

**MODELOS RELATIVISTAS DE SISTEMAS  
COMPUESTOS POR DISCOS DELGADOS Y HALOS  
CON CAMPO ELÉCTRICO**

Liliana A. Gómez López

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
Bucaramanga  
2012

**MODELOS RELATIVISTAS DE SISTEMAS  
COMPUESTOS POR DISCOS DELGADOS Y HALOS  
CON CAMPO ELÉCTRICO**

Liliana A. Gómez López

**Trabajo de grado  
para optar por el título de físico**

Director: PhD. Guillermo A. González V.

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
Bucaramanga  
2012

---

## AGRADECIMIENTOS

- A el profesor Guillermo González por su dedicación y correcciones.
- A el profesor Luis Nuñez por las oportunidades y por presentarme el maravilloso mundo de la Relatividad General.
- A mis padres Ricardo y María por sus oraciones y amor incondicional.
- A mis nonitos Hernando y Lilia por ser la lámpara en mi camino.
- A Gonci Quiroga por amarme de manera inusual y acompañarme cada día.
- A mis amigos y profesores del GIRG por la compañía, tolerancia y apoyo.

# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
1.1. Naturaleza e importancia del problema . . . . .	11
1.2. Estado general del tema . . . . .	12
1.3. Propósito y organización del trabajo . . . . .	13
<b>2. Modelos Relativistas de Disco Delgado y Halo con Campo Eléctrico</b>	<b>15</b>
2.1. Preliminares. . . . .	15
2.2. Formalismo General . . . . .	15
2.3. Ecuaciones de Einstein-Maxwell y soluciones conformestáticas con campo eléctrico. . . . .	18
<b>3. Caracterización del Fluido</b>	<b>21</b>
3.1. Preliminares. . . . .	21
3.2. Desde el observador localmente Minkowskiano (OLM). . . . .	21
3.3. Condiciones de Energía . . . . .	23
<b>4. Una Familia Particular de Discos y Halos</b>	<b>26</b>
4.1. Preliminares. . . . .	26
4.2. Fluido- $\gamma$ . $k_1$ y $k$ . . . . .	26
4.3. Disco y halo de polvo. . . . .	27
4.3.1. Modelo $n = 0$ . . . . .	32
4.3.2. Modelo $n = 1$ . . . . .	38
<b>5. Conclusiones</b>	<b>44</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>46</b>
<b>Anexos</b>	<b>50</b>

# Índice de figuras

---

1.	<i>Densidad de energía del disco de polvo para el modelo <math>n = 0</math>. Se destaca el rápido decaimiento de la densidad de energía del disco para tres valores distintos de <math>k</math>, donde se considera <math>\tilde{A}_0 = 1</math> . . . . .</i>	3
2.	<i>Densidad de energía del disco de polvo para el modelo <math>n = 0</math>. Se destaca el rápido decaimiento de la densidad de energía del disco para tres valores distintos de <math>k</math>, donde se considera <math>\tilde{A}_0 = 1</math> . . . . .</i>	4
4.1.	<i>Densidad de energía del disco de polvo para el modelo <math>n = 0</math>. Se destaca el rápido decaimiento de la densidad de energía del disco para tres valores distintos de <math>k</math>, donde se considera <math>\tilde{A}_0 = 1</math> . . . . .</i>	33
4.2.	<i>Contornos de intensidad de la densidad de energía del halo de polvo para el modelo <math>n = 0</math>. . . . .</i>	34
4.3.	<i>Campo eléctrico para el modelo <math>n = 0</math> en <math>z = 0</math> para los mismos valores anteriores de <math>k</math>, con <math>\tilde{A}_0 = 1</math>. . . . .</i>	37
4.4.	<i>Líneas de campo eléctrico para el modelo <math>n=0</math>. Se observa que las líneas de campo son rectas. . . . .</i>	38
4.5.	<i>Densidad de energía del disco de polvo para el modelo <math>n = 1</math>. Nuevamente la densidad decae rápidamente para los mismos valores de <math>k</math> que en modelo anterior. Donde se considera que <math>\tilde{A}_0 = \tilde{A}_1 = 1</math> . . . . .</i>	39
4.6.	<i>Contornos de densidad de energía del halo de polvo para el modelo <math>n = 1</math>. . . . .</i>	40
4.7.	<i>Campo eléctrico para el modelo <math>n = 1</math> con <math>z = 0</math> y los mismos valores de <math>k</math> del modelo anterior, considerando las constantes <math>\tilde{A}_0 = \tilde{A}_1 = 1</math>. . . . .</i>	42
4.8.	<i>Líneas de campo eléctrico para el modelo <math>n = 1</math>. . . . .</i>	43
1.	<i>Ilustración del método “desplazamiento, corte y reflexión ”para generar discos. En <b>A</b>, el espacio-tiempo con una singularidad está desplazado y cortado por un plano (líneas punteadas). En <b>B</b>, la region con la singularidad es omitida y la parte superior es reflejada respecto al plano . . . . .</i>	54

---

2. *Ilustración del método “desplazamiento, corte y reflexión ”para generar discos con halos. en **A**, una esfera de fluido perfecto está desplazado y cortado por un plano (líneas punteadas). en **B**, la region con la singularidad es omitida y la parte superior es reflejada respecto al plano . . . . .* 55

---

---

# RESUMEN

---

**TITULO:** MODELOS RELATIVISTAS DE SISTEMAS COMPUESTOS POR DISCOS DELGADOS Y HALOS ESFEROIDALES CON CAMPO ELÉCTRICO <sup>1</sup>

**AUTOR:** Liliana A. Gómez López Diaz.<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVE:** Relatividad General, Discos Relativistas, Halo, Ecuaciones de Einstein-Maxwell, Espacio-tiempo Conformestático, Tensor Momento-Energía.

## DESCRIPCIÓN:

Se presenta una familia de modelos relativistas de discos delgados infinitos en un halo con campo eléctrico. Estos modelos se obtienen a partir de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para un espacio-tiempo conformestático, axialmente simétrico y considerando el cuadvivector potencial con una única componente eléctrica. Para tal fin, se escoge un sistema de coordenadas correspondiente a la geometría de la fuente. Además, se consideran soluciones en las cuales la primera derivada del tensor métrico y del cuadvivector potencial presenten discontinuidad finita. Dada una solución con las propiedades anteriores se obtienen el tensor de momentum-energía y el cuadvivector densidad de corriente para el sistema disco y halo, por medio del formalismo de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en términos de distribuciones tensoriales. Para analizar las propiedades físicas del modelo como la densidad de materia y carga, la ecuación de estado del fluido del halo y el campo eléctrico, se aplican las condiciones de energía usuales, de tal manera que se obtenga un sistema de ecuaciones cuya solución se pueda expresar en términos de una función auxiliar que sea solución de la ecuación de Laplace. Finalmente, se usa el método “desplazamiento, corte y reflexión” para obtener una familia relativista de discos delgado de polvo inmersos en un halo de fluido- $\gamma$ . Se demuestra que las masas del halo y del disco en esta familia de soluciones discoidales son finitas.

---

<sup>1</sup>Trabajo de Grado

<sup>2</sup>Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D.

---

---

# ABSTRACT

---

**TITLE:** RELATIVISTIC MODELS OF SYSTEMS COMPOSED BY THIN DISKS AND SPHEROIDAL HALOS WITH ELECTRIC FIELD. <sup>1</sup>

**AUTHOR:** Liliana A. Gómez López Diaz.<sup>2</sup>

**KEY WORDS:** General Relativity, Relativistic Disk, Halo, Einstein Equations, Conformastatic Spacetime, Energy-Momentum Tensor.

**DESCRIPTION:**

A family of axisymmetric charged dust thin disks of infinite extension is presented. The disks are obtained by solving the Einstein-Maxwell equations for a conformastatic axially symmetric spacetimes, which has a non vanish electric scalar potential. Solutions are considered where the first derivative and the metric tensor of the four-potential have a finite discontinuity. From this solutions, solving the Einstein-Maxwell equations in terms of tensorial distributions, we obtain the energy-momentum tensor and the four-vector current density for the disk and halo system. The usual energy conditions are used to obtain a system of equations whose solution can be expressed in terms of an auxiliary function which is solution of Laplace equation. Furthermore, “the displacement, cut and reflection” method is used to obtain this family of charged dust thin disks. Finally, we probe that the total mass of the disk and the total mass of the halo are finite for all the possible models in this work.

---

<sup>1</sup>Degree work

<sup>2</sup>School of Physics, Santander Industrial University. Advisor: Guillermo A. González V., Ph.D.

---

# Capítulo 1

## Introducción

---

### 1.1. Naturaleza e importancia del problema

Una de las características más fundamentales de un sistema aislado en el universo es la simetría axial, son ejemplos importantes de esta clase de configuraciones planetas, estrellas, galaxias, discos de acreción y agujeros negros [1, 2, 3]. De acuerdo con esto, a través de los años se ha dedicado una gran cantidad de esfuerzo al estudio teórico del campo gravitacional generado por esta clase de fuentes aisladas, tanto en el contexto de la Teoría Newtoniana de la Gravitación como en el de la Teoría General de la Relatividad. Ahora bien, en la amplia literatura de la Relatividad General y sus temas relacionados, abundan referencias en “soluciones conocidas” e incluso, en “soluciones bien conocidas” de las ecuaciones de campo de Einstein [4]. Sin embargo, aparte de unas pocas familias de espaciotiempos como los de Schwarzschild, Kerr y Friedmann, son pocas las soluciones de este tipo que pueden ser expresadas en términos de un elemento de línea particular utilizando algún sistema de coordenadas estándar. Es así, que distintas publicaciones presentan un amplio número de soluciones e incluso las familias de las soluciones identificadas y clasificadas. Esto es un gran beneficio, sin embargo, cuando se trata de la comprensión física y significado de estas soluciones los resultados son menos satisfactorios, incluso para soluciones mas fundamentales.

En el contexto de la Teoría General de la Relatividad, la construcción de soluciones autoconsistentes, físicamente apropiadas para construcción de fuentes materiales y el campo gravitacional creado por estas fuentes es un problema bastante complicado. Se deben cumplir satisfactoriamente condiciones tales como finitud y positividad de la masa, que es la naturaleza físicamente razonable de la materia. Se pueden obtener soluciones autoconsistentes al resolver el problema exterior sujeto a condiciones de frontera apropiadas para obtener fuentes de materia discoidales, que es el motivo de una buena cantidad de trabajos a través de los años. A pesar de su naturaleza altamente ideal, los modelos relativistas de configuraciones discoidales y delgadas de materia, presentan clara relevancia Astrofísica puesto que pueden usarse para

modelar discos de acreción, galaxias en equilibrio termodinámico, la superposición de galaxias y agujeros negros, como lo presentan los autores en las Ref [5, 6, 7].

En Relatividad General es importante obtener soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell, que describan claramente sistemas auto-gravitantes constituidos por la superposición de dos o más objetos astrofísicos. En particular, sistemas constituidos por discos delgados rodeados por halos esferoidales de materia. Luego, el estudio del campo gravitacional generado por esta clase de fuentes compuestas es relevante, no solo desde el punto de vista de la Teoría de la Relatividad misma, sino también desde el punto de vista de sus aplicaciones Astrofísicas. Debido a la no-linealidad de las ecuaciones de Einstein, obtener soluciones exactas que describan el campo gravitacional de un sistema compuesto es un problema de alta complejidad el cual no se reduce a una simple superposición, como es el caso en la Gravitación Newtoniana. Hasta ahora, se han obtenido muy pocas soluciones exactas que describan sistemas constituidos por discos delgados rodeados por halos de materia.

Los párrafos anteriores permiten ver la clara importancia de este trabajo, que presenta la construcción e interpretación de nuevas soluciones analíticas exactas del sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell en términos de modelos relativistas de sistemas compuestos de discos delgados y halos, pues satisfacen las condiciones de energía usuales para estos modelos y en particular, se obtiene de forma explícita la ecuación de estado que describe el contenido material del halo.

## 1.2. Estado general del tema

Las soluciones exactas, con fuentes de discos delgados relativistas fueron estudiadas inicialmente por Bonnor y Sackfield [1] y Morgan y Morgan [2, 3]. Posteriormente, diferentes autores han obtenido varios tipos de soluciones exactas correspondientes a discos delgados estáticos [8, 9, 10, 11, 12] y estacionarios [13, 14, 15, 16]. También se ha considerado la superposición de discos delgados estáticos o estacionarios con un agujero negro, como se especifica en las Refs.[5, 6, 7, 17, 18].

Además, Vogt y Letelier estudiaron discos de fluido perfecto con halo en espacio-tiempos esféricamente simétricos, donde derivan una condición simple de estabilidad para los discos de fluido perfecto cargados y no cargados [19]. Por otra parte, se ha investigado la estabilidad de modelos de discos delgados [20] utilizando una perturbación de primer orden del tensor de momentum-energía. Los discos delgados también han sido estudiados como fuentes para campos de Kerr-Newman [21, 22], se han construido discos de polvo cargados para distribuciones no axialmente simétricas

como lo presentan en [23], tanto con métricas conformestáticas y conformestacionarias [24, 25]. Varios modelos de vacío estático contrarrotante de discos de polvo fueron presentados por García y González en [26]. Discos de fluido perfecto cargados fueron estudiados en [27], además de discos de fluido perfectos cargados como fuentes de espaciotiempos estáticos y espaciotiempos tipo *Taub-NUT* en [28, 29].

