

EXTENSIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA

RAMÓN FERNANDO GARCÍA SANTAMARÍA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2007

EXTENSIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA

RAMÓN FERNANDO GARCÍA SANTAMARÍA

**Trabajo presentado para optar al título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

**Director
GILBERTO ARENAS DÍAZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2007

A Dios, mi madre, mis hermanas y mis tios.

Agradecimientos

Especialmente: A Dios , por entregarme sabiduría en mi vida académica y personal.

A mi madre, por su cariño, acompañamiento, y apoyo incondicional durante toda mi formación.

Al Profesor Gilberto Arenas, por su orientación y paciencia durante el desarrollo de este proceso.

A los profesores de la escuela, especialmente a Edilberto Reyes por sus enseñanzas durante mi vida universitaria.

TITLE: EXTENSION OF THE TRIGONOMETRY*

AUTHOR: RAMÓN FERNANDO GARCÍA SANTAMARÍA**

KEY WORDS: Quasi-Trigonometry, Spherical Trigonometry, Hyperbolic Trigonometry.

DESCRIPTION

After completing the study of trigonometry, the trigonometry of functions is accepted in reference to a system of rectangular coordinates. The purpose of this monograph is to demonstrate a study of other types of trigonometry: spherical trigonometry, hyperbolic trigonometry and, in particular, an extension of trigonometry in which the angle between the cathetus is not straight.

The present report has been divided into the following form: the first chapter will contain an introduction to two very important trigonometries: spherical trigonometry, which is in charge of studying the relationship between sides and angles of triangles built over a sphere, called spherical triangles, that is, figures formed by arcs of maximum circumferences contained on the surface of a sphere. It is considered that the study of such relations is very important since they are fundamental in types of Science such as, astronomy; furthermore, are useful in air born navigation and maritime as well as celestial mechanics.

Hiperbolic trigonometry which is in charge of studying the relationship between sides an angle of a triangle rectangle built on Kleins model. During this first chapter, the elements of a triangle are introduced in each of these trigonometries, and some existing relations are studied among such elements.

During the second chapter, a study of the article is done “Quasy-trigonometry” of Allen Strand and Max Stein in which a new trigonometry is defined with the help of a system of oblique coordinates which inclination angle between the axes of the system is of a value λ that is between 0 and 2π . New trigonometry relations are defined as an extension of the conventional trigonometrical functions, and a series of results that are accomplished are present.

* Monograph

** FACULTY OF SCIENCES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR GILBERTO ARENAS DÍAZ.

TÍTULO: EXTENSIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA*

AUTOR: RAMÓN FERNANDO GARCÍA SANTAMARÍA**

PALABRAS CLAVES: extensión de la trigonometría, trigonometría esférica, trigonometría hiperbólica.

DESCRIPCIÓN

Al realizar el estudio de la trigonometría se acepta la trigonometría de funciones en referencia a un sistema de coordenadas rectangulares. El propósito de esta monografía es mostrar un estudio de otros tipos de trigonometrías: trigonometría esférica, trigonometría hiperbólica y, en particular, una extensión de la trigonometría en la cual el ángulo entre los catetos no es recto.

El presente trabajo se ha dividido de la siguiente forma:

En el primer capítulo se hará una introducción a dos trigonometrías muy importantes:

La trigonometría esférica, que se encarga de estudiar la relación entre los lados y los ángulos de los triángulos construidos sobre una esfera, llamados triángulos esféricos, es decir, figuras formadas por arcos de circunferencias máximas contenidos en la superficie de una esfera. Se considera importante el estudio de dichas relaciones, ya que ellas son fundamentales en ciencias como la astronomía; además, son útiles en la navegación aérea y marítima y en la mecánica celeste.

La trigonometría hiperbólica, que se encarga de estudiar la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo construido en el *modelo de Klein*.

En este primer capítulo se presentan los elementos de un triángulo en cada una de estas trigonometrías, y se estudian algunas relaciones existentes entre dichos elementos.

En el segundo capítulo, se hace un estudio del artículo “Quasi-Trigonometry” de Allen Strand and F. Max Stein [8], en el cual se define una nueva trigonometría con la ayuda de un sistema de coordenadas oblicuas cuyo ángulo de inclinación entre los ejes del sistema es un valor λ que está entre 0 y 2π . Se definen unas nuevas relaciones trigonométricas como extensión de las funciones trigonométricas convencionales, y se presenta también una serie de resultados que se cumplen en esta nueva trigonometría.

* Monografía

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR GILBERTO ARENAS DÍAZ.

Contenido

Introducción	II
1. Dos trigonometrías importantes	1
1.1. Trigonometría esférica	1
1.2. Trigonometría hiperbólica	11
2. Extensión de la trigonometría para triángulos no rectángulos	21
2.1. Deducción de las nuevas relaciones trigonométricas	22
2.1.1. Un caso particular	24
2.2. Relaciones trigonométricas en el caso general	26
2.3. Una observación final	28
Bibliografía	31

Introducción

La trigonometría se remonta a tiempos muy lejanos en la historia de las matemáticas, ya que los egipcios y los babilónicos estudiaron algunos problemas que implican elementos trigonométricos. En los griegos se observa por primera vez un estudio sistemático de las relaciones entre los ángulos en un círculo y las longitudes de las cuerdas que subtienden.

Al realizar el estudio de la trigonometría se acepta la trigonometría de funciones en referencia a un sistema de coordenadas rectangulares. El propósito de esta monografía es mostrar un estudio de otros tipos de trigonometrías: trigonometría esférica, trigonometría hiperbólica y, en particular, una extensión de la trigonometría en la cual el ángulo entre los catetos no es recto.

El presente trabajo se ha dividido de la siguiente forma:

En el primer capítulo se hará una introducción a dos trigonometrías muy importantes:

La trigonometría esférica, que se encarga de estudiar la relación entre los lados y los ángulos de los triángulos construidos sobre una esfera, llamados triángulos esféricos, es decir, figuras formadas por arcos de circunferencias máximas contenidos en la superficie de una esfera. Se considera importante el estudio de dichas relaciones, ya que ellas son fundamentales en ciencias como la astronomía; además, son útiles en la navegación aérea

y marítima y en la mecánica celeste.

La trigonometría hiperbólica, que se encarga de estudiar la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo construido en el *modelo de Klein*.

En este primer capítulo se presentan los elementos de un triángulo en cada una de estas trigonometrías, y se estudian algunas relaciones existentes entre dichos elementos.

En el segundo capítulo, se hace un estudio del artículo “Quasi-Trigonometry” de Allen Strand and F. Max Stein [8], en el cual se define una nueva trigonometría con la ayuda de un sistema de coordenadas oblicuas cuyo ángulo de inclinación entre los ejes del sistema es un valor λ que está entre 0 y 2π . Se definen unas nuevas relaciones trigonométricas como extensión de las funciones trigonométricas convencionales, y se presenta también una serie de resultados que se cumplen en esta nueva trigonometría.

Capítulo 1

Dos trigonometrías importantes

En este capítulo se hará una introducción a dos trigonometrías muy importantes: la trigonometría esférica y la trigonometría hiperbólica. Se presentaran los elementos de un triángulo en cada una de estas trigonometrías y se estudian algunas relaciones existentes entre dichos elementos.

1.1. Trigonometría esférica

La trigonometría esférica estudia triángulos construidos sobre una esfera (triángulos esféricos), es decir, figuras formadas por arcos de circunferencias máximas contenidos en la superficie de una esfera. El triángulo esférico, al igual que el triángulo plano, tiene seis elementos: los tres lados y los tres ángulos. Sin embargo, los lados de un triángulo esférico son magnitudes angulares en vez de lineales, y dado que son arcos de circunferencias máximas de una esfera, su medida viene dada por el ángulo central correspondiente (α , β y γ), mientras que los ángulos entre sus lados (φ_x , φ_y y φ_z) vienen dados por los ángulos entre las tangentes a cada circunferencia maximal en cada vértice (ver figuras 1.1 y 1.2).

