva (P2) los estudiantes construyan una relación entre $S_n \, y \, M_n$ y determinen la formulación verbal de la siguiente regla $S_n = 3(M_n) + 2$. Es decir, una expresión similar a la siguiente: "Para determinar el número de sillas posibles de acuerdo con el número de mesas, debemos multiplicar el número de mesas por tres y luego a ese resultado sumarle dos, puesto que, a medida que unimos una mesa nueva conseguimos espacio para dos sillas más, al número anterior de mesas"

- **Subtarea 1.2.3:** Determine cuántas mesas necesitamos para acomodar a 62 personas.

Dar respuesta a la subtarea anterior, es posible mediante una técnica similar a la del número de sillas correspondiente al número de mesas (F4), es decir, en comparación con la subtarea anterior considere el número de sillas como elemento independiente, mientras, las mesas ahora dependen del número de sillas. Por lo tanto, una adaptación a la técnica encontrada en la tarea anterior podría dar respuesta a la pregunta anterior, incluso para $S = 62$ sillas es posible que los alumnos recurran a proporcionar más elementos en la tabla 8, consiguiendo así la respuesta para esta.

No obstante, este resulta ser poco ortodoxo a medida que el número de sillas sea muy grande. Por lo que, considerar el estudio de los primeros termino (P1), por lo que para $S_0 = 5\, sillas,$ se requiere una mesa (M_0), $S_1 = 8\, sillas,\ corespondiente\ a\ 2\, mesas(M_1)$, $S_2 = 11\ sillas$, para un total de 3 mesas. De modo que mientras, el número de sillas después S_0 aumenta de 2 en 2, es decir $S_{n+1} = S_n\ + 3$, mientras que el aumento de $M_{n+1} = M_n + 1$. Ahora bien, considerando el razonamiento anterior es posible considerar que la nueva técnica de generalización (F1), corresponde a

$M_n = \frac{S_n+2}{3}$, en este orden de ideas verifique para n = 62 sillas respectivamente:

$M_n = \frac{62-2}{3} =$ 20 mesas se requieren para acomodar 62 personas.

Aunque los estudiantes podrían no exponer esta regla de generalización de forma explícita como se menciona previamente, existe la probabilidad de que comprendan verbalmente el resultado correspondiente. Por ejemplo, podrían articular: “Para determinar el número de mesas en función del número inicial de sillas, se debe dividir el total de sillas menos dos entre tres. De este modo, se puede calcular el número de mesas M_n correspondiente para cualquier conjunto de sillas S_n .

Es evidente que ambas tareas contempladas en esta situación problemática persiguen un objetivo común, sin embargo, esto no implica necesariamente una posible automatización del ejercicio. Por el contrario, se espera que la primera tarea se desarrolle como una introducción para fomentar el trabajo individual de cada estudiante. Por su parte, la segunda corresponde a la adaptación de técnicas precisadas en la tera anterior, además estas en conjunto de tareas pone en manifiesto la capacidad creativa del estudiante de cara a las particularidades que definen la originalidad de cada una de estas.

5.2. Análisis a priori de la situación problemática 2: doblado de hoja

En consonancia con el enfoque metodológico empleado para el análisis de las tareas previas. Se procede a mantener el estudio de las dos tareas y respectivas subtareas relacionadas con el diseño propuesto para los estudiantes, tal como se detalla en los apéndices correspondientes.

Tarea 2.1: Determinar el área y perímetro de la superficie de la hoja resultante al realizar cualquier número de dobleces.

La presencia de conceptos matemáticos como el área y el perímetro ha sido recurrente en el análisis de la situación problemática 1. En este sentido, Barraza (2020) propone abordar este tema mediante la subdivisión de tareas con el fin de hallar una solución. Para ello, establece una situación hipotética que consiste en repetir el proceso de doblar la hoja cinco veces, planteando la interrogante sobre cuál sería el área y el perímetro resultantes. Este conjunto de interrogantes constituye la **subtarea 2.1.1.** Al analizar la subtarea anterior, se plantea la revisión detallada de los primeros términos (P1), utilizando material manipulable, en particular una hoja cuadrada. Es factible considerar la siguiente tabla para registrar el área y el perímetro al realizar cada uno de los dobleces en la hoja de papel. La finalidad de este registro es documentar y estudiar los enfoques desarrollados mediante técnicas innovadoras para la ejecución de esta tarea (M1 y M2).

Tabla 6

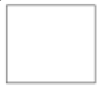
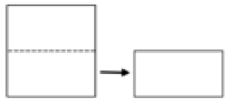
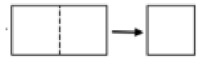
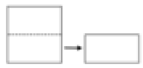
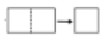
Registro tabular para la sucesión obtenida en la situación problema 2

Momento	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Área de la hoja						
Perímetro de la hoja						

Sin embargo, el desarrollo del ejercicio tiene sentido siempre y cuando el doblez de esta hoja se realice a la mitad, de esta manera, surge la posibilidad de que los estudiantes desarrollen una regla recursiva (F1), de A_n para conseguir A_{n+1}. En este contexto es clave considerar la siguiente figura establecida por Barraza (2020), donde se presenta la respuesta a la subtarea anteriormente planteada.

Figura 7

Estudio de términos para la Tarea 2.1

Término	Exploración del material	Área	Perímetro
a_0		$A_0 = 8 \times 8 = 64$	$P_0 = 4 \times 8 = 32$
a_1		$A_1 = 8 \times 4 = 32$	$P_1 = 2 \times 8 + 2 \times 4 = 24$
a_2		$A_2 = 4 \times 4 = 16$	$P_2 = 4 \times 4 = 16$
a_3		$A_3 = 4 \times 2 = 8$	$P_3 = 2 \times 4 + 2 \times 2 = 12$
a_4		$A_4 = 2 \times 2 = 4$	$P_4 = 4 \times 2 = 8$
a_5		$A_5 = 2 \times 1 = 2$	$P_5 = 2 \times 2 + 2 \times 1 = 6$

Nota: Tomado de Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad, por Z. Barraza (p.38), 2020.

El estudio de los elementos presentados en la Figura 12 corresponde a la respuesta de la subtarea 2.1.1. Constituyendo así un punto de partida en búsqueda de alcanzar una regla de generalización por parte de los estudiantes frente a la generalización para todo A_n. Sin embargo, el estudio de este proceso iterativo resulta imposible si se pretende realiza termino a término, por lo que la aparición de una regla recursiva que relacione respectivamente el perímetro P_n y P_{n-1} (P2), lo que pone en juego la optimización de (F2). Una de las posibilidades para es establecer dicha regla es que los estudiantes propongan una generalización de la técnica utilizada para calcular el área al calcular el perímetro. Por ejemplo, podrían sugerir dividir P_{n-1} a la mitad para así obtener P_n; sin embargo, esta regla no considera las adaptaciones necesarias que este cálculo implica al realizar los dobleces. Es decir, la técnica para calcular el perímetro no se limita a dividir a la mitad el término anterior; implica dividir a la mitad dos lados del cuadrilátero, mientras que los otros dos permanecen con las mismas medidas. Esta situación podría resolverse fácilmente una vez que los estudiantes confirmen su propuesta mediante el uso de material manipulable.

Ahora bien, continuando con el estudio de esta situación problemática, se destaca la **Subtarea 2.1.2.** Esta consiste en determinar el área de la superficie de la hoja resultante para cualquier número de dobleces. Bajo lo establecido, por Barraza (2020) esta resulta no ser una tarea muy compleja, es decir, basta con que el alumno observe el comportamiento del área obtenido el estudio de los seis primeros términos (P1), para así construir una regla de generalización (P2). Esta corresponde a: $\frac{A_{n-1}}{2}$ no obstante, bajo la recursividad de los estudiantes es posible identifica esta mediante una expresión verbal como: “Para determinar el área debemos dividir el área del resultado anterior entre dos” (P2).

En aras de respaldar la regla establecida anteriormente, resulta esencial que el maestro a través de preguntas aborde el cálculo del área para casos en los que n=100, n=200, donde n corresponde al número de dobleces realizado a la hoja de papel. Del mismo modo, para números que no puedan calcularse mediante el doblado de la hoja, técnica asociada a (F1). De esta manera, se consolida la aplicación de la regla previamente obtenida (P3). De modo que, se consolide de manera implícita una generalización algebraica como una tarea implícita

La **Subtarea 2.1.3**, que consiste en determinar el perímetro de la superficie resultante de la hoja para cualquier número de dobleces, presenta un nivel de dificultad más elevado en comparación con las dos subtareas anteriores. En consecuencia, el componente creativo θ^{c} se relaciona con la generación de nuevas técnicas (F1). Sin embargo, ¿qué la distingue de las otras subtareas? La diferencia radica en que, para que los estudiantes puedan encontrar una regla de generalización (P2), es necesario considerar una subdivisión de la regla, abordando por un lado los casos de dobleces pares y por otro los impares. Incluso, Barraza (2020) sostiene que el desarrollo de esta regla recursiva se posiciona como el aspecto más complejo de todo su diseño didáctico. A continuación, se presentan dos tipos de técnicas para conseguir dicha regla.

Simultáneamente con los elementos establecidos anteriormente, esta consiste en realizar una subdivisión para términos pares $P0 = 32$, $P2 = 16$ y $P4 = 8$ y para términos impares ($P1 = 24$, $P3 = 12$ y $P5 = 6$). Estableciendo como regla algebraica la siguiente expresión para los términos pares $PA_n = \frac{PA_{n-1}}{2}$, mientras que los impares $PI_n = \frac{PI_{n-1}}{2}$ Sin embargo, es claro que a lo largo del análisis de cada una de las tareas que conforman este diseño didáctico se espera constituir una regla recursiva representada bajo la comunicación verbal o escrita en el material entregado, "Para determinar el perímetro de la superficie de un doblez par, debemos dividir el perímetro del par anterior entre dos, y para los impares, el perímetro del impar anterior".

Esta segunda técnica consiste en analizar las diferencias obtenidas entre $P_n \ y \ P_{n-1}$ para los primeros términos, al realizar cada una de estas diferencias se percibe la aparición de la siguiente secuencia: 8, 8, 4, 4, 2… incluyendo al estudio de esta tarea el recurso asociado a las secuencias matemáticas. Por otra parte, es posible que el estudiante eventualmente presente una regla algebraica para describir este comportamiento, en consecuencia, su recurso oral puede resultar interesante para el análisis de esta técnica como: "Para calcular el perímetro del sexto doblez, es necesario restar 2 al perímetro del quinto doblez, y para calcular el perímetro del sexto doblez nuevamente, se debe restar 2 al perímetro del quinto doblez…"

El conjunto de las diferentes técnicas implementadas por los estudiantes robustece el estudio de cada una de las tareas planteadas, ahora bien, no significa que solo una de estas sea correcta, por el contrario, existe la posibilidad de percibir nuevas técnicas en búsqueda a la resolución de cada una de las situaciones problemáticas.

- **Tarea 2.2**: Determinar el grosor generado por el doblado de la hoja para cualquier número de dobleces.

El análisis de esta tarea radica en la situación establecida por la a **Subtarea 2.2.1**: Supongamos que tu hoja mide 1 milímetro de grosor. Si la doblamos una vez, ¿cuál es el grosor resultante al hacer un doblez?, ¿cuál es el grosor resultante al hacer 5 dobleces? Determina el grosor resultante al hacer cualquier número de dobleces. Inicialmente, la comprensión de esta sujeta al concepto de grosor, por lo que se ha diseñado la siguiente tabla en la que se espera registrar la exploración de los primeros términos (P1 y M2)

Tabla 7

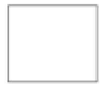
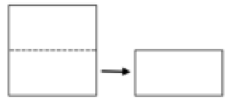
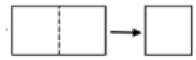
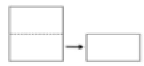
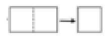
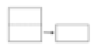
Tabulación de área y perímetro al desarrollar la situación problema 2

Momento	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Grosor de la hoja						

Ahora bien, en miras de construir una regla de generalización es pertinente considerar la figura establecida por Barraza (2020), donde se presenta la respuesta a la subtarea anteriormente planteada.

Figura 8

Estudio de términos para la Tarea 3.2

Término	Exploración del material	Grosor
a_0		$G_0 = 1$
a_1		$G_1 = 2$
a_2		$G_2 = 4$
a_3		$G_3 = 8$
a_4		$G_4 = 16$
a_5		$G_5 = 32$

Nota: Tomado de Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad, por Z. Barraza (p. 148), 2020.

Basándose en los resultados presentados para los primeros dobleces de la hoja, se establece un punto de partida para la búsqueda de una regla de generalización por parte de los estudiantes con respecto a la generalización para todo G_n. No obstante, el estudio de este proceso iterativo resulta impracticable si se intenta realizar término a término. Por lo tanto, se hace necesaria la aparición de una regla recursiva que relacione el grosor $G_n \; y \; G_{n-1}$ (P2), lo que implica la optimización del proceso (F2).

La formulación algebraica para este caso particular corresponde a $G_n = 2^n$, mientras que por parte de los estudiantes es posible esperar algo similar a esta verbalización: Para determinar el grosor, a partir de cualquier doblado, necesitamos multiplicar el 2 tantas veces como dobleces se hayan realizado. Finalmente, Barraza considera que, con la orientación del maestro, los estudiantes sean capaces de determinar con facilidad el grosor para cualquier número de dobleces. Posteriormente, se espera que el maestro promueva el momento de institucionalización (M5) de esta expresión, contextualizándola con otras situaciones abordadas en el diseño, como el triángulo de Sierpiński.

5.3. Análisis a priori de la situación problemática 3: triángulo de sierpiński

En el siguiente análisis se precisa un apartado específico para cada una de las tareas y subtareas ya establecidas. En el desarrollo del análisis puede determinarse cómo la actividad matemática que genera cada una se va vinculando en relación con los elementos establecidos en el MER.

- **Tarea 3.1: Determinar cómo cambia la cantidad de triángulos al construir el Triángulo de Sierpiński**.

Para el estudio de esta tarea es clave contemplar la figura 5 como punto de partida para los estudiantes, por lo tanto, es necesario establecer un registro en el que se precise las producciones de cada uno de los estudiantes. Validando así, **la subtarea 3.1.1,** que consiste en: Completar la siguiente tabla hasta donde te sea posible.

Tabla 8

Tabulación de resultados de cara al cambio de triángulos.

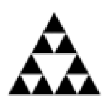
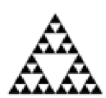
Momento	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de Triángulos Sombreados									

Ahora bien, junto con la presentación de estos elementos de recolección y análisis de registro, es posible considerar las diferentes técnicas propuestas por los estudiantes para abordar cada una de las tareas y subtareas establecidas. Además, de confrontar nuevas tareas bajo un enfoque tecnológico creativo de la matemática.

En primer lugar, la tarea 3.1 y la subtarea 3.1.1 se constituyen bajo la pregunta de ¿cómo cambia la cantidad de triángulos? Por lo tanto, se espera que posteriormente a las orientaciones establecidas por el maestro, se fomente un espacio centrado en el comportamiento de los primeros términos establecidos por la figura 5. Esta forma de accionar se identifica con el primer momento de estudio (M1), por lo que, Barraza (2020) considera oportuno que el maestro comience este estudio, mediante una técnica de conteo sencilla, para sí determinar el número de triángulos, por ende, a partir de la figura 5 se obtiene lo siguiente:

Figura 9

Estudio de términos para la Tarea 3.1 y la Subtarea 3.1.1

Término	Representación del triángulo	Número de triángulos sombreados
S_0		$T_0 = 1$
S_1		$T_1 = 3$
S_2		$T_2 = 9$
S_3		$T_3 = 27$

Nota: Tomado de Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad, por Z. Barraza (p. 128), 2020.

Por su parte, la figura anterior propicia el surgimiento de nuevos elementos de estudio frente al desarrollo de cada una de las tareas y subtareas establecidas. Es decir, la tabla cuenta con la respuesta al comportamiento de los primeros tres términos, aun así, no es suficiente siquiera para concretar en su totalidad la subtarea anterior.

De modo que, a partir del análisis de S_4, es evidente la aparición del momento de estudio (M2), este corresponde a la exploración de diferentes técnicas consideradas por los estudiantes para identificar la relación entre $T_n \ y \ T_{n+1}$. Por lo tanto, en relación con el MPTM la producción de estas 73écnicas matemáticas, apuntan a una serie de procesos asociados al proceso de inducción matemática θ_g. Particularmente para el análisis de dicha actividad se precisa la técnica (P2), por consiguiente, Barraza (2020) contempla bajo su análisis unas las siguientes técnicas:

La primera técnica surge a partir del incremento numérico encontrado en la figura 14, es decir, al momento en el que el alumno identifique el patrón asociado a T_{n+1}, a partir de la construcción siguiente proceso iterativo: $T_0 = 1, T_1 = 3, T_2 = 9, T_3 = 27, T_4 = 81, T_5 = 243, T_6 = 729, T_7 = 2187, T_8 = 6561.$ Si bien, las respuestas anteriores corresponden a la solución subtarea 1.1.1, el patrón asociado a esta es $T_n = \ 3(T_{n-1})$ por lo que el alumno a lo largo del estudio de los términos de la secuencia puede expresar dicha regla de generalización como la expresión anterior o verbalmente, esta se vería como: “ Para conocer el número de triángulos, debemos multiplicar por tres el número de triángulos del resultado anterior”.

Esta técnica corresponde a un proceso aritmético fundamentado en el estudio de los primeros términos establecidos en la figura 8, finalmente, Barraza (2020) considera que esta regla podría ser empleada en la solución de la subtarea 3.1.1 como se mencionó anteriormente, no obstante, es posible encontrar una generalización algebraica equivalente al patrón anterior, por su puesto, con un nivel de elaboración más compleja, de la forma: $T_n = 3^{n-1}$, sin embargo, es posible que este tipo de respuesta se perciba de forma verbal, es decir: “Para calcular el número de triángulos en cualquier etapa, se requiere multiplicar 3 por sí mismo tantas veces como el número de etapas menos uno”.

La segunda técnica, corresponde a un enfoque geométrico de la actividad, es decir, la figura número 14 no solo contempla elementos asociados a una técnica de conteo. Por el contrario, la representación gráfica y recursiva de cada uno de los tres primeros términos en la construcción del triángulo de Sierpiński, posibilita contemplar la siguiente técnica: "Para crear tres triángulos adicionales en cada etapa, se puede trazar segmentos desde los puntos medios de cada lado del triángulo original para formar un triángulo equilátero. Este proceso resultará en la generación de tres triángulos más pequeños en cada iteración, además del triángulo original de la etapa anterior".

Posteriormente, a la manifestación de cada una de las técnicas matemáticas presentadas, es necesario analizar la creatividad de cada una de estas respecto al componente creativo θ_c. Particularmente en la tara 3.1 es posible que el alumno domine al menos una de las técnicas anteriores, en ese orden de ideas el estudiante puede optimizar la técnica de conteo simple (F2). No obstante, si los estudiantes proponen conjuntamente las dos 74écnicas se precisa la capacidad de considerar el desarrollo de dicha tarea desde diversa perspectiva de la matemática, por lo tanto, la manifestación de (F3) seria innegable.

Por su parte, **la subtarea 3.1.2** fundamentada en la pregunta. Imagina que aplicas el proceso de construcción hasta obtener el Triángulo de Sierpiński, ¿Qué pasa con la cantidad de triángulos? Contempla el cierre de un proceso de aprendizaje promovido por las tareas anteriores. Las diferentes técnicas matemáticas y funciones tecnológicas contemplan una relación clara entre la matemática y la creatividad, por lo que esta, esta subtarea no es ajena a contemplar la producción de técnicas únicas (F1), puesto que los estudiantes mediante la verbalización manifiesten como respuesta a la pregunta base "el número de triángulos es infinito". No obstante, es posible encontrar múltiples respuestas de parte de los estudiantes, por ejemplo, "la cantidad de triángulos aumenta", lo que implica un análisis literal de lo que sucede camino a la construcción de este fractal. Por lo tanto, es oportuno llevar esta respuesta más allá de la subjetividad, es decir, no significa que la respuesta anterior sea incorrecta, por lo que el maestro define como estrategia la apertura de un espacio participativo. Apuntando así a una expresión algebraica desde un enfoque verbalizado y próximo al principio de generalización matemática.

- **Tarea 3.2: Determinar cómo cambia el área que resulta de aplicar el proceso iterativo de construcción del Triángulo de Sierpiński.**

Esta Tarea busca que el estudiante encuentre el área total sombreada de cada una de las figuras ($S_{0,}S_1, S_{2,}S_3$ …) hasta donde sea posible. Barraza (2020) presenta tabla 9 para registrar el estudio de los primeros términos y analizar las diferentes técnicas asociadas a la resolución de la tarea, además de los discursos tecnológicos empleados por los estudiantes para justificar la valides de sus resultados.

Tabla 9

Tabulación de resultados de cara al cambio del área.

Momento	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área sombreada	$1cm^2$								

Desde la observación de la tabla precedente, se identifica una similitud estructural en comparación con la tabla 4, lo que sugiere la presencia de elementos de estudio en ambas tareas. Esto indica la posibilidad de que los estudiantes desarrollen una técnica similar para abordar la nueva tarea, conocida como la función tecnológica F (4).

Por otro lado, Barraza (2020), considera que el estudio de los primeros términos involucra directamente a los momentos de estudio (M1 y M2). Esto conduce a la reconfiguración de la técnica ya preconcebida en búsqueda de los términos distantes, lo que evidencia la creación e implementación de una regla de generalización a partir de la adaptación y originalidad para discernir el cambio y comportamiento del área en la construcción del triángulo de Sierpiński. La complejidad de esta subtarea es claramente superior a la anterior. Por lo tanto, es posible que al calcular el área, los alumnos utilicen la técnica convencional enseñada durante el curso de matemáticas, la cual implica el cálculo del área como el producto de la base y la altura, dividido por dos, expresado como $A = \frac{b * h}{2}$. Sin embargo, dado que el área total del triángulo en el momento inicial S_0 es $1cm^2$, se vuelve complicado seguir empleando esta técnica a medida que se avanza en los *n*- términos que constituyen la construcción de este fractal.

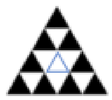
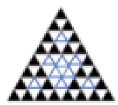
Siguiendo esta línea de estudio, resulta adecuado encaminar la resolución de esta subtarea a partir de la adaptación técnica desarrollada en la subsección 3.1.1 (F4). En este sentido, dicha técnica inicialmente abordó el cambio en el número de triángulos; sin embargo, se evidencia que esta aproximación no resulta suficiente para derivar una regla de generalización que modele el comportamiento del área. Por consiguiente, la relación entre los triángulos sombreados emerge como un elemento fundamental en el análisis del cambio del área dentro la construcción del triángulo Sierpiński.

A partir, de dicha restructuración Barraza (2020) plantea la siguiente técnica:

El área A_0 del término base S_0 se establece en 1 centímetro cuadrado. Al dividir este término base en cuatro triángulos congruentes, de los cuales solo uno permanece sin sombrear, se concluye que el área A_1 en el estado S_1 equivale a 3/4 partes de A_0. Por lo tanto, $A_1 = \frac{3}{4} A_0$. Si A_0 tiene un valor de 1, entonces $A_1 = \frac{3}{4}$. En este orden de ideas considere la siguiente tabla para la mayor comprensión de esta técnica.

Figura 10

Estudio de términos para la Tarea 1.2 y la Subtarea 3.2.1

Término	Representación del triángulo	Área
S_0		S_0 tiene un triángulo sombreado cuya área es: $A_0 = 1$ (Término base)
S_1		S_1 se divide en 4 triángulos, de los cuales 3 son sombreados y uno es no sombreado: $A_1 = 3/4$
S_2		En S_2 se tienen 16 triángulos, de los cuales 9 son sombreados: $A_2 = 9/16$
S_3		En S_3 se tienen 64 triángulos, de los cuales 27 son sombreados: $A_3 = 27/64$

Nota: Tomado de Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad, por Z. Barraza (p. 131), 2020.

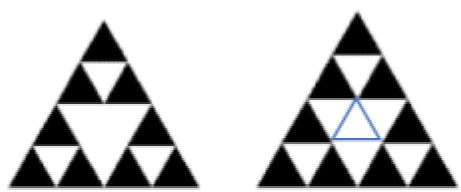
La comprensión de la técnica previa se facilita al analizar la tabla anterior. Inicialmente, para el término, S_0 es evidente que el área corresponde $A_0 = 1cm^2$. Desde un enfoque visual, se distingue un triángulo equilátero completamente sombreado. Sin embargo, para los términos siguientes de S_n la relación entre el número de triángulos sombreados y el total de triángulos abarca la expresión algebraica que constituye la solución para hallar el área total sombreada.

Consecuentemente, surge una justificación geométrica para el desarrollo de esta técnica propuesta por Barraza (2020), esta implica considerar triángulos congruentes y dividirlos en sombreados y no sombreados.

No obstante, la aplicación de esta técnica para encontrar el área correspondiente a S_2 enfrenta nuevamente un nuevo proceso de adaptación en la que es prescindible tener en cuenta que los triángulos que se generan de una figura a la otra no tienen la misma área. Por lo que los estudiantes deben realizar nuevamente una adaptación (F4) a este proceso se le conoce como deconstrucción, en términos de Rivera (2013), prevaleciendo así la técnica para determinar el área sombreada cada uno de los términos de la curva. La siguiente figura proporciona un enfoque más claro del proceso iterativo realizado para conseguir calcular el área para todo S_n.

Figura 11

Reconfiguración de la curva S2 de la construcción del triángulo de sierpiński



Nota: Tomado de Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad, por Z. Barraza (p. 130), 2020.

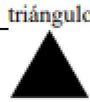
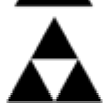
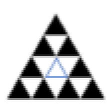
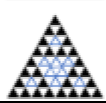
A partir de la observación de esta figura, resulta evidente la aplicación de un proceso de deconstrucción con el objetivo de mantener y posicionar la técnica adquirida en (F4). Mediante este procedimiento, se asegura la validez de la técnica para los términos posteriores tales como $S_3, S_4, S_5, S_6 \ldots\ S_n$. Sin embargo, extender este procedimiento para calcular el área correspondiente a cada término del fractal resulta excesivo. Esto se debe a que, para cada S_{n+1} el número de triángulos será mayor y visualizarlo manualmente bajo la construcción se volverá muy complicado.

El enfoque delineado por Barraza (2020) prevalece, con la expectativa de que los estudiantes refinan su técnica (F2) y dirijan su atención hacia el comportamiento del patrón numérico, tal como se ilustra en el análisis de los tres primeros términos examinados, representados en la figura 9. Esto fomenta una exploración multidimensional de la matemática (F3).

Por otro lado, al abordar el estudio de la técnica general, se hace necesaria la formulación de una regla de generalización (P2). Bajo este enfoque algebraico, la técnica empleada en la tarea 1.1, que se especializa en determinar el número total de triángulos, requiere un análisis conjunto con la tarea 3.2. En la figura siguiente, propuesta por Barraza (2020), se evidencia de manera más precisa esta relación: el patrón que guía cálculo del área sombreada corresponde, en el numerador, al total de triángulos de la curva, mientras que el denominador representa el total de triángulos sombreados.

