

**PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL ESTUDIO DE LAS
RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS, LA LEY DEL SENO Y LA LEY DE
COSENO EN EL TRIÁNGULO**

MYRIAM JOHANNA CORTÉS VERA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2004**

**PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL ESTUDIO DE LAS
RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS, LA LEY DEL SENOS Y LA LEY DE
COSENO EN EL TRIÁNGULO**

MYRIAM JOHANNA CORTÉS VERA

**Proyecto de Grado presentado como requisito para optar al título de
Licenciada en Matemáticas**

**Director:
JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL
MSc, EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2004**

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, por su amor, su apoyo constante y su motivación para el estudio de esta carrera. Al profesor JUAN DE DIOS URBINA, por su asesoría, su dedicación y su entrega incondicional al desarrollo de esta monografía. Al profesor JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL, por sus aportes y su contribución significativa al desarrollo de este tema.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	13
1. JUSTIFICACIÓN	14
2. ANTECEDENTES HISTÓRICOS	15
2.1 HIPARCO DE NICEA	16
2.2 MENELAO DE ALEJANDRÍA	16
2.3 EL ALMAGESTO DE PTOLOMEO	17
2.4 TRIGONOMETRIA EN OTRAS PARTES DEL MUNDO	17
3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	19
3.1 PRELIMINARES	19
3.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	29
3.2.1 Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo	38
3.2.2 Funciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos	39
3.3 LA LEY DEL SENOS	39
3.4 LA LEY DEL COSENO	41
4. FUNDAMENTACIÓN PEDAGÓGICA	43
4.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	44
4.1.1 El trabajo de Polya	47
4.2 USO DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS	49
4.2.1 Cabri Geometry	50
5. METODOLOGÍA	53

6. DESARROLLO DE LA PROPUESTA	54
7. TALLERES DE APLICACIÓN	55
7.1 PRUEBA DIAGNÓSTICO	55
7.1.1 Diseño y elaboración	58
7.1.2 Protocolo de la situación	58
7.1.3 Análisis de resultados	58
7.1.4 Conclusiones	60
7.2 TALLER No 1	60
7.2.1 Diseño y elaboración	63
7.2.2 Protocolo de la situación	64
7.2.3 Análisis de resultados	66
7.2.4 Conclusiones	67
7.3 TALLER No 2	70
7.3.1 Diseño y elaboración	71
7.3.2 Protocolo de la situación	74
7.3.3 Análisis de resultados	74
7.3.4 Conclusiones	75
7.4 TALLER No 3	77
7.4.1 Diseño y elaboración	78
7.4.2 Protocolo de la situación	80
7.4.3 Análisis de resultados	81
7.4.4 Conclusiones	81

7.5 TALLER No 4	82
7.5.1 Diseño y elaboración	85
7.5.2 Protocolo de la situación	87
7.5.3 Análisis de resultados	90
7.5.4 Conclusiones	91
7.6 TALLER No 5	91
7.6.1 Diseño y elaboración	96
7.6.2 Protocolo de la situación	97
7.6.3 Análisis de resultados	99
7.6.4 Conclusiones	100
7.7 TALLER No 6	100
7.7.1 Diseño y elaboración	103
7.7.2 Protocolo de la situación	105
7.7.3 Análisis de resultados	106
7.7.4 Conclusiones	107
7.8 TALLER No 7	107
7.8.1 Diseño y elaboración	110
7.8.2 Protocolo de la situación	112
7.8.3 Análisis de resultados	114
7.8.4 Conclusiones	115
7.9 TALLER No 8	115
7.9.1 Diseño y elaboración	119

7.9.2	Protocolo de la situación	119
7.9.3	Análisis de resultados	121
7.9.4	Conclusiones	122
7.10	TALLER No 9	122
7.10.1	Diseño y elaboración	125
7.10.2	Protocolo de la situación	126
7.10.3	Análisis de resultados	127
7.10.4	Conclusiones	128
	CONCLUSIONES	129
	RECOMENDACIONES	130
	BIBLIOGRAFÍA	131
	ANEXOS	134

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Teorema de Pitágoras.	20
Figura 2. Distancia entre dos puntos en el plano.	22
Figura 3. Ángulo.	23
Figura 4. Elementos de un ángulo.	24
Figura 5. Ángulos positivos y negativos.	25
Figura 6. Ángulo central.	25
Figura 7. Medida de un ángulo en grados.	27
Figura 8. Medida en radianes de un ángulo.	28
Figura 9. Punto trigonométrico.	30
Figura 10. Funciones trigonométricas.	31
Figura 11. Funciones trigonométricas.	32
Figura 12. Suma de los ángulos interiores de un triángulo.	35
Figura 13. Suma de los ángulos exteriores de un triángulo.	36
Figura 14. Medida de un ángulo exterior en un triángulo.	37
Figura 15. Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.	38
Figura 16. La ley del seno.	39
Figura 17. La ley coseno.	41

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. Desarrollo taller No. 1.	135
Anexo B. Desarrollo taller No. 2.	136
Anexo C. Desarrollo taller No. 3.	137
Anexo D. Desarrollo taller No. 4.	138
Anexo E. Desarrollo taller No. 5.	139
Anexo F. Fotos taller No 1.	140
Anexo G. Fotos taller No 2.	141
Anexo H. Fotos taller No 3.	142
Anexo I. Fotos taller No 4.	143
Anexo J. Fotos taller No 5.	144
Anexo K. Fotos taller No 6.	145
Anexo L. Fotos taller No 7.	146
Anexo M. Fotos taller No 8.	147
Anexo N. Fotos taller No 9.	148

RESUMEN

TITULO: PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL ESTUDIO DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS, LA LEY DEL SENO Y LA LEY DEL COSENO EN EL TRIÁNGULO.*

AUTOR: MYRIAM JOHANNA CORTÉS VERA **

PALABRAS CLAVES:

- ? Propuesta Metodológica
- ? Relaciones trigonométricas
- ? La ley del seno y la ley del coseno

El estudio de la trigonometría puede convertirse en un proceso rutinario y sin ningún sentido para los estudiantes, si no se brindan las condiciones adecuadas para ello. En este sentido, este proyecto es la elaboración, aplicación y análisis de una propuesta metodológica que pretende aportar una alternativa de enseñanza de este tema, para los estudiantes de décimo grado.

La propuesta está orientada por las ideas que aparecen en los Estándares Internacionales para la educación matemática, el enfoque de resolución de problemas y el uso de las nuevas tecnologías con el programa Cabri Geometry. La propuesta se desarrolla a través de diversos talleres donde se presenta la fundamentación teórica y diferentes actividades que involucran al estudiante en forma activa, haciéndolo partícipe de su propio aprendizaje. La propuesta fue aplicada en el colegio las Américas, institución oficial de Bucaramanga, a estudiantes de grado décimo, donde se desarrolla actualmente el proyecto de incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas, lo que facilitó el desarrollo de la propuesta, gracias al excelente manejo que tenían los estudiantes del programa Cabri Geometry y la calculadora TI 92 plus.

Se presenta un análisis descriptivo de los procesos de diseño y elaboración, protocolo de la situación, Análisis de resultados y conclusiones de cada uno de los talleres, con lo cual se evalúa los alcances de la propuesta.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Director de Proyecto: MsC. Jorge Enrique Fiallo Leal

SUMMARY

TITLE: METHODOLOGICAL PROPOSAL FOR THE ESTUDY OF TRIGONOMETRICAL RELATIONSHIPS, THE LAW OF SINUS AND THE LAW OF COSINE IN THE TRIANGLE. *

AUTHORS: MYRIAM JOHANNA CORTÉS VERA **

KEYWORDS:

- ? Methodological proposal
- ? Trigonometrical relationships
- ? The law of sinus and the law of cosine

DESCRIPTION OR CONTENT

The study of the trigonometry, it can become a routine process and without any sense, if the appropriate conditions are not offered for it. In this sense, this project is the elaboration, application and analysis of a methodological proposal that it seeks to contribute an alternative of teaching of this topic, for the students of tenth grade.

The proposal is guided by the ideas that appear in the International Standards for the Mathematical Education, the focus of resolution of problems and the use of the new technologies with the program Cabri Geometry. The proposal is developed through diverse shops where the foundation theoretical is presented and different activities that involve the student in active form, making it participant of its own learning. The proposal was applied in the school "Las Américas", official institution of Bucaramanga, to grade students tenth, where it is developed the project of incorporation of new technologies to the curriculum of mathematics, what facilitated the development of the proposal, thanks to the excellent handling that had the students of the program Cabri Geometry and the calculator TI 92 Plus.

It is presented a descriptive analysis of the design processes and elaboration, protocol of the situation, analysis of results and conclusions of each one of the shops, with that which is evaluated the reaches of the proposal.

* Degree Work

** Sciences Faculty

Mathematics School

Project Manager: MsC. Jorge Enrique Fiallo Leal

INTRODUCCIÓN

La responsabilidad que tenemos como docentes nos exige nuestra presencia activa y la capacidad de utilizar cada una de las estrategias y recursos existentes de forma adecuada para desempeñar mejor nuestra labor.

Realmente nadie puede decirnos como enseñar, pero afortunadamente contamos con diferentes alternativas, sugerencias y herramientas para elaborar nuestras propias estrategias de enseñanza y de esta forma contribuir con el mejoramiento de la educación matemática, teniendo en cuenta que no solo importa qué se enseña, sino cómo se enseña.

Con este trabajo pretendo contribuir al mejoramiento del proceso de enseñanza de las matemáticas ofreciendo una alternativa de aprendizaje de las relaciones trigonométricas, la ley del seno y la ley del coseno en el triángulo; a través de diversas actividades y el uso de la calculadora TI –92 Plus y el programa Cabri Geometry, orientadas por el enfoque de resolución de problemas, tratando de involucrar de forma significativa a los estudiantes con el estudio de esta parte de la trigonometría.

1. JUSTIFICACIÓN

La formación habitual contempla, tanto en colegios, universidades o empresas, la figura de un profesor experto que imparte una lección magistral y unos alumnos que se limitan a memorizar datos, hechos, conceptos, teorías e información que posiblemente muchas veces no utilizarán para nada; realmente este modelo no logra motivar a los estudiantes y se convierte en un entorno frustrante para el docente que se limita a repetir y recitar sesión tras sesión los mismos contenidos teóricos a alumnos que se limitan a escuchar horas y horas materias que tal vez no les interesan o tengan poco que ver con lo que los motiva realmente.

Desde un punto de vista más realista el aprendizaje debe ser significativo, es decir con sentido, basado en el concepto de aprender haciendo.

Es imprescindible que el alumno juegue un papel fundamental, que sea el protagonista de su proceso de aprendizaje en forma activa, dándole aplicación y sentido a cada uno de sus conocimientos y no en forma pasiva simplemente recibiendo y archivando dichos conocimientos. En este sentido, es importante involucrar al alumno en experiencias que le generen un impacto emocional, que provoque que todo lo que suceda tenga sentido; ¡ese es el secreto!.

El estudio de la trigonometría puede convertirse en un proceso rutinario y mecánico, sin ningún sentido y relación; si no se brindan las condiciones suficientes para ello. Por esta razón, es importante brindarle al alumno no sólo una serie de conceptos, si no las herramientas y estrategias necesarias para que el alumno analice, relacione, argumente y proponga nuevas soluciones construyendo así un aprendizaje significativo.

2. ANTECEDENTES HISTÓRICOS

Históricamente trigonometría significa “medida del triángulo”. Puede decirse en este sentido, que la trigonometría nace desde que las primeras mediciones daban lugar a triángulos.

La trigonometría se desarrolló en la Grecia Antigua como ayuda a la astronomía, siendo obra esencialmente de tres matemáticos del período alejandrino: HIPARCO DE NICEA, MENELAO DE ALEJANDRÍA y CLAUDIO PTOLOMEO.

La trigonometría como otras ramas de las matemáticas, no fue el trabajo de algún hombre o nación. Los teoremas sobre razones de los lados de triángulos semejantes se conocían y habían sido usados por los antiguos Egipcios y Babilonios. En vista de la ausencia prehelénica de un concepto para la medida de triángulos, tal estudio debió ser llamado “trilaterometría”, medida de las partes de un triángulo.

En el trabajo de Euclides no hay trigonometría en el sentido estricto de la palabra, pero existen teoremas equivalentes para especificar las leyes trigonométricas. Astrónomos de la época de Alejandría notablemente Eratóstenes de Cirene y Aristarco de Samos, manejaron problemas que apuntaban la necesidad de relaciones más sistemáticas entre ángulos y cuerdas. La astronomía exigió a los científicos de la época medidas de arcos y ángulos más exactas, de esta forma todo el progreso de la trigonometría durante la civilización griega se produjo al lado de la astronomía.¹

¹ BOYER, Carl B. A History of Mathematics. USA: John Wiley & sons 1968. p. 176.