Un triángulo esférico queda definido dando tres elementos cualesquiera de los seis, pues, al igual que en la geometría plana, hay fórmulas que relacionan las distintas partes de un triángulo esférico. Tales relaciones son fundamentales en la astronomía, en la navegación aérea y marítima y en la mecánica celeste; por ejemplo, la solución del llamado triángulo astronómico se utiliza para encontrar la latitud y longitud de un punto, la hora del día, la posición de una estrella, entre otras magnitudes.

Para el estudio que se pretende hacer se necesita que el lector esté familiarizado con conceptos básicos relacionados con espacios vectoriales y espacios con producto interior. Quien desee hacer un estudio de estos conceptos puede encontrarlos, por ejemplo, en [5, 4].

El espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$ puede dotarse de la estructura vectorial definiendo la suma entre $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ como $x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, y la multiplicación por escalar entre $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ como $\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$. Los elementos de \mathbb{R}^3 son llamados vectores. Sobre este espacio vectorial se pueden definir el producto interno estándar entre dos vectores x e y como

$$\langle x, y \rangle = \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

y la norma de un vector x como

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

La noción de ángulo entre vectores es de importancia en el presente estudio, y se define como sigue¹:

¹Esta definición de ángulo es tomada de [7].

Definición 1.1. *Dados dos elementos $x, y \in \mathbb{R}^3$, se define el ángulo $\theta(x, y)$ entre ellos mediante la función*

$$\theta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \theta(x, y) \equiv \begin{cases} 0, & \text{si } x = y = \mathbf{0}; \\ \pi/2, & \text{si } x = \mathbf{0} \vee y = \mathbf{0}; \\ \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}, & \text{si } x \neq \mathbf{0} \wedge y \neq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Nótese que $\theta(x, y) \in [0, \pi]$, y que $\theta = 0$ si y sólo si $x = \alpha y$ para algún $\alpha > 0$.

Otro conjunto importante que es necesario definir es la superficie esférica S^2 , que es el conjunto de punto en \mathbb{R}^3 tales que su magnitud es la unidad, es decir,

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}.$$

Un **triángulo esférico** sobre S^2 es una tripla de puntos x, y, z de S^2 que sean linealmente independientes como vectores en \mathbb{R}^3 . El triángulo esférico con vértices x, y y z se denotará por $\triangleleft[x, y, z]$.

Como puede verse en la Figura 1.1, un triángulo esférico está determinado por tres arcos de geodésicas, es decir, por tres arcos de circunferencia de radio y centro los de la superficie esférica, cuyas longitudes son los ángulos centrales α, β y γ . Se consideraran triángulos esféricos en los cuales los ángulos α, β y γ son menores que π . Los arcos de circunferencia, que son los lados del triángulo, se cortan dos a dos en los vértices x, y y z .

Obsérvese que, a partir de lo anterior, puede suponerse que

$$\alpha = \theta(x, y), \quad \beta = \theta(x, z) \quad \text{y} \quad \gamma = \theta(y, z).$$

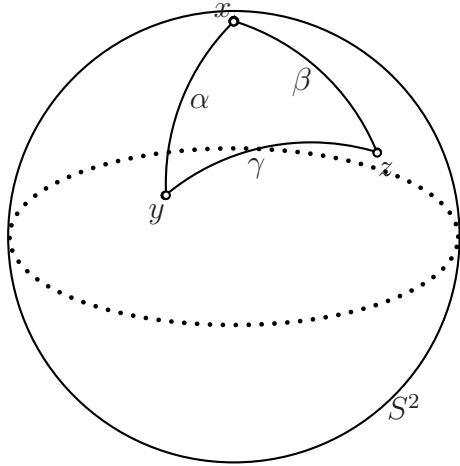


Figura 1.1: Triángulo esférico.

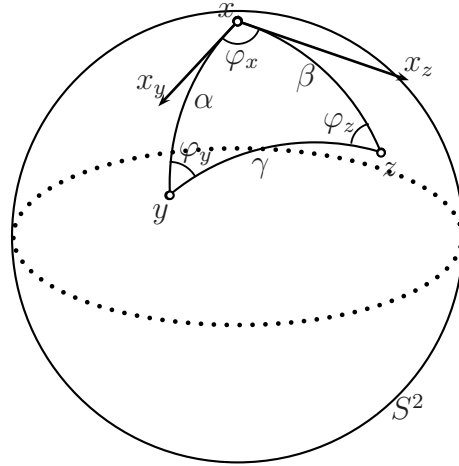


Figura 1.2: Elementos del triángulo esférico.

Dados $x, y \in S^2$, con $x \neq \pm y$, se define el siguiente vector:

$$x_y = \frac{y - \langle x, y \rangle x}{\|y - \langle x, y \rangle x\|}.$$

Aquí, x_y se obtiene utilizando el proceso de Gram-Schmidt al conjunto $\{x, y\}$. Es de observar que el elemento x_y es unitario, tangente al arco de circunferencia con punto inicial x y punto final y que están contenidos en S^2 , y además $\langle x, x_y \rangle = 0$.

En la Figura 1.3 se muestran la circunferencia con centro en el origen y que pasa por los puntos y, z y la circunferencia con centro en origen y que pasa por los puntos x, z .

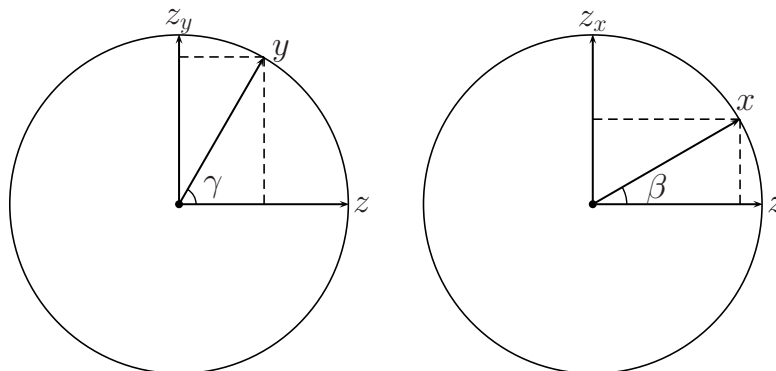


Figura 1.3: $y = z \cdot \cos \gamma + z_y \cdot \sin \gamma$, $x = z \cdot \cos \beta + z_x \cdot \sin \beta$.

Obsérvese nuevamente que el triángulo esférico está completamente determinado por las

longitudes α, β y γ y los ángulos que se definen como sigue (ver Figura 1.2).

Definición 1.2. Dado el triángulo esférico $\triangleleft[x, y, z] \subseteq S^2$, se definen los siguientes ángulos

$$\varphi_x = \theta(x_y, x_z), \quad \varphi_y = \theta(y_z, y_x), \quad \text{y} \quad \varphi_z = \theta(z_x, z_y).$$

Un primer resultado que relaciona los elementos de un triángulo esférico es el siguiente.

Lema 1.3. Para todo triángulo esférico $\triangleleft[x, y, z]$, se tiene que

$$\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma \cdot \cos \varphi_z. \quad (1.2)$$

Demostración. A partir de las figuras 1.2 y 1.3 se observa que

$$y = z \cdot \cos \gamma + z_y \cdot \operatorname{sen} \gamma \quad \text{y} \quad x = z \cdot \cos \beta + z_x \cdot \operatorname{sen} \beta.$$

Por otra parte, dado que z_y y z_x son vectores unitarios, se tiene que el ángulo φ_z entre ellos satisface $\cos \varphi_z = \langle z_y, z_x \rangle$. Además, como z es perpendicular a los vectores z_y y z_x , se tiene que $\langle z, z_y \rangle = \langle z, z_x \rangle = 0$. Así, utilizando la definición de α se deduce que

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \langle x, y \rangle \\ &= \langle z \cdot \cos \beta + z_x \cdot \operatorname{sen} \beta, z \cdot \cos \gamma + z_y \cdot \operatorname{sen} \gamma \rangle \\ &= \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot \langle z, z \rangle + \cos \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma \cdot \langle z, z_y \rangle \\ &\quad + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \gamma \cdot \langle z_x, z \rangle + \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma \cdot \langle z_x, z_y \rangle \\ &= \cos \beta \cdot \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma \cdot \cos \varphi_z. \quad \square \end{aligned}$$

Obsérvese que si se denota Π_1 como el plano que contiene los puntos $0, x$ y z , y Π_2 como el plano contiene los puntos $0, y$ y z , entonces el ángulo φ_z , es el ángulo entre estos dos

planos. Por otra parte, del estudio de vectores es conocido que el ángulo entre dos planos es dado por el ángulo entre sus vectores normales. Para este caso, un vector normal al plano Π_1 es el vector $x \times z$, y un vector normal al plano Π_2 es el vector $y \times z$; luego se tiene que $\varphi_z = \theta(x \times z, y \times z)$. Una consecuencia de la anterior observación es el siguiente resultado.