Ahora, entre los trabajos mencionados, son particularmente interesantes aquellos que considera discos de polvo en espaciotiempos conformestáticos [24, 25]. González, Gutiérrez y Ospina presentan una familia infinita de discos de polvo cargados, axialmente simétricos, de extensión finita, con buen comportamiento de la energía superficial y las densidades de carga; exponen técnicas matemáticas elementales y una relativa simplicidad para usarse como guía en distintas soluciones para múltiples trabajos, obteniendo sistemas que no violan las condiciones de energía [30].

### 1.3. Propósito y organización del trabajo

El objetivo central de la presente trabajo de grado, es la construcción e interpretación de modelos relativistas de sistemas compuestos por discos delgados y halos con campo eléctrico, a partir de soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell. Con el fin de obtener tal interpretación, se considerarán soluciones axialmente simétricas de dichas ecuaciones en las cuales la primera derivada del tensor métrico y del potencial electromagnético presentan una discontinuidad finita en la primera derivada. Dada una solución con las propiedades anteriores, se obtendrán el tensor de momentum-energía superficial y la densidad de corriente superficial de la distribución de materia, por medio del formalismo necesario para el tratamiento de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en términos de distribuciones tensoriales. Las propiedades físicas de la distribución de materia se estudiarán mediante el análisis detallado del tensor de momentum-energía superficial.

Igualmente, aunque es muy poco probable que soluciones con campos eléctricos sirvan para modelar verdaderos sistemas aislados presentes en la naturaleza, los métodos utilizados para la obtención explícita de esta clase de soluciones exactas asociadas con fuentes discoidales cargadas razonablemente bien comportadas pueden servir como guía para la obtención de soluciones de mayor relevancia en el contexto astrofísico como por ejemplo en objetos cargados localmente.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 2, se presenta un breve resumen del tratamiento de modelos de discos delgados en Relatividad General; Este muestra el formalismo necesario para el tratamiento de campos tensoriales como distribuciones y la formulación de las ecuaciones de Einstein-Maxwell

## Introducción

---

para cuando existe una hipersuperficie  $\Sigma$  que divide al espaciotiempo en dos regiones:  $M^+$  y  $M^-$ , es decir, por encima y por debajo de  $\Sigma$ . Este método permite obtener las ecuaciones para cada una de las regiones. A lo largo de la sección 2.3 de este capítulo, se continúa con el formalismo aplicado para el caso de un disco delgado axialmente simétrico, obteniendo así la expresión general para el tensor de momentum-energía superficial y la densidad de corriente del disco.

En el Capítulo 3 se introduce la tétrada localmente Minkowskiana la cual permite analizar las características del tensor de momentum-energía, así como las densidades de energía y de corriente de una manera sencilla. Basándonos en esta tétrada podemos estudiar las distintas condiciones de energía para obtener las restricciones de valores para los distintos parámetros que modelizan estas familias de soluciones. Finalmente, se muestra la ecuación de estado más general de este trabajo que corresponde a la de un fluido- $\gamma$ .

En el Capítulo 4 se desea analizar las propiedades del fluido- $\gamma$ . Para ello, se da inicialmente una breve descripción de dicho fluido, pero se muestra que dada las restricciones en los parámetros de las soluciones, este fluido- $\gamma$  no presenta mucha variación respecto del caso particular polvo. Por esto, continuamos el análisis de todas las propiedades físicas para los discos y halos de polvo, propiedades tales como la masa, el campo eléctrico, la densidad de energía superficial del disco, la densidad volumétrica de energía del halo entre otras.

Por último se encuentran las conclusiones y los apéndices donde se detallan de manera más amplia alguno de los cálculos y métodos utilizados en el estudio de estos modelos relativistas de discos delgados y halos con campo eléctrico.

---

Capítulo 2

# Modelos Relativistas de Disco Delgado y Halo con Campo Eléctrico

---

## 2.1. Preliminares.

La construcción de modelos de discos delgados y halo en relatividad general se puede generar a partir de soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell e introduciendo posteriormente una discontinuidad finita en las primeras derivadas del tensor métrico a través del plano  $z = 0$ . La discontinuidad en las primeras derivadas del tensor métrico puede representarse por una función de Heaviside de tal forma que, dado que el tensor de curvatura es lineal en las segundas derivadas del tensor métrico y cuadrático en las primeras derivadas, el tensor de curvatura tendrá términos proporcionales a la distribución delta de Dirac con soporte en el plano  $z = 0$ . En este capítulo se presenta un breve resumen del tratamiento de modelos de discos delgados y halo en relatividad general. El formalismo necesario para el tratamiento de tensores como distribuciones se presenta brevemente en la sección 2.2. En la sección 2.3 dicho formalismo es utilizado en la formulación de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell para espaciotiempos conformestáticos, los cuales se caracterizan por sólo una función métrica y el potencial eléctrico que posee una discontinuidad finita a través de una hipersuperficie  $\Sigma$ . Finalmente, se obtiene la expresión general para los tensores de momentum-energía y las densidades de corriente en términos de distribuciones.

## 2.2. Formalismo General

Consideraremos la hipersuperficie  $\Sigma$  definida por  $w(x^\alpha) = z = cte$  la cual divide el espaciotiempo en dos regiones, una por encima y otra por debajo de la hipersuperficie, denotadas por  $M^+$  y  $M^-$  respectivamente. Luego, el vector normal a dicha

## Modelos Relativistas de Disco Delgado y Halo con Campo Eléctrico

---

hipersuperficie está dado por  $n_\alpha = w_{,\alpha} = \delta_\alpha^z$ . Por lo tanto, las componentes del tensor métrico serán funciones simétricas de la coordenada  $z$ ; es decir, el tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  satisface la relación

$$g_{\alpha\beta}(r, z) = g_{\alpha\beta}(r, -z), \quad (2.1)$$

de tal forma que el salto o discontinuidad de la métrica está dado por

$$[g_{\alpha\beta}] = 0. \quad (2.2)$$

Las relaciones anteriores implican que cuando  $z \neq 0$ , hay simetría ecuatorial para la derivada de la métrica respecto a  $z$

$$g_{\alpha\beta,z}(r, z) = -g_{\alpha\beta,z}(r, -z), \quad (2.3)$$

y las discontinuidades en las primeras derivadas del tensor métrico se pueden escribir como

$$b_{\alpha\beta} = [g_{\alpha\beta,z}] = 2g_{\alpha\beta,z} \Big|_{z=0^+}. \quad (2.4)$$

Utilizamos el método de las distribuciones [31, 32, 33] para suponer que el tensor métrico,  $g_{\alpha\beta}$ , se puede escribir como

$$g_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta})^D = g_{\alpha\beta}^+ \theta(z) + g_{\alpha\beta}^- 1 - \theta(z), \quad (2.5)$$

donde  $\theta(z)$  son las distribuciones de Heaveside y  $g_{\alpha\beta}^\pm$ , son los tensores métricos para las regiones definidas por  $z \geq 0$  es decir  $M^+$  y  $z \leq 0$  que es  $M^-$ , entonces se satisface que

$$g_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta})^D, \quad (2.6)$$

$$g_{\alpha\beta,\lambda} = (g_{\alpha\beta,\lambda})^D, \quad (2.7)$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\lambda} = (\Gamma^\alpha_{\beta\lambda})^D, \quad (2.8)$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\lambda,\eta} = (\Gamma^\alpha_{\beta\lambda,\eta})^D + [\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}] n_\eta \delta(z), \quad (2.9)$$

de donde

$$\Gamma^\alpha_{\beta\lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\eta} [g_{\eta\beta,\lambda} + g_{\eta\lambda,\beta} - g_{\beta\lambda,\eta}], \quad (2.10)$$

son los símbolos de Cristoffel.

Con el uso de las ecuaciones (2.10) y (2.5) y las definiciones para el tensor de Riemman, se obtiene para el tensor de Ricci la expresión

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^+ \theta(z) + R_{\alpha\beta}^- \{1 - \theta(z)\} + H_{\alpha\beta} \delta(z), \quad (2.11)$$

en la cual  $\delta(z)$  es la distribución de Dirac.  $R_{\alpha\beta}^\pm$  son los tensores de Ricci para las regiones definidas por  $M^+$  y  $M^-$ , mientras que  $H_{\alpha\beta}$  es el tensor de Ricci asociado a la hipersuperficie  $\Sigma$

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{b_\beta^z n_\alpha - b_\lambda^z n_\alpha n_\beta + b_{\alpha z} n_\beta - b_{\alpha\beta} g^{zz}\}, \quad (2.12)$$

Si suponemos que el potencial electromagnético  $A_\alpha$  satisface la relación

$$A_\alpha(r, z) = A_\alpha(r, -z), \quad (2.13)$$

de modo que

$$A_{\alpha,z}(r, z) = -A_{\alpha,z}(r, -z), \quad (2.14)$$

por consiguiente las discontinuidades en sus primeras derivadas está dadas por

$$[A_{\alpha,z}] = 2A_{\alpha,z} \Big|_{z=0^+}. \quad (2.15)$$

El tensor de momentum-energía electromagnético está definido como

$$T_{\alpha\beta}^{EM} = \frac{1}{4\pi} \left\{ F_{\alpha\mu} F_{\beta}{}^\mu - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} \right\}, \quad (2.16)$$

donde

$$F_{\alpha\mu} = A_{\mu,\alpha} - A_{\alpha,\mu}, \quad (2.17)$$

es el tensor de campo electromagnético. Luego, el tensor de momentum-energía electromagnético se escribe en forma de distribución como  $T_{\alpha\beta}^{EM} = (T_{\alpha\beta}^{EM})^D$ , y para el tensor de momentum-energía asociado al contenido material

$$T_{\alpha\beta}^M = T_{\alpha\beta}^+ \theta(z) + T_{\alpha\beta}^- \{1 - \theta(z)\} + Q_{\alpha\beta} \delta(z), \quad (2.18)$$

donde  $T_{\alpha\beta}^\pm$  representa el tensor para las regiones  $M^+$  y  $M^-$  respectivamente. Mientras que  $Q_{\alpha\beta}$  es el tensor de momento-energía de  $\Sigma$ .

Se tienen las ecuaciones de Einstein-Maxwell en unidades geometrizadas con  $c = G = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$ , como

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi (T_{\alpha\beta}^M + T_{\alpha\beta}^{EM}), \quad (2.19)$$

que en forma de distribución es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}^\pm - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R^\pm &= 8\pi (T_{\alpha\beta}^{M^\pm} + T_{\alpha\beta}^{EM^\pm}), \\ H_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} H &= 8\pi Q_{\alpha\beta}; \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ahora de las ecuaciones de Maxwell

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 4\pi J^\alpha, \quad (2.21)$$

donde  $J^\alpha$  es el cuadvivector densidad de corriente, que en forma distribucional es

$$J^\alpha = (J^\alpha)^D + I^\alpha \delta(z), \quad (2.22)$$

y para analizar las tres regiones se tiene el sistema equivalente

$$\begin{aligned} F_{\pm}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} &= 4\pi J_{\pm}^\alpha, \\ [F^{\alpha\beta}] \delta_\beta^z &= 4\pi I^\alpha, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde  $J_{\pm}^\alpha$  es el cuadvivector densidad de corriente en las regiones  $M^+$  y  $M^-$  y  $I^\alpha$  es el cuadvivector densidad de corriente en la hipersuperficie  $\Sigma$ .

### 2.3. Ecuaciones de Einstein-Maxwell y soluciones conformestáticas con campo eléctrico.

Con el fin de obtener soluciones exactas simples, escogemos un elemento de línea para espaciotiempos conformestáticos, escrito en coordenadas cilíndricas  $x^a = (t, r, \varphi, z)$  en la forma

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2), \quad (2.24)$$

donde la función métrica  $\psi$  solo depende de  $r$  y  $z$ . Esta clase de métricas se conocen en la literatura como métricas conformestáticas según la Ref [34], donde el elemento de línea es estático y la parte espacial es conformalmente plana, multiplicada por el factor  $e^{-2\psi}$ .