2.1 HIPARCO DE NICEA

Aproximadamente 180 – 125 a.C. Por cerca de dos y medio siglo, desde Hipócrates hasta Eratóstenes, los matemáticos griegos habían estudiado las relaciones entre líneas y círculos y las habían aplicado en una variedad de problemas de astronomía, pero no tenían una trigonometría sistemática. Entonces presumiblemente durante la segunda mitad del segundo siglo a.C., la primera tabla trigonométrica fue compilada por el astrónomo Hiparco de Nicea, quien por ello se ganó el derecho a ser conocido como “el padre de la trigonometría”. Hiparco de Nicea compiló una tabla trigonométrica que daba la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central dado que corta a una circunferencia de radio r . Esta tabla es similar a la moderna tabla del seno. No se sabe con exactitud el valor de r utilizado por Hiparco, pero sí se sabe que 300 años más tarde Ptolomeo utilizó $r = 60$, pues los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los Babilonios.²

2.2 MENELAO DE ALEJANDRÍA

Aproximadamente 100 d.C. Los trabajos matemáticos y astronómicos de Menelao son mencionados por comentaristas Griegos y Árabigos posteriores, incluyendo *Elementos de geometría*, pero el único que ha sobrevivido y sólo a través de los árabes es su *Esférica*. En el libro I de este tratado Menelao estableció una base para los triángulos esféricos análoga a la del libro I de Euclides para triángulos planos. El libro III contiene el bien conocido “*Teorema de Menelao*” como parte de lo que es esencialmente la trigonometría esférica en la típica forma Griega: una geometría o trigonometría de cuerdas en un círculo.³

² Ibid., p. 178.

³ Ibid., p. 180.

2.3 EL ALMAGESTO DE PTOLOMEO

Claudio Ptolomeo vivió y trabajó en Alejandría alrededor de 150 d.C. El curioso nombre con el que es conocida la obra máxima de Ptolomeo viene probablemente de una corrupción árabe de la palabra griega “Ne Megiste”, que significa “la mayor”; el título dado por Ptolomeo a su obra fue *La colección matemática*. Ptolomeo desarrolla en este libro no solamente sus modelos astronómicos sino también otras herramientas matemáticas que además de la geometría elemental se necesitan para los estudios de astronomía, por ejemplo, la trigonometría. El Almagesto es una obra maestra de exposición; jamás presenta Ptolomeo una tabla sin que haya explicado previamente como calcularla, y los parámetros de sus modelos se deducen a la luz de observaciones anotadas cuidadosamente.⁴

2.4 TRIGONOMETRÍA EN OTRAS PARTES DEL MUNDO

Por otro lado, al mismo tiempo que Ptolomeo, los astrónomos de la India habían desarrollado también un sistema trigonométrico basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta función seno, al contrario que el seno utilizado en la actualidad, no era una proporción, sino la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para ésta en sus tablas.

A finales del siglo VII los astrónomos árabes prefirieron trabajar con la función seno y más adelante habían completado las otras cinco funciones y habían demostrado varios teoremas fundamentales de la trigonometría.

⁴ AABOE, Asger. Matemáticas. Episodios históricos. Editorial Norma. Cali, 1964. p. 134.

El primer trabajo importante de trigonometría que apareció en Europa fue escrito por el matemático y astrónomo alemán JOHANN MÜLLER, llamado regiomontano. El matemático francés Francois Viète incorporó el triángulo polar en la trigonometría esférica. Los cálculos trigonométricos recibieron una gran ayuda gracias al matemático escocés JOHN NAPIER, quien inventó los logaritmos a principios del siglo XVII. ISAAC NEWTON inventó el cálculo diferencial e integral, encontrando la serie para la función seno y series similares para el coseno y la tangente. Con esto las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis, donde desempeñan un papel fundamental y extraordinario.

Por último en el siglo XVIII, el matemático suizo LEONHARD EULER definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones de números complejos, convirtiendo la trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos, demostrando que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.⁵

⁵ BOYER, Carl B. Opcit. p.182.

3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

3.1 PRELIMINARES

La trigonometría es el estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo, basado en las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas. Etimológicamente significa “medida de triángulos”. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana y la trigonometría esférica.

La trigonometría plana se limita a figuras contenidas en el plano en un sistema de coordenadas rectangulares y la trigonometría esférica se limita a triángulos contenidos en la superficie de una esfera. Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la astronomía en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, es decir una distancia que no podía ser medida directamente, como la distancia entre la tierra y la luna.

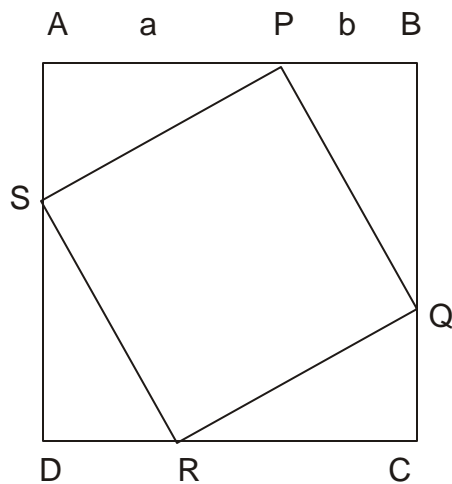
Las funciones trigonométricas desempeñan un papel muy importante en toda clase de fenómenos vibratorios (sonido, luz, electricidad). En consecuencia una gran parte de la trigonometría se dedica al estudio de las propiedades de las funciones trigonométricas y las relaciones entre ellas.

Dejaremos de un lado la trigonometría esférica para dedicarnos específicamente a la trigonometría plana, es decir; a triángulos planos o triángulos en el plano. Por esta razón es muy importante familiarizarse con los conceptos que se presentan a continuación.

TEOREMA 1. Teorema de Pitágoras. *En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Existen diversas demostraciones del teorema de Pitágoras. En esta ocasión presentaremos una demostración enfocada a nuestro objeto de estudio.

Figura 1. Teorema de Pitágoras



Demostración. Sea el cuadrado ABCD de lado $a + b$, donde $AP = BQ = CR = DS = a$.

El área del cuadrado ABCD es:

$$A_{\square} = L^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y el área de cada triángulo es:

$$A_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

supongamos que el lado del cuadrado PQRS es c, entonces el área del cuadrado PQRS es:

$$A_{\square} = L^2 = c^2$$

Como el área del cuadrado ABCD es igual a la suma de las áreas de los 4 triángulos más el área del cuadrado PQRS, tenemos,

$$A_{\square} = 4 A_{\triangle} + A_{\square}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4 \frac{ab}{2} + c^2$$

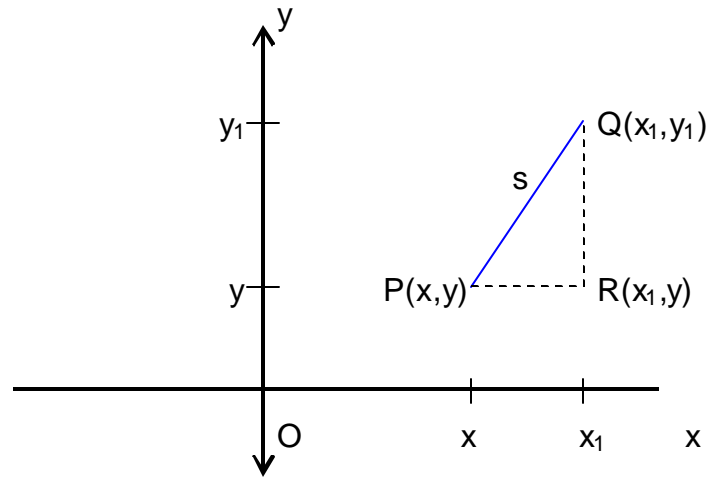
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Quedando demostrado así el teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a y b.

DEFINICIÓN 1. Distancia entre dos puntos. Sean los puntos P(x, y) y Q(x₁, y₁) en el plano. P(x,y), Q(x₁,y₁) y el punto R(x₁,y) son los vértices de un triángulo rectángulo. Aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos la siguiente expresión para calcular la distancia s entre los puntos P y Q:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

Figura 2. Distancia entre dos puntos en el plano



DEFINICIÓN 2. Producto Cartesiano. Dados dos conjuntos no vacíos A y B , el producto cartesiano $A \times B$ de A y B es el conjunto de todos los pares ordenados (a,b) con $a \in A$ y $b \in B$.

Es decir, $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ y } y \in B\}$

Por tanto, si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{4,5\}$, entonces el producto cartesiano entre A y B es:

$$A \times B = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$$

DEFINICIÓN 3. Una **relación** R entre A y B es subconjunto de $A \times B$. Es decir, $R \subseteq A \times B$.

Si R es una relación, el conjunto de todos los elementos x que aparecen como primeros elementos de los pares ordenados (x,y) de R , se llama

conjunto de salida de S. El conjunto de los segundos elementos se llama **conjunto de llegada** de S.

DEFINICIÓN 4. Una función f de A en B , es una relación en la cual a cada elemento del conjunto de partida, le corresponde uno y solo una imagen en el conjunto de llegada; es decir: si $(a,b) \in f$ y $(a,c) \in f$, entonces $b = c$.

La notación

$$f: A \longrightarrow B$$

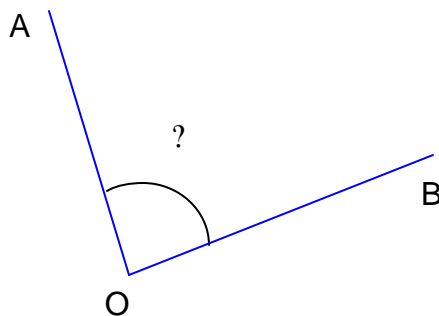
indica que f es una función de A en B . Si (a,b) es un elemento de f , se acostumbra a escribir $f(a) = b$, en lugar que $(a,b) \in f$.

Por lo tanto: $f(a) = b \iff (a,b) \in f$.

Antes de abordar los conceptos relacionados con funciones trigonométricas, debemos tener claros los conceptos que se presentan a continuación:

DEFINICIÓN 7. Ángulo. Un ángulo es la unión de dos semirrectas que tienen el mismo origen. A las dos semirrectas se les denomina lados el ángulo y a su origen común, vértice.

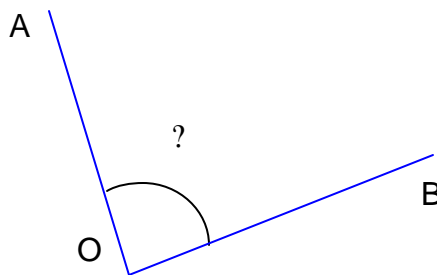
Figura 3. Angulo.



La notación para ángulos puede hacerse en dos formas: utilizando letras griegas minúsculas o letras mayúsculas de nuestro alfabeto. Por ejemplo, el ángulo de la figura 3, podría llamarse: ángulo α , denotado: α , ó ángulo AOB, denotado: $\angle AOB$ ó $\angle BOA$, es decir, $\angle AOB = \angle BOA$.

DEFINICIÓN 8. Podemos considerar un ángulo generado mediante la rotación de una semirrecta sobre su origen. La posición inicial y la posición final de la semirrecta se denominan respectivamente lado inicial y lado final del ángulo. El punto de rotación es el vértice del ángulo.

Figura 4. Elementos de un ángulo.

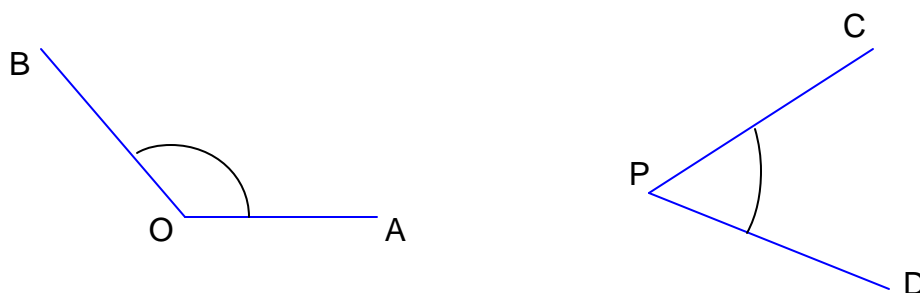


En la figura 4, el lado inicial del ángulo AOB, es OB, el lado final es OA y su vértice es el punto O.

DEFINICIÓN 9. Un ángulo es positivo si el sentido del giro es contrario al movimiento de las manecillas del reloj y negativo si es en el mismo sentido.

