Diferenciabilidad de multifunciones y aplicaciones en el contexto difuso

Alexánder Reátiga Villamizar

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga

2010

Diferenciabilidad de multifunciones y aplicaciones en el contexto difuso

Alexánder Reátiga Villamizar

Trabajo presentado como requisito parcial para optar el título de Magister en Matemáticas

Director
Mg. GILBERTO ARENAS

Co-director
Ph.D. ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2010

A la memoria de mis padres

Abel y Helena.

Agradecimientos

Agradezco primero a Dios por darme esta oportunidad. A María Yorlí mi esposa, Alex Alberto y Thomas Esteban mis amados hijos por permitirme el tiempo y acompañarme en los momentos difíciles. A la señora Adela González, quien ha sido un apoyo incondicional desde mis primeros días de universidad.

En la parte profesional quiero agradecer especialmente a los profesores Mg. Gilberto Arenas Díaz y Ph.D. Elder Jesus Villamizar Roa, director y codirector de este trabajo de grado, ellos han sido pieza fundamental como apoyo profesional y personal en el desarrollo de mis estudios de maestría.

Agradezco a algunos profesores de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, entre ellos: Ph.D. Sofía Pinzón Decana de la Facultad de Ciencias, Ph.D. Andrés Montoya Coordinador de la Maestría en Matemáticas, Ph.D. Gabriel Yañez Canal por su voto de confianza al principio de mis estudios, Ph.D. Sonia Sabogal, Ph.D. Bernardo Mayorga, Mg. Arnoldo Teheran y Mg. Edilberto Reyes por su compromiso y dedicación en la orientación en las diferentes materias. A los profesores Ph.D. Javier Camargo y Mg. Solange Roa, por sus consejos y apoyo.

Agradezco también a mis compañeros de estudio, William, Sergio, Olga, Gladys, Elizabeth, René, Sterling, Tilson, Duwáng, Arturo y Francisco, igualmente agradezco de manera especial la colaboración prestada por Claudia Garavito y Rosalba Puentes, secretarias de la Escuela de Matemáticas de la UIS.

Y a todas la personas que me han dado ánimo en algún momento de mi vida, a todos ellos...

Muchas gracias.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Tabla de símbolos

$\mathcal{P}(X)$	Conjunto de partes de X.
$F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$	Multifunción F de X en partes de Y.
$F(x)$	Imagen de la multifunción F en el punto x.
$F^{\omega}(C)$	Imagen inversa del conjunto cerrado C, bajo la multifunción F.
$\overline{F(x)}$	Adherencia o clausura del conjunto $F(x)$.
$coF(x)$	Envolvente convexa del conjunto $F(x)$.
$\mathfrak{B}(Y)$	σ-álgebra de Borel asociada al espacio Y.
$\mathcal{A} \times \mathfrak{B}(Y)$	Producto de las σ-álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathfrak{B}(Y)$.
$\mathcal{A} \bigotimes \mathfrak{B}(Y)$	La σ-álgebra generada por $\mathcal{A} \times \mathfrak{B}(Y)$ en el espacio producto.
GrF	Gráfico de la multifunción F.
σ_A	Función soporte asociada al conjunto A.
$H(A, B)$	Distancia de Hausdorff entre los conjuntos A y B.
$u : X \longrightarrow [0, 1]$	Conjunto difuso definido sobre X.
$\mathcal{F}(X)$	La colección de todos los conjuntos difusos sobre X.
$u(x)$	Valor de pertenencia del elemento x al conjunto difuso u.
χ_A	Función característica del conjunto A.
$u \vee v$	Unión de los conjuntos difusos u y v.
$u \wedge v$	Intersección de los conjuntos difusos u y v.
u^c	Complemento del conjunto difuso u.
$[u]^{\alpha}$	α-nivel del conjunto difuso u.
$\mathcal{K}^n$	Familia de conjuntos difusos sobre $\mathbb{R}^n$ con α-niveles no vacios y compactos.

$\mathcal{K}_c^n$	Familia de conjuntos difusos sobre $\mathbb{R}^n$ con α-niveles no vacios, compactos y convexos.
$\mathcal{F}^n$	Familia de conjuntos difusos u, tal que $u \in \mathcal{K}_c^n$ y además u es semicontinuo superior.
$\mathcal{F}_0(X)$	Familia de conjuntos difusos semicontinuos superiores con α-niveles no vacios, compactos y convexos sobre un espacio de Banach reflexivo X.
$D(u,v)$	Distancia entre los conjuntos difusos u y v.
$\mathcal{B}(X)$	Colección de subconjuntos no vacios, cerrados, acotados y convexos de X.
$\mathfrak{L}(X)$	Espacio normado en el cual se sumerge $\mathcal{B}(X)$.
$\pi : \mathcal{B}(X) \to \mathfrak{L}(X)$	Sumergimiento de $\mathcal{B}(X)$ en $\mathfrak{L}(X)$.
$\widehat{A}$	Imagen de A bajo el sumergimiento π, $A \in \mathcal{B}(X)$.
$\mathfrak{D}(\langle A,B\rangle, \langle C,D\rangle)$	Distancia entre $\langle A,B\rangle$ y $\langle C,D\rangle$ con $\langle A,B\rangle, \langle C,D\rangle \in \mathfrak{L}(X)$.
$\widehat{F}'(x_0)$	π-derivada de la multifunción o multifunción difusa F en el punto x_0.
$A \ominus_H B$	Diferencia de Hukuhara entre A y B, con $A, B \in \mathcal{B}(X)$.
$D_H F(t_0)$	Derivada de Hukuhara de la multifunción F en el punto t_0.
$diam(A)$	Diámetro del conjunto A.
$C(Y)$	Familia de subconjuntos no vacios, cerrados y acotados de Y.
$C_0(Y)$	Familia de subconjuntos no vacios, cerrados, acotados y convexos de Y.
$K(Y)$	Familia de subconjuntos no vacios y compactos de Y.
$K_0(Y)$	Familia de subconjuntos no vacios, compactos y convexos de Y.
$\\|A\\| = \sup\limits_{a \in A} \\|a\\|$	Diámetro del conjunto A.
$\mathcal{D}_{x_0}^F F$	Diferencial de Fréchet de la multifunción F en el punto x_0.
$\mathcal{D}_{x_0}^G F$	Diferencial de Gâteaux de la multifunción F en el punto x_0.
$u \ominus_H v$	Diferencia de Hukuhara entre los conjuntos difusos u y v.
Y^*	Dual topológico del espacio Y.
$\mathbb{D}_{x_0}^F(F)$	Diferencial de Fréchet de la multifunción difusa F en el punto x_0.
$\mathbb{D}_{x_0}^G(F)$	Diferencial de Gâteaux de la multifunción difusa F en el punto x_0.
$\mathbb{D}_{x_0}^{Wf}(F)$	Diferencial débil de Fréchet de la multifunción difusa F en el punto x_0.
$\mathbb{D}_{x_0}^{WG}(F)$	Diferencial débil de Gâteaux de la multifunción difusa F en el punto x_0.
$A \ominus_g B$	Diferencia generalizada de Hukuhara entre los conjuntos A y B.

Título: Diferenciabilidad de multifunciones y aplicaciones en el contexto difuso*
Autor: Alexánder Reátiga Villamizar**

Palabras claves: multifunciones, funciones difusas, diferenciación, ecuaciones diferenciales difusas.

Descripción

En este trabajo de grado de Maestría en Matemáticas, se presenta inicialmente una revisión bibliográfica respecto al cálculo de multifunciones y multifunciones difusas; en particular se da una revisión de la teoría preliminar de espacios de conjuntos difusos, continuidad y diferenciabilidad de multifunciones, medibilidad e integrabilidad de multifunciones; y posteriormente, se hace un análisis más exhaustivo relativo a la diferenciabilidad de multifunciones y diferenciabilidad de multifunciones difusas. La presentación de la temática en este trabajo, se da respetando el orden cronológico en el cual han aparecido los resultados relativos a este tema de investigación.

En cuanto al caso de diferenciabilidad de multifunciones, se exponen las ideas presentadas en un principio por M. Hukuhara [14], H. T. Banks & M. Q. Jacobs [2], F. S. de Blasi [5], y trabajos más recientes como los de A-G. M. Ibrahim [15] y B. Bede & S. G. Gal [3].

Respecto a la diferenciabilidad de las multifunciones difusas, se ha hecho una revisión de los trabajos presentados por M. Puri & D. Ralescu [27], O. Kaleva [16, 17], Seikkala [35], C. Wu & S. Song & E. Stanley Lee [42], B. Bede & S. G. Gal [4] y recientemente por Román-Flores & Rojas-Medar [33].

Retomando las ideas presentadas por L. Stefanini & B. Bede [38] y L. Stefanini [37], sobre la diferencia generalizada de Hukuhara [14] y la diferenciabilidad de multifunciones del tipo $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^1$, siendo $\mathcal{F}^1$ la clase de conjuntos difusos definidos sobre $\mathbb{R}$ que son normales, convexos, semicontinuos superiores y con soporte compacto; se hace un aporte a esta teoría al introducir una nueva definición de diferenciabilidad para multifunciones difusas del tipo $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$. La nueva definición de diferenciabilidad se logra gracias a algunas propiedades interesantes que tiene la diferencia generalizada de Hukuhara. De igual forma se demuestra que esta nueva definición de diferenciabilidad de multifunciones difusas, generaliza algunas definiciones existentes en la literatura, como son las definiciones que aparecen en [16, 17, 26, 36, 3]. También se utiliza esta nueva definición de diferenciabilidad para mostrar la existencia de solución al problema de Cauchy en el contexto difuso. Finalmente se hacen sugerencias para posibles trabajos futuros donde tendría aplicación esta noción de diferenciabilidad, resaltando de esta manera la importancia de ella. Estos aspectos constituyen el aporte novedoso de esta tesis de Maestría.

*Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Maestría en Matemáticas.
Director Mg. GILBERTO ARENAS.
Co-director Ph.D. ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA

Title: Differentiability of set-valued functions and applications in the fuzzy context*
Author: Alexánder Reátiga Villamizar**

Key words: Fuzzy-set-valued mapping, differentiation, fuzzy differential equation.

Description

In this Master degree thesis, it presents a bibliography review about some topics such as a calculus of set-valued functions and a calculus of fuzzy set-valued functions, continuos set-valed functions and continuos fuzzy set-valed functions, measurability of set-valued functions and fuzzy set-valued functions and integrability of set-valued functions and fuzzy set-valued functions. However, great emphasis has been made about differentiability of set-valued functions and fuzzy set-valued functions.

The presentation of the subjects in this work, has become somehow respecting the chronology through which have come the ideas and concepts related to this topics. Being aware that the historically worked first as it relates to the integration of set-valued functions before the differentiability of them.

Regarding the case of differentiability of set-valued functions, it presents the ideas given in the beginning by M. Hukuhara [14], H. T. Banks & Q. Jacobs [2], F. S. de Blasi [5], and more recent works such as A-G. M. Ibrahim [15] and B. Bede & S. G. Gal [3].

With regard to the differentiability of fuzzy set-valued functions, there has been a review of the works presented by M. Puri & D. Ralescu [27], O. Kaleva [16, 17], Seikkala [35], C. Wu & S. Song & E. Stanley Lee [42] and recently by Román-Flores & Rojas-Medar [33].

Returning to the ideas presented by L. Stefanini & B. Bede [38] and L. Stefanini [37], on generalized difference of Hukuhara [14] and differentiability of set-valued functions of the type $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^1$, is a valuable contribution to this theory by introducing a new definition of differentiability for fuzzy set-valued functions of the type $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$, this new notion of differentiability is called (gH-differentiability). The new definition of differentiability is achieved thanks to some interesting properties which have the generalized difference of Hukuhara. Also it is shown that this new differentiability for fuzzy set-valued functions generalizes others definitions that there exists in the literature, such as the definitions give in [16, 17, 26, 36, 3]. Also use this new definition of differentiability (gH-differentiability) to show the existence of solution of the Cauchy problem in the fuzzy context.

Finally suggestions are made for possible future works which would apply this new notion of differentiability, thus highlighting the importance of it.

*Degree Work

** Faculty of Sciences, Mathematics School, Mathematics Master.
Director Mg. GILBERTO ARENAS.
Co-director Ph.D. ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA

Introducción

La teoría de conjuntos difusos aparece alrededor del año 1965, con el trabajo pionero de Zadeh [44] y por esa misma época comienza a desarrollarse fuertemente el llamado análisis multívoco, cuando Aumann [1] generaliza las ideas de los trabajos de Kudō [22] y Richter [30] sobre la integral de una multifunción; y posteriormente Debreu [9] generaliza el trabajo de Aumann. Estas dos teorías tienen múltiples aplicaciones en campos como la matemática pura y la matemática aplicada, también en ciencias de la ingeniería y las ciencias sociales. Particularmente las multifunciones tienen aplicaciones en problemas de control y teoría de ecuaciones contingentes, matemáticas económicas y en varias ramas del análisis, como por ejemplo en el estudio de subdiferenciales de funciones convexas, (ver [2] y referencias que allí se encuentran).

En los últimos años estas dos teorías (conjuntos difusos y análisis multívoco) se han acercado estrechamente, apareciendo así el llamado análisis multívoco difuso como una fusión entre ellas dos. Mas concretamente, el análisis multívoco difuso aparece alrededor del año 1978 cuando Kwakernaak [23] introduce el concepto de variable difusa aleatoria, y toma fuerza a mediados de la década de los 80, con el trabajo de Puri & Ralescu [28], quienes generalizan el concepto de variable difusa aleatoria presentado por Kwakernaak [23] e introducen el concepto de esperanza de la misma. Estos trabajos se realizan como respuesta a la necesidad de modelar matemáticamente problemas de naturaleza difusa o no determinística, donde las herramientas de la matemática clásica no son suficientes para resolver este tipo de problemas, ya que las leyes conocidas (teoría de probabilidades, ecuaciones diferenciales, etc.) no son aplicables, o las leyes necesarias para resolver este tipo de problemas no son del todo conocidas aún. Por ejemplo, problemas que tienen que ver con el comportamiento humano o problemas que tratan de modelar el comportamiento de micropartículas (mecánica cuántica), ya que no se puede describir su evolución en el tiempo, a partir de un estado inicial dado.

Últimamente el análisis difuso multívoco ha tenido un vertiginoso avance y éste se debe básicamente a la diversidad y riqueza de los conceptos y técnicas que allí se manejan, y a las interesantes aplicaciones que esta teoría provee.

Naturalmente los objetos de estudio del análisis multívoco son las multifunciones, definidas estas como aplicaciones $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$, siendo X y Y conjuntos no vacios, tal que $F(x) \in \mathcal{P}(Y)$, $F(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$, donde $\mathcal{P}(Y)$ denota el conjunto de partes de Y. Los objetos de estudio del análisis multívoco difuso son las multifunciones difusas, siendo estas, multifunciones en las cuales los conjuntos de la imagen son conjuntos difusos sobre Y, esto es $F : X \longrightarrow [0,1]^Y$.

Surgidas estas dos teorías (análisis multívoco y análisis multívoco difuso), es importante analizar qué tipo de resultados de los que se dan en la teoría del análisis clásico se preservan en estas. En este sentido, hoy en día se conoce una amplia gama de trabajos que versan sobre el cálculo de multifunciones y multifunciones difusas; se conocen resultados en estas dos teorías que van desde la diferenciabilidad de multifunciones y multifunciones difusas, medibilidad de multifunciones y multifunciones difusas, multifunciones y multifunciones difusas integrables, ecuaciones diferenciales difusas e inclusiones diferenciales, e inclusive resultados equivalentes a algunos del análisis funcional como lo es el Teorema de Banach-Steinhaus.

Respecto al cálculo de multifunciones (análisis multívoco), primero se desarrolló la integración de multifunciones como se puede apreciar en los trabajos de Kudō [22], Richter [30], Aumann [1] y Debreu [9]. En cuanto a la diferenciación de multifunciones, el primero en presentar una definición de diferenciabilidad fue M. Hukuhara [14], concepto de diferenciabilidad al cual autores posteriores se refieren a el como la diferenciabilidad en el sentido de Hukuhara y la denotan por H-diferenciabilidad o Hukuhara-diferenciabilidad. Sin embargo, los primeros en presentar un estudio detallado en cuanto al cálculo diferencial de multifunciones y ejemplos de multifunciones diferenciables, fueron H. T. Banks y M. Q. Jacobs [2]. En el artículo [2] se plantea una definición de derivada de una multifunción que los autores llamaron π-derivada. En el caso de la π-diferenciabilidad de multifunciones, se hace necesario utilizar el teorema del sumergimiento de Rådström [29], el cual, en términos generales, establece que la colección $\mathcal{B}(X)$ de subconjuntos no vacíos, cerrados, acotados y convexos de un espacio de Banach reflexivo X, puede ser sumergido en un espacio normado, lo que permite definir la diferencial de una multifunción basados en el concepto de una función diferenciable entre espacios normados.

En el caso de la H-derivada [14] y de la derivada generalizada [4], los autores se basan en la llamada H-diferencia entre conjuntos, definida sobre la colección $\mathcal{B}(X)$ de subconjuntos cerrados, acotados, convexos y no vacíos de un espacio de Banach reflexivo, lo cual permite definir la derivada a través de un cociente de diferencias, análogo al caso clásico de funciones reales. Sin embargo, la noción de H-derivada tiene ciertas desventajas ya que existen multifunciones de una estructura simple, como es el caso de la multifunción $F(t) = [-t^2, t^2],\ t \in \mathbb{R}$, la cual no es H-diferenciable en $t_0 = 0$.

Existen otras definiciones de diferenciabilidad de multifunciones definidas en subconjuntos abiertos de un espacio de Banach X, sobre la colección de subconjuntos no vacios, acotados y cerrados de un espacio de Banach Y, como son las llamadas: Fréchet diferenciabilidad de multifunciones presentada por De Blasi [5] y Gâteaux diferenciabilidad de multifunciones presentada por Ibrahim [15].

El concepto de diferenciabilidad para multifunciones difusas ha sido estudiado por varios autores y desde diferentes puntos de vista. Los primeros en estudiar este tipo de multifunciones diferenciables, fueron Puri & Ralescu [27], quienes hacen un estudio análogo al de H. T. Banks $\&$ Q. Jacobs [2] pero en el contexto difuso. Puri $\&$ Ralescu en [27], definen la π-diferenciabilidad y la H-diferenciabilidad de multifunciones difusas. Para obtener estas dos definiciones, los autores hacen una extensión del Teorema del sumergimiento de Rådström [29], pero esta vez aplicado a $\mathcal{F}_0(X)$ (la colección de subconjuntos difusos sobre un espacio reflexivo X, que son compactos, convexos y semicontinuos superiores). El concepto de H-diferenciabilidad, debido a Puri $\&$ Ralescu [27] ha sido estudiado y aplicado por muchos matemáticos como Ding $\&$

Kandel [11], Kaleva [16, 17], Seikkala [35] y Wu $\&$ Song $\&$ Stanley Lee [42] en el contexto de las ecuaciones diferenciales difusas. Sin embargo la H-diferenciabilidad de multifunciones difusas tiene ciertas limitaciones ya que existen multifunciones como $F : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{F}^1$ definida por $F(x) = c \cdot g(x)$, que no son H-diferenciables cuando $g'(x_0) < 0$, (donde $c \in \mathcal{F}^1$, siendo $\mathcal{F}^1$ la colección de conjuntos difusos definidos sobre $\mathbb{R}$ que son normales, convexos, semicontinuos superiores y con soporte compacto; y $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ g$ diferenciable en $x_0 \in (a, b)$). Esta dificultad es resuelta por B. Bede $\&$ S. G. Gal [3, 4] al introducir la diferenciabilidad fuertemente generalizada de multifunciones difusas de este tipo.

Goetschel $\&$ Voxman en [13] introdujeron la noción de derivada para aplicaciones difusas de una variable, y Syau [43] extiende la definición de Goetschel $\&$ Voxman [13] para aplicaciones difusas en varias variables. Por otro lado, los conceptos de Fréchet diferenciabilidad [5] y Gâteaux diferenciabilidad [15] de multifunciones, han sido extendidos al contexto de las multifunciones difusas por Román-Flores $\&$ Rojas-Medar [33], donde también presentan los conceptos de multifunciones difusas Fréchet diferenciables débilmente y Gâteaux diferenciables débilmente.

El objetivo de esta tesis de maestría, es realizar una revisión sobre las diferentes definiciones de diferenciabilidad que existen para multifunciones y para multifunciones difusas y presentar un aporte a dicha teoría. Basados en la H-diferencia generalizada para elementos de $\mathcal{K}_c^n$ (el espacio de subconjuntos no vacios, compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$), introducida por L. Stefanini en [37], se presenta una nueva definición de diferenciación para multifunciones difusas del tipo $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ donde $T = (a, b) \subset \mathbb{R}$ y $\mathcal{F}^n$ son todos los conjuntos difusos definidos sobre $\mathbb{R}^n$ que son compactos, convexos, semicontinuos superiores y no vacios, y se muestra que esta nueva definición generaliza otras definiciones existentes en la literatura, como son las encontradas en [3, 16, 36, 26], además que esta nueva definición es consistente al mostrar que respeta algunas reglas del cálculo. De igual forma se utiliza la nueva definición de diferenciabilidad para mostrar la existencia de solución del problema de Cauchy en el contexto difuso.

La estructura de éste trabajo es la siguiente. En el Capítulo 1 se presentan los conceptos previos que serán utilizados a lo largo del trabajo. En el Capítulo 2 se presentan las ideas expuestas por H. T. Banks $\&$ M. Q. Jacobs [2] quienes aprovechando el Teorema del sumergimiento de Rådström definen la diferencial de multifunciones definidas entre espacios de Banach y las multifunciones H-diferenciables. De igual manera se presentan los conceptos de multifunciones Fréchet y Gâteaux diferenciables, ideas expuestas en el trabajo de De Blasi [5], Ibrahim [15] y Román-Flóres $\&$ Rojas-Medar [33]. En el Capítulo 3 se exponen las ideas de M. Puri $\&$ D. Ralescu [27] quienes aplican el teorema del sumergimiento de Rådström a la colección $\mathcal{F}_0(X)$ de conjuntos difusos convexos, semicontinuos superiores y con α-niveles compactos definidos sobre un espacio de Banach $X,$ para definir la diferencial de una multifunción difusa utilizando el concepto clásico de diferenciabilidad de una función entre espacios normados, y también se presenta el concepto de multifunciones difusas Hukuhara diferenciables. Se presenta la extensión que hacen Román-Flores $\&$ Rojas-Medar [33] sobre los conceptos de Fréchet diferenciabilidad y Gâteaux diferenciabilidad al contexto de las multifunciones difusas, extensión que se hace aprovechando las ideas de Fréchet y Gâteaux diferenciabilidad de multifunciones, trabajos presentados por De Blasi [5] e Ibrahim [15]. También se presenta el equivalente al Teorema del valor medio en el contexto difuso. En el capítulo 4 basados en la generalización que hace L. Stefanini [37] de la diferencia de Hukuhara para elementos de $\mathcal{K}_c^n,$ se propone otra definición de diferenciabilidad de multifunciones del tipo $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n,$ donde $T = (a, b) \subset \mathbb{R}$ y se demuestra que esta nueva definición generaliza a otras definiciones existentes en la literatura, estos resultados hacen parte del *preprint* [40]. En el Capítulo 5 se utiliza la nueva definición de diferenciabilidad de una multifunción difusa para aplicarla a la resolución del problema de valor inicial asociado a una ecuación diferencial difusa. Los resultados contenidos en los capítulos 4 y 5 constituyen los aportes novedosos de este trabajo de tesis. En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones que se emanan de este trabajo y se propone una posible utilización del mismo para aplicarlo en estudios futuros.