Teorema 1.4. *Para todo triángulo esférico $\triangleleft[x, y, z]$, se tiene que*

$$\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \cos \varphi_x = \cos \gamma - \cos \beta \cos \alpha.$$

Demostración. De la observación realizada en el párrafo anterior se tiene que el ángulo en φ_x es el mismo que forma los vectores $x \times y$ y $x \times z$. De la definición del ángulo entre vectores dada en (1.1) se obtiene

$$\cos \varphi_x = \frac{\langle x \times y, x \times z \rangle}{\|x \times y\| \cdot \|x \times z\|}, \quad \text{luego} \quad \|x \times y\| \cdot \|x \times z\| \cos \varphi_x = \langle x \times y, x \times z \rangle. \quad (1.3)$$

Como se mencionó antes,

$$\alpha = \theta(x, y), \quad \beta = \theta(x, z) \quad \text{y} \quad \gamma = \theta(y, z).$$

Utilizando la definición de ángulo y el hecho de que $x, y, z \in S^2$, se tiene que

$$\cos \alpha = \langle x, y \rangle, \quad \cos \beta = \langle x, z \rangle \quad \text{y} \quad \cos \gamma = \langle y, z \rangle. \quad (1.4)$$

Por otra parte, por propiedades del producto cruz se tiene que $\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \text{sen } \alpha$, pero dado que $\|x\| = \|y\| = 1$, entonces

$$\|x \times y\| = \text{sen } \alpha. \quad (1.5)$$

De forma equivalente se obtendría que

$$\|x \times z\| = \text{sen } \beta \quad \text{y} \quad \|y \times z\| = \text{sen } \gamma. \quad (1.6)$$

Nuevamente, por propiedades del producto cruz y del producto interior, se tiene que si x , y , z y w son vectores en \mathbb{R}^3 , entonces

$$\langle x \times y, w \times z \rangle = \langle x, w \rangle \cdot \langle y, z \rangle - \langle x, z \rangle \cdot \langle y, w \rangle.$$

Aplicando lo anterior al siguiente producto, se obtiene

$$\langle x \times y, x \times z \rangle = \langle x, x \rangle \cdot \langle y, z \rangle - \langle x, z \rangle \cdot \langle y, x \rangle.$$

Reemplazando aquí las igualdades (1.3), (1.4), (1.5) y (1.6), se obtiene el resultado deseado:

$$\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \cos \varphi_x = \cos \gamma - \cos \beta \cos \alpha. \quad \square$$

De forma análoga se tiene

$$\text{sen } \alpha \text{ sen } \gamma \cos \varphi_y = \cos \beta - \cos \gamma \cos \alpha$$

y

$$\text{sen } \gamma \text{ sen } \beta \cos \varphi_z = \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma.$$

Otro resultado que relaciona los elementos de un triángulo esférico es:

Teorema 1.5. *Para todo triángulo esférico $\triangleleft[x, y, z]$, se tiene que*

$$\frac{\text{sen } \varphi_z}{\text{sen } \varphi_x} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma}.$$

Demostración. Por un argumento análogo al utilizado en la demostración anterior se obtiene que el ángulo φ_x es el mismo que forma los vectores $x \times y$ e $x \times z$. Luego, por propiedades del producto cruz se tiene

$$\|(x \times y) \times (x \times z)\| = \|x \times y\| \cdot \|x \times z\| \text{sen } \varphi_x. \quad (1.7)$$

Esta misma propiedad del producto cruz garantiza que

$$\|x \times y\| = \text{sen } \alpha, \quad \|x \times z\| = \text{sen } \beta \quad \text{y} \quad \|y \times z\| = \text{sen } \gamma. \quad (1.8)$$

Ahora, de forma análoga, φ_z es el ángulo que forman los vectores $z \times y$ y $z \times x$, y al igual que en la igualdad (1.7), se tiene que

$$\|(z \times y) \times (z \times x)\| = \|y \times z\| \cdot \|x \times z\| \text{sen } \varphi_z. \quad (1.9)$$

De las ecuaciones (1.7), (1.8) y (1.9) se tiene que

$$\|(x \times y) \times (x \times z)\| = \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \varphi_x$$

y

$$\|(z \times y) \times (z \times x)\| = \text{sen } \gamma \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \varphi_z.$$

Haciendo el cociente entre estas dos igualdades se tiene

$$\frac{\|(z \times y) \times (z \times x)\|}{\|(x \times y) \times (x \times z)\|} = \frac{\text{sen } \gamma \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \varphi_z}{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \varphi_x} = \frac{\text{sen } \gamma \cdot \text{sen } \varphi_z}{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \varphi_x}. \quad (1.10)$$

Utilizando otra importante propiedad del producto cruz,

$$(x \times y) \times (z \times w) = \langle (x \times y), w \rangle z - \langle (x \times y), z \rangle w,$$

se tiene

$$\frac{(z \times y) \times (z \times x)}{(x \times y) \times (x \times z)} = \frac{\langle (z \times y), x \rangle z - \langle (z \times y), z \rangle x}{\langle (x \times y), z \rangle x - \langle (x \times y), x \rangle z} = \frac{\langle (z \times y), x \rangle z}{\langle (x \times y), z \rangle x}. \quad (1.11)$$

Nuevamente, por la propiedad del producto cruz

$$\langle (z \times y), x \rangle = -\langle (x \times y), z \rangle,$$

se tiene que

$$\frac{\|\langle (z \times y), x \rangle z\|}{\|\langle (x \times y), z \rangle x\|} = \frac{|\langle (z \times y), x \rangle| \cdot \|z\|}{|\langle (x \times y), z \rangle| \cdot \|x\|} = \frac{|\langle (z \times y), x \rangle|}{|\langle (x \times y), z \rangle|} = 1. \quad (1.12)$$

Encajando las igualdades (1.10), (1.11) y (1.12) se tiene

$$\frac{\text{sen } \gamma \cdot \text{sen } \varphi_z}{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \varphi_x} = 1, \quad \text{en consecuencia} \quad \frac{\text{sen } \varphi_z}{\text{sen } \varphi_x} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma}. \quad \square$$

Realizando un procedimiento similar se tiene

$$\frac{\|(z \times y) \times (z \times x)\|}{\|(y \times x) \times (y \times z)\|} = \frac{\text{sen } \gamma \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \varphi_z}{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \gamma \cdot \text{sen } \varphi_y} = \frac{\text{sen } \beta \cdot \text{sen } \varphi_z}{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \varphi_y} = 1;$$

en consecuencia,

$$\frac{\text{sen } \varphi_z}{\text{sen } \varphi_y} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}$$

y

$$\frac{\|(y \times x) \times (y \times z)\|}{\|(x \times y) \times (x \times z)\|} = \frac{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \gamma \cdot \text{sen } \varphi_y}{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \varphi_x} = \frac{\text{sen } \gamma \cdot \text{sen } \varphi_y}{\text{sen } \beta \cdot \text{sen } \varphi_x} = 1,$$

y por lo tanto

$$\frac{\text{sen } \varphi_y}{\text{sen } \varphi_x} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma}.$$

En la geometría euclidiana una propiedad de los triángulos es que la suma de las longitudes de dos lados es mayor o igual que la del otro lado del triángulo; esta propiedad se conoce como la desigualdad triangular. Dicha desigualdad también se cumple si se consideran los ángulos entre vectores de \mathbb{R}^2 . Es decir, si $x, y, z \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\theta(x, y) \leq \theta(x, z) + \theta(y, z). \quad (1.13)$$

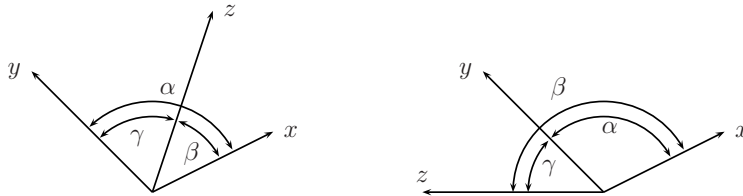


Figura 1.4: Posibles posiciones para tres vectores distintos en \mathbb{R}^2 .