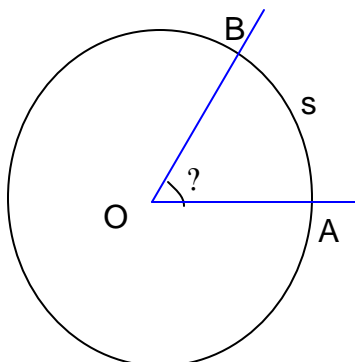
En la figura 5, $\angle AOB$ es positivo y el ángulo $\angle CPD$ es negativo.

Figura 5. Ángulos positivos y negativos.



DEFINICIÓN 10. Un ángulo cuyo vértice es el centro de una circunferencia se denomina ángulo central.

Figura 6. Angulo Central



La medición de ángulos es un tema esencial en trigonometría, por esta razón deben estudiarse y comprenderse los conceptos que se encuentran estrechamente relacionados con el concepto de medición de ángulos.

Sabemos que magnitud es todo aquello que podemos comparar y cantidad es el estado de la magnitud; de esta forma la longitud, el peso, la velocidad son magnitudes y la longitud de una regla, el peso de una persona y la

velocidad de un auto son cantidades. Podemos hacer comparaciones entre cantidades de la misma magnitud, por ejemplo: podemos comparar la longitud de una recta con la longitud de un libro.

DEFINICIÓN 11. Medir una cantidad es compararla con la unidad de medida elegida, para saber cuántas veces la cantidad contiene a la unidad.

Dado que un ángulo es una magnitud podemos medirlo. Para ello necesitamos unidades de medidas adecuadas que vamos a definir en dos sistemas diferentes:

Sistema sexagesimal. La unidad de medida para el sistema sexagesimal es el grado. En este sistema un ángulo se mide calculando la longitud del arco de circunferencia s , formada cuando los lados de un ángulo central cortan la circunferencia.

DEFINICIÓN 12. Grado. Un grado (1°) es un ángulo central que subtiende un arco de $\frac{1}{360}$ de la circunferencia.

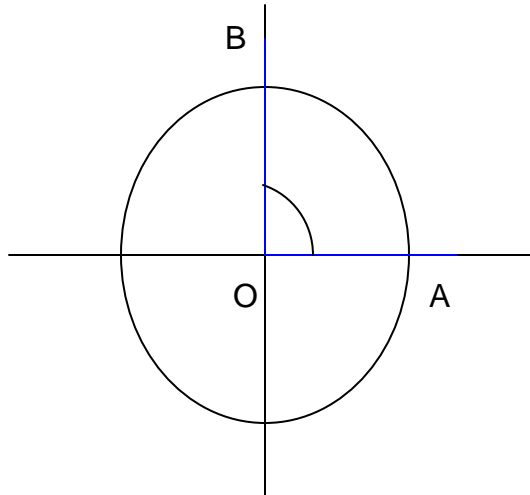
360

De esta forma para medir un ángulo en grados debemos comparar el ángulo unidad con el ángulo a medir.

Ejemplo. Para medir el ángulo AOB de la figura 7, dividimos la longitud de la circunferencia en 360 partes iguales y ubicamos el ángulo unidad. Luego calculamos la cantidad de ángulos unidad que caben dentro del ángulo a medir y obtenemos el valor deseado.

En este caso el ángulo AOB mide 90° .

Figura 7. Medida de un ángulo en grados.



Sistema circular. En este sistema utilizamos el radián como unidad de medición de ángulos.

En el estudio de problemas que incluyen ángulos de triángulos, la medida de ángulos suele darse en grados. Sin embargo para el estudio de las funciones trigonométricas de números reales, se usa la medida en radianes de un ángulo para definir estas funciones.

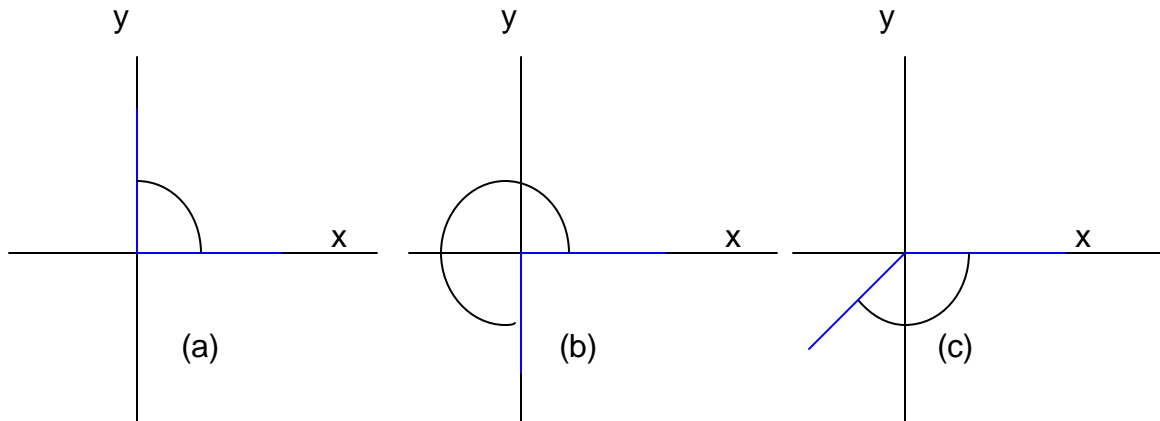
DEFINICIÓN 13. Radián. Sea AOB un ángulo en posición normal y el lado inicial $OA = 1$. Si s unidades es la longitud del arco de circunferencia recorrido hasta la posición final OB del ángulo, la medida en radianes t , del ángulo AOB está dada por:

$t = s$, si el ángulo es positivo

$t = -s$, si el ángulo es negativo.

Ejemplo. Usando el hecho de que la medida de la longitud de la circunferencia es 2π , vamos a determinar la medida de los ángulos de la figura 8.

Figura 8. Medida en radianes de ángulos.



La medida para los ángulos (a), (b) y (c) de la figura 8, son $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$ y $-\frac{3}{4}\pi$,

respectivamente.

Un ángulo formado por una rotación completa de tal forma que el lado inicial coincida con el lado final, tiene una medida de 360° y una medida en radianes de 2π . Por lo tanto hay una importante relación entre las medidas en grados y las medidas en radianes:

$$360^\circ = 2\pi \text{ radianes}$$

de donde:

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

DEFINICIÓN 14. Una circunferencia es el conjunto de puntos que están a una distancia fija (el radio) de un punto fijo (el centro), es decir, una circunferencia con centro (h,k) y radio r , es el conjunto:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid d((x,y), (h,k)) = r\}$$

Utilizando la fórmula de la distancia, tenemos:

$$d((x,y), (h,k)) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

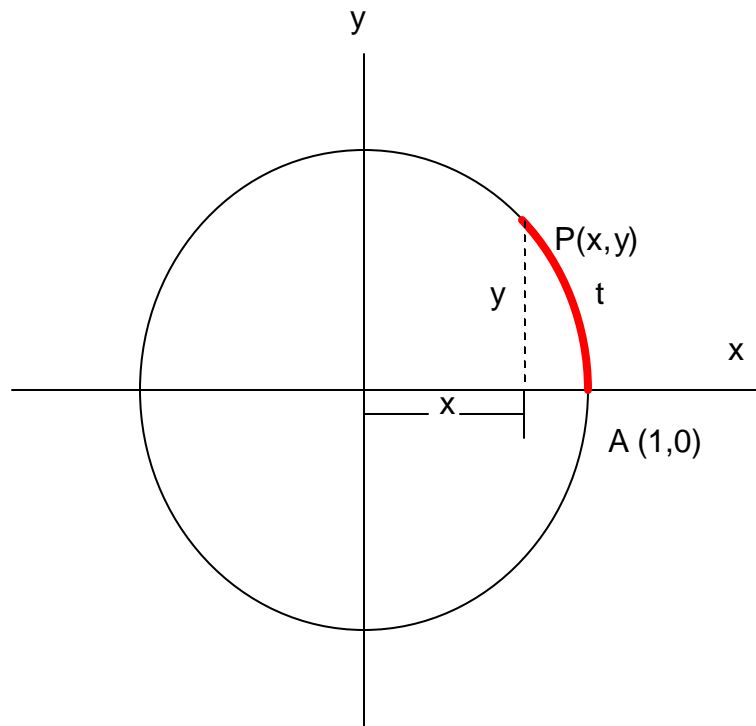
elevando ambos miembros al cuadrado obtenemos la ecuación general de la circunferencia con centro en (h,k) y radio r :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

3.2 FUNCIONES TRIGONÓMICAS

Sea C , la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$, con centro en el origen y radio 1. Designemos con A el punto $(1,0)$ y sea t cualquier número positivo. Entonces habrá exactamente un punto $P(x,y)$ sobre C , llamado punto trigonométrico, tal que la longitud del arco AP , medido en dirección contraria a las manecillas del reloj desde A y sobre el círculo unitario, sea t .

Figura 9. Punto trigonométrico.



La longitud de la circunferencia C es 2π , de modo que si $t \geq 2\pi$ se recorrerá más de una vuelta completa al trazar el arco AP . Si $t = 0$, $P = A$.

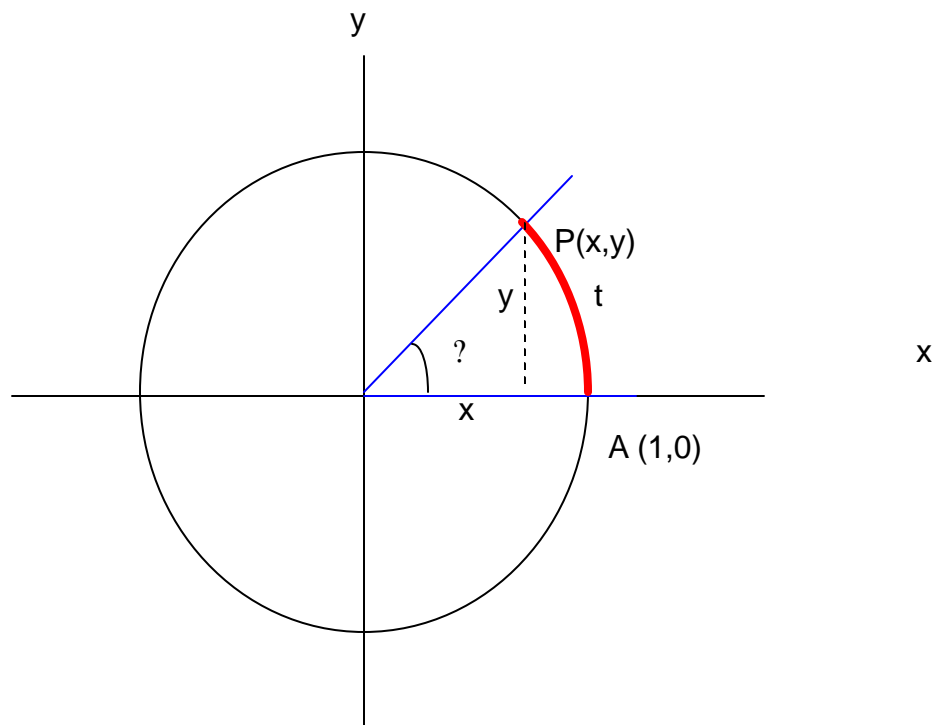
En forma similar si $t \leq 0$, habrá exactamente un punto $P(x,y)$ en el círculo unitario tal que la longitud del arco AP , medido en el sentido de las manecillas del reloj sobre C , sea $|t|$. Con esto, asociamos a cualquier número t un único punto $P(x,y)$. Esto nos permite definir finalmente las funciones trigonométricas seno y coseno, así:

DEFINICIÓN 15. Supongamos que t es un número real y tomemos un ángulo en posición normal θ , cuya medida en radianes es t , y sea $P(x,y)$ el punto de la intersección del lado terminal del ángulo, con la circunferencia unitaria con centro en el origen. Definimos la función **Seno** de tal manera que la imagen del ángulo θ es x , lo cual se denota $\text{sen}(\theta) = x$, lo cual equivale a decir que $(\theta, x) \in \text{sen}$. Por lo tanto, podemos afirmar que:

$\text{Sen} = \{(\theta, x) \mid \theta \text{ es un ángulo en posición normal } \wedge x \in \mathbb{R}\}$

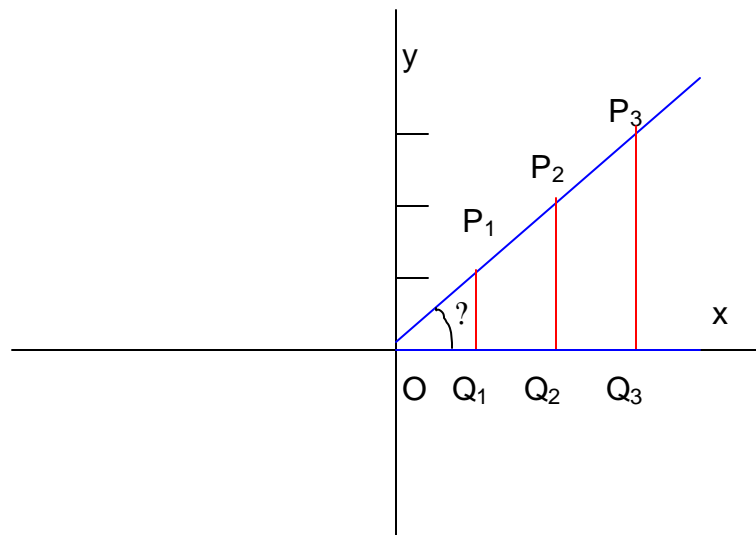
Así mismo, definimos la función **Coseno** de manera que la imagen del ángulo θ es y , lo cual se denota $\text{sen}(\theta) = y$, es decir, $(\theta, y) \in \text{cos}$.