Capítulo 1

Multifunciones y conjuntos difusos

El objeto de estudio del análisis multívoco son las multifunciones y sus propiedades. En este primer capítulo se presentan algunos conceptos relativos a la teoría de multifunciones, incluyendo definición, selecciones y medibilidad, continuidad de multifunciones. Adicionalmente se revisa la definición de conjuntos difusos, operaciones básicas entre conjuntos difusos; se presenta el concepto de α-nivel de un conjunto difuso y sus propiedades. También se expone el Teorema de Representación de Negoita $\&$ Ralescu, herramienta imprescindible para establecer, en el análisis difuso, resultados paralelos a los que se dan en el análisis clásico. El capítulo termina, definiendo el espacio $\mathcal{K}^n$ de conjuntos difusos compactos sobre $\mathbb{R}^n$.

1.1. Multifunciones

Definición 1.1 ([2]). *Sean X e Y conjuntos no vacios. Una multifunción es una aplicación $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ tal que $F(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$, siendo $\mathcal{P}(Y)$ el conjunto de partes de Y.*

Observación 1.1. *Nótese que toda función clásica $f : X \longrightarrow Y$ define una multifunción, $F(x) = \{f(x)\}$, para todo $x \in X$.*

Ejemplo 1.1. *Sea $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$F(t) = [-t^2, t^2].$$

Ejemplo 1.2. *Sea $M = \{p = (h, k, r) \in \mathbb{R}^3 | r \geq 0\}$ y $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:*

$$F(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - h)^2 + (y - k)^2 \leq r^2\}.$$

Definición 1.2. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida*[1] *y $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Se dice que F es medible si*

$$F^\omega(C) = \{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}, \quad \forall C \subseteq \mathbb{R}^n, \quad C \text{ cerrado.}$$

Ejemplo 1.3 ([31])**.** *Sean $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción medible, entonces:*

a) $F_1 : X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *definida por* $F_1(x) = \overline{F(x)}$ *es medible.*

b) $F_2 : X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *definida por* $F_2(x) = coF(x)$ *es medible, donde* $coF(x)$ *denota la envolvente convexa*[2] *de* $F(x)$.

1.2. Selecciones y medibilidad

Definición 1.3. *Sea $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción. Una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es llamada una selección de F, si $f(x) \in F(x)$, para todo $x \in X$. Si además f es medible, se dice que f es una selección medible de F.*

Ejemplo 1.4. *Sea $T = [0, b]$. Y considérese la multifunción $F : T \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq t^2\}$. Entonces las funciones $f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, con $0 \leq r \leq t$, $x \leq r$ y $f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, con $0 \leq r \leq t$, $x \leq r$ son selecciones medibles de F.*

Existe una definición más fuerte de medibilidad para multifunciones y es la siguiente.

Definición 1.4. *Sea $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ una multifunción, y denotemos por:*

i. $\mathfrak{B}(Y)$ *la σ-álgebra de Borel en Y.*

[1] Para mayores detalles sobre espacios de medida y funciones medibles, ver [12, 39, 34, 20].

[2] $coF(x) = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \mid \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ a_i \in F(X) \text{ y } 0 \leq \alpha_i \leq 1,\ \forall i \right\}$.

ii. $\mathcal{A}\bigotimes\mathfrak{B}(Y)$ *la σ-álgebra generada en el espacio producto por* $\mathcal{A}\times\mathfrak{B}(Y)$*.*

iii. $GrF=\{(x,y)\in X\times Y \mid y\in F(x)\}$*, el gráfico de* F*.*

Entonces se dice que F es Borel medible si $GrF\in\mathcal{A}\bigotimes\mathfrak{B}(Y)$*.*

Observación 1.2 ([18, 19])**.** *Sean X un espacio completo, μ una medida finita sobre X e Y un espacio métrico completo y separable. Si $F: X\longrightarrow\mathcal{P}(Y)$ es Borel medible, entonces F admite una selección medible en casi todo punto (c.s), es decir, existe $f: X\longrightarrow Y$ tal que f es medible y $f(x)\in F(x)$ en casi todo punto.*

Una clase muy importante de multifunciones son las multifunciones del tipo $F: T\longrightarrow \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$, donde el dominio T es algún subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ denota la colección de subconjuntos no vacíos y compactos de $\mathbb{R}^n$. Sobre $\mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ se define la distancia de Hausdorff de la siguiente manera:

Definición 1.5. *Sean A, $B\in\mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ se define la distancia de Hausdorff entre A y B por*

$$H(A,B)=\max\{h^*(A,B),h^*(B,A)\},$$

donde

$$h^*(A,B)=\inf\{\epsilon>0 \mid A\subseteq N(B,\epsilon)\}$$

y

$$N(B,\epsilon)=\{y\in Y \mid d(y,B)<\epsilon\} \quad y \quad d(y,B)=\inf_{b\in B}\|y-b\|.$$

En este caso se puede caracterizar la medibilidad de estas multifunciones F de la siguiente manera:

Teorema 1.1 ([18, 19, 10])**.** *Sean $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathfrak{B}(\mathrm{K}(\mathbb{R}^n))$ las σ-álgebras de Borel de $\mathbb{R}^n$ y $(\mathrm{K}(\mathbb{R}^n),H)$ respectivamente, donde H denota la distancia de Hausdorff. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i. $F: T\longrightarrow\mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ *es medible;*

ii. $\{t\in T \mid F(t)\in\Delta\}\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$*, para todo* $\Delta\in\mathfrak{B}(\mathrm{K}(\mathbb{R}^n))$*;*

iii. $F^{\omega}(B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, *para todo* $B \in \mathfrak{B}(\mathrm{K}(\mathbb{R}^n))$*;*

iv. $F^{\omega}(A) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, *para todo* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A *abierto;*

v. $F^{\omega}(C) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, *para todo* $C \subseteq \mathbb{R}^n$, C *cerrado;*

vi. $GrF = \{(t, y) \in T \times \mathbb{R}^n \mid y \in F(t)\} \in \mathfrak{B}(T) \bigotimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$*;*

vii. $d(y, F(\cdot))T :\longrightarrow \mathbb{R}$ *es medible,* $\forall y \in \mathbb{R}^n$*;*

viii. $\|F(\cdot)\| : T \longrightarrow \mathbb{R}$ *es medible.*

Si además, F *es a valores compacto-convexos, entonces todas las afirmaciones anteriores son equivalentes a:*

ix. $\sigma_{F(\cdot)}(x)(t) : T \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\sigma_{F(\cdot)}(x)(t) = \sigma_{F(t)}(x)$ *es medible para cada* $x \in \mathbb{R}^n$, *donde* $\sigma_{F(t)}$ *es la función soporte asociada a* $F(t)$, *definida por* $\sigma_{F(t)} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tal que* $\sigma_{F(t)}(x) = \sup\{\langle x, a\rangle \mid a \in F(t)\}$, *donde* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denota el producto interno usual en* $\mathbb{R}^n$.

1.3. Continuidad de multifunciones

Definición 1.6. *Sea* $F : T \longrightarrow \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ *una multifunción. Se dice que* F *es continua en* $t_0 \in T$ *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ *tal que:*

$$H(F(t), F(t_0)) < \epsilon, \text{ para todo } t \in T \text{ con } \|t - t_0\| < \delta.$$

La definición anterior en términos de sucesiones es equivalente a decir que si $(t_n) \subseteq T$ *es una sucesión tal que* $t_n \longrightarrow t_0$, *entonces* $H(F(t_n), F(t_0)) \longrightarrow 0$, *cuando* $n \longrightarrow \infty$.

Ejemplo 1.5. *Sea* $T = [0, b] \subset \mathbb{R}$ *y* $F : T \longrightarrow \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$, *definida por* $F(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq t\}$, *donde* $\|\cdot\|$ *denota la norma usual de* $\mathbb{R}^n$. *Se puede verificar que* T *es continua en todo punto* $t \in [0, b]$*; de hecho, dado* $\epsilon > 0$ *basta tomar* $\delta = \epsilon$ *en la Definición 1.6.*

Ejemplo 1.6. *Sean* A *y* B *los conjuntos de* $\mathbb{R}^2$ *y* M, N *y* P *los subconjuntos de* $(0, 1)$ *definidos de la siguiente manera:*

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x - x^2,\ -2 \leq x \leq 0\}$,

- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x - x^2,\ 0 \leq x \leq 2\}$,

- $M = \{t \in (0,1) : t \ \ \textit{es irracional}\}$,

- $N = \{t \in (0,1) : t \in \mathbb{Q}, \quad t = \frac{a}{b},\ b \neq 0,\ b \ \ \textit{par}\}$,

- $P = \{t \in (0,1) : t \in \mathbb{Q}, \quad t = \frac{a}{b},\ b \neq 0,\ b \ \ \textit{impar}\}$.

Sean $T = (0,1)$ *y* $F : T \longrightarrow \mathrm{K}(\mathbb{R}^2)$, *definida por:*

$$F(t) = \begin{cases} A, & \text{si} \quad t \in N \\ B, & \text{si} \quad t \in P \\ \{(0,1)\}, & \text{si} \quad t \in M. \end{cases}$$

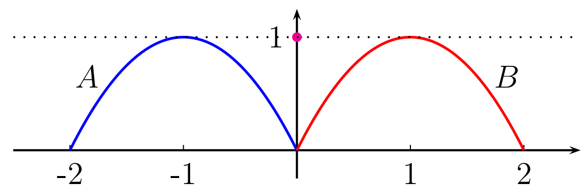

Figura 1.1: Gráfica de la imagen de la multifunción $F(t)$.

Fácilmente se verifica que F *es una multifunción que no es continua en ningún* $t_0 \in T$, *ya que, fijado* $t_0 \in T$ *se tiene que:*

$$H(F(t), F(t_0)) = \begin{cases} 0 & si \quad t_0, t \in M,\ \ ó,\ \ t_0, t \in N,\ \ ó,\ \ t_0, t \in P \\ \sqrt{5} & si \quad t_0 \in N \ \ ó \ \ t_0 \in P \ \ y \ \ t \in M,\ ó,\ \ t \in N \ ó \ \ t \in P \ \ y \ \ t_0 \in M \\ 2 & si \quad t \in N \ \ y \ \ t_0 \in P,\ \ ó,\ \ t_0 \in N \ \ y \ \ t \in P. \end{cases}$$

Y cuando $t \to t_0$, *con* $\|t - t_0\| < \delta$, t *toma valores en los tres conjuntos* M, N *y* P.

1.4. Conjuntos difusos

Sea X un conjunto no vacío. Un conjunto difuso sobre X es una aplicación $u : X \to [0,1]$, donde el valor $u(x)$ denota el grado de pertenencia del elemento x al conjunto difuso u; de esta manera, $u(x) = 1$ indica pertenencia total, $0 < u(x) < 1$ significa pertenencia parcial del elemento x al conjunto difuso, y $u(x) = 0$ significa no pertenencia al conjunto difuso.

Nótese que todo conjunto clásico $A \subseteq X$ es un conjunto difuso, usando como función de pertenencia su función característica, es decir, para $A \subseteq X$ se define

$\chi_A : X \to \{0,1\}$ como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A, \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

A lo largo de esta tesis se denotará por $\mathcal{F}(X)$ la clase de todos los conjuntos difusos definidos sobre X.

Definición 1.7. *Sea $u : X \to [0,1]$ un conjunto difuso. Si existe $x \in X$ tal que $u(x) = 1$, se dice que u es un conjunto difuso normal.*

Ejemplo 1.7. *Sean l la recta de $\mathbb{R}^2$ con ecuación $y = mx+b$ y $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Deseamos establecer que tan cercano está el punto p a la recta l. Un conjunto difuso $u : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ que establezca los valores de pertenencia de un punto $p \in \mathbb{R}^2$ en esta situación, puede ser definido por:*

$$u(p) = \frac{1}{1 + d(p,l)},$$

donde $d(p,l)$ indica la distancia usual desde el punto p hasta la recta l. Así, u asigna valor de pertenencia igual a 1, si el punto p satisface la ecuación de la recta, y a medida que el punto p se aleja de la recta, su valor de pertenencia al conjunto difuso se aproxima a cero.

El conjunto difuso del ejemplo anterior es normal, ya que $u(p) = 1$, cuando $p \in l$. Un modelo gráfico, para una elección particular de m, b, p, y el valor de pertenencia del punto $p = (1, \frac{1}{2})$ al conjunto difuso u se muestra en la siguiente figura.

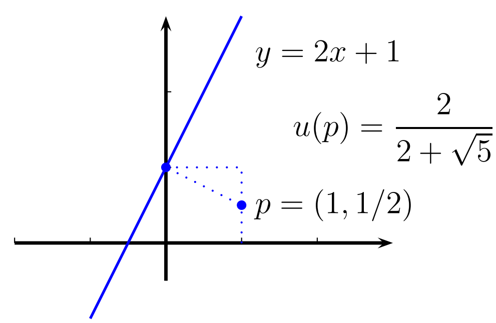

Figura 1.2: Valor de pertenencia del punto p al conjunto difuso u.

1.4.1. Operaciones entre conjuntos difusos

Las operaciones de unión, intersección y complemento para conjuntos difusos sobre un conjunto X, se definen de la siguiente manera:

Definición 1.8. *Sean $u, v \in \mathcal{F}(X)$. Entonces para todo $x \in X$*

i. Unión*:* $(u \vee v)(x) = u(x) \vee v(x) = \text{máx}\{u(x), v(x)\}$;

ii. Intersección*:* $(u \wedge v)(x) = u(x) \wedge v(x) = \text{mín}\{u(x), v(x)\}$;

iii. Complemento*:* $u^c(x) = 1 - u(x)$.

Además, dados $u, v, w \in \mathcal{F}(X)$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

$i.$ $u = (u^c)^c$,

$ii.$ $u \vee v = v \vee u$,

$iii.$ $u \wedge v = v \wedge u$,

$iv.$ $(u \vee v) \vee w = u \vee (v \vee w)$,

$v.$ $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$,

$vi.$ $u \wedge (v \vee w) = (u \wedge v) \vee (u \wedge w)$,

$vii.$ $u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge (u \vee w)$,

$viii.$ $u \vee u = u$,

$ix.$ $u \wedge u = u$,

$x.$ $u \vee (u \wedge v) = u$,

$xi.$ $u \wedge (u \vee v) = u$,

$xii.$ $(u \vee v)^c = u^c \wedge v^c$,

$xiii.$ $(u \wedge v)^c = u^c \vee v^c$.

Una de las diferencias entre conjuntos difusos y conjuntos clásicos, es que los conjuntos difusos en general no satisfacen la ley de contradicción ($A \cap A^c = \emptyset$) y la ley de la media inclusión ($A \cup A^c = X$). Además existen conjuntos difusos que satisfacen que: $u \vee u^c = u$ y $u \wedge u^c = u^c$, que no se da en el contexto de los conjuntos clásicos, (a menos que $A = \emptyset$ o $A = X$, ya que $\emptyset \cap \emptyset^c = \emptyset$, $\emptyset \cup \emptyset^c = \emptyset^c = X$, $X \cap X^c = X^c = \emptyset$ y $X \cup X^c = X$). Por ejemplo, si el conjunto difuso $u : X \longrightarrow [0, 1]$ es definido de tal forma que $u(x) \geq \frac{1}{2}$ para todo $x \in X$, se puede observar fácilmente que $u \vee u^c = u$ y $u \wedge u^c = u^c$; por otra parte, si el conjunto difuso $u : X \longrightarrow [0, 1]$ es definido de tal forma que $u(x) \leq \frac{1}{2}$ para todo $x \in X$, se puede observar fácilmente que $u \vee u^c = u^c$ y $u \wedge u^c = u$. Adicionalmente, si el conjunto difuso $u : X \longrightarrow [0, 1]$ es definido de tal forma que $u(x) = \frac{1}{2}$ para todo $x \in X$, se puede observar fácilmente que $u^c = u \vee u^c = u \wedge u^c = u$.

1.4.2. operaciones algebraicas sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

Si $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$ puede ocurrir que $(u+v)(x) = u(x) + v(x) \notin [0,1]$, y así $(u+v)$ no sería un nuevo elemento de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ bajo la operación $+$. Para sortear esta dificultad se debe pasar por el Principio de Extensión de Zadeh [41] el cual permite extender cualquier función clásica entre dos conjuntos al contexto difuso, y que se puede presentar de la siguiente manera. Dados dos conjuntos X y Y no vacios, una función $f : X \longrightarrow Y$ y A un subconjunto de X se tiene que $f(A) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\}$. El conjunto $f(A)$ se puede describir mediante su función característica de la siguiente manera

$$\chi_{f(A)}(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y \in f(A), \\ 0, & \text{si } y \notin f(A). \end{cases}$$

Se puede ver que

$$\chi_{f(A)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{s \in f^{-1}(y)} \chi_A(s), & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

De esta manera, dada una función $f : X \longrightarrow Y$ esta puede ser extendida al contexto difuso como

$$\overline{f} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y),$$

donde $\overline{f}$ es definida por

$$\overline{f}(u)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} u(x), & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

para todo $y \in Y$.

Ejemplo 1.8. *Supongamos que $X = X_1 \times X_2$, y consideremos la función $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y$. Entonces ella puede ser extendida al contexto difuso como:*

$$\overline{f} : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$$

tal que

$$(u_1, u_2) \mapsto \overline{f}(u_1, u_2),$$

donde $\overline{f}(u_1, u_2)$ *es dada por:*

$$\overline{f}(u_1, u_2)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,x_2)\in f^{-1}(y)} \min\{u_1(x_1), u_2(x_2)\}, & si\ f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & si\ f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

para cada $y \in Y$*, siendo* $f^{-1}(y)$ *el conjunto de todos los puntos* $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ *tal que* $f(x_1, x_2) = y$.

Definición 1.9. *Si se considera* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definida por* $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$*, entonces ella induce una adición sobre* $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *vía el Principio de Extensión de Zadeh, definiendo*

$$(u + v)(x) = \sup_{x_1+x_2=x} u(x_1) \wedge v(x_2),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Análogamente, si $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ *y* $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$*, y* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definida por* $f(x) = \lambda x$ *se induce el producto* λu *sobre* $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *definiendo*

$$(\lambda u)(x) = u(x/\lambda),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

1.4.3. α-niveles

Definición 1.10. *Sean* X *un conjunto no vacío,* $u : X \longrightarrow [0, 1]$ *un conjunto difuso definido sobre* X *y* $\alpha \in [0, 1]$*. Se define el* α*-nivel del conjunto difuso* u *como:*

$[u]^\alpha = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\}$ *para* $\alpha > 0$, *y*

$[u]^0 = \overline{\{x \in X : u(x) > 0\}}$ *(soporte de* u*).*

Definición 1.11. *Si* $[u]^\alpha$ *es un conjunto convexo para todo* $\alpha \in [0, 1]$*,* u *se denomina conjunto difuso convexo.*

Ejemplo 1.9. *El conjunto difuso del Ejemplo 1.7, es un conjunto difuso que es convexo, y además el soporte de este conjunto es* $\mathbb{R}^2$*; de hecho, para todo* $\alpha \in (0, 1]$*, se tiene que* $[u]^\alpha$ *es una franja rectangular infinita, centrada en la recta* l *y de ancho* $2\frac{1-\alpha}{\alpha}$ *y* $u(p) > 0$ *para todo* $p \in \mathbb{R}^2$*, así* $[u]^0 = \mathbb{R}^2$.

En la siguiente figura, se muestra una elección particular de la recta l del ejemplo 1.7 y el α-nivel $\frac{1}{2}$.

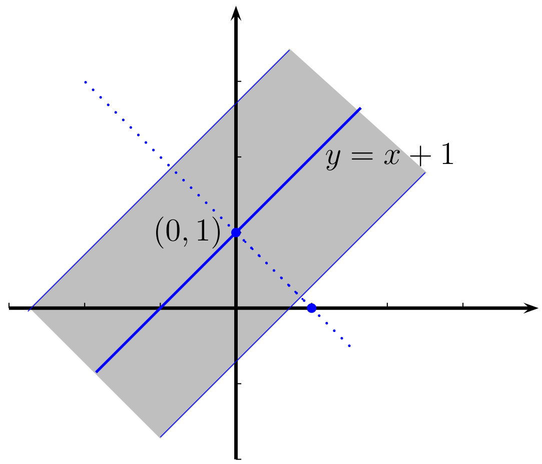

Figura 1.3: Modelo gráfico de $[u]^{1/2}$.

Otra forma de definir los conjuntos difusos convexos es la siguiente:

Definición 1.12 ([44]). *Sea M un espacio vectorial, un conjunto difuso u sobre M es llamado conjunto difuso convexo si*

$$u(\lambda m_1 + (1-\lambda)m_2) \geq \min\{u(m_1), u(m_2)\},$$

para todo $m_1, m_2 \in M,\ \lambda \in [0,1]$.

Observación 1.3. *La familia de niveles $\{[u]^\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ de un conjunto difuso u verifica las siguiente propiedades:*

i. $[u]^0 \supseteq [u]^\alpha \supseteq [u]^\beta$ *para todo* $0 \leq \alpha \leq \beta$.

ii. *Si* $\alpha_n \nearrow \alpha$,[3] *entonces* $[u]^\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n}$, *(esto es, la aplicación de niveles es continua por la izquierda).*

iii. $u = v$ *si y sólo si* $[u]^\alpha = [v]^\alpha$, *para todo* $\alpha \in [0,1]$.

iv. $[u]^\alpha \neq \emptyset$, *para todo* $\alpha \in [0,1]$, *es equivalente a decir que existe* $x \in X$ *tal que* $u(x) = 1$; *es decir u es un conjunto difuso normal.*

[3] $\alpha_n \nearrow \alpha$, significa que: $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

v. *La relación* $u \subseteq v$ *si y sólo si* $u(x) \leq v(x)$, *para todo* $x \in X$ *si y sólo si* $[u]^\alpha \subseteq [v]^\alpha$, *para todo* $\alpha \in [0,1]$, *es un orden parcial en* $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

El siguiente teorema nos dice cuando una familia de subconjuntos no vacios de X determina un conjunto difuso sobre X, permitiéndonos obtener ciertos resultados en el análisis difuso, equivalentes a los resultados del análisis clásico.