La demostración de esta desigualdad se intuye a partir de la Figura 1.4 que muestra los caso típicos de las posiciones relativas de x , y y z .

Surge ahora la pregunta: ¿es cierta la desigualdad (1.13) en el caso de \mathbb{R}^3 ? La respuesta es afirmativa, y se demuestra a continuación.

Teorema 1.6. *Para todo triángulo esférico $\triangleleft[x, y, z]$, se tiene que*

$$\theta(x, y) \leq \theta(x, z) + \theta(y, z).$$

Se demuestra primero el siguiente lema.

Lema 1.7. *Para todo triángulo esférico $\triangleleft[x, y, z]$, se tiene la desigualdad*

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma.$$

Demostración. Si $\beta + \gamma \geq \pi$ se obtiene de inmediato el resultado. Considere que $\beta + \gamma < \pi$.

A partir de la igualdad (1.2) se tiene que

$$\frac{\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma} = \cos \varphi_z.$$

Dado que la imagen de la función coseno está entre -1 y 1 , se obtiene

$$\left| \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma} \right| < 1.$$

En consecuencia,

$$-\operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma < \cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma < \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma,$$

o de forma equivalente,

$$\cos \beta \cdot \cos \gamma - \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma < \cos \alpha < \cos \beta \cdot \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma,$$

es decir,

$$\cos(\beta + \gamma) < \cos \alpha < \cos(\beta - \gamma) = \cos(|\beta - \gamma|).$$

Puesto que la función arc cos es decreciente, se tiene

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma,$$

completando así la demostración deseada. \square

La prueba del Teorema 1.6 es consecuencia directa del lema anterior y de las consideraciones realizadas al inicio de esta sección.

1.2. Trigonometría hiperbólica

La geometría no euclídea más cercana a la geometría euclídea es quizá la geometría hiperbólica, pues ambas satisfacen los cuatro primeros postulados de Euclides; difieren en el quinto, el de las paralelas. Un estudio detallado de la geometría hiperbólica puede encontrarse, por ejemplo, en [6].

En la presente sección se pretende mostrar algunas propiedades que se cumplen en la trigonometría hiperbólica. Hacer un estudio en detalle de los requisitos para llegar a la trigonometría hiperbólica es un trabajo arduo, por lo que se remitirá al lector en varios casos a [6].

Se necesita definir la distancia hiperbólica, para lo cual es necesario introducir algunas conceptos previos.

Para obtener un plano proyectivo hiperbólico basta seleccionar una cónica, esto divide los puntos en tres clases: puntos finitos (los interiores a la cónica), puntos infinitos (los

de la cónica) y puntos ultrafinitos (los exteriores a la cónica). El **plano hiperbólico** propiamente dicho está formado por los puntos finitos.

Se llama **modelo de Klein** del plano hiperbólico (o **plano de Klein**) al espacio formado por los puntos interiores de una circunferencia euclídea C y tomando como rectas las cuerdas de C .

El siguiente teorema, cuya demostración y deducción se puede encontrar en [6], caracteriza la distancia hiperbólica entre puntos del plano de Klein.

Teorema 1.8. *La distancia hiperbólica d en el plano de Klein entre dos puntos cuyas coordenadas cartesianas son (x, y) y (x', y') satisface la ecuación*

$$\cosh d = \frac{1 - xx' - yy'}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)(1 - x'^2 - y'^2)}}. \quad (1.14)$$

Se define un **triángulo hiperbólico** como un triángulo construido en el *plano de Klein*.

Los triángulos hiperbólicos satisfacen relaciones trigonométricas algo más complejas que las de los triángulos euclídeos, pero igualmente manejables.

Considérese un triángulo rectángulo hiperbólico con vértices A, B, C , lados a, b, c y ángulos α, β y γ , donde $\gamma = \pi/2$. No se pierde generalidad si se supone que las coordenadas cartesianas de los vértices son $A = (0, 0)$, $B = (x, y)$ y $C = (x, 0)$. Es de observar que a no es igual a y ni b es igual a x , ya que a y b representan las longitudes hiperbólicas de estos lados.

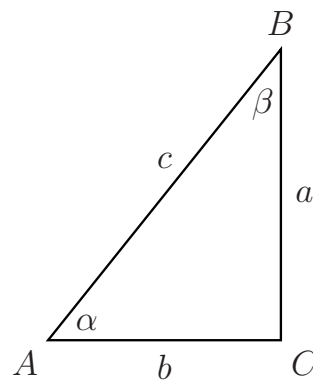


Figura 1.5: Triángulo rectángulo hiperbólico.

Supóngase que z es la hipotenusa del triángulo rectángulo y x e y son los catetos. Por el

teorema de Pitágoras se tiene que:

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Por otra parte, si a es la distancia hiperbólica entre los puntos B y C , b es la distancia hiperbólica entre los puntos A y C , y c es la distancia hiperbólica entre los puntos A y B , entonces se puede aplicar la ecuación (1.14) que caracteriza la distancia hiperbólica entre dos puntos, para encontrar la relación que cumplen dichas distancias.

Para la distancia a , se tiene que $x = x$, $x' = x$, $y = y$ e $y' = 0$; en consecuencia,

$$\begin{aligned} \cosh a &= \frac{1 - xx' - yy'}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)(1 - x'^2 - y'^2)}} \\ &= \frac{1 - xx - y(0)}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)(1 - x^2 - 0^2)}} \\ &= \frac{1 - x^2}{\sqrt{(1 - (x^2 + y^2))(1 - x^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - z^2}}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\cosh a = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - z^2}}. \quad (1.15)$$

De forma análoga para la distancia b se tiene: $x = 0$, $x' = x$, $y = 0$ e $y' = 0$; en consecuencia,

$$\cosh b = \frac{1 - 0x - 00}{\sqrt{(1 - 0^2 - 0^2)(1 - x^2 - 0^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1)(1 - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (1.16)$$

Por último, para la distancia c se tiene: $x = 0$, $x' = x$, $y = 0$ y $y' = y$; en consecuencia,

$$\cosh c = \frac{1 - 0x - 0y}{\sqrt{(1 - 0^2 - 0^2)(1 - x^2 - y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1)(1 - (x^2 + y^2))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}. \quad (1.17)$$

Utilizando la identidad básica de las funciones hiperbólicas (ver por ejemplo [3])

$$\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1,$$

o de forma equivalente

$$\cosh^2 a = 1 + \sinh^2 a, \quad \text{ó} \quad \sinh^2 a = \cosh^2 a - 1, \quad (1.18)$$

se puede despejar x , y y z en función de \sinh y \cosh .

Por la ecuación (1.16) se tiene que $\cosh b = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; elevando al cuadrado a ambos lados de la ecuación

$$\cosh^2 b = \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{1}{1-x^2},$$

despejando para x se tiene

$$(1-x^2)\cosh^2 b = 1,$$

de donde se obtiene que

$$\cosh^2 b - 1 = x^2 \cosh^2 b.$$

De la ecuación (1.18) se tiene que $\sinh^2 a = \cosh^2 a - 1$; reemplazando en la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{\sinh^2 b}{\cosh^2 b} = x^2,$$

por lo tanto $\tanh b = x$.