Figura 10. Funciones trigonométricas



Consideremos un ángulo θ en posición normal y tomando tres puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ diferentes de $(0,0)$, como en la figura 11.⁶

Figura 11. Funciones trigonométricas



Como los triángulos OP_1Q_1 , OP_2Q_2 y OP_3Q_3 son semejantes, podemos establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{P_1Q_1}{OP_1} = \frac{P_2Q_2}{OP_2} = \frac{P_3Q_3}{OP_3} = \frac{y_1}{OP_1} = \frac{y_2}{OP_2} = \frac{y_3}{OP_3}$$

$$\frac{OQ_1}{OP_1} = \frac{OQ_2}{OP_2} = \frac{OQ_3}{OP_3} = \frac{x_1}{OP_1} = \frac{x_2}{OP_2} = \frac{x_3}{OP_3}$$

⁶ SÁNCHEZ, Darío y MUÑOZ, José. Álgebra y Trigonometría. Universidad Nacional. Bogotá, D.C. p. 109.

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$OP_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r_1$$

$$OP_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = r_2$$

$$OP_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = r_3$$

donde r_1, r_2 y r_3 son las distancias del origen a los puntos P_1, P_2 y P_3 .

Las proporciones que hemos establecido, significan que para un ángulo θ dado, sea cual fuere el punto $P(x,y)$, que se tome sobre su lado terminal, las razones y/r y x/r tienen siempre un mismo valor, es decir son constantes. Dichas razones son por definición las imágenes de f en las funciones sen y cos respectivamente, es decir,

$$\text{Sen } \theta = y/r$$

$$\text{Cos } \theta = x/r$$

Por tanto, en las funciones trigonométricas, a cada ángulo en posición normal se le hace corresponder uno y sólo un número real.

Ejemplo:

$\text{Sen } \theta = \frac{A}{R}$ $\theta = \text{sen } \theta = y/r$
--

$\begin{aligned} \text{Cos : } A & \text{ ————— } R \\ & ? \text{ ————— } \cos ? = x/r \end{aligned}$

Cuando $\text{sen } ?$ y $\text{cos } ?$ son distintos de 0 se pueden definir las funciones:

$$\text{Tangente } ? = \tan ? = \frac{\text{sen } ?}{\text{cos } ?}$$

$$\text{Cotangente } ? = \cot ? = \frac{\text{cos } ?}{\text{sen } ?}$$

$$\text{Secante } ? = \sec ? = \frac{1}{\text{cos } ?}$$

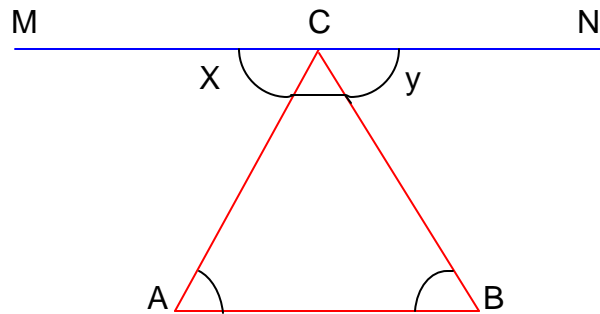
$$\text{Cosecante } ? = \csc ? = \frac{1}{\text{sen } ?}$$

Las seis funciones así definidas se llaman funciones trigonométricas.

Familiarizados con estos conceptos, podemos ahora centrarnos en nuestro objeto de estudio; el triángulo.

TEOREMA 2. *La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo equivale a 180° .*

Figura 12. Suma de los ángulos interiores en un triángulo.



Demostración. Sea ABC un triángulo cualquiera, tracemos por el vértice c un segmento MN paralelo a AB, entonces:

$$x + y + C = 180^\circ \quad (1)$$

por ser ángulos consecutivos en una recta.

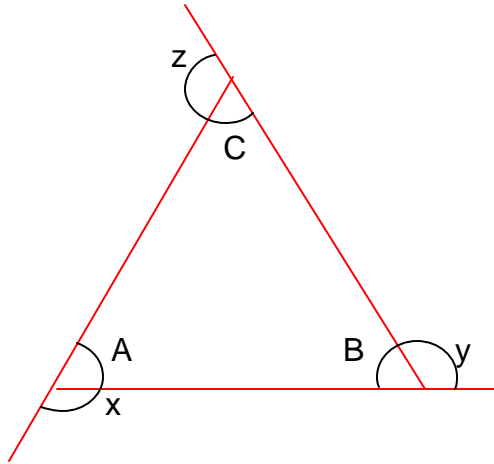
El ángulo x es igual al ángulo A y el ángulo y es igual al ángulo B, por ser alternos internos entre paralelas, entonces, sustituyendo en (1) tenemos:

$$A + B + C = 180^\circ$$

Corolario. *La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo equivale a 90° .*

TEOREMA 3. *La suma de los ángulos exteriores de un triángulo equivale a 360° .*

Figura 13. Suma de los ángulos exteriores en un triángulo.



Demostración. La suma entre los ángulos A y x es 180° , por ser ángulos adyacentes, análogamente la suma entre B e y, y la suma entre C y z., entonces:

$$A + B + C + x + y + z = 540^\circ \quad (1)$$

y sabemos del teorema anterior que:

$$A + B + C = 180^\circ$$

entonces sustituyendo en (1):

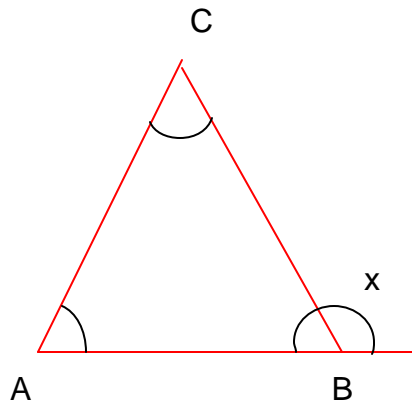
$$180^\circ + x + y + z = 540^\circ$$

$$x + y + z = 540^\circ - 180^\circ$$

$$x + y + z = 360^\circ$$

TEOREMA 4. *Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.*

Figura 14. Medida de un ángulo exterior en un triángulo.



Demostración. La suma entre los ángulos x y B es 180° , por ser ángulos adyacentes, entonces:

$$x + B = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - B \quad (1)$$

por el teorema 2 tenemos que:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$A + C = 180^\circ - B \quad (2)$$

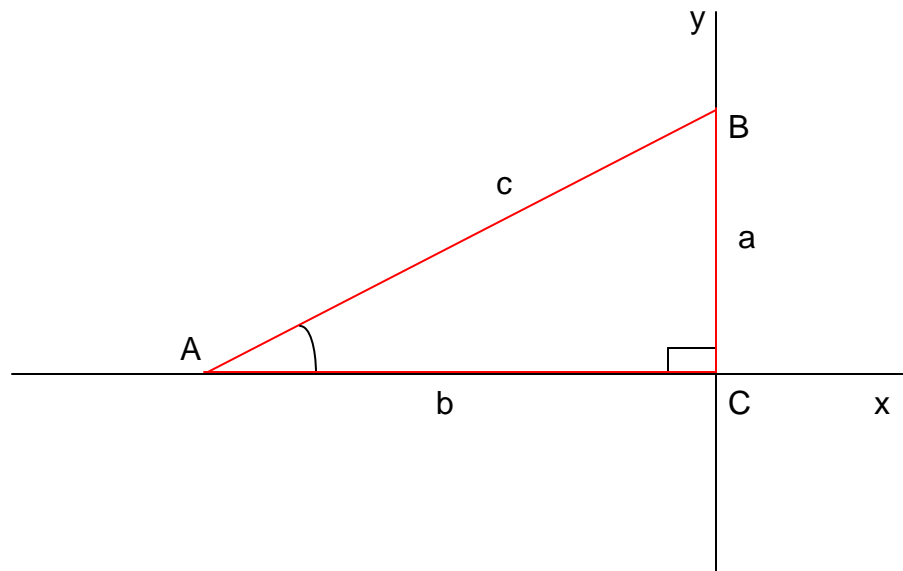
comparando (1) y (2) tenemos que:

$$x = A + C$$

3.2.1 Funciones Trigonómicas en un triángulo rectángulo. Si colocamos un triángulo rectángulo en un sistema de coordenadas rectangulares (figura 15), y el ángulo A en posición normal, las coordenadas del punto B, en el lado terminal del ángulo A, son (b,a) y su distancia es:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Figura 15. Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.



En estas condiciones, las funciones trigonométricas del ángulo A, pueden definirse en términos de los lados del triángulo rectángulo, como sigue:

$$\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cot } A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\text{cos } A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sec } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

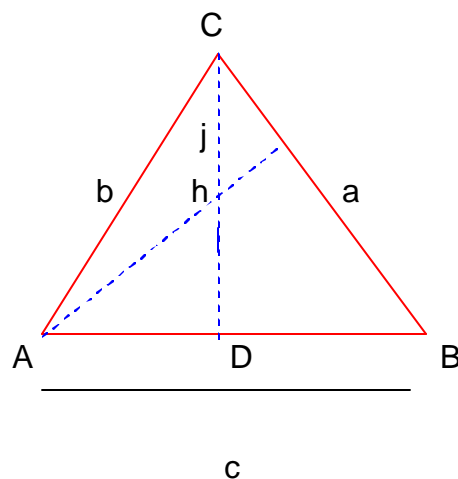
$$\csc A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

3.2.2 Funciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos. La trigonometría es de gran aplicación en la vida práctica, debido a que resuelve triángulos fácilmente, es decir, dados ciertos elementos de un triángulo nos permite encontrar los restantes. En algunos problemas es necesario resolver triángulos que no son rectángulos como los oblicuángulos, por esta razón la trigonometría nos brinda otra alternativa de solución llamada ley de los senos y ley de los cosenos.

3.3 LA LEY DEL SENO⁷

TEOREMA 5. La ley del seno. En un triángulo rectángulo cualquiera las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

Figura 16. Ley del seno



Para el triángulo ABC de la figura 16, la ley del seno establece que:

⁷ Ibid., p. 146.

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}.$$

Demostración. Tomemos un triángulo cualquiera ABC; la altura h, sobre el lado c, determina dos triángulos rectángulos.

En el triángulo ACD tenemos que:

$$\text{sen } A = \frac{h}{b}$$

y en el triángulo BCD tenemos que:

$$\text{sen } B = \frac{h}{a}$$

igualando h en las dos expresiones tenemos:

$$b \text{ sen } A = a \text{ sen } B$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

análogamente trazando la altura j, se deduce que:

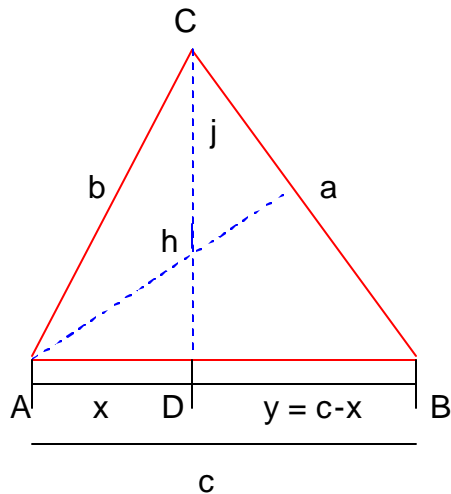
$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

El teorema del seno no es aplicable para resolver un triángulo del cual se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, por esta razón, se hace necesaria la introducción de una nueva relación entre los elementos del triángulo. Esta se conoce con el nombre de la ley del coseno.