Se considera el cuadvivector potencial  $A_\alpha$  con una única componente distinta de cero

$$A_\alpha = (-\phi, 0, 0, 0), \quad (2.25)$$

donde  $\phi$  depende de  $r$  y  $z$ . Calculando las componentes del tensor de momentum-energía electromagnético

$$\begin{aligned} T_{tt}^{EM} &= \frac{1}{2} e^{2\psi} (\phi_{,r}^2 + \phi_{,z}^2), \\ T_{rr}^{EM} &= \frac{1}{2} r^2 e^{-2\psi} (\phi_{,r}^2 + \phi_{,z}^2), \\ T_{\varphi\varphi}^{EM} &= \frac{1}{2} e^{-2\psi} (\phi_{,z}^2 - \phi_{,r}^2), \\ T_{zz}^{EM} &= \frac{1}{2} e^{-2\psi} (\phi_{,r}^2 - \phi_{,z}^2), \\ T_{\varphi z}^{EM} &= -e^{2\psi} \phi_{,r} \phi_{,z}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

reemplazando estas componentes en

$$8\pi T_{\alpha\beta}^M = G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}^{EM}, \quad (2.27)$$

para obtener el tensor de momentum-energía asociado al contenido material del halo:

$$\begin{aligned}
 T_{tt}^M &= e^{2\psi}[e^{2\psi}(\nabla^2\psi - \nabla\psi \cdot \nabla\psi) - (\phi_{,r}^2 + \phi_{,z}^2)], \\
 T_{rr}^M &= r^2[\nabla\psi \cdot \nabla\psi - e^{-2\psi}(\phi_{,r}^2 + \phi_{,z}^2)], \\
 T_{\varphi\varphi}^M &= \psi_{,z}^2 - \psi_{,r}^2 - e^{-2\psi}(\phi_{,z}^2 - \phi_{,r}^2), \\
 T_{zz}^M &= \psi_{,r}^2 - \psi_{,z}^2 - e^{-2\psi}(\phi_{,r}^2 - \phi_{,z}^2), \\
 T_{\varphi z}^M &= -2\psi_{,r}\psi_{,z} + 2e^{-2\psi}\phi_{,r}\phi_{,z}.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Considerando la dependencia funcional entre  $\phi$  y  $\psi$  de las soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell del electrovacío presentada en la Ref. [30]

$$\phi = \pm k_1(e^\psi - 1), \tag{2.29}$$

con  $k_1$  una constante diferente de cero, y usando la métrica conformestática (2.24) se halla la densidad de corriente asociada al halo según (2.23)

$$J^t = e^{2\psi}(2\nabla^2\psi - (1 + k_1^2)\nabla\psi \cdot \nabla\psi). \tag{2.30}$$

las componentes no nulas del tensor  $b_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
 b_{tt} &= \frac{-e^{2\psi}\psi_{,z}}{2\pi}, \\
 b_{rr} &= \frac{-e^{-2\psi}r^2\psi_{,z}}{2\pi}, \\
 b_{rr} &= b_{zz} = \frac{-e^{-2\psi}\psi_{,z}}{2\pi},
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

que relacionadas por (2.12) se obtiene la única componente no nula del tensor de momentum-energía asociado al disco que es

$$Q_{tt} = \frac{e^{4\psi}\psi_{,z}}{2\pi}, \tag{2.32}$$

también podemos calcular el tensor de momentum-energía superficial del disco  $S_{\alpha\beta}$

$$S_{\alpha\beta} = \int Q_{\alpha\beta}\delta(z)ds_n = e^{-\psi}Q_{\alpha\beta}, \tag{2.33}$$

la componente no nula de  $S_{\alpha\beta}$  que viene dada por

$$S_{tt} = \frac{e^{3\psi}\psi_{,z}}{2\pi}, \tag{2.34}$$

de acuerdo con (2.23), la componente no nula de la densidad de corriente está dada por

$$I^t = \frac{\psi_{,z}}{2\pi}, \tag{2.35}$$

## Modelos Relativistas de Disco Delgado y Halo con Campo Eléctrico

---

la densidad de corriente superficial del disco es  $j^\alpha$ , se pueden obtener a través de las relaciones

$$j^\alpha = \int I^\alpha \delta(z) ds_n = e^{-\psi} I^\alpha, \quad (2.36)$$

donde  $ds_n = \sqrt{g_{zz}} dz$  es el elemento de longitud en la dirección normal al plano del disco. Todas las anteriores cantidades se evalúa en la hipersuperficie  $z = 0^+$ .

---

## Capítulo 3

# Caracterización del Fluido

---

### 3.1. Preliminares.

Con el fin de analizar las características del tensor de momentum-energía y las densidades de carga, es conveniente expresar éstas en términos de una tétrada ortonormal. Se usará la tétrada del observador localmente Minkowskiano que se describe al inicio de la sección 3.2, que genera el problema de valores propios y calcular los esfuerzos principales para determinar la densidad de energía  $\rho$  y densidad de masa  $\mu$  con sus respectivas condiciones de energía.

Al evaluar las condiciones de energía usuales para estos modelos de la sección 3.3 se genera el valor de la constante  $k$  y usando la relación entre los potenciales, que restringe el valor de  $k_1$ , resulta la ecuación de estado que satisface  $p = (\gamma - 1)\rho$  de fluido perfecto relativista en el halo. El sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell son expresadas en términos  $U$ , una solución de la ecuación de Laplace. De manera que, al relacionar  $U$  y la función métrica  $\psi$  se garantice que el espaciotiempo sea asintóticamente plano.

### 3.2. Desde el observador localmente Minkowskiano (OLM).

Para analizar las características del tensor de momentum-energía, las densidades de carga y densidades de corriente, es conveniente interpretarlas en términos de una

## Caracterización del Fluido

---

tétrada ortonormal. Se usará la tétrada del OLM  $V^a, X^a, Y^a, Z^a$ , donde

$$\begin{aligned} V^\alpha &= e^{-\psi}(1, 0, 0, 0), \\ X^\alpha &= e^\psi(0, 1, 0, 0), \\ Y^\alpha &= \frac{e^\psi}{r}(0, 0, 1, 0), \\ Z^\alpha &= e^\psi(0, 0, 0, 1), \end{aligned} \quad (3.1)$$

Usamos esta tétrada en las componentes (2.28), para hallar las componentes del tensor de momentum-energía en el OLM son

$$\begin{aligned} T_{(t)(t)} &= e^{2\psi}[2\nabla^2\psi - (1 - k_1^2)\nabla\psi \cdot \nabla\psi], \\ T_{(r)(r)} &= (1 - k_1^2)e^{2\psi}[\nabla\psi \cdot \nabla\psi], \\ T_{(\varphi)(\varphi)} &= -T_{(z)(z)} = (1 - k_1^2)e^{2\psi}\psi_{,z}^2 - \psi_{,r}^2, \\ T_{(\varphi)(z)} &= -2(1 - k_1^2)e^{2\psi}\psi_{,r}\psi_{,z}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para un fluido sin flujo de calor el tensor de momentum-energía en la tétrada ortonormal está definido como

$$T^{\alpha\beta} = \rho V^\alpha V^\beta + p_1 X^\alpha X^\beta + p_2 Y^\alpha Y^\beta + p_3 Z^\alpha Z^\beta, \quad (3.3)$$

se trata del problema de valores propios para determinar el contenido físico del tensor de momentum-energía

$$T_{(\alpha)(\beta)}\xi^{(\beta)} = \lambda\eta_{(\alpha)(\beta)}\xi^{(\beta)}, \quad (3.4)$$

y al resolver la ecuación característica dada por

$$|T_{(\alpha)(\beta)} - \lambda\eta_{(\alpha)(\beta)}| = 0, \quad (3.5)$$

se obtiene como resultado los autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -T_{(t)(t)} = -\rho, \\ \lambda_1 &= T_{(r)(r)} = p_1, \\ \lambda_2 &= T_{(r)(r)} = p_2, \\ \lambda_3 &= -T_{(r)(r)} = p_3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ahora, para cada  $\lambda$  se resuelve la ecuación (3.4), y se calculan los autovectores normalizados

$$\begin{aligned} \xi_{(0)}^\alpha &= (e^{-\psi}, 0, 0, 0), \\ \xi_{(1)}^\alpha &= (0, 0, \frac{1}{R}e^\psi, 0), \\ \xi_{(2)}^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} (0, e^\psi, 0, -\Omega e^\psi), \\ \xi_{(3)}^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} (0, \Omega e^\psi, 0, e^\psi), \end{aligned} \quad (3.7)$$

## Caracterización del Fluido

---

donde  $\Omega = \psi_{,r}/\psi_{,z}$ .

Entonces el tensor de momentum-energía del halo se puede escribir por medio de la ecuación

$$T^{\alpha\beta} = T^{(\mu)(\nu)} \xi_{(\mu)}^\alpha \xi_{(\nu)}^\beta, \quad (3.8)$$

y así se calcula los esfuerzos principales para determinar la densidad de energía y densidad de masa ( $\mu$ ) dada por

$$\begin{aligned} T_{(t)(t)} &= \rho = e^{2\psi} (2\nabla^2\psi - (1 + k_1^2)\nabla\psi \cdot \nabla\psi), \\ T_{(r)(r)} &= p_1 = (1 - k_1^2)e^{2\psi} \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \\ T_{(\varphi)(\varphi)} &= p_2 = (1 - k_1^2)e^{2\psi} \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \\ T_{(z)(z)} &= p_3 = -(1 - k_1^2)e^{2\psi} \nabla\psi \cdot \nabla\psi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Luego  $\mu = \rho + p_1 + p_2 + p_3 = \rho + 3p$  con  $p = \frac{p_1+p_2+p_3}{3}$ .

Al tener en cuenta la densidad de carga asociada al halo en (2.30), es clara la relación con con la componente del tensor de momentum-energía  $T_{(t)(t)}$  en (3.9), por consiguiente, para los distintos modelos la **densidad de carga en el halo**  $\rho_Q$  es igual a la **densidad de energía en el halo**  $\rho$ . De los esfuerzos principales se tiene

$$3p = T_{(r)(r)} + T_{(\varphi)(\varphi)} + T_{(z)(z)} = (1 - k_1^2)e^{2\psi} \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (3.10)$$

con  $0 < k_1^2 \leq 1$  para obtener valores de presión positivos.

### 3.3. Condiciones de Energía

Son las condiciones sobre las componentes del tensor de momentum-energía en el OLM [35], es decir, sobre la densidad de energía ( $\rho$ ), la densidad de masa ( $\mu$ ) y el flujo de energía (en la solución conformestática es cero), para que el modelo sea físicamente razonable, estas condiciones se caracterizan por

1. **Condición débil de energía:** La densidad de energía medida por un observador arbitrario no puede ser negativa.
2. **Condición fuerte de energía:** La densidad de masa  $\mu$  medida por un observador arbitrario no puede ser negativa
3. **Condición dominante de energía :** El vector densidad de flujo de energía medido por cualquier observador debe ser un vector temporal o nulo orientado hacia el futuro.

## Caracterización del Fluido

---

Por consiguiente, de (3.9), genera las siguientes condiciones para que el modelo tenga comportamiento físico adecuado. La condición débil de energía se reduce a satisfacer

$$\begin{aligned}\rho &\geq 0, \\ 2\nabla^2\psi &\geq (1 + k_1^2)\nabla\psi \cdot \nabla\psi;\end{aligned}\tag{3.11}$$

la condición fuerte de energía se reduce a cumplir

$$\begin{aligned}\rho + 3p &\geq 0, \\ \nabla^2\psi &\geq k_1^2\nabla\psi \cdot \nabla\psi;\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\rho + p_3 &> 0, \\ \nabla^2\psi &> \nabla\psi \cdot \nabla\psi;\end{aligned}\tag{3.13}$$

y la condición de energía dominante genera

$$\begin{aligned}\rho &\geq |p_i|, \\ \nabla^2\psi &\geq \nabla\psi \cdot \nabla\psi.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Las condiciones de energía para  $0 < k_1^2 \leq 1$  se satisfacen con

$$\nabla^2\psi > \nabla\psi \cdot \nabla\psi,\tag{3.15}$$

una manera de satisfacer esta condición es suponer una relación de la forma

$$\nabla^2\psi = k\nabla\psi \cdot \nabla\psi,\tag{3.16}$$

donde  $k > 1$ .

La ecuación anterior nos permite obtener una ecuación de estado para el fluido contenido en el halo, que relaciona la presión  $p$  dada en (3.10) y la densidad de energía  $\rho$ . Para esto, se parte de las componentes del tensor de momentum-energía general en el OLM (3.9), que satisfaga la condición de energía en (3.16), con las respectivas restricciones para  $k_1^2$  y  $k$ . Esta relación está dada por

$$p = \left[ \frac{2(k_1^2 - 1) + 6k}{3(k_1^2 - 1) + 6k} - 1 \right] \rho,\tag{3.17}$$

con  $k_1^2 \leq 1$  y  $k > 1$ . Satisface la ecuación de un fluido gamma  $p = (\gamma - 1)\rho$ , con

$$\gamma = \frac{2(k_1^2 - 1) + 6k}{3(k_1^2 - 1) + 6k}.\tag{3.18}$$

## Caracterización del Fluido

---

La clase de fluidos -  $\gamma$  comprende el tipo más simple de fluidos perfecto relativista utilizados en el marco de la Relatividad General y Cosmología. Se define en términos de  $0 \leq \gamma \leq 2$  Ref [36]. Algunos tipos especiales de fluidos descritos por esta relación son (i) de polvo ( $p = 0, \gamma = 1$ ), (ii) de vacío ( $p = -\rho, \gamma = 0$ ), (iii) radiación de cuerpo negro ( $p = \frac{\rho}{3}, \gamma = \frac{4}{3}$ ), entre otros.

La ecuación (3.16) la podemos reescribir como

$$\nabla^2(e^{-k\psi}) = 0, \quad (3.19)$$

la cual fácilmente podemos identificar con la ecuación de Laplace. Sin embargo, consideramos la relación entre la función  $U$  y la función  $\psi$  de la forma

$$e^{-k\psi} = 1 - U, \quad (3.20)$$

con el objetivo de garantizar que la métrica sea asintóticamente plana. Es así como las soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell se podrán expresar en términos de  $U$ , una solución de la ecuación de Laplace.

---

## Capítulo 4

# Una Familia Particular de Discos y Halos

---

### 4.1. Preliminares.

Esta familia particular de discos y halos se determina por el valor de  $\gamma$ . En la sección 4.2 se hace una breve descripción de este fluido. Para valores permitidos de  $k_1$  y  $k$  notamos que el valor de  $\gamma$  es muy cercano a uno, por esto, se continua en la sección 4.3 el análisis del caso particular de una familia infinita de disco y halo de polvo cargados eléctricamente. Este sistema, se obtienen a partir de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para espaciotiempos conformestáticos, sustituyendo de forma particular  $k_1 = 1$  en el tensor de momentum-energía general y en la densidad de corriente del halo. Los discos relativistas delgados obtenidos tienen densidad de carga que es igual, excepto por un signo, a su densidad de masa. De la misma manera para la densidad de carga es igual a la densidad de energía en el halo. Para que las soluciones sean físicamente aceptables debe satisfacer además de las condiciones de energía, que el valor de la masa sea positivo y finito, que es la naturaleza física razonable de la materia y el tamaño geométrico de la fuente. En esta sección se analiza tanto la masa del disco, como la del halo para los modelos  $n = 0$  y  $n = 1$ . Se parte del vector de Killing temporal  $\xi^\alpha$  mediante la aplicación de la integral de Komar, para espaciotiempos axialmente simétricos y estacionarios, la integral de Komar da una noción bien definida de la masa. Finalmente, se obtienen curvas bien comportadas de las densidades de energía y de las líneas de campo eléctrico.