Teorema 1.2 (Teorema de Representación de Negoita-Ralescu [24]). *Sea* X *un conjunto no vacío y* $\{N_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ *una familia de subconjuntos de* X *tales que:*

i. $N_0 = X$,

ii. $\alpha \leq \beta$ *entonces* $N_\beta \subseteq N_\alpha$,

iii. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \lim\limits_{p\to\infty} \alpha_p = \alpha$ *entonces* $N_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} N_{\alpha_p}$.

Entonces la función $u : X \longrightarrow [0,1]$ *definida por:*

$$u(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] : x \in N_\alpha\}$$

tiene la propiedad que $[u]^\alpha = N_\alpha$, *para todo* $\alpha \in [0,1]$.

1.4.4. El espacio $\mathcal{K}^n$

Un espacio de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ que tiene propiedades interesantes desde un punto de vista topológico y que ha sido trabajado por muchos autores, es el espacio de conjuntos difusos y compactos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.13. *Definimos el espacio* $\mathcal{K}^n$ *como sigue*

$$\mathcal{K}^n = \{u : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1] : [u]^\alpha \in \mathrm{K}(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in [0,1]\},$$

donde $\mathrm{K}(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \neq \emptyset,\ A \ \ compacto\}$.

Ejemplo 1.10. *El conjunto difuso del Ejemplo 1.7 no pertenece a* $\mathcal{K}^n$, *ya que para todo* $\alpha \in [0,1]$ *se tiene que* $[u]^\alpha \notin \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$, *pues* $[u]^\alpha$ *no es acotado.*

Ejemplo 1.11. *Sea* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-h)^2 + (y-k)^2 \leq 1,\ h, k \in \mathbb{R}\}$. *Considere el conjunto difuso* $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1]$ *definido por:*

$$u(p) = \begin{cases} \frac{1}{1+d(p,A)} & si \quad 0 \leq d(p, A) \leq 10, \\ 0 & si \quad 10 < d(p, A). \end{cases}$$

De esta manera, u es un conjunto difuso compacto y convexo, ya que para todo $\alpha \in (0, 1]$ se tiene que $[u]^\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-h)^2 + (y-k)^2 \leq (\frac{1}{\alpha})^2\}$ y el soporte de u esta dado por $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-h)^2 + (y-k)^2 = (11)^2\}$. (Una representación gráfica del conjunto difuso u, tomando un (h, k) en particular, se muestra en la Figura 1.4).

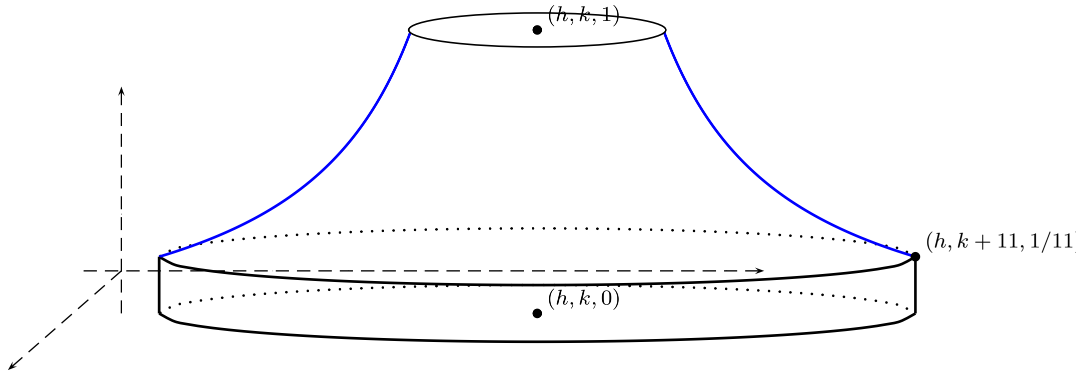

Figura 1.4: Gráfica del conjunto difuso u, tomando un (h, k) en particular.

Definición 1.14. *Sean X un espacio topológico, $u : X \longrightarrow [0, 1]$ un conjunto difuso y $\alpha \in (0, 1)$. Si $u^{-1}(\alpha, 1)$ es abierto, el conjunto difuso u se llama semicontinuo superior.*

Definición 1.15. *Definimos el espacio $\mathfrak{F}^n$ como la familia de conjuntos difusos $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ tal que u es semicontinuo superior y además $[u]^\alpha$ es compacto, convexo y no vacío, para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Una versión particular del teorema de representación de Negoita & Ralescu para $\mathbb{R}^n$ es la siguiente:

Teorema 1.3 ([10]). *Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tales que:*

i. $N_\alpha \in \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$,

ii. $\alpha \leq \beta$ *entonces* $N_\beta \subseteq N_\alpha$, *iii.* $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \lim_{p\to\infty} \alpha_p = \alpha$ *entonces* $N_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\alpha_p}$.

Entonces la función $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ *definida por*

$$u(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \notin N_0, \\ \sup\{\alpha | x \in N_\alpha\} & si \quad x \in N_0, \end{cases}$$

define un conjunto difuso u tal que $[u]^\alpha = N_\alpha$, *para todo* $\alpha \in [0,1]$, *y* $[u]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha>0} N_\alpha} \subseteq N_0$.

Se define una estructura métrica sobre $\mathcal{K}^n$ haciendo:

$$D(u,v) = \sup_{\alpha>0} H([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

donde H denota la distancia de Hausdorff.

Una propiedad interesante de la adición y el producto por escalar en $\mathcal{K}^n$ es la siguiente:

Teorema 1.4 ([27]). *Sean* $u, v \in \mathcal{K}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entonces*

i. $[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$ *y* $[\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$.

ii. $D(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| D(u,v)$ *y* $D(u+w, v+w) = D(u,v)$.

Teorema 1.5 ([28]). *El espacio* $(\mathcal{K}^n, D)$ *es completo.*

Capítulo 2

Diferenciabilidad de multifunciones

En este capítulo presentamos inicialmente el concepto de diferenciabilidad de multifunciones introducido por H. T. Banks & M. Q. Jacobs [2] vía el Teorema del sumergimiento de Rådström [29]. Posteriormente, basados en la diferencia de Hukuhara [14], introducida inicialmente por Hukuhara sobre la colección de subconjuntos no vacíos, cerrados, acotados y convexos de $\mathbb{R}^n$ y posteriormente extendida por H. T. Banks & M. Q. Jacobs a la colección de subconjuntos no vacios, cerrados, acotados y convexos de un espacio de Banach reflexivo[1] X, se presenta el concepto de multifunciones Hukuhara diferenciables. Finalmente se exponen los conceptos de Fréchet y Gâteaux diferenciabilidad de multifunciones entre espacios de Banach, estudiados por varios autores (ver por ejemplo [5, 15, 17, 33, 10]).

2.1. Diferenciabilidad multívoca

Dado un espacio normado X, se denota por $\mathcal{B}(X)$ a la colección de todos los subconjuntos no vacíos, cerrados, acotados y convexos de X. Si $A, B \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, las siguientes operaciones son conocidas como *operaciones de Minkowski*

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\} \quad \text{y} \quad \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

[1] Para consultar sobre espacios reflexivos, ver por ejemplo [6, 21, 12, 39, 34, 20].

Con la adición definida anteriormente $\mathcal{B}(X)$ forma un semigrupo conmutativo que satisface la ley de cancelación [29], es decir, si

$$A, B, C \in \mathcal{B}(X) \quad \text{entonces} \quad A + C = B + C \text{ si y sólo si } A = B.$$

Además, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A, B \in \mathcal{B}(X)$ entonces

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A, \quad 1A = A,$$

y si $\alpha\beta \geq 0$ entonces $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

El Teorema del sumergimiento de Rådström [29] garantiza que si X es un espacio reflexivo, entonces existe un espacio normado $\mathfrak{L}(X)$ en el cual $\mathcal{B}(X)$ puede ser sumergido isométricamente, esto es, existe una aplicación isométrica $\pi : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathfrak{L}(X)$, donde $\mathcal{B}(X)$ es metrizado por la distancia de Hausdorff, haciendo de $\pi(\mathcal{B}(X))$ un cono convexo en $\mathfrak{L}(X)$. El espacio $\mathfrak{L}(X)$ es único, salvo isomorfismos, esto es, si existe otro espacio $\mathfrak{L}_1(X)$ en el cual $\mathcal{B}(X)$ se pueda sumergir isométricamente, entonces $\mathfrak{L}_1(X)$ contiene un subespacio $\mathfrak{N}$ que contiene a $\pi(\mathcal{B}(X))$ y este subespacio $\mathfrak{N}$ es isomorfo a $\mathfrak{L}(X)$.

El espacio $\mathfrak{L}(X)$ se puede obtener de la siguiente manera; se establece una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{B}^2(X) \equiv \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X)$ tomando

$$(A, B) \sim (C, D) \Longleftrightarrow A + D = B + C.$$

La clase de equivalencia que contiene a (A, B) es denotada por $\langle A, B\rangle$; el espacio $\mathfrak{L}(X)$ está dado por el espacio cociente $\mathcal{B}^2(X)/\sim$, y las operaciones de suma y producto por escalar en éste espacio son dadas por:

$$\langle A, B\rangle + \langle C, D\rangle \equiv \langle A + C, B + D\rangle,$$

y si $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha\langle A, B\rangle \equiv \begin{cases} \langle \alpha A, \alpha B\rangle, & \text{si} \quad \alpha \geq 0, \\ \langle |\alpha| B, |\alpha| A\rangle, & \text{si} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Con estas operaciones el espacio $\mathfrak{L}(X)$ es un espacio lineal. El sumergimiento $\pi : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathfrak{L}(X)$ está dado por $\pi(A) \equiv \langle A, 0\rangle,\ A \in \mathcal{B}(X)$, esto es, $\langle A, 0\rangle$ es la clase de equivalencia $\{(A + D, D) \mid D \in \mathcal{B}(X)\}$.

Denotaremos a $\pi(A)$ por $\widehat{A}$; así $\pi(\mathcal{B}(X)) = \widehat{\mathcal{B}(X)}$.

Se define una métrica $\mathfrak{D}_H$ en $\mathfrak{L}(X)$ por:

$$\mathfrak{D}_H(\langle A, B\rangle, \langle C, D\rangle) \equiv H(A + D, B + C),$$

donde H es la distancia de Hausdorff.

El elemento cero de $\mathfrak{L}(X)$ es la clase de equivalencia $\{(D, D) \mid D \in \mathcal{B}(X)\}$ que es denotada por $\langle 0, 0\rangle$.

Como H es invariante por traslaciones[2] y positiva homogénea[3], la relación $\|\langle A, B\rangle\| = \mathfrak{D}_H(\langle A, B\rangle\ \langle 0, 0\rangle)$ define una norma en $\mathfrak{L}(X)$ tal que:

$$\mathfrak{D}_H(\langle A, B\rangle, \langle C, D\rangle) = \|\langle A, B\rangle - \langle C, D\rangle\|.$$

Sean X y Y espacios normados arbitrarios. Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice de orden $o(\|h\|)$ si $\frac{\|f(x)\|}{\|h\|} \to 0$, cuando $\|h\| \to 0$.

Definición 2.1 ([2]). *Sean Y un espacio de Banach reflexivo y X un espacio normado.*

Una multifunción $F : U \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ donde U es un subconjunto abierto de X se llama π-diferenciable en un punto $x_0 \in U$ si la función $\widehat{F} : U \longrightarrow \mathfrak{L}(Y)$ tal que $x \longmapsto \widehat{F}(x) = \langle F(x), 0\rangle$, $x \in U$, es diferenciable en $x_0 \in U$. Como es usual, F es π-diferenciable sobre U si esta es π-diferenciable en todo punto de U.

Si F es diferenciable en $x_0 \in U$, significa que existe un funcional lineal continuo $\widehat{F}'(x_0) : X \longrightarrow \mathfrak{L}(Y)$ tal que

$$\|\widehat{F}(x) - \widehat{F}(x_0) - \widehat{F}'(x_0)(x - x_0)\| = o(\|x - x_0\|). \tag{2.1}$$

Si escribimos $\widehat{F}'(x_0)(\Delta x) = \langle A_{\Delta x}, B_{\Delta x}\rangle$, $\Delta x \in E$ y $A_{\Delta x}, B_{\Delta x} \in \mathcal{B}(Y)$, entonces en términos de la distancia de Hausdorff (2.1) significa que:

$$H(F(x) + B_{x-x_0}, F(x_0) + A_{x-x_0}) = o(\|x - x_0\|).$$

Si X es finito dimensional, con base $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$, entonces $\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \xi_i$, $\Delta x \in X$. Si $\widehat{F}'(x_0)(\xi_i) = \langle A_{\xi_i}, 0\rangle$, $i = 1, 2, \cdots, n$, entonces se dice que F es cónicamente diferenciable

[2] $H(A + C, B + C) = H(A, B)$.
[3] $H(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| H(A, B)$.

en el punto $x_0 \in U$ *y se tiene que:*

$$\widehat{F}'(x_0)(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \langle A_{\xi_i}, 0\rangle.$$

Ejemplo 2.1 ([2])**.** *Sean* X *un espacio normado,* Y *un espacio de Banach reflexivo,* A *un elemento fijo de* $\mathcal{B}(Y)$ *y* r *una función diferenciable,* $r : U \longrightarrow Y$*, donde* U *es un subconjunto abierto de* X*. Considere la multifunción* $F : U \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ *definida por* $F(x) = \{r(x)\} + A,\ x \in U$*. Así,* F *es un conjunto fijo* $A \in \mathcal{B}(Y)$ *moviéndose a lo largo de una curva diferenciable* r *en el espacio* Y*.*

F *es* π*-diferenciable con derivada* $\widehat{F}'(x_0)(\Delta x) = \langle\{r'(x_0)(\Delta x)\}, 0\rangle,\ x_0 \in U,\ \Delta x \in X$*. De hecho*

$$\begin{aligned}
\|\widehat{F}(x) - \widehat{F}(x_0) \ &- \ \langle\{r'(x_0)(x - x_0)\}, 0\rangle\| \\
&= \|\langle\{r(x)\} + A, 0\rangle - \langle\{r(x_0)\} + A, 0\rangle - \langle\{r'(x_0)(x - x_0)\}, 0\rangle\| \\
&= H(\{r(x)\} + A, \{r(x_0) + r'(x_0)(x - x_0)\} + A) \\
&= H(\{r(x)\}, \{r(x_0) + r'(x_0)(x - x_0)\}) \\
&= \|r(x) - r(x_0) - r'(x_0)(x - x_0)\| \\
&= o(\|x - x_0\|).
\end{aligned}$$

Note que $\Delta x \mapsto \langle\{r'(x_0)(\Delta x)\}, 0\rangle$ *es un operador lineal acotado. Es claro que el operador es aditivo en* Δx *y la homogenidad se sigue del hecho de que* $\langle\alpha A, 0\rangle = \alpha\langle A, 0\rangle$ *para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$ *una vez que* $A = \{a\}$ *es un conjunto unitario en* Y*. Finalmente se tiene que*

$$\|\langle\{r'(x_0)(\Delta x)\}, 0\rangle\| \ = \ \|r'(x_0)(\Delta x)\| \ \leq \ \|r'(x_0)\|\|\Delta x\|,\ \Delta x \in E.$$

Si X *es finito dimensional, entonces* F *es cónicamente diferenciable; en efecto si* $\{\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n\}$ *es una base para* X *y* $\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \xi_i$*, entonces*

$$\widehat{F}'(x_0)(\Delta x) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \langle\{r'(x_0)(\xi_i)\}, 0\rangle.$$

2.2. Multifunciones Hukuhara diferenciables

En esta sección se introduce el concepto de H-diferencia entre dos conjuntos $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, presentada por M. Hukuhara en [14] y generalizada por H. T. Banks & M. Q. Jacobs en [2] para el caso en que X es un espacio de Banach reflexivo. Adicionalmente, se expone la H-diferenciabilidad de multifunciones para el caso de $X = \mathbb{R}^n$, que fue el contexto en que M. Hukuhara [14] y T. F. Bridgland [7] desarrollaron sus trabajos.

Definición 2.2. *Sean X un espacio reflexivo y A, $B \in \mathcal{B}(X)$. La diferencia de Hukuhara (H-diferencia) entre A y B denotada por $A \ominus_H B$ si esta existe, se define como el elemento $C \in \mathcal{B}(X)$ tal que $A = B + C$.*

Proposición 2.1. *Es de notar que para A, $B \in \mathcal{B}(X)$ se cumple que:*

i. $A \ominus_H A = \{0\}$.

ii. $(A + B) \ominus_H B = A$.

iii. *Si $A \ominus_H B = C$, entonces C es único.*

iv. $A \ominus_H B \neq A + (-1)B := A - B$.

v. *$A \ominus_H B$ existe sólo si alguna traslación de B está contenida en A.*

vi. *La existencia de $A \ominus_H B$ no implica la existencia de $B \ominus_H A$.*

Definición 2.3 ([14])**.** *Sean $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ y $F : I \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción. F se llama Hukuhara diferenciable en un punto $t_0 \in I$, si existen las diferencias*

$$F(t_0 + \Delta t) \ominus_H F(t_0), \qquad F(t_0) \ominus_H F(t_0 - \Delta t)$$

para $\Delta t > 0$ suficientemente pequeño y existe $D_H F(t_0) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{F(t_0 + \Delta t) \ominus_H F(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{F(t_0) \ominus_H F(t_0 - \Delta t)}{\Delta t} = D_H F(t_0). \tag{2.2}$$

En este caso se dice que $D_H F(t_0)$ es la H-derivada o la derivada de Hukuhara de la multifunción F en el punto $t_0 \in T$. Los límites anteriores son tomados en el espacio $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), H)$. Como es acostumbrado, F se llama Hukuhara diferenciable en I, si F es Hukuhara diferenciable en todo $t \in I$.

Proposición 2.2 ([2])**.** *Sea $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Si una multifunción $F : I \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es Hukuhara diferenciable en $t_0 \in I$ con derivada $D_H F(t_0)$, entonces F es π-diferenciable y*

$$\widehat{F}'(t_0)(\Delta t) = \Delta t \langle D_H F(t_0), 0 \rangle, \ \Delta t \in \mathbb{R}.$$

Proposición 2.3 ([2]). *Sea* $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$. *Si una multifunción* $F : I \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *es Hukuhara diferenciable en* I, *entonces la función real* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$t \longmapsto diam(F(t)),$$

es no decreciente.

2.3. Multifunciones Gâteaux y Fréchet diferenciables

En esta sección introducimos los conceptos de Gâteaux y Fréchet diferenciabilidad para multifunciones definidas entre espacios de Banach arbitrarios. Para mayores detalles se puede consultar [5, 15, 17, 33, 10].

Dado un espacio de Banach Y, se denota por $C(Y)$, $C_0(Y)$, $\mathrm{K}(Y)$ y $\mathrm{K}_0(Y)$, las familias de todos los subconjuntos no vacíos de Y que son cerrados-acotados, cerrados-acotados-convexos, compactos y compactos-convexos, respectivamente.

Análogamente a la Definición 1.5 se tiene la siguiente definición:

Definición 2.4. *La métrica de Hausdorff sobre* $C(Y)$ *se define por:*

$$H(A,B) = \max\{h^*(A,B), h^*(B,A)\},$$

para todo $A,\ B \in C(Y)$, *donde*

$$h^*(A,B) = \inf\{\epsilon > 0 \mid A \subseteq N(B,\epsilon)\},$$

y

$$N(B,\epsilon) = \{y \in Y \mid d(y,B) < \epsilon\} \quad y \quad d(y,B) = \inf_{b \in B} \|y - b\|.$$

Observación 2.1. *Es claro que*

$$h^*(A;B) = 0 \text{ si y sólo si } A \subseteq \overline{B}.$$

Además, dado $\epsilon > 0$, *si* $h^*(A,\{0\}) < \epsilon$ *entonces* $\|A\| < \epsilon$, *y si* $\|A\| < \epsilon$ *se tiene que* $h^*(\{0\},A) < \epsilon$, *donde* $\|A\| = \sup a \in A\|a\|$.

De esta manera $h^*(A,\{0\}) < \epsilon$ *implica que* $H(A,\{0\}) < \epsilon$.

Definición 2.5. *Para todo $A \in C(Y)$ la función soporte σ_A de A es definida sobre Y^**[4] *como:*

$$\sigma_A(y^*) = \sup_{a \in A} y^*(a), \quad \textit{para todo} \;\; y^* \in Y^*.$$

Observación 2.2 ([5, 17, 19, 32])**.** *Si $A, B, C, A_1, B_1 \in C(Y)$. Entonces:*

i. $H(\lambda A, \lambda B) = \lambda H(A, B)$, *para todo* $\lambda \geq 0$.

ii. $H(A + B, A_1 + B_1) \leq H(A + A_1, B + B_1)$.

iii. *Si $A, B \in C_0(Y)$ se tiene que:*

  a. $H(A + C, B + C) = H(A, B)$.

  b. $H(A, B) = \sup_{y^* \in Y^*} |\sigma_A(y^*) - \sigma_B(y^*)|$.

  c. *Para todo $y^* \in Y^*$ se cumple que $\sigma_{A+B}(y^*) = \sigma_A(y^*) + \sigma_B(y^*)$.*

Definición 2.6. *Sean X y Y espacios de Banach, U un subconjunto abierto y no vacío de X. Una multifunción $F : U \longrightarrow C(Y)$ es llamada semicontinua superior en un punto $x_0 \in U$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(x_0, \epsilon)$ tal que $h^*(F(x), F(x_0)) < \epsilon$, siempre que $x \in U$ y $\|x - x_0\| < \delta$. Además si $F(\lambda x) = \lambda F(x)$, $\lambda \geq 0$, $x \in X$, F es llamada homogénea.*

Definición 2.7 (Fréchet diferenciabilidad [5])**.** *Se dice que una multifunción $F : U \longrightarrow C(Y)$ es Fréchet diferenciable en un punto $x_0 \in U$ si existe una multifunción homogénea y semicontinua superior $\mathcal{D}^F_{x_0}(F) : X \longrightarrow C_0(Y)$ tal que*

$$\lim_{\|z\| \to 0} \frac{1}{\lambda} H(F(x_0 + z), F(x_0) + \mathcal{D}^F_{x_0}(F)(z)) = 0.$$

$\mathcal{D}^F_{x_0}(F)$ es llamada la diferencial de Fréchet de F en x_0. Si una multifunción F es Fréchet diferenciable en todo punto $x \in U$, se dice que F es Fréchet diferenciable en U.