Figura 12

Estudio de términos del número de triángulos con el área total

Término	Representación del triángulo	Número de triángulos	Área
S_0		Término base: $T_0 = 1$	$A_0 = 1$
S_1		$T_1 = 3$	$A_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{3}{4}$
S_2		$T_2 = 9$	$A_2 = \frac{T_2}{16} = \frac{9}{16} = \frac{3 \times 3}{4 \times 4}$
S_3		$T_3 = 27$	$A_3 = \frac{T_3}{64} = \frac{27}{64} = \frac{3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4}$

Nota: Tomado de Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad, por Z. Barraza (p. 132), 2020.

A partir del análisis de la figura anterior, se espera que los estudiantes completen el desarrollo de esta subtarea utilizando una técnica única, producto de un proceso de adaptación y optimización de técnicas (F4 y P2). Esta técnica implica calcular el área mediante la siguiente regla algebraica:

$$A_n = \frac{3}{4} A_{n-1}$$

No obstante, encontrar una solución utilizando el enfoque anterior puede resultar cuestionable. Por consiguiente, Barraza (2020) propone que, a partir de una formulación verbal, los alumnos puedan expresar este patrón como: “Para calcular el área, multiplicamos por tres el numerador del resultado anterior y por cuatro el denominador del resultado anterior”.

La subtarea 3.2.2. marca el cierre de un proceso creativo y desafiante en el desarrollo del talento matemático asociado a la tarea 3.2. Su interrogante: ¿qué sucede con esta área cuando se aplica el Triángulo de Sierpiński? Abre la puerta a la posibilidad de que los estudiantes se sumerjan en un razonamiento matemático pertinente para propósitos de investigación. Desde una perspectiva verbal, los alumnos podrían considerar la siguiente afirmación: “Dado que el denominador crece a una velocidad mayor que el numerador, el área tiende a hacerse cero”. Esta reflexión no es ajena a la realidad, ya que al completar la subtarea 3.2.1, los estudiantes perciben esta relación de manera directa. Por lo tanto, no resulta improbable la formulación de una afirmación como la mencionada anteriormente.

- **Tarea 3.3: Determinar cómo va cambiando el perímetro al construir el Triángulo de Sierpiński a través de una secuencia de figuras.**

La presente tarea abarca la inclusión de nuevos objetos de estudio vinculados al análisis de la situación problemática 1. Explorar a fondo el triángulo de Sierpiński no constituye una tarea sencilla; no obstante, en el contexto de este análisis, es posible observar cómo este tipo de problemas situados al estudio de la matemática avanzada fomentan el desarrollo del talento y creatividad matemática desde una edad temprana. Además, se establece una conexión con elementos matemáticos inherentes a la etapa de escolarización, tales como el cálculo del área de una figura y, en particular para esta tarea, la determinación del perímetro.

- **Subtarea 3.3.1: Supongamos ahora que cada lado del triángulo S_0tiene una longitud de 1 cm. Encuentre el perímetro de S_1, S_2**

Bajo el análisis de esta subtarea Barraza (2020) afirma la existencia de dos posibles técnicas para el desarrollo de esta (F3). Por ende, la vinculación de técnicas y consideraciones alcanzadas en el desarrollo de cada una de las subtareas anteriores contemplan un estudio diverso de la actividad matemática generada por esta tarea.

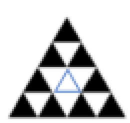
La primera corresponde a una técnica de conteo uno a uno asociada a cada uno de los lados del triángulo, respectivamente para S_0, S_1 y S_2. Es decir, inicialmente los estudiantes conocen la medida $S_0 = 1$ mediante el enunciado de la subtarea, este se considera (término base o término inicial), ahora bien, su respuesta emerge con base en que el total de triángulos sombreados es 1. Además, la longitud de cada y de sus lados corresponde a 1cm. Por lo tanto, el perímetro de $P_0 = 1 + 1 + 1 = 1(3) = 3$, bajo el comportamiento de este término es posible considerar el número de triángulos sombreados como elemento clave para encontrar la medida de cualquier P_n, propiciando así, un enlace directo con la técnica de la subtarea 1.1.1 y constituyendo (F1) a partir de la adaptación de 81écnicas previas (F4).

Ahora bien, para calcular P_1 se requiere de saber S_1 la cantidad total de triángulos sombreados S_1, este gracias a T_1 sabemos que corresponde a 3 triángulos sombreados, ahora bien, en $S_0 = 1cm$, sin embargo, la medida correspondiente al lado del triángulo se reduce a la mitad, esto se debe a que el triángulo no sombreado se convierte en punto medio de la longitud inicial de S_0, por lo tanto, la medida des este corresponde a 0,5, por lo que el área de $P_1 = 0.5(3 \times 3) = 4.5$. Del mismo modo, sucede para P_2 el cual tiene un total de 9 triángulos sombreados por tanto el resultado corresponde a: $0.25(9\times 3) = 6.75$.

La segunda técnica propicia una relación directa entre P_n y P_{n+1}, iniciando con el mismo termino base $P_0 = 1(3) = 3$ y continuando respectivamente para S_1 se considera el perímetro anterior P_0, más la suma de los tres lados interiores que miden 0.5 por tanto P_1 =P_0 +3(0.5). En comparación con la técnica aplicada anteriormente, esta propicia un manejo algebraico-aritmético más elaborado. Sin embargo, no significa que la originalidad de cada una de estas sea cuestionable, sino más bien, concebidas como la capacidad creativa y recursiva del estudiante para dar solución a una tarea matemática novedosa. Por ende, Barraza (2020) plantea en la siguiente figura la representación de las técnicas empleadas mencionadas anteriormente.

Figura 13

Estudio de términos para la Tarea 3.3

Término	Representación del triángulo	Perímetro (Técnica 1)	Perímetro (Técnica 2)
S_0		$P_0 = 1(3) = 3$	$P_1 = 1(3) = 3$
S_1		$P_1 = .5(3 \times 3) = 4.5$	$P_1 = P_0 + 3(.5) \rightarrow$ $P_1 = 3 + 3(.5) = 4.5$
S_2		$P_2 = .25(9 \times 3) = 6.75$	$P_2 = P_1 + 9(.25) \rightarrow$ $P_2 = 3 + 9(.25) = 6.75$

Nota: Tomado de Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad, por Z. Barraza (p. 134), 2020.

Si bien, a lo largo de todas las tareas y subtareas involucradas en dicha situación problemática no se pretende obtener una regla de generalización estructurada algebraicamente. Se espera que mediante las orientaciones del maestro se perciba la aparición de dicha regla para esta tarea con base en la experiencia adquirida en las dos anteriores.

No obstante, es posible encontrar dicha respuesta desde una generalización verbalizada como la siguiente: para calcular el perímetro de una curva, se requiere dividir el resultado previo entre dos, ya que cada triángulo sombreado tiene la mitad de la medida del anterior. Luego, se debe multiplicar por tres el número de triángulos sombreados anteriores, dado que en cada iteración el número de triángulos se triplica, como se observa en el problema inicial.

Finalmente, el desarrollo de esta subtarea a comparación de las anteriores es más corta, esto se debe a que el nivel de dificultad está por encima de las dos anteriores. Por lo tanto, tan solo se requiere calcular el perímetro para los tres primeros términos de la curva; sin embargo, se espera que esta tarea conlleve al análisis de qué sucede a medida que el estudiante se acerca a la construcción del triángulo de Sierpiński desde el estudio del área y el perímetro, como conceptos recurrentes en la etapa escolar del estudiante. Por tanto, se esperan respuestas como: "A medida que el triángulo tiene más triángulos su área se hace más pequeña, mientras que con el perímetro sucede lo contrario". Contemplando así una muestra de desarrollo en el talento y creatividad de los estudiantes.

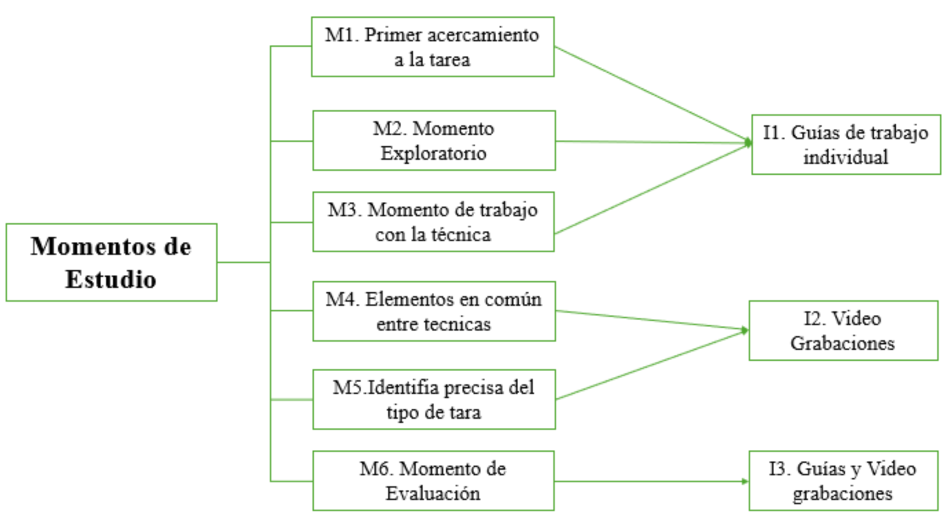
5.4. Organización y despliegue de instrumentos de recolección de datos

A partir del análisis individual de cada una de las tareas, se reconocen los momentos de estudio como elementos críticos para la consolidación del aprendizaje matemático por parte de los estudiantes. Por consiguiente, resulta imperativo especificar el instrumento de recolección de datos correspondiente a cada uno de estos momentos, con el objetivo de optimizar la manifestación del talento y la creatividad matemática en el contexto escolar.

Los recursos empleados en el estudio consisten en guías de trabajo y videograbaciones, cada uno con sus particularidades distintivas. En primer lugar, las guías de trabajo se caracterizan por su estructura organizada, la cual facilita la sistematización de las actividades y permite un análisis individualizado del desempeño de los estudiantes frente a las tareas en cuestión. Por otro lado, las videograbaciones se distinguen por su capacidad para proporcionar una observación minuciosa de las interacciones en el aula, así como por facilitar un análisis retrospectivo al posibilitar la revisión y estudio de las actividades realizadas durante el desarrollo de la clase, particularmente en el contexto de la investigación referidas en las tareas generadoras. La siguiente figura esquematiza la relación e interacción entre los momentos de estudio y los instrumentos de recolección.

Figura 14

Enlace entre los momentos de estudio y la recolección de datos.



En relación con la imagen anterior, cabe destacar que cada uno de los momentos contempla un instrumento de recolección que se ajusta a la dinámica establecida dentro del espacio de trabajo. No obstante, esto no implica que los instrumentos sean incompatibles entre sí; por el contrario, en las diferentes tareas generadoras y momentos de clase se establece una conexión fuerte entre ellos con el fin de profundizar en los resultados obtenidos durante el desarrollo de las tareas generadoras. Además, esto proporciona un espacio de reflexión acerca de cómo el maestro ha impulsado estratégicamente el desarrollo del talento y la creatividad matemática. Finalmente, la planificación e implementación de los instrumentos de recolección de datos está estrechamente vinculada a los seis momentos de estudio mencionados, los cuales se ejecutan de manera dinámica y adaptable para satisfacer eficientemente las necesidades específicas de cada una de las tareas generadoras.

6. Implementación y Análisis A Posteriori del Diseño Didáctico

Este apartado contempla los resultados obtenidos a lo largo de seis jornadas implementadas en la institución educativa Jorge Eliecer Gaitán (Santander, Colombia). Específicamente en el curso 6B, que cuenta con un total de 19 estudiantes. Cada una de las jornadas tuvo una duración entre 55 y 70 minutos, el análisis se sustenta en un panorama general de los 19 estudiantes frente a las tres situaciones problemáticas presentadas en el análisis a priori: (1) Sillas y Mesas, (2) Doblado de una hoja de papel, (3) Triangulo de Sierpiński. A continuación, se presenta el cronograma en el que se abordó cada una de las situaciones problemáticas. Es importante destacar que cada una de ellas se trabajó durante el horario regular de clase, utilizando los espacios habituales destinados para la clase de las matemáticas, en relación con los fines propios de la investigación.

Tabla 10

Cronograma sesiones de implementación

Sesión de Trabajo	Situación Problemática
Sesión Número Uno (50 min)	Situación Sillas y Mesas Tarea 1.1
Sesión Número Dos (55 min)	Situación Sillas y Mesas Tarea 1.2
Sesión número Tres (65 min)	Situación Doblado de una Hoja de Papel tarea 2.1
Sesión Número Cuatro (50 min)	Situación Doblado de una Hoja de Papel tarea 2.2
Sesión Número Cinco (60 min)	Situación Triangulo de Sierpiński tareas 3.1 y 3.2
Sesión Número Seis (70 min)	Continuación tarea 3.2 y tarea 3.3 Situación Triangulo de Sierpiński

Nota: En la tabla se presenta el desarrollo de las tres situaciones problemáticas a lo largo de las seis sesiones de implementación junto a la duración de cada una de estas

A partir de las videograbaciones y las guías de trabajo, se especifica la actividad matemática elaborada por ciertos estudiantes en determinados momentos de estudio. La interacción durante momentos de la clase se enfoca en el trabajo grupal inicial (M1). En contraste, el trabajo individual se manifiesta durante los momentos de socialización (M4, M5), esta diversidad en los métodos de recolección de datos y registro permite un análisis exhaustivo de la actividad matemática a nivel tanto grupal como individual.

6.1 Análisis a posteriori de la situación problemática 1: sillas y mesas

El desarrollo de esta situación refleja el acercamiento inicial entre la institución y el maestro. Asimismo, la interacción con los estudiantes constituye un espacio óptimo para el aprendizaje y el desarrollo del MPTM. Por lo tanto, es necesario que el maestro establezca orientaciones pertinentes para las próximas sesiones de trabajo.

De modo que, se destaca el orden y la participación durante el desarrollo de las tareas propuestas. Por lo que, el maestro indica que los estudiantes deben levantar la mano y esperar su turno para hablar, con el fin de dinamizar la participación, escucharlos a todos y preservar el orden en el aula. Además, se enfatiza la importancia de que los estudiantes desarrollen y expresen sus técnicas matemáticas para resolver las tareas propuestas. Así mismo, se informa a los estudiantes que sus respuestas durante los momentos de socialización grupal serán grabadas con fines exclusivamente académicos.

La situación de sillas y mesas comprende dos tareas principales junto a sus respectivas subtareas. La primera tarea se desarrolló durante la primera sesión de trabajo, en la cual se combinó tanto el trabajo grupal con el individual. En contraste, la segunda tarea mantuvo la misma dinámica de trabajo que la sesión anterior; no obstante, los momentos de intervención por parte del maestro fueron menos frecuentes. Esto se debe a la expectativa de que, con el transcurso de las sesiones, los estudiantes desarrollen la capacidad de comprender y analizar por sí mismos este nuevo tipo de tareas.

6.1.1 Tarea 1.1

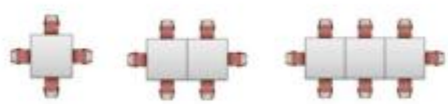
El tiempo empleado al desarrollo de esta sesión fue de 50 minutos. De estos, 20 se destinaron a la producción individual, mientras que los 30 restantes se asignaron para la socialización de técnicas definidas por cada uno de los estudiantes. Durante este periodo, el maestro dirige la discusión y ofrece orientaciones pertinentes para fomentar el desarrollo del talento y la creatividad matemática a través del cuestionamiento de los resultados logrados previamente.

Ahora bien, esta tarea se define a partir de la siguiente pregunta: **Determinar cuántas sillas podrían acomodarse en cualquier número de mesa.** A raíz de esta, surgen las preguntas presentadas en el análisis a priori constituidas como subtareas, así mismo, la manera en que se presenta la situación problemática al estudiante se percibe en la siguiente figura.

Figura 15

Situación problemática para el desarrollo de la tarea 1

Las mesas y sillas de un salón de eventos se encuentran organizadas de la siguiente manera:



Nota: Tomado de Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad, por Z. Barraza (p. 114), 2020.

- **Subtarea 1.1.1.**

Esta corresponde a la respuesta de las siguientes preguntas:

a) ¿Determine el número de personas que podrían sentarse con un total 5 mesas juntas?

b) ¿Determine el número de personas que podrían sentarse con un total de 16 mesas juntas?

La lectura y contextualización de la situación problemática se lleva a cabo de manera grupal. En este proceso, el maestro lee cada una de las subtareas planteadas y, además, invita a los estudiantes a registrar los resultados obtenidos en la guía de trabajo proporcionada al inicio de la clase. Este momento de interacción corresponde al momento (M1), en el cual se presenta la tarea a los estudiantes y se busca la activación de conocimientos previos mediante preguntas. Específicamente, el maestro hace hincapié en: ¿Cuál es la cantidad de sillas que se pueden ubicar al tener una mesa? Correspondiente a $M_0,$ los estudiantes responden 4 sillas, del mismo modo, sucede con el m_1. Posteriormente, los estudiantes proceden a responder las preguntas planteadas en la subtarea 1.1.1 (M2), sumado a esto, el maestro propone que completen la tabla 2 hasta donde sea posible, dicho momento de clase se desarrolla un espacio de trabajo individual para posteriormente socializar cada uno de los resultados e inquietudes obtenidas por los estudiantes.

A continuación, se presentan las técnicas y tecnologías implementadas por 4 estudiantes, frente a la subtarea anterior, así como, aportes e interacciones realizadas para la socialización y construcción de la respuesta correcta. Las transcripciones reportadas en este apartado son producto de las videograbaciones realizadas durante la clase, así mismo, se destacan, mediante fotografías algunas producciones escritas por parte de los estudiantes.

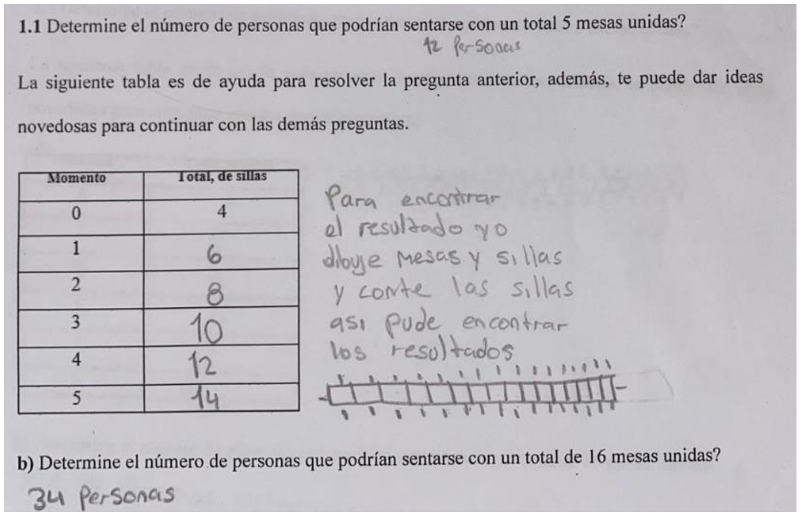
- *Técnica del estudiante A1 en la subtarea 1.1.1*

Paso 1. El estudiante analiza la situación y ubica en la tabla los resultados del número de sillas de acuerdo con la cantidad de mesas establecidas ($S_0 = 4, S_1 = 6, S_2 = 8$).

Paso 2: En el momento de exploración el estudiante identifica el patrón que se presenta en los dibujos para los primeros términos ($M_0, M_{1,} M_2$), a partir, de este análisis el estudiante empieza a dibujar de manera icónica una mayor cantidad de mesas, con el objetivo de precisar la cantidad de sillas que se pueden ubicar para 5 y 16 mesas, tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 16

Producción de técnicas del estudiante A1 para la subtarea 1.1.1



1.1 Determine el número de personas que podrían sentarse con un total 5 mesas unidas?

12 personas

La siguiente tabla es de ayuda para resolver la pregunta anterior, además, te puede dar ideas novedosas para continuar con las demás preguntas.

Momento	Total, de sillas
0	4
1	6
2	8
3	10
4	12
5	14

Para encontrar el resultado yo dibuje mesas y sillas y conte las sillas asi pude encontrar los resultados

b) Determine el número de personas que podrían sentarse con un total de 16 mesas unidas?

34 personas

Nota: Registro de técnica de dibujo realizada por el estudiante A1 para dar respuesta a las subtareas planteadas.

Paso 3. El estudiante cuenta el número de sillas que obtiene al adicionar más mesas, a su representación figural. En consecuencia, el estudiante completa la tabla establecida en la guía de trabajo, a partir de la misma, da respuesta a $M_4 = 12$, con el que justifica que cuando se tenga 5 mesas podrá ubicar un total de 12 sillas.

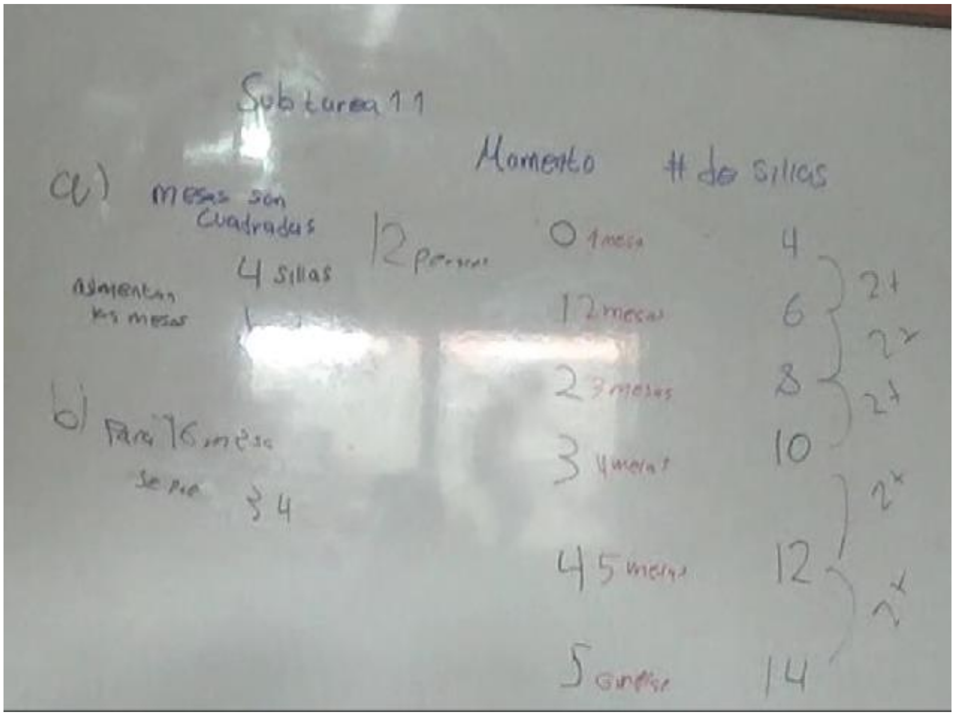
Paso 4. A partir de la técnica de dibujo, el estudiante determina que para un total de 16 mesas puede ubicar 34 sillas, lo que implica el mismo número de personas.

La técnica anterior, es representativa de la mayoría de las producciones realizadas por los estudiantes del curso. Durante el desarrollo de esta subtarea, no se identificaron en las guías de trabajo técnicas alternativas al dibujo. Por consiguiente, se pasa a un momento significativo de la clase, que corresponde a la socialización grupal. Este momento se enfoca en la valoración de los diferentes discursos tecnológicos y en la generación de nuevas técnicas a partir de las orientaciones y preguntas formuladas por el maestro durante la resolución de la subtarea.

Paso 5. El maestro realiza la tabla de registro en el tablero para compartir los resultados obtenidos por los estudiantes durante el trabajo independiente.

Figura 17

Interacción grupal para la solución de la subtarea 1.1.1



Nota: La figura anterior capta el momento preciso en el que maestro hace uso de los recursos del aula para desarrollar nuevas técnicas.

Paso 6. A partir de estos resultados, el maestro invita a reflexionar y analizar el comportamiento de la tabla con el fin de que los estudiantes identifiquen un patrón que permita la evolución de técnicas anteriores.

> Estudiante [A2 y A3] responden que el número de sillas aumenta en dos, cada que se junta una nueva mesa. Por lo que el maestro procede en la figura anterior a registrar y validar la técnica con el resto del curso.

Es en este espacio en el que los estudiantes trascienden su técnica de dibujo a una de carácter recursivo.

Paso 7. Posteriormente a la aparición de la nueva técnica, los estudiantes validan los resultados obtenidos en su técnica de dibujo. Además, suman progresivamente 2 al último momento de la tabla que es $M_5 = 16$, hasta conseguir dar solución a la cantidad de personas que podrían ubicarse en un total de 16 mesas juntas.

- Tecnología matemática (θ^m) del estudiante A3 en la Subtarea 1.1.1

$\boldsymbol{\theta^1}$**.** Los estudiantes mediante las orientaciones y análisis de la tarea identifican un primer patrón, sumar dos sillas al total de mesas obtenidas del momento anterior, puede ser expresada mediante la siguiente regla recursiva.

$$S_n = (M_n) + 2, \text{ donde } M_n \ corresponde\ a\ la\ cantidad\ de\ mesas\ cuadradas$$

- Tecnología creativa (θ_c) del estudiante A2 en la Subtarea 1.1.1

$\boldsymbol{\theta_1}$**.** Los estudiantes optimizan su técnica de dibujo y conteo en función de las sillas y mesas, enfocándose en el patrón figural. Notan que, al agregar más mesas, el número de sillas aumenta en 2 en comparación con la cantidad previa.

Con respecto al componente creativo de la actividad matemática y su correspondiente socialización, se destaca la producción de la técnica de dibujo (F1) representada en la figura 16. Asimismo, la optimización de esta técnica genera una técnica centrada en incrementos (F2), lo que permite al grupo de estudiantes determinar la cantidad de sillas que se pueden ubicar en M_{15}, que corresponde a cuando se dispone de un total de 16 mesas. Este proceso da lugar al surgimiento de nuevas técnicas, las cuales fomentan tecnologías innovadoras en los estudiantes.

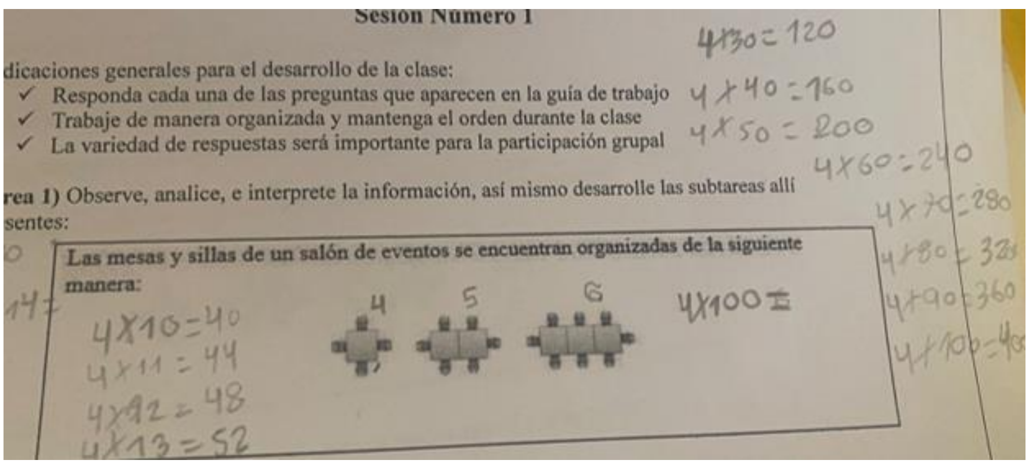
El desarrollo de esta primera tarea se caracteriza por la constante instrucción y acompañamiento del maestro, con el fin de dinamizar las técnicas presentadas por los estudiantes. Además, esta tarea sirve como punto de partida para establecer un espacio de trabajo independiente en el que el maestro propone a los estudiantes cual podría ser la cantidad de sillas que se puede ubicar en un total de 100 mesas, el cual corresponde a M_{99} y los estudiantes presentan las siguientes técnicas.