Siguiendo un proceso análogo para la ecuación (1.17) se tiene

$$\cosh^2 c = \frac{1}{(\sqrt{1-z^2})^2},$$

luego

$$\cosh^2 c = \frac{1}{(1-z^2)};$$

despejando para z se tiene

$$(1-z^2)(\cosh^2 c) = 1,$$

o de forma equivalente

$$\cosh^2 c - 1 = z^2 \cosh^2 c;$$

de nuevo, se sabe que $\sinh^2 c = \cosh^2 c - 1$, y en consecuencia

$$\sinh^2 c = z^2 \cosh^2 c,$$

y por lo tanto, $\tanh c = z$.

De la ecuación (1.15) se obtiene que

$$(1 - z^2) \cosh^2 a = 1 - x^2,$$

pero esta ecuación es equivalente a

$$(1 - (x^2 - y^2)) \cosh^2 a = 1 - x^2;$$

agrupando los términos que tienen como factor a $(1 - x^2)$ se tiene

$$(1 - x^2) [\cosh^2 a - 1] = y^2 \cosh^2 a;$$

pero ya se sabe que $x = \tanh b$ y que $\cosh^2 a - 1 = \sinh^2 a$, luego la ecuación anterior se convierte en

$$(1 - \tanh^2 b) \sinh^2 a = y^2 \cosh^2 a;$$

despejando se obtiene que

$$y = \operatorname{sech} b \tanh a.$$

En conclusión se tiene que

$$x = \tanh b, \quad y = \operatorname{sech} b \tanh a \quad \text{y} \quad z = \tanh c.$$

Conociendo estos valores se pueden obtener todas las fórmulas trigonométricas hiperbólicas sobre triángulos rectángulos. El siguiente teorema resume varias de estas relaciones.

Teorema 1.9. *En un triángulo hiperbólico se satisfacen las siguientes relaciones:*

$$\tanh b = \cos \alpha \tanh c. \quad (1.19)$$

$$\tanh a = \tan \alpha \sinh b. \quad (1.20)$$

$$\cosh c = \cosh b \cosh a. \quad (1.21)$$

$$\sinh a = \sin \alpha \sinh c. \quad (1.22)$$

Demostración.

(1.19) Dado que el ángulo hiperbólico α coincide con el euclídeo, si se conoce b y c se tiene que

$$\cos \alpha = \frac{x}{z} = \frac{\tanh b}{\tanh c};$$

en consecuencia,

$$\tanh b = \cos \alpha \tanh c.$$

(1.20) Si se utiliza la fórmula de la tangente se tiene

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sech} b \tanh a}{\tanh b} = \frac{\tanh a}{\sinh b},$$

y por lo tanto

$$\tanh a = \tan \alpha \sinh b.$$

(1.21) Sustituyendo los valores x , y , z en la relación pitagórica euclídea $z^2 = x^2 + y^2$ se obtiene

$$\tanh^2 c = \tanh^2 b + \operatorname{sech}^2 b \tanh^2 a;$$

utilizando las relaciones entre senos, cosenos y tangentes hiperbólicas se tiene

$$\left(1 - \frac{1}{\cosh^2 c}\right) = \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 b}\right) + \frac{1}{\cosh^2 b} \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 a}\right),$$

lo que implica que

$$\frac{\cosh^2 c - 1}{\cosh^2 c} = \frac{\cosh^2 b - 1}{\cosh^2 b} + \frac{\cosh^2 a - 1}{\cosh^2 b \cosh^2 a},$$

que a su vez nos da

$$\frac{\cosh^2 c - 1}{\cosh^2 c} = \frac{\cosh^2 b \cosh^2 a - \cosh^2 a + \cosh^2 a - 1}{\cosh^2 b \cosh^2 a} = \frac{\cosh^2 b \cosh^2 a - 1}{\cosh^2 b \cosh^2 a},$$

y esto conduce a

$$(\cosh^2 c - 1) \cosh^2 b \cosh^2 a = \cosh^2 c (\cosh^2 b \cosh^2 a - 1),$$

de lo que obtenemos

$$\cosh^2 c \cosh^2 b \cosh^2 a - \cosh^2 b \cosh^2 a = \cosh^2 c \cosh^2 b \cosh^2 a - \cosh^2 c,$$

y en consecuencia

$$\cosh c = \cosh b \cosh a. \quad (1.23)$$

(1.22) Utilizando la ecuación anterior, y realizando un proceso análogo al que se hizo para el coseno y la tangente, se obtiene

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{z} = \frac{\operatorname{sech} b \tanh a}{\tanh c} = \frac{\operatorname{senh} a \cosh c}{\cosh a \cosh b \operatorname{senh} c} = \frac{\operatorname{senh} a}{\operatorname{senh} c},$$

y en consecuencia

$$\operatorname{senh} a = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{senh} c. \quad \square$$

Utilizando simetría se obtienen fórmulas equivalentes para el ángulo β :

$$\tanh a = \cos \beta \tanh c. \quad (1.24)$$

$$\tanh b = \tan \beta \operatorname{senh} a. \quad (1.25)$$

$$\operatorname{senh} b = \operatorname{sen} \beta \operatorname{senh} c. \quad (1.26)$$

Obsérvese que en las ecuaciones (1.19), (1.20), (1.22), (1.24), (1.25) y (1.22) se relacionan dos lados y un ángulo, es una característica que se da también en la trigonometría clásica.

Una particularidad de la trigonometría hiperbólica es que permite calcular los lados de un triángulo conocidos sus ángulos. En efecto, si hacemos el cociente entre $\cos \alpha$ y $\operatorname{sen} \beta$ se obtiene

$$\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\frac{\tanh b}{\operatorname{senh} b}}{\frac{\tanh c}{\operatorname{senh} c}} = \frac{\tanh b \operatorname{senh} c}{\tanh c \operatorname{senh} b} = \frac{\cosh c}{\cosh b} = \cosh a;$$

por consiguiente,

$$\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta \cosh a.$$

De forma análoga se obtiene que

$$\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha \cosh b.$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones tenemos

$$1 = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cosh b}{\cos \beta} \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta \cosh \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \tan \beta \cosh c.$$

Otra característica importante en la trigonometría hiperbólica se da en el siguiente teorema.

Teorema 1.10. *La suma de los ángulos de un triángulo hiperbólico es siempre menor que π .*

Demostración. Basta probar para el caso en el cual el triángulo es rectángulo, ya que cualquier triángulo puede dividirse en dos triángulos rectángulos. Si en la Figura 1.5 se

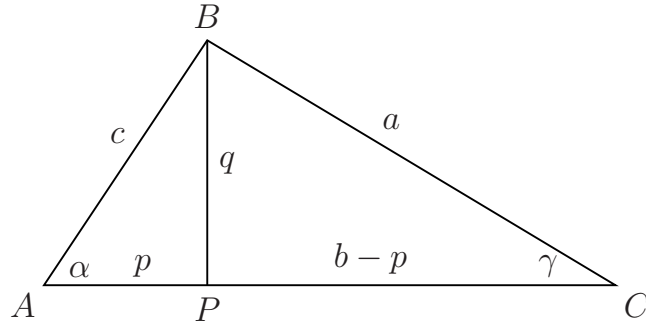


Figura 1.6: Todo triángulo se puede dividir en dos triángulos rectángulos.

considera β' como el ángulo euclídeo correspondiente a β , se obtiene que

$$\cos \beta' = \frac{y}{z} = \frac{\tanh a}{\cosh b \tanh c} = \frac{\cos \beta}{\cosh b} < \cos \beta.$$

Puesto que los ángulos que se consideran son agudos, la función coseno es decreciente, luego $\beta < \beta'$, luego se tiene que

$$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta' + \frac{\pi}{2} = \pi. \quad \square$$

El teorema de los senos y el teorema de los cosenos tienen su versión en la trigonometría hiperbólica.