Definición 2.8 (Gâteaux diferenciabilidad [15])**.** *Se dice que una multifunción $F : U \longrightarrow C(Y)$ es Gâteaux diferenciable en un punto $x_0 \in U$ si existe una multifunción homogénea y semicontinua superior $\mathcal{D}^G_{x_0}(F) : X \longrightarrow C_0(Y)$ tal que, para todo $z \in X$*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} H(F(x_0 + \lambda z), F(x_0) + \lambda \mathcal{D}^G_{x_0}(F)(z)) = 0.$$

[4] Y^* denota el espacio dual topológico de Y.

$\mathcal{D}^G_{x_0}(F)$ *es llamada la diferencial de Gâteaux de* F *en* x_0. *Si una multifunción* F *es Gâteaux diferenciable en todo punto* $x \in U$, *se dice que* F *es Gâteaux diferenciable en* U.

Teorema 2.1 ([15]). *Si una multifunción* $F : [a,b] \longrightarrow C(Y)$ *es Fréchet (o Gâteaux) diferenciable en* (a,b) *y*

$$\|\mathcal{D}^{F(G)}_t(F)\| \leq k, \ \forall t \in (a,b),$$

entonces $H(F(b), F(a)) \leq k(b-a)$.

Capítulo 3

Diferenciabilidad de multifunciones difusas

En este capítulo inicialmente se presentan algunos conceptos relativos al espacio $\mathcal{F}_0(X)$, una clase particular de conjuntos difusos definidos sobre un espacio de Banach reflexivo X. Basados en las propiedades que tienen los conjuntos difusos de $\mathcal{F}_0(X)$ se introducen varias definiciones de diferenciabilidad de multifunciones difusas; primero de multifunciones definidas sobre espacios normados con imágenes en un espacio de Banach reflexivo; y luego se tratan las multifunciones difusas Hukuhara diferenciables, que son multifunciones con dominio $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, cuyas imágenes pertenecen a $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$. Aprovechando las ideas expuestas en [33], se presentan las multifunciones difusas Fréchet y Gâteaux diferenciables, reglas de cálculo para éstas derivadas y el equivalente al teorema del valor medio en el contexto difuso.

3.1. Aspectos sobre la teoría de multifunciones difusas

Considérese X un espacio de Banach reflexivo. Denotamos por $\mathcal{F}_0(X)$ la familia de conjuntos difusos u sobre X que son:

i. semicontinuos superiores,

ii. conjuntos difusos convexos,

iii. los α-niveles de u son subconjuntos compactos, para todo $\alpha \in [0,1]$.

Note que si $X = \mathbb{R}^n$ entonces $\mathcal{F}_0(X)$ coincide con $\mathcal{F}^n$ de la Definición 1.15.

Teorema 3.1 ([27]). *$(\mathcal{F}_0(X), D)$ es un espacio métrico completo, donde*

$$D(u,v) = \sup_{\alpha>0} H([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

y H denota la distancia de Hausdorff.

El Teorema del sumergimiento de Rådström puede ser aplicado al espacio $\mathcal{F}_0(X)$, definiendo así una estructura lineal sobre $\mathcal{F}_0(X)$ de la siguiente manera:

i. Para todo $u,\ v\ \in \mathcal{F}_0(X)$,

$$(u+v)(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid x \in ([u]^\alpha + [v]^\alpha)\}.$$

ii. Para todo $u \in \mathcal{F}_0(X),\ \ \lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u(\frac{x}{\lambda}), & \text{si} \quad \lambda \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad \lambda = 0,\ x \neq 0, \\ \sup\limits_{y\in X} u(y), & \text{si} \quad \lambda = 0,\ x = 0. \end{cases}$$

Teorema 3.2 ([27]). *Existe un espacio normado $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{F}_0(X)$ puede ser sumergido isométricamente en $\mathcal{X}$.*

El espacio $\mathcal{X}$, se describe de la siguiente manera: Se define una relación de equivalencia en $\mathcal{F}_0(X) \times \mathcal{F}_0(X)$ dada por

$$(u,v) \sim (w,z) \Leftrightarrow u+z = v+w.$$

La clase de equivalencia de (u,v) la denotaremos por $\langle u,v\rangle$. El espacio $\mathcal{X}$ es el conjunto de las clases de equivalencia.

Se define en $\mathcal{X}$ una estructura vectorial haciendo:

i. $\langle u,v\rangle + \langle w,z\rangle = \langle u+w, v+z\rangle$.

ii. $\lambda\langle u, v\rangle = \begin{cases} \langle \lambda u, \lambda v\rangle, & \text{si} \quad \lambda \geq 0, \\ \langle (-\lambda)u, (-\lambda)v\rangle, & \text{si} \quad \lambda < 0. \end{cases}$

El sumergimiento $j : \mathcal{F}_0(X) \longrightarrow \mathcal{X}$ está dado por:

$$j(u) = \langle u, \mathbf{0}\rangle,$$

donde **0** es el conjunto difuso $\chi_{\{0\}}$. También se define una norma en $\mathcal{X}$ haciendo:

$$\|\langle u, v\rangle\| = D(u, v).$$

Definición 3.1 ([27]). *Sean X un espacio normado, U un subconjunto abierto de X y Y un espacio de Banach reflexivo. Una multifunción difusa es una aplicación $F : U \longrightarrow \mathcal{F}_0(Y)$; es decir, F asocia a cada punto $x \in U$ un conjunto difuso $F(x)$ definido sobre Y, tal que $F(x)$ es un conjunto difuso semicontinuo superior, convexo y con α-niveles compactos.*

La siguiente definición debida a M. L. Puri & D. A. Ralescu [27], generaliza la definición de π-diferenciabilidad de multifunciones debida a H. T. Banks & M. Q. Jacobs [2].

Definición 3.2 ([27]). *Una multifunción difusa $F : U \longrightarrow \mathcal{F}_0(Y)$ se llama π-diferenciable en un punto $x_0 \in U$ si la función $\widehat{F} = j \circ F$ es diferenciable en x_0. Esto es, F es diferenciable en $x_0 \in U$ si existe un operador lineal acotado $\widehat{F}'(x_0) : X \longrightarrow \mathcal{Y}$, tal que:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|\widehat{F}(x) - \widehat{F}(x_0) - \widehat{F}'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

donde $\mathcal{Y}$ es el espacio en el cual $\mathcal{F}_0(Y)$ puede ser sumergido isométricamente, según el Teorema de Rådström.

Si X es un espacio finito dimensional, con base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ y si $\widehat{F}'(x_0)(e_k) \in j(\mathcal{F}_0(Y))$ para $k = 1, 2, \cdots, n$, se dice que F es cónicamente diferenciable en el punto $x_0 \in U$.

De esta manera, se ha definido la derivada de una multifunción difusa, utilizando el concepto de una función diferenciable entre espacios normados.

3.2. Multifunciones difusas Hukuhara diferenciables

Sean $u,\ v \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$. Si existe $z \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = v + z$ entonces z es único y es llamado la *diferencia de Hukuhara* entre u y v y es denotada por $u \ominus_H v$.

Definición 3.3 ([27]). *Sea $U = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Una multifunción difusa $F : U \longrightarrow \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ es llamada H-diferenciable (Hukuhara diferenciable) en un punto $x_0 \in U$ si existen las diferencias $F(x_0+t) \ominus_H F(x_0)$, $F(x_0) \ominus_H F(x_0-t)$ para t suficientemente cercano a cero, y existe un elemento $DF(x_0) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ tal que:*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(x_0-t) \ominus_H F(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(x_0) \ominus_H F(x_0-t)}{t} = DF(x_0),$$

$DF(x_0)$ es llamada la H-derivada de la multifunción difusa F en el punto $x_0 \in U$.

La anterior definición generaliza la definición presentada por H. T. Banks & M. Q. Jacobs [2], para el caso de multifunciones.

Proposición 3.1 ([27]). *Si una multifunción difusa $F : U \longrightarrow \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ es H-diferenciable en $x_0 \in U$, entonces F es cónicamente diferenciable en x_0 y*

$$\widehat{F}'(x_0)(t) = t\langle DF(x_0), 0\rangle.$$

3.3. Fréchet y Gâteaux diferenciabilidad de multifunciones difusas

Sea Y un espacio de Banach. Se definen los siguientes espacios de conjuntos difusos sobre Y.

i. $\mathcal{F}C(Y) = \{u : Y \longrightarrow [0,1] \mid [u]^\alpha \in C(Y),\ \text{para todo}\ \alpha \in [0,1]\}$, el espacio de los conjuntos difusos sobre Y, con α-niveles cerrados acotados.

ii. $\mathcal{F}C_0(Y) = \{u : Y \longrightarrow [0,1] \mid [u]^\alpha \in C_0(Y),\ \text{para todo}\ \alpha \in [0,1]\}$, el espacio de los conjuntos difusos sobre Y, con α-niveles cerrados acotados y convexos.

iii. $\mathcal{F}\mathrm{K}(Y) = \{u : Y \longrightarrow [0,1] \mid [u]^\alpha \in \mathrm{K}(Y),\ \text{para todo}\ \alpha \in [0,1]\}$, el espacio de los conjuntos difusos sobre Y, con α-niveles compactos.

iv. $\mathcal{F}\mathrm{K}_0(Y) = \{u : Y \longrightarrow [0,1] \mid [u]^\alpha \in \mathrm{K}_0(Y),$ para todo $\alpha \in [0,1]\}$, El espacio de los conjuntos difusos sobre Y, con α-niveles compactos y convexos.

Si $u,\, v \in \mathcal{F}C(Y)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, son conocidas las siguientes igualdades para todo $\alpha \in [0,1]$:

$$[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha. \tag{3.1}$$

$$[\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha. \tag{3.2}$$

De acuerdo con estas operaciones se tiene que:

i. $u + \chi_{\{0\}} = u = \chi_{\{0\}} + u.$

ii. $\lambda \chi_{\{0\}} = \chi_{\{0\}}.$

La métrica de Hausdorff H puede ser extendida a la familia $\mathcal{F}C(Y)$ como sigue:

$$D(u,v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} H([u]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Observación 3.1. *Las propiedades para la métrica de Hausdorff de la Observación 2.2 también son válidas para D, esto es: Si u, v, w, u_1 y v_1 pertenecen al conjunto $\mathcal{F}C(Y)$. Entonces:*

i. $D(\lambda u, \lambda v) = \lambda D(u,v),$ *para todo* $\lambda \geq 0.$

ii. $D(u+v, u_1+v_1) \leq D(u+u_1, v+v_1).$

iii. *Si $u,\ v \in \mathcal{F}C_0(Y)$ se tiene que:* $D(u+w, v+w) = D(u,v).$

Los detalles de estas propiedades se pueden consultar en [11, 16, 17, 32, 10, 42].

La extensión de h^*, de la Definición 2.4 a D es definida por:

$$D^*(u,v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} h^*([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

para $u,\, v \in \mathcal{F}C(Y)$.

Observación 3.2. *Análogamente a la Observación 2.1 se tiene que para todo $\epsilon > 0$, si*

$$D^*(u, \chi_{\{0\}}) < \epsilon \text{ entonces } D(u, \chi_{\{0\}}) < \epsilon.$$

Definición 3.4. *Si $u \in \mathcal{F}C(Y)$, se define la función soporte de u de la siguiente manera:*

$$\sigma_u : [0,1] \times Y^* \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } \sigma_u(\alpha, y^*) = \sigma_{[u]^\alpha}(y^*) = \sup_{a \in [u]^\alpha} y^*(a),$$

donde Y^* es el espacio dual topológico de Y.

Definición 3.5. *Sean X y Y espacios de Banach y U un subconjunto abierto de X.*

Una multifunción difusa $F : U \longrightarrow \mathcal{F}C(Y)$ es llamada semicontinua superior, en un punto $x_0 \in U$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(x_0, \epsilon)$ tal que $D^*(F(x), F(x_0)) < \epsilon$, cuando $x \in U$ y $\|x - x_0\| < \delta$. Además si $F(\lambda x) = \lambda F(x)$, $\lambda \geq 0$, $x \in X$, entonces F se llama homogénea.

Definición 3.6 (Fréchet diferenciabilidad [33])**.** *Una multifunción difusa $F : U \longrightarrow \mathcal{F}C(Y)$ se dice Fréchet diferenciable, en el punto $x_0 \in U$ si existe una multifunción difusa homogénea y semicontinua superior $\mathbb{D}^F_{x_0}(F) : X \longrightarrow \mathcal{F}C_0(Y)$ tal que:*

$$\lim_{\|z\| \to 0} \frac{1}{\|z\|} D\left(F(x_0 + z), F(x_0) + \mathbb{D}^F_{x_0}(F)(z)\right) = 0, \quad z \in X.$$

$\mathbb{D}^F_{x_0}(F)$ es llamada la diferencial de Fréchet de la multifunción difusa F en el punto $x_0 \in U$.

Teorema 3.3 ([33])**.** *La diferencial de Fréchet $\mathbb{D}^F_{x_0}(F)$ de una multifunción difusa F, en un punto $x_0 \in U$, si ésta existe, es única.*

Demostración. Sean $\mathbb{D}^F_{x_0}(F)$ y $\mathbb{D}'^F_{x_0}(F)$ dos diferenciales de Fréchet, de la multifunción difusa F en el punto $x_0 \in U$. Debido a la homogeneidad, claramente se tiene que $\mathbb{D}^F_{x_0}(F)(0) = \mathbb{D}'^F_{x_0}(F)(0) = \chi_{\{0\}}$.

Ahora, sea $w \in X$, $w \neq 0$. Por la Observación 3.1 se tiene que:

$$\begin{aligned} D\left(\mathbb{D}^F_{x_0}(F)(tw), \mathbb{D}'^F_{x_0}(F)(tw)\right) &= D\left(\mathbb{D}^F_{x_0}(F)(tw) + F(x_0), \mathbb{D}'^F_{x_0}(F)(tw) + F(x_0)\right) \\ &\leq D\left(\mathbb{D}^F_{x_0}(F)(tw) + F(x_0), F(x_0 + tw)\right) + D\left(F(x_0 + tw), \mathbb{D}'^F_{x_0}(F)(tw) + F(x_0)\right). \end{aligned}$$

Multiplicando esta desigualdad por $\frac{1}{\|tw\|}$ y aplicando la homogeneidad de las diferenciales, se obtiene que:

$$\frac{1}{\|tw\|} D\left(\mathbb{D}^F_{x_0}(F)(tw), \mathbb{D}'^F_{x_0}(F)(tw)\right) = D\left(\mathbb{D}^F_{x_0}(F)(w), \mathbb{D}'^F_{x_0}(F)(w)\right)$$

$$\leq \frac{1}{\|tw\|} D\left(\mathbb{D}_{x_0}^F(F)(tw) + F(x_0), F(x_0+tw)\right) + \frac{1}{\|tw\|} D\left(F(x_0+tw), \mathbb{D}_{x_0}^{\prime F}(F)(tw) + F(x_0)\right).$$

Por la definición de Fréchet diferenciabilidad, se concluye que los dos sumandos de la derecha en la última desigualdad, tienden a cero cuando $t \to 0$. En consecuencia $D\left(\mathbb{D}_{x_0}^F(F)(w), \mathbb{D}_{x_0}^{\prime F}(F)(w)\right) = 0$, lo que implica que $\mathbb{D}_{x_0}^F(F)(w) = \mathbb{D}_{x_0}^{\prime F}(F)(w)$. ■

Teorema 3.4 ([33]). *Si $F : U \longrightarrow \mathcal{F}C(Y)$ es Fréchet diferenciable en $x_0 \in U$, entonces F es continua en x_0.*

Demostración. Si la diferencial de Fréchet de F es $\mathbb{D}_{x_0}^F(F)$, por la homogeneidad de $\mathbb{D}_{x_0}^F(F)$ se tiene $\mathbb{D}_{x_0}^F(F)(0) = \chi_{\{0\}}$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que

$$D\left(F(x_0+z), F(x_0) + \mathbb{D}_{x_0}^F(F)(z)\right) < \epsilon, \quad \text{cuando} \quad \|z\| < \delta.$$

Como $\mathbb{D}_{x_0}^F(F)$ es semicontinua superior en el origen y $\mathbb{D}_{x_0}^F(F)(0) = \chi_{\{0\}}$, existe $0 < \delta_1 < \delta$ tal que $D^*\left(\mathbb{D}_{x_0}^F(F)(z), \chi_{\{0\}}\right) < \epsilon, \quad$ para todo $\|z\| < \delta_1$. Por la Observación 3.2 se tiene que

$$D^*\left(\mathbb{D}_{x_0}^F(F)(z), \chi_{\{0\}}\right) < \epsilon \Rightarrow D\left(\mathbb{D}_{x_0}^F(F)(z), \chi_{\{0\}}\right) < \epsilon,$$

y así,

$$\begin{aligned} D\left(F(x_0+z), F(x_0)\right) &\leq D\left(F(x_0+z), F(x_0) + \mathbb{D}_{x_0}^F(F)(z)\right) \\ &\quad + D\left(F(x_0) + \mathbb{D}_{x_0}^F(F)(z), F(x_0)\right) \\ &< \epsilon + D\left(F(x_0) + \mathbb{D}_{x_0}^F(F)(z), F(x_0)\right) \\ &= \epsilon + D\left(F(x_0) + \mathbb{D}_{x_0}^F(F)(z), F(x_0) + \chi_{\{0\}}\right) \\ &= \epsilon + D\left(\mathbb{D}_{x_0}^F(F)(z), \chi_{\{0\}}\right) < 2\epsilon, \quad \forall \|z\| < \delta_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto F es continua en $x_0 \in U$. ■

Definición 3.7 (Gâteaux diferenciabilidad [33]). *Una multifunción difusa $F : U \longrightarrow \mathcal{F}C(Y)$ se dice Gâteaux diferenciable en un punto $x_0 \in U$, si existe una multifunción difusa homogénea y semicontinua superior $\mathbb{D}_{x_0}^G(F) : X \longrightarrow \mathcal{F}C_0(Y)$ tal que para todo $z \in X$*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} D\left(F(x_0 + \lambda z), F(x_0) + \lambda \mathbb{D}_{x_0}^G(F)(z)\right) = 0.$$

$\mathbb{D}_{x_0}^G(F)$ es llamada la diferencial de Gâteaux de F en $x_0 \in U$.

Teorema 3.5 ([33])**.** *La diferencial de Gâteaux* $\mathbb{D}^G_{x_0}(F)$ *de una multifunción difusa* F*, en un punto* $x_0 \in U$*, si existe, es única.*

Demostración. Supongamos que una multifunción difusa F tiene dos diferenciales de Gâteaux $\mathbb{D}^G_{x_0}(F)$ y $\mathbb{D}'^G_{x_0}(F)$, en el punto x_0.

Sean $z \in X$, $z \neq 0$ y $\epsilon > 0$. De la definición de Gâteaux diferenciabilidad, existen dos reales positivos δ_1 y δ_2 tal que:

i. $|\lambda| < \delta_1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} D\left(F(x_0+\lambda z), F(x_0) + \lambda \mathbb{D}^G_{x_0}(F)(z)\right) < \frac{\epsilon}{2}$.

ii. $|\lambda| < \delta_2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} D\left(F(x_0+\lambda z), F(x_0) + \lambda \mathbb{D}'^G_{x_0}(F)(z)\right) < \frac{\epsilon}{2}$.

Tomando $0 < \lambda < \text{mín}\{\delta_1,\, \delta_2\}$, resulta que:

$$\frac{1}{\lambda} D\left(\mathbb{D}^G_{x_0}(F)(\lambda z), \mathbb{D}'^G_{x_0}(F)(\lambda z)\right) = \frac{1}{\lambda} D\left(F(x_0) + \lambda \mathbb{D}^G_{x_0}(F)(z), F(x_0) + \lambda \mathbb{D}'^G_{x_0}(F)(z)\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{\lambda} D\Big(F(x_0+\lambda z), F(x_0) + \lambda \mathbb{D}^G_{x_0}(F)(z)\Big) + \frac{1}{\lambda} D\left(F(x_0+\lambda z), F(x_0) + \lambda \mathbb{D}'^G_{x_0}(F)(z)\right) \leq \epsilon.$$

Dado que $\mathbb{D}^G_{x_0}(F)$ y $\mathbb{D}'^G_{x_0}(F)$ son homogéneas, entonces:

$$D\left(\mathbb{D}^G_{x_0}(F)(z), \mathbb{D}'^G_{x_0}(F)(z)\right) < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0,\ \forall z \neq 0.$$

Por lo tanto, $\mathbb{D}^G_{x_0}(F) = \mathbb{D}'^G_{x_0}(F)$. ■

Definición 3.8 (Débilmente Fréchet diferenciable [33])**.** *Se dice que una multifunción difusa* $F : U \longrightarrow \mathcal{F}C(Y)$ *es débilmente Fréchet diferenciable en* $x_0 \in U$*, si existe una multifunción difusa homogénea y semicontinua superior* $\mathbb{D}^{WF}_{x_0}(F) : X \longrightarrow \mathcal{F}C_0(Y)$ *tal que, para todo* $\alpha \in [0,1]$ *y* $y^* \in Y^*$*, se tiene que:*

$$\lim_{\|z\|\to 0} \frac{1}{\|z\|} \mid \sigma_{F(x_0+z)}(\alpha, y^*) - \sigma_{F(x_0)}(\alpha, y^*) - \sigma_{\mathbb{D}^{WF}_{x_0}(F)(z)}(\alpha, y^*) \mid = 0.$$

$\mathbb{D}^{WF}_{x_0}(F)$ *es llamada la diferencial débil de Fréchet de la multifunción difusa* F *en el punto* $x_0 \in U$*.*

Definición 3.9 (Débilmente Gâteaux diferenciable [33])**.** *Se dice que una multifunción difusa* $F : U \longrightarrow \mathcal{F}C(Y)$ *es débilmente Gâteaux diferenciable en* $x_0 \in U$*, si existe una* *multifunción difusa homogénea y semicontinua superior* $\mathbb{D}^{WG}_{x_0}(F) : X \longrightarrow \mathcal{F}C_0(Y)$ *tal que, para todo* $\alpha \in [0,1]$, $y^* \in Y^*$ *y* $z \in X$ *se tiene que:*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \mid \sigma_{F(x_0+\lambda z)}(\alpha, y^*) - \sigma_{F(x_0)}(\alpha, y^*) - \lambda \sigma_{\mathbb{D}^{WG}_{x_0}(F)(z)}(\alpha, y^*) \mid = 0.$$

$\mathbb{D}^{WG}_{x_0}(F)$ *es llamada la diferencial débil de Gâteaux de la multifunción difusa* F *en el punto* $x_0 \in U$.