Estudiante A4: “Debemos sumar 100 + 2”.

Estudiante A5: “Si multiplicamos 4×100 obtenemos el resultado”

Figura 18

Técnica propuesta por el estudiante A5



Nota: La figura anterior precisa la técnica empleada para la solución de la pregunta planteada por el maestro acerca de las 100 mesa, así como el momento de estudio (M3).

Estudiante A3: “Si agregamos un 0 al resultado que obtuvimos cuando teníamos 10 mesas”, entonces sabremos que, para 100 mesas, esta técnica puede ser expresada mediante la siguiente expresión.

$$M_9 = 22, por\ lo\ tanto\ M_{99} = 220$$

Puede evidenciarse que cada una de las técnicas presentadas responde a conceptos desarrollados dentro del aula regular de matemáticas. En particular, se identifican nociones de conceptos como relación y variación entre dos o más variables, así como el concepto proporcionalidad directa. No obstante, el maestro sugiere a los estudiantes que, para validar cada una de sus técnicas, consulten la tabla 2 y analicen el comportamiento de los resultados obtenidos. De este modo, cuando aborden la subtarea 1.1.2, se espera que los estudiantes modifiquen sus técnicas iniciales con el objetivo de definir una regla general exitosa.

- **Subtarea 1.1.2:** ¿Cómo se podría obtener el número de sillas necesarias para cualquier número de mesas?

Continuando con el análisis de la sesión de clase, es evidente que, a partir de la tarea inicial, se establecen diversas técnicas que, si se sofisticaran, podrían acercarse al desarrollo de una generalización. Este es el caso de la segunda subtarea, que busca que los estudiantes, mediante una regla recursiva o una expresión matemática, logren dar respuesta a la pregunta planteada. Así mismo, se destaca en cuanto a las técnicas y discursos tecnológicos algunas de las respuestas captadas en las videograbaciones.

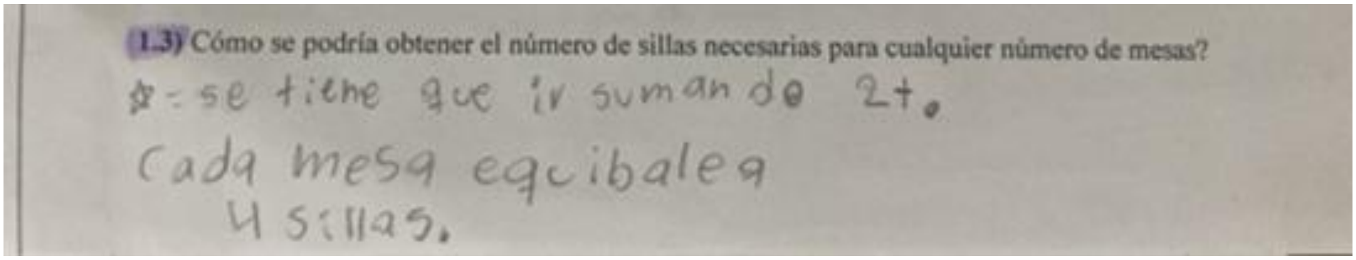
- *Técnica del estudiante A6 en la subtarea 1.1.2*

Paso 1. A partir de la subtarea anterior, el estudiante identifica que el elemento común es sumar 2 cada vez que se agrega una nueva mesa, lo cual pone de manifiesto el momento de estudio (M3).

Paso 2. Del mismo modo, establece que cada mesa equivale a 4 sillas.

Figura 19

Producción de técnicas del estudiante A6 para la subtarea 1.1.2


1.3) Cómo se podría obtener el número de sillas necesarias para cualquier número de mesas?

R= se tiene que ir sumando 2+.
Cada mesa equibalea
4 sillas.

Nota: Registro recursivo por parte del estudiante A6 para la solución de la tarea planteada.

Paso 3. El maestro agradece la participación del estudiante y plantea a los estudiantes si alguno de ellos cuenta con una técnica diferente; esto con el fin, de abarcar la diversidad de técnicas empleadas por los estudiantes previo al momento de socialización. A lo que el estudiante A4 levanta la mano para presentar su técnica.

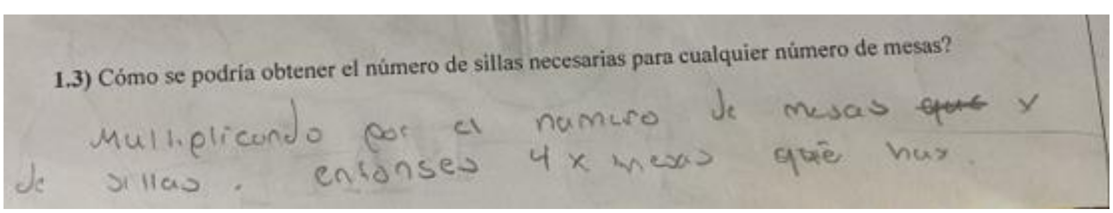
- *Técnica del estudiante A4 en la subtarea 1.1.2*

Paso 1. El estudiante reconoce implícitamente la incidencia del número de mesas como un valor independiente.

Paso 2. Por lo tanto, el estudiante propone de manera recursiva que para encontrar el total de sillas se debe multiplicar 4 × mesas que hay, como se presenta siguiente figura.

Figura 20

Producción de técnicas del estudiante A4 para la subtarea 1.1.2


1.3) Cómo se podría obtener el número de sillas necesarias para cualquier número de mesas?

Multiplicando por el numero de mesas ~~que~~ y
de sillas. entonses 4 x mesas que hay.

Nota: Registro recursivo por parte del estudiante A4 para la solución de la tarea planteada.

Cada una de las técnicas presenta diferencias entre sí y ninguna de ellas se aproxima a la regla de generalización planteada en el análisis a priori. Sin embargo, es importante destacar el avance de los estudiantes en la resolución de cada una de las subtareas. En particular, la técnica recursiva establecida por el estudiante A4 muestra un acercamiento a lo que podría considerarse una regla algebraica que modele la totalidad de sillas de acuerdo con el número de mesas. De manera similar, la técnica del estudiante A6 subraya la importancia de identificar los elementos comunes en el desarrollo de tareas anteriores, esto está relacionado con el comportamiento del total de sillas en función del aumento de mesas.

Ahora bien, el momento de socialización se caracteriza por la orientación de maestro quien de ahora en adelante expresaremos con la letra *N* mediante preguntas y aportes significativos de los estudiantes captados en las videograbaciones.

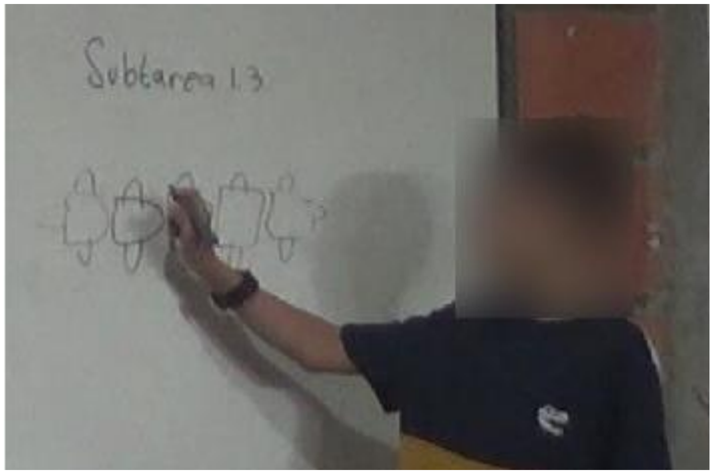
Respecto a la técnica presentada por A4, *N* invita a los estudiantes a evaluar la técnica presentada por el compañero (M6), preguntado para el caso en el que tenemos 2 mesas, ¿cuál sería la respuesta? Y si coincide con la que momentos antes registraron en la tabla 2.

> El grupo de manera general responde que los resultados no coinciden porque utilizando la fórmula del compañero para 2 mesas da 8 personas y mediante la tabla verifico que el resultado es 6, entonces es incorrecta.
>
> Estudiante A2 agrega que el compañero no fijó que al empezar a juntar las mesas los resultados cambiaban, porque en las mesas del medio se aumenta solo 2 sillas, mientras que en las mesas de las esquinas siempre cuentan con 3 sillas.

Posteriormente a la afirmación del estudiante A2 el maestro invita a que precise su explicación en el tablero.

Figura 21

Análisis del comportamiento de mesas y sillas para el estudiante A2



Nota: En la figura se la representación del comportamiento de las sillas y mesas establecido por el estudiante A2.

El estudiante A2 evoluciona con respecto a las técnicas empleadas anteriormente, además, plantea verbalmente lo que puede consolidarse como una regla de generalización estructurada para calcular la cantidad de sillas en función del número de mesas, manteniendo la condición de que éstas están juntas a partir de la primera mesa. Asimismo, sus compañeros se convencen de la técnica y la consideran correcta.

- Tecnología matemática (θ^{m}) del estudiante A2 en la Subtarea 1.1.2

$\boldsymbol{\theta^1}$**.** Si bien el estudiante A2 no emitió ninguna regla algebraica, mediante su análisis y expresión verbal, se considera que para calcular el número de mesas totales basta con sumar 6 que representa las mesas de la esquina y multiplicar por 2 el total de mesas que no se encuentren en las esquinas, esto puede ser expresado mediante la siguiente regla recursiva.

$$S_{n=}\ 6 + 2(m),\ \ donde\ m\ corresponde\ a\ la\ cantidad\ de\ mesas\ sin\ las\ esquinas$$

- Tecnología creativa (θ_c) del estudiante A2 en la Subtarea 1.1.2

$\boldsymbol{\theta_1}$. El estudiante mejora la técnica implementada en la subtarea 1.1.1 y logra consolidar una regla para calcular la cantidad de sillas en función de los términos de la secuencia. Lo más destacado es su análisis del comportamiento de las sillas en relación con el aumento en la cantidad de mesas, así como la identificación de patrones que le permiten afianzar la expresión anterior.

La producción de una nueva técnica (F1) pone de manifiesto la capacidad para interpretar y analizar los patrones que se presentan a lo largo del desarrollo de las subtareas. Asimismo, mediante la verbalización, se evidencia un acercamiento a una regla de generalización. Sin embargo, no todos los estudiantes comprenden la técnica empleada por el estudiante A2. Algunos la ponen a prueba considerando ciertos términos de la secuencia para validar su eficacia, lo que demuestra un enfoque crítico y colaborativo en el aprendizaje. Al presenciar dicha acción el maestro plantea la siguiente pregunta al estudiante A2.

N: ¿Por qué consideras que la técnica es correcta? Algunos de tus compañeros no están seguros de eso, ¿puedes ilustrarnos con un ejemplo?

Estudiante A2: en el momento 4 de la tabla es cuando tenemos un total de 5 mesas, y la respuesta que tenemos son 12 sillas. Entonces si nos guiamos del dibujo, refiriéndose a la figura 21, él dice las sillas de los extremos cuentan con 3 sillas, entonces como son 2 extremos tenemos ya 6 sillas, entonces luego yo vi que en el medio había 3 mesas y como no están en las esquinas estas solo aumentan de a 2, entonces $3 \times 2 = 6$ y las 6 que tenía en los extremos tenemos que $6 + 6 = 12$

N: ¿Están convencidos de la respuesta?

Estudiante A4: Profe para que sea la regla ideal entonces ¿debe servir para cualquier momento de la tabla?

N: (A lo que el maestro responde con un gesto que sí).

A partir de esto el estudiante propone que la regla no funciona para el caso en el que hay dos mesas, ya que si aplicamos la fórmula nos damos cuentas que no tendríamos mesas en el medio, sino que solo en los extremos.

Estudiante A3: De pronto para cuando sean menos de 3 mesas la regla no sirve.

Posteriormente, el maestro aprovecha esta intervención para agradecer y felicitar cada una de las contribuciones hechas por los alumnos. Evalúa la hipótesis del estudiante A3, señalando que la técnica planteada no es aplicable cuando se tienen menos de dos mesas, aunque funciona adecuadamente para dos mesas. Finalmente, el maestro presenta y explica la regla de generalización establecida en el análisis a priori, con la cual el grupo de estudiantes se muestra satisfecho y la valida mediante ejemplos concretos.

- **Subtarea 1.1.3** Determinar ¿cuántas mesas se necesitan para ubicar 42 personas? Y ¿cuántas para acomodar 100 personas?

El análisis de esta tarea es menos detallado que los anteriores. En el análisis a priori se esperaba que los estudiantes determinaran el cambio de roles entre la nueva dependencia e independencia de la variable. Sin embargo, el factor tiempo obstaculizó un mejor espacio de socialización para dicha tarea. Por otro lado, las técnicas desarrolladas por los estudiantes se basaron en identificar que las preguntas abordadas en esta subtarea podían contestarse mediante la técnica encontrada en la subtarea 1.1.1.

- *Técnica del estudiante A7 en la subtarea 1.1.3.*

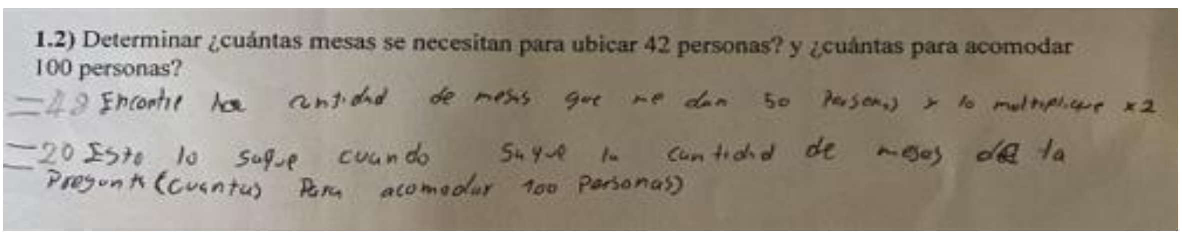
Paso 1. El estudiante analiza el ejercicio y decide prolongar la tabla 2 hasta conseguir el total de mesas que le presente la cantidad de sillas necesarias para dar respuesta a la subtarea.

Paso 2. Registra la cantidad de mesas para las 42 personas de acuerdo con la técnica empleada en el paso anterior.

Paso 3. Al encontrar la cantidad de mesas que necesita para 50 personas decide multiplicar por 2 para así llegar a la cantidad de 100 personas.

Figura 22

Producción de técnicas del estudiante A5 para la subtarea 1.1.3


1.2) Determinar ¿cuántas mesas se necesitan para ubicar 42 personas? y ¿cuántas para acomodar 100 personas?

=42 Encontre la cantidad de mesas que me dan 50 personas y lo multiplique x2

=20 Esto lo saque cuando saque la cantidad de mesas de la pregunta (cuantas para acomodar 100 personas)

Nota: Registro recursivo por parte del estudiante A5 para la solución de la tarea planteada.

- Tecnología matemática (θ^{m}) de los estudiantes en la Subtarea 1.1.3

$\boldsymbol{\theta^{1}}$. Los estudiantes no lograron construir una regla recursiva o algebraica.

- Tecnología creativa (θ_c) del estudiante A7 en la Subtarea 1.1.2

$\boldsymbol{\theta_1}$. Aunque los estudiantes no alcanzaron una técnica matemática precisa para esta actividad, se debe destacar su planteamiento creativo. La mayor parte del grupo adapto la técnica encontrada en la subtarea 1.1.1 (F4). Además, se evidencia que algunos estudiantes aplicaron conceptos propios del aula, como la proporcionalidad directa. Específicamente, esto se observa cuando el estudiante A7 multiplica por 2 la cantidad de mesas para obtener 50 sillas.

Posteriormente, el maestro invita a los estudiantes a reflexionar acerca de por qué no considerar una regla de generalización para esta subtarea. Esto se debe a que, cuando se tenga un mayor número de personas, será mucho más complicado obtener el número de mesas si se depende de la realización de una tabla previa.

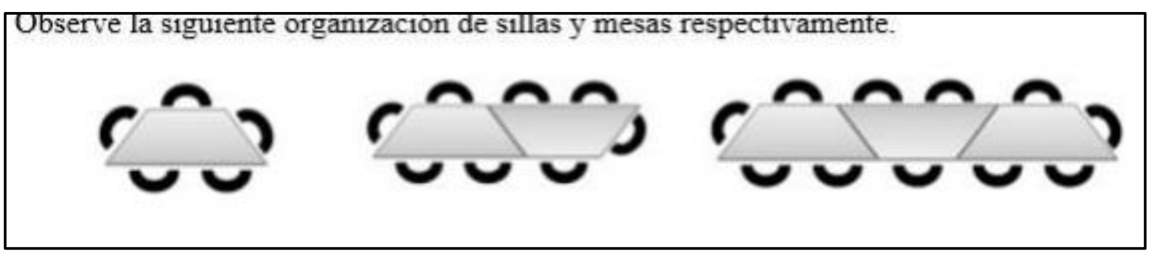
6.1.2. Tarea 1.2

El desarrollo de esta tarea se dio durante la segunda sesión trabajo, esta tuvo una duración de 55 minutos, en la que por momentos el trabajo individual y colaborativo influyeron en el desarrollo de la clase.

Por su parte, la tarea se enfoca en **Determinar cuántas sillas podrían acomodarse en cualquier número de mesas**, lo que resulta similar con la tarea anterior. Sin embargo, la diferencia de esta tarea consiste en la forma de las mesas: para el caso anterior estas tenían forma cuadrada. Mientras que, para esta tiene forma de trapezoidal, consecuente, esto implica el desarrollo de nuevas técnicas e incluso adaptación de técnicas construidas en la sesión anterior. La siguiente figura ilustra la manera en que la situación problemática se presenta a los estudiantes.

Figura 23

Situación problemática para el desarrollo de la tarea 2



Nota: Tomado de Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad, por Z. Barraza (p. 115), 2020.

- **Subtarea 1.2.1**

Esta corresponde a la respuesta de las siguientes preguntas:

a) ¿Determine el número de personas que podrían sentarse con un total 6 mesas juntas?

b) ¿Determine el número de personas que podrían sentarse con un total de 16 mesas juntas?

Durante el momento de encuentro con la tarea (M1), el maestro expone la relación entre la tarea actual y la anterior, lo que permite a los estudiantes ir rápidamente en busca de las respuestas de la subtarea 1.2.1 (M2). Este proceso de contextualización se facilita gracias a su familiaridad con la tarea 1. Asimismo, el maestro reitera la importancia de registrar las técnicas y resultados obtenidos, enfatizando la necesidad de completar la tabla 4 hasta donde sea posible. En esta fase de la clase, se promueve el trabajo individual para posteriormente socializar los resultados e inquietudes de los estudiantes.

A continuación, se exponen las técnicas y discursos tecnológicos que emergen en los distintos momentos de estudio. Cada uno de estos enfoques está vinculado a la participación de seis estudiantes, no obstante, algunos de estos han sido identificados como participantes previos en la sesión anterior. Por consiguiente, se conservará el acrónimo establecido en la tarea precedente.

- *Técnica del estudiante A3 en la subtarea 1.2.1*

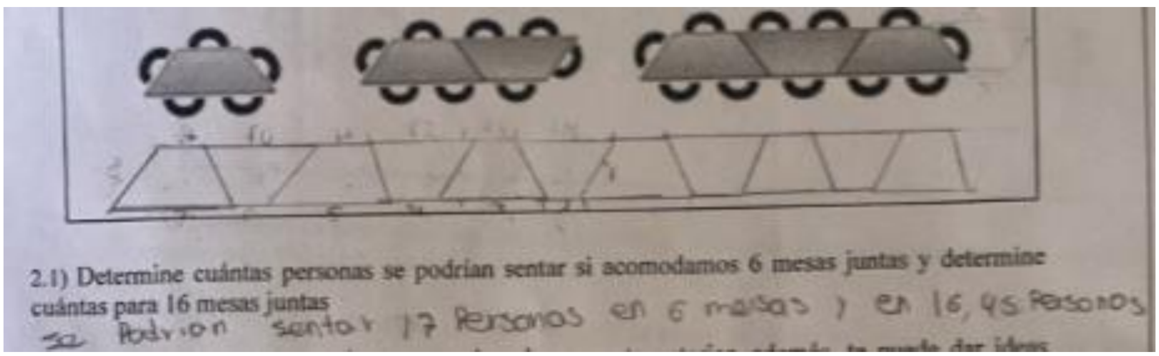
Previo a la presentación de la técnica, es importante destacar la presencia de dos técnicas implementadas con notoriedad por los estudiantes.

Paso 1. El estudiante analiza la situación y ubica en la tabla los resultados del número de sillas de acuerdo con la cantidad de mesas establecidas ($S_0 = 5, S_1 = 8, S_2 = 11$).

Paso 2: En el momento de exploración el estudiante identifica el patrón que se presenta en los dibujos para los primeros términos de la secuencia ($M_0, M_{1,} M_2$), a partir, de este análisis el estudiante empieza a dibujar de manera icónica una mayor cantidad de mesas, con el objetivo de precisar la cantidad de sillas que se pueden ubicar para 5 y 16 mesas, tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 24

Producción de técnicas del estudiante A3 para la subtarea 1.2.1



Nota: Registro de técnica de dibujo realizada por el estudiante A3 para dar respuesta a las subtareas planteadas

Paso 3. El estudiante cuenta el número de sillas que obtiene al adicionar más mesas, a su representación figural. En consecuencia, el estudiante completa la tabla establecida en la guía de trabajo, a partir de la misma, da respuesta a $M_5 = 17$, con el que justifica que cuando se tenga 6 sillas podrá ubicar un total de 17 sillas.

Paso 4. A partir de la técnica de dibujo, el estudiante determina que para un total de 16 mesas puede ubicar 45 sillas, lo que implica el mismo número de personas.

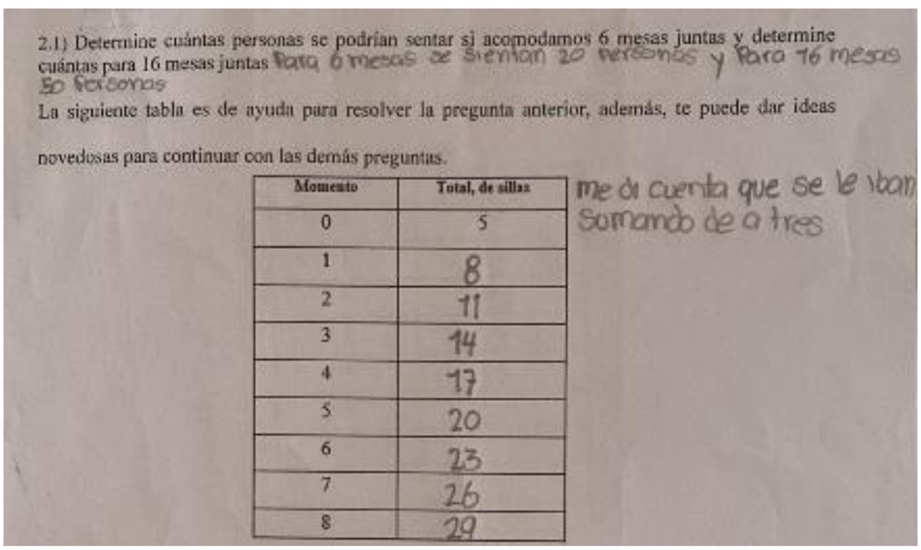
- *Técnica del estudiante A8 en la subtarea 1.2.1*

Paso 1. El estudiante analiza la situación y ubica en la tabla los resultados del número de sillas de acuerdo con la cantidad de mesas establecidas ($S_0 = 5, S_1 = 8, S_2 = 11$).

Paso 2. Durante la fase de exploración (M2), el estudiante identifica el patrón presente en los dibujos correspondientes a los primeros términos de la secuencia ($M_0, M_{1,} M_2$). A partir de este análisis, el estudiante reconoce un patrón numérico que consistente en sumar tres al término anterior para completar la tabla 4. A diferencia de la técnica utilizada anteriormente, en esta guía de trabajo no se evidencian registros de dibujos.

Figura 25

Producción de técnicas del estudiante A8 para la subtarea 1.2.1



2.1) Determine cuántas personas se podrían sentar si acomodamos 6 mesas juntas y determine cuántas para 16 mesas juntas Para 6 mesas se sientan 20 personas y Para 16 mesas 50 Personas

La siguiente tabla es de ayuda para resolver la pregunta anterior, además, te puede dar ideas novedosas para continuar con las demás preguntas.

Momento	Total, de sillas
0	5
1	8
2	11
3	14
4	17
5	20
6	23
7	26
8	29

me di cuenta que se le iban sumando de a tres

Nota: Registro de la técnica recursiva realizada por el estudiante A3 para dar respuesta a las subtareas planteadas.

Paso 3. El estudiante suma repetitivamente 3 al total de sillas que obtuvo de acuerdo con cierto número de mesas. En consecuencia, el estudiante completa la tabla establecida en la guía de trabajo, a partir de la misma, da respuesta a $M_5 = 20$, con el que justifica que cuando se tenga 6 sillas podrá ubicar un total de 20 sillas.

Paso 4. A partir de la técnica recursiva, el estudiante determina que para un total de 16 mesas puede ubicar 50 sillas, lo que implica el mismo número de personas.

Previo al momento de socialización, es oportuno contrastar las dos técnicas desarrolladas por el grupo para la realización de la subtarea 1.2.1. En primer lugar, la técnica emitida por el estudiante A3 corresponde a una técnica de dibujo, esta consiste en dibujar el número de mesas que presenta la pregunta y así calcular el número de sillas correspondiente. Por otro lado, la segunda técnica, se caracteriza prescindir el dibujo. En esta, el estudiante identifica un patrón en los primeros términos de la secuencia, que consiste en sumar tres sillas al resultado correspondiente al número de mesas menos uno. Este enfoque se constituye bajo el MPTM como una técnica recursiva.

Las técnicas presentadas muestran diferentes niveles de elaboración, por lo que es incorrecto afirmar que no están relacionadas entre sí. Partiendo de la técnica de dibujo presentada por el estudiante A3, se puede llegar a la técnica empleada por el estudiante A8. Esto se evidencia en el análisis de la subtarea anterior a través de las intervenciones del maestro durante la validación de técnicas y la socialización grupal. Sin embargo, el maestro identifica que cada una de las técnicas ofrece respuestas distintas, lo que indica que algunos estudiantes no dominan adecuadamente la técnica o que esta no es adecuada para el desarrollo de esta subtarea.

Paso 5. El maestro hace una ronda de palabras para identificar la técnica que empleo el estudiante y así validar los resultados que se registran en la tabla mediante el trabajo colaborativo.