Teorema 1.11. *Todo triángulo hiperbólico satisface la relación*

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{senh } a} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{senh } b} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{senh } c}.$$

Demostración. De la Figura 1.6 se tiene que

$$\text{senh } q = \text{sen } \gamma \text{ senh } a \quad \text{y} \quad \text{senh } q = \text{sen } \alpha \text{ senh } c,$$

igualando estas dos ecuaciones se obtiene la relación buscada. □

Teorema 1.12. *Todo triángulo hiperbólico satisface las relaciones*

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \text{senh } b \text{ senh } c \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \cosh a - \cos \beta \cos \gamma.$$

Demostración. De la Figura 1.6 se tiene que

$$\begin{aligned} \cosh a &= \cosh q \cosh (b - p) = \cosh q (\cosh b \cosh p - \operatorname{senh} b \operatorname{senh} p) \\ &= \cosh b \cosh c - \operatorname{senh} b \cosh c \tanh p \\ &= \cosh b \cosh c - \operatorname{senh} b \cosh c \cos \alpha \tanh c \\ &= \cosh b \cosh c - \operatorname{senh} b \operatorname{senh} c \cos \alpha. \end{aligned}$$

Si en la Figura 1.6 se considera $\delta = \sphericalangle PBC$ se obtiene

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cosh q \operatorname{sen} (\beta - \delta) = \cosh q \operatorname{sen} \beta \cos \delta - \cosh q \cos \beta \operatorname{sen} \delta \\ &= \cosh q \cosh (b - p) \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \beta - \cos \beta \cos \gamma \\ &= \cosh a \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \beta - \cos \beta \cos \gamma. \quad \square \end{aligned}$$

Capítulo 2

Extensión de la trigonometría para triángulos no rectángulos

Cuando se habla de trigonometría, se piensa en la relación que existe entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo, es decir, se toma como referencia un sistema de coordenadas rectangulares.

En este capítulo se hace un estudio basados en el artículo “Quasi-Trigonometry” de Allen Strand and F. Max Stein [8], de una nueva trigonometría, no basada en un sistema de coordenadas rectangulares sino en un sistema de coordenadas oblicuas. En este nuevo sistema no se estudiará la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, sino la relación entre los lados de un triángulo cuyos “catetos” no forman un triángulo rectángulo, es decir, un triángulo como el que se muestra en la Figura 2.1. En este caso se hablará de la trigonometría “no convencional” o “no estándar”, mientras que cuando se trate de la trigonometría que estudia la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo se hablará de trigonometría “convencional”, “estándar” o “clásica”.

2.1. Deducción de las nuevas relaciones trigonométricas

Se define la nueva trigonometría con la ayuda de un sistema de coordenadas oblicuas como el que se muestra en la Figura 2.1, donde λ es el ángulo de inclinación entre los ejes del nuevo sistema y está entre 0 y 2π , n denota la distancia euclídea desde el origen hasta el punto $p(x, y)$ donde x es la “abscisa” y y es la “ordenada”, h es la distancia perpendicular desde el punto $p(x, y)$ al eje $+X$.

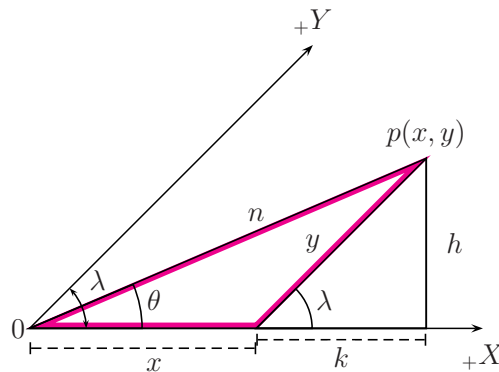


Figura 2.1: Triángulo no rectángulo.

Se definen estas nuevas relaciones trigonométricas como extensiones de las funciones trigonométricas convencionales, para lo cual es necesario observar la Figura 2.1. En consecuencia se tiene:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}_{\lambda} \theta = \frac{y}{n} & \operatorname{cos}_{\lambda} \theta = \frac{x}{n} & \operatorname{tan}_{\lambda} \theta = \frac{y}{x} \\ \operatorname{csc}_{\lambda} \theta = \frac{n}{y} & \operatorname{sec}_{\lambda} \theta = \frac{n}{x} & \operatorname{cot}_{\lambda} \theta = \frac{x}{y} \end{array}$$

El subíndice λ representa el ángulo de inclinación del sistema de coordenadas oblicuo.

A continuación se presentan algunas identidades en el caso que el ángulo λ es agudo.

Como puede observarse de la Figura 2.1, h es la distancia perpendicular desde el eje x

hasta el punto $p(x, y)$ y k la distancia desde la abscisa hasta la intercepción de h y el eje x .

Como se dijo antes, estas nuevas identidades trigonométricas se derivan de las identidades trigonométricas “convencionales”, y como puede observarse pueden expresarse en términos de $\text{sen } \theta$ y $\text{cos } \theta$.

En efecto:

$$\text{sen}_\lambda \theta = \frac{y}{n} = \frac{y}{n} \cdot \frac{h}{h} = \frac{y}{h} \cdot \frac{h}{n} = \text{csc } \lambda \text{ sen } \theta,$$

en consecuencia

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{sen}_\lambda \theta}{\text{csc } \lambda} = \text{sen}_\lambda \theta \text{ sen } \lambda. \quad (2.1)$$

Obsérvese que cuando $\lambda = \pi/2$ se tiene la función trigonométrica clásica.

Por otra parte, si $y \neq 0$, y se considera el triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa a n , como cateto adyacente a $x + k$ y cateto opuesto a h , se tiene que

$$\text{cos } \theta = \frac{x + k}{n} = \frac{x}{n} + \frac{k}{n} = \frac{x}{n} + \frac{k}{n} \cdot \frac{y}{y} = \frac{x}{n} + \frac{k}{y} \cdot \frac{y}{n};$$

si se observa qué representa cada expresión en términos de la nueva trigonometría se obtiene que

$$\text{cos } \theta = \text{cos}_\lambda \theta + \text{cot } \lambda \text{ sen}_\lambda \theta. \quad (2.2)$$

Obsérvese que si se reemplaza la ecuación (2.1), la ecuación anterior se convierte en

$$\text{cos}_\lambda \theta = \text{cos } \theta - \text{cot } \lambda \text{ sen } \theta.$$

Es claro que este resultado es igualmente verdadero si $y = 0$, y también satisface el resultado clásico, es decir, si se considera $\lambda = \pi/2$.

Un procedimiento análogo al anterior lleva a expresiones para las otras funciones

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{\text{sen}_\lambda \theta \text{ sen } \lambda}{\text{cos}_\lambda \theta + \text{cos } \lambda \text{ sen}_\lambda \theta}, \\ \text{csc}_\lambda \theta &= \frac{n}{y} = \frac{n}{y} \cdot \frac{h}{h} = \frac{n}{h} \cdot \frac{h}{y} = \text{csc } \theta \text{ sen } \lambda, \\ \text{sec } \theta &= \frac{n}{x+k} = \frac{\frac{n}{y}}{\frac{x}{y} + \frac{k}{y}} = \frac{\text{csc}_\lambda \theta}{\text{cot}_\lambda \theta + \text{cos } \lambda}, \\ \text{cot } \theta &= \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta} = \frac{\text{cos}_\lambda \theta + \text{cos } \lambda \text{ sen}_\lambda \theta}{\text{sen}_\lambda \theta \text{ cos } \lambda}.\end{aligned}$$

Además, se puede verificar fácilmente que

$$\tan_\lambda \theta = \frac{\text{sen}_\lambda \theta}{\text{cos}_\lambda \theta}, \quad \text{cot}_\lambda \theta = \frac{\text{cos}_\lambda \theta}{\text{sen}_\lambda \theta}, \quad \text{sec}_\lambda \theta = \frac{1}{\text{cos}_\lambda \theta}, \quad \text{csc}_\lambda \theta = \frac{1}{\text{sen}_\lambda \theta}.$$

2.1.1. Un caso particular

Si se considera el ángulo $\lambda = \frac{\pi}{3}$ y se reemplaza en las ecuaciones (2.1) y (2.2) se obtiene