Observación 3.3 ([33]). *Sea* $F : U \longrightarrow \mathcal{F}C(Y)$ *una multifunción difusa, supóngase que* F *es diferenciable en el punto* $x_0 \in U$, *con diferencial* $\mathbb{D}_{x_0}(F)$; *de acuerdo a cualquiera de las cuatro últimas definiciones, Definiciones (3.6, 3.7, 3.8 y 3.9).*

Se define la multifunción $F_\alpha : U \longrightarrow C(Y)$ *como sigue*

$$F_\alpha(z) = [F(z)]^\alpha, \ \forall z \in U.$$

Como la métrica D *toma el supremo de la distancia de Hausdorff entre los correspondientes* α*-niveles, entonces la diferenciabilidad de Fréchet (o Gâteaux) de* F, *implica la diferenciabilidad de* F_α, *para todo* $\alpha \in [0,1]$. *Además,* $[\mathbb{D}_{x_0}(F)]^\alpha = \mathcal{D}_{x_0}(F_\alpha)$, *para todo* $\alpha \in [0,1]$, *donde la diferencial del lado derecho, es la correspondiente diferencial de* F_α.

Análogamente, utilizando la definición de diferenciabilidad débil de Fréchet (o diferenciabilidad débil de Gâteaux) y las propiedades de las funciones soporte, se puede ver que:

$$\sigma_{\mathbb{D}_{x_0}(F)}(\alpha, y^*) = \sigma_{[\mathbb{D}_{x_0}(F)]^\alpha}(y^*) = \sigma_{\mathcal{D}_{x_0}[F]^\alpha}(y^*) = \sigma_{\mathcal{D}_{x_0}(F_\alpha)}(y^*),$$

obteniendo también que $[\mathbb{D}_{x_0}(F)]^\alpha = \mathcal{D}_{x_0}(F_\alpha)$, *para cada* $\alpha \in [0,1]$.

No es difícil mostrar los siguientes resultados:

Teorema 3.6 ([33]).

i. Fréchet diferenciabilidad $\Longrightarrow$ *Gâteaux diferenciabilidad* $\Longrightarrow$ *Gâteaux diferenciabilidad débil.*

ii. Fréchet diferenciabilidad $\Longrightarrow$ *Fréchet diferenciabilidad débil* $\Longrightarrow$ *Gâteaux diferenciabilidad débil.*

3.4. Reglas de cálculo y Teorema del valor medio para multifunciones difusas

En esta sección se muestra que la derivada de una suma de funciones difusas es la suma de las derivadas y la derivada de un múltiplo escalar (escalares positivos), es el múltiplo escalar de la derivada; igualmente se probará un resultado equivalente al Teorema del valor medio.

Teorema 3.7 ([33]). *Sean F_1, $F_2 : U \longrightarrow \mathcal{F}C(Y)$. Si Y es un espacio reflexivo, y F_1, F_2 son Gâteaux diferenciables en un punto $x_0 \in U$, entonces $F_1 + F_2$ y λF con $(\lambda > 0)$ son también diferenciables en x_0, y*

i. $\mathbb{D}^G_{x_0}(F_1 + F_2) = \mathbb{D}^G_{x_0}(F_1) + \mathbb{D}^G_{x_0}(F_2)$, *ii.* $\mathbb{D}^G_{x_0}(\lambda F_1) = \lambda \mathbb{D}^G_{x_0}(F_1)$.

Demostración. Para todo $z \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} D\left((F_1 + F_2)(x_0 + \lambda z), F_1(x_0) + F_2(x_0) + \lambda \mathbb{D}^G_{x_0}(F_1)(z) + \lambda \mathbb{D}^G_{x_0}(F_2)(z)\right) \\
&\qquad \leq \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} D\left((F_1)(x_0 + \lambda z), F_1(x_0) + \lambda \mathbb{D}^G_{x_0}(F_1)(z)\right) \\
&\qquad\qquad + \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} D\left((F_2)(x - 0 + \lambda z), F_2(x_0) + \lambda \mathbb{D}^G_{x_0}(F_2)(z)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Se sabe que si A $B \in C_0(Y)$ entonces $A + B \in C_0(Y)$, cuando Y es reflexivo. En consecuencia se tiene que $\mathbb{D}^G_{x_0}(F_1)(z) + \mathbb{D}^G_{x_0}(F_2)(z) \in \mathbb{F}C_0(Y)$, para todo $z \in X$.

Así,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{D}^G_{x_0}(F_1)(z) + \mathbb{D}^G_{x_0}(F_2)(z) \in \mathbb{F}C_0(Y) \\
\Leftrightarrow\ & [\mathbb{D}^G_{x_0}(F_1)(z) + \mathbb{D}^G_{x_0}(F_2)(z)]^\alpha \in C_0(Y),\ \forall \alpha \in [0,1] \\
\Leftrightarrow\ & [\mathbb{D}^G_{x_0}(F_1)(z)]^\alpha + [\mathbb{D}^G_{x_0}(F_2)(z)]^\alpha \in C_0(Y),\ \forall \alpha \in [0,1] \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{D}^G_{x_0}(F_{1_\alpha}) + \mathcal{D}^G_{2_\alpha} \in C_0(Y),\ \forall \alpha \in [0,1].
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de la parte (i).

La demostración de la parte (ii) es inmediata ya que por la definición de Gâteaux diferenciabilidad, se tiene $\mathbb{D}^G_{x_0}(F)$ es homogénea. ∎

Observación 3.4 ([33]). *El teorema anterior también se cumple si se supone que F_1 y F_2 son Fréchet diferenciables en x_0.*

Teorema 3.8 ([33]). *Sean $F_1, F_2 : U \longrightarrow \mathcal{F}C(Y)$ funciones difusas. Si Y es reflexivo y F_1, F_2 son débilmente Fréchet diferenciables en el punto $x_0 \in U$, con diferenciales $\mathbb{D}^{WF}_{x_0}(F_1)$ y $\mathbb{D}^{WF}_{x_0}(F_2)$ respectivamente, entonces $F_1 + F_2$ y λF_1, $\lambda > 0$, son Fréchet diferenciables en x_0 y además:*

i. $\mathbb{D}^{WF}_{x_0}(F_1 + F_2) = \mathbb{D}^{WF}_{x_0}(F_1) + \mathbb{D}^{WF}_{x_0}(F_2)$. *ii.* $\mathbb{D}^{WF}_{x_0}(\lambda F_1) = \lambda\mathbb{D}^{WF}_{x_0}(F_1)$.

Demostración. Como Y es reflexivo, $C_0(Y)$ es un semigrupo conmutativo bajo la adición y por (3.1), el espacio $\mathcal{F}C_0(Y)$ también lo es.

Por otro lado, de la Observación 2.2 se tiene que: $\sigma_{u+v} = \sigma_u + \sigma_v$, para todo u, $v \in \mathcal{F}C_0(Y)$.

De hecho:

$$\begin{aligned} & \sigma_{u+v} = \sigma_u + \sigma_v \\ \Leftrightarrow\ & \sigma_{u+v}(\alpha, y^*) = \sigma_u(\alpha, y^*) + \sigma_v(\alpha, y^*),\ \forall\,(\alpha, y^*) \in [0,1] \times Y^* \\ \Leftrightarrow\ & \sigma_{[u+v]^\alpha}(y^*) = \sigma_{[u]^\alpha}(y^*) + \sigma_{[v]^\alpha}(y^*),\ \forall\,(\alpha, y^*) \in [0,1] \times Y^* \qquad \text{(Definición 3.4)} \\ \Leftrightarrow\ & \sigma_{[u]^\alpha+[v]^\alpha}(y^*) = \sigma_{[u]^\alpha}(y^*) + \sigma_{[v]^\alpha}(y^*),\ \forall\,(\alpha, y^*) \in [0,1] \times Y^* \qquad \text{(Observación 2.2)} \end{aligned}$$

Entonces para todo $(\alpha, y^*) \in [0,1] \times Y^*$, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \lim_{\|z\|\to 0} \frac{1}{\|z\|} \left| \sigma_{(F_1+F_2)(x_0+z)}(\alpha, y^*) - \sigma_{(F_1+F_2)(x_0)}(\alpha, y^*) - \sigma_{\mathbb{D}^{WF}_{x_0}(F_1)(z)+\mathbb{D}^{WF}_{x_0}(F_2)(z)}(\alpha, y^*) \right| \\ & \quad \leq \lim_{\|z\|\to 0} \frac{1}{\|z\|} \left| \sigma_{F_1(x_0+z)}(\alpha, y^*) - \sigma_{F_1(x_0)}(\alpha, y^*) - \sigma_{\mathbb{D}^{WF}_{x_0}(F_1)(z)}(\alpha, y^*) \right| \\ & \qquad + \lim_{\|z\|\to 0} \frac{1}{\|z\|} \left| \sigma_{F_2(x_0+z)}(\alpha, y^*) - \sigma_{F_2(x_0)}(\alpha, y^*) - \sigma_{\mathbb{D}^{WF}_{x_0}(F_2)(z)}(\alpha, y^*) \right| \ = \ 0. \end{aligned}$$ ■

Observación 3.5 ([33]). *El teorema anterior también se cumple si se supone que F_1 y F_2 son débilmente Gâteaux diferenciables en x_0.*

Lema 3.1 ([33]). *Sean X y Y dos espacios de Banach, U un subconjunto abierto de X y dos elementos diferentes x, y de U tal que el segmento que une a x con y está contenido en U.*

Sea $\varphi : [0,1] \longrightarrow U$ definida por $\varphi(t) = (1-t)x + ty$. Si $F : U \longrightarrow \mathcal{F}C(Y)$ es Gâteaux diferenciable en $\varphi(t_0)$, entonces $(F \circ \varphi) : [0,1] \longrightarrow \mathcal{F}C(Y)$ es diferenciable en T_0 y $\mathbb{D}^G_{t_0}(F \circ \varphi) = \mathbb{D}^G_{\varphi(t_0)}(F)(y-x)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} D\left((F \circ \varphi)(t_0 + \lambda t), (F \circ \varphi)(t_0) + \lambda \mathbb{D}^G_{\varphi(t_0)}(F)(y-x)(t)\right) \\
&\quad = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} D\left((F(\varphi(t_0 + \lambda t)), (F(\varphi(t_0)) + \lambda \mathbb{D}^G_{\varphi(t_0)}(F)(t(y-x))\right) \\
&\quad = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} D\left(F((1 - t_0 + \lambda t)x + (t_0 + \lambda t)y), F(\varphi(t_0)) + \lambda \mathbb{D}^G_{\varphi(t_0)}(F)(t(y-x))\right) \\
&\quad = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} D\left(F((1 - t_0)x + t_0 y + \lambda t(y-x)), F(\varphi(t_0)) + \lambda \mathbb{D}^G_{\varphi(t_0)}(F)(t(y-x))\right) \\
&\quad = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} D\left(F(\varphi(t_0) + \lambda t(y-x)), F(\varphi(t_0)) + \lambda \mathbb{D}^G_{\varphi(t_0)}(F)(t(y-x))\right) = 0.
\end{aligned}$$
■

Observación 3.6 ([33])**.** *El lema anterior también se cumple si F es Fréchet diferenciable en $\varphi(t_0)$.*

Ahora se presenta y se prueba una versión del Teorema del valor medio en el contexto difuso.

Teorema 3.9 (Teorema del valor medio [33])**.** *Sean $F : U \longrightarrow \mathcal{F}C(Y)$ una multifunción difusa, y dos elementos diferentes x, y de U tal que el segmento cerrado $[x,y]$ que une a x con y está contenido en U. Supóngase que F es Gâteaux diferenciable en U, con diferencial $\mathbb{D}^G(F)$. Entonces $D(F(y), F(x)) \leq \|y - x\| \sup_{z \in]x,y[} \|\mathbb{D}^G_z(F)\|$, donde*

$$\|\mathbb{D}^G_z(F)\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|\mathbb{D}^G_z(F)(x)\|.$$

Demostración. Sea $\Psi : [0,1] \longrightarrow \mathcal{F}C(Y)$ una multifunción difusa, definida por:

$$\Psi(t) = F(\varphi(t)), \text{ con } \varphi(t) = (1-t)x + ty.$$

Por el Lema 3.1, Ψ es diferenciable en $(0,1)$ y $\mathbb{D}^G_t(\Psi) = \mathbb{D}^G_{\varphi(t)}(F)(y-x)$, para todo $t \in (0,1)$. Entonces, $\|\mathbb{D}^G_t(\Psi)\| \leq \sup_{z \in]x,y[} \|\mathbb{D}^G_z(F)(y-x)\|$, para todo $t \in (0,1)$.

Por lo tanto,

$$D(\Psi(1), \Psi(0)) \leq \|\mathbb{D}^G_z(F)(y-x)\|. \tag{3.3}$$

De hecho $\|\mathbb{D}_t^G(\Psi)\| \leq k$, para todo $t \in (0,1)$, con lo cual $\|[\mathbb{D}_t^G(\Psi)]^\alpha\| = \|D_t^G(\Psi_\alpha)\| \leq k$, para todo $t \in (0,1)$, para todo $\alpha \in [0,1]$.

Así, por el Teorema 2.1 se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\|D_t^G(\Psi_\alpha)\| \leq k,\ \forall t \in (0,1) \quad &\Longrightarrow \quad H(\Psi_\alpha(1), \Psi_\alpha(0)) \leq k,\ \forall \alpha \in [0,1] \\
&\Longrightarrow \quad \sup_{\alpha \in [0,1]} H(\Psi_\alpha(1), \Psi_\alpha(0)) \leq k \\
&\Longrightarrow \quad D(\Psi(1), \Psi(0)) \leq k.
\end{aligned}
$$

Ahora, $\Psi(1) = F(y)$ y $\Psi(0) = F(x)$; por lo tanto, por (3.3), se obtiene que

$$D(\Psi(y), \Psi(x)) \leq \sup_{z \in]x,y[} \|\mathbb{D}_z^G(F)(y-x)\|.$$

Consecuentemente,

$$D(\Psi(y), \Psi(x)) \leq \|y-x\| \sup_{z \in]x,y[} \|\mathbb{D}_z^G(F)\|. \qquad \blacksquare$$

Observación 3.7 ([33]). *El teorema anterior también es válido si se supone que F es Fréchet diferenciable.*

Capítulo 4

Diferencia generalizada de Hukuhara y otras definiciones de derivada

Aprovechando una generalización de la diferencia de Hukuhara, introducida por L. Stefanini [37], en este capítulo se presenta una nueva definición (Definición 4.4) relativa a la diferenciabilidad de funciones difusas, y se demuestra que esta nueva definición generaliza a otras definiciones ya conocidas en la literatura, como las presentadas en [3, 16, 36, 26]. Las ideas expuestas en este capítulo hacen parte del aporte novedoso de este trabajo y se encuentran en el *preprint* [40].

4.1. Diferencia generalizada de Hukuhara

En la sección 2.2 se introdujo la diferencia de Hukuhara en forma general, para subconjuntos no vacios, cerrados, acotados y convexos de un espacio de Banach reflexivo X y se mencionaron algunas propiedades de dicha diferencia.

Si $X = \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\mathcal{K}_c^n$ el espacio formado por todos los subconjuntos no vacios, compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 4.1 ([28]). *El espacio $(\mathcal{K}_c^n, H)$, donde H denota la distancia de Hausdorff, es un espacio métrico completo.*

Una desventaja de la diferencia de Hukuhara es que en general ella no siempre existe, por ejemplo en $\mathcal{K}_c^1$, sean $A = [2, 3]$ y $B = [5, 10]$ entonces $A \ominus_H B$ no existe, ya que no existe $[c^-, c^+] = C \in \mathcal{K}_c^1$ tal que $[2,3] = [5,10] + [c^-, c^+]$. La adición de la derecha en la última igualdad es la *adición de Minkowski* para elementos de $\mathcal{K}_c^n$.

Para sortear dificultades como esta, en [37] Stefanini sugiere una nueva diferencia llamada diferencia generalizada de Hukuhara (gH-diferencia).

Definición 4.1 ([37])**.** *Sean $A,\ B \in \mathcal{K}_c^n$. Se define la diferencia generalizada de Hukuhara (gH-diferencia) $A \ominus_g B$ entre A y B como el conjunto $C \in \mathcal{K}_c^n$ tal que*

$$A \ominus_g B = C \Leftrightarrow \begin{cases} (a) & A = B + C,\ \text{ó} \\ (b) & B = A + (-1)C. \end{cases} \tag{4.1}$$

Proposición 4.2 ([37])**.**

i. *Si la gH-diferencia $A \ominus_g B$ existe, esta es única, y además esta es una generalización de la diferencia de Hukuhara, dado que $A \ominus_g B = A \ominus_H B$ siempre que $A \ominus_H B$ exista.*

ii. $A \ominus_g A = \{0\}$.

iii. *Si $A \ominus_g B$ existe en el sentido (a) de (4.1), entonces $B \ominus_g A$ existe en el sentido (b) de (4.1) y viceversa.*

iv. $(A + B) \ominus_g B = A$.

v. $\{0\} \ominus_g (A \ominus_g B) = (-B) \ominus_g (-A)$.

Las dos siguientes propiedades son de gran interés en el desarrollo de este trabajo.

Proposición 4.3. *Sean $A,\ B \in \mathcal{K}_c^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces*

i. *$(-1)(A \ominus_g B) = B \ominus_g A$. En esta igualdad, cuando la diferencia $A \ominus_g B$ es verificada en el sentido (a) de (4.1) (respectivamente en el sentido (b) de (4.1)), entonces la diferencia $B \ominus_g A$ es verificada en el sentido (b) de (4.1)(respectivamente en el sentido (a) de (4.1)).*

ii. $\lambda(A \ominus_g B) = \lambda A \ominus_g \lambda B$.

Demostración.

i. Supongamos que $A \ominus_g B = C$, de acuerdo con (4.1), y que $A \ominus_g B = C$ en el sentido (a) de (4.1). Entonces $A = B+C = B+(-1)(-1)C = B+(-1)E$, donde $E = (-1)C$. Así $A = B + (-1)E$ y por lo tanto $B \ominus_g A = E$ en el sentido (b) de (4.1). Entonces $(-1)(A \ominus_g B) = -C = E = B \ominus_g A$.

Por otro lado, si $A \ominus_g B = C$ en el sentido (b) de (4.1), entonces $B = A + (-1)C = A + N$, donde $N = (-1)C$. Así $B \ominus_g A = N$ en el sentido (a) de (4.1) y por lo tanto $(-1)(A \ominus_g B) = -C = N = B \ominus_g A$.

ii. Si $A \ominus_g B = C$, entonces $\lambda(A \ominus_g B) = \lambda C$. Ahora $A \ominus_g B = C$ si y sólo si $A = B+C$ ó $B = A+(-1)C$. De las operaciones de *Minkowski* y de las propiedades de la Sección 2.1 para elementos de $\mathcal{B}(X)$, tenemos que si $A = B + C$, entonces $\lambda A = \lambda B + \lambda C$, y así $\lambda A \ominus_g \lambda B = \lambda C$, en el sentido (a) de (4.1).

Ahora si $B = A + (-1)C$, entonces $\lambda B = \lambda A + (-1)\lambda C$, y así $\lambda A \ominus_g \lambda B = \lambda C$, en el sentido (b) de (4.1).

Por lo tanto $\lambda(A \ominus_g B) = \lambda C = \lambda A \ominus_g \lambda B$.

Note que si $\lambda > 0$ entonces $\lambda(A \ominus_g B) = \lambda A \ominus_g \lambda B$, y si $\lambda < 0$ entonces

$$\lambda(A \ominus_g B) = |\lambda|B \ominus_g |\lambda|A = (-1)|\lambda|A \ominus_g |\lambda|B = \lambda A \ominus_g \lambda B. \qquad \blacksquare$$

Proposición 4.4. *Sean* A, $B \in \mathcal{K}_c^n$. *Si* $A \ominus_g B = B \ominus_g A = C$, *entonces* C *es simétrico, es decir,* $C = (-1)C = -C$.

Demostración. En esta demostración utilizamos la ley cancelativa y las operaciones de *Minkowski* en $\mathcal{K}_c^n$.

a. Consideremos primero que $A \ominus_g B = B \ominus_g A = C$, asumiendo que ambas diferencias $A \ominus_g B$ y $B \ominus_g A$ están dadas en el sentido (a) de (4.1). Entonces $A = B + C$ y $B = A + C$; así tenemos que:

$$A = B + C = A + C + C \Rightarrow A = A + 2C \Rightarrow 0 = 2C \Rightarrow C = \{0\},$$

y $C = \{0\}$ es simétrico.

b. Asumamos ahora que ambas diferencias $A \ominus_g B = C$ y $B \ominus_g A = C$ se verifican en el sentido (b) de (4.1), entonces tenemos que:

$$B = A + (-1)C \quad \text{y} \quad A = B + (-1)C.$$

Entonces:

$$B = B + (-1)C + (-1)C = B + (-2)C \Rightarrow 0 = (-2)C \Rightarrow C = \{0\},$$

y así $C = \{0\}$ es simétrico.

c. Si $A \ominus_g B = C$ en el sentido (a) de (4.1) y $B \ominus_g A = C$ en el sentido (b) de (4.1) entonces $A = B + C$ y $A = B + (-1)C$. Consecuentemente $B + C = B + (-1)C$, y así $C = (-1)C$.

d. Finalmente, si $A \ominus_g B = C$ en el sentido (b) de (4.1) y $B \ominus_g A = C$ en el sentido (a) de (4.1) entonces $B = A + (-1)C$ y $B = A + C$; por lo tanto $A + (-1)C = A + C$ y así $C = (-1)C$. ■

En general, el hecho de que $A \ominus_g B = B \ominus_g A$, no implica que $A = B$. De hecho, consideremos $A = [3, 6]$ y $B = [2, 7]$. Entonces $A \ominus_g B = [3, 6] \ominus_g [2, 7] = [-1, 1] = [2, 7] \ominus_g [3, 6] = B \ominus_g A$; así $A \ominus_g B = B \ominus_g A$, sin embargo $A = [3, 6] \neq [2, 7] = B$.