### 4.2. Fluido- $\gamma$ . $k_1$ y $k$ .

Algunas propiedades generales discutidas de esta familia uniparamétrica de fluidos, se basan en el análisis numérico de singularidades correspondientes al límite cuando  $\gamma \rightarrow 1$  [37], mientras que otros autores estudian el comportamiento de las ecuaciones de estado termodinámicas del fluido- $\gamma$  [38]. En nuestro caso, debido a las restricciones para  $k_1^2$  y  $k$ , se puede notar en la tabla 4.1, que el valor de  $\gamma$  es

ligeramente mayor a uno.

<b>k</b>	1,5	1,5	1,5	1,5	3	3	3	3	4,5	4,5	4,5	4,5	> 1
<b>k<sub>1</sub></b>	0,2	0,4	0,6	0,8	0,2	0,4	0,6	0,8	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<b>γ</b>	1,15	1,12	1,09	1,04	1,06	1,05	1,03	1,02	1,03	1,03	1,02	1,01	1

Tabla 4.1: Algunos valores permitidos de  $k_1$  y  $k$  dentro del modelo.

Ahora se restringirá el modelo general estudiado para los valores de  $\gamma = 1$  que corresponden a  $k_1 = 1$  y  $k > 1$ , lo que indica que el fluido en el halo es polvo.

Esta familia particular de discos con densidad superficial de energía bien comportada se expresan en términos de soluciones particulares de la ecuación de Laplace en (3.20), de donde propone como solución para el potencial  $U_n$ , la expresión

$$U_n(R, \theta) = - \sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta), \quad (4.1)$$

donde  $R(r, z) = \sqrt{r^2 + (|z| + a)^2}$ , en términos de las constantes  $A_\ell$ .

Para tener soluciones que corresponde a sistemas de disco y halo, se ha incluido la discontinuidad mediante el método “desplazamiento, corte y reflexión” [39, 40], con la transformación  $\tilde{z} = |z| + a$ , mas detalle del método se encuentra en el apéndice 5, se hace  $U_n(r, \tilde{z})$  con el fin de introducir una discontinuidad en la primera derivada de una solución suave. El resultado será entonces una solución con una singularidad tipo función delta de Dirac en la hipersuperficie  $z = 0$ , que puede ser interpretada como un disco infinito delgado. Por lo tanto, se construye una solución discoidal diferente para cada  $n$ , que toma valores de 0, 1, 2..., es decir, se consigue una familia de soluciones.

### 4.3. Disco y halo de polvo.

Se desea estudiar las características físicas como son la densidad de energía, densidad de corriente, campo eléctrico y contenido finito de la masa, que cumpla las condiciones de energía dadas en términos de la constante  $k_1$ ; partimos del tensor de momentum-energía (3.9) para este caso  $k_1 = 1$

$$T_{(t)(t)} = 2e^{2\psi} (\nabla^2 \psi - \nabla \psi \cdot \nabla \psi) = \rho, \quad (4.2)$$

donde  $\rho$  es la **densidad de energía del halo de polvo**.

## Una familia particular de discos y halos

---

El tensor de momentum-energía del disco (2.32) tiene una sola componente, entonces de la relación (2.33) y (2.36) resulta

$$\begin{aligned} S_{(t)(t)} &= S_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta = \frac{1}{2\pi}e^\psi\psi_{,z} = \epsilon, \\ j^{(t)} &= -\frac{1}{2\pi}e^\psi\psi_{,z} = \sigma, \end{aligned} \tag{4.3}$$

que son el tensor de momentum energía superficial del disco y la densidad de corriente superficial del disco, donde

$$V^\alpha = e^{-\psi}(1, 0, 0, 0), \tag{4.4}$$

es el vector velocidad de la distribución de materia.

Se obtiene que  $\epsilon$  es **la densidad de energía en el disco de polvo** y  $\sigma$  es **la densidad de carga en el disco** dadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{e^\psi\psi_{,z}}{2\pi}, \\ \sigma &= -\frac{e^\psi\psi_{,z}}{2\pi}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

Teniendo en cuenta estos resultados, es fácil ver que se satisface la relación

$$\sigma = \mp\epsilon, \tag{4.6}$$

es decir, la densidad de carga eléctrica de los discos es igual, excepto por un signo, a su densidad de masa. Por consecuencia, las fuerzas eléctrica y gravitacional están en perfecto balance, que son las configuraciones llamadas por los autores “Electrically Counterpoised Dust” (*ECD*), y han sido estudiados con cierto detalle tanto por teorías clásicas como relativistas en [41, 42, 43, 44, 45]

De acuerdo a la relación entre la función  $\psi$  y el potencial Newtoniano  $U$ , de (3.20), y teniendo en cuenta las ecuaciones (4.2) y (4.5), podemos describir las propiedades físicas del sistema en términos de las primeras derivadas de la función  $U$  respecto a  $r$  y  $z$ . Así, la forma general de la **densidad de energía superficial del disco de polvo**  $\epsilon$  es

$$\epsilon = \frac{U_{,z}}{2\pi k(1-U)^{\frac{1+k}{k}}}, \tag{4.7}$$

que es proporcional a la **densidad de carga en el disco de polvo**  $\sigma$ .

Y la forma general de la **densidad volumétrica de energía, del halo de polvo** es

$$\rho = \frac{2(k-1)}{k^2} \frac{U_{,r}^2 + U_{,z}^2}{(1-U)^{2(1+k)/k}}, \quad (4.8)$$

que es proporcional a la **densidad de carga del halo**  $\rho_Q$ .

Para el caso del fluido- $\gamma$  de forma general, se obtiene

$$\rho_\gamma = \frac{2k-1-k_1^2}{k^2} \frac{U_{,r}^2 + U_{,z}^2}{(1-U)^{2(1+k)/k}}, \quad (4.9)$$

con  $k_1^2 \leq 1$  y  $k > 1$ . Es por esto que el análisis para el caso de polvo, correspondiente al límite de  $\gamma$ , incluye el comportamiento de los demás casos por ser proporcionales, variando únicamente su amplitud.

A partir de estas soluciones debe puede obtener como resultado la masa total, tanto del halo como del disco. Entonces se debe demostrar que la masa del sistema es finita, por medio de la convergencia de las integrales, de manera que estas cantidades puedan ser calculadas. Para esto, hacemos uso del criterio de comparación del límite [46].

**Teorema 4.3.1** *Teorema de comparación del límite. Sean  $f$  y  $g$  funciones no negativas localmente integrables en un intervalo  $[a, \infty)$ . Supongamos que existe*

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \text{ con } 0 < \ell < \infty,$$

*entonces las dos integrales  $\int_a^b f(x)dx$  y  $\int_a^b g(x)dx$  tienen el mismo carácter: o las dos son convergentes o las dos son divergentes.*

Hacemos uso de la fórmula de Komar [35], que se debe hallar para el disco y para el halo la integral

$$M = 2 \int_{\Sigma} \left( T_{\alpha\beta} - \frac{T}{2} g_{\alpha\beta} \right) m^\alpha \xi^\beta \sqrt{h} d^3y, \quad (4.10)$$

donde  $m^\alpha$  es el vector normal a la hipersuperficie,  $\xi^\beta$  es el vector de Killing tipo tiempo,  $h$  es el determinante de la métrica inducida y  $d^3y$  es el elemento de volumen del espacio. Esta ecuación se reescribe como

$$M = 2 \int_{\Sigma} \left( T_{\alpha\beta} - \frac{T}{2} g_{\alpha\beta} \right) V^\alpha V^\beta r dr d\phi dz, \quad (4.11)$$

donde  $V^\alpha$  es uno de los términos constituyentes de la tétrada.

## Una familia particular de discos y halos

---

Así, la integral para la masa del disco evaluada en  $z = 0^+$  según lo demostrado en 25 del apéndice 5 es

$$M_D = \int_a^\infty \frac{U_{,z}}{k(1-U)} R dR, \quad (4.12)$$

con  $R = \sqrt{r^2 + a^2}$ .

Ahora, debemos demostrar que el carácter finito de la masa del disco se demuestra a partir de la convergencia de las integrales que satisfacen

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \ell, \quad (4.13)$$

con  $\ell$  diferente de cero y  $\mu_n(r_0) = \frac{U_{n,z}}{1-U_n}$ . para calcular  $\mu_n$  y  $\mu_{n+1}$  utilizamos la solución (4.1) con la cual evaluamos en  $z = 0^+$  la función  $U_n$  y su primera derivada respecto a  $z$

$$U_n|_{z=0^+} = -\sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell \left( \frac{a}{R} \right), \quad (4.14)$$

$$U_{n,z}|_{z=0^+} = \sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell}{R^{\ell+2}} P_{\ell+1} \left( \frac{a}{R} \right), \quad (4.15)$$

definimos entonces  $\mu_n(R) = \left( \frac{U_{n,z}}{1-U_n} \right) |_{z=0^+}$  para obtener

$$\mu_n(R) = \frac{\sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell}{R^{\ell+2}} P_{\ell+1} \left( \frac{a}{R} \right)}{1 + \sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell \left( \frac{a}{R} \right)}, \quad (4.16)$$

$$\mu_{n+1}(R) = \frac{\sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell(\ell+1)}{R^{\ell+2}} P_{\ell+1} \left( \frac{a}{R} \right) + \frac{A_{n+1}(n+2)}{R^{n+3}} P_{n+2} \left( \frac{a}{R} \right)}{1 + \sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell \left( \frac{a}{R} \right) + \frac{A_{n+1}}{R^{n+2}} P_{n+1} \left( \frac{a}{R} \right)}, \quad (4.17)$$

al tener el cociente

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} &= \frac{\left[ \frac{1 + \sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell \left( \frac{a}{R} \right)}{\sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell}{R^{\ell+2}} P_{\ell+1} \left( \frac{a}{R} \right)} \right]}{\left[ \frac{\sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell(\ell+1)}{R^{\ell+2}} P_{\ell+1} \left( \frac{a}{R} \right) + \frac{A_{n+1}(n+2)}{R^{n+3}} P_{n+2} \left( \frac{a}{R} \right)}{1 + \sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell \left( \frac{a}{R} \right) + \frac{A_{n+1}}{R^{n+2}} P_{n+1} \left( \frac{a}{R} \right)} \right]}, \\ &= \frac{\left[ \frac{1 + \sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell \left( \frac{a}{R} \right)}{1 + \sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell \left( \frac{a}{R} \right) + \frac{A_{n+1}}{R^{n+2}} P_{n+1} \left( \frac{a}{R} \right)} \right]}{\left[ 1 + \frac{\frac{A_{n+1}(n+2)}{R^{n+3}} P_{n+2} \left( \frac{a}{R} \right)}{\sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell}{R^{\ell+2}} P_{\ell+1} \left( \frac{a}{R} \right)} \right]} \quad (4.18) \end{aligned}$$

## Una familia particular de discos y halos

---

de tal forma que cuando  $R \rightarrow \infty$ , tanto el primero como el segundo término entre paréntesis de la ecuación anterior tienden a 1. Así queda demostrado que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1, \quad (4.19)$$

por lo tanto, si se logra demostrar que la integral de la masa del disco para el modelo  $n = 0$  converge, entonces para cualquier  $n$  también converge, resultando un valor finito para la masa del disco.

Para el caso de la masa del halo se parte de (4.11) en coordenadas esféricas, según lo mostrado en 36,

$$M_H = 4\pi \frac{(k-1)}{k^2} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{U_{,r}^2 + U_{,z}^2}{(1-U)^2} R^2 \text{sen}\theta d\theta dR, \quad (4.20)$$

sin embargo, para facilitar la aplicación del teorema 4.3.1 es conveniente reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera

$$M_H = 4\pi \frac{(k-1)}{k^2} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{\nabla U \cdot \nabla U}{(1-U)^2} R^2 dR \text{sen}\theta d\theta, \quad (4.21)$$

luego  $\eta_n(R, \theta) = \frac{(\nabla U \cdot \nabla U)_n}{(1-U_n)^2}$ . Debemos demostrar que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(\nabla U \cdot \nabla U)_{n+1}}{(\nabla U \cdot \nabla U)_n} \cdot \left( \frac{1-U_n}{1-U_{n+1}} \right)^2. \quad (4.22)$$

Como  $(\nabla U \cdot \nabla U) = U_{,R}^2 + \frac{U_{,\theta}^2}{R^2}$  entonces

$$U_{n,R} = \sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell(\ell+1)P_\ell(\cos\theta)}{R^{\ell+2}}, \quad (4.23)$$

$$U_{n,\theta} = \sum_{\ell=0}^n \frac{A_\ell P'_\ell(\cos\theta)}{R^{\ell+2}} (1 - \cos^2\theta), \quad (4.24)$$

se tiene que  $U_{n+1} = U_n + \frac{A_{n+1}P_{n+1}(\cos\theta)}{R^{n+2}}$  para generar

$$U_{n+1,R} = U_{n,R} - \frac{A_{n+1}(n+2)P_{n+1}(\cos\theta)}{R^{n+3}}, \quad (4.25)$$

$$U_{n+1,\theta} = U_{n,\theta} - \frac{A_{n+1}P'_{n+1}(\cos\theta)(1 - \cos^2\theta)}{R^{n+2}}, \quad (4.26)$$

entonces en el límite cuando  $R \rightarrow \infty$  todos los términos en  $(\nabla U \cdot \nabla U)_{n+1}$  tienden a cero, excepto uno, resultando

$$(\nabla U \cdot \nabla U)_{n+1} = (\nabla U \cdot \nabla U)_n, \quad (4.27)$$

## Una familia particular de discos y halos

---

luego en el límite cuando  $R \rightarrow \infty$  en (4.22) es claro que tiende a uno, lo cual nos indica que independientemente del valor de  $\theta$ , la integral converge, y si converge para  $n = 0$  entonces también lo hará para todo  $n$ . Resultando un valor finito para la masa del halo.