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{sen}_\lambda \theta, \quad (2.3)$$

$$\text{cos } \theta = \text{cos}_\lambda \theta + \frac{1}{2} \text{sen}_\lambda \theta. \quad (2.4)$$

Elevando cada uno de estos término al cuadrado ((2.3) y (2.4)), y luego sumando se obtiene

$$\begin{aligned}1 &= \text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = \frac{3}{4} \text{sen}_\lambda^2 \theta + \text{cos}_\lambda^2 \theta + \text{cos}_\lambda \theta \text{sen}_\lambda \theta + \frac{1}{4} \text{sen}_\lambda^2 \theta \\ &= \text{sen}_\lambda^2 \theta + \text{cos}_\lambda^2 \theta + \text{cos}_\lambda \theta \text{sen}_\lambda \theta,\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$1 - \text{cos}_\lambda \theta \text{sen}_\lambda \theta = \text{sen}_\lambda^2 \theta + \text{cos}_\lambda^2 \theta. \quad (2.5)$$

Si se divide (2.5) por $\text{sen}_\lambda^2 \theta$ se obtiene

$$\frac{1 - \cos_\lambda \theta \text{sen}_\lambda \theta}{\text{sen}_\lambda^2 \theta} = \frac{\text{sen}_\lambda^2 \theta + \cos_\lambda^2 \theta}{\text{sen}_\lambda^2 \theta},$$

esto es

$$\text{csc}_\lambda^2 \theta - \cot_\lambda \theta = 1 + \cot_\lambda^2 \theta. \quad (2.6)$$

Si se divide (2.5) por $\cos_\lambda^2 \theta$ se obtiene

$$\frac{1 - \cos_\lambda \theta \text{sen}_\lambda \theta}{\cos_\lambda^2 \theta} = \frac{\text{sen}_\lambda^2 \theta + \cos_\lambda^2 \theta}{\cos_\lambda^2 \theta},$$

o lo que es equivalente

$$\sec_\lambda^2 \theta - \tan_\lambda \theta = \tan_\lambda^2 \theta + 1. \quad (2.7)$$

Las fórmulas para la suma de ángulos son derivadas de las fórmulas de la trigonometría clásica; si se sustituye (2.3) y (2.4) en

$$\text{sen}(\theta + \phi) = \text{sen } \theta \cos \phi + \cos \theta \text{sen } \phi \quad (2.8)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta + \phi) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}_\lambda \theta \left[\cos_\lambda \phi + \frac{1}{2} \text{sen}_\lambda \phi \right] + \left[\cos_\lambda \theta + \frac{1}{2} \text{sen}_\lambda \theta \right] \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}_\lambda \phi \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}_\lambda \theta \cos_\lambda \phi + \frac{\sqrt{3}}{4} \text{sen}_\lambda \theta \text{sen}_\lambda \phi + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}_\lambda \phi \cos_\lambda \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \text{sen}_\lambda \phi \text{sen}_\lambda \theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\text{sen}_\lambda \theta \cos_\lambda \phi + \text{sen}_\lambda \phi \cos_\lambda \theta + \text{sen}_\lambda \phi \text{sen}_\lambda \theta). \end{aligned}$$

Por lo tanto, al reemplazar en la ecuación (2.3) se obtiene

$$\text{sen}_\lambda(\theta + \phi) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{sen}(\theta + \phi) = \text{sen}_\lambda \theta \cos_\lambda \phi + \text{sen}_\lambda \phi \cos_\lambda \theta + \text{sen}_\lambda \theta \text{sen}_\lambda \phi.$$

De manera similar se obtiene que

$$\text{sen}(\theta - \phi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}_\lambda \theta \left[\cos_\lambda \phi + \frac{1}{2} \text{sen}_\lambda \phi \right] - \left[\cos_\lambda \theta + \frac{1}{2} \text{sen}_\lambda \theta \right] \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}_\lambda \phi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}_\lambda \theta \cos_\lambda \phi + \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}_\lambda \phi \cos_\lambda \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{sen}_\lambda \phi \operatorname{sen}_\lambda \theta \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} (\operatorname{sen}_\lambda \theta \cos_\lambda \phi - \operatorname{sen}_\lambda \phi \cos_\lambda \theta),
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\operatorname{sen}_\lambda(\theta - \phi) = \operatorname{sen}_\lambda \theta \cos_\lambda \phi - \operatorname{sen}_\lambda \phi \cos_\lambda \theta. \quad (2.9)$$

Un procesos equivalente se sigue para mostrar que

$$\cos_\lambda(\theta + \phi) = \cos_\lambda \theta \cos_\lambda \phi - \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi \quad (2.10)$$

y

$$\cos_\lambda(\theta - \phi) = \cos_\lambda \theta \cos_\lambda \phi + \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi + \cos_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi. \quad (2.11)$$

Si en las ecuaciones (2.8) y (2.10) se considera $\theta = \phi$ se obtiene identidades para el ángulo doble

$$\operatorname{sen}_\lambda 2\theta = 2 \operatorname{sen}_\lambda \theta \cos_\lambda \theta + \operatorname{sen}_\lambda^2 \theta \quad (2.12)$$

y

$$\cos_\lambda 2\theta = \cos_\lambda^2 \theta - \operatorname{sen}_\lambda^2 \theta. \quad (2.13)$$

De forma similar se pueden obtener otras relaciones.

2.2. Relaciones trigonométricas en el caso general

Una tarea interesante es hacer una deducción de las fórmulas en el caso general, es decir, considerando $0 < \lambda < \pi$. Un primer resultado al respecto es:

Teorema 2.1. *En la trigonometría no convencional la identidad de la suma de ángulos para la función seno es dada por*

$$\operatorname{sen}_\lambda(\theta + \phi) = \operatorname{sen}_\lambda \theta \cos_\lambda \phi + 2 \cos_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi + \operatorname{sen}_\lambda \phi \operatorname{sen}_\lambda \theta. \quad (2.14)$$

Demostración. En efecto:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}_\lambda(\theta + \phi) &= \operatorname{csc} \lambda \operatorname{sen}(\theta + \phi) \\
&= \operatorname{csc} \lambda (\operatorname{sen} \theta \cos \phi + \cos \theta \operatorname{sen} \phi) \\
&= (\operatorname{csc} \lambda \operatorname{sen} \theta)(\cos_\lambda \phi + \cos \lambda \operatorname{sen}_\lambda \phi) + (\operatorname{csc} \lambda \operatorname{sen} \phi)(\cos_\lambda \theta + \cos \lambda \operatorname{sen}_\lambda \theta) \\
&= \operatorname{sen}_\lambda \theta \cos_\lambda \phi + \cos \lambda \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi + \operatorname{sen}_\lambda \phi \cos_\lambda \theta + \operatorname{sen}_\lambda \phi \operatorname{sen}_\lambda \theta \cos \lambda \\
&= \operatorname{sen}_\lambda \theta \cos_\lambda \phi + 2 \cos \lambda \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi + \operatorname{sen}_\lambda \phi \operatorname{sen}_\lambda \theta. \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema 2.2. *En la trigonometría no convencional la identidad de la suma de ángulos para la función coseno es dada por*

$$\cos_\lambda(\theta + \phi) = \cos_\lambda \theta \cos_\lambda \phi - \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi + (1 - 2 \cos \lambda) \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi. \quad (2.15)$$