Una desventaja de la existencia de la *diferencia de Hukuhara* (H-diferencia) es que es muy restrictiva comparada con la existencia de la *diferencia generalizada de Hukuhara* (gH-diferencia). De hecho, en $\mathcal{K}_c^1$ la (H-diferencia) no siempre existe, mientras que la (gH-diferencia) siempre existe. En ese sentido se tiene la siguiente proposición:

Proposición 4.5. *Sean $A = [a^-, a^+]$ y $B = [b^-, b^+]$ dos intervalos cerrados de la recta real. Si $a^+ - a^- > b^+ - b^-$, entonces $A \ominus_g B$ existe en el sentido (a) de (4.1). Por otro lado, si $b^+ - b^- > a^+ - a^-$, entonces $A \ominus_g B$ existe en la forma (b) de (4.1) y así:*

$$A \ominus_g B = \begin{cases} [a^- - b^-, a^+ - b^+], & si \quad a^+ - a^- > b^+ - b^-, \\ [a^+ - b^+, a^- - b^-], & si \quad b^+ - b^- > a^+ - a^-, \\ \{c\}, & si \quad a^+ - a^- = b^+ - b^-, \end{cases}$$

donde $c = a^+ - b^+ = a^- - b^-$, es decir la gH-diferencia entre A y B siempre existe.

Demostración. Dados dos intervalos cerrados de la recta real, $A = [a^-, a^+]$ y $B = [b^-, b^+]$, se tiene una de las tres siguientes posibilidades:

i. $a^+ - a^- > b^+ - b^-$, es decir, la longitud de A es mayor que la longitud de B.

ii. $b^+ - b^- > a^+ - a^-$, es decir, la longitud de B es mayor que la longitud de A.

iii. $a^+ - a^- = b^+ - b^-$, es decir, la longitud de A es igual a la longitud de B.

Si ocurre (i), entonces $-a^- + b^- > b^+ - a^+$, lo cual implica que $a^- - b^- < a^+ - b^+$ y así el intervalo $[a^- - b^-, a^+ - b^+]$ está bien definido.

Ahora como $a^- = b^- + (a^- - b^-)$ y $a^+ = b^+ + (a^+ - b^+)$, por las operaciones de Minkowski en $\mathcal{K}_c^1$ se tiene que $[a^-, a^+] = [b^-, b^+] + [a^- - b^-, a^+ - b^+]$, esto es

$$[a^-, a^+] \ominus_g [b^-, b^+] = [a^- - b^-, a^+ - b^+] = [c^-, c^+],$$

según la parte (a) de (4.1).

Si ocurre (ii.), tenemos que $b^+ - b^- > a^+ - a^-$, y en consecuencia $b^+ - a^+ > b^- - a^-$, y a su vez $a^+ - b^+ < a^- - b^-$ de donde se concluye que el intervalo $[a^+ - b^+, a^- - b^-]$ está bien definido.

Como $b^- = a^- + (b^- - a^-)$ y $b^+ = a^+ + (b^+ - a^+)$ por las operaciones de Minkowski en $\mathcal{K}_c^1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
[b^-, b^+] &= [a^-, a^+] + [b^- - a^-, b^- - a^+] \\
&= [a^-, a^+] + [(-1)(a^- - b^-), (-1)(a^+ - b^+)] \\
&= [a^-, a^+] - (-1)[a^+ - b^+, a^- - b^-],
\end{aligned}$$

de donde $[b^-, b^+] = [a^-, a^+] + (-1)[a^+ - b^+, a^- - b^-]$, y esto implica que

$$[a^-, a^+] \ominus_g [b^-, b^+] = [a^+ - b^+, a^- - b^-] = [c^-, c^+],$$

según la parte (b) de (4.1).

Si ocurre (iii.), tenemos que $a^+ - a^- = b^+ - b^-$, lo cual implica que $a^+ - b^+ = a^- - b^-$ y así, el intervalo $[a^+ - b^+, a^- - b^-]$ sería un punto; es decir $[a^+ - b^+, a^- - b^-] = [c, c] = \{c\}$;

como $a^- = b^- + (a^- - b^-)$ y $a^+ = b^+ + (a^+ - b^+)$ tenemos que:

$$[a^-, a^+] = [b^-, b^+] + [a^- - b^-, a^+ - b^+] = [b^-, b^+] + [c, c]$$

es decir

$$[a^-, a^+] \ominus_g [b^-, b^+] = \{c\}.$$

Recordemos que en general, una condición necesaria para garantizar la existencia de la (gH-diferencia) entre dos elementos A, $B \in \mathcal{K}_c^n$ es que $B + \{c\} \subset A$ o que $A + \{d\} \subset B$ donde $B + \{c\}$ y $A + \{d\}$ son traslaciones de B y A respectivamente.

Se ha probado que dados dos intervalos cerrados de la recta real, $A = [a^-, a^+]$ y $B = [b^-, b^+]$, siempre se tiene que una traslación de A está contenida en B, cuando la longitud de B es mayor que la longitud de A; ó una traslación de B está contenida en A, cuando la longitud de A es mayor que la longitud de B; ó ambas posibilidades a la vez, esto es cuando la longitud de A es igual a la longitud de B. ■

4.2. Otras definiciones de diferenciabilidad de multifunciones difusas

La siguiente definición fue presentada por L. Stefanini & B. Bede en [38] para en caso en que $n = 1$.

Definición 4.2. *Sea $T = (a, b) \subset \mathbb{R}$ y $F : T \longrightarrow \mathcal{K}_c^n$ una multifunción. Diremos que F es Hukuhara diferenciable en el sentido generalizado, y se denotará por (gH-diferenciable) en un punto $t_0 \in T$, si existe la diferencia $F(t_0 + h) \ominus_g F(t_0)$ y $F'(t_0) \in \mathcal{K}_c^n$ tal que:*

$$F'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [F(t_0 + h) \ominus_g F(t_0)].$$

$F'(t_0)$ es llamada la gH-derivada de la multifunción F. El límite anterior es tomado en el espacio $(\mathcal{K}_c^n, H)$, donde H denota la distancia de Hausdorff.

Definición 4.3 ([16]). *Sean $T = (a, b) \subset \mathbb{R}$ y $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa. Se dice que F es H-diferenciable en un punto $t_0 \in T$ si existen las diferencias $F(t_0 + h) \ominus_H$*

$F(t_0)$, $F(t_0) \ominus_H F(t_0 - h)$ para h suficientemente pequeño y un elemento $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$ tal que:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus_H F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) \ominus_H F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0).$$

Los límites anteriores son tomados en el espacio $(\mathcal{F}^n, D)$ y $F'(t_0)$ se llama la H-derivada de F.

A continuación se presenta la nueva definición de diferenciabilidad de multifunciones difusas, que es nuestro aporte a esta teoría en este trabajo. De igual manera se muestra que esta nueva definición es más general que algunas ya existentes y que es consistente con las reglas de cálculo.

Definición 4.4. *Sea $T = (a, b) \subset \mathbb{R}$, y considérese una multifunción difusa $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$. Diremos que F es Hukuhara diferenciable en un sentido generalizado (gH-diferenciable) en un punto $t_0 \in T$ si, para cada $\alpha \in [0, 1]$ la multifunción $F_\alpha : T \longrightarrow \mathcal{K}_c^n$, definida por $t \mapsto [F(t)]^\alpha$, es gH-diferenciable en el punto $t_0 \in T$, esto es, F_α es diferenciable en el punto $t_0 \in T$, en el sentido de la Definición 4.2, con derivada denotada por $F'_\alpha(t_0)$ y la familia $\{F'_\alpha(t_0) \mid \alpha \in [0, 1]\}$, define un conjunto difuso $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$, esto es, $[F'(t_0)]^\alpha = F'_\alpha(t_0)$.*

Si $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ es gH-diferenciable en $t_0 \in T$, entonces se dice que el conjunto difuso $F'(t_0)$ es la gH-derivada de $F(t)$ en el punto t_0. Si F es gH-diferenciable para todo $t \in T$, se dice que F es gH-diferenciable en T.

Proposición 4.6. *Sean $T = (a, b) \subset \mathbb{R}$ y $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa. Si F es H-diferenciable en $t_0 \in T$ en el sentido de la Definición 4.3, entonces F es gH-diferenciable en t_0, es decir, F es diferenciable en el sentido de la Definición 4.4.*

Demostración. Necesitamos mostrar que para cada $\alpha \in [0, 1]$ y $h > 0$ suficientemente pequeño, existe la diferencia $[F(t_0 + h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]$ y un elemento $F'_\alpha \in \mathcal{K}_c^n$ tal que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{[F(t_0 + h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{h} = F'_\alpha(t_0),$$

y $\{F'_\alpha \mid \alpha \in [0, 1]\}$ define un conjunto difuso $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$.

Como F es H-diferenciable, entonces para un h suficientemente pequeño se tiene que:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{[F(t_0 + h)]^\alpha \ominus_H [F(t_0)]^\alpha}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[F(t_0)]^\alpha \ominus_H [F(t_0 - h)]^\alpha}{h} = F'_\alpha(t_0), \tag{4.2}$$

para algún $F'(t_0) \in \mathfrak{F}^n$ con α-niveles dados por $F'_\alpha(t_0)$.

Para $h > 0$ suficientemente pequeño, de la Proposición 4.2, la existencia de la diferencia $[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_H [F(t_0)]^\alpha$, garantiza la existencia de la diferencia $[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$.
Si $h < 0$ con $|h|$ suficientemente pequeño, entonces de (4.2) se tiene la existencia de $[F(t_0)]^\alpha \ominus_H [F(t_0+h)]^\alpha$; por lo tanto existe la diferencia $[F(t_0)]^\alpha \ominus_g [F(t_0+h)]^\alpha$ y la Proposición 4.3 también garantiza la existencia de $[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha$.

En consecuencia, si $h \to 0^+$, entonces

$$F'_\alpha(t_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_H [F(t_0)]^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{h}.$$

Por otro lado, si $h \to 0^-$, entonces de (4.2) tenemos:

$$\begin{aligned} F'_\alpha(t_0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{[F(t_0)]^\alpha \ominus_H [F(t_0-h)]^\alpha}{h} \\ &= \lim_{-h\to 0^-} \frac{[F(t_0)]^\alpha \ominus_H [F(t_0-h)]^\alpha}{h} \\ &= \lim_{-h\to 0^-} \frac{[F(t_0)]^\alpha \ominus_g [F(t_0-h)]^\alpha}{h} \\ &= \lim_{-h\to 0^-} \frac{(-1)([F(t_0)]^\alpha \ominus_g [F(t_0-h)]^\alpha)}{(-1)h} \\ &= \lim_{-h\to 0^-} \frac{[F(t_0-h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{-h} \\ &= \lim_{k\to 0^-} \frac{[F(t_0+k)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{k}. \end{aligned}$$ ■

S. Song & C. Wu en [36] y J. Park & H. Han en [26], consideran la siguiente noción de diferenciabilidad para una multifunción difusa $F : T \longrightarrow \mathfrak{F}^n$.

Definición 4.5 ([36, 26])**.** *Una multifunción difusa $F : T \longrightarrow \mathfrak{F}^n$ es llamada diferenciable en un punto $t_0 \in T$, si para cada $\alpha \in [0,1]$, la multifunción, $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ es Hukuhara diferenciable en el punto $t_0 \in T$ y la familia $\{F'_\alpha(t_0) \mid \alpha \in [0,1]\}$ define un conjunto difuso $F'(t_0) \in \mathfrak{F}^n$.*

Proposición 4.7. *Sea $T = (a,b) \subset \mathbb{R}$ y $F : T \longrightarrow \mathfrak{F}^n$. Si F es diferenciable en $t_0 \in T$ en el sentido de la Definición 4.5, entonces F es gH-diferenciable, (diferenciable en el sentido de la Definición 4.4).*

Demostración. Necesitamos mostrar que para cada $\alpha \in [0,1]$ y para h cercano a cero, existe la diferencia $[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha$ y

$$\lim_{h\to 0} \frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{h} = F'_\alpha(t_0) \in \mathcal{K}_c^n.$$

Por hipótesis, existe una familia $\{F'_\alpha(t_0) \mid \alpha \in [0,1]\}$ que define un conjunto difuso $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$; además, dado que $F_\alpha(t)$ es H-diferenciable, es claro que para cada $\alpha \in [0,1]$ existe la diferencia $[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha$.

Si $h \to 0^+$, entonces por hipótesis se tiene que:

$$F'_\alpha(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_H [F(t_0)]^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{h}.$$

Si $h \to 0^-$, entonces $-h \to 0^+$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{[F(t_0+h]^\alpha \ominus_g [F(t_0]^\alpha}{h} &= \lim_{-h\to 0^+} \frac{(-1)([F(t_0-(-h))]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha)}{(-1)h} \\
&= \lim_{-h\to 0^+} \frac{[F(t_0)]^\alpha \ominus_g [F(t_0-(-h))]^\alpha}{-h} \\
&= \lim_{k\to 0^+} \frac{[F(t_0)]^\alpha \ominus_g [F(t_0-k)]^\alpha}{k} = F'_\alpha(t_0). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

B. Bede y S. G. Gal en [3] introducen la siguiente definición de diferenciabilidad de una multifunción difusa, llamada diferenciabilidad fuerte generalizada.

Definición 4.6 ([3]). *Sean $T = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ una multifunción, y $t_0 \in T$. F es llamada diferenciable fuertemente generalizada (fuertemente diferenciable) en $t_0 \in T$, si existe un elemento $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$, tal que, para todo $h > 0$ suficientemente pequeño se tiene que:*

(i) Existen las diferencias $F(t_0+h) \ominus_H F(t_0)$, $F(t_0) \ominus_H F(t_0-h)$ y

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{F(t_0+h) \ominus_H F(t_0)}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{F(t_0) \ominus_H F(t_0-h)}{h} = F'(t_0), \tag{4.3}$$

ó

(ii) Existen las diferencias $F(t_0) \ominus_H F(t_0+h)$, $F(t_0-h) \ominus_H F(t_0)$ y

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{F(t_0) \ominus_H F(t_0+h)}{(-h)} = \lim_{h\searrow 0} \frac{F(t_0-h) \ominus_H F(t_0)}{(-h)} = F'(t_0), \tag{4.4}$$

ó

(iii) Existen las diferencias $F(t_0+h)\ominus_H F(t_0)$, $F(t_0-h)\ominus_H F(t_0)$ y

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{F(t_0+h)\ominus_H F(t_0)}{h}=\lim_{h\searrow 0}\frac{F(t_0-h)\ominus_H F(t_0)}{(-h)}=F'(t_0),\tag{4.5}$$

ó

(iv) Existen las diferencias $F(t_0)\ominus_H F(t_0+h)$, $F(t_0)\ominus_H F(t_0-h)$, y

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{F(t_0)\ominus_H F(t_0+h)}{(-h)}=\lim_{h\searrow 0}\frac{F(t_0)\ominus_H F(t_0-h)}{h}=F'(t_0).\tag{4.6}$$

Proposición 4.8. *Sean $T=(a,b)\subset\mathbb{R}$ y $F:T\longrightarrow\mathcal{F}^n$ una multifunción difusa. Si F es fuertemente diferenciable en $t_0\in T$ (diferenciable en el sentido de la Definición 4.6) entonces F es gH-diferenciable.*

Demostración. Si F es fuertemente diferenciable en el sentido (i) de la Definición 4.6, entonces F es H-diferenciable y, usando la Proposición 4.6 tenemos que F es gH-diferenciable.

Asumamos que F es fuertemente diferenciable en el sentido (ii) de la Definición 4.6. Debemos mostrar que para cada $\alpha\in[0,1]$, existe la diferencia $[F(t_0+h)]^\alpha\ominus_g[F(t_0)]^\alpha$ y un elemento $F'_\alpha\in\mathcal{K}^n_c$ tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{[F(t_0+h)]^\alpha\ominus_g[F(t_0)]^\alpha}{h}=F'_\alpha(t_0).$$

Por hipótesis, existe $F^{'}(t_0)\in\mathcal{F}^n$ tal que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(t_0)\ominus_H F(t_0+h)}{-h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{F(t_0-h)\ominus_H F(t_0)}{-h}=F'(t_0)\in\mathcal{F}^n.$$

Entonces

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{[F(t_0)]^\alpha\ominus_H[F(t_0+h)]^\alpha}{-h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{[F(t_0-h)]^\alpha\ominus_H[F(t_0)]^\alpha}{-h}=F'_\alpha(t_0)\in\mathcal{K}^n_c,\tag{4.7}$$

para todo $\alpha\in[0,1]$ y $[F'(t_0)]^\alpha=F'_\alpha(t_0)$.

Note que la existencia de $[F(t_0)]^\alpha\ominus_H[F(t_0+h)]^\alpha$ (para $h>0$, suficientemente pequeño) implica la existencia de $[F(t_0)]^\alpha\ominus_g[F(t_0+h)]^\alpha$. Por lo tanto, por la pate (iii.) de la Proposición 4.2, tenemos que existe la diferencia $[F(t_0+h)]^\alpha\ominus_g[F(t_0)]^\alpha$. Luego de (4.7) y la parte (i.) de la Proposición 4.3 tenemos que

$$F'_\alpha(t_0)\;=\;\lim_{h\to 0^+}\frac{[F(t_0]^\alpha\ominus_H[F(t_0+h)]^\alpha}{-h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{[F(t_0)]^\alpha\ominus_g[F(t_0+h)]^\alpha}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{h}.$$

Ahora calculemos el límite $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{h}$.

Note que si $h \to 0^+$, entonces $-h \to 0^-$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} F'_\alpha(t_0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{[F(t_0-h)]^\alpha \ominus_H [F(t_0)]^\alpha}{-h} = \lim_{-h\to 0^-} \frac{[F(t_0+(-h))]^\alpha \ominus_H [F(t_0)]^\alpha}{-h} \\ &= \lim_{k\to 0^-} \frac{[F(t_0+k)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{k}. \end{aligned}$$

Análogamente, si F es fuertemente diferenciable en el sentido (iii) de la Definición 4.6, entonces existe $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$ tal que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0+h) \ominus_H F(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0-h) \ominus_H F(t_0)}{(-h)} = F'(t_0) \in \mathcal{F}^n.$$

Consecuentemente,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_H [F(t_0)]^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{[F(t_0-h)]^\alpha \ominus_H [F(t_0)]^\alpha}{(-h)} = F'_\alpha(t_0) \in \mathcal{K}^n_c, \quad (4.8)$$

para todo $\alpha \in [0,1]$ y $[F'(t_0)]^\alpha = F'_\alpha(t_0)$.

Por la parte (i.) de la Proposición 4.2, la existencia de $[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_H [F(t_0)]^\alpha$ garantiza la existencia de $[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha$ y

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_H [F(t_0)]^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{(h)} = F'_\alpha(t_0).$$

Ahora calculemos el límite $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{h}$.

Note que si $h \to 0^+$, entonces $-h \to 0^-$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} F'_\alpha(t_0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{[F(t_0-h)]^\alpha \ominus_H [F(t_0)]^\alpha}{-h} = \lim_{-h\to 0^-} \frac{[F(t_0+(-h))]^\alpha \ominus_H [F(t_0)]^\alpha}{-h} \\ &= \lim_{k\to 0^-} \frac{[F(t_0+k)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{k}. \end{aligned}$$

Haciendo un razonamiento similar, se demuestra que si F es fuertemente diferenciable en el sentido (iv) de la Definición 4.6, y en consecuencia F es gH-diferenciable. ■

Proposición 4.9. *Sea $T = (a,b) \subset \mathbb{R}$ y $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^1$ una multifunción difusa. Para cada $\alpha \in [0,1]$ consideremos la multifunción $F_\alpha : T \longrightarrow \mathcal{K}^1_c$ definida por*

$$F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)],$$

siendo $f_\alpha(t)$, $g_\alpha(t)$ *funciones de valor real. Si* F *es* gH*-diferenciable en un punto* $t_0 \in T$, *entonces para cada* $\alpha \in [0,1]$, $f_\alpha(t)$ *y* $g_\alpha(t)$ *son funciones diferenciables en* t_0 *y además*

$$F'_\alpha(t_0) = \begin{cases} [f'_\alpha(t_0), g'_\alpha(t_0)] & si \quad f'_\alpha(t_0) \leq g'_\alpha(t_0), \qquad ó \\ [g'_\alpha(t_0), f'_\alpha(t_0)] & si \quad g'_\alpha(t_0) \leq f'_\alpha(t_0). \end{cases} \tag{4.9}$$

Demostración. Si F es gH-diferenciable en t_0, entonces para cada $\alpha \in [0,1]$, la multifunción $F_\alpha(t)$ es diferenciable en el punto t_0. Consecuentemente del Teorema 17 en [38], se tiene que $f_\alpha(t)$ y $g_\alpha(t)$ son diferenciables y el resultado (4.9) se verifica. ■

Observación 4.1. *A diferencia del caso de multifunciones, en general, el recíproco de la proposición anterior no se tiene. De hecho, si para cada* $\alpha \in [0,1]$, $f_\alpha(t)$ *y* $g_\alpha(t)$ *son funciones diferenciables, entonces del Teorema 17 en [38], se tiene que* $F_\alpha(t)$ *es* gH*-diferenciable, sin embargo la existencia de la familia* $\{F'_\alpha(t_0)\}$ *no garantiza la existencia de un conjunto difuso* $F'(t_0)$ *con* α*-niveles dados por* $\{F'_\alpha(t_0)\}$.

Ejemplo 4.1. *Sean* $T = [0,1]$ *y* $F : T \to \mathcal{F}^1$, *la multifunción definida por*

$$F(t) = \begin{cases} \cos[(1+t)\,x], & si \quad x \in [-\pi/2(1+t),\ \pi/2(1+t)]\,, \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

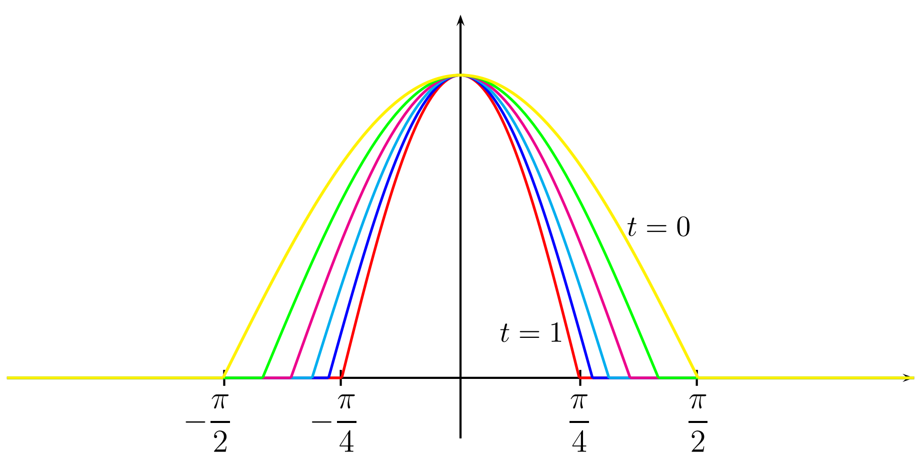

Figura 4.1: Gráfica de la multifunción $F(t)$.