Es natural pensar en comprobar que las soluciones tengan un comportamiento físico adecuado. Para esto, se toma valores particulares de  $n$  en la (4.1) y se deja abierta la discusión respecto a la finitud de la masa, hasta calcular las masas del disco y halo correspondientes al modelo  $n = 0$ .

Ahora, del potencial eléctrico dado tiene una componente (2.25), podemos hallar el campo eléctrico en el OLM

$$\begin{aligned} E_{(r)} &= -e^\psi \phi_{,r} = -e^{2\psi} \psi_{,r}, \\ E_{(z)} &= -e^\psi \phi_{,z} = -e^{2\psi} \psi_{,z}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

de la relación (3.20), se obtiene el campo eléctrico utilizado para cada modelo, según sea el valor de  $n$ .

### 4.3.1. Modelo $n = 0$

Con  $n = 0$  en la expresión para el potencial  $U_0$  en (3.20), que toma la forma mas sencilla reduciéndose a

$$U_0(R) = -\frac{A_0}{R}, \quad (4.29)$$

y  $R(r, z) = \sqrt{r^2 + (|z| + a)^2}$ . Para esta nueva función, calculamos las primeras derivadas con respecto a  $r$  y a  $z$ , las cuales son respectivamente

$$\begin{aligned} U_{0,r} &= \frac{A_0 r}{R^3}, \\ U_{0,z} &= \frac{A_0 (|z| + a)}{R^3} |z|_{,z}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

al sustituirlas en la expresión general de la densidad de energía del disco dada en (4.7) se obtiene

$$\epsilon = \frac{A_0 (|z| + a)}{R^3} \frac{|z|_{,z}}{2\pi k \left(1 + \frac{A_0}{R}\right)^{\frac{1+k}{k}}}, \quad (4.31)$$

evaluando en  $z = 0^+$  y al introducir variables adimensionales  $\tilde{R} = R/a$ ,  $\tilde{A}_0 = A_0/a$  y  $\tilde{\epsilon} \equiv 2\pi a \epsilon$ , se obtiene la expresión

$$\tilde{\epsilon}(\tilde{r}) = \frac{\tilde{A}_0 (\sqrt{\tilde{r}^2 + 1})^{\frac{1-2k}{k}}}{k \left(\sqrt{\tilde{r}^2 + 1} + \tilde{A}_0\right)^{\frac{1+k}{k}}}, \quad (4.32)$$

donde el anterior comportamiento se puede ver en la Figura 4.1.

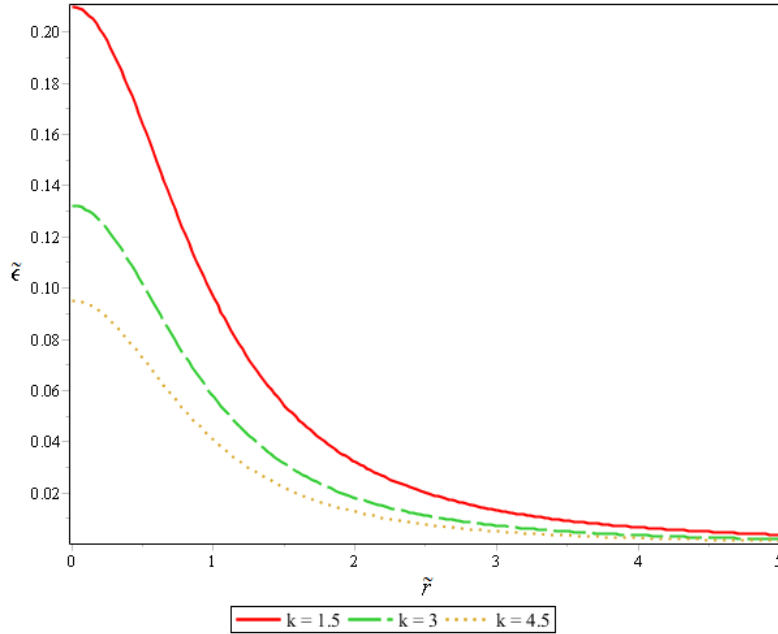


Figura 4.1: *Densidad de energía del disco de polvo para el modelo  $n = 0$ . Se destaca el rápido decaimiento de la densidad de energía del disco para tres valores distintos de  $k$ , donde se considera  $\tilde{A}_0 = 1$*

Se ha graficado la densidad de energía adimensional en el disco,  $\tilde{\epsilon}$ , como una función de el radio adimensional  $\tilde{r}$  para el modelos de disco  $n = 0$ , variando el parámetro  $k$ . Ahora bien, como la densidad de carga de los discos es igual a su densidad de energía, excepto un signo, todos los análisis anteriores se aplican también al comportamiento de la densidad de carga superficial de los modelos de disco.

Es evidente en la Figura 4.1, la existencia de una region en donde hay mayor concentración de masa en  $\tilde{r} = 0$ . En cambio, cuando  $\tilde{r}$  se hace muy grande, es decir, cuando nos alejamos del centro del disco, la densidad de masa se hace muy cercana a cero. Este comportamiento se aproxima muy bien, al comportamiento típico de un disco galáctico, ya que existe una region central o bulbo donde se encuentra concentrada la mayor cantidad de masa del disco, y a medida que nos alejamos en dirección radial del centro galáctico, la densidad de materia tiende a cero.

Como se ha obtenido un disco inmerso en un halo o fluido y se obtuvo una densidad volumétrica de energía diferente de cero, es importante analizar el comportamiento de esta densidad de energía. Al sustituir (4.30) en la expresión general

## Una familia particular de discos y halos

---

de la densidad de energía del halo (4.9) se obtiene

$$\rho = \frac{2(k-1)}{k^2} \frac{\tilde{A}_0^2}{a^2 \tilde{R}^{\frac{2(k-1)}{k}} (\tilde{R} + \tilde{A}_0)^{\frac{2(1+k)}{k}}}, \quad (4.33)$$

y en términos adimensionales con  $\tilde{R} = R/a$ ,  $\tilde{A}_0 = A_0/a$  y  $\tilde{\rho} = \frac{a^2}{2}\rho$

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}, \tilde{z}) = \frac{(k-1)}{k^2} \frac{\tilde{A}_0^2 \left( \sqrt{\tilde{r}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2} \right)^{\frac{2(1-k)}{k}}}{\left( \sqrt{\tilde{r}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2} + \tilde{A}_0 \right)^{\frac{2(1+k)}{k}}}, \quad (4.34)$$

El anterior comportamiento se puede ver en es la función usada para la Figura 4.2.

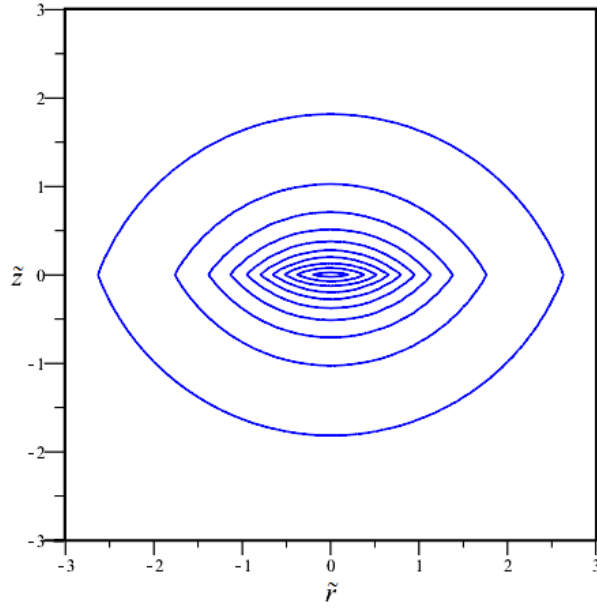


Figura 4.2: *Contornos de intensidad de la densidad de energía del halo de polvo para el modelo  $n = 0$ .*

Se ha graficado la densidad de energía del halo en curvas de contorno adimensional  $\tilde{\rho}$ , como función de  $\tilde{z}$  y el radio adimensional  $\tilde{r}$ , para el mismo modelo  $n = 0$ , variando el parámetro  $k$ , obteniendo comportamiento similar. Ahora bien, como la densidad de carga de los halos es igual a su densidad de energía, todos los análisis anteriores se aplican también al comportamiento de la densidad de carga de los halos.

En la Figura 4.2, a medida que nos acercamos al centro del halo, el cual coincide con el centro del disco; es decir, para  $\tilde{r} \rightarrow 0$  y  $\tilde{z} \rightarrow 0$ , la densidad volumétrica

## Una familia particular de discos y halos

---

de energía es máxima. Pero cuando nos alejamos del centro del halo; que es igual a que  $\tilde{r} \rightarrow \infty$  o  $\tilde{z} \rightarrow \infty$ , o ambos casos a la vez, la densidad de energía se hace cero. Es importante resaltar que la densidad volumétrica tiene un comportamiento muy similar a la densidad superficial del disco, lo cual nos hace concluir que la densidad de energía para el sistema conformado por un disco inmerso en un halo, está concentrada en la region central y tiende a cero cuando nos alejamos.

Ahora para hallar el valor de la **masa del disco**, en el modelo  $n = 0$ , partiendo de (4.12)

$$M_D = \int_a^\infty \frac{A_0 a}{kR(R + A_0)} dR, \quad (4.35)$$

$$M_D = \frac{\tilde{A}_0 a}{k} \int_1^\infty \frac{d\tilde{R}}{\tilde{R}(\tilde{R} + \tilde{A}_0)}, \quad (4.36)$$

así se obtiene el valor constante de la masa total contenida en el disco para el modelo  $n = 0$

$$M_D = \frac{a \ln(\tilde{A}_0 + 1)}{k}, \quad (4.37)$$

y para el hallar el valor de la **masa en el halo** para el modelo  $n = 0$ , partiendo de (4.21)

$$M_H = \frac{8\pi a \tilde{A}_0 (k - 1)}{k^2}, \quad (4.38)$$

Con el fin de que estos valores de masas sean consistentes físicamente, se debe tener en cuenta que  $\tilde{A}_0 > 0$ , para que estas cantidades sean siempre finitas, positivas y distintas de cero.

Se retoma la discusión sobre la convergencia de las masas del disco y del halo. Como las masas del disco y del halo son finitas para este primer modelo  $n = 0$ , y dado que calcular las integrales de las masas para los modelos  $n \geq 1$  no es tarea sencilla, usamos este resultado para asegurar, sin evaluarlas, que las demás masas también sean finitas.

Ahora para el estudio de la distribución del **campo eléctrico** en términos del

modelo  $n = 0$  y del potencial  $U_0$  se tiene

$$\begin{aligned}
 E_{(r)} &= -\frac{A_0 r \left( \sqrt{r^2 + (|z| + a)^2} \right)^{\frac{2(1-k)}{k}}}{k \left( \sqrt{r^2 + (|z| + a)^2} + A_0 \right)^{\frac{2+k}{k}}}, \\
 E_{(z)} &= -\frac{A_0 (|z| + a) \left( \sqrt{r^2 + (|z| + a)^2} \right)^{\frac{2(1-k)}{k}}}{k \left( \sqrt{r^2 + (|z| + a)^2} + A_0 \right)^{\frac{2+k}{k}}}, \tag{4.39}
 \end{aligned}$$

que en términos adimensionales con  $\tilde{E}_{(r)} = \frac{E_{(r)}}{a}$  y  $\tilde{E}_{(z)} = \frac{E_{(z)}}{a}$

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_{(r)} &= -\frac{\tilde{A}_0 \tilde{r} \left( \sqrt{\tilde{r}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2} \right)^{\frac{2(1-k)}{k}}}{k \left( \sqrt{\tilde{r}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2} + \tilde{A}_0 \right)^{\frac{2+k}{k}}}, \\
 \tilde{E}_{(z)} &= -\frac{\tilde{A}_0 (|\tilde{z}| + 1) \left( \sqrt{\tilde{r}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2} \right)^{\frac{2(1-k)}{k}}}{k \left( \sqrt{\tilde{r}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2} + \tilde{A}_0 \right)^{\frac{2+k}{k}}}, \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

para obtener el módulo del campo eléctrico que está dado por

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{A}_0 \left( \tilde{r}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2 \right)^{\frac{(2-k)}{2k}}}{k \left( \sqrt{\tilde{r}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2} + \tilde{A}_0 \right)^{\frac{2+k}{k}}}, \tag{4.41}$$

que es la función usada para la Figura 4.3.