N: ¿Cuál es la cantidad de sillas correspondientes para 4,5,6 mesas y como calculo su resultado?

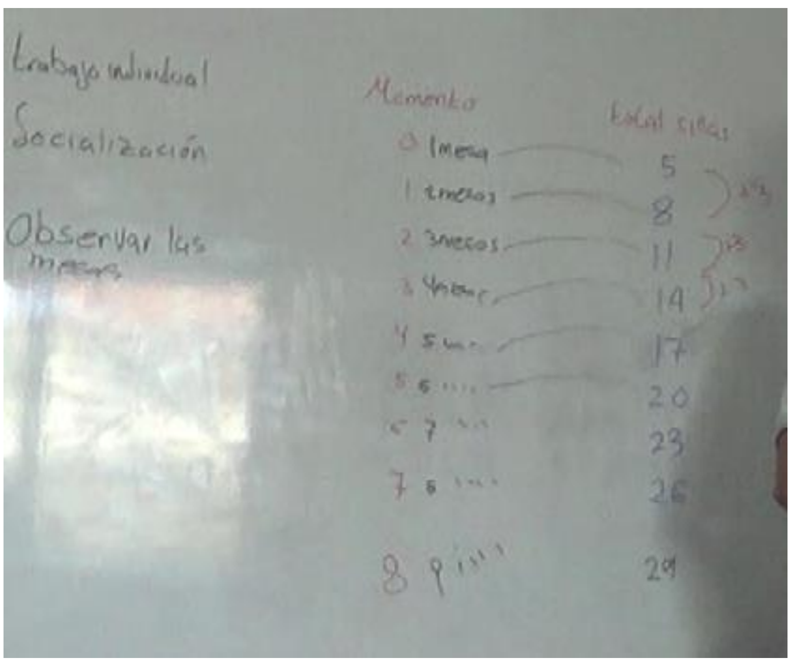
Estudiante A1: “También dibuje para encontrar el resultado de las sillas”, respectivamente el estudiante responde para 4 son 14 sillas, para 5 son 17 sillas y finalmente para 6 sillas, son 20 sillas.

Estudiante A7: “Sumando tres repetidamente” obtuve los mismos resultados que mi compañero.

Paso 6: Al precisar los resultados anteriores, el maestro realiza la tabla de registro en el tablero para compartir los resultados obtenidos por los estudiantes durante el trabajo independiente

Figura 26

Interacción grupal para la solución de la subtarea 1.2.1



Nota: La figura anterior capta el momento preciso en el que maestro hace uso de los recursos del aula para desarrollar nuevas técnicas.

Paso 7. A partir de estos resultados, el maestro dirige la reflexión y análisis del comportamiento de la tabla a los estudiantes que desarrollaran la técnica de dibujo. Esto con el fin, de que identifiquen la presencia de un patrón que permita la evolución de dicha técnica.

> Estudiante [A2 y A5] responden que encontrar el patrón es sencillo, basta con observar que a medida que se completa la tabla el número de sillas aumenta en tres progresivamente, cada que se junta una nueva mesa.
>
> Estudiante A3: ¨Tienen razón, al sumar de a tres obtenemos las respuestas, además, es más sencillo que dibujar”

Es en este espacio en el que los estudiantes intentan convencerse unos a otros respecto a la técnica óptima para el desarrollo de la subtarea.

Paso 8. Posteriormente a las intervenciones anteriores, el grupo consolida la técnica presentada por el estudiante A8, así mismo, comparan y validan los resultados obtenidos mediante su técnica de dibujo. Además, suman progresivamente 3 al último momento de la tabla que es $M_8 = 29$.

- Tecnología matemática (θ^m) del estudiante A8 en la Subtarea 1.2.1

$\boldsymbol{\theta^1}$. Los estudiantes durante su producción individual con la tarea identifican un primer patrón, al sumar tres sillas al total de silla obtenidas del momento anterior con una mesa menos. Puede ser expresada mediante la siguiente regla recursiva.

$S_n = (M_n) + 3$, donde M_n $corresponde\ a\ la\ cantidad\ de\ mesas\ trepezoidales$

Tecnología creativa (θ_c) del estudiante A7 en la Subtarea 1.2.1

$\boldsymbol{\theta_1}$. Los estudiantes optimizan su técnica de dibujo y conteo en función de las sillas y mesas, enfocándose en el patrón figural. Notan que, al agregar más mesas, el número de sillas aumenta en 3 en comparación con la cantidad previa.

Con respecto al componente creativo de la actividad matemática y su socialización, se destaca la adaptación de la técnica de dibujo desarrollada en la subtarea anterior (F4), representada en la figura 24. Sin embargo, es la optimización de esta técnica (F2) lo que permite al grupo de estudiantes determinar la cantidad de sillas que se pueden ubicar en M_{15}, correspondiente a un total de 16 mesas. Este proceso da lugar al desarrollo de nuevas técnicas, fomentando la innovación tecnológica entre los estudiantes.

A diferencia de la primera tarea, esta actividad no contó con el acompañamiento constante del maestro en el desarrollo de las técnicas presentadas por los estudiantes. En contraste, el papel del maestro durante la sesión de trabajo se centró en moderar el aula, con el objetivo de que los estudiantes expresaran sus discursos tecnológicos de manera ordenada y persuadieran a sus compañeros de adoptar una de las técnicas presentadas por el grupo.

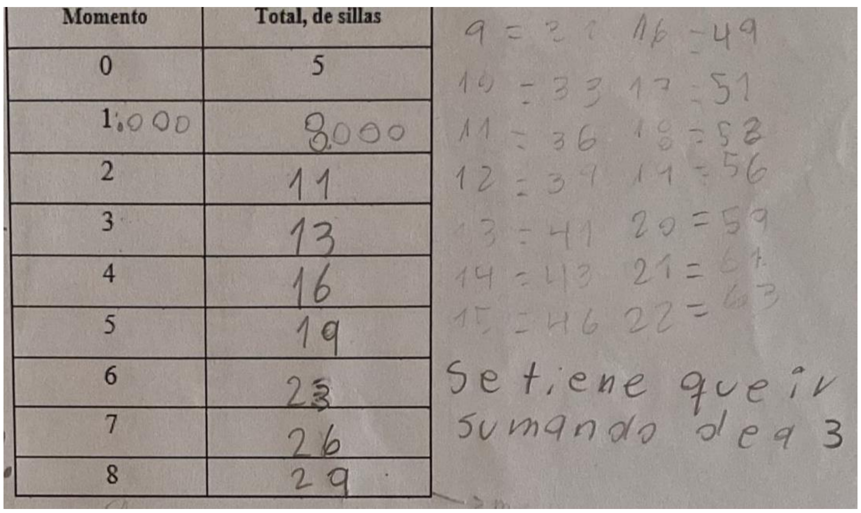
Por otro lado, el maestro observa con satisfacción el progreso de un número significativo de estudiantes, específicamente aquellos que no emplearon inicialmente la técnica de dibujo. Estos estudiantes lograron identificar el patrón dentro de la secuencia y completaron la tabla de registro de manera inmediata. Aunque aún es temprano para afirmar que el modelo está comenzando a dar frutos en términos de desarrollo del talento matemático y la creatividad, se observa una mejora notable en las técnicas empleadas por los estudiantes. En consecuencia, el maestro plantea a los estudiantes la cuestión de determinar la cantidad de sillas que se pueden ubicar en un total de 2000 mesas, lo cual corresponde a M_{1999} . Ante este desafío, los estudiantes presentan las siguientes técnicas

- Estudiante A9: “Si multiplicamos 5 × 2000 obtenemos el resultado”
- Estudiante A7 “Si agregamos tres 0 al resultado que obtuvimos cuando teníamos 2 mesas”, entonces sabremos que, para 2000 mesas, esta técnica puede ser expresada mediante la siguiente expresión.

$$M_1 = 8, por\ lo\ tanto\ \ M_{1999} = 8000$$

Figura 27

Técnica propuesta por el estudiante A5



Nota: La figura anterior precisa la técnica empleada para la solución de la pregunta planteada por el maestro acerca de las 2000 mesas, así como el momento de estudio (M3).

Al igual que la subtarea 1.1.1 se evidencia diversidad de técnicas enfocadas a nociones de conceptos matemáticos propios del aula regular de matemáticas. Ahora bien, es preciso destacar la evidencia de este tipo de técnicas para que en el momento exploratorio con la subtarea 1.2.2, los estudiantes modifiquen sus técnicas iniciales con el objetivo de definir una regla exitosa propia del contexto.

Subtarea 1.2.2: Determine cómo podríamos obtener el número de sillas para cualquier organización de mesas.

Al analizar la sesión de clase, se observa que desde la subtarea inicial emergen diversas técnicas que, con mayor sofisticación, podrían llevar a una generalización. En particular, la segunda subtarea se centra en que los estudiantes, mediante el uso de una regla recursiva o una expresión matemática, respondan a la pregunta planteada. Asimismo, se destacan algunas respuestas captadas en las videograbaciones, en relación con las técnicas y discursos tecnológicos empleados.

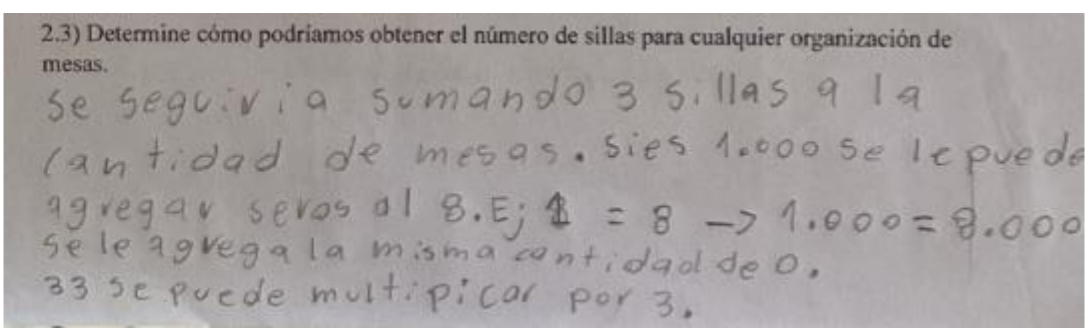
- *Técnica del estudiante A6 en la subtarea 1.2.2*

Paso 1. A partir de la subtarea anterior, el estudiante identifica que el elemento común es sumar 3 cada vez que se agrega una nueva mesa, lo cual pone de manifiesto el momento de estudio (M3).

Paso 2. Asimismo, se establecen dos técnicas adicionales para responder a la pregunta del maestro sobre el cálculo del número de sillas que se pueden ubicar con un total de 2000 mesas.

Figura 28

Técnica propuesta por el estudiante A7


2.3) Determine cómo podríamos obtener el número de sillas para cualquier organización de mesas.

Se seguiria sumando 3 sillas a la cantidad de mesas. Si es 1.000 se le puede agregar seros al 8. Ej: 1 = 8 -> 1.000 = 8.000 se le agrega la misma cantidad de 0.
33 se puede multipicar por 3.

Nota: Registro recursivo por parte del estudiante A7 para la solución de la tarea planteada.

Paso 3. El maestro agradece la participación del estudiante y destaca el hecho de conservar el patrón sumativo de 3 al total de sillas correspondiente al número de mesas menos1, propio de la subtarea anterior. Por otro lado, invita al estudiante a validar sus otras dos técnicas con los resultados establecidos en la tabla anterior, particularmente la que consiste en agregar un 0. Específicamente, le sugiere que observe los resultados obtenidos para una mesa y, posteriormente, para 10 mesas. Asimismo, se plantea a los estudiantes si alguno de ellos dispone de una técnica diferente. En respuesta, los estudiantes A8 y A2 levantan la mano para presentar sus técnicas.

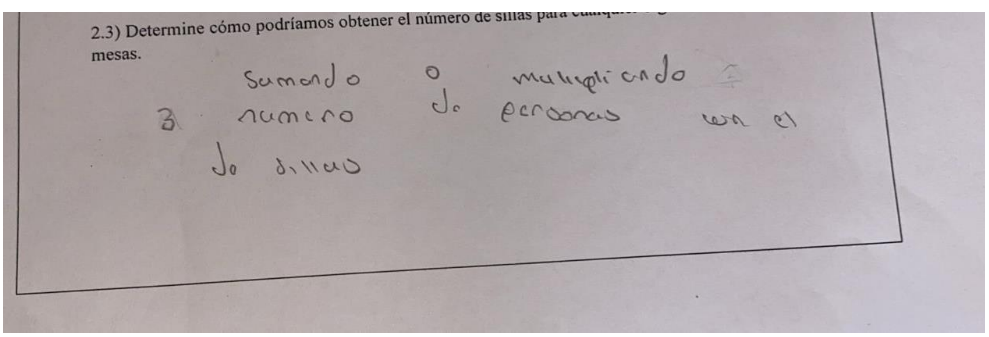
- *Técnica del estudiante A8 en la subtarea 1.2.2*

Paso 1. El estudiante reconoce la interacción entre las variables número de sillas y mesas como elemento principal en el desarrollo de la subtarea.

Paso2. Por lo tanto, el estudiante propone de manera recursiva que para encontrar el total de personas sumar o multiplicar 3 al número de sillas correspondiente al total de mesas menos uno.

Figura 29

Técnica propuesta por el estudiante A8



Nota: Registro recursivo por parte del estudiante A8 para la solución de la subtarea planteada

Paso 3: El maestro registra en el tablero la técnica del estudiante y da paso a la participación del estudiante A2.

- *Técnica del estudiante A2 en la subtarea 1.2.2*

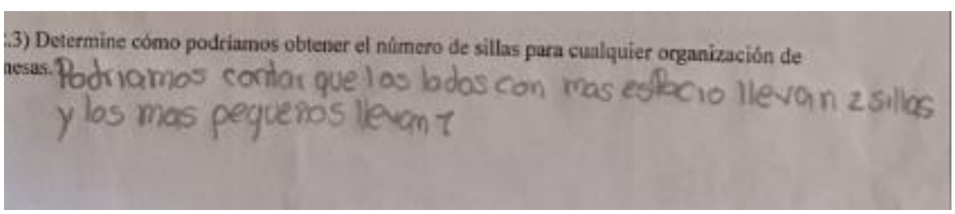
Es importante resaltar que la técnica empleada por el segundo estudiante no es casual en esta tarea, ya que su participación en el espacio de socialización de la tarea 1.1 fue productiva. En otras palabras, la capacidad de análisis del estudiante mediante esta técnica es fundamental para que el grupo logre consolidar una regla que garantice la solución de esta subtarea.

Paso 1. Inicialmente, estudiante analiza el comportamiento de las mesas de frente a la disposición de las sillas.

Paso 2. En consecuencia, registra que al juntar las mesas de forma trapezoidal el número de sillas aumenta de acuerdo con los lados del trapecio, es decir para la base mayor se suman dos sillas, mientras la base menor tan solo una silla.

Figura 30

Técnica propuesta por el estudiante A2


.3) Determine cómo podríamos obtener el número de sillas para cualquier organización de nesas. Podriamos contar que los lados con mas espacio llevan 2 sillas y los mas pequeños llevan 1

Nota: Registro recursivo por parte del estudiante A2 para la solución de la subtarea planteada

Paso 4. El maestro cierra el espacio participativo, además, predispone los estudiantes para el espacio de socialización y validación de las técnicas anteriores.

El conjunto de técnicas implementadas por los estudiantes en el desarrollo de esta subtarea mantiene una relación estrecha con las planteadas durante la sesión anterior. Esto se debe a que la situación problemática contempla un propósito general mediante contextos diferentes. En esta sesión, el grupo apoya la producción de nuevas técnicas y la optimización de estas, partiendo de las premisas obtenidas de la tarea previa. Ahora bien, al continuar con la dinámica del análisis, el momento de socialización se centra en la respuesta a las preguntas hechas por el maestro y en los aportes significativos de los estudiantes.

Respecto a la técnica presentada por A7, el maestro reconoce que el patrón sumativo es un elemento importante de la subtarea presentada. Sin embargo, invita a los estudiantes a evaluar la técnica presentada por el compañero (M6), mediante la siguiente pregunta.

> N: ¿Consideran que la técnica del compañero A7, funciona en todo momento y si basta con esta para dar solución a la subtarea?

> Estudiante A8 expresa que el patrón sumativo de 3 en el total de sillas funciona. Sin embargo, este requiere tener siempre la tabla de registro y el objetivo es encontrar la expresión o fórmula matemática que represente el total de sillas respecto al total de mesas.

En consecuencia, el maestro invita al estudiante A8 a justificar, a través de su discurso tecnológico, la técnica diseñada correspondiente al momento de estudio (M1).

> Estudiante A8 manifiesta en su técnica que es necesario sumar o multiplicar 3 que corresponde al aumento de sillas identificado en la tabla de registro.

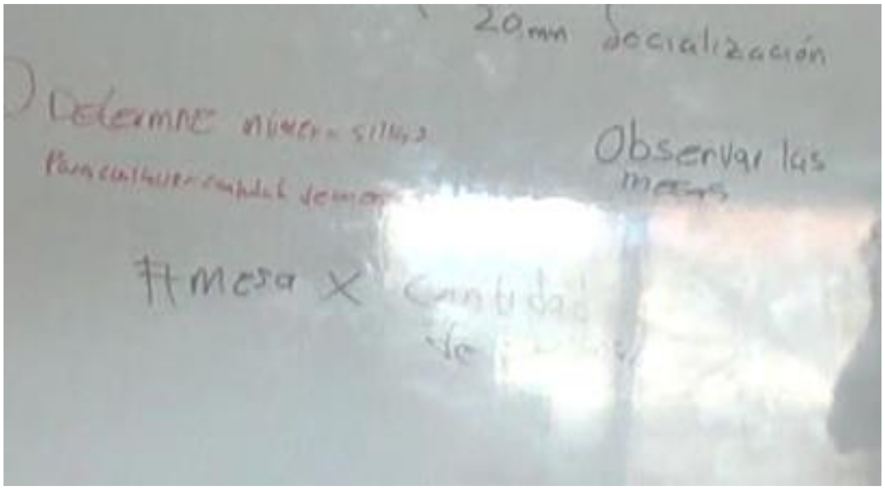
La intervención anterior genera un nuevo espacio de discusión, ya que la técnica no resulta clara en relación con la operación algebraica adecuada para la situación problemática. Esto lleva a la apertura de un espacio de debate, donde, mediante un enfoque colaborativo resultan la optimización de técnicas.

> N: Entonces chicos, ¿multiplicamos o sumamos? ¿Qué hacemos?

> Estudiante A5: “Multipliquemos número de mesas por número de sillas”.

Figura 31

Técnica propuesta por el estudiante A5



Nota: Registro la técnica del estudiante A5 durante el espacio de socialización de técnicas previas.

Estudiante A7 responde: "No se puede porque hace falta la variable de cantidad de personas o sillas". Esta respuesta implica la identificación de variables para la búsqueda de una regla de generalización mediante una expresión algebraica. Así mismo el estudiante añade. "Sin importar la cantidad de mesas debemos multiplicar por 3". Esta técnica puede ser expresada recursivamente de la siguiente manera.

$S_n = 3(M_n)$, donde M_n $corresponde\ a\ la\ cantidad\ de\ mesas\ trapezoidales$

En consecuencia, con la aparición de la técnica anterior, el maestro identifica un gran avance en la búsqueda de la respuesta a la subtarea propuesta. Por ello, considera adecuado en el desarrollo de la clase evaluar la técnica anterior (M6), con el fin de que los estudiantes den el último paso hacia la constitución de una regla de generalización. Este proceso de validación implica promover los resultados obtenido a través de la regla recursiva y contrastarlos con los registros de la tabla correspondiente a la subtarea anterior.

N: Aplicando la técnica de su compañero, ¿cuál es la cantidad de sillas para cuando se tiene una mesa?

Estudiante A3: “El resultado es 3, porque $3 \times 1 = 3$” así mimo, agrega que la formula no funciona.

N: “Observen el resultado que obtuvieron con la formula y contraste este mismo con el resultado de la tabla. Expresen sus ideas, que podemos hacer para que los resultados sean iguales y por ende la formula funcione”

Estudiante A4: “Profe y si le sumamos un dos”

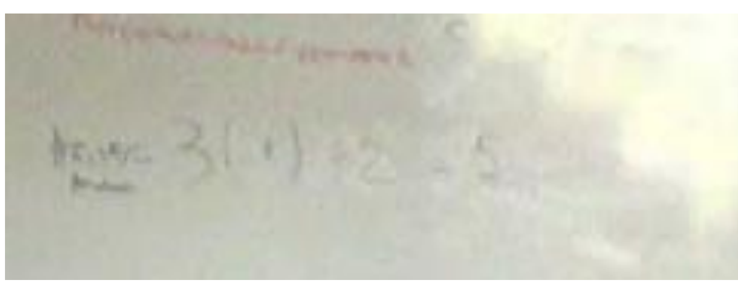
N: (A lo que el maestro responde con un gesto que sí). No obstante, el maestro intervine con la siguiente pregunta: ¿de dónde se te ocurre sumar 2?

Estudiante A4: “Profe, el 3 sale del aumento de sillas, mientras que el dos corresponde a los extremos, siempre hay dos sillas, como en la clase pasada”

N: el maestro agrega el 2 a la expresión registrada en el tablero e intenta validar la respuesta.

Figura 32

Técnica constituida por los estudiantes en el espacio de socialización



Nota: En la imagen se precisa la expresión 3 (1) +2 = 5, respecto a la técnica grupal.

En este momento el grupo de estudiantes contempla que el resultado de la regla coincide con el de la tabla de registro. En consecuencia, en ese momento se precisan comentarios de alegría y satisfacción por la consigna de una regla de generalización respecto a la cantidad de sillas a partir de cualquier cantidad de mesas.

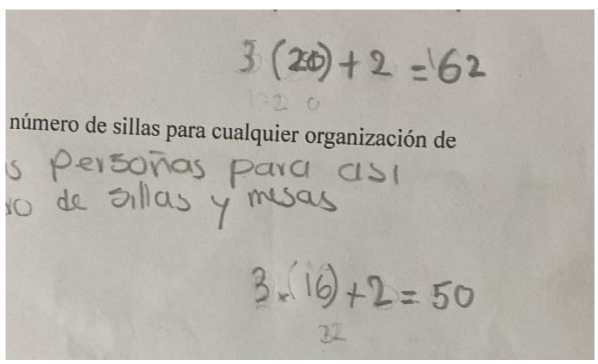
Estudiante A7: “Descubrimos una fórmula matemática”

N: (A lo que el maestro responde con un gesto que sí). Además, señala que es necesario continuar implementando la fórmula para verificar si coincide con los resultados propios de la tabla de registro.

En consecuencia, el grupo de estudiantes desarrolla a cabalidad la indicación del maestro, como se evidencia en la siguiente figura.

Figura 33

Validación de técnica construida por el grupo



Nota: Registro de la validación de técnicas, tomada de las videograbaciones de clase.

A lo largo de la socialización, se observa un notable progreso en los estudiantes respecto a cada técnica presentada, en contraste con la sesión de clase anterior. Este avance es producto de la contextualización previa del grupo y de la implementación de la técnica de la sesión anterior.

Además, la orientación oportuna del maestro facilita tanto la optimización como la creación de una nueva técnica, con el objetivo de establecer una regla de generalización.

- Tecnología matemática (θ^{m}) del estudiante A8 en la Subtarea 1.2.2.

$\boldsymbol{\theta^{1}}$. El estudiante construye una regla recursiva mediante el patrón sumativo identificado en la tabla de registros; sin embargo, plantea dos opciones respecto al operador aritmético. Dicha regla puede ser representada de la siguiente manera.

$$S_n = 3 \times (M_n), \text{ donde } M_n \ corresponde\ a\ la\ cantidad\ de\ mesas\ trapezoidales$$

$$S_n = 3 + (M_n), \text{ donde } M_n \ corresponde\ a\ la\ cantidad\ de\ mesas\ trapezoidales$$

- Tecnología matemática (θ^{m}) del estudiante A5 en la Subtarea 1.2.2.

$\boldsymbol{\theta_1}$. El estudiante reconoce la incidencia de las variables, numero de mesas y numero de sillas. Por lo tanto, propone multiplicar el número de sillas, sin embargo, dicha técnica no contempla que una de las variables debe estar en la función de la otra

$$S_n \times (M_n), \text{ donde } M_n\ y\ S_n \ corresponde\ a\ la\ cantidad\ de\ mesas\ y\ sillas$$

- Tecnología matemática (θ^{m}) 1.2.2. construida por el grupo en el espacio de socialización

$\boldsymbol{\theta_1}$. La técnica anterior, da paso a que el estudiante A7 determine que se debe elegir el operador multiplicativo, puesto que así no está sujeta al total de sillas respecto al número de mesas menos uno. Así mismo, debe ser 3, ya que este corresponde

$$S_n = 3 \times (M_n), \text{ donde } M_n \ corresponde\ a\ la\ cantidad\ de\ mesas\ trapezoidales$$

$\boldsymbol{\theta_2}$. El estudiante A4 analiza la regla planteada y propone sumar 2, este accionar corresponde a las dos sillas que siempre están en los extremos de la mesa. Por tanto, logran constituir la misma regla de generalización planteada en el análisis a priori de la subtarea, esta se representa de la siguiente manera:

$$S_n = 3 \times (M_n) + 2, \text{ donde } M_n \ \textit{corresponde a la cantidad de mesas trapezoidales}$$

- Tecnología creativa (θ_c) de la Subtarea 1.2.2.

Durante los diferentes momentos de estudio asociados a la subtarea presente, se evidencia actividad matemática creativa, tanto a nivel individual como grupal, por parte de los estudiantes. Este apartado centra su atención en lo ocurrido en el espacio de socialización y en la construcción de la regla de generalización.

- Tecnología creativa (θ_c) del estudiante A8 en la Subtarea 1.2.2.

$\boldsymbol{\theta_1}$. El estudiante adapta la técnica implementada en la subtarea 1.1.2 (F4), por ende, consolida una regla para calcular la cantidad de sillas en función de los términos de la secuencia. Asimismo, el aspecto más destacado corresponde a la identificación del patrón sumativo identificado en el registro de la tabla 4.

- Tecnología creativa (θ_c) del estudiante A4 en la Subtarea 1.2.2.

$\boldsymbol{\theta_2}$. El estudiante optimiza la técnica previa (F2), específicamente plantea que a la regla recursiva se le debe sumar dos, consecuencias de analizar la tarea desde diversos ángulos(F3). Es decir, el estudiante plantea que al analizar el comportamiento de las mesas al juntarlas se debe tener en cuenta las correspondientes a la de los extremos. Logrando la consigna de establecer la regla de generalización para la subtarea a partir del espacio momento de estudio de socialización (M4).

La adaptación y optimización de técnicas únicas (F2 y F4) demuestran la capacidad de los estudiantes para interpretar y reconocer patrones durante la subtarea. Mediante la verbalización y el registro del maestro en el tablero, se establece una regla de generalización. Esto representa un avance significativo en comparación con la subtarea 1.1.2, donde solo lograron aproximaciones. En esta sesión de trabajo, los estudiantes consolidan exitosamente una regla, gracias al acercamiento previo de la tarea independiente del cambio de contexto (M1), logrando así los objetivos planteados previo al desarrollo de esta subtarea.