Entonces, F *no es* H*-diferenciable en ningún punto* $t_0 \in T$, *dado que el diámetro de* $F_\alpha(t)$ *es decreciente en* T *(ver [2]); sin embargo* F *es* gH*-diferenciable. Note que para* *todo* $t \in [0,1]$, $\alpha \in [0,1]$ *se tiene que*

$$F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha = \left[-\frac{\cos^{-1}\alpha}{1+t}, \frac{\cos^{-1}\alpha}{1+t}\right] = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)].$$

De la Proposición 4.9 se concluye que

$$F'_\alpha(t) = \left[-\frac{\cos^{-1}\alpha}{(1+t)^2}, \frac{\cos^{-1}\alpha}{(1+t)^2}\right].$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.2 (Teorema de representación de Negoita & Ralescu), la familia $\{F'_\alpha(t_0) \mid \alpha \in [0,1]\}$ *define un conjunto difuso* $F'(t_0) \in \mathcal{F}^1$, *y*

$$F'(t) = \begin{cases} \cos[(1+t)^2 x], & si \quad x \in [-\pi/2(1+t)^2, \pi/2(1+t)^2]. \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Ejemplo 4.2. *Sea* $T = (-a, a)$ *una vecindad de cero* ($a > 0$ *y suficientemente pequeño) y* $F : T \to \mathcal{F}^1$, *una multifunción definida por*

$$F(t) = \begin{cases} \cos\left[(1 - t^2 \operatorname{sen}\frac{1}{t})x\right], & si \quad x \in \left[-\pi/2\left(1 - t^2 \operatorname{sen}\frac{1}{t}\right), \pi/2\left(1 - t^2 \operatorname{sen}\frac{1}{t}\right)\right]. \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Entonces para todo $\alpha \in [0,1]$ *se tiene que*

$$F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha = \left[-\frac{\cos^{-1}\alpha}{1 - t^2 \operatorname{sen}\frac{1}{t}}, \frac{\cos^{-1}\alpha}{1 - t^2 \operatorname{sen}\frac{1}{t}}\right].$$

Por lo tanto, de acuerdo con la Proposición 4.9 se concluye que

$$F'_\alpha(t_0) = \begin{cases} [f'_\alpha(t_0), g'_\alpha(t_0)] & si \quad f'_\alpha(t_0) \leq g'_\alpha(t_0), \quad ó \\ [g'_\alpha(t_0), f'_\alpha(t_0)] & si \quad g'_\alpha(t_0) \leq f'_\alpha(t_0), \end{cases}$$

donde

$$f'_\alpha(t) = -\left[\left(\cos\frac{1}{t} - 2t \operatorname{sen}\frac{1}{t}\right)\cos^{-1}\alpha\right] \Big/ \left(1 - t^2 \operatorname{sen}\frac{1}{t}\right)^2$$

y

$$g'_\alpha(t) = \left[\left(\cos\frac{1}{t} - 2t \operatorname{sen}\frac{1}{t}\right)\cos^{-1}\alpha\right] \Big/ \left(1 - t^2 \operatorname{sen}\frac{1}{t}\right)^2.$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.2 (Teorema de representación de Negoita & Ralescu), la familia $\{F'_\alpha(t_0) \mid \alpha \in [0,1]\}$ *define un conjunto difuso* $F'(t_0) \in \mathcal{F}^1$.

Definición 4.7. *Sean* $T = (a, b) \subset \mathbb{R}$ *y* $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ *una multifunción difusa.* F *se dice continua en un punto* $t_0 \in T$, *si dado un* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $D(F(t), F(t_0)) < \epsilon$, *para todo* $t \in T$ *satisfaciendo que* $\mid t - t_0 \mid < \delta$, *donde*

$$D(F(t), F(t_0)) = \sup_{\alpha \in [0,1]} H([F(t)]^\alpha, [F(t_0)]^\alpha),$$

y H *es la distancia de Hausdorff.*

Ejemplo 4.3. *Sean* $T = (0,1)$ *y* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$ *y* $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^1$*, definida por* $F(t) = tA$*. Se puede ver fácilmente que la multifunción difusa* F *es continua sobre* T*.*

Ejemplo 4.4. *Sean* A *y* B *los subconjuntos del plano y* M*,* N *y* P *los subconjuntos de* $(0,1)$ *definidos de la siguiente manera*

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x - x^2, \quad -2 \leq x \leq 0\}$.

2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 2\}$.

3. $M = \{t \in (0,1) : t \quad \text{es irracional}\}$.

4. $N = \{t \in (0,1) : t \in \mathbb{Q},\ t = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0, \quad b \quad \text{par}\}$.

5. $P = \{t \in (0,1) : t \in \mathbb{Q},\ t = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0, \quad b \quad \text{impar}\}$.

Sean $T = (0,1)$ *y* $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *definida por:*

$$F(t) = \begin{cases} tA, & si \quad t \in N, \\ tB, & si \quad t \in P, \\ \chi_{\{0\}}, & si \quad t \in M. \end{cases}$$

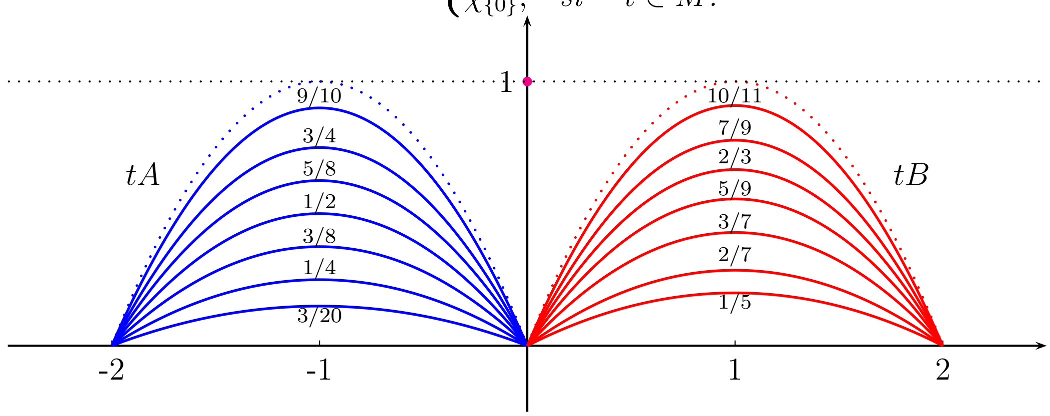

Figura 4.2: Gráfica de la imagen de la multifunción $F(t)$.

Entonces, fijado un $t_0 \in T$*, se tiene que*

$$D(F(t), F(t_0)) = \begin{cases} 0, & si \quad t_0, t \in M, \quad ó, \quad t_0, t \in N, \quad ó, \quad t_0, t \in P, \\ 2, & si \quad t_0 \in N \ \ y \ \ t \in P, \quad ó, \quad t_0 \in P \quad y \quad t \in N. \end{cases}$$

Lo que muestra que F *es una multifunción difusa que no es continua en ningún punto* $t_0 \in T$*, ya que si* $t \to t_0$*, con* $|t - t_0| < \delta$*,* t *toma valores en los tres conjuntos* M*,* N *y* P*.*

Una noción de continuidad más fuerte que la anterior es la siguiente:

Definición 4.8 ([36, 26]). *Sean $T = (a,b) \subset \mathbb{R}$ y $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$, una multifunción difusa. F se dice α-continua en un punto $t_0 \in T$, si para cada $\alpha \in [0,1]$, la multifunción $F_\alpha : T \longrightarrow \mathcal{K}_c^n$ definida por $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ es continua en $t = t_0$ con respecto a la métrica de Hausdorff H; esto es, fijado un $\alpha \in [0,1]$ y dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, \alpha) > 0$ tal que $H([F(t)]^\alpha, [F(t_0)]^\alpha) < \epsilon$, para todo $t \in T$ con $|t - t_0| < \delta$. Si F es α-continua para todo $t \in T$, simplemente decimos que F es α-continua.*

Teorema 4.1. *Sea $T = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Si $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ es una multifunción difusa gH-diferenciable, entonces F es α-continua.*

Demostración. Por hipótesis, para cada $\alpha \in [0,1]$ y h suficientemente pequeño, existe la diferencia $[F(t+h)]^\alpha \ominus_g [F(t)]^\alpha$. Ahora, por las propiedades de la métrica H tenemos que

$$\begin{aligned}
H([F(t+h)]^\alpha, [F(t)]^\alpha) &= H([F(t)]^\alpha + [F(t+h)]^\alpha \ominus_g [F(t)]^\alpha, [F(t)]^\alpha) \\
&= H([F(t+h)]^\alpha \ominus_g [F(t)]^\alpha, \{0\}) \\
&= |h| H\left(\frac{[F(t+h)]^\alpha \ominus_g [F(t)]^\alpha}{h}, \{0\}\right) \\
&\leq |h| H\left(\frac{[F(t+h)]^\alpha \ominus_g [F(t)]^\alpha}{h}, F'_\alpha(t)\right) + |h| H\left(F'_\alpha(t), \{0\}\right).
\end{aligned}$$

Como F es gH-diferenciable, entonces si $h \to 0$, el lado derecho de la última desigualdad tiende a cero y por tanto, F es α-continua. ■

Teorema 4.2. *Sean $T = (a,b) \subset \mathbb{R}$ y $F, G : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ dos multifunciones difusas gH-diferenciables en un punto $t_0 \in T$.*

(i) Si para cada $\alpha \in [0,1]$ las diferencias

$$[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha \quad y \quad [G(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [G(t_0)]^\alpha,$$

para h suficientemente pequeño, están ambas dadas en la forma (a) de (4.1), entonces existe la diferencia $[F(t_0+h) + G(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0) + G(t_0)]^\alpha$, en el sentido (a) de (4.1). En este caso $F + G$ es gH-diferenciable en el punto $t_0 \in T$ y $(F+G)'(t_0) = F'(t_0) + G'(t_0)$.

(ii) Si para cada $\alpha \in [0,1]$ las diferencias

$$[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha \quad y \quad [G(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [G(t_0)]^\alpha,$$

para h suficientemente pequeño, están ambas dadas en la forma (b) de (4.1), entonces existe la diferencia $[F(t_0+h)+G(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)+G(t_0)]^\alpha$, en el sentido (b) de (4.1). En este caso $F+G$ es gH-diferenciable en el punto $t_0 \in T$ y $(F+G)'(t_0) = F'(t_0) + G'(t_0)$.

Demostración. Como $F, G : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ son gH-diferenciables, con derivadas $F'(t)$ y $G'(t)$, entonces para cada $\alpha \in [0,1]$ existen $F_\alpha : T \longrightarrow \mathcal{K}_c^n$ definida por $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ y $G_\alpha : T \longrightarrow \mathcal{K}_c^n$ definida por $G_\alpha(t) = [G(t)]^\alpha$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{h} = F'_\alpha(t_0) \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{[G(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [G(t_0)]^\alpha}{h} = G'_\alpha(t_0),$$

donde las familias $\{F'_\alpha(t_0) | \alpha \in [0,1]\}$ y $\{G'_\alpha(t_0) | \alpha \in [0,1]\}$ definen los conjuntos difusos $F'(t_0)$ y $G'(t_0)$ respectivamente.

Por hipótesis, para cada $\alpha \in [0,1]$, existen

$$[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha = C^1_\alpha \quad \text{y} \quad [G(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [G(t_0)]^\alpha = C^2_\alpha,$$

para algunos conjuntos C^1_α, $C^2_\alpha \in \mathcal{K}_c^n$. Si estas dos diferencias están dadas en el sentido (a) de (4.1), tenemos que

$$[F(t_0+h)]^\alpha = [F(t_0)]^\alpha + C^1_\alpha \quad \text{y} \quad [G(t_0+h)]^\alpha = [G(t_0)]^\alpha + C^2_\alpha$$

y por lo tanto $\quad [F(t_0+h)]^\alpha + [G(t_0+h)]^\alpha = [F(t_0)]^\alpha + [G(t_0)]^\alpha + C^1_\alpha + C^2_\alpha.$

De la parte (i.) de la Proposición 1.4 se sigue que

$$[F(t_0+h) + G(t_0+h)]^\alpha = [F(t_0) + G(t_0)]^\alpha + [C^1_\alpha + C^2_\alpha],$$

o equivalentemente

$$[F(t_0+h) + G(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0) + G(t_0)]^\alpha = [C^1_\alpha + C^2_\alpha]$$

en el sentido (a) de (4.1).

Si estas dos diferencias $[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha = C^1_\alpha$ y $[G(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [G(t_0)]^\alpha = C^2_\alpha$, están dadas en el sentido (b) de (4.1), tenemos que

$$[F(t_0)]^\alpha = [F(t_0+h)]^\alpha + (-1)C^1_\alpha \text{ y } [G(t_0)]^\alpha = [G(t_0+h)]^\alpha + (-1)C^2_\alpha$$

y por lo tanto $\quad [F(t_0)]^\alpha + [G(t_0)]^\alpha = [F(t_0-h)]^\alpha + [G(t_0+h)]^\alpha + (-1)C^1_\alpha + (-1)C^2_\alpha.$

De la parte ($i.$) de la Proposición 1.4 y las operaciones de Minkowski se sigue que

$$[F(t_0)+G(t_0)]^\alpha = [F(t_0-h)+G(t_0+h)]^\alpha + (-1)[C^1_\alpha + C^2_\alpha],$$

o equivalentemente

$$[F(t_0+h)+G(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)+G(t_0)]^\alpha = [C^1_\alpha + C^2_\alpha]$$

en el sentido (b) de (4.1).

En conclusión, para cada $\alpha \in [0,1]$ existe la diferencia

$$[F(t_0+h)+G(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)+G(t_0)]^\alpha.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
&H\left(\frac{[(F+G)(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [(F+G)(t_0)]^\alpha}{h}, F'_\alpha(t_0)+G'_\alpha(t_0)\right)\\
&\quad = H\left(\frac{[F(t_0+h)+G(t_0+h)] \ominus_g [F(t_0)+G(t_0)]^\alpha}{h}, F'_\alpha(t_0)+G'_\alpha(t_0)\right)\\
&\quad = H\left(\frac{C^1_\alpha + C^2_\alpha}{h}, F'_\alpha(t_0)+G'_\alpha(t_0)\right) \leq H\left(\frac{C^1_\alpha}{h}, F'_\alpha(t_0)\right) + H\left(\frac{C^2_\alpha}{h}, G'_\alpha(t_0)\right)\\
&\quad = H\left(\frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{h}, F'_\alpha(t_0)\right) + H\left(\frac{[G(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [G(t_0)]^\alpha}{h}, G'_\alpha(t_0)\right) \xrightarrow{h\to 0} 0.
\end{aligned}$$

Como $F'(t_0)$ y $G'(t_0)$ son conjuntos difusos de $\mathcal{F}^n$ determinados por las familias $\{F'_\alpha(t_0)|\alpha \in [0,1]\}$ y $\{G'_\alpha(t_0)|\alpha \in [0,1]\}$ respectivamente, así, por la Proposición 2.1 en [27], se sigue que $(F+G)'(t_0) = F'(t_0)+G'(t_0)$ es el conjunto difuso de $\mathcal{F}^n$ determinado por la familia de α-niveles $\{F'_\alpha(t_0)+G'_\alpha(t_0)|\alpha \in [0,1]\}$. Así $F+G$ es gH-diferenciable en $t_0 \in T$ y $(F+G)'(t_0) = F'(t_0)+G'(t_0)$. ■

Teorema 4.3. *Sean $T=(a,b) \subset \mathbb{R}$ y $F: T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa. Si F es gH-diferenciable en un punto $t_0 \in T$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $(\lambda F)'(t_0) = \lambda F'(t_0)$.*

Demostración. Como F es gH-diferenciable, existe la diferencia $[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha$, y de la parte $(i.)$ de la Proposición 1.4 y la parte (ii) de la Proposición 4.3, existe

$$\lambda([F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha) = \lambda[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g \lambda[F(t_0)]^\alpha = [\lambda F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [\lambda F(t_0)]^\alpha.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} &H\left(\frac{[\lambda F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [\lambda F(t_0)]^\alpha}{h}, \lambda F'_\alpha(t_0)\right) \\ &\qquad = |\lambda| H\left(\frac{[F(t_0+h)]^\alpha \ominus_g [F(t_0)]^\alpha}{h}, F'_\alpha(t_0)\right) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0. \end{aligned}$$

Así, λF es gH-diferenciable y $(\lambda F)'(t_0) = \lambda F'(t_0)$. Como $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$ está determinado por la familia de α-niveles $\{F'_\alpha(t_0) | \alpha \in [0,1]\}$, se sigue de la Proposición 1.4 que $(\lambda F)'(t_0) = \lambda F'(t_0)$ es el conjunto difuso de $\mathcal{F}^n$ definido por la familia de α-niveles $\{\lambda F'_\alpha(t_0) | \alpha \in [0,1]\}$. ■

Capítulo 5

Aplicaciones: Introducción al problema de Cauchy difuso

El objetivo de este capítulo es aplicar el nuevo concepto de gH-diferenciabilidad en el análisis de la existencia de soluciones de problemas de Cauchy en el contexto difuso. Inicialmente se establecerá una equivalencia entre el problema de Cauchy, asociado con una ecuación diferencial difusa, y una formulación integral, como sucede en el caso clásico de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Definición 5.1 ([16]). *Sean $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa. Se dice que F es fuertemente medible si para cada $\alpha \in [0, 1]$, la multifunción $F_\alpha : T \longrightarrow \mathcal{K}_c^n$ definida por $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ es Lebesgue medible*[1]*, donde $\mathcal{K}_c^n$ es dotado con la topología generada por la métrica de Hausdorff H.*

Observación 5.1 ([16]). *Sean $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^1$ una multifunción difusa. Sea $F_\alpha : T \longrightarrow \mathcal{K}_c^1$ definida por $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Si F es fuertemente medible, entonces f_α y g_α son medibles.*

Definición 5.2 ([16]). *Sean $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa. F se llama integralmente acotada, si existe una función integrable h tal que $\|x\| \leq h(t)$ para todo $x \in F_0(t)$.*

Definición 5.3 ([16]). *Sean $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa. La*

[1] Para mayores detalles de funciones y conjuntos Lebesgue medibles, ver por ejemplo [12, 39, 34, 20].

integral $\int_a^b F(t)dt$ *es definida a través de los* α*-niveles de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned}\left[\int_a^b F(t)dt\right]^\alpha &= \int_a^b F_\alpha(t)dt \\ &= \left\{\int_a^b f(t)dt \mid f : T \to \mathbb{R}^n \text{ es una selección medible de } F_\alpha\right\}\end{aligned}$$

para todo $0 < \alpha \leq 1$. *Una multifunción difusa fuertemente medible e integralmente acotada* $F : T \to \mathcal{F}^n$ *es llamada integrable sobre el intervalo* T *si* $\int_a^b F(t)dt$ *pertenece a* $\mathcal{F}^n$.

Observación 5.2 ([16])**.** *Sea* $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$. *Si* $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ *es una multifunción fuertemente medible e integralmente acotada, entonces* F *es integrable.*

Observación 5.3 ([16])**.** *Sean* $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *y* $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^1$. *Si* F *es integrable, en virtud de la observación 5.1, la integral* $\int_a^b F(t)dt$ *se obtiene integrando las funciones de sus* α*-niveles, esto es*

$$\left[\int_a^b F(t)dt\right]^\alpha = \left[\int_a^b f_\alpha(t)dt, \int_a^b g_\alpha(t)dt\right].$$

Proposición 5.1 ([16])**.** *Sean* $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *y* $c \in T$. *Si* $F, G : T \to \mathcal{F}^n$ *son integrables y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces*

(i) $\int_a^b F(t)dt = \int_a^c F(t)dt + \int_c^b F(t)dt;$

(ii) $\int_a^b (\lambda F(t) + G(t))dt = \lambda \int_a^b F(t)dt + \int_a^b G(t)dt;$

(iii) $D(F, G)$ *es integrable;*

(iv) $D\left(\int_a^b F(t)dt, \int_a^b G(t)dt\right) \leq \int_a^b D(F, G)(t)dt.$

Proposición 5.2 ([16])**.** *Sea* $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$. *Si* $F : T \longrightarrow \mathcal{F}^n$ *es* α*-continua, entonces* F *es integrable.*

Teorema 5.1. *Sean* $T = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $F : T \to \mathcal{F}^1$ *y para cada* $\alpha \in [0, 1]$ *denotemos por* $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$ *la respectiva multifunción definida a través de los* α*-niveles. Si* F *es* gH*-diferenciable sobre* (a, b) *con derivada* $F'(t)$ *tal que* $[F'(t)]^\alpha = [g'_\alpha(t), f'_\alpha(t)]$ *verifica que* $g'_\alpha(t)$, $f'_\alpha(t)$ *son funciones continuas en* (a, b), *entonces para cada* $s \in T$ *y* $\alpha \in [0, 1]$, *se tiene que*

$$\left[\int_a^s F'(t)\, dt\right]^\alpha = [F(s)]^\alpha \ominus_g [F(a)]^\alpha. \tag{5.1}$$

Demostración. Como F es gH-diferenciable, de la Proposición 4.9 se tiene (4.9). Asumamos inicialmente que $[F'(t)]^\alpha = [g'_\alpha(t), f'_\alpha(t)]$ si $g'_\alpha(t) \leq f'_\alpha(t)$. Entonces, usando la Observación 5.3, para cada $\alpha \in [0,1]$, se tiene

$$\begin{aligned}\left[\int_a^s F'(t)\,dt\right]^\alpha &= \int_a^s [F'(t)]^\alpha\,dt = \left[\int_a^s g'_\alpha(t)dt, \int_a^s f'_\alpha(t)dt\right]\\ &= [g_\alpha(s) - g_\alpha(a), f_\alpha(s) - f_\alpha(a)]\\ &= [f_\alpha(s), g_\alpha(s)] \ominus_g [f_\alpha(a), g_\alpha(a)] = [F(s)]^\alpha \ominus_g [F(a)]^\alpha,\end{aligned}$$

donde $[F(s)]^\alpha \ominus_g [F(a)]^\alpha$ es dada en el sentido (b) de (4.1). Consecuentemente, para todo $\alpha \in [0,1]$, se tiene la igualdad (5.1).