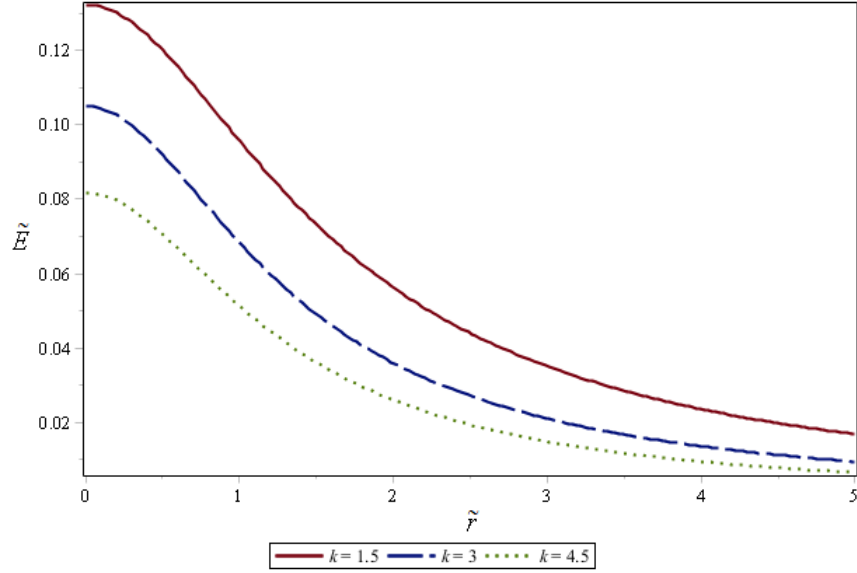


Figura 4.3: *Campo eléctrico para el modelo  $n = 0$  en  $z = 0$  para los mismos valores anteriores de  $k$ , con  $\tilde{A}_0 = 1$ .*

En la Figura 4.3 se observa que el módulo del campo eléctrico decae rápidamente, siendo mayor en el centro del sistema.

Como el campo eléctrico es tangente a la trayectoria, hay una proporcionalidad donde  $c$  es una constante

$$c\vec{E} = d\vec{r}', \quad (4.42)$$

al igualar la constante  $c$ , y sustituir las componentes calculadas en (4.39)

$$\frac{dr}{E_{(r)}} = \frac{dz}{E_{(z)}}, \quad (4.43)$$

$$-(|z| + a)dr + rdz = 0, \quad (4.44)$$

$$-\frac{dr}{r} + \frac{dz}{(|z| + a)} = 0, \quad (4.45)$$

para  $z > 0$

$$\ln\left(\frac{z+a}{r}\right) = cte \quad (4.46)$$

$$\tilde{z} = \alpha\tilde{r} - 1, \quad (4.47)$$

donde  $\alpha$  es una constante. En la figura 4.4 se gráfica la ecuación (4.47).

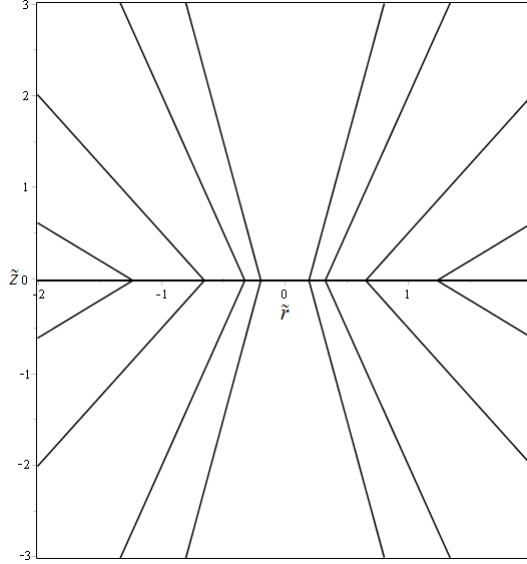


Figura 4.4: *Líneas de campo eléctrico para el modelo  $n=0$ . Se observa que las líneas de campo son rectas.*

Se obtiene algunas líneas de campo que entran en la region  $z = 0$  debido a la densidad de carga del disco, estas líneas se caracterizan por ser rectas para el modelo  $n = 0$ , son continuas y con derivada discontinua en  $z = 0$  cumpliendo que tienen simetría ecuatorial.

### 4.3.2. Modelo $n = 1$

Con  $n = 1$  la expresión para el potencial  $U_1$  en (3.20) se reduce a

$$U_1(R, \theta) = -\frac{A_0}{R} - \frac{A_1}{R^2} \cos\theta, \quad (4.48)$$

donde polinomio de Legendre  $P_1 = \cos\theta = \frac{|z|+a}{R}$  y  $R(r, z) = \sqrt{r^2 + (|z| + a)^2}$ . Para esta nueva función, calculamos las primeras derivadas con respecto a  $r$  y a  $z$ , las cuales son respectivamente

$$\begin{aligned} U_{1,z} &= \frac{A_0(|z| + a)}{R^3} |z|_{,z} + \frac{3A_1(|z| + a)^2}{R^5} |z|_{,z} - \frac{A_1}{R^3} |z|_{,z}, \\ U_{1,r} &= \frac{A_0 r}{R^3} + \frac{3A_1(|z| + a)r}{R^5}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

al sustituirlas en la expresión general de la densidad de energía del disco dada en (4.7) evaluada en  $z = 0^+$  se tiene

$$\epsilon = R^{\frac{3-2k}{k}} \frac{A_0 a R^2 + 3A_1 a^2 - A_1 R^2}{2\pi k (R^3 + A_0 R^2 + A_1 a)^{\frac{1+k}{k}}}, \quad (4.50)$$

## Una familia particular de discos y halos

---

y en términos adimensionales usados en el modelo  $n = 0$  y con  $\tilde{A}_1 = A_1/a^2$  se obtiene

$$\tilde{\epsilon}(\tilde{r}) = \frac{(\sqrt{\tilde{r}^2 + 1})^{\frac{3-2k}{k}}}{k} \frac{\tilde{A}_0(\tilde{r}^2 + 1) - \tilde{A}_1(\tilde{r}^2 - 2)}{\left[ (\tilde{r}^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + \tilde{A}_0(\tilde{r}^2 + 1) + \tilde{A}_1 \right]^{\frac{1+k}{k}}}, \quad (4.51)$$

que es la función usada para la Figura 4.5, donde se ha graficado la densidad de energía adimensional en el disco,  $\tilde{\epsilon}$ , como una función de el radio adimensional  $\tilde{r}$  para el modelos de disco  $n = 1$ , variando el parámetro  $k$ .

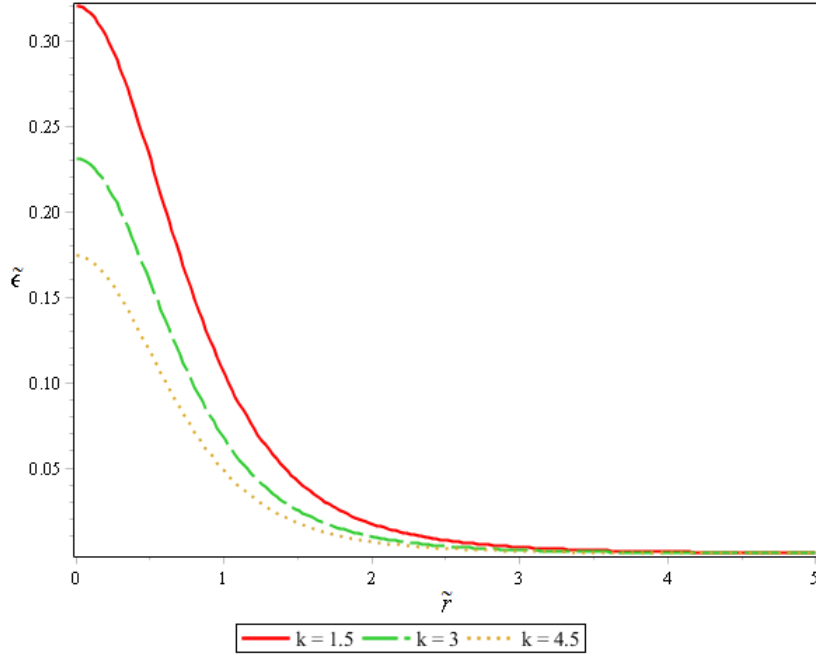


Figura 4.5: *Densidad de energía del disco de polvo para el modelo  $n = 1$ . Nuevamente la densidad decae rápidamente para los mismos valores de  $k$  que en modelo anterior. Donde se considera que  $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_1 = 1$*

Para este modelo particular ( $n = 1$ ), está dado en términos de constantes, se restringen los valores numéricos para las constantes, para evitar singularidades en las soluciones o densidades de energía negativas.

El comportamiento para la densidad superficial de energía de este modelo es similar al obtenido anteriormente en el modelo ( $n = 0$ ) y describe de igual manera un disco en el cual se presenta una densidad de energía máxima en el centro  $\tilde{r} \rightarrow 0$  según la Figura 4.5, y cae a cero rápidamente cuando  $\tilde{r} \rightarrow \infty$ .

También podemos calcular la expresión analítica para la densidad volumétrica del

## Una familia particular de discos y halos

---

fluido que conforma el halo, teniendo en cuenta (4.9) y reemplazando las derivadas de la función  $U$  dadas en 4.49

$$\rho = \frac{2(k-1)R^{\frac{2(3-k)}{k}}}{k^2} \frac{4A_0A_1R^2(|z|+a) + 3A_1^2(|z|+a)^2 + A_1^2R^2 + A_0^2R^4}{(R^3 + A_1(|z|+a) + A_0R^2)^{\frac{2(1+k)}{k}}}, \quad (4.52)$$

en términos adimensionales ya usados anteriormente y con  $\tilde{R}^2 = \tilde{r}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2$ , se obtiene que

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}, \tilde{z}) = \frac{(k-1)\tilde{R}^{\frac{2(3-k)}{k}}}{k^2} \frac{4\tilde{A}_0\tilde{A}_1\tilde{R}^2(|\tilde{z}|+1) + 3\tilde{A}_1^2(|\tilde{z}|+1)^2 + \tilde{A}_1^2\tilde{R}^2 + \tilde{A}_0^2\tilde{R}^4}{(\tilde{R}^3 + \tilde{A}_1(|\tilde{z}|+1) + \tilde{A}_0\tilde{R}^2)^{\frac{2(1+k)}{k}}}, \quad (4.53)$$

su comportamiento se puede ver en es la función usada para la Figura 4.6, donde se ha graficado la densidad de energía del halo en curvas de contorno adimensional  $\tilde{\rho}$ , como función de  $\tilde{z}$  y el radio adimensional  $\tilde{r}$ , para el mismo modelo  $n = 1$ , variando el parámetro  $k$ .

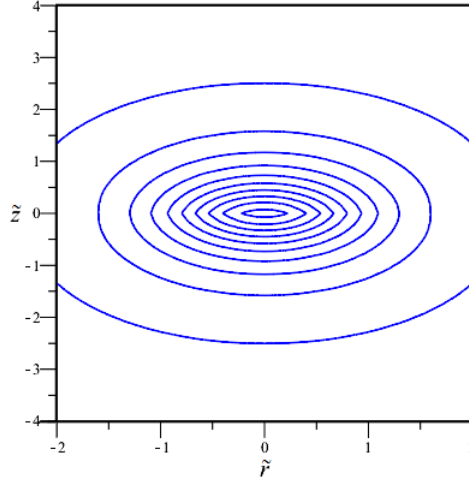


Figura 4.6: *Contornos de densidad de energía del halo de polvo para el modelo  $n = 1$ .*

En la Figura 4.6, se presenta una situación similar con modelo anterior, ya que la region central  $\tilde{r} \rightarrow 0$  y  $\tilde{z} \rightarrow 0$ , se obtiene un máximo de densidad volumétrica de energía, mientras que si nos alejamos en cualquiera de las direcciones la densidad de energía tiende a cero.

Para el cálculo de las masas en este modelo ( $n = 1$ ) se tiene en cuenta el resultado para el primer modelo  $n = 0$ , donde las masas del disco y del halo son finitas, y dado que calcular las integrales de las masas para los modelos  $n \geq 1$  no es tarea sencilla, usamos este resultado para asegurar, sin evaluarlas, que las demás masas ,para los modelos  $n \geq 1$ , también serán finitas.

## Una familia particular de discos y halos

---

Ahora para el estudio de la distribución del campo eléctrico, teniendo en cuenta las ecuaciones (4.28) en términos del modelo, es decir, del potencial  $U_1$  con  $k_1 = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} E_{(r)} &= -\frac{r[A_0R^2 + 3A_1(|z| + a)]R^{\frac{2(3-k)}{k}}}{k(R^3 + A_1(|z| + a) + A_0R^2)^{\frac{2+k}{k}}}, \\ E_{(z)} &= -\frac{[A_0(|z| + a)R^2 + 3A_1(|z| + a)^2 - A_1R^2]R^{\frac{2(3-k)}{k}}}{k(R^3 + A_1(|z| + a) + A_0R^2)^{\frac{2+k}{k}}}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

en forma adimensional con las mismas definiciones que para el modelo  $n = 0$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{(r)} &= -\frac{\tilde{r}[\tilde{A}_0\tilde{R}^2 + 3\tilde{A}_1(|\tilde{z}| + 1)]\tilde{R}^{\frac{2(3-k)}{k}}}{k\left(\tilde{R}^3 + \tilde{A}_1(|\tilde{z}| + 1) + \tilde{A}_0\tilde{R}\right)^{\frac{2+k}{k}}}, \\ \tilde{E}_{(z)} &= -\frac{[\tilde{A}_0(|\tilde{z}| + 1)\tilde{R}^2 + 3\tilde{A}_1(|\tilde{z}| + 1)^2 - \tilde{A}_1\tilde{R}^2]\tilde{R}^{\frac{2(3-k)}{k}}}{k\left(\tilde{R}^3 + \tilde{A}_1(|\tilde{z}| + 1) + \tilde{A}_0\tilde{R}^2\right)^{\frac{2+k}{k}}}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

finalmente el módulo del campo eléctrico esta dado por

$$\tilde{E} = \frac{\sqrt{\tilde{r}^2[\tilde{A}_0\tilde{R}^2 + 3\tilde{A}_1(|\tilde{z}| + 1)]^2 + [\tilde{A}_0(|\tilde{z}| + 1)\tilde{R}^2 + 3\tilde{A}_1(|\tilde{z}| + 1)^2 - \tilde{A}_1\tilde{R}^2]^2}}{k\left(\tilde{R}^3 + \tilde{A}_1(|\tilde{z}| + 1) + \tilde{A}_0\tilde{R}^2\right)^{\frac{2+k}{k}}\tilde{R}^{\frac{2(k-3)}{k}}}, \quad (4.56)$$

con  $\tilde{R} = \sqrt{\tilde{r}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2}$ .