- **Subtarea 1.2.3:** Determine cuántas mesas necesitamos para acomodar a 62 personas.

El análisis de esta subtarea evidencia un antes y un después previo a la construcción de la regla de generalización presentada anteriormente. Inicialmente, los estudiantes enfocan la técnica en prolongar la tabla mediante el patrón sumativo identificado duran la construcción de esta. No obstante, la aparición de la regla de generalización produce un cambio de técnicas propio de la practicidad de esta.

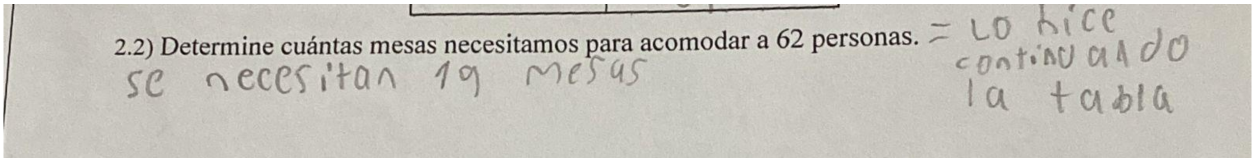
- *Técnica del estudiante A7 en la subtarea 1.2.3.*

Paso 1. El estudiante analiza el ejercicio y decide prolongar la tabla 2 hasta conseguir el total de mesas que le presente la cantidad de sillas necesarias para dar respuesta a la subtarea.

Paso 2. Registra la cantidad de mesas para las 62 personas de acuerdo con la técnica empleada en el paso anterior.

Figura 34

Producción de técnicas del estudiante A10 para la subtarea 1.2.3


2.2) Determine cuántas mesas necesitamos para acomodar a 62 personas. = lo hice continuando la tabla

se necesitan 19 mesas

Nota: Registro recursivo por parte del estudiante A10 para la solución de la tarea planteada.

Al precisar el resultado emitido por la técnica anterior, el maestro busca aludir a los estudiantes de que si se concretó una regla de generalización es momento de explorar la respuesta a la subtarea anterior mediante la misma.

N: ¿Alguien consiguió otro resultado a partir de esta técnica?

El grupo por momento no emite ninguna otra respuesta. Sin embargo, surge el siguiente comentario.

Estudiante A4: “Si lo intentamos con la formula”

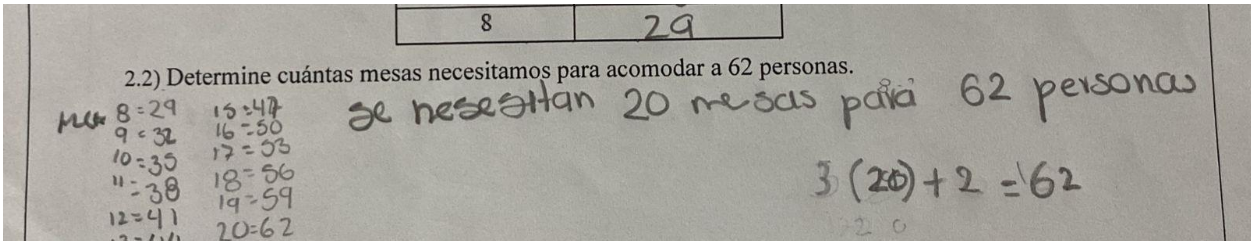
- *Técnica del estudiante A4 en la subtarea 1.2.3.*

Paso 1. El estudiante previo a la orientación del maestro decide implementar la regla de generalización.

Paso 2. El estudiante prueba mediante ensayo y error el número correspondiente a las mesas para obtener 62 sillas.

Figura 35

Producción de técnicas del estudiante A4 para la subtarea 1.2.3



Nota: Registro recursivo por parte del estudiante A4 para la solución de la tarea planteada.

Paso 3. Registra que se requiere un total de 20 mesas para las 62 personas de acuerdo con la técnica empleada en el paso anterior.

Paso 3. Así mismo, en la figura anterior se observa que el estudiante valido sus resultados mediante la técnica empleada por el estudiante A10.

- Tecnología matemática (θ^{m}) de los estudiantes en la Subtarea 1.2.3

Los estudiantes no lograron construir una regla recursiva o algebraica.

$\boldsymbol{\theta^1}$**.** El estudiante A5 mediante la implementación de la técnica de la subtarea 1.2.2. optimiza la técnica presentada por el estudiante A10.

- Tecnología creativa (θ_c) del estudiante A4 en la Subtarea 1.2.3.

$\boldsymbol{\theta_1}$. El estudiante optimiza sus técnicas (F2), avanzando de reglas recursivas a la propuesta de reglas algebraicas. Esto se evidencia cuando implementa la regla de generalización en lugar de simplemente extender la tabla de registros.

A lo largo de las sesiones 1 y 2, este estudiante manifiesta actividad matemática creativa, logrando así la construcción de reglas algebraicas. Sin embargo, es evidente que el desarrollo de estas técnicas está estrechamente relacionado con los aportes emergentes durante el espacio de socialización. En este contexto, se destaca una diversidad de discursos tecnológicos y técnicas desde diferentes ángulos (F4). Este momento se analiza en relación con el comportamiento de las mesas y su forma geométrica.

Por otro lado, la situación de sillas y mesas fomenta una relación de trabajo y confianza entre el maestro y los alumnos. Asimismo, la contextualización proporciona motivación al grupo. En consecuencia, las orientaciones del maestro son fundamentales para la optimización y adaptación de técnicas (F2 y F4). Finalmente, se consolida el cierre de la situación problemática y se emiten instrucciones para el desarrollo de las dos siguientes sesiones de clase.

6.2 Análisis a posteriori de la situación problemática 2: doblado de una hoja de papel

El desarrollo de esta situación problemática se realiza en dos sesiones de clase, específicamente la tercera y cuarta sesión. Además, el trabajo individual juega un papel fundamental durante el desarrollo de cada tarea y subtarea. Sumado a esto, la situación incluye la implementación de material concreto para centrar la discusión en el ejercicio de doblar una hoja de papel.

6.2.1. Tarea 2.1

El desarrollo de esta tarea tiene una duración de 65 minutos, convirtiéndose en la sesión más extensa de las seis. Sin embargo, esta duración se debe a la participación en una actividad institucional de los estudiantes, específicamente las olimpiadas matemáticas de secundaria. Debido a este evento, el maestro se vio obligado a dejar al grupo sin su supervisión. Es crucial destacar este tipo de incidentes, ya que representan agentes externos que pueden intervenir en la planificación y el desarrollo de la clase dentro del aula regular. No obstante, la sesión se llevó a cabo en su totalidad y se obtuvieron resultados pertinentes frente a la situación presentada.

Esta tarea se centra en la siguiente pregunta: determinar el área y el perímetro de la superficie de una hoja al realizar cualquier número de dobleces. A partir de esta pregunta, surgen las subtareas presentadas en el análisis a priori. El maestro inicia la sesión de clase presentando cada una de las subtareas registradas en la guía de trabajo y las reglas de clase. Asimismo, se entrega a cada estudiante una hoja cuadrada de 16 cm de lado, activando conceptos matemáticos en el primer momento de acercamiento con la tarea (M1). La siguiente figura evidencia la orientación y entrega de material por parte del maestro.

Figura 36

Registro de la entrega de materia para el desarrollo de la tarea 2.1

Nota: Intervención explicativa de frente al desarrollo de las tareas y subtareas comprendidas en la primera sesión de clase de la segunda situación problemático.

Posteriormente entra en escena la **Subtarea 2.1.1**¸ esta consiste en: Si repetimos el proceso de doblar la hoja 5 veces, ¿cuál es el área y perímetro de la superficie resultante? Esta precisaba una tabla de registro en la que el estudiante establece la medida del área y perímetro de la hoja respecto a cada uno de los dobleces realizado. Durante el momento exploratorio de los estudiantes con la tarea (M2) se precisan diversas técnicas, incluso se evidencia que algunos estudiantes utilizan regla para medir respectivamente la hoja cuadrada posteriormente a su respectivo doblez, en este momento el maestro interviene para orientar los estudiantes a no implementar este tipo de técnicas.

Por lo tanto, el maestro pregunta a los estudiantes si es posible medir los lados de la hoja después de realizar un total de 150 dobleces. Así, los estudiantes responden que no es posible hacer tantos dobleces, lo que confirma una intervención exitosa en la producción de técnicas únicas por parte de los estudiantes. Luego, el maestro invita a registrar los resultados obtenidos en la tabla de registros y a determinar el área y el perímetro para cualquier número de dobleces, específicamente las subtareas 2.1.2 y 2.2.3.

- **Subtarea 2.1.2**: ¿Cómo podríamos obtener el área de la superficie de la hoja resultante para cualquier número de dobleces?
- **Subtarea 2.1.3**: ¿Cómo podríamos obtener el perímetro de la superficie de la hoja resultante para cualquier número de dobleces?

Es a partir de la respuesta de estas preguntas que se evidencia las técnicas empleadas por los estudiantes para dar respuesta a la primera subtarea, así mismo, evidencia el manifestó de actividad matemática creativa. A continuación, se presenta las técnicas del estudiante A1, A7, A10.

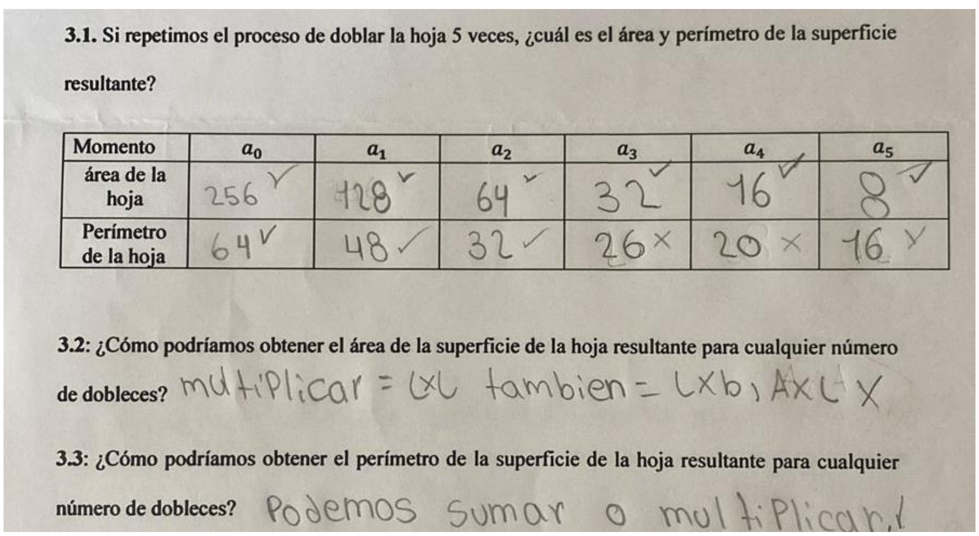
- *Técnica del estudiante A1 en la subtarea 2.1.2. y subtarea 2.1.3.*

Paso 1. El estudiante aplica conceptos propios del aula de clase, así mismo consigue registrar los resultados en la tabla respecto al momento exploratorio con la tarea (M2).

Paso 2. Posteriormente, el estudiante propone la expresión $A=L\times L$ o, en su defecto, $A=B\times H$ como técnica para calcular el área de la hoja, reconociendo las características geométricas de esta figura. Asimismo, define la técnica de multiplicar o sumar los lados para calcular el perímetro. Las técnicas anteriores evidencian que la subtarea no se comprende en su totalidad, ya que los estudiantes, mediante las técnicas implementadas en el aula, consideran que pueden calcular el área y el perímetro de la hoja sin entender que, con un número n de dobleces, no es posible mantener las técnicas precisadas por el estudiante A1. La siguiente figura expone el momento de trabajo con las técnicas implementadas por el estudiante (M3), así como los resultados de la tarea al realizar los primeros cinco dobleces.

Figura 37

Producción de técnicas del estudiante A1 para la subtarea 2.1.2. y subtarea 2.1.3.



3.1. Si repetimos el proceso de doblar la hoja 5 veces, ¿cuál es el área y perímetro de la superficie resultante?

Momento	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
área de la hoja	256 ✓	128 ✓	64 ✓	32 ✓	16 ✓	8 ✓
Perímetro de la hoja	64 ✓	48 ✓	32 ✓	26 ×	20 ×	16 ×

3.2: ¿Cómo podríamos obtener el área de la superficie de la hoja resultante para cualquier número de dobleces? multiplicar = LxL tambien = Lxb, AxL ✓ ×

3.3: ¿Cómo podríamos obtener el perímetro de la superficie de la hoja resultante para cualquier número de dobleces? Podemos sumar o multiplicar. ✓

Nota: Registro de la técnica dado por el estudiante A1 para dar respuesta a las subtareas planteadas.

Paso 3. El maestro registra la tecnica anterior en el tablero, sin embargo, no proporciona la validación de la misma. En consecuencia, plantea a los estudiantes que consideren tecnicas diferentes a la anterior, puesto que cuando el numero de dobleces sea 40, la tecnica anterior no es lo suficientemente precisa para dar respuesta a la subtarea planteada. Por otro lado, el registro del perimetro es incorrecto a partir del tercer doblez, esto se debe a las limitaciones presentadas por la tecnica implementada.

- Tecnología matemática (θ^{m}) del estudiante A1 en la Subtarea 2.1.2.

θ^{1}. A partir de conceptos movilizados del aula regular de clase, el estudiante propone la regla geométrica establecida para el cálculo del área de un cuadrado.

$$A = L \times L$$

- Tecnología creativa (θ_c) del estudiante A1 en la Subtarea 2.1.2.

La manifestación del componente creativo radica principalmente en las técnicas matemáticas empleadas por el estudiante. Sin embargo, la escasa comprensión de la situación problemática por parte del estudiante impide el desarrollo de técnicas matemáticas novedosas y, por ende, creativas.

- Tecnología matemática (θ^{m}) del estudiante A1 en la Subtarea 2.1.3.

$\boldsymbol{\theta^{1}}$. De forma análoga a lo sucedido con el cálculo del área, la técnica producida por el estudiante para determinar el perímetro de la superficie de la hoja corresponde a:

$$P = L + L + L + L$$

- Tecnología creativa (θ_c) del estudiante A1 en la Subtarea 2.1.3.

Es evidente que el alumno comprende la técnica de cálculo de área y perímetro desarrollada durante su proceso escolar. No obstante, la manifestación de actividad creativa por parte del estudiante al emplear esta técnica es nula. En consecuencia, el maestro interviene e invita a la participación de algún estudiante que haya desarrollado una técnica diferente a la presentada inicialmente. Asimismo, no es extraño percibir este tipo de técnicas, las cuales han sido asimiladas por el estudiante de forma mecánica.

- *Técnica del estudiante A7 en la subtarea 2.1.2. y subtarea 2.1.3*

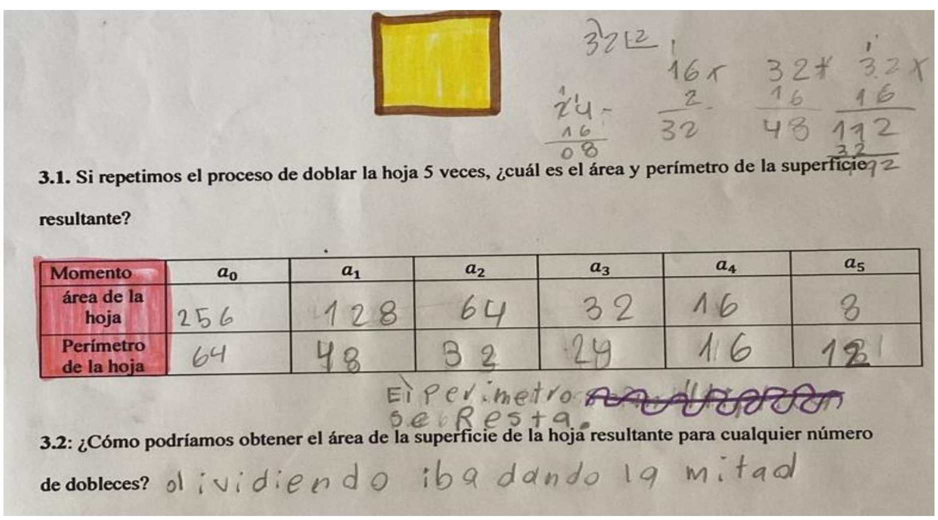
Paso 1. En el momento de exploración (M2) el estudiante registra los resultadas del área y el perímetro respectivamente. El área en el primer doblez corresponde a 128 cm^2, mientras que el quinto corresponde a 8 cm^2.

Paso 2. El maestro pregunta al estudiante, el motivo de las operaciones algebraicas registradas en la parte superior de la hoja.

Estudiante A7: “Profe yo me di cuenta de que el área de la hoja es ir dividiendo entre 2”

Figura 38

Producción de técnicas del estudiante A1 para la subtarea 2.1.2. y subtarea 2.1.3.



3.1. Si repetimos el proceso de doblar la hoja 5 veces, ¿cuál es el área y perímetro de la superficie resultante?

Momento	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
área de la hoja	256	128	64	32	16	8
Perímetro de la hoja	64	48	32	24	16	12

El perímetro se Resta.

3.2: ¿Cómo podríamos obtener el área de la superficie de la hoja resultante para cualquier número de dobleces? dividiendo iba dando la mitad

Nota: Registro de la técnica dado por el estudiante A1 para dar respuesta a las subtareas planteadas.

Paso 3. El estudiante identifica un patrón en el cálculo del área de la superficie de la hoja en relación con el número de dobleces. Además, corrobora sus resultados mediante diversas operaciones algebraicas para garantizar su exactitud. Esta técnica puede ser expresada mediante la siguiente fórmula:

$$A_n = \frac{A_{n-1}}{2} \text{ , } donde\ An\ corresponde\ al\ \acute{a}rea\ de\ la\ hoja\ para\ n\ doblez.$$

Paso 4. En contraste con la técnica presentada por el estudiante A1, se evidencia un progreso en las técnicas implementadas. En particular, el reconocimiento del patrón numérico refleja un alejamiento de los conceptos propios del aula regular de matemáticas. Esto manifiesta una mejor comprensión de la subtarea planteada (M5).

Paso 5. Respecto al perímetro el estudiante comunica al maestro que no le fue tan sencillo identificar un patrón como el del área, sin embargo, registra en guía de trabajo que el perímetro se resta.

N: ¿Cómo conseguiste los resultados del perímetro?

Estudiante A7: “Profe el compañero A10 me ayudo”

N: ¿Te explico?

Estudiante A7: “Sí, pero casi no le entiendo”

Paso 6. El maestro examina los resultados del área obtenidos mediante las dos técnicas presentadas (M6) con el objetivo de confrontarlas. Sin embargo, estos son los mismos en cada uno de los dobleces, por lo tanto, el maestro con el fin de persuadir los alumnos de que la técnica óptima para el desarrollo de esta subtarea es la del estudiante A7, ya que la del A1 por momentos se puede tener errores en la medición de los lados de la hoja. En consecuencia, se construye un espacio de socialización para dar oportunidad de que otros estudiantes expongan sus resultados.

N: Para el momento a_3 que corresponde al tercer doblez, ¿Qué resultado obtuvieron? Y ¿Qué técnica utilizaron?

Estudiante A3: “Profe, yo tengo un resultado diferente. Me dio 40”

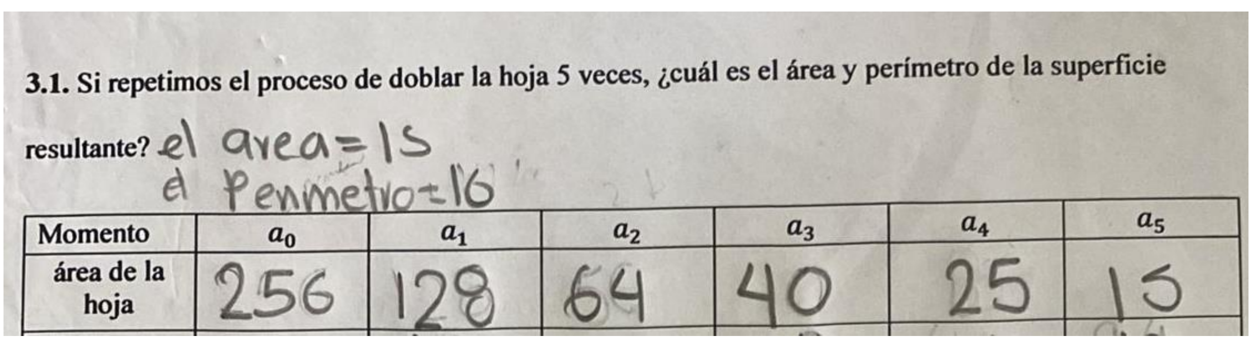
N: ¿40 qué?

Estudiante A3: “El área profe, me dio 40 cm^2”

La figura a continuación sustenta la afirmación del maestro, indicando que la implementación de la técnica del estudiante A1 puede resultar en una falta de precisión en el cálculo del área.

Figura 39

Producción de técnicas del estudiante A1 para la subtarea 2.1.2. y subtarea 2.1.3.



3.1. Si repetimos el proceso de doblar la hoja 5 veces, ¿cuál es el área y perímetro de la superficie resultante? el area=15
el Perimetro=16

Momento	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
área de la hoja	256	128	64	40	25	15

Nota: Registro de los resultados obtenidos por el estudiante A3 para dar respuesta a las subtareas planteadas.

N: ¿Cuál fue la técnica que utilizaste para obtener ese resultado?

Estudiante A3: ¨Yo lo hice como mi compañero A1, decidí aplicar la formula del área y cada vez que hacia una doblez media con la regla”

N: ¿Hiciste algo para el perímetro?

Estudiante A3: Contesta con voz temblorosa. “casi no entendí ese”

Posteriormente al espacio de socialización, el maestro aprovecha la intervención del estudiante A3 para invitar al grupo a implementar técnicas más sofisticadas. Esto se debe a que las técnicas que implican medir la hoja repetitivamente pueden proporcionar un margen de error en las respuestas esperadas. Además, el maestro sugiere que, durante la realización de próximas tareas matemáticas, se requiera la capacidad de comprender el proceso de abstracción. Asimismo, motiva a los estudiantes a proponer sus propias técnicas para la subtarea 2.1.3, correspondiente al cálculo del perímetro, ya que, a lo largo de la sesión, los estudiantes han centrado su atención únicamente en el cálculo del área de la superficie de la hoja.

- Tecnología matemática (θ^m) del estudiante A7 en la Subtarea 2.1.2.

$\boldsymbol{\theta^1}$**.** El estudiante a partir del análisis de resultados obtenidos determina una regla para calcular el área de la superficie de la hoja. Esta técnica puede ser expresada mediante de la siguiente manera:

$$A_n = \frac{A_{n-1}}{2}\ , donde\ An\ corresponde\ al\ \text{área}\ de\ la\ hoja\ para\ n\ doblez.$$

Si bien el estudiante determina la regla de forma recursiva, la expresión algebraica anterior retrata la esencia de esta.

- Tecnología creativa (θ_c) del estudiante A7 en la Subtarea 2.1.2.

$\boldsymbol{\theta_1}$. Con el fin de dar respuesta a la subtarea el estudiante propone una técnica novedosa para calcular el área de la superficie de la hoja para n-dobleces (F1)

$\boldsymbol{\theta_2}$. El estudiante identifica que a mayor número de dobleces el área disminuyes, específicamente en la mitad del área anterior.

La creatividad matemática en el desarrollo de esta subtarea se evidencia mediante la técnica empleada por el estudiante anterior, quien logra superar la barrera de concebir el área como un concepto exclusivo del aula de matemáticas para comprender y analizar el problema de manera integral. Asimismo, la ejecución de esta tarea fomenta la creación de nuevas técnicas para la siguiente subtarea, centrada en el cálculo del perímetro.

- Tecnología matemática (θ^m) del estudiante A7 en la Subtarea 2.1.3.

El estudiante intercambio técnicas e ideas durante el desarrollo de la sesión con el compañero A10, así mismo, en el espacio de socialización menciona que los resultados que aparecen en su tabla respecto al cálculo del perímetro corresponden a técnicas únicas de su compañero. Por lo tanto, no se evidencia actividad matemática propia de parte de este estudiante. La ausencia de una actividad matemática original impide que el componente creativo de esta subtarea se manifieste de manera evidente.

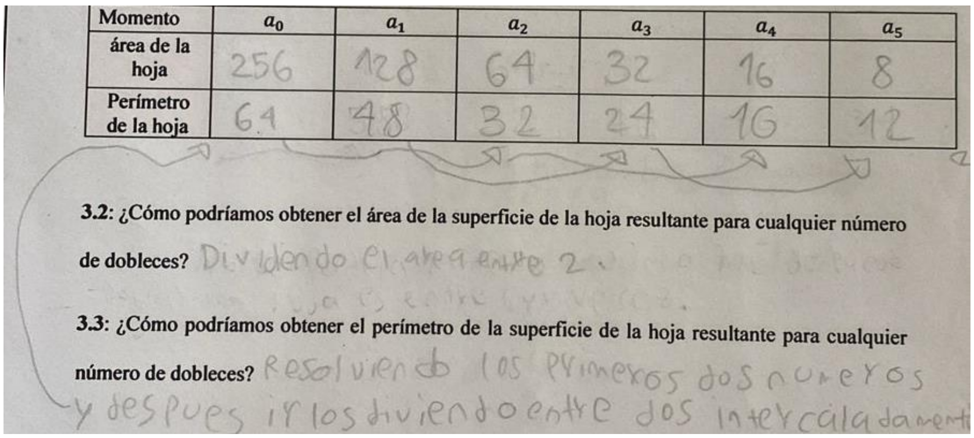
- *Técnica del estudiante A10 en la subtarea 2.1.2. y subtarea 2.1.3*

Paso 1. El estudiante a partir del momento de exploración de la tarea y trabajo con su técnica propuesta (M2 y M3) registra la solución a las subtareas planeadas.

Paso 2. El estudiante valida e implementa la técnica establecida en el espacio de socialización anterior, para el cálculo del área de la superficie de la hoja. Por lo tanto, el maestro centra su atención en la técnica empleada por el alumno en cuanto al cálculo del perímetro.

Figura 40

Producción de técnicas del estudiante A10 para la subtarea 2.1.2. y subtarea 2.1.3.



Momento	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
área de la hoja	256	128	64	32	16	8
Perímetro de la hoja	64	48	32	24	16	12

3.2: ¿Cómo podríamos obtener el área de la superficie de la hoja resultante para cualquier número de dobleces? Dividiendo el area entre 2.

3.3: ¿Cómo podríamos obtener el perímetro de la superficie de la hoja resultante para cualquier número de dobleces? Resolviendo los primeros dos numeros y despues ir los dividiendo entre dos intercaladamente

Nota: Registro de la técnica dado por el estudiante A10 para dar respuesta a las subtareas planteadas.

Paso 3. El estudiante registra los resultadas del perímetro respectivamente. En el primer doblez corresponde a 64 cm^2, mientras que, el quinto corresponde a 12 cm^2. Como se ilustra en la figura anterior.

Paso 4. El estudiante identifica un patrón similar al del cálculo, puesta que esta consiste en ir dividiendo el resultado anterior del perímetro entre dos. Sin embargo, esto solo sucede si se realiza de manera intercalada precisa el estudiante. Asimismo, el estudiante relaciona su técnica mediante flechas relacionan respectivamente el resultado que se obtiene al dividir el perímetro en dos.