3.4 LA LEY DEL COSENO⁸

TEOREMA 6. La ley del coseno. *El cuadrado de la longitud de un lado de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos, menos el doble producto de ellas por el coseno del ángulo comprendido entre éstos dos lados.*

Figura 17. Ley del coseno



Demostración. Dado un triángulo ABC (Figura 11), en el triángulo CDB:

$$a^2 = h^2 + y^2$$

es decir,

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2 = h^2 + x^2 - 2xc + c^2 = (h^2 + x^2) + c^2 - 2xc$$

pero en el triángulo ADC:

⁸ Ibid., p. 148.

$$h^2 + x^2 = b^2$$

$$\cos A = \frac{x}{b}$$

luego,

$$x = b \cos A$$

por tanto,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos A$$

Los ejercicios y problemas que incluyen triángulos rectángulos pueden resolverse directamente en el triángulo, sin necesidad de referirse a un sistema de coordenadas rectangulares.

4. FUNDAMENTACIÓN PEDAGÓGICA

Esta propuesta metodológica ha sido elaborada motivada y orientada por las interesantes ideas que hacen parte de los estándares internacionales para la educación matemática, que nacieron como respuesta a la petición de la comunidad educativa matemática para reformar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; con el fin de asegurar la calidad, explicitar objetivos y propiciar cambios significativos.

Los estándares internacionales plantean 5 objetivos muy claros para los estudiantes: 1. Aprender a valorar la matemática. 2. Estar seguros de su capacidad para hacer matemática. 3. Resolver problemas matemáticos. 4. Aprender a comunicarse matemáticamente. 5. Aprender a razonar matemáticamente. Estos objetivos nos invitan a presentar a nuestros estudiantes diferentes experiencias para que ellos mismos puedan darle solución a diversas situaciones problemáticas dentro de las cuales puedan entender y apreciar la importancia de las matemáticas en el mundo que los rodea; a desarrollar la capacidad para resolver problemas brindándoles todas las estrategias, recursos y herramientas que existan; a aprender a comunicarse matemáticamente a través de signos, símbolos, figuras y terminología matemática por medio de la resolución de un problema donde tienen la oportunidad de escribir, dibujar, discutir, plantear soluciones, haciendo uso del lenguaje matemático; y además a formular hipótesis, validar por medio de argumentos las soluciones que planteen a dicho problema aprendiendo de esta forma a razonar matemáticamente.

Por otro lado, el uso de las nuevas tecnologías en el aula constituye una excelente ayuda para el proceso de enseñanza – aprendizaje, no sólo por el hecho de facilitar los cálculos y ampliar los conocimientos a través del

análisis de gráficas, sino porque han hecho cambiar la naturaleza misma de los problemas que presentamos a nuestros estudiantes y los métodos que utilizamos para darle solución.⁹

Uniendo el uso adecuado de las nuevas tecnologías, con el enfoque de resolución de problemas, podemos crear una herramienta excelente para enfrentarnos al estudio de la trigonometría, donde lo interesante y realmente importante se gana resolviendo diversos problemas y no simplemente reemplazando fórmulas; reconociendo que es importante que los alumnos aprendan y dominen los algoritmos que surgen en las situaciones problemáticas y que a través del dominio de éstos se convierten en procesos rutinarios que fácilmente podrían hacerlo una calculadora o un computador; lo que es realmente interesante es que el estudiante entienda cómo lo hacen para que tenga sentido y no dependan necesariamente de éstos.

4.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

“Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de un problema, hay un cierto descubrimiento, el problema que se plantea puede ser modesto; pero si se pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo”¹⁰

Diversos problemas del mundo real, como en topografía, requieren la resolución de triángulos, objeto de estudio de la trigonometría, desafortunadamente la enseñanza de la trigonometría puede convertirse

⁹ Estándares Internacionales para la Educación Matemática. p. 8.

¹⁰ POLYA, George. Como plantear y resolver problemas. Editorial Trillos. México 1989. p. 2.

fácilmente en un proceso mecánico y rutinario donde el estudiante se limita a conocer una serie de fórmulas y a utilizarlas reemplazando ciertos datos para de esta forma obtener respuestas a ejercicios en los que no se pone en juego la creatividad, el ingenio, los conocimientos; donde no hay ningún tipo de análisis, de interpretación; causando en los estudiantes desinterés y desmotivación, desaprovechando por completo todo su potencial matemático.

Si por el contrario se pone a prueba la imaginación, planteando problemas adecuados donde no sólo dependan de fórmulas y datos ya conocidos, si no que a partir de todos sus conocimientos en geometría, álgebra y aritmética, puedan poner en juego todas sus habilidades, despertando el gusto por la forma en que piensan matemáticamente, podremos maravillarnos con los sorprendentes resultados. Un estudiante que logra solucionar problemas por sus propios medios, estará mejor preparado para enfrentarse a la vida y podrá sobrellevarla con seguridad.

Creo que todos estamos de acuerdo en que el proceso de enseñanza - aprendizaje debe posibilitar a los alumnos de experiencias donde adquieran la habilidad de interpretar y manejar datos, diseñar caminos de solución, utilizar adecuadamente las estrategias de solución, argumentar cada paso, cada idea y finalmente revisar y reexaminar la solución para darle validez.

En matemáticas se puede aprender conceptos acerca de números, resolver ecuaciones, graficar funciones etc..., pero eso no es desarrollar matemáticas. Hacer o desarrollar matemáticas incluye el resolver problemas, abstraer, inventar, probar y encontrar el sentido de las ideas matemáticas, es exactamente esto lo que plantea el enfoque de resolución de problemas.

La propuesta de aprender matemáticas que identifica a la resolución de problemas, reconoce a las matemáticas como un cuerpo de conocimientos no terminado. El estudiante en el aprendizaje de esta materia, discute estrategias, emplea ejemplos y contraejemplos, critica y valoriza los resultados, y comparte que la búsqueda de argumentos sólidos es esencial en la resolución de problemas.¹¹

No se aprende a resolver problemas por el hecho de haber aprendido algunos conceptos y algunos algoritmos de cálculo, se aprende a resolver un problema cuando se está en la capacidad de utilizar adecuadamente cada herramienta y cada técnica que se proporciona a los estudiantes para que puedan enfrentarse sin miedo y con calidad a cada problema, teniendo en cuenta que no es un problema todo lo que parece.

Pero, cuando hablamos de un problema, ¿a que nos estamos refiriendo exactamente? Para hablar de resolución de problemas, es importante que entendamos muy bien la diferencia que existe entre un problema y un ejercicio, porque existen ciertas características que le dan el reconocimiento de problema a algunos ejercicios.

Un problema matemático se caracteriza como un problema que requiere conocimientos matemáticos para resolverlo y que no existe un camino inmediato y directo para encontrar su solución. A diferencia del ejercicio donde conociendo el tipo de algoritmo que se utiliza, encontramos respuestas mecánicamente. En realidad resolver un problema es simplemente lo que hacemos cuando no sabemos que hacer.

¹¹ SANTOS TRIGO, Luz Manuel. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. 2º edición Editorial Iberoamericana. México, 1997. p.12.

Es importante destacar que los problemas que se planteen deben estar perfectamente estructurados para facilitar la comprensión del problema por parte del estudiante, no tan fáciles que no se despierte ningún interés en el estudiante y que no le aporte nuevos conocimientos o destrezas; ni tan difíciles que se convierta en una situación frustrante para el alumno causando una participación pasiva y desilusión en su propio proceso de aprendizaje. Una vez planteado el problema, debe presentarse en forma sencilla y atractiva, despertando el interés por resolverlo, aspecto indispensable en la resolución de problemas.

El desarrollo de esta monografía se realizará bajo el enfoque de resolución de problemas, para lo cual consideramos que el trabajo de Polya que se presenta a continuación es muy influyente:

4.1.1 El trabajo de Polya.¹² En el proceso de resolver problemas Polya identifica las siguientes etapas fundamentales en las que el uso de métodos heurísticos juega un papel importante:

1. Comprender el problema. El alumno debe entender exactamente que es lo que pide el problema; es decir, hacer una correcta interpretación del enunciado, familiarizarse con el problema, clasificar las partes del problema: datos, incógnitas, condiciones; utilizar estrategias como dibujar una gráfica o hacer un diagrama e introducir la notación adecuada. Para esto el profesor debe escoger y plantear el problema adecuadamente y tomarse un tiempo para exponerlo de forma natural e interesante.

¹² POLYA, George. Opcit. p.28.

2. Concebir un plan. Cómo lo vamos a hacer. El alumno debe desarrollar la capacidad de relacionar los datos con la incógnita, encontrando un camino para la solución, utilizando todos sus conocimientos previos; pensando en problemas análogos más sencillos que puedan ayudarnos a encontrar la solución; o simplificando el problema a casos especiales.
3. Ejecutar el plan. En esta etapa el alumno desarrolla su plan de solución, asegurándose de argumentar y verificar cada paso ya sea por intuición o por demostración, para no cometer errores.
4. Visión retrospectiva. En esta etapa el alumno examina y reconsidera la solución propuesta y el camino que le condujo a dicha solución.

Si la resolución de un problema es una aventura, los recuerdos de esa aventura, es lo que nos irá quedando como habilidad de resolución. Para resolver un problema no sólo contamos con conocimientos específicos y generales, con diversas estrategias y herramientas de solución, también es importante resaltar el papel de nuestro pensamiento y como podemos someterlo a un entrenamiento para que realice su función de una manera más eficaz.

¿Podemos mejorar nuestra forma de pensar?. Es obvio que en este aspecto mejoramos continuamente desde nuestra infancia hasta nuestra edad adulta. Somos capaces de enfrentarnos con éxito a problemas más profundos. Nuestros procesos de pensamiento van mejorando espontáneamente, colocados en el ambiente familiar y escolar, comunicándonos unos con otros, niños y adultos, enfrentados a diversas tareas que estimulan nuestra actividad, nuestra creatividad, nuestra curiosidad y nuestro afán de

exploración, vamos adquiriendo destrezas como por ósmosis destrezas de todas clases, entre ellas la de pensar correctamente ante ciertas tareas.¹³

4.2 USO DE LA NUEVAS TECNOLOGÍAS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

El mundo ha evolucionado tecnológicamente a través del tiempo de forma significativa, tanto así que la educación actual tiene diversas posibilidades de aprovechar cada una de estas herramientas con el fin de brindar una excelente educación a los alumnos que esté acorde con lo que se vive actualmente.

El uso de un computador ó de una calculadora científica se convierte en un medio efectivo para incentivar la motivación para el estudio de las matemáticas; sin olvidar que el trabajo que se realiza con lápiz y papel es muy importante y de éste depende todo lo que podamos conseguir a través de otros medios.

Conscientes de la necesidad de estudiar éste fenómeno en pro de la calidad de la enseñanza de las matemáticas y de generar estrategias didácticas para incorporar los recursos que la tecnología pone al alcance de las instituciones educativas, la Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media del Ministerio de Educación Nacional, inició en Marzo de 2000, el desarrollo de la fase piloto Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia en 60

¹³ GUZMÁN, Miguel de. Para pensar mejor. Editorial Labor S.A. 1991. p.1.

instituciones educativas de 17 departamentos y 3 distritos capitales de Colombia.¹⁴

Incorporar el uso de las nuevas tecnologías en el aula no es tarea fácil, no basta conocer y aprender a manejar un programa de computador ó el manejo de una calculadora, lo realmente interesante es que el docente aprenda a construir situaciones problemáticas, donde la tecnología se convierta en una herramienta fundamental para el trabajo. Es precisamente lo que busca dicho proyecto: formar docentes con esta capacidad, a través de la cual se esperan cambios en las prácticas educativas usuales y pueda modificar sustancialmente el currículo.

Por otra parte, la incorporación generalizada de nuevas tecnologías en la realidad social y productiva introduce nuevos instrumentos y recursos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y, al mismo tiempo, crea la necesidad de desarrollar en el alumnado una actitud abierta hacia su utilización como herramientas imprescindibles en sus futuras actividades profesionales. Este hecho hace totalmente necesario la utilización de estos medios a lo largo del Bachillerato, creando en cada estudiante una actitud crítica hacia los mismos y potenciando su capacidad para utilizarlos, de manera correcta, cuando la situación estudiada lo haga necesario.

Asumir el reto de incorporar la tecnología en el aula, nos conduce a profundizar en nuestros conocimientos matemáticos y a cuestionar nuestra práctica educativa.

4.2.1 Cabri Geometry. El estudio de la geometría plana y espacial constituye un bloque de contenidos muy importantes en la enseñanza

¹⁴ Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Bogotá, D.C., Colombia. Diciembre 2001 – Enero 2002. p. XVII.

matemática. Gran parte de estos contenidos pueden ser introducidos con la ayuda del software Cabri Geometry que permite crear un ambiente de exploración en el que el estudiante puede asumir un rol activo en el descubrimiento del conocimiento matemático dibujando figuras y manipulando las construcciones dinámicamente.