Al graficar el módulo del campo eléctrico en función de  $\tilde{r}$  y  $\tilde{z}$  se obtiene la Figura 4.7.

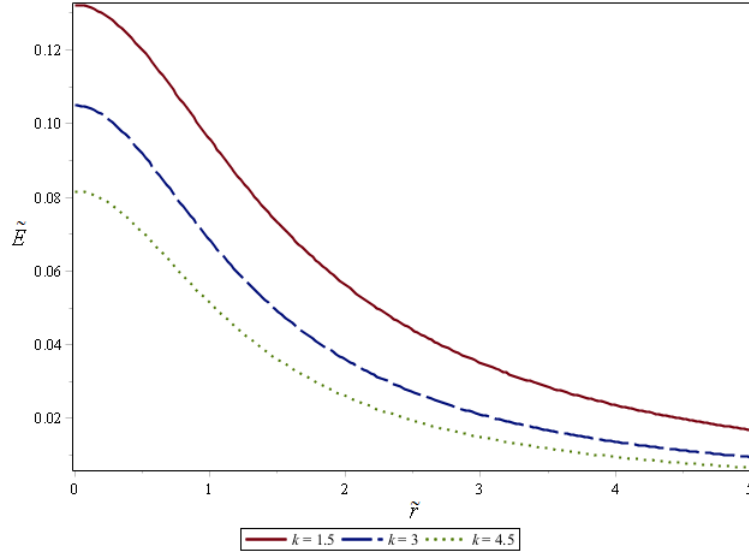


Figura 4.7: Campo eléctrico para el modelo  $n = 1$  con  $z = 0$  y los mismos valores de  $k$  del modelo anterior, considerando las constantes  $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_1 = 1$ .

La Figura 4.7 muestra que el campo eléctrico decae rápidamente desde el centro del sistema, ya que para  $\tilde{r} \rightarrow \infty$  el campo eléctrico es casi nulo.

Análogamente, para realizar las líneas de campo para el modelo  $n = 1$ , se debe tener en cuenta las componentes (4.54) en

$$E_{(z)}dr = E_{(r)}dz, \quad (4.57)$$

$$\frac{dr}{r[A_0R^2 + 3A_1(|z| + a)]} = \frac{dz}{A_0(|z| + a)R^2 + 3A_1(|z| + a)^2 - A_1R^2}, \quad (4.58)$$

para  $z > 0$  y en términos adimensionales se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{r}} = \frac{\tilde{z} + 1}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{A}_1[\tilde{r}^2 + (\tilde{z} + 1)^2]}{\tilde{r}[\tilde{A}_0(\tilde{r}^2 + (\tilde{z} + 1)^2) + 3\tilde{A}_1(\tilde{z} + 1)]}, \quad (4.59)$$

como la solución analítica de esta ecuación no es sencilla de encontrar se resuelve numéricamente en *Maple 15*, para generar las líneas de campo de la Figura (4.8).

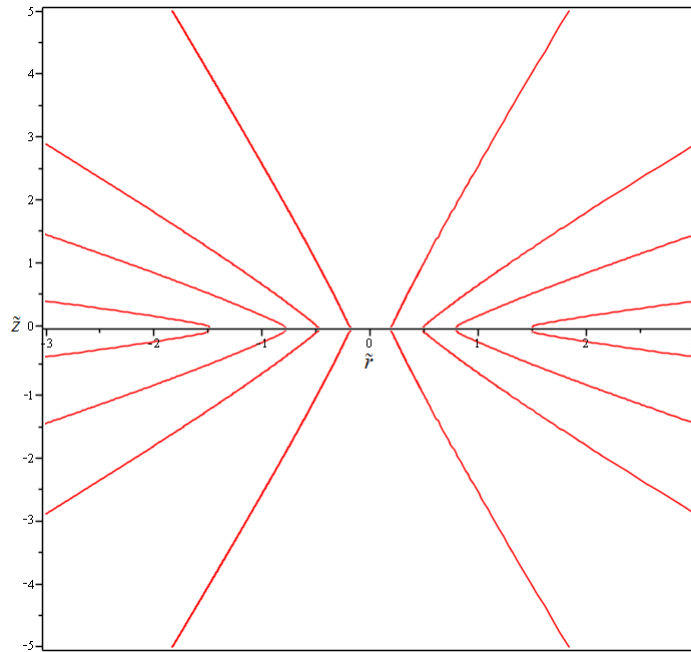


Figura 4.8: *Líneas de campo eléctrico para el modelo  $n = 1$ .*

En la Figura 4.8, a diferencia del modelo anterior estas líneas tienen una ligera curvatura, según la ecuación (4.59), el primer término es el mismo generado en el modelo  $n = 0$  que da líneas rectas, y el segundo término aporta para que haya una pequeña curvatura en estas líneas.

---

## Capítulo 5

# Conclusiones

---

En el presente trabajo de grado se obtuvo una nueva familia de infinitas soluciones exactas, de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para un espaciotiempo conformestático y axialmente simétrico. Las soluciones describen una familia de discos de polvo cargados con campo eléctrico. Con el fin de hacer la interpretación de estas soluciones, en el Capítulo 2, se presentó el formalismo de modelos de discos delgados a partir de soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell con campo eléctrico de tal forma que las primeras derivadas del tensor métrico y del cuadvivector potencial poseen una discontinuidad.

También se obtuvo las soluciones a las ecuaciones de campo mediante la dependencia funcional entre la función métrica  $\psi$  y el potencial eléctrico  $\phi$  en la solución de la ecuación de Laplace. Basados en dicha solución, obtuvimos la expresión general para el tensor de momentum-energía, la densidad de corriente del disco y del halo y las líneas de campo eléctrico para el sistema presentadas en las figuras 4.4 y 4.8, las cuales representan las cantidades físicas de dichos modelos de discos y halos. Estos modelos son conformestáticos, delgados, infinitos con campo eléctrico y de tipo polvo, en donde se cumple que la densidad de carga es igual a la densidad de energía, excepto en un signo y siempre es positiva (4.6), lo cual nos conduce a afirmar que dichos modelos satisfacen todas las condiciones de energía.

Otra característica de estas soluciones discoidales es que de acuerdo a las expresiones analíticas, las densidades de energía son proporcionales a las densidades de corriente. Aunque los modelos obtenidos son infinitos, estas caen rápidamente a cero, esto se muestra en las figuras 4.1, 4.2, 4.5 y 4.6, permitiendo de esta manera observar una región central bien definida en la cual hay una mayor concentración de masa.

Se demostró mediante el criterio de comparación del límite que la masa del sistema conformado por un disco y un halo, para cada uno de los modelos, es finita. Esto sucedió al demostrar convergencia sobre la integral de Komar para las masas del disco (4.37) y del halo (4.38) en el modelo  $n = 0$ , por lo tanto para cualquier  $n$  también converge. Para este primer modelo se obtuvo valores finitos para la masa,

que satisface el criterio de finitud y geometría. De forma particular, que la  $M_H$  es mayor que la masa del disco  $M_D$  para valores de  $\tilde{A}_0 > 0$  y  $k > 1$ .

Los principales resultados obtenidos en el marco del desarrollo del presente trabajo de investigación se divulgaron en:

- Liliana Gómez L. y G. A. González. *Modelos relativistas de discos delgados axialmente simétricos inmersos en un halo con campo eléctrico*, presentado como charla oral en el *XXIV Congreso Nacional de Física*, 3 al 7 de Octubre del 2011, Bogotá D.C.
- Liliana Gómez L. y G. A. González. *Modelos relativistas de sistemas compuestos por discos delgados y halos con campo eléctrico*, presentado como charla oral en el *III Congreso Colombiano de Astronomía y Astrofísica*, 5 al 8 de Noviembre del 2012, Bucaramanga.

# Bibliografía

---

- [1] W. A. Bonnor y A. Sackfield. The interpretation of some spheroidal metrics. *Communications in Mathematical Physics*, 8:338, 1968.
- [2] T. Morgan y L. Morgan. The gravitational field of a disk. *Physical Review*, 183:1097, 1969.
- [3] T. Morgan y L. Morgan. Gravitational field of shells and disk in general relativity. *Physical Review D*, 2:2756, 1970.
- [4] J. B. Griffiths y J. Podolský. Exact space time in Einstein's general relativity. *Cambridge monographs on mathematical physics*, 2:2756, 1970.
- [5] P. S. Lemos y P. S. Letelier. Superposition of Morgan and Morgan discs with a Schwarzschild black hole. *Classical Quantum Gravity*, 10:L75, 1993.
- [6] P. S. Lemos y P. S. Letelier. Exact general relativistic thin disks around black holes. *Physical Review D*, 49:5135, 1994.
- [7] P. S. Lemos y P. S. Letelier. Two families of exact disks with a central black hole. *International Journal of Modern Physics D*, 5:53, 1996.
- [8] B. H. Voorhees. Relativistic disks i. background models. *Physical Review D*, 5:2413, 1972.
- [9] D. Lynden-Bell y S. Pineault. Relativistic disks i. counter-rotating disks. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 185:679,, 1978.
- [10] J. P. S. Lemos. Self-similar relativistic discs with pressure. *Classical and Quantum Gravity*, 6:1219, 1989.
- [11] G. A. González y P. S. Letelier. Relativistic static thin discs with radial stress support. *Classical and Quantum Gravity*, 16:479, 1999.
- [12] G. A. González y O. A. Espitia. Relativistic static thin disks: The counterrotating model. *Physical Review D*, 68:104028, 2003.

- 
- [13] D. Lynden-Bell y S. Pineault. Relativistic disks ii. self-similar disks in rotation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 185:694, 1978.
- [14] J. Bičák y T. Ledvinka. Relativistic disks as sources of the Kerr metric. *Review Letters*, 71, 1669, 1993.
- [15] C. Pichon y D. Lynden-Bell. New sources for Kerr and other metrics: Rotating relativistic disc with pressure support. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 280:1007, 1996.
- [16] G. A. González y Gutiérrez P.S. Letelier. Rotating relativistic thin disks. *Physical Review D*, 62:064025, 2000.
- [17] O. Semerák. Gravitating discs around a Schwarzschild black hole: Iii. *Classical Quantum Gravity*, 20:1613, 2003.
- [18] O. Semerák. Exact power-law discs around static black holes. *Classical Quantum Gravity*, 21:2203, 2004.
- [19] D. Vogt y P. S. Letelier. Exact general relativistic perfect fluid disks with halos. *Physical Review D*, 68:084010, 2003.
- [20] M. Ujevic y P. S. Letelier. Stability of general relativistic geometric thin disks. *Physical Review D*, 70:084015, 2004.
- [21] T. Ledvinka, J. Bičák y M. Zofka. Relativistic disks as sources of Kerr-Newman fields. *In edited by T. Piran, editor, in Proceeding of 8th Marcel-Grossmann Meeting in General Relativity, Singapore*, 1999.
- [22] G. García-Reyes y G. A. González. Rotating and counterrotating relativistic thin disks as sources of stationary electrovacuum spacetimes. *Brazilian Journal of Physics*, 37:1094, 2007.
- [23] D. Vogt y P. S. Letelier. Exact relativistic static charged dust discs and non-axisymmetric structures. *Classical Quantum Gravity*, 21:3369, 2004.
- [24] D. Vogt y P. S. Letelier. Exact relativistic static charged dust discs and non-axisymmetric structures. *Classical Quantum Gravity*, 21:3369, 2004.
- [25] J. Katz, J. Bičák y D. Lynden-Bell. Disc sources for conformastationary metrics. *Classical Quantum Gravity*, 16:4023, 1999.
- [26] G. García-Reyes y G. A. González. Electrovacuum static counterrotating relativistic dust discs. *Physical Review D*, 69:124002, 2004.
- [27] D. Vogt y P. S. Letelier. Exact relativistic static charged perfect fluid disks. *Physical Review D*, 70:064003, 2004.