Asumamos ahora que $[F'(t)]^\alpha = [f'_\alpha(t), g'_\alpha(t)]$ si $f'_\alpha(t) \leq g'_\alpha(t)$. Entonces, usando la Observación 5.3, para cada $\alpha \in [0,1]$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left[\int_a^s F'(t)\,dt\right]^\alpha &= \int_a^s [F'(t)]^\alpha\,dt = \left[\int_a^s f'_\alpha(t)dt, \int_a^s g'_\alpha(t)dt\right]\\ &= [f_\alpha(s) - f_\alpha(a), g_\alpha(s) - g_\alpha(a)]\\ &= [f_\alpha(s), g_\alpha(s)] \ominus_g [f_\alpha(a), g_\alpha(a)] = [F(s)]^\alpha \ominus_g [F(a)]^\alpha,\end{aligned}$$

donde $[F(s)]^\alpha \ominus_g [F(a)]^\alpha$ es dada en el sentido (a) de (4.1). Entonces, para todo $\alpha \in [0,1]$, se verifica la igualdad (5.1). ∎

Definición 5.4. *Sean $T = [a,b] \subset \mathbb{R}$ y $F : T \times \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^n$. La multifunción difusa F es llamada α-continua en el punto $(t_0, x_0) \in T \times \mathcal{F}^n$ si y sólo si, para todo $\alpha \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ tal que $H([F(t,x)]^\alpha, [F(t_0,x_0)]^\alpha) < \varepsilon$, siempre que $|t - t_0| < \delta$ y $H([x]^\alpha, [x_0]^\alpha) < \delta$, $t \in T$, $x \in \mathcal{F}^n$, donde H indica la distancia de Hausdorff.*

Ahora estamos en condiciones para analizar el siguiente problema de valor inicial en el contexto difuso.

Hallar $x(t)$ tal que

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{5.2}$$

donde $x_0 \in \mathcal{F}^1$, $t_0 \in T$ y $F : T \times \mathcal{F}^1 \to \mathcal{F}^1$ es α-continua y x' denota la gH-derivada de $x(t)$, dada en la Definición 4.4.

El problema 5.2 ha sido analizado por varios autores (ver por ejemplo [4, 8, 16, 25, 35, 36, 42]), pero utilizando nociones de diferenciabilidad diferentes, (menos generales), a la noción de diferenciabilidad que se propone en este trabajo.

Teorema 5.2. *Sea $F : T \times \mathcal{F}^1 \to \mathcal{F}^1$ una multifunción difusa α-continua, $t_0 \in T$ y $x_0 \in \mathcal{F}^1$. Una aplicación $x : T \to \mathcal{F}^1$ es una solución de (5.2) si y sólo si, x es α-continua y verifica la siguiente ecuación integral*

$$[x(t)]^\alpha \ominus_g [x(t_0)]^\alpha = \left[\int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\ ds\right]^\alpha, \quad \forall t \in T,\ t \geq t_0,\ \forall \alpha \in [0,1].$$

Demostración. Si $x(t)$ es una solución de (5.2), entonces por el Teorema 4.1 se tiene que $x(t)$ es α-continua. Además para todo $t_0 \leq t$, $t \in T$, el Teorema 5.1 implica que

$$[x(t)]^\alpha \ominus_g [x(t_0)]^\alpha = \left[\int_{t_0}^{t} x'(s)\ ds\right]^\alpha = \left[\int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\ ds\right]^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

Por otro lado, si F es α-continua (Definición 5.4), entonces por la Proposición 5.2 se tiene que F es integrable y por lo tanto, la integral $\int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\ ds$ tiene sentido.

Denotemos por $[F(s, x(s))]^\alpha = [F_\alpha^1(s, x(s)), F_\alpha^2(s, x(s))]$, $\alpha \in [0,1]$ los α-niveles de la multifunción $F(s, x(s))$, y sea $[x(t)]^\alpha = [x_\alpha^1(t), x_\alpha^2(t)]$ los α-niveles de $x(t)$. Entonces, usando la Observación 5.3, para todo $\alpha \in [0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned}
[x(t)]^\alpha \ominus_g [x(t_0)]^\alpha &= \left[x_\alpha^1(t), x_\alpha^2(t)\right] \ominus_g \left[x_\alpha^1(t_0), x_\alpha^2(t_0)\right] \\
&= \left[\int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\ ds\right]^\alpha = \int_{t_0}^{t} [F(s, x(s))]^\alpha\ ds \\
&= \left[\int_{t_0}^{t} F_\alpha^1(s, x(s))\ ds, \int_{t_0}^{t} F_\alpha^2(s, x(s))\ ds\right].
\end{aligned}$$

Por la definición de H-diferencia generalizada, se tienen dos opciones:

$$(i) \qquad \left[x_\alpha^1(t), x_\alpha^2(t)\right] = \left[x_\alpha^1(t_0), x_\alpha^2(t_0)\right] + \left[\int_{t_0}^{t} F_\alpha^1(s, x(s))\ ds, \int_{t_0}^{t} F_\alpha^2(s, x(s))\ ds\right]$$

ó

$$\begin{aligned}
(ii) \qquad \left[x_\alpha^1(t_0), x_\alpha^2(t_0)\right] &= \left[x_\alpha^1(t), x_\alpha^2(t)\right] + (-1)\left[\int_{t_0}^{t} F_\alpha^1(s, x(s))\ ds, \int_{t_0}^{t} F_\alpha^2(s, x(s))\ ds\right] \\
&= \left[x_\alpha^1(t), x_\alpha^2(t)\right] + \left[-\int_{t_0}^{t} F_\alpha^2(s, x(s))\ ds, -\int_{t_0}^{t} F_\alpha^1(s, x(s))\ ds\right].
\end{aligned}$$

Si sucede (i), entonces

$$x_\alpha^1(t) = x_\alpha^1(t_0) + \int_{t_0}^{t} F_\alpha^1(s, x(s))\ ds \quad \text{y} \quad x_\alpha^2(t) = x_\alpha^2(t_0) + \int_{t_0}^{t} F_\alpha^2(s, x(s))\ ds,$$

y por lo tanto

$$(x_\alpha^1)'(t) = F_\alpha^1(s, x(s)) \quad \text{y} \quad (x_\alpha^2)'(t) = F_\alpha^2(s, x(s)),$$

esto es

$$x'(t) = \left[(x_\alpha^1)'(t), (x_\alpha^2)'(t)\right] = \left[F_\alpha^1(s, x(s)), F_\alpha^2(s, x(s))\right] = F(t, x(t)).$$

En el caso (ii) se tiene

$$x_\alpha^1(t_0) = x_\alpha^1(t) + (-1)\int_{t_0}^{t} F_\alpha^2(s, x(s))\ ds \quad \text{y} \quad x_\alpha^2(t_0) = x_\alpha^2(t) + (-1)\int_{t_0}^{t} F_\alpha^1(s, x(s))\ ds,$$

y así,

$$x'(t) = \left[(x_\alpha^2)'(t), (x_\alpha^1)'(t)\right] = \left[F_\alpha^1(s, x(s)), F_\alpha^2(s, x(s))\right] = F(t, x(t)). \qquad \blacksquare$$

El siguiente teorema tiene como fin probar la existencia de solución del problema de valor inicial difuso (5.2) .

Teorema 5.3. *Sean* $R_0 = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq a\} \times \{x \in \mathcal{F}^1 : D(x, x_0) \leq b\}$*,* $a, b > 0$*,* $x_0 \in \mathcal{F}^1$ *y asuma que* $f : R_0 \to \mathcal{F}^1$ *es* α*-continua. Si existe* $K > 0$ *tal que* $H\left([f(t,x)]^\alpha, [f(t,y)]^\alpha\right) \leq K\, H\left([x]^\alpha, [y]^\alpha\right)$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$ *y* (t,x)*,* $(t,y) \in R_0$*, entonces el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.3}$$

tiene dos únicas soluciones x*,* $\tilde{x}$ gH*-diferenciables, definidas en el intervalo* $|t - t_0| < \delta = \text{mín}\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$*, siendo* $M = D\left(f(t,x), \hat{0}\right)$ *para cada* $(t,x) \in R_0$*, y* $\hat{0} \in \mathcal{F}^1$ *definida como* $\hat{0}(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Además $D(x_n, x) \to 0$*,* $D(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \to 0$*, en* $|t - t_0| \leq \delta$*, cuando* $n \to \infty$*, donde*

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\ ds, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.4}$$

ó

$$x_0 = \tilde{x}_{n+1}(t) + (-1)\int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}_n(s))\ ds, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.5}$$

Demostración. Las iteraciones sucesivas (5.4) se obtienen cuando la derivada x' en (5.3) es considerada en el sentido (a) de (4.1). La existencia y unicidad de una solución x como el límite de x_n en la métrica H, fue obtenida en [26]. Por lo tanto se probará la existencia y unicidad de $\tilde{x}$ como el límite, en la métrica H, de las iteraciones sucesivas (5.5), que aparecen, al considerar la derivada x' en (5.3) en el sentido (b) de (4.1).

De (5.5), para $n = 1$ se tiene que

$$x_0 = \tilde{x}_1(t) + (-1)\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\ ds,$$

y por lo tanto de la Definición 5.4, $\tilde{x}_1(t)$ es α-continua en el intervalo $|t - t_0| \leq \delta$. Además, usando las propiedades de la métrica H, se tiene que

$$\begin{aligned} H\left([\tilde{x}_1(t)]^{\alpha}, [x_0]^{\alpha}\right) &= H\left([\tilde{x}_1(t)]^{\alpha}, [\tilde{x}_1(t)]^{\alpha} + (-1)\left[\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\ ds\right]^{\alpha}\right) \\ &= H\left(\left[\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\ ds\right]^{\alpha}, \hat{0}\right). \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} D\left(\tilde{x}_1(t), x_0\right) &= \sup_{0\leq\alpha\leq 1} d\left([\tilde{x}_1(t)]^{\alpha}, [x_0]^{\alpha}\right) = D\left(\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\ ds, \hat{0}\right) \\ &\leq \int_{t_0}^{t} D\left(f(s, x_0), \hat{0}\right)\ ds \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b. \end{aligned}$$

Usando un argumento de inducción matemática, asumamos que $\tilde{x}_n(t)$ es α-continua en $|t - t_0| \leq \delta$ y $D(\tilde{x}_n(t), x_0) \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b$. De (5.5), $\tilde{x}_{n+1}(t)$ es α-continua en $|t - t_0| \leq \delta$ y $D(\tilde{x}_{n+1}(t), x_0) \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b$. Consecuentemente, la familia $\{\tilde{x}_n(t)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones α-continuas en el intervalo $|t - t_0| \leq \delta$, tal que $D(\tilde{x}_n(t), x_0) \leq b$ y $D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}(t)) \to 0$, cuando $n \to \infty$. Por otro lado, usando las propiedades de la distancia de Hausdorff H, para cada $\alpha \in [0, 1]$, se tiene que

$$\begin{aligned} &d\big([\tilde{x}_2(t)]^{\alpha}, [\tilde{x}_1(t)]^{\alpha}\big) \\ &\quad \leq d\left([\tilde{x}_2(t)]^{\alpha} + \left[(-1)\int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}_1(s))ds\right]^{\alpha}, [\tilde{x}_1(t)]^{\alpha} + \left[(-1)\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)ds\right]^{\alpha}\right) \\ &\qquad + d\left([\tilde{x}_2(t)]^{\alpha} + \left[(-1)\int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}_1(s))ds\right]^{\alpha}, [\tilde{x}_2(t)]^{\alpha} + \left[(-1)\int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}_0(s))ds\right]^{\alpha}\right) \\ &\quad = d([\tilde{x}_0]^{\alpha}, [\tilde{x}_0]^{\alpha}) + d\left(\left[\int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}_1(s))ds\right]^{\alpha}, \left[\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)ds\right]^{\alpha}\right) \\ &\quad \leq \int_{t_0}^{t} d([f(s, \tilde{x}_1(s))]^{\alpha}, [f(s, x_0)]^{\alpha})ds \\ &\quad \leq \int_{t_0}^{t} Kd([\tilde{x}_1(s)]^{\alpha}, [x_0]^{\alpha})ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando el $\sup\limits_{0\leq\alpha\leq 1}$ en la desigualdad anterior, se obtiene que

$$D(\tilde{x}_2(t), \tilde{x}_1(t)) = K\int_{t_0}^{t} D(\tilde{x}_1(s), x_0(s))ds \leq MK\frac{|t-t_0|^2}{2!} \leq MK\frac{\delta^2}{2!}.$$

Asumamos por inducción que $D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}_{n-1}(t)) \leq MK^{n-1}\frac{|t-t_0|^n}{n!} \leq MK^{n-1}\frac{\delta^n}{n!}$. Entonces probaremos que

$$D(\tilde{x}_{n+1}(t), \tilde{x}_n(t)) \leq MK^n\frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq MK^n\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{5.6}$$

De hecho, como antes, para todo $\alpha \in [0,1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} d([\tilde{x}_{n+1}(t)]^\alpha, [\tilde{x}_n(t)]^\alpha) &\leq d\left(\left[\int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}_n(s))ds\right]^\alpha, \left[\int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}_{n-1}(s))ds\right]^\alpha\right) \\ &\leq \int_{t_0}^{t} d([f(s, \tilde{x}_n(s))]^\alpha, [f(s, \tilde{x}_{n-1}(s))]^\alpha)ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} Kd([\tilde{x}_n(s)]^\alpha, [\tilde{x}_{n-1}(s)]^\alpha)ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} D(\tilde{x}_{n+1}(t), \tilde{x}_n(t)) &\leq K\int_{t_0}^{t} D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}_{n-1}(t))ds \\ &\leq MK^n\int_{t_0}^{t} \frac{|s-t_0|^n}{n!} \leq MK^n\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Usando el criterio de convergencia de Weierstrass, de (5.6) se sigue que $D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}_{n-1}(t)) \to 0$ uniformemente en $|t-t_0| \leq \delta$, cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, existe $\tilde{x} : \{t : |t-t_0| \leq \delta \leq a\} \to \mathcal{F}^1$ tal que $D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}(t)) \to 0$, uniformemente en $|t-t_0| \leq \delta$, cuando $n \to \infty$.

Como $D(f(t, \tilde{x}_n(t)), f(t, \tilde{x}(t))) \leq KD(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}_{n-1}(t)) \to 0$ uniformemente en $|t-t_0| \leq \delta$, cuando $n \to \infty$, se concluye que

$$x_0 = \tilde{x}(t) + (-1)\int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}(s))ds.$$

Resta probar la unicidad. En [26] fue probada la unicidad de la solución $x(t)$ definida en $|t-t_0| \leq \delta$ que verifica (5.4), considerando la gH-diferencia en el sentido (a) de (4.1). Ahora, considerando la gH-diferencia en el sentido (b) de (4.1), supongamos que existe

$\tilde{y}(t)$, definida en $|t-t_0| \leq \delta$, verificando (5.5). Mostraremos que $D(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \equiv 0$ para todo t tal que $|t-t_0| \leq \delta$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\tilde{x}_n$ definida como en (5.5), se tiene que

$$\begin{aligned} H([\tilde{y}(t)]^\alpha, [\tilde{x}_n(t)]^\alpha) &\leq H\left(\left[\int_{t_0}^t f(s, \tilde{y}(s))ds\right]^\alpha, \left[\int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}_{n-1}(s))ds\right]^\alpha\right) \\ &\leq \int_{t_0}^t Kd([\tilde{y}(s)]^\alpha, [\tilde{x}_{n-1}(s)]^\alpha)ds, \end{aligned}$$

para cada $\alpha \in [0,1]$. Consecuentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_n(t)) \leq K \int_{t_0}^t D(\tilde{y}(s), \tilde{x}_{n-1}(s))ds.$$

Note que $D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_0) \leq b$ en $|t-t_0| \leq \delta$. Por lo tanto $D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_1(t)) \leq bK|t-t_0|$, en $|t-t_0| \leq \delta$. Por un argumento inductivo, asumamos que $D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_n(t)) \leq bK^n|t-t_0|^n/n!$ en $|t-t_0| \leq \delta$. Entonces se obtiene que $D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_{n+1}(t)) \leq bK^n|t-t_0|^{n+1}/(n+1)!$. Consecuentemente, $D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_n(t)) = D(\tilde{x}(t), \tilde{x}_n(t)) \to 0$, cuando $n \to \infty$ con t satisfaciendo $|t-t_0| \leq \delta$. ■

Conclusiones y trabajos futuros

1. Se analizaron las diversas definiciones relativas a la diferenciabilidad de multifunciones y multifunciones difusas.

2. Se introdujo una nueva noción de diferenciabilidad de una multifunción difusa, la cual además de generalizar en buena medida algunas definiciones de diferenciabilidad previamente usadas en la literatura, es compatible con las reglas de cálculo usuales. Además esta noción de diferenciabilidad, rescata el análisis de la diferenciabilidad vía multifunciones clásicas.

3. Se presentó un análisis comparativo entre las diferentes nociones de diferenciabilidad de multifunciones y multifunciones difusas.

4. Se aplicó la definición y propiedades de la gH-diferenciabilidad de multifunciones difusas para probar la existencia (y unicidad) de soluciones de un problema de Cauchy en el contexto difuso.

5. Un trabajo interesante a futuro sería analizar problemas de valor inicial asociados a ecuaciones diferenciales difusas de orden n, usando la noción de gH-diferenciabilidad de multifunciones difusas. Por otro lado, sería interesante implementar esquemas numéricos que permitan obtener soluciones aproximadas de problemas de valor inicial en el contexto difuso.

6. Otro trabajo a futuro, puede ser el análisis cualitativo de las soluciones al problema de valor inicial en el contexto difuso, desde el punto de vista de la existencia global y la estabilidad; de hecho, existen algunos resultados en esta línea, pero usando como base la H-diferenciabilidad de multifunciones difusas.

Bibliografía

[1] Aumann R. J. & Perles M., *A variational problem arising in economic*, J. Math. Anal. Appl., **11** (1965), 488-503.

[2] Banks H.T. & Jacobs M.Q., *A differential calculus for multifunctions*, J. Math. Anal. Appl., **29** (1970), 246-272

[3] Bede B. & Gal S. G., *Almost periodic fuzzy-number-valued functions*, Fuzzy Set and System, **147** (2004), 385-403.

[4] Bede B. & Gal S. G., *Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equations*, Fuzzy Set and System, **151** (2005), 581-99.

[5] Blasi F.S. de, *On the differentiability of multifunctions*, Pacific J. Math., **66** (1976), 67-81.

[6] Brézis H., Análisis Funcional, teoría y aplicaciones. Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[7] Bridgland T. F., *Trajectory integrals of set valued functions*, Pacific J. Math., **33** (1970), 43-68.

[8] Chalco-Cano Y. & Rojas-Medar M. & Román-Flores H., *Sobre ecuaciones diferenciales difusas*, Bol. Soc. Esp. Math. Appl., **41** (2007), 91-99.

[9] Debreu G., *Integration of correspendences*, Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Probability, Univ. of California Press, Berkeley, (1966), 351-372.

[10] Diamond P. & Kloeden P., *Metric space of fuzzy sets: Theory and Applications*, World Scientific Pub., Singapure, 1994.

[11] Ding Z. & Kandel A., *Existence of the solutions of fuzzy differential equations with parameters*, Information Science **99** (1997), 205-217.

[12] Folland B. Gerald., Real Analysis, *Modern Techniques and Their Applicatios*. Wiley, Segunda Edición, New York, 1999.

[13] Goetschel R. & Voxman W., *Elementary fuzzy calculus*, Fuzzy Sets and Systems, **18** (1986), 31-43.

[14] Hukuhara M., *Intégration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe*, Funkcialaj Ekvacioj, **10** (1967), 205-223.

[15] Ibrahim A-G. M., *On the differentiability of set-valued functions defined on a Banach space and mean value theorem*, Appl. Math. Comp. **74** (1996), 79-94.

[16] Kaleva O., *Fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems, **24** (1987), 301-317.

[17] Kaleva O., *The calculus of fuzzy valued functions*, Appli. Math. Lett, **3** n.2, (1990), 55-59.

[18] Kisielewics M., *Differential inclusions and optimal control*, Kluwer, Warzawa, 1991.

[19] Klein E. & Thompsom A., *Theory of correspondences*, Wiley, New York, 1984.

[20] Kolmogorov A. N. & Fomin S. V. Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Mir, Moscu, 1975.

[21] Kreyszig E., Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley, New York, 1989.

[22] Kudō H., *Dependent experiments and sufficient statistics*, Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ., **4** (1953), 151-163.

[23] Kwakernaak H., *Fuzzy random variables: Definition and theorems*, Inform. Sci., **15** (1978), 1-29.

[24] Negoita C.V. & Ralescu D., *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*, Wiley, New York, (1975), 12-31.

[25] Nieto J. J., *The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations*, Fuzzy Set and System, **102** (1999), 259-262.

[26] Park J. & Han H., *Existence and uniqueness theorem for a solutions of fuzzy diferential equations*, Int. Journal Math. Math. Sci., **22** (1999), 271-279.

[27] Puri M. & Ralescu D., *Differential of fuzzy functions*, J. Math. Anal. Appl., **91** (1983), 552-558.

[28] Puri M. & Ralescu D., *Fuzzy Random Variables*, J. math. Anal. Appl., **144** (1986), 409-422.

[29] Radström H., *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1952), 165-169.

[30] Richter H., *Verallgemeinerung eines in der Statistik benötigten Satzes der Masstheorie*, Math. Ann., **150** (1963), 85-90.

[31] Rojas-Medar M., *Analisís Fuzzy Multívoco*, Universidade Estadual de Campinas, Brazil, 1986

[32] Rojas-Medar M. & Bassanezi R. C. & Roman-Flores H., *A generalization of the Minkowski embedding theorem and applications*, Fuzzy Sets and Systems, **102** (1999), 263-269.

[33] Román-Flores H. & Rojas-Medar M.A., *Differentiability of fuuzy-valued mappings*, Revista de Matemáticas y Estadística-UNESP, **16** (1998), 223-239.

[34] Royden H. L., Real Analysis. Prentice Hall, Tercera Edición, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.

[35] Seikkala S., *On the fuzzy initial value problem*, Fuzzy sets and systems, **24** (1987) 319-330.

[36] Song S. & Wu C., *Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy diferential equations*, Fuzzy Set and System, **110** (2000), 55-67.

[37] Stefanini L., A generalization of Hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic, Series on Advances in soft Computing, 48, Springer, 2008. http://econpapers.repec.org/RAS/pst233.thm

[38] Stefanini L. & Bebe B., *Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations*, Nonlinear Analysis, (2009), doi: 10.1016/j.na.2008.12.005

[39] Taylor E. Michael, Measure Theory and Integration. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics **76**, Providence, Rhode Island, 2006.

[40] Villamizar-Roa E. J. & Arenas-Díaz G. & Reátiga-Villamizar A. *On the differentiability of fuzzy set-valued mappings*, Submitted to Nonlinear Analysis, Marzo de 2010.

[41] Wang Z. & Klir G., *Fuzzy measure theory*, Plenum, New York, 1992.

[42] Wu C. & Song S. & Stanley Lee E., *Approximate solutions, existence and uniqueness of the Cauchy problem of fuzzy differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 629-644.

[43] Yu-Ru Syau, *Diferentiability and convexity of fuzzy mappings*, Computers and Mathematics with Applications, **41** (2001), 73-81.

[44] Zadeh. L.A., *Fuzzy sets*, Infor. and Control, **8** (1965), 338-353.