CABRI GEOMETRY es un programa que permite explorar la geometría de forma interactiva y es la posibilidad de construir geometría dinámica. Es propiedad de la casa americana TEXAS INSTRUMENTS, la palabra CABRI es un anagrama de CAhier de BRouillon Interactive, es decir "cuaderno interactivo". Construye figuras geométricas fácilmente como si se hiciera con un lápiz, regla y compás sobre una hoja de papel. La característica principal de este programa es su dinamismo; manteniendo las propiedades básicas de una figura cuando se desplazan sobre la pantalla los objetos iniciales sobre los cuales ha sido construida la figura. Así es posible recorrer de manera instantánea una infinidad de posiciones y configuraciones diferentes de una figura geométrica, logrando una visión dinámica de esa figura mucho más rica, interesante y atractiva que la obtenida en el contexto tradicional de la pizarra o el papel.

Cabri Geometry es un programa que permite "hacer geometría" tanto al estilo sintético como al estilo euclídeo. Permite experimentar, analizar situaciones geométricas de muy diverso tipo, permite comprobar resultados, inferir, refutar y también, aunque parezca mentira, permite demostrar. El manejo del software es sencillo ya que desde los primeros pasos es posible diseñar elementos básicos: puntos, líneas, circunferencias, polígonos, etc. La dificultad de las situaciones proviene en la mayoría de los casos de la complejidad de la situación o de la traducción de nuestra ideas a la calculadora.

En lo que se refiere a contenidos geométricos escolares, el trabajo se inicia con el manejo de conceptos elementales para la construcción de figuras geométricas como si se hicieran con lápiz y compás. Estos se realizan sobre la pantalla del software y conforme avanza el trabajo se introduce la medida, los movimientos en el plano y algunas herramientas avanzadas como es la facilidad para construir lugares geométricos, la posibilidad de producir animaciones o la facilidad para la presentación de resultados.

Entender que debemos capacitar a los estudiantes para la vida, es uno de los objetivos de esta monografía; por esta razón la resolución de problemas y el uso de la nuevas tecnologías constituirán el medio para lograr un aprendizaje con sentido acerca de nuestro objeto de estudio: **“LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS, LA LEY DEL SENO Y LA LEY DEL COSENO EN EL TRIÁNGULO”**

5. METODOLOGÍA

Para el desarrollo de esta monografía se contará con la participación de los estudiantes de décimo grado del colegio las Américas, institución oficial de Bucaramanga. En esta institución se está desarrollando actualmente el Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia, el cual ha permitido que los estudiantes conozcan y manejen el programa Cabri Geometry y la calculadora TI-92 plus, proporcionando una gran ventaja para el desarrollo de esta monografía.

Esta propuesta pretende por medio de diversas actividades cumplir con los objetivos propuestos, de esta manera:

En primer lugar se realizará la revisión bibliográfica correspondiente, con el fin de fundamentar teórica y metodológicamente esta propuesta.

En segundo lugar, se diseñará y se aplicará una prueba diagnóstica con el fin de conocer las posibles dificultades y los errores más comunes que presentan los estudiantes, trabajando con triángulos.

Se diseñarán y se aplicarán diferentes talleres, basados en el enfoque de resolución de problemas y el uso de las nuevas tecnologías empleando el programa Cabri Geometry.

Se realizará el análisis correspondiente a cada taller, a partir de la observación directa y registro en el cuaderno de notas, de aspectos significativos.

6. DESARROLLO DE LA PROPUESTA

Esta propuesta metodológica se desarrollará a través de 3 actividades principales:

1. Prueba diagnóstico. Para determinar las necesidades y expectativas de los estudiantes con relación al tema a desarrollar.
2. Talleres de aplicación. Para presentar a los estudiantes actividades dinámicas que le permitan el aprendizaje de las relaciones trigonométricas, la ley del seno y la ley del coseno en el triángulo, mediante la reflexión y el análisis de características.

En cada una de estas actividades se tendrán en cuenta las siguientes etapas:

- ? Diseño y elaboración: Descripción del proceso de elaboración de cada taller.
- ? Protocolo: Análisis de la situación observada en cada taller, teniendo en cuenta el registro en el cuaderno de notas de aspectos significativos.
- ? Análisis de Resultados: Análisis de los logros y las dificultades presentadas por los estudiantes en el desarrollo de cada actividad. Para evaluar los alcances de la propuesta.
- ? Conclusiones: Resultados y aspectos significativos del desarrollo de las actividades.

7. TALLERES DE APLICACIÓN

7.1 PRUEBA DIAGNÓSTICO

PRUEBA DIAGNÓSTICO

GRADO 10
COLEGIO LAS AMÉRICAS

NOMBRE: _____

Para el desarrollo de la siguiente prueba usted necesita: lápiz, borrador, escuadras, transportador, todas sus habilidades y creatividad para poner a prueba sus conocimientos matemáticos relacionados con el interesante estudio de la trigonometría.

I. Responda Falso o Verdadero a cada una de las siguientes proposiciones y justifique todas sus respuestas.

? Todo triángulo equilátero es isósceles. _____

? En todo triángulo equilátero la suma de sus ángulos agudos es 180° . _____

? La mediana en un triángulo rectángulo es el segmento de recta que va de uno de los vértices al lado opuesto y es perpendicular a él. _____

? En todo triángulo la altura divide al triángulo en 2 triángulos rectángulos congruentes. _____

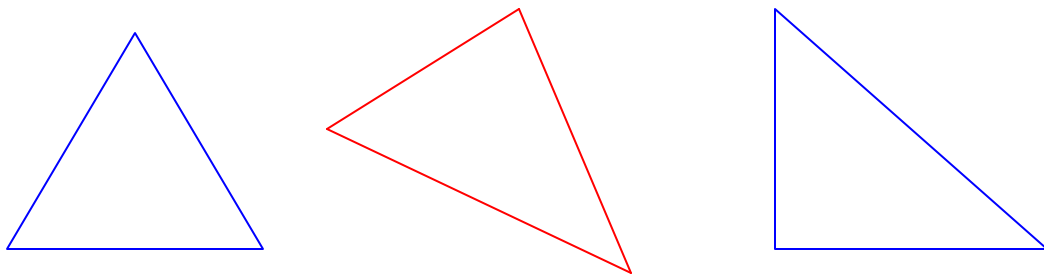
? Todo triángulo isósceles tiene exactamente 2 ángulos congruentes. _____

? Si dos ángulos son adyacentes entonces son congruentes. _____

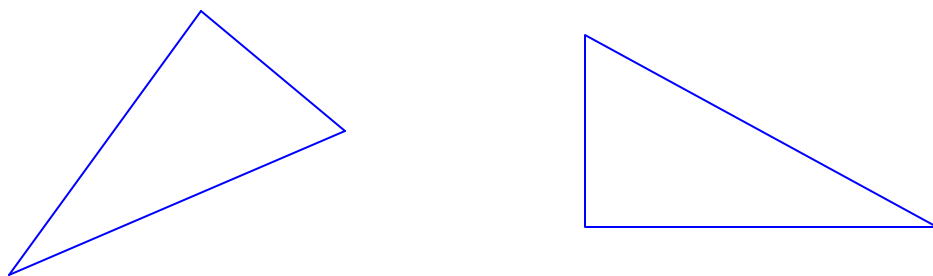
? Si un triángulo tiene 2 lados congruentes entonces todos sus ángulos serán también congruentes. _____

? Cuando dos rectas se cortan los ángulos que se forman a partir del vértice son adyacentes. _____

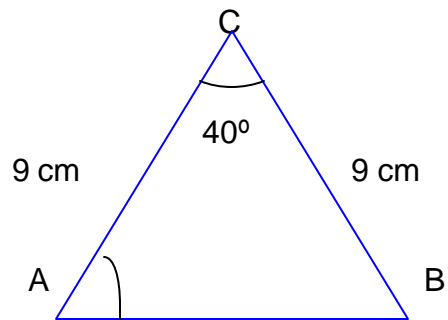
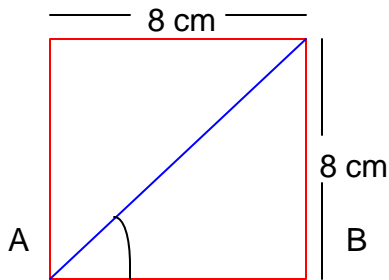
II. Utilice el transportador y encuentre la medida de los ángulos de los siguientes triángulos y complete utilizando su intuición la proposición: “ La suma de la medidas de los ángulos interiores de un triángulo es _____ ”



III. Dibuje las alturas de los siguientes triángulos. ¿cuántos triángulos rectángulos diferentes puede encontrar en cada uno de ellos?.



IV. Por medio de su intuición calcule el valor de los ángulos A y B en las siguientes figuras.

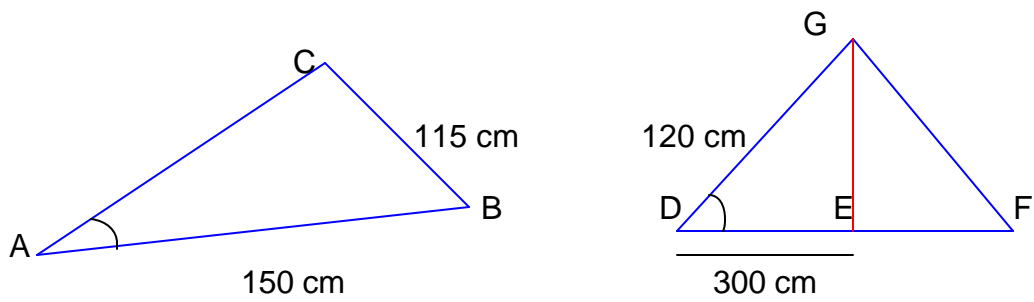


V. En un triángulo rectángulo se cumple que:

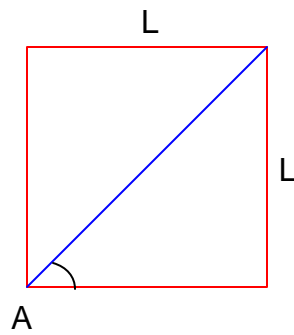
$$\text{Seno } A = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Coseno } A = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

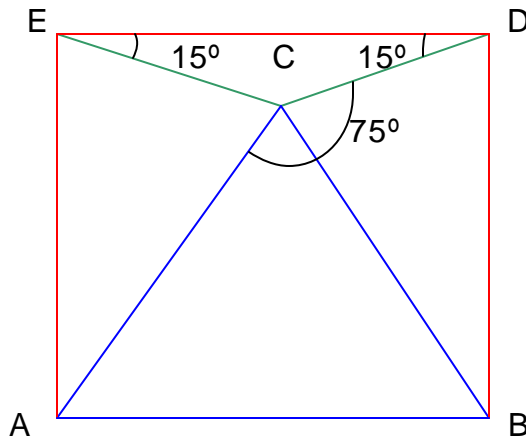
A partir de la definición anterior calcule el valor de los ángulos A y D en las siguientes figuras; teniendo en cuenta que el segmento BC es perpendicular al segmento AC y el segmento EG es perpendicular al segmento DF.



VI. Compruebe a partir de la definición anterior que $\text{Sen } A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en la siguiente figura.



VII. ¿En el cuadrado ABDE de la figura, el triángulo ACB es un triángulo equilátero?
¿Por qué?



7.1.1 Diseño y elaboración. La siguiente prueba diagnóstica ha sido diseñada con el fin de recolectar información suficiente para identificar las causas de las posibles dificultades que presentan los estudiantes de décimo grado del colegio las Américas, cuando se enfrentan a ejercicios y problemas relacionados con el estudio de funciones trigonométricas en el triángulo. Esta prueba se convertirá en la base principal para el desarrollo de esta monografía, ya que a partir de los resultados obtenidos, se plantearán alternativas de solución a cada una de estas dificultades logrando así un verdadero aprendizaje. La prueba diagnóstica ha sido elaborada dependiendo de los conceptos e ideas matemáticas que vamos a utilizar, utilizando ejercicios interesantes donde la buena utilización de algunos pre-conceptos es indispensable. Esta prueba se elaboró con especial cuidado tratando de no convertirla en un proceso frustrante para los estudiantes que inician el proceso.

7.1.2 Protocolo de la situación. La aplicación de la prueba diagnóstica se realizó dentro del aula de clase a 15 estudiantes de décimo grado del colegio las Américas, después de una breve introducción acerca del trabajo a realizar. Se realizó en forma individual, sin ningún tipo de ayuda por parte del profesor y sin la posibilidad de hacer preguntas, utilizando recursos como: transportador, escuadras, lápiz y borrador. Los estudiantes estuvieron concentrados y trataron de resolver cada una de las preguntas, se veían un poco nerviosos, algunos un poco desinteresados y desconectados del tema; otros trabajaron con empeño.