- 
- [28] G. García-R y G. A. González. Counterrotating perfect fluid discs as sources of electrovacuum static spacetimes. *Classical Quantum Gravity*, 21:4845, 2004.
- [29] G. García-R y G. A. González. Charged perfect fluid disks as sources of Taub-Nut spacetimes. *Physical Review D*, 70:104005, 2004.
- [30] G. A. González, A. C. Gutiérrez y P. Ospina. Finite axisymmetric charged dust disk in conformastatic spacetimes. *Physical Review D*, 78:064058, 2008.
- [31] A. H. Taub. Space-times with distribution valued curvature tensors. *Journal of Mathematical Physics*, 21:1423, 1980.
- [32] A. Lichnerowicz. Sur les ondes de choc gravitationnelles. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 273:528, 1971.
- [33] A. Papapetrou y A. Hamouni. Surface layers of matter in general relativity. *Annales de L'institut Henri Poincaré*, 9:179, 1968.
- [34] J. L. Synge. Relativity, the general theory. *North-Holland, Amsterdam*, 1987.
- [35] E. Poisson. A relativist's toolkit: The mathematics of black-hole mechanics. *Cambridge University Press*, 2004.
- [36] J. A. E. Carrillo, J. A. S. Lima y A. Maia, Jr . Spectrum of Gamma fluids: A statistical derivation. *International Journal of Theoretical Physics*, 35:9, 1996.
- [37] M. Snajdr. Critical collapse of an ultrarelativistic fluid in the Gamma limit. *Classical and Quantum Gravity*, 23:3333, 2006.
- [38] J. A. S. Lima y A. Maia, Jr . Thermodynamic properties of Gamma fluids and the quantum vacuum. *Physical Review D*, 52:10, 1995.
- [39] J. Binney y S. Tremaine. Galactic dynamics. *Princeton, New Jersey*, 1956.
- [40] A. Toomre. On the distribution of matter within highly flattened galaxies. *Astrophysical Journal*, 138:385, 1963.
- [41] V. Varela. Construction of sources for Majumdar-Papapetrou spacetimes. *General Relativity and Gravitation*, 35:1815, 2003.
- [42] W. B. Bonnor y S. B. P. Wickramasuriya. Are very large gravitational redshifts possible?. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 170:643, 1975.
- [43] W. B. Bonnor. Equilibrium of charged dust in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 12:453, 1980.

- 
- [44] W. B. Bonnor. A model of a spheroidal body. *Classical Quantum Gravity*, 15:351, 1980.
- [45] M. Gürses. Sources for the Majumdar-Papapetrou space-times. *Physical Review D*, 58:044001, 1998.
- [46] T. M. Apostol. Calculus. *Reverté S.A.*, 1999.
- [47] J. Bičák, D. Lynden-Bell y C. Pichon. Relativistic discs and flat galaxy models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 265:126, 1993.

## A. Cálculo de la masa del sistema

Con el fin de calcular la masa del sistema disco y halo, se hará uso de la conocida fórmula de Komar [35],

$$M = 2 \int_{\Sigma_t} (T_{\alpha\beta} - \frac{T}{2} g_{\alpha\beta}) m^\alpha \xi^\beta d\Sigma, \quad (1)$$

donde  $\Sigma$  es la hipersuperficie espacial dada por  $\Sigma : f(x^\alpha) = t = cte$ , de manera que

$$f_{,\alpha} = t_{,\alpha} = \delta_\alpha^t, \quad (2)$$

aquí  $f_{,\alpha}$  son los vectores normales a la hipersuperficie. Para este caso solo hay un vector unitario normal a la hipersuperficie  $m_{,\alpha}$  según la relación (2), con la relación

$$m_\alpha = \frac{\varepsilon f_{,\alpha}}{|g^{\alpha\beta} f_{,\alpha} f_{,\beta}|^{\frac{1}{2}}}, \quad (3)$$

donde  $\varepsilon$  puede tener los valores 1, 0, -1 lo cual determina si el vector es tipo espacio, nulo o tipo tiempo respectivamente, y se calcula a través de la norma del vector  $f_{,\alpha}$ . En este caso

$$g^{\alpha\beta} f_{,\alpha} f_{,\beta} = g^{tt} = -e^{-2\psi} < 0, \quad (4)$$

luego

$$\varepsilon = -1, \quad (5)$$

de manera que el vector normal de la ecuación (3), queda dado como

$$m_\alpha = -e^\psi \delta_\alpha^t. \quad (6)$$

Por otra parte, se puede comprobar que  $n_\alpha$  es unitario y de tipo tiempo mediante

$$m_\alpha m^\alpha = g^{\alpha\beta} m_\alpha m_\beta = e^{2\psi} g^{tt} = -1, \quad (7)$$

a partir de la relación (6) se puede escribir que

$$m^\alpha = e^{-\psi} \delta_t^\alpha = V^\alpha, \quad (8)$$

## Cálculo de la masa del sistema

---

donde la segunda igualdad se obtiene al usar la tétrada establecida en el segundo capítulo. Por otra parte, la métrica inducida sobre la hipersuperficie

$$ds_{\Sigma}^2 = e^{-2\psi}[dr^2 + r^2d\varphi^2 + dz^2], \quad (9)$$

donde  $y^a = (r, \psi, z)$ , está definida como

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta}\delta_a^{\alpha}\delta_b^{\beta}. \quad (10)$$

El elemento de superficie  $d\Sigma$  está dado por la expresión

$$d\Sigma = \sqrt{h}d^3y = \sqrt{h}drd\varphi dz, \quad (11)$$

donde  $h = \det[h_{ab}]$ . Realizando el cálculo del determinante se llega a que  $\sqrt{h} = re^{-3\psi}$ . De acuerdo con esto, el elemento de superficie esta dado por

$$d\Sigma = re^{-3\psi}drd\varphi dz. \quad (12)$$

El vector de Killing temporal  $\xi^{\alpha}$ ,

$$\xi^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial t} = \delta_t^{\alpha}, \quad (13)$$

en términos de la tétrada del OLM es

$$\xi^{\alpha} = \delta_t^{\alpha} = e^{\psi}V^{\alpha}. \quad (14)$$

Reemplazando las relaciones (8),(11) y (14) en la definición (1) se obtiene la ecuación para calcular la masa del disco

$$M_D = 2 \int_{\Sigma_t} (T_{\alpha\beta} - \frac{T}{2}g_{\alpha\beta})V^{\alpha}V^{\beta}e^{-2\psi}rdrd\varphi dz. \quad (15)$$

De las expresiones (??) y (2.33) se tiene que el tensor de momentum-energía para la region del disco es

$$T_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}\delta(z) = e^{\psi}S_{\alpha\beta}\delta(z), \quad (16)$$

de manera que

$$M_D = 2 \int_{\Sigma} (S_{\alpha\beta} - \frac{S}{2}g_{\alpha\beta})V^{\alpha}V^{\beta}e^{-\psi}\delta(z)rdrd\varphi dz, \quad (17)$$

Para el disco de polvo, se tiene que el tensor superficial de energía se puede expresar en términos de la OLM, para ello se tiene en cuenta

$$S_{\alpha\beta} = \epsilon V_{\alpha}V_{\beta}, \quad (18)$$

## Cálculo de la masa del sistema

---

de donde

$$S = g^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = \epsilon g^{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta = \epsilon m^\alpha m_\alpha = -\epsilon, \quad (19)$$

reemplazando en la ecuación anterior se obtiene que

$$\left( S_{\alpha\beta} - \frac{S}{2} g_{\alpha\beta} \right) V^\alpha V^\beta = \left( \epsilon V_\alpha V_\beta + \frac{\epsilon}{2} g_{\alpha\beta} \right) V^\alpha V^\beta = \frac{\epsilon}{2}, \quad (20)$$

de esta forma la integral se puede expresar como

$$M_D = 2\pi \int \epsilon e^{-\psi} \delta(z) r dr dz. \quad (21)$$

Por otra parte se tiene que se tiene que  $\epsilon = \frac{e^\psi \psi_{,z}}{2\pi}$  y reemplazando en esta integral

$$M_D = \int_0^\infty \psi_{,z}(r, 0) r dr, \quad (22)$$

y al usarse (2.29)

$$\psi_{,z} = \frac{U_{,z}}{k(1-U)}, \quad (23)$$

por lo tanto la masa del disco

$$M_D = \int_0^\infty \frac{U_{,z}(r, 0)}{k(1-U(r, 0))} r dr, \quad (24)$$

podemos introducir explícitamente el desplazamiento haciendo el cambio de variable  $R^2 = r^2 + a^2$  con lo cual

$$M_D = \int_a^\infty \frac{U_{,z}}{k(1-U)} R dR, \quad (25)$$

es la expresión para el cálculo de la masa del disco, donde las derivadas del integrando se evalúan en  $z = 0^+$ .

Análogamente, se hace para la masa del halo. La métrica inducida sobre la hipersuperficie escrita en coordenadas esféricas es

$$ds_\Sigma^2 = e^{-2\psi} [dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2], \quad (26)$$

donde se elija como coordenadas en la hipersuperficie las  $y^a = (R, \varphi, \theta)$ , con

$$R^2 = r^2 + z^2, \quad (27)$$

$$z = R \cos \theta, \quad (28)$$

## Cálculo de la masa del sistema

---

luego el elemento de superficie toma la forma

$$d\Sigma = e^{-3\psi} R^2 \text{sen}\theta dR d\theta d\varphi. \quad (29)$$

Con tensor de momentum-energía en el OLM para el halo, el integrando está dado por

$$(T_{(\alpha)(\beta)} - \frac{T}{2} g_{\alpha\beta}) V^\alpha V^\beta = T_{(t)(t)} + \frac{T}{2} = \frac{\rho}{2}, \quad (30)$$

por lo tanto la integral queda dada como

$$M_H = 2 \int_{\Sigma} \frac{\rho}{2} e^{-2\psi} R^2 \text{sen}\theta dR d\theta d\varphi, \quad (31)$$

$$M_H = 2\pi \int \rho e^{-2\psi} R^2 \text{sen}\theta dR d\theta, \quad (32)$$

con la relación (4.1)

$$\psi = -\frac{\ln(1-U)}{k}, \quad (33)$$

entonces

$$e^{-2\psi} = (1-U)^{\frac{2}{k}}, \quad (34)$$

y al tener en cuenta la expresión para  $\rho$  de (4.9)

$$M_H = 2\pi \int \frac{2(k-1)(1-U)^{\frac{2}{k}}}{k^2} \frac{U_{,r}^2 + U_{,z}^2}{(1-U)^{2\frac{1+k}{k}}} R^2 \text{sen}\theta dR d\theta, \quad (35)$$

$$M_H = 4\pi \frac{(k-1)}{k^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{U_{,r}^2 + U_{,z}^2}{(1-U)^2} R^2 \text{sen}\theta d\theta dR, \quad (36)$$

se obtiene la expresión para el cálculo de la masa del halo

## B. Método de desplazamiento, corte y reflexión.

Es uno de los métodos usados para expresar el potencial gravitacional generado por una distribución de materia tipo disco, que inicialmente fue propuesto por Kuzmin [39] y Toomre [40] hace la generalización para la construcción de modelos de discos Newtonianos, posteriormente se extendió a la relatividad general [47, 19, 20].

El contenido material y eléctrico del disco se describe por funciones que son distribuciones basado en las soluciones de las ecuaciones de campo de Eistein-Maxwell. El método se puede describir en los siguientes casos

1. Figura 1. En un espacio en donde se tiene una fuente de campo gravitatorio, se elige una superficie (en nuestro caso, el plano  $z = 0$ ) que divide el espacio en dos partes: sin singularidades o fuentes, y el otro con las fuentes. Entonces se omite de la parte del espacio con singularidades y se utiliza la superficie para hacer una inversión de la parte no singular del espacio. Esto genera un espacio con una singularidad que es una función delta en  $z = 0$ . Este procedimiento es matemáticamente equivalente a hacer la transformación  $z \rightarrow |z| + a$ , donde  $a$  es una constante. Por lo tanto, las ecuaciones de campo de Eistein-Maxwell pueden escribirse para dos regiones: una válida para  $z \neq 0$ , que son las ecuaciones usuales de Eistein-Maxwell, y otra que implica la distribución con el tensor de momentum-energía asociado,  $T_{ab} = Q_{ab}\delta(z)$ , en  $z = 0$ .

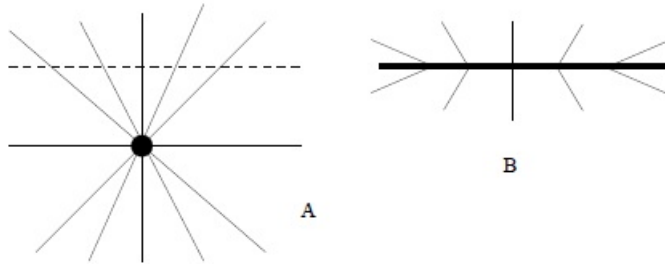


Figura 1: Ilustración del método “desplazamiento, corte y reflexión” para generar discos. En **A**, el espacio-tiempo con una singularidad está desplazado y cortado por un plano (líneas punteadas). En **B**, la región con la singularidad es omitida y la parte superior es reflejada respecto al plano

2. El mismo procedimiento se puede usar para una esfera estática, con fluido perfecto cargado para generar los discos con halo cargados, como se ilustra en la Figura 2. La esfera es desplazada y cortada a una distancia  $a$  menor que su radio. La parte que contiene el centro de la esfera se omite. Después de la inversión, se obtiene un disco rodeado por un cascaron de fluido perfecto.

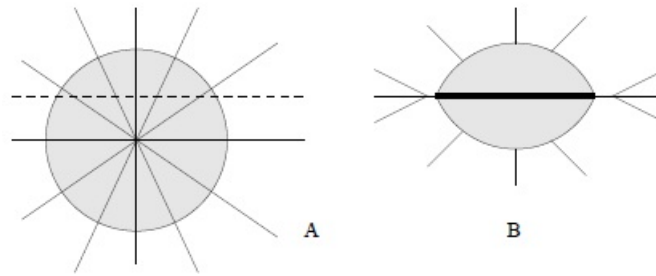


Figura 2: Ilustración del método “desplazamiento, corte y reflexión” para generar discos con halos. en **A**, una esfera de fluido perfecto está desplazado y cortado por un plano (líneas punteadas). en **B**, la region con la singularidad es omitida y la parte superior es reflejada respecto al plano