Demostración. En efecto, si se denota $\diamond = \cos_\lambda(\theta + \phi)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\diamond &= \cos(\theta + \phi) - \cos \lambda (\operatorname{sen}_\lambda(\theta + \phi)) \\
&= \cos \theta \cos \phi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi - \cos \lambda (\operatorname{sen}_\lambda \theta \cos_\lambda \phi + \cos_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi + 2 \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi) \\
&= \cos \theta \cos \phi - (\cos \lambda \operatorname{sen}_\lambda \theta)(\cos \lambda \operatorname{sen}_\lambda \phi) \\
&\quad - \cos \lambda [\operatorname{sen}_\lambda \theta (\cos \phi - \cos \lambda \operatorname{sen}_\lambda \phi) + \operatorname{sen}_\lambda \phi (\cos \theta - \cos \lambda \operatorname{sen}_\lambda \theta) + 2 \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi] \\
&= \cos \theta \cos \phi - \cos^2 \lambda \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi \\
&\quad - \cos \lambda (\cos \phi \operatorname{sen}_\lambda \theta - \cos \lambda \operatorname{sen}_\lambda \phi \operatorname{sen}_\lambda \theta + \cos \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi) \\
&\quad - \cos \lambda \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi + 2 \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi) \\
&= \cos \theta \cos \phi + \cos^2 \lambda \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi - \cos \lambda [\cos \phi \operatorname{sen}_\lambda \theta + \cos \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi + 2 \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi] \\
&= \cos \theta \cos \phi + \cos^2 \lambda \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi - \cos \lambda \cos \phi \operatorname{sen}_\lambda \theta - \cos \lambda \cos \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi \\
&\quad - 2 \cos \lambda \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi - \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi + \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi
\end{aligned}$$

$$= \cos_\lambda \theta \cos_\lambda \phi - \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi + (1 - 2 \cos \lambda) \operatorname{sen}_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi. \quad \square$$

Para el caso de la resta las ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen}_\lambda(\theta - \phi) = \operatorname{sen}_\lambda \theta \cos_\lambda \phi - \operatorname{sen}_\lambda \phi \operatorname{sen}_\lambda \theta$$

y

$$\cos_\lambda(\theta - \phi) = \cos \theta \cos \phi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi - \cos \lambda (\operatorname{sen}_\lambda \theta \cos_\lambda \phi - \cos_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \phi).$$

2.3. Una observación final

Como se vio antes, las ecuaciones (2.1) y (2.2) expresan el \cos_λ y el $\operatorname{sen}_\lambda$ en términos del \cos y el sen respectivamente, si se elevan cada uno de estos términos al cuadrado y luego se suman se obtiene

$$1 = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = \cos_\lambda^2 \theta + 2 \cos \lambda \cos_\lambda \theta \operatorname{sen}_\lambda \theta + \operatorname{sen}_\lambda^2 \theta. \quad (2.16)$$

Si ahora se hace la sustitución $x = \cos_\lambda \theta$ e $y = \operatorname{sen}_\lambda \theta$, entonces se tiene

$$1 = x^2 + (2 \cos \lambda)xy + y^2. \quad (2.17)$$

A partir de esta ecuación se pueden definir varios tipos de ecuaciones.

Si la ecuación (2.17) representa una elipse, podrá expresarse un serie de relaciones que pueden llamarse la trigonometría elíptica.

Similarmente, si (2.17) representa una parábola o una hipérbola, se obtiene como ecuaciones que generan trigonometrías que pueden llamarse parabólica e hiperbólica, respectivamente.

Es evidente que las ecuaciones (2.14), (2.15) y (2.17) satisfacen la trigonometría convencional cuando $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

Continuando con la ecuación (2.17), puede definirse el discriminante de la ecuación como $\Delta = 4 \cos^2 \lambda - 4$. Ahora, pueden darse condiciones sobre Δ para que la ecuación (2.17) represente una parábola, una elipse o una hipérbola. Así, si $\Delta = 0$, entonces la ecuación represente una parábola, esto implica que $\cos^2 \lambda = 1$, y en consecuencia $\lambda = 0$ ó $\lambda = \pi$. Para cada uno de estos valores de λ la ecuación (2.17) se reduce a dos líneas paralelas, lo cual puede considerarse como una degeneración de la parábola.

En efecto, si $\lambda = 0$ la ecuación (2.17) toma la forma

$$1 = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2,$$

lo cual implica que

$$x + y = 1 \quad \text{ó} \quad x + y = -1,$$

y si $\lambda = \pi$ la ecuación (2.17) toma la forma

$$1 = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2,$$

y en consecuencia se tienen las dos rectas

$$x - y = 1 \quad \text{ó} \quad x - y = -1.$$

Para tener una elipse, $\Delta < 0$, y en consecuencia $\cos^2 \lambda < 1$, esto a su vez implica que $\cos \lambda < 1$, y por consiguiente se obtiene que $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi$.

Para obtener una hipérbola se necesita que $\Delta > 0$, es decir, que $\cos^2 \lambda > 1$, pero esto implica, dado lo que se conoce sobre la función coseno, que λ debe ser un número imaginario.

En este último caso se obtienen algunos resultados, por ejemplo, si se considera que λ es de la forma $\lambda = i\phi$ donde ϕ es real, se obtiene extensiones para las funciones hiperbólicas. Para ello se deben usar las ecuaciones (2.1) y (2.2) como sigue

$$\operatorname{senh}_\lambda \theta = \operatorname{sen}_\lambda i\theta = \operatorname{csc} \lambda \operatorname{sen} i\theta = \operatorname{csch} \phi \operatorname{senh} \theta. \quad (2.18)$$

De forma equivalente

$$\operatorname{cosh}_\lambda \theta = \operatorname{cos}_\lambda i\theta = \operatorname{cos} i\theta - \operatorname{cos} \lambda \operatorname{sen}_\lambda i\theta = \operatorname{cosh} \theta - \operatorname{coth} \phi \operatorname{senh} \theta. \quad (2.19)$$

Para resolver las ecuaciones (2.18) y (2.19) en términos de $\operatorname{cosh} \theta$ y $\operatorname{senh} \theta$, se deben utilizar las identidades hiperbólicas básicas, lo cual lleva a una identidad en términos de la trigonometría no convencional:

$$\operatorname{cosh}^2 \theta - \operatorname{senh}^2 \theta = 1 = \operatorname{cosh}_\lambda^2 \theta + 2 \operatorname{cosh} \phi \operatorname{senh} \theta \operatorname{cosh}_\lambda \theta + \operatorname{senh}_\lambda^2 \theta. \quad (2.20)$$

Puede observarse la gran similitud entre la ecuación anterior y la ecuación (2.16). Esta relación sugiere que pueden encontrarse de forma equivalente a como se hizo para las funciones $\operatorname{sen}_\lambda$ y $\operatorname{cos}_\lambda$, identidades para las funciones hiperbólicas no convencionales $\operatorname{cosh}_\lambda$ y $\operatorname{senh}_\lambda$.

Puede concluirse que la trigonometría no convencional que se trabajó en el presente capítulo es una extensión de la trigonometría clásica; cuando el ángulo λ es $\frac{\pi}{2}$ se tienen los resultados clásicos de la trigonometría convencional.

En analogía con las funciones circulares de la trigonometría convencional, la ecuación (2.17) sugiere el que se puede obtener de forma análoga funciones elípticas y funciones parabólicas para dicha trigonometría, dependiendo del discriminante de dicha ecuación, y que para el caso en el que dicho discriminante es positivo, considerar valores complejos de λ genera las funciones hiperbólicas de la trigonometría no convencional.

Bibliografía

- [1] Gilberto Arenas. “Demostración de la desigualdad triangular para ángulos en \mathbb{R}^3 ”.
Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Vol XII, No. 1, 2004, pp. 73–78.
- [2] Marcel Berguer. *Geometry I – II*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.
- [3] C.H. Edwards y David E. Penney. *Cálculo con geometría analítica*. 4^a Ed. Prentice-Hall, México, 1994.
- [4] Francis G. Florey. *Fundamentos de Álgebra y aplicaciones*. Editorial Prentice-Hall Internacional, México, 1980.
- [5] Stanley I. Grossman. *Álgebra Lineal*. Mc Graw Hill Interamericana, México, 1996.
- [6] Carlos Ivorra. *Geometría*. Documento electrónico descargado en 01/02/2006:
<http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Geometria.pdf>
- [7] Bernardo Mayorga y Gilberto Arenas. “Bolas no convexas”. *Lecturas Matemáticas*.
Volumen 24, No. 1, 2004, pp. 39–51.
- [8] Allen Strand and F. Max Stein. “Quasi-Trigonometry”. *Am. Math. Mon.*, Vol. 69,
1962, pp. 143–147.