Paso 5. El maestro al identifica en la técnica anterior la búsqueda por construir una regla de generalización para el cálculo del perímetro. Por lo que, procede a interactuar con el grupo de estudiantes acerca de esta técnica y así lograr dar solución a la subtarea 2.1.3.

N: Registra los resultados obtenidos por el estudiante en el tablero e invita a los estudiantes a analizar la tabla y ver lo que relación existe entre resultados obtenidos.

Estudiante A13: "El perímetro disminuye"

N: ¡Muy bien!, es un buen primer paso. Sin embargo, ¿necesitamos saber cómo disminuye, si existe alguno patrón que nos pueda ayudar"

Estudiante A2: "Profe, tenemos que ir restando 16"

N: ¿Están de acuerdo con afirmación de su compañero?

Estudiante A10: "No profe"

N: Expone que la técnica de restar 16 al resultado anterior del perímetro es válida hasta el tercer doblez de la hoja. Puesto que, al momento de restar 16 al resultado del perímetro de $a_3 = 32$, el resultado no corresponde al registro del cuarto doblez.

Estudiante A10: "Profe, para el perímetro debemos dividir en 2 el resultado de manera intercalada"

N: "Podrías explicarnos o darnos algún ejemplo"

Estudiante A10: "Sí profe" para $a_0 \rightarrow ningun\ doblez, el\ perimetro\ es = 64,$ $y\ en\ a_2 \rightarrow la\ hoja\ tiene\ dos\ dobleces\ y\ su\ resultdo\ = 64/2 = 32.$ Y lo mismo en toda la tabla profe.

Paso 6. Posteriormente a la intervención anterior, el maestro persuade a los estudiantes de que esta técnica constituye una solución adecuada para la subtarea 2.1.3. Cabe destacar que esta técnica se expresa de manera recursiva por parte del estudiante. En consecuencia, se enfatiza que, para validar una regla de generalización, se deben considerar al menos los cinco primeros términos del problema.

N: Para el grupo, aplicando la técnica anterior ¿Cuál es el perímetro correspondiente para $a_4 \rightarrow\ cuarto\ doblez$?

Estudiante A2: “Profe es 16, porque $32 \div 2\ = 16$”

N: “Excelente chicos”

Paso 7: Aunque los estudiantes reconocen que se debe dividir entre dos de forma intercalada para el cálculo del perímetro, no logran formalizar una regla de generalización que destaque la importancia de la paridad en el doblez.

- Tecnología matemática (θ^{m}) del estudiante A10 en la Subtarea 2.1.2.

$\boldsymbol{\theta^1}$**.** El estudiante promovió la regla de generalización adaptada por el compañero A7 e integró diversas ideas para desarrollar una nueva técnica en el cálculo del perímetro(M4) precisada en la siguiente subtarea.

- Tecnología creativa (θ_c) del estudiante A10 en la Subtarea 2.1.2.

No resulta adecuado destacar una manifestación de actividad creativa individual del estudiante A10 en la subtarea centrada en el cálculo del área. Sin embargo, es relevante mencionar que su colaboración con el compañero A7 contribuye al desarrollo de reglas recursivas que abordan parcialmente la respuesta definida en el análisis previo de esta investigación.

- Tecnología matemática (θ^{m}) del estudiante A10 en la Subtarea 2.1.3.

$\boldsymbol{\theta^1}$**.** El estudiante de manera recursiva logra establecer una regla para calcular el perímetro de la superficie de la hoja para cualquier número de dobleces, esta se puede representar de la siguiente manera:

$$P_n = \frac{P_n}{2}\ , donde\ Pn\ corresponde\ al\ perímetro\ \ de\ la\ hoja\ para\ n\ doblez.$$

Si bien, la regla anterior no parece ser la más apropiada, el estudiante enfatiza que para su correcto funcionamiento los resultados deben intercalarse entre sí. De esta manera, el estudiante, a partir de su recomendación, propone considerar tanto los dobleces pares como los impares en relación con el cálculo del perímetro. La siguiente interacción precisa la explicación de la técnica empleada por el estudiante A10, para convencer a grupo de estudiantes de la validez de esta.

N: "Muy bien", Chicos fíjense que más allá de que los resultados son intercalados, que podemos decir de manera más matemática. Es decir, fíjense que el doblez dos se relaciona con el doblez cuatro, el uno con el tres respectivamente y así sucesivamente.

Estudiante A10: "Profe, los pares con los pares y los impares con los impares"

N: ok, podrías explicarte un poco mas

Estudiante A10: (El estudiante se dirige al tablero para realizar la explicación de su técnica)

"mire profe, nosotros dijimos que intercalado, pero si miramos bien, el doblez 1,3 y 5 están relacionados, y estos son números impares, y los dobleces 2,4 son los números pares"

N: "Excelente, sigamos"

Es a partir de este espacio de socialización que se consolida como técnica para calcular el perímetro superficial de hoja de la siguiente manera.

$$PK_n = \frac{P_{k-1}}{2}$$

$Donde\ PK_n\ corresponde\ a\ los\ terminos\ pares\ de\ la\ secuencia\ y\ el\ P_{k-1}\ es\ el\ termino\ par\ anterior.$

$$PI_n = \frac{P_{I-1}}{2}$$

$Donde\ PI_n\ corresponde\ a\ los\ terminos\ impares\ de\ la\ secuencia\ y\ el\ P_{I-1}\ es\ el\ termino\ impar\ anterior$

- Tecnología creativa (θ_c) del estudiante A10 en la Subtarea 2.1.3.

$\boldsymbol{\theta_1}$. El estudiante elabora una nueva regla que permite calcular el perímetro de la hoja para n-dobleces (F1).

$\boldsymbol{\theta_2}$. A través del reconocimiento de la incidencia de términos pares e impares en la secuencia para el cálculo del perímetro. El grupo logra optimizar la técnica inicial (F2) mediante un espacio de socialización guiado por las orientaciones del maestro.

A lo largo de la sesión, se han experimentado incidentes comunes en un aula regular. La prolongada ausencia del maestro ha ocasionado que esta sesión sea la más extensa en el proceso de implementación. Como resultado, estas subtareas se han posicionado como las más desafiantes para todo el grupo de trabajo. Las intervenciones del maestro guían el curso hacia el desarrollo verbal o recursivo de las reglas preconcebidas. Además, de que cuando algún estudiante no comprende la subtarea planteada, intenta pasar a la siguiente y registra las técnicas desarrolladas.

Sin embargo, las técnicas desarrolladas por los estudiantes A7 y A10 demuestran su capacidad para superar las dificultades presentadas durante la clase en la búsqueda de soluciones para cada una de las subtareas, utilizando un enfoque de matemática creativa. Finalmente, el maestro concluye la sesión agradeciendo el compromiso de los estudiantes y resaltando la importancia de diseñar técnicas desde diversas perspectivas para abordar situaciones problemáticas que implican el componente de abstracción en el estudio de secuencias matemáticas y figuras.

6.2.2 Tarea 2.2

El desarrollo de esta tarea corresponde a la cuarta sesión de trabajo, el tiempo empleado para la sesión fue de 50 minutos. Así mismo, el contexto de esa tarea se encuentra asociado a la situación problemática doblado de una hoja de papel.

Ahora bien, esta tarea se define a partir de la siguiente pregunta**. Determinar el grosor generado por el doblado de la hoja para cualquier número de dobleces**. A raíz de esta, surgen las preguntas presentadas en el análisis a priori constituidas como subtareas.

Subtarea 2.2.1: Supongamos que tu hoja mide 1 milímetro de grosor. Si la doblamos una vez, ¿cuál es ahora el grosor generado por este doblez?

Subtarea 2.2.2: Supongamos que la doblamos 5 veces, ¿cuál será ahora el grosor generado por este doblez?

Subtarea 2.2.3¿Cómo podríamos obtener el grosor generado por el doblado de la hoja para cualquier doblez?

Es fundamental destacar la aparición de técnicas novedosas por parte de los estudiantes al enfrentar las diferentes subtareas planteadas. Asimismo, el grupo de estudiantes presenta técnicas similares entre sí. Y, a través del intercambio de estas en el espacio de socialización, se logra construir una regla algebraica robusta para calcular el grosor de una hoja de papel mediante las diferentes reglas recursivas. A continuación, se presentan las técnicas y tecnologías del estudiante A7 como representación grupal.

- *Técnica del estudiante A7 en la subtarea 2.2.1, 2.2.2. y subtarea 2.2.3*

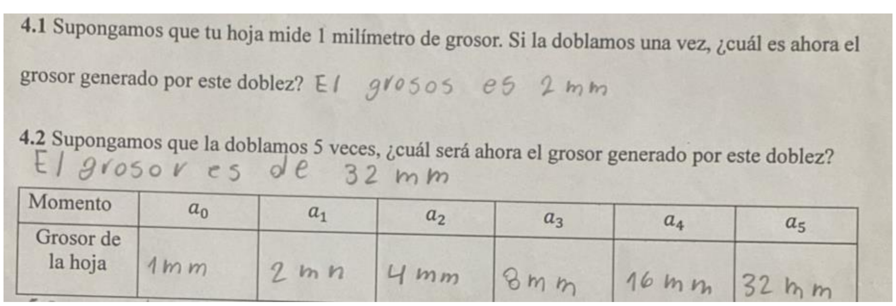
Paso 1. El estudiante analiza la tarea y, partiendo de la suposición inicial de que la hoja tiene un grosor de 1 mm, procede a experimentar utilizando el material manipulable (M1 y M2). En consecuencia, registra el grosor inicial de la hoja sin dobleces y comienza a desarrollar las técnicas necesarias para resolver esta subtarea.

Paso 2. El estudiante registra en la tabla el resultado del grosor correspondiente al número de dobleces realizados, resultante de la técnica empleada en (M2), logrando así respuesta a la subtarea 2.2.1 y 2.2.2.

Paso 3. El estudiante registra el listado en el que relaciona el número de dobleces con el grosor resultante. $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 8, 4 \rightarrow 16, 5 \rightarrow 32$

Figura 41

Producción de técnicas del estudiante A7 para la subtarea 2.2.1. y subtarea 2.2.2



4.1 Supongamos que tu hoja mide 1 milímetro de grosor. Si la doblamos una vez, ¿cuál es ahora el grosor generado por este doblez? El grosos es 2 mm

4.2 Supongamos que la doblamos 5 veces, ¿cuál será ahora el grosor generado por este doblez?
El grosor es de 32 mm

Momento	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Grosor de la hoja	1mm	2 mn	4 mm	8 mm	16 mm	32 mm

Nota: Registro de resultados posteriores al momento de exploración de técnica (M2).

Paso 4. El estudiante identifica diversas técnicas para calcular el grosor de la hoja. La primera consiste en multiplicar por dos el resultado obtenido en el doblez anterior. Además, plantea también la posibilidad de sumar 2 de manera progresiva para determinar el grosor de la hoja como una segunda técnica. Si bien, las técnicas presentadas corresponden a cierto patrón aditivo y multiplicativo, una de ellas puede concebirse como una optimización de la otra.

Estudiante A7: “Profe, yo me di cuenta que en vez de seguir haciendo dobleces se debe ir multiplicando por dos ó se puede sumar el mismo número dos veces”

Estudiante A8: “Sí profe, yo también me di cuenta de lo mismo”

Estudiante A7: “Profe tambien me di cuenta que para devolvernos en la tabla lo podemos hacer dividiendo entre 2”

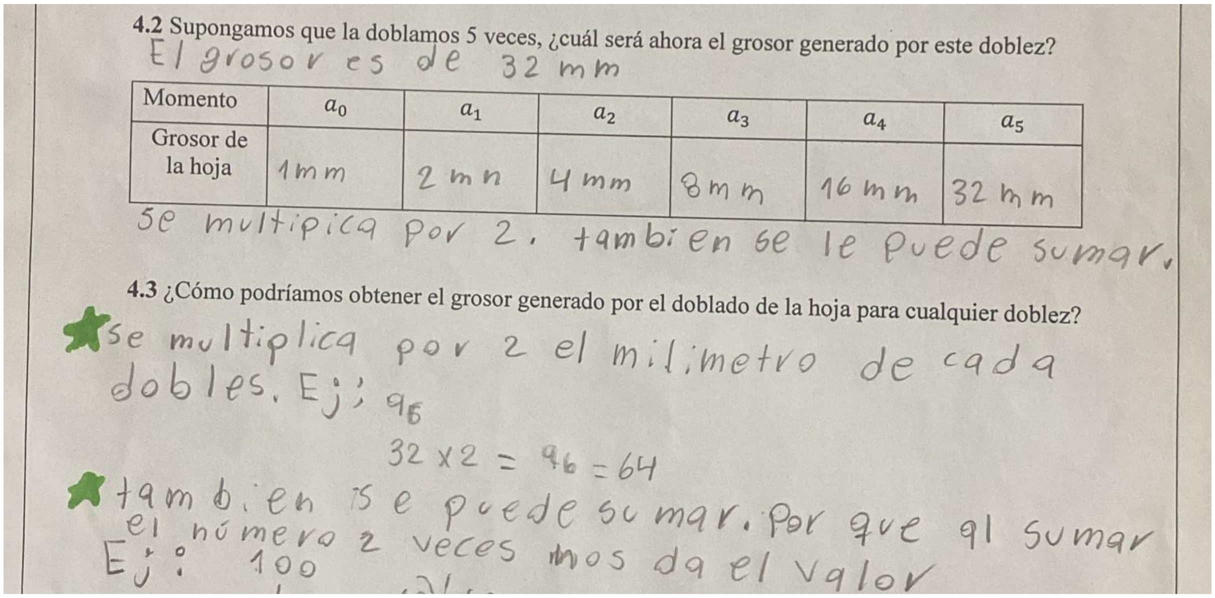
Paso 5: El estudiante busca validar su técnica mediante la implementación de esta para calcular el grosor de la hoja para cualquier doblez (M3). Específicamente, en la guía de trabajo se evidencia que el estudiante emplea su técnica para calcular el grosor de la hoja correspondiente a_6. Por ende, el estudiante registra:

$$a_6 = 32 \times 2 = 64mm$$

Este registro matemático se precisa en la guía de trabajo realizada por la estudiante presentada en la siguiente figura.

Figura 42

Producción de técnicas del estudiante A7 para la subtarea 2.2.3.



4.2 Supongamos que la doblamos 5 veces, ¿cuál será ahora el grosor generado por este doblez?

El grosor es de 32 mm

Momento	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Grosor de la hoja	1mm	2 mn	4 mm	8mm	16 mm	32 mm

se multipica por 2. tambien se le puede sumar.

4.3 ¿Cómo podríamos obtener el grosor generado por el doblado de la hoja para cualquier doblez?

se multiplica por 2 el milimetro de cada dobles. Ej: a_6

32 x 2 = a_6 = 64

tambien se puede sumar. Por que al sumar el número 2 veces nos da el valor

Ej: 100

Nota: Registro de resultados posteriores al momento de trabajo con la técnica (M3), para la solución de la subtarea 2.2.3.

- Tecnología matemática (θ^m) del estudiante A7 en la Subtarea 2.2.3.

$\boldsymbol{\theta^1}$**.** El estudiante determina una regla recursiva para el grosor de la hoja expresada de manera escrita y verbal como se precisó anteriormente.

$$a_{n+1} = 2a_n\ , donde\ a_n\ corresponde\ al\ resultado\ del\ grosor\ anterior$$

$\boldsymbol{\theta^2}$**.** Si bien, la multiplicación se considera una adición abreviada, el estudiante considera propio de la resolución de la subtarea. La siguiente técnica recursiva registrada en la hoja de trabajo.

$$a_{n+1} = a_n \times a_n$$

Las tecnologías matemáticas presentadas por el estudiante A7 guardan una relación entre sí, siendo posible determinar que una es el resultado de la optimización de la otra. Sin embargo, no es adecuado descartar ninguna de ellas, ya que el estudiante aún no ha considerado la potencia matemática como técnica recursiva para resolver la subtarea planteada, tal como se menciona en el análisis a priori. Por lo tanto, el maestro las considera óptimas con el fin de orientar al grupo hacia la producción de una nueva técnica, fruto de la optimización de las dos anteriores, mediante un espacio de socialización contemplado en la tecnología creativa.

- Tecnología creativa (θ_c) del estudiante A10 en la Subtarea 2.1.3.

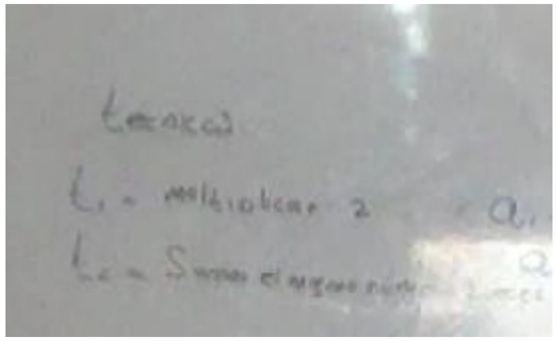
$\boldsymbol{\theta_1}$. El estudiante elabora una nueva regla que permite calcular el grosor de la hoja para n-dobleces (F1).

$\boldsymbol{\theta_2}$. El estudiante logra discernir una técnica derivada de la optimización de una técnica inicial (F2) gracias a su comprensión y relación entre un patrón aditivo y multiplicativo en el contexto de la situación problemática.

A diferencia de las subtareas presentadas en la sesión anterior, la manifestación de actividad matemática creativa resulta más fructífera en esta segunda tarea. El maestro, reconoce el avance del estudiante en la técnica esperada para la formulación de la regla de generalización que permite calcular el grosor de la hoja para n dobleces. En consecuencia, procede a orientar un espacio de socialización con el objetivo de optimizar y validar esta técnica en grupo. Para ello, el maestro registra las técnicas del estudiante A7 y los resultados obtenidos en la tabla de registro detallados en la siguiente imagen.

Figura 43

Registro y validación de técnicas del estudiante A7 para la subtarea 2.2.3.



Nota: Momento tecnológico de validación y trabajo con las técnicas presentada para la solución de la subtarea 2.2.3.

N: ¿Es posible calcular el grosor correspondiente a 100 dobleces con alguna de las técnicas anteriores?

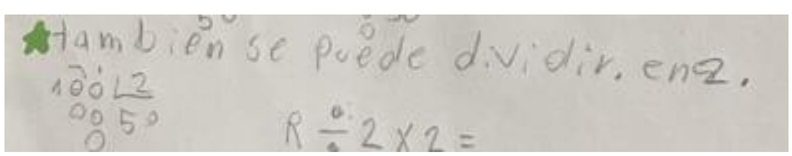
Estudiante A2: "Sí profe, podemos seguir haciendo la tabla y encontrar el resultado"

N: (Ok), ¿pero si tuvieran que contestar en un pequeño límite de tiempo?

Estudiante A7: "Profe podemos dividir 100 entre 2¨, particularmente me di cuenta de que, para encontrar el valor anterior, es decir para devolverme, tenía que dividir el resultado de la tabla entre dos y para encontrar el siguiente multiplicábamos.

Figura 44

Intervención del estudiante A7 para la subtarea 2.2.3.



Nota: El estudiante plantea dicha regla recursiva para calcular el grosor respecto a_{100}

N: ¿Podrías brindarnos un ejemplo más específico de tu técnica?

Estudiante A7: Es que profe cuando tenía los datos en la tabla me di cuenta de que si me quería devolver se podía dividir entre 2. Por ejemplo: “El grosor del tercer doblez es 8 y si quería saber el grosor para el segundo doblez tenía $8 \div 2 = 4$”.

Posteriormente a la intervención anterior, el maestro señala que, aunque la técnica es adecuada para el propósito del estudiante, no responde a la pregunta planteada sobre el grosor de la hoja después de 100 dobleces. Por lo tanto, el maestro, mediante la validación de las técnicas anteriores, proporciona un nuevo espacio de interacción en búsqueda de la construcción de la regla de generalización.

N: “Chicos, es evidente que multiplicar por dos es una técnica correcta. Sin embargo, así como la multiplicación es la representación abreviada de adición existe también cierta operación matemática que abrevia la multiplicación”

Estudiante A4: “La potencia profe”

N: (A lo que el maestro responde con un gesto que sí).

Estudiante A4: “Si tenemos una técnica de multiplicar por dos y en la otra debemos sumar el mismo número dos veces, entonces la potencia nos sirve”

N: Plantea en el tablero la siguiente expresión, con el fin de que los estudiantes alcancen la regla de generalización:

$$2 \times 2 =$$

$$2 \times 2 \times 2 =$$

N: ¿Respecto al operador de potencia cual serían los resultados anteriores?

Estudiante A2: Los resultados son $2^2 = 4\,y\ \ 2^3 = 8$

Estudiante A10: “Profe, esos resultados corresponden al grosor del segundo doblez y tercer doblez”

N: “Muy bien”, por lo tanto ¿Qué quiere decir el 2 en la expresión de la potencia y el exponente”

Estudiante A6: “Profe, el dos sale de la técnica de que se multiplicaba por dos a medida que avanzaba y el exponente es para el número de dobleces”

N: Excelente, entonces ahora si me pueden expresar el resultado del grosor respecto a 100 dobleces:

Estudiante A4: “Profe seria 2 elevado a la 100, que es un resultado muy grande”

La intervención anterior concluye el espacio de interacción. Es evidente que, a lo largo de la sesión, los alumnos potencian las técnicas (F2), hasta alcanzar la solución definida bajo el marco del análisis a priori. Aunque el proceso está acompañado por el maestro, son los estudiantes, mediante el intercambio de ideas, quienes construyen reglas recursivas para las diferentes tareas y subtareas planteadas.

Finalmente, la importancia de movilizar las técnicas de los estudiantes a incluir más que las cuatro operaciones aritméticas básicas, consiste en que en la situación problemática triángulo de Sierpiński plantea ciertos elementos en común. Por lo tanto, desde el enfoque tecnológico matemático y creativo resulta interesante direccionar a los estudiantes frente estas herramientas matemáticas para la sofisticación de sus técnicas y adaptación de estas en una nueva tarea matemática.

6.3 Análisis a posteriori de la situación problemática 3: triángulo de Sierpiński

El conjunto de tareas y subtareas en esta situación problemática resulta esencial para fomentar el talento matemático y la creatividad de los estudiantes. Dicha situación problemática se implementa al final del proceso de inmersión debido a la relación con las técnicas y tecnologías desarrolladas en sesiones previas. Por lo tanto, los espacios de socialización e intercambio de técnicas y tecnologías se convierten en herramientas fundamentales para evidenciar el progreso de los estudiantes en relación con todas y cada una de las situaciones problemáticas.

Por otra parte, el desarrollo de estas dos sesiones contempla una dinámica de trabajo grupal con el objetivo de que los estudiantes exploren e intercambien técnicas propias para la resolución de las tareas. Además, el estudio de la tarea permite apreciarla desde diferentes ángulos; específicamente, la actividad del triángulo de Sierpiński articula tanto una perspectiva geométrica como algebraica, lo que permite a los estudiantes combinar ambas perspectivas o enfocarse en solo una de ellas. Asimismo, los estudiantes mantienen las mismas duplas de trabajo tanto para la sesión 5 como para la sesión 6.

6.3.1. Tarea 3.1

El desarrollo de esta sesión conto con una duración 60 minutos, de estos 10 minutos iniciales comprenden una orientación del maestro frente a la contextualicen del triángulo de Sierpiński y la importancia de este para la comunidad matemática. Así mismo, invita a los estudiantes a mantener el orden durante los grupos de trabajo, posteriormente a la intervención anterior el grupo en los siguientes 30 minutos realiza la exploración y desarrollo de técnicas frente a la tarea para finalizar con un espacio de socialización de 20 minutos en el que se intercambian tecnologías y técnicas diseñadas por diferentes duplas de trabajo, así como la potenciación de estas.

Ahora bien, esta tarea se define a partir de la siguiente pregunta: **Determinar cómo cambia la cantidad de triángulos al construir el Triángulo de Sierpiński**. A raíz de esta, surgen las preguntas presentadas en el análisis a priori constituidas como subtareas,

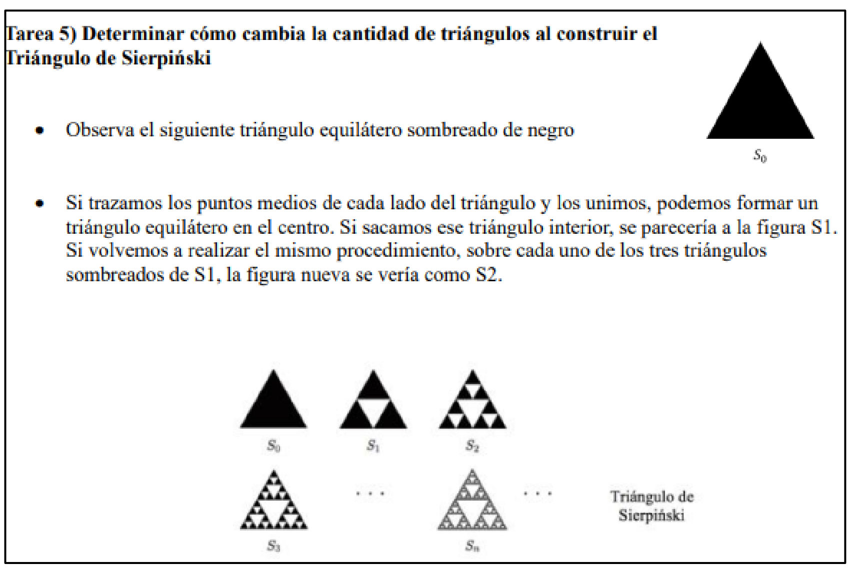
Subtarea 3.1.1: Completar la siguiente tabla hasta donde te sea posible.

Subtarea 3.1.2: Imagina que aplicas el proceso de construcción hasta obtener el Triángulo de Sierpiński, ¿qué pasa con la cantidad de triángulos?

Así mismo, la manera en que se presenta la situación problemática al estudiante se percibe en la siguiente figura

Figura 45

Situación problemática para el desarrollo de la tarea 3.1



Nota: La figura anterior representa el contenido registrado en la guía de trabajo diseñada para los estudiantes. Esta Tomado de Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad, por Z. Barraza (p. 105), 2020.

En el primer momento de clase (M1) el maestro con el fin de movilizar conceptos propios del aula regular de clase y prever la comprensión de la tarea planteada, desarrolla un pequeño espacio de socialización.

N: ¿Alguno de ustedes sabe que es un triángulo equilátero?

Estudiante A2 y A3: "El que tiene los tres lados iguales"

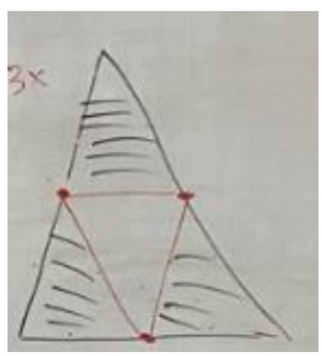
N: El maestro invita a los estudiantes que lean la segunda instrucción presentada en su guía de trabajo, posteriormente pregunta. ¿Saben que son los puntos medios?