7.1.3 Análisis de resultados. A partir de una detallada calificación de las pruebas diagnósticas aplicadas a los estudiantes pudo observarse fácilmente, la carencia de conceptos básicos y fundamentales sobre triángulos y la deficiente aplicación de cada uno de éstos. Más específicamente pudo observarse lo siguiente:

- ? Los estudiantes conocen 3 tipos de triángulos diferentes: isósceles, escaleno y equilátero, pero no hay claridad en cada concepto, no conocen las propiedades de cada uno de ellos y no pueden establecer relaciones entre ellos.

- ? Conocen la propiedad que cumplen todos los triángulos respecto a la medida de sus ángulos interiores, pero no pueden demostrarlo, es sólo una frase agregada a sus preconceptos, pero no reconocen la importancia de este teorema.

- ? No identifican las alturas de un triángulo y menos cuando se trata de un triángulo donde la base no ha sido definida. No reconocen la importancia del concepto de perpendicularidad y por esta razón no pueden asociarlo con ningún ejercicio.

- ? No utilizan las propiedades de los ángulos, ni de los triángulos para llegar a la solución de algunos ejercicios, es decir tratan de resolverlos sin tener en cuenta propiedades, preconceptos, teoremas, definiciones, etc.

- ? Conocen el teorema de Pitágoras, pero no pueden darle una buena aplicación, no hay facilidad para relacionar el teorema con un determinado ejercicio.

- ? Son excelentes reemplazando datos en fórmulas, pero si en el ejercicio se rompe la rutina y se presenta de otra forma, surgen dificultades para identificar los elementos que intervienen.

- ? Los estudiantes carecen de la capacidad para justificar y argumentar sus respuestas.
- ? Los alumnos no saben leer. Por esta razón no entienden lo que se les pregunta.

7.1.4 Conclusiones. Hay deficiencia tanto en conceptos, como en la aplicación de dichos conceptos, no pueden establecer relaciones entre ellos y se les dificulta asociarlos con un determinado problema, debido a esto no hay ningún tipo de argumentación para justificar sus procedimientos.

Teniendo en cuenta cada una de las necesidades de los estudiantes, se realizará a continuación un estudio detallado para encontrar la forma más adecuada de brindarle a los estudiantes la posibilidad de llenar todas sus expectativas. Es importante desarrollar en el estudiante estas capacidades y ayudarles a superar todas sus dificultades con el fin de formar individuos integrales que en una situación determinada puedan aplicar de forma adecuada sus saberes para darle solución.

7.2 TALLER No. 1

TALLER No. 1

CABRI GEOMETRY

“Cabri Geometry es un software educativo que permite crear un ambiente de exploración en el que se puede asumir un papel activo en el descubrimiento del conocimiento matemático, dibujando figuras y manipulando las construcciones dinámicamente”

Apreciado estudiante:

El estudio de la trigonometría constituye un bloque de contenidos muy importantes en el aprendizaje de las matemáticas. Gran parte de estos contenidos pueden ser introducidos con la ayuda del software Cabri Geometry, un programa que permite explorar la geometría de forma interactiva. Los contenidos a desarrollar en los próximos talleres han sido seleccionados teniendo en cuenta las necesidades y expectativas observadas en la evaluación diagnóstica que se le practicó en días anteriores.

El objetivo de la propuesta a desarrollar es programar actividades dinámicas que le permitan aprender trigonometría mediante la reflexión y el análisis de características de los objetos geométricos involucrados y las relaciones entre sus elementos.

Veamos como funciona el programa que ahora tiene en sus manos. Éste cuenta con 8 menús llamados funciones (F1 a F8) como se puede observar en la calculadora. Cada una de estas funciones contiene diferentes herramientas de las cuales se deben tener en cuenta:

- F1 Puntero:** Selecciona, mueve y manipula objetos.
- F2 Punto sobre objeto:** Construye un punto sobre un objeto definido.
Punto de intersección: Construye un punto sobre la intersección de dos objetos seleccionados.
Recta: Construye una recta a través de un punto y dándole dirección con el cursor.
Segmento: Construye un segmento definido por dos puntos.
- F3 Circunferencia:** Construye una circunferencia definida por un punto, un centro y un radio.
Arco: Construye un arco definido por un punto inicial, un punto de radio y un punto final.
Triángulo: Construye un triángulo definido por tres puntos (vértices).
Polígono: Construye un polígono de n lados, el punto inicial debe coincidir con el punto final. (Cerrando el polígono).
Polígono regular: Construye una circunferencia definida por un centro y un radio especificado, y con el cursor se determina el número de lados.
- F4 Recta perpendicular:** Construye una recta perpendicular a una recta o segmento a través de un punto.
Recta paralela: Construye una recta paralela a una recta o segmento a través de un punto.
Punto medio: Construye un punto medio de dos puntos, un segmento o un lado de un polígono.
Compás: Construye una circunferencia desde un centro con un radio definido por un segmento a la distancia entre dos puntos seleccionados.
Transferencia de medidas: Crea puntos en objetos específicos basados en valores numéricos.
- F6 Distancia y longitud:** Muestra la distancia entre los dos puntos o la longitud de un segmento, perímetro, circunferencia o radio.
Área: Muestra el área de un polígono.
Angulo: Muestra la medida de un ángulo definido por tres puntos.
Calcular: Abre la calculadora para efectuar operaciones.
- F7 Ocultar / mostrar:** Oculta o muestra objetos seleccionados.
- F8 Abrir:** Abre un archivo ya existente.
Guardar como: Guarda archivos de construcciones.
Nuevo: Crea un archivo nuevo.
Borrar: Borra un objeto seleccionado.

Actividad No. 1. UTILICE SU CREATIVIDAD.

Construya utilizando las herramientas de *Cabri Geometry* un diseño para la siguiente situación:

Pedro y Pablo viven en 2 casas separadas. Cada día se citan en el punto medio del camino recto que une sus casas y pasean por un camino que se encuentra siempre a la misma distancia de las 2 casas. Elabore el diseño. Desplace los puntos que representan las casas y observe como se modifica la construcción. Guarde la construcción en un archivo llamado: Act1. ¿Qué comandos fueron empleados para esta construcción? ¿Cómo se verifica que las distancias siempre son iguales?

Actividad No. 2. CONSTRUYA UN TRIÁNGULO.

Construya un triángulo *ABC*. Cada vez que oprimimos la tecla *ENTER* aparecerá un punto que indicará cada vértice del triángulo, inmediatamente podemos dar nombre a cada vértice tecleando la letra correspondiente y nuevamente *ENTER*. Continúe desplazando el cursor para seguir marcando los otros dos vértices del triángulo en la misma forma y realice lo siguiente:

1. Desplace los vértices, el triángulo y las etiquetas (nombre de los vértices) ¿Qué sucede en cada desplazamiento?
2. Mida cada uno de los ángulos. Cada ángulo se mide marcando tres puntos en el siguiente orden: sobre el lado inicial del ángulo, sobre el vértice y sobre el lado final del ángulo.
3. Halle la distancia de cada uno de los lados del triángulo, halle el perímetro y el área del triángulo.

Actividad No. 3. SORPRÉNDASE.

1. Represente una circunferencia, mida su longitud.
2. Trace una recta que pase por el centro de la circunferencia, marque los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta.
3. Trace un segmento sobre la recta construida para representar el diámetro de la circunferencia. Médalo y oculte la recta.
4. Con la opción calcular halle el resultado del cociente entre la longitud de la circunferencia y la longitud del diámetro. ¿Porqué obtenemos el número ??

Actividad No. 4. CONSTRUYA UN CUADRADO.

1. Trace un segmento *AB* y una recta perpendicular a éste que pase por *A*.
2. Trace una circunferencia con centro en *A* y radio *AB*. Encuentre el punto de intersección *D* entre la circunferencia y la recta perpendicular.

3. Trace una paralela al segmento AB que pase por este punto D.
4. Trace una perpendicular al segmento AB que pase por B, halle el punto de intersección C de las dos últimas rectas trazadas.
5. Construya un polígono que pase por los puntos A, B, C y D. (No olvide cerrar el polígono).
6. Utilice las herramientas que le ofrece la calculadora para comprobar que se ha construido un realmente un cuadrado.
7. En F4 se encuentra la opción macro construcción para construir un modelo que me genere cualquier cuadrado a partir de los objetos iniciales.
Objetos iniciales: A y B. (señálelos), objetos finales: el polígono ABCD (señálelo). Definir macro: Llámela como quiera y pulse Enter. En variable digite cuadrado y pulse Enter.

Actividad No. 5. CONSTRUYA UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO.

1. Construya un segmento AB.
 2. Construya dos circunferencias una con centro en A y radio AB, y otra con centro en B y radio AB.
 3. Marque el punto de intersección C de las dos circunferencias.
 4. Construya un triángulo con vértices en A, B y el punto C.
 5. Oculte las dos circunferencias.
 6. Utilice las herramientas que le ofrece la calculadora para comprobar que se ha construido realmente un triángulo equilátero.
 7. Mida cada uno de los ángulos del triángulo equilátero. ¿Qué ocurre?
 8. ¿Sucede esto con otros triángulos?. Verifíquelo.
 9. Construya la macro del triángulo equilátero colocando como objetos iniciales a los puntos A y B y como objetos finales el triángulo. Guárdelo con el nombre "TRIAN".
-

7.2.1 Diseño y elaboración. El estudio de la trigonometría constituye un bloque de contenidos muy importantes en el aprendizaje de las matemáticas. Gran parte de estos contenidos pueden ser introducidos con la ayuda del software Cabri Geometry, un programa que permite representar figuras planas y manipular construcciones dinámicamente.

Este taller pretende aportar una breve introducción al manejo del programa, enfocado a aplicaciones relacionadas con nuestro objeto de estudio,

motivando a los estudiantes por medio de la utilización de la tecnología, al estudio de esta parte de la trigonometría.

El taller se inicia con una breve explicación sobre cada una de las herramientas que ofrece el programa y su respectivas funciones.

Los estudiantes deben desarrollar 5 actividades con el fin de utilizar diferentes herramientas a partir de la información de cada situación. También se incluye actividades con triángulos para desarrollar habilidad en su construcción, medida de sus ángulos y sus lados y cálculo de perímetro y área necesarios para el desarrollo de esta propuesta metodológica.

La tercera actividad involucra la obtención del número π a partir de la longitud de la circunferencia y el diámetro de la misma, con el fin de motivar a los estudiantes por medio de actividades como ésta, donde todo lo que aprenden tiene sentido y relación.

Al finalizar se incluyen 2 actividades relacionadas con la construcción de un cuadrado y un triángulo equilátero, con el fin de que los estudiantes puedan comprobar que se originan realmente dichas figuras, descubriendo geoméricamente el porqué de dichas construcciones.

El taller ha sido diseñado para motivar, enseñar y sorprender de alguna manera a los estudiantes. (Ver anexo B).

7.2.2 Protocolo de la situación. Los alumnos recibieron el material de trabajo y se prepararon para desarrollar el taller, después de realizar la lectura correspondiente a la introducción del taller. A medida que se iba solucionando cada punto se hacía la socialización correspondiente, para no dejar escapar aspectos significativos de cada situación.

El taller se convirtió en un trabajo agradable para los estudiantes, pudieron trabajar con la mayoría de las herramientas de Cabri y descubrir en que forma se convierte en un programa interactivo.

En la actividad 1, tuvieron la oportunidad de interpretar la información y construir un diseño que representara una situación específica, la mayoría lo lograron, y pudieron verificar por medio de las herramientas de Cabri, que su diseño era correcto y que la igualdad entre las distancias se conservaba, pese a cambiar las condiciones iniciales del problema. Algunos alumnos tuvieron dificultad en la interpretación de la información, y no pudieron hacer una construcción adecuada; después de releer detenidamente el problema, y con ayuda de algunas ideas expuestas por los compañeros, lo lograron.

En la actividad 2, trabajaron con un triángulo identificando sus elementos principales y hallaron sus medidas. Descubrieron que a partir de diferentes desplazamientos de los vértices, el triángulo se deforma generando nuevos triángulos y así mismo nuevas medidas y mayores opciones de reflexión.

En las actividades 3, 4 y 5 realizaron construcciones de tres figuras diferentes con su respectiva macro construcción, comprobando su perfección a partir de las herramientas de la calculadora; tuvieron la oportunidad de explorar dichas figuras, establecer relaciones, sacar diferentes conclusiones y verificar algunas propiedades a partir de la interactividad en las construcciones.

Notablemente la motivación en los estudiantes estuvo presente, hacían preguntas, sacaban conclusiones, se veían alegres y con entusiasmo, sus informes no fueron muy ordenados pero en la socialización realizada después de cada actividad y en las construcciones que realizaron demostraron el esfuerzo con el que trabajaron.