Grupo: "Profe, son la mitad de cada lado"

N: (Exacto), Procede a realizar la figura de un triángulo equilátero en el tablero junto sus puntos medios y revelar S_1 como se precisa en la siguiente figura.

Figura 46

Representación del maestro para construir S_1



Nota: La figura anterior representa la construcción de S_1 a partir de la interacción grupa.

A continuación, se presentan las técnicas y tecnologías de las parejas X y W. La primera de estas corresponde a los estudiantes A8 y A4, mientras la segunda conformada por los estudiantes A7 y A12.

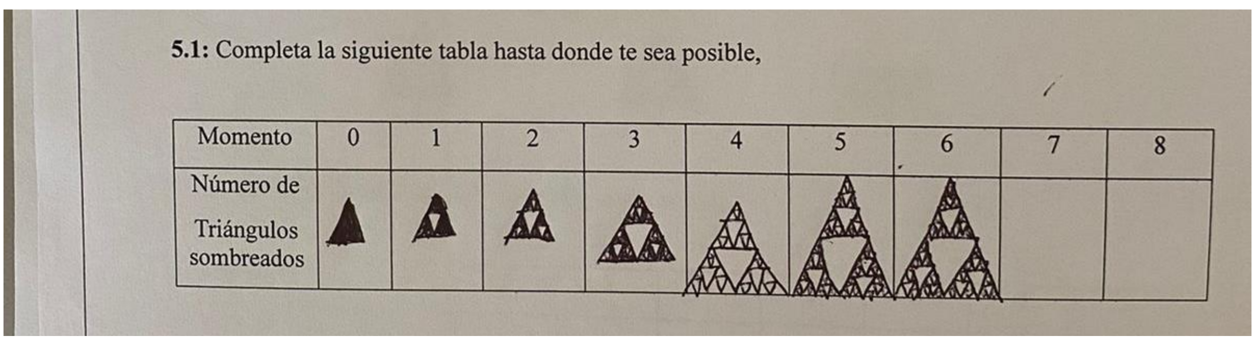
- *Técnica de la pareja X en la subtarea 3.1.1. y subtarea 3.1.2.*

Paso 1. La pareja X registra inicialmente en la tabla los resultados dada en la información de numero de triángulos ($S_0 = 1,\ S_1 = 3,\ S_2 = 9$).

Paso 2. Respecto al momento de exploración la pareja de estudiantes considera prolongar la técnica de dibujo precisada por la información de la tarea y registrar así los resultados frente al cambio en el número de triángulos sombreados. La siguiente figura ilustra la implementación de esta para $S_3, S_4, S_5\ y\ S_6$ respectivamente.

Figura 47

Producción de técnica de dibujo de la dupla X para la subtarea 3.1.1. y 3.1.2.



5.1: Completa la siguiente tabla hasta donde te sea posible,

Momento	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de Triángulos sombreados									

Nota: Registro de resultados posteriores al momento de exploración de técnicas (M1 y M2).

Paso 3: La pareja mediante la técnica de dibujo no consigue completar toda la tabla, en consecuencia, el maestro invita a que analicen lo que sucede dentro la secuencia desde un enfoque geométrico y algebraico, en búsqueda de que alumno de luces de un posible patrón involucrado en la secuencia del triángulo de Sierpiński.

Paso 4: La pareja X registra en la tabla el resultado para $S_4 = 27$. Sin embargo, identifican que su técnica de dibujo se hace imprecisa para continuar completando l tabla. Por lo que el maestro interviene los estudiantes mediante la siguiente pregunta.

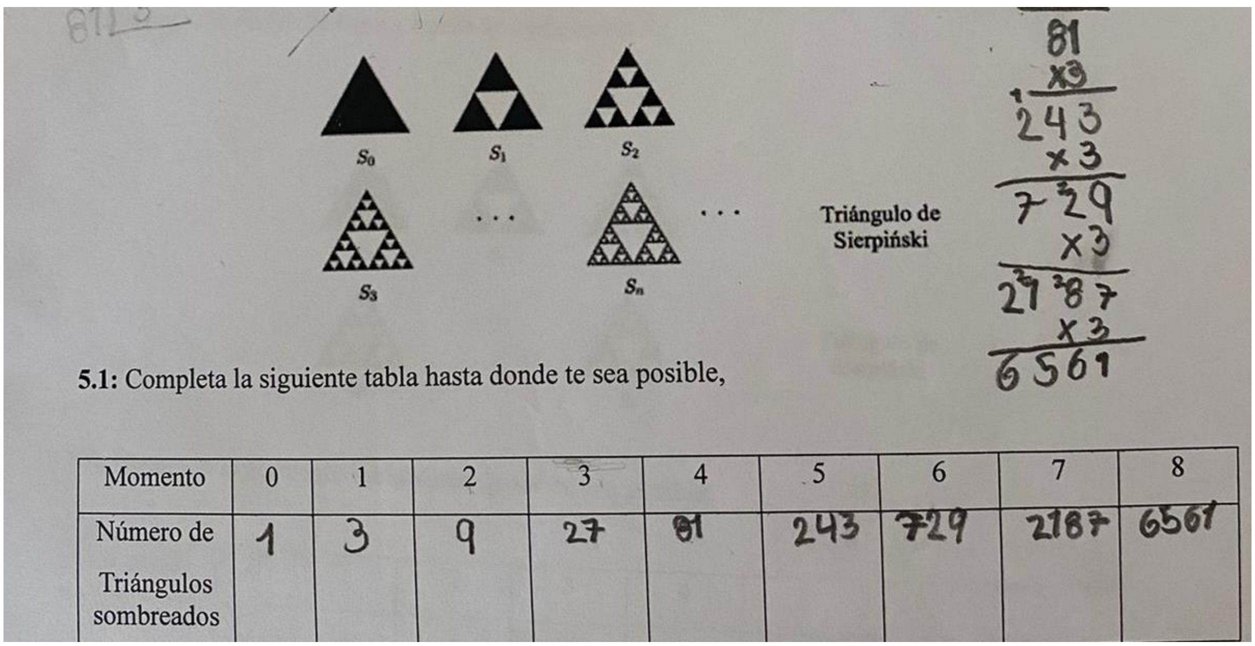
N: ¿Mientras utilizaron su técnica de dibujo consiguieron identificar algo con los triángulos sombreados?

Estudiante [A8 y A4] responden que mediante los dibujos no lograron identificar nada. Sin embargo, mediante el comportamiento de la tabla para los primeros casos, vemos que se multiplica el resultado por tres como sucedía en clases pasadas.

Paso 5. La pareja X posterior a la interacción con el maestro cambian su técnica de dibujo por el patrón multiplicativo encontrado, logrando registrar así por completo la tabla correspondiente a la subtarea 3.1.1.

Figura 48

Producción de segunda técnica por la dupla X para la subtarea 3.1.1.

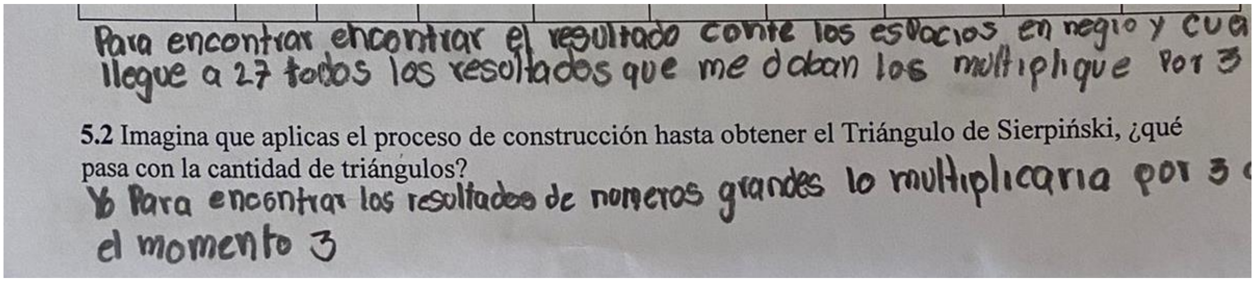


Nota: La optimización de la técnica de dibuja precisada en el momento de exploración (M2), posibilita la movilización de técnicas contempladas en tareas anteriores (M4)

Paso 6. La pareja X en cuanto a la resolución de la subtarea 3.1.2. constituyen una regla recursiva como se precisa en la siguiente figura. Así mismo, el resultado de esta relaciona las dos técnicas implementadas por los estudiantes durante el momento de exploración y trabajo con las técnicas.

Figura 49

Producción de técnica única por la dupla X para la subtarea 3.1.2.



Para encontrar encontrar el resultado conte los espacios en negro y cua
llegue a 27 todos los resultados que me daban los multiplique por 3

5.2 Imagina que aplicas el proceso de construcción hasta obtener el Triángulo de Sierpiński, ¿qué pasa con la cantidad de triángulos?

Yo Para encontrar los resultados de nomeros grandes lo multiplicaria por 3
el momento 3

Nota: Registro recursivo por parte de la dupla X para la solución de la subtarea planteada

Paso 6. Los estudiantes comunican sus resultados al maestro, con el fin de validad los resultados surgidos de la producción de técnicas y tecnologías únicas.

- Tecnología matemática (θ^{m}) de la dupla X en la Subtarea 3.1.1 y 3.1.2.

$\boldsymbol{\theta}^{1}$. Si bien la consecución de la regla recursiva trae consigo la implementación de una técnica de dibujo y posteriormente la identificación de un patrón multiplicativo dentro la secuencia del triángulo de Sierpiński. Es posible expresar dicha regla recursiva para calcular el total de triángulos sombreados mediante la siguiente expresión matemática.

$$T_{n+1} = 3 \times T_n \text{, } donde\ T_n\ corresponde\ al\ total\ de\ triangulos\ anteriores\ de\ la\ secuencia.$$

- Tecnología creativa (θ_c) de la dupla X en la Subtarea 3.1.1 y 3.1.2.

$\boldsymbol{\theta_1}$. La dupla X logra establecer una técnica única (F1) para el cambio en el total de triángulos sombreados para el triángulo de Sierpiński.

$\boldsymbol{\theta_2}$. La producción de la técnica única es producto de la optimización de la técnica de dibujo precisada inicialmente por la dupla de trabajo. Así mismo, la segunda técnica centrada en el incremento del número de triángulos sombreados a partir del análisis de los resultados obtenidos por el patrón figural, constituyendo así una técnica recursiva como se precisó anteriormente.

El manifestó de la actividad matemática creativa por parte de esta dupla para la resolución de las subtareas planteadas es imponente. Si bien, la producción de la técnica única toma un rol importante respecto al enfoque creativo. Inicialmente, la implementación de diversas técnicas bajo diferentes ángulos disciplinares de la matemática (F3). Así mismo, la capacidad de optimizar técnicas iniciales (F2), es un accionar recurrente de estos estudiantes, por lo tanto, el maestro congracia los estudiantes previos al momento de socialización.

- *Técnica de la pareja W en la subtarea 3.1.1. y subtarea 3.1.2.*

Aunque la dupla X refleja la técnica adoptada por la mayoría del grupo, la dupla W realiza un trabajo interesante en la creación de una técnica única para el desarrollo de la subtarea 3.1.2.

Paso 1. La pareja W registra inicialmente en la tabla los resultados dada en la información de numero de triángulos ($S_0 = 1,\ S_1 = 3,\ S_2 = 9$).

Paso 2. A diferencia de la pareja anterior, esta dupla no realizo inicialmente una técnica de dibujo, puesto que, con el registro inicial de la tabla afirman que “el número de triángulos sombrados aumenta multiplicando por 3”

N: ¿Cuál fue la técnica empleada para completar tan rápido la tabla”

W: “Fácil profe, nos dimos cuenta de que se estaba multiplicando por tres con los primeros datos”

N: (Ok). ¿Por qué les fue tan sencillo”

W: “Profe, esta tarea se parece a la que hicimos la clase pasada”

N: ¿Podrías recordarme la tarea”

W: “Profe la tarea del grosor de la hoja, la de la clase pasada, por eso nos dimos cuenta de que en esta pasa lo mismo pero multiplicando por 3”

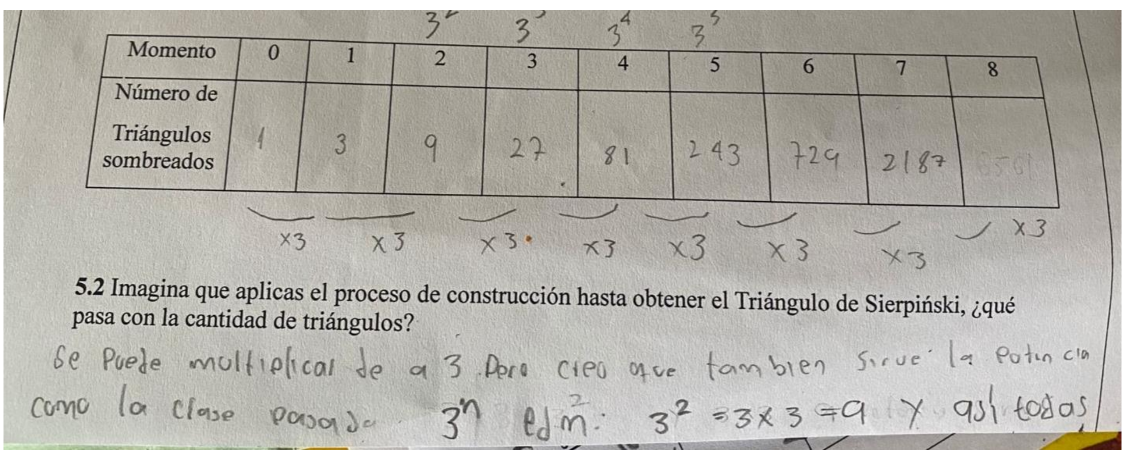
N: “Muy bien, pero si se parece a la actividad del grosor” ¿no creen que podemos seguir avanzando?

W: Específicamente el estudiante A7 responde “Profe, podemos utilizar la potencia y así lo tenemos para todas”

Paso 3. El maestro se retira y permite que la dupla constituya su nueva técnica matemática, esta se aprecia en la siguiente figura

Figura 50

Producción de técnica única por la dupla W para la subtarea 3.1.2.



Momento	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de Triángulos sombreados	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561

5.2 Imagina que aplicas el proceso de construcción hasta obtener el Triángulo de Sierpiński, ¿qué pasa con la cantidad de triángulos?

Se Puede multiplicar de a 3 Pero creo que tambien sirve la Potencia como la clase pasada 3^n ed m: $3^2 = 3 \times 3 = 9$ y así todas

Nota: Registro recursivo por parte de la dupla X para la solución de la subtarea planteada

Paso 4. De manera análoga a la optimización de técnicas realizada por la dupla X, la dupla W logra mejorar su técnica inicial centrada en el patrón multiplicativo. Esta optimización les permite alcanzar un nivel de rigurosidad superior al presentado en las sesiones anteriores. Como resultado, la dupla W produce una nueva técnica apoyada en las tecnologías presentadas en la tarea 2.2, tal como se observa en el registro de la videograbación.

- Tecnología matemática (θ^m) de la dupla W en la Subtarea 3.1.2.

$\boldsymbol{\theta^1}$**.** Es posible expresar la primera regla recursiva por la dupla W para calcular el total de triángulos sombreados mediante la siguiente expresión matemática.

$$T_{n+1} = 3 \times T_n\, , donde\ T_n\ corresponde\ al\ total\ de\ triangulos\ anteriores\ de\ la\ secuencia.$$

$\boldsymbol{\theta^2}$. Mediante la interacción con el maestro la dupla W consagra la siguiente regla centrada en el operador matemático de la potencia

$$T_n = 3^n, donde\ n\ corresponde\ al\ termino\ de\ la\ secuencia$$

- Tecnología creativa (θ_c) de la dupla W en la Subtarea 3.1.2.

$\boldsymbol{\theta_1}$. La dupla W logra también establecer una técnica única (F1) para el cambio en el total de triángulos sombreados para el triángulo de Sierpiński

$\boldsymbol{\theta_2}$. Particularmente, la dupla W incorpora la adaptación de técnicas desarrolladas en sesiones anteriores (F4), específicamente la implementación del operador de potencia, que se había constituido para calcular el grosor de una hoja cuadrada, ahora adaptado para calcular el número de triángulos sombreados.

A partir de esta manifestación de actividad matemática creativa, se destaca la importancia de que el grupo está en capacidad de adaptar técnicas provenientes de un contexto distinto al de la tarea a desarrollar. Así mismo el maestro interpreta el resultado de las tecnologías matemáticas y creativas propias de la identificación por parte de los estudiantes al tipo de tarea precisa (M5).

Si bien el desarrollo de la sesión se caracteriza por el trabajo en grupo y las intervenciones ocasionales del maestro, es importante destacar que este enfoque se mantendrá para las siguientes tareas de la situación problemática a fin de asegurar su desarrollo satisfactorio. Sin embargo, la siguiente tarea en particular requiere un acompañamiento mayor por parte del maestro, especialmente en la producción de técnicas y tecnologías única.

6.3.2 Tarea 3.2 y 3.3

Bajo el marco del análisis a priori, esta situación problemática contempla un total de tres tareas. Sin embargo, debido a que la institución solo pudo proporcionar seis sesiones, se decidió combinar la segunda y tercera tarea. Como resultado, el análisis se enfoca únicamente en la tarea 3.2, dada su complejidad y para evitar un desarrollo superficial de ambas. Asimismo, se destaca un momento final durante la sesión para realizar un pequeño compartir y agradecer a los estudiantes por su dedicación durante las dos semanas de trabajo.

El desarrollo de esta tarea se llevó a cabo durante la sexta y última sesión de trabajo, la cual tuvo una duración de 70 minutos. La dinámica de trabajo se mantuvo grupal, al igual que en la tarea anterior. Cabe destacar que esta sesión fue la más extensa de todas en términos de tiempo. Sin embargo, los últimos 15 minutos se dedicaron a un espacio de integración y compartición de experiencias, permitiendo a los estudiantes reflexionar sobre el transcurso de las sesiones de trabajo.

Ahora bien, esta tarea se define a partir de la siguiente pregunta**. Determinar cómo cambia el área que resulta de aplicar el proceso iterativo de construcción del Triángulo de Sierpiński.** A raíz de esta, surgen las preguntas presentadas en el análisis a priori constituidas como subtareas.

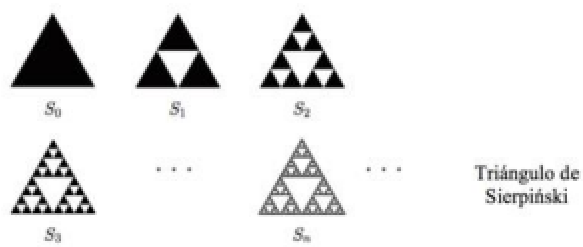
Subtarea 3.2.1: Complete la siguiente tabla hasta donde te sea posible.

Subtarea 3.2.2: Si seguimos haciendo el mismo procedimiento una y otra vez, ¿cuál es el área cuando tiendes al Triángulo de Sierpiński o cuando estás muy cerca de lograrlo?

Así mismo, la manera en que se presenta la situación problemática al estudiante se percibe en la siguiente figura

Figura 51

Situación problemática para el desarrollo de la tarea 3.2.



6.1.1. Si el área del triángulo S0 es igual 1 cm^2 , encuentra el área total sombreada de cada una de las figuras (S0, S1, S2, S3, …), hasta donde te sea posible.

Momento	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área sombreada	$1cm^2$								

6 1.2. Si seguimos haciendo el mismo procedimiento una y otra vez, ¿cuál es el área cuando tienes el Triángulo de Sierpiński o cuando estás muy cerca al triángulo?

Nota: La figura anterior representa el contenido registrado en la guía de trabajo diseñada para los estudiantes. Esta Tomado de Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad, por Z. Barraza (p. 105), 2020.

En el momento del primer encuentro con la tarea (M1) el maestro lee en voz alta cada una de estas, así mismo establece un pequeño espacio de interacción con el fin de movilizar conceptos matemáticos frente al cálculo del área sombreada, así mismo indica a los estudiantes a ubicarse junto al compañero con quien formo dupla de trabajo durante la clase anterior.

N: ¿Recuerdan el triángulo de Sierpiński?

Estudiante A9: “Claro profe, lo vimos la clase pasada”

N: “Así es”. Ahora esta nueva tarea es un reto para nosotros, pues debemos calcular el área sombreada para toda esta secuencia, ¿Alguno de ustedes tiene una idea de cómo hacerlo?

Estudiante A2: “Profe podemos utilizar la formula del área de un triángulo”

N: ¿Están seguros de que esta técnica les puede funcionar?

Estudiante A13: “Yo creo que no profe, porque pegunta es por el área sombreada”

N: (Correcto), Chicos observen cuantos triangulo tiene S_0

Grupo: “1 profe”

N: Ahora, ¿cuántos triángulos sombreados hay en S_0?

Grupo: “También uno profe”

N: “Muy bien”, además ¿Cuánto es el resultado del área sombreada para S_0?

Grupo: “1 cm^2”

N: “Entonces de acuerdo con lo que acabamos de hacer no les surgen algunas pistas de lo que puede ser el cálculo del área sombreada”

A continuación, se presentan las técnicas y tecnologías de las parejas H y W. La primera de estas corresponde a los estudiantes A2 y A11, mientras la segunda conformada por los estudiantes A7 y A12.

- *Técnica de la pareja H en la subtarea 3.2.1. y subtarea 3.2.2.*

Paso 1. En el momento de exploración con la tarea presentada (M1) la dupla indica lo siguiente al maestro.

H: “Profe si el área de S_0 es 1 y están involucrados el total de los triángulos y el total de los que están sombreados, entonces ellos son los que dan el área”

N: N: (A lo que el maestro responde con un gesto afirmativo).

H: Específicamente estudiante A2 menciona, “entonces lo que debemos hacer profe es multiplicar el total de triángulos sombreados con los del total general”

N: ¿Estás seguro?, para el caso de S_0 se cumpliría tu técnica

H: “Sí profe, porque $1 \times 1 = 1$”

N: Esta bien, pero piensa un poco lo siguiente, a medida que la secuencia avanza tú tienes triángulos sombreados más pequeños que con los que empezaste y este se ve un poco más blanco como ahí [Haciendo referencia a la figura 5] entonces, ¿el área aumenta o va disminuyendo”

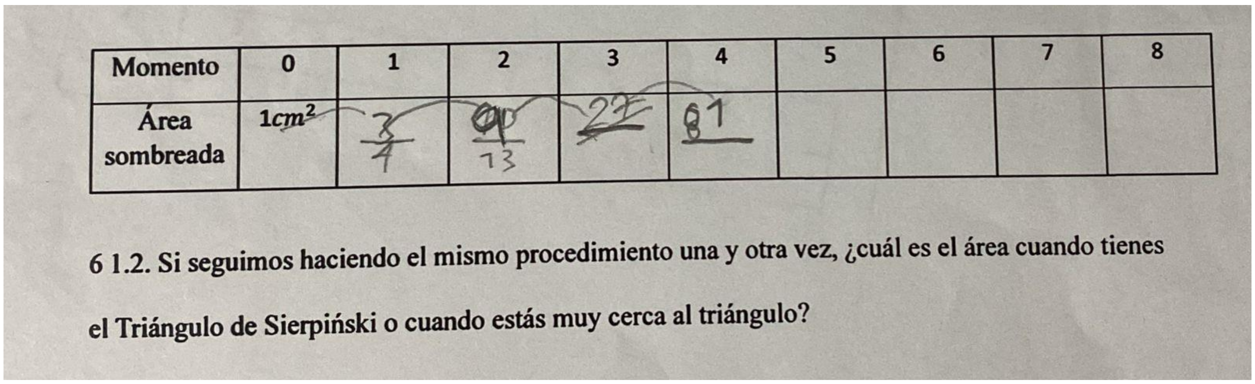
H: Explícitamente él estúdiate A11. “Profe se hace más pequeña porque casi ni se ve”

N: (Exacto), entonces ¿consideran que la técnica de multiplicar dará resultado?

Paso 2: Los estudiantes dentro el momento de exploración de técnicas (M2) inspeccionan diferentes maneras de calcular el área sombreada respecto a S_1 y S_2 sin conseguir éxito alguno como se precisa en la imagen.

Figura 52

Intento de Producción de técnica única por la dupla H para la subtarea 3.2.1 y para 3.2.2.



Momento	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área sombreada	$1cm^2$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{13}$	27	81				

6 1.2. Si seguimos haciendo el mismo procedimiento una y otra vez, ¿cuál es el área cuando tienes el Triángulo de Sierpiński o cuando estás muy cerca al triángulo?

Nota: Registro escrito por parte de la dupla H para la solución de la tarea planteada.

- Tecnología matemática (θ^m) de la dupla H en la Subtarea 3.2.1.y 3.2.2

   $\boldsymbol{\theta^1}$. Los estudiantes no logran construir una regla recursiva o algebraica

- Tecnología creativa (θ_c) de la dupla H en la Subtarea 3.2.1 y 3.2.2.

$\boldsymbol{\theta_1}$. Si bien el manifestó de la actividad creativa depende directamente de la actividad matemática, en la figura se precisa que la dupla busca abordar a partir de diferentes ángulos (F3) sin efectividad.

El resultado de la no consecución de una regla recursiva o algebraica refleja la complejidad de la tarea para el grupo de estudiantes. No obstante, dentro de la producción de técnicas únicas, se destaca el trabajo de una dupla de estudiantes, quienes logran un acercamiento significativo a la regla de generalización establecida en el análisis a priori de esta tarea.

- *Técnica de la pareja W en la subtarea 3.2.1. y subtarea 3.2.2.*

Paso 1. Los estudiantes dentro el momento de exploración de técnicas (M2) invitan al maestro para compartir algunas de sus ideas.

W: “Profe, según lo que nos explicó ahorita para calcular el área necesitamos la cantidad total de triángulos y la cantidad de triángulos sombreados”

N: Así es. Sin embargo, es tarea de ustedes saber con qué operación la deben relacionar”

W: “Profe yo creo que puede ser la multiplicación o división”

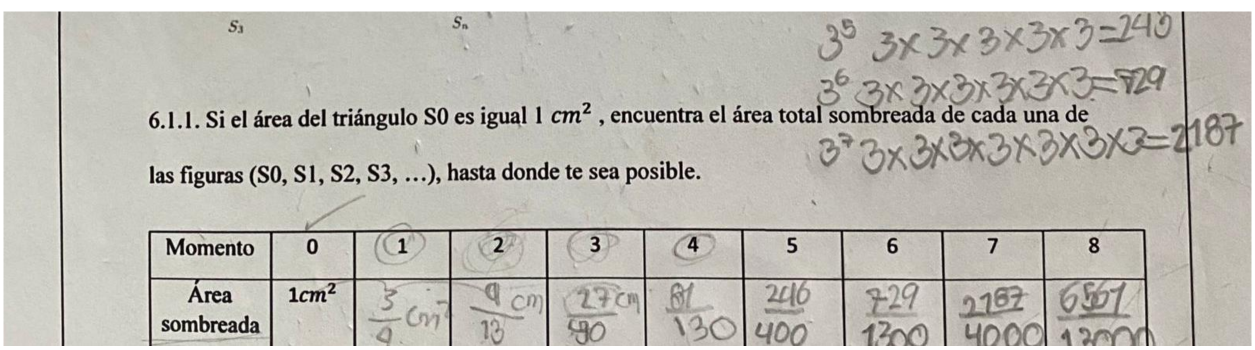
N: ¿Analiza el comportamiento de la secuencia a medida que avanzas aumenta tono sombreado?

W: “Disminuye profe”

Paso 2. Los estudiantes se ven motivados y registran en la tabla los resultados del cálculo del área como se precisa en la siguiente figura.

Figura 53

Producción de técnica única por la dupla W para la subtarea 3.2.1 y 3.2.2.


3^5 3x3x3x3x3=240
3^6 3x3x3x3x3x3=729
3^7 3x3x3x3x3x3x3=2187

6.1.1. Si el área del triángulo S0 es igual 1 cm^2 , encuentra el área total sombreada de cada una de las figuras (S0, S1, S2, S3, …), hasta donde te sea posible.

Momento	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área sombreada	$1cm^2$	$\frac{3}{4}$ cm²	$\frac{9}{13}$ cm	$\frac{27}{40}$ cm	$\frac{81}{130}$	$\frac{246}{400}$	$\frac{729}{1300}$	$\frac{2187}{4000}$	$\frac{6561}{13000}$

Nota: Registro de técnicas por parte de la dupla W para la solución de la tarea planteada.

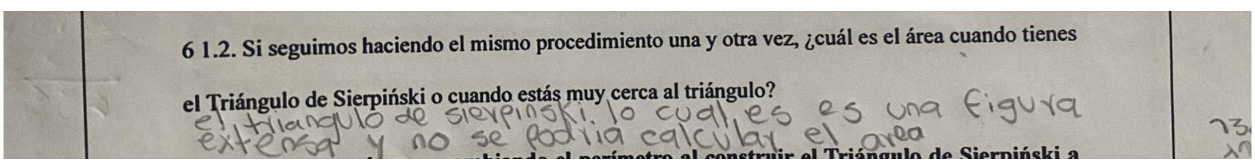
Paso 3. Los estudiantes identifican una regla recursiva para el cálculo del área sombreada mediante una fracción, en la que el numerador corresponde al total de triángulos sombreados, mientras, el denominador al total de todos los triángulos, la elección del operador división corresponde a la interacción previa entre la dupla de trabajo y el maestro.

Paso 4. Particularmente, se destaca la adaptación de técnicas para la solución de la subtarea 3.2.1. Esta acción se evidencia en la implementación de la regla de generalización desarrollada por la misma dupla de estudiantes para calcular el total de triángulos sombreados en la subtarea 3.1.2, que en este caso corresponde al numerador, aplicando la técnica $T_n = 3^n$.

Paso 5. Respecto a la solución de la subtarea 3.2.2 los estudiantes no logran dar claridad de una técnica recursiva o algébrica, esto se debe a su confusión frente al reconocer el triángulo de Sierpiński como una secuencia infinita, presentando así dificultades con el concepto de infinito el cual es completamente desconocido para los estudiantes.

Figura 54

Producción de técnica única por la dupla W para la subtarea 3.2.2.



Nota: Registro de técnicas por parte de la dupla W para la solución de la tarea planteada

- Tecnología matemática (θ^m) de la dupla W en la Subtarea 3.2.1.y 3.2.2

$\boldsymbol{\theta^1}$**.** El estudiante de manera recursiva logra establecer una regla para calcular el área del triángulo de Sierpiński Esta se pude expresar de la siguiente manera:

$$= A_n =$$

$$\frac{Ts}{T_t}\ , donde\ Ts\ corresponde\ a\ los\ triangulos\ sombreados\ y\ Tt\ a\ la\ totalidad\ final.$$

Aunque la técnica anterior captura parcialmente la esencia definida en el análisis a priori, se desvía ligeramente de la solución óptima para la subtarea. No obstante, se destaca el excelente trabajo de los estudiantes durante cada sesión de trabajo. Además, se percibe un notable avance en la producción de sus técnicas a lo largo del desarrollo de cada tarea y subtarea realizada.

- Tecnología creativa (θ_c) de la dupla W en la Subtarea 3.1.2.

$\boldsymbol{\theta_1}$. La dupla W logra también establecer una técnica única (F1) para el cambio en el área total del triángulo de Sierpiński

$\boldsymbol{\theta_2}$. Los estudiantes adaptan la técnica presentada en la subtarea 3.1.2, ya que presenta relación directa el cálculo del área del triángulo de Sierpiński, centrada en el total de triángulos sombreados para el numerador (F4). Además, la percepción desde los enfoques geométrico y algebraico (F3) evidencia el progreso en las técnicas creativas desarrolladas por los estudiantes.

Si bien, la técnica presentada por los estudiantes carece de precisión para facilitar el cálculo del área del triángulo de Sierpiński, es importante destacar la inconsistencia en los resultados obtenidos por la dupla W en el denominador. Esto se debe a un conteo incorrecto del total de triángulos en $S_0 = 1, S_1 = 4\ , S_2 = 16.$ Dicho error impide que los estudiantes establezcan con precisión una técnica que relacione el total de triángulos, como sí ocurrió en el caso del numerador, por lo que el maestro precisa un nuevo momento de interacción.

N: “Con respecto al denominador me podrían contar que hicieron”

W: “Profe para $S_0 = 1, S_1 = 4$ obtuvimos los resultados contando, entonces hicimos lo mismo con S_2 y todos los demás”

N: “Entonces tenemos un pequeño problema chichos, porque a mí resultado es 16”

W: “No profe, son 13”

N: Creo que están olvidan algo, “observen bien”

W: Específicamente el estudiante 12 responde “Creo que, si son 16, mira ahí [refiriéndose al tridente de triángulos que se forman con tres triángulos sombreados y uno no sombreado entre si]

N: “Exacto, el total son 16”

W: “Entonces de ahí para allá nos quedó mal”

N: “Tranquilos, intenten identificar un nuevo patrón en el denominador, así como en el numerador y lograran la resolución de la subtarea”

W: “Apúrate aún alcanzamos antes de que se acabe”

La sesión lamentablemente fue interrumpida minutos después por una intervención del director del grupo, lo que resultó en la caducidad del tiempo programado para la clase, impidiendo así un último momento de interacción con la pareja W para evaluar si habían logrado optimizar su técnica inicial. Además, el cierre de la clase incluyó un breve compartir de dulces y pasabocas entre los estudiantes, quienes se mostraban satisfechos y emocionados por los avances logrados a lo largo de las sesiones de trabajo. Esta participación contribuyó significativamente a convertir el espacio en un entorno continuo de aprendizaje tanto para los alumnos como para el maestro.

Finalmente, el maestro se despidió agradeciendo a cada estudiante por su colaboración durante las dos semanas de trabajo.

7. Reflexiones finales

En este apartado se establecen las reflexiones, adaptaciones y perspectivas de esta investigación. Asimismo, se consideró como eje central la pregunta definida en el planteamiento del problema, la cual tuvo como fin orientar esta tesis.

> ¿De qué manera la implementación de un Modelo Praxeológico del Talento Matemático en el aula regular puede posibilitar el desarrollo del talento matemático a través de la participación de los estudiantes en una actividad matemática creativa?

El MPTM es un modelo robusto que cuenta con diferentes componentes y tareas que buscan manifestar el talento y creatividad matemática. Ahora bien, Barraza (2020), establece dentro del modelo la componente matemática (θ^m) y la componente creativa (θ_c) con el fin de analizar el progreso de los estudiantes frente a cada una de las tareas realizadas. No obstante, para fines propios de esta investigación el modelo experimento ciertas modificaciones y adaptaciones, un ejemplo claro de esto corresponde a la cantidad de situaciones problemáticas y tareas. En el modelo presentado por Barraza (2020), se presentan un total de seis. Mientras que, para esta investigación se tuvieron en cuenta solo un total de tres situaciones problemáticas.

Así mismo, las situaciones que comprendían el uso de material concreto como la torre de Hanói y cubos de origami no pudieron ser implementadas debido a la dificultad de conseguir material para la cantidad de estudiantes del curso. Sin embargo, situaciones como la de doblado de una hoja de papel logro ser realizada con éxito por parte de los estudiantes. Asimismo, el conjunto de las situaciones implementadas dentro esta investigación constituye una unidad didáctica tal y como lo propone Barraza en miras de que este modelo se implemente en el aula regular de clase.

Si bien, las condiciones que brinda un aula regular no son tan bondadosas como el CM, espacio en el que Barraza desarrollo su investigación, esta investigación da por sentado que el MPTM es una herramienta poderosa para implementar junto el currículo y propiciar un entrono creativo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Así mismo, el diseño de nuevas situaciones problemáticas en relación con las organizaciones praxeológicas logra constituir mayor cantidad de unidades didácticas con fines de fomentar este modelo en el aula regular de clase.

Particularmente, las tres situaciones implementadas durante la investigación corresponden a la praxeología regional de sucesiones, un objeto matemático de estudio incluido desde los primeros años del ciclo escolar. Mientras tanto, la praxeología local se enfoca en encontrar la regla a_n de dicha sucesión, identificando una relación directa con algunos objetos matemáticos de estudio que el grupo ha estado trabajando durante sus clases. Un ejemplo claro es la solución dada por el estudiante A4 a la subtarea 2.2.3. En esta, el estudiante moviliza conceptos propios del aula regular identificando el operador matemático de potencia para así proponer la regla que representa el grosor de una hoja a partir de n dobleces. Este enfoque no solo propicia un avance significativo en la enseñanza de las matemáticas, sino que también fomenta la creatividad dentro de la disciplina.

Respecto al diseño didáctico y su impacto en el desarrollo del talento y la creatividad matemática, es notorio el avance de los estudiantes en estas habilidades a lo largo de cada una de las tareas y subtareas presentadas durante las seis sesiones de trabajo. Aunque algunos estudiantes tienen una participación más destacada desde el inicio hasta el final de las sesiones, es indispensable reconocer la disposición y el esfuerzo de todos los estudiantes a lo largo de las diferentes tareas y dinámicas de clase establecidas por el maestro. Particularmente, los estudiantes (A2, A4, A6, A7) manifestaron técnicas y tecnologías creativas en cuanto al desarrollo de una regla de generalización. No obstante, el avance no radica únicamente en la concepción de la regla, sino en la capacidad del estudiante para afrontar una tarea distinta a las presenciadas durante su aprendizaje en el ciclo escolar.

En el caso de los demás estudiantes del grupo, su progreso es ascendente a medida que se realizan cada una de las sesiones de trabajo. Un ejemplo claro de ello es lo sucedido con los estudiantes A1, A3 y A10, quienes comienzan a desarrollar técnicas y tecnologías creativas a partir de la segunda situación problemática. Específicamente, en la tarea 2.2, estos estudiantes empiezan a movilizar conceptos propios del aula en la construcción de técnicas y tecnologías creativas. Esto se debe a que las tareas presentadas son del mismo tipo; es decir, no son idénticas, pero comparten en esencia la misma tecnología, lo que permite al estudiante desarrollar su habilidad creativa. Además, este tipo de tareas, en conjunto con la praxeología definida, posibilita que los estudiantes optimicen dichas técnicas o las adapten a otras situaciones (F2 y F4).

Del mismo modo, otro de los aspectos fundamentales de esta investigación son las condiciones bajo las que se desarrolló la aplicación del MPTM. La estrategia de trabajo principal se basó en generar inicialmente un ambiente de participación y trabajo libre en el grupo de estudiantes. Es decir, por momentos fue necesario que los estudiantes comprendieran que cada una de las tareas traían consigo la posibilidad solucionarla desde diversos ángulos (F3), sin importar, una técnica única para la solución como suele suceder en una clase tradicional de matemáticas. A partir de esto, el arduo trabajo del maestro para brindar por momentos intervenciones oportunas y espacios de socialización con el fin de construir la regla de generalización o incluso validarla con el grupo de estudiantes.

Así mismo, las primeras cuatro sesiones se desarrollaron bajo la estrategia de trabajo individual, esto con el fin de que el grupo se adaptara por completo a los tipos de tareas presentadas en las sesiones de trabajo. Mientras, las últimas dos sesiones de trabajo se realizaron de manera grupal, específicamente en duplas, favoreciendo así la construcción de 166écnicas creativas frente a la solución de las diferentes tareas de la situación problemática el triángulo de Sierpiński.

Barraza (2020) es clara en su intención de que este modelo se implemente dentro del aula regular de clase, siendo consciente de que para lograr dicho resultado se requieren diferentes adaptaciones con respecto a los factores que pueden intervenir en su desarrollo. Esta investigación, particularmente, busca adaptar y aplicar el modelo praxeológico del talento matemático (MPTM) para potenciar el desarrollo del talento matemático en estudiantes de educación básica mediante su participación en actividades matemáticas creativas. Esto condensa lo que antes era motivo de investigación futura para Barraza en un resultado exitoso del modelo implementado en un aula regular, cumpliendo con los objetivos de esta investigación. Las adaptaciones realizadas evidencian en el análisis posterior que los estudiantes lograron desarrollar tanto su componente matemático como creativo.

Finalmente, esta investigación considera relevante la posibilidad de diseñar un estudio que tenga como objetivo la realización de unidades didácticas articuladas al currículo de matemáticas nacional con el MPTM como base de estas. Así mismo, es interesante considerar que dichas unidades didácticas sean implementadas en diferentes condiciones que permitan destacar el aspecto de la diversos del aula de clase, sumado a esto, construir una comunidad con maestros vinculados al MEN e investigadores interesados en fomentar habilidades como la creatividad y el talento matemático en las instituciones del país.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (2008). Didactical design in mathematics education. *Nordic research in mathematics education*. Leiden, The Netherlands: Brill. https://doi.org/10.1163/9789087907839_003

Barraza, Z., Romo, A., y Roa, S. (2022). Actividad matemática creativa y desarrollo del talento matemático a través del modelo praxeológico. Revista electrónica de investigación educativa, 24.

Benavides, M., Maz, A., Castro, E. y Blanco, R. (Eds.). (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica.* Trineo S.A. Chile

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática, el caso de la proporcionalidad* (Tesis doctoral no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona.

Castela, C. (2017). La teoría antropológica de lo didáctico: Herramientas para las ciencias de la educación. Acta Herediana, 59(8), 9-15. https://doi.org/10.20453/ah.v59i0.3052

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard Y. (2002) Organiser l'étude. 3. Écologie et régulation. En J.L. Dorier (Ed.). *Actes de la XIè École d'été de Didactique des Mathématiques* 41–56. La Pensée Sauvage

Devlin, K. (1994). Mathematics, the science of patterns. Scientific American Library

García, Z. (2020). Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad [Tesis de Doctorado]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

Kozlowski, J., Chamberlin, S. y Eric, M. (2019). Factors that Influence Mathematical Creativity. *The Mathematics Enthusiast*. *16*(1), 505–540. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1471

Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In R. Leikin, A. Berman y B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 383-409), Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R., Berman, A. y Koichu, B. (Eds.). (2009). *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R. (2011). The education of mathematically gifted students: Some complexities and questions. 2*The Mathematics Enthusiast*, *8*(1), 167-188.

Ley 115 de 1994. Por la cual se expide la ley general de educación. Julio 08 de 1994. DO. N°41214

Mönks, F. y Mason, E. (2000). Developmental psychology and giftedness: theories and research. En K. Heller, F, Mönks, R. Sternberg, R. Subotnik (Eds.), *International Handbook of Giftedness and Talent.* Oxford: Pergamon Press.

Mora, L., Casas, A. y Gónzalez, M. (2009). La diversidad en el aula, un ejemplo: el talento en matemáticas. *Revista Pedagogía y Saberes*, 30, 131-151.

Pineda, M y Roa. S. (2017). Construcción de pensamiento funcional: una experiencia en un programa de enriquecimiento extracurricular. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31(1), 141-148.*

Renzulli, J. (1978). What makes giftedness? Reexaming a definition. *Phi Delta Kappan*. *60*(3), 180–184.

Renzulli, J. (1986). La concepción de los tres anillos de la superdotación: un modelo de desarrollo para la productividad creativa. En R. Sternberg y J. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness*, 332–357. Cambridge University Press.

Roa S. (2012). El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas [Tesis doctoral no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving, and the ability to formulate generalizations. *The Journal of Secondary Gifted Education*, 14(3), 151–165. https://doi.org/10.4219/jsge-2003-42

Vygotsky, L. (1930/1984). Imaginación y creatividad en la adolescencia. En D. Elkonin (Ed.), Psicología infantil. Las obras completas de L. Vygotsky, 199–219. Pedagogika (en ruso).

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM Mathematics Education*. *3*(29), 75-80. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes continuas* [Tesis doctoral no publicada]. Universidad Complutense de Madrid.

Wenderlin, I. (1958) *The Mathematical Ability: Experimental and Factorial Studies.* Lund, Glerups.

Apéndices

Apéndice A. Guía de trabajo sesión 1

IE JORGE ELIECER GAITAN	
Profesor: Néstor Enrique Ramírez Contreras	
Nombre:	Grado: 6B

La suscrita rectora del **COLEGIO** del municipio de Lebrija, plantel de naturaleza privada, autorizado según resolución N.º **10579 del 19 de noviembre de 2003**, emanada de la secretaria de Educación del departamento de Santander para el programa de educación preescolar, básica primaria, básica secundaria y media.

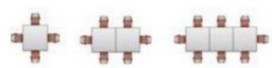
Sesión Número 1

Indicaciones generales para el desarrollo de la clase:

- ✓ Responda cada una de las preguntas que aparecen en la guía de trabajo
- ✓ Trabaje de manera organizada y mantenga el orden durante la clase
- ✓ La variedad de respuestas será importante para la participación grupal

Tarea 1) Observe, analice, e interprete la información, así mismo desarrolle las subtareas allí presentes:

Las mesas y sillas de un salón de eventos se encuentran organizadas de la siguiente manera:



1.1 Determine el número de personas que podrían sentarse con un total 5 mesas unidas?

La siguiente tabla es de ayuda para resolver la pregunta anterior, además, te puede dar ideas novedosas para continuar con las demás preguntas.

Momento	Total, de sillas
0	4
1	
2	
3	
4	
5	

b) Determine el número de personas que podrían sentarse con un total de 16 mesas unidas?

1.2) Determinar ¿cuántas mesas se necesitan para ubicar 42 personas? y ¿cuántas para acomodar 100 personas?

1.3) Cómo se podría obtener el número de sillas necesarias para cualquier número de mesas?

Apéndice B. Guía de trabajo sesión 2

	IE JORGE ELIECER GAITAN		
	Profesor: Néstor Enrique Ramírez Contreras		
	Nombre:	Grado: 6B	

La suscrita rectora del **COLEGIO** del municipio de Lebrija, plantel de naturaleza privada, autorizado según resolución N.º **10579 del 19 de noviembre de 2003**, emanada de la secretaria de Educación del departamento de Santander para el programa de educación preescolar, básica primaria, básica secundaria y media.

Sesión Número 2

Indicaciones generales para el desarrollo de la clase:
- ✓ Responda cada una de las preguntas que aparecen en la guía de trabajo
- ✓ Trabaje de manera organizada y mantenga el orden durante la clase
- ✓ La variedad de respuestas será importante para la participación grupal

Tarea 2) Observe, analice, e interprete la información, así mismo desarrolle las subtareas allí presentes

Observe la siguiente organización de sillas y mesas respectivamente.

2.1) Determine cuántas personas se podrían sentar si acomodamos 6 mesas juntas y determine cuántas para 16 mesas juntas

La siguiente tabla es de ayuda para resolver la pregunta anterior, además, te puede dar ideas novedosas para continuar con las demás preguntas.

Momento	Total, de sillas
0	5
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

2.2) Determine cuántas mesas necesitamos para acomodar a 62 personas.

2.3) Determine cómo podríamos obtener el número de sillas para cualquier organización de mesas.

Apéndice C. Guía de trabajo sesión 3

IE JORGE ELIECER GAITAN	
Profesor: Néstor Enrique Ramírez Contreras	
Nombre:	Grado: 6B

La suscrita rectora del **COLEGIO** del municipio de Lebrija, plantel de naturaleza privada, autorizado según resolución N.º **10579 del 19 de noviembre de 2003**, emanada de la secretaria de Educación del departamento de Santander para el programa de educación preescolar, básica primaria, básica secundaria y media.

Sesión Número 3

Indicaciones generales para el desarrollo de la clase:

- ✓ Responda cada una de las preguntas que aparecen en la guía de trabajo
- ✓ Trabaje de manera organizada y mantenga el orden durante la clase
- ✓ La variedad de respuestas será importante para la participación grupal

Tarea 3) Te has cuestionado acerca de toda la matemática que podemos encontrar tras doblar una simple hoja de papel. Por lo tanto, utiliza el material otorgado por el profesor y da respuesta a cada una de las preguntas que se plantean, recuerda realizar las medidas con regla de cada una de las dimensiones de la hoja de papel.

3.1. Si repetimos el proceso de doblar la hoja 5 veces, ¿cuál es el área y perímetro de la superficie resultante?

Momento	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
área de la hoja						
Perímetro de la hoja						

3.2: ¿Cómo podríamos obtener el área de la superficie de la hoja resultante para cualquier número de dobleces?

3.3: ¿Cómo podríamos obtener el perímetro de la superficie de la hoja resultante para cualquier número de dobleces?

Apéndice D. Guía de trabajo sesión 4

IE JORGE ELIECER GAITAN		
Profesor: Néstor Enrique Ramírez Contreras		
Nombre:	Grado: 6B	

La suscrita rectora del **COLEGIO** del municipio de Lebrija, plantel de naturaleza privada, autorizado según resolución N.º **10579 del 19 de noviembre de 2003**, emanada de la secretaria de Educación del departamento de Santander para el programa de educación preescolar, básica primaria, básica secundaria y media.

Sesión Número 4

Indicaciones generales para el desarrollo de la clase:

- ✓ Responda cada una de las preguntas que aparecen en la guía de trabajo
- ✓ Trabaje de manera organizada y mantenga el orden durante la clase
- ✓ La variedad de respuestas será importante para la participación grupal

Tarea 4) Te has cuestionado acerca de toda la matemática que podemos encontrar tras doblar una simple hoja de papel. Por lo tanto, utiliza el material otorgado por el profesor y da respuesta a cada una de las preguntas que se plantean, recuerda realizar las medidas con regla de cada una de las dimensiones de la hoja de papel.

4.1 Supongamos que tu hoja mide 1 milímetro de grosor. Si la doblamos una vez, ¿cuál es ahora el grosor generado por este doblez?

4.2 Supongamos que la doblamos 5 veces, ¿cuál será ahora el grosor generado por este doblez?

Momento	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Grosor de la hoja						

4.3 ¿Cómo podríamos obtener el grosor generado por el doblado de la hoja para cualquier doblez?

Apéndice E. Guía de trabajo sesión 5

	IE JORGE ELIECER GAITAN	
	Profesor: Néstor Enrique Ramírez Contreras	
	Nombre:	Grado: 6B

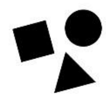
La suscrita rectora del **COLEGIO** del municipio de Lebrija, plantel de naturaleza privada, autorizado según resolución N.º **10579 del 19 de noviembre de 2003**, emanada de la secretaria de Educación del departamento de Santander para el programa de educación preescolar, básica primaria, básica secundaria y media.

Sesión Número 5

Indicaciones generales para el desarrollo de la clase:

- ✓ Responda cada una de las preguntas que aparecen en la guía de trabajo
- ✓ Trabaje de manera organizada y mantenga el orden durante la clase
- ✓ La variedad de respuestas será importante para la participación grupal

¿Sabías que hay un triángulo mágico que nunca deja de asombrar? Se llama el Triángulo de Sierpiński. Este triángulo es muy especial porque, sin importar cuánto lo mires, siempre encontrarás triángulos más pequeños dentro de él.



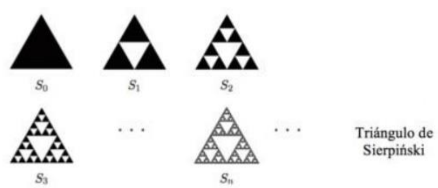
¡Es como un triángulo dentro de un triángulo, dentro de otro triángulo! Es una figura que se repite una y otra vez, y eso lo hace fascinante y misterioso. ¿Te imaginas dibujar un triángulo y que dentro de él aparezcan muchos más triángulos? ¡Eso es lo que hace que el Triángulo de Sierpiński sea tan increíble!

Tarea 5) Determinar cómo cambia la cantidad de triángulos al construir el Triángulo de Sierpiński

- Observa el siguiente triángulo equilátero sombreado de negro

S_0

- Si trazamos los puntos medios de cada lado del triángulo y los unimos, podemos formar un triángulo equilátero en el centro. Si sacamos ese triángulo interior, se parecería a la figura S1. Si volvemos a realizar el mismo procedimiento, sobre cada uno de los tres triángulos sombreados de S1, la figura nueva se vería como S2.



5.1: Completa la siguiente tabla hasta donde te sea posible,

Momento	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de Triángulos sombreados									

5.2 Imagina que aplicas el proceso de construcción hasta obtener el Triángulo de Sierpiński, ¿qué pasa con la cantidad de triángulos?

Apéndice F. Guía de trabajo sesión 6

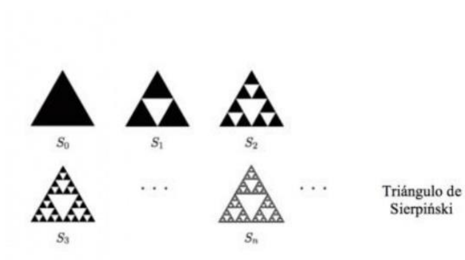
	IE JORGE ELIECER GAITAN	
	Profesor: Néstor Enrique Ramírez Contreras	
	Nombre:	Grado: 6B

La suscrita rectora del **COLEGIO** del municipio de Lebrija, plantel de naturaleza privada, autorizado según resolución N.º **10579 del 19 de noviembre de 2003**, emanada de la secretaria de Educación del departamento de Santander para el programa de educación preescolar, básica primaria, básica secundaria y media.

Sesión Número 6

Indicaciones generales para el desarrollo de la clase:
- ✓ Responda cada una de las preguntas que aparecen en la guía de trabajo
- ✓ Trabaje de manera organizada y mantenga el orden durante la clase
- ✓ La variedad de respuestas será importante para la participación grupal

Tarea 6: Determinar cómo cambia el área que resulta de aplicar el proceso de construcción del Triángulo de Sierpiński.



6.1.1. Si el área del triángulo S0 es igual 1 cm^2 , encuentra el área total sombreada de cada una de las figuras (S0, S1, S2, S3, …), hasta donde te sea posible.

Momento	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área sombreada	$1cm^2$								

6 1.2. Si seguimos haciendo el mismo procedimiento una y otra vez, ¿cuál es el área cuando tienes el Triángulo de Sierpiński o cuando estás muy cerca al triángulo?

6.2. **Determinar cómo va cambiando el perímetro al construir el Triángulo de Sierpiński a través de una secuencia de figuras**

6.2.1. Supongamos que cada lado del triángulo S0 tiene una longitud de 1 cm. *Encuentra su perímetro. Si nos fijamos en la figura S1, ¿cuál es su perímetro? Si nos fijamos en la figura S2, ¿cuál es su perímetro?*

Momento	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Perímetro	$1cm^2$								