7.2.3 Análisis de resultados. En el desarrollo de este taller se obtuvieron los siguientes resultados:

- ? Los estudiantes conocieron el funcionamiento del programa a partir de la exploración de cada una de las herramientas.
- ? Descubrieron como a partir de una situación particular se puede llegar a una general por medio de desplazamientos para generar mayores opciones de reflexión. Además pudieron relacionar conceptos de un triángulo a partir de una aplicación práctica, donde la buena interpretación de la información era indispensable.
- ? Aprendieron a utilizar correctamente cada comando, para que la construcción se conservara pese a los desplazamientos o modificaciones realizadas.
- ? El número π era simplemente un valor: 3,14. Por medio de esta actividad pudieron observar con que elementos está relacionado, y que es un valor aproximado, el valor real es mucho más complejo.
- ? Observaron por medio de modificaciones que el valor de π es el mismo a pesar de cambiar el radio de la circunferencia. Estudiaron el concepto de longitud de una circunferencia.
- ? Verificaron las propiedades de un cuadrado a partir de su construcción en Cabri y descubrieron porque esta construcción origina exactamente un cuadrado. Observaron como a partir de esta construcción el cuadrado conserva sus características, a pesar de cambiar las condiciones iniciales.

- ? Verificaron las propiedades del triángulo equilátero, descubriendo que la medida de cada uno de sus ángulos es 60° para cualquier triángulo equilátero y que además es una propiedad exclusiva de los triángulos equiláteros. Descubrieron geoméricamente porque esta construcción origina un triángulo equilátero.

7.2.4 Conclusiones. El desarrollo de este taller generó motivación en los estudiantes, constantes cuestionamientos, curiosidad y entusiasmo en cada una de las actividades; objetivos principales del taller, por esta razón la aplicación del taller fue todo un éxito.

Se logró capacitar a los estudiantes con respecto al funcionamiento del programa y dar una visión amplia de las ventajas de introducirlo en la enseñanza de la trigonometría. Se logró de alguna manera crear un ambiente de exploración a través de manipulación de figuras y construcciones, mostrando el carácter interactivo y dinámico de este programa.

7.3 TALLER No. 2

TALLER No. 2

EL TRIÁNGULO

La trigonometría tiene su origen en el estudio de las medidas del triángulo, diversos problemas del mundo real incluyendo problemas de navegación y topografía requieren la resolución de triángulos, por esta razón la relación que existe entre la geometría y la trigonometría se hace intensamente necesaria.

Actividad No. 1

En el programa *Cabri Geometry* realice lo siguiente:

1. Construya un triángulo isósceles. Describa el procedimiento empleado para la construcción. ¿Qué propiedades se cumplen en un triángulo isósceles. Utilice la calculadora para explorar.
2. Construye un triángulo escaleno. ¿Es posible construir un triángulo escaleno con 2 ángulos congruentes? Inténtelo.
3. ¿Qué sucede con los ángulos en un triángulo escaleno?

Actividad No. 2

1. Construya un triángulo cualquiera ABC. Marque y mida los ángulos interiores A, B y C del triángulo. Con la opción calcular sume la medida de dichos ángulos. ¿Qué ocurre? ¿Sucede esto con otros triángulos? Verifíquelo.
2. Si el triángulo es rectángulo, ¿qué sucede con la suma de las medidas de los ángulos que no son rectos?
3. Construya una recta, sobre uno de los segmentos del triángulo. Mida cada uno de los ángulos que se forman con la recta y los lados del triángulo. Llámelos D y E respectivamente.
4. Arrastre uno de los vértices, tome los datos de 4 triángulos diferentes (incluyendo un triángulo rectángulo isósceles y un triángulo equilátero) y complete la siguiente tabla:

Triángulo No	? A	? B	? C	? D	? E
1					
2					
3					
4					

5. ¿Qué relaciones se pueden encontrar en los ángulos de un triángulo?

Actividad No. 3

1. Construya un triángulo cualquiera ABC, marque un punto H en el interior del triángulo.
2. Una cada uno de los vértices del triángulo con el punto H.
3. Construya los 3 triángulos que se han formado. Calcule el área de cada triángulo. Teniendo en cuenta que Cabri guarda cada elemento de la construcción en el orden en que se hizo la construcción.

4. Desplace el punto H hasta que dos de los triángulos sean iguales.
5. ¿Qué se necesita para que los triángulos sean iguales? Utilice las herramientas de la calculadora para comprobar que son iguales.
6. Establezca una proposición relacionada con la congruencia de triángulos.

Actividad No. 4

Construya dos triángulos de manera que dos lados y el ángulo comprendido entre ellos sean respectivamente congruentes. ¿Qué relación existe entre los otros ángulos y el otro lado al compararlas entre sí?

Observe las siguientes figuras y responda:

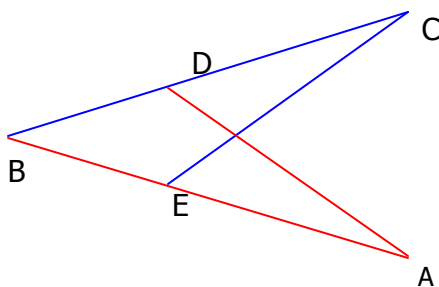


Figura 1

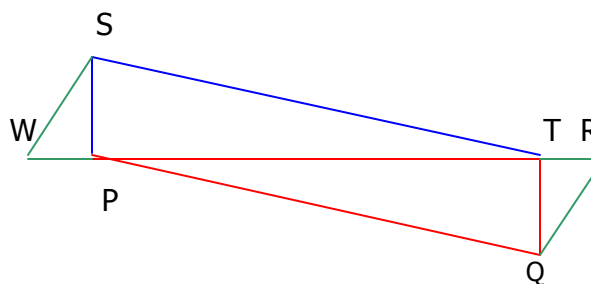


Figura 2

1. En la figura 1. Si BD es congruente con BE y BC es congruente con BA , ¿El ángulo E es congruente con el ángulo D ? ¿Por qué?
2. En la figura 2. Si SP es congruente con TQ y el ángulo W es congruente con el ángulo R , ¿Cuáles triángulos son congruentes? ¿Por qué?

Actividad No. 5

Construya un triángulo ABC y llame F al punto medio del lado BC . Construya dos triángulos más que sean rectángulos e isósceles y cuyas bases sean AB y AC respectivamente. Llámelos ABD y ACE . Mida los lados y los ángulos del triángulo DEF y clasifique dicho triángulo.

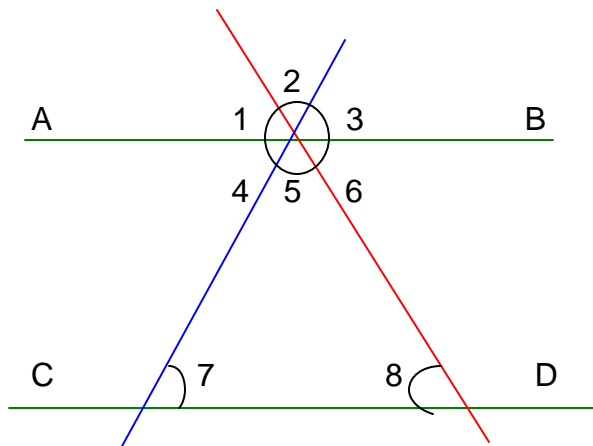
Actividad No. 6

Construya dos rectas que se corten en un solo punto. Trace una recta paralela a una de las dos rectas. Mida todos los ángulos que se forman. Llámelos A, B, C, D, E, F, G y H respectivamente. Cada pareja de triángulos recibe un nombre especial, a partir de la figura diga que ángulos son:

- a) Opuestos por el vértice
- b) Alternos internos
- c) Alternos externos
- d) Correspondientes

¿Qué sucede con cada pareja de ángulos?

Observa la siguiente figura. ¿Cómo podrías demostrar que la recta AB es paralela a la recta CD?



7.3.1 Diseño y elaboración. La trigonometría tiene su origen en el estudio del triángulo, diversos problemas del mundo real incluyendo problemas de navegación y topografía requieren la resolución de triángulos. Por esta razón la relación que existe entre la geometría y la trigonometría se hace intensamente necesaria. Esta introducción fue elaborada para exponer a los

estudiantes la importancia de este taller y las causas que motivaron su realización.

Este taller se diseñó con el propósito de estudiar y repasar propiedades, teoremas y conceptos relacionados con los elementos de un triángulo. Para lograr un buen desempeño en el campo de la trigonometría es importante contar con una completa base de conocimientos sobre triángulos y poder establecer relaciones entre éstos, ya que de esto depende básicamente el éxito de la resolución de un problema en trigonometría. Cada actividad propuesta en el taller, trae consigo alguna propiedad, concepto o teorema relacionado con el triángulo, que se pretende que el estudiante construya a partir de la situación observada y de las conclusiones que pueda sacar.

Se presentan 5 actividades relacionadas con la construcción de triángulos donde a través de la exploración se llega a conclusiones muy importantes. Se presenta también una actividad relacionada con parejas de ángulos congruentes, que permite que el estudiante explore, compruebe y demuestre algunas proposiciones relacionadas con la congruencia de ángulos y el concepto de paralelismo.

El taller ha sido diseñado en forma clara, con actividades suficientemente orientadas, para que el estudiante comprenda cada paso; además gracias al dinamismo de Cabri, se logra crear un ambiente de exploración agradable al estudiante y con muy buenos resultados. (Ver anexo C).

7.3.2 Protocolo de la situación. Los estudiantes recibieron el material de trabajo, gracias a la introducción del taller adquirieron una idea del trabajo a realizar y de la importancia del buen desarrollo del taller para las próximas actividades.

En la actividad 1, algunos estudiantes construyeron un triángulo isósceles a partir de una circunferencia, tomando como los lados congruentes, 2 radios de la misma. Otros utilizaron transferencia de medidas para construir dos segmentos de igual longitud, por medio de desplazamientos construyeron el triángulo isósceles, pero en este caso la construcción no podía ser modificada a partir de desplazamientos. Otros prefirieron el camino fácil y lo hicieron con la opción triángulo, luego calcularon la medida de dos de sus lados, y desplazaron los vértices hasta obtener un triángulo isósceles, pero desafortunadamente su construcción fracasó. Luego a partir de la exploración descubrieron las propiedades de los triángulos y las relaciones existentes.

En la actividad 2, a partir de la información obtenida y registrada en una tabla de datos, pudieron descubrir todas las propiedades de los ángulos en las diferentes clases de triángulos, y cómo calcular a partir de algunos ángulos conocidos, el valor de los otros. Algunos alumnos tuvieron dificultad para establecer estas relaciones, pero al final llegaron a conclusiones muy importantes.

En las actividades 3 Y 4, trabajaron con el concepto de congruencia de triángulos, entendiendo por medio de una aplicación práctica los criterios de congruencia LLL, LAL y ALA. Los alumnos relacionaron el concepto de congruencia con el de igualdad de áreas, lo que se esperaba debido al diseño de la actividad, a través de una pequeña exploración pudieron observar que dos triángulos no necesitan ser congruentes para tener igual área, pero cuando son congruentes sí tienen áreas iguales.

En la actividad 4 se pedía construir dos triángulos de manera que dos lados y el ángulo comprendido entre ellos fueran respectivamente congruentes, la mayoría de los alumnos intentaron diferentes procedimientos con segmentos,

pero no se conservaban las características, otros fueron muy recursivos utilizando el rectángulo para garantizar que cada pareja de lados eran respectivamente congruentes y al ángulo comprendido entre ellos se trataba de un ángulo recto, para terminar de cumplir las condiciones del enunciado. Algunos simplemente no pudieron hacerlo, pero al escuchar las soluciones de sus compañeros pudieron observar lo fácil que era y además que se generaban dos ángulos congruentes, descubriendo así otro criterio de congruencia de triángulos. La segunda parte se convirtió en un ejercicio práctico para aplicar los conceptos de congruencia, lo cual se realizó sin problema y la mayoría de los estudiantes acertaron en sus respuestas; algunos presentaron dificultad en relacionar los teoremas con la figura, debido a que no interpretaron correctamente las figuras.

La actividad 5, fue una actividad más divertida donde los estudiantes por medio de las herramientas que ofrece la calculadora, clasificaron un triángulo generado a partir de cierta construcción.

En la actividad 6 , los estudiantes pudieron establecer relaciones de congruencia entre parejas de triángulos y relacionarlos a partir de su ubicación, con su respectivo nombre. Además descubrieron la relación que existe entre los conceptos de paralelismo y congruencia de ángulos. Fue una actividad fácil, donde todos estuvieron en capacidad de desarrollarla, la dificultad se presentó en el momento de demostrar que dos rectas son paralelas a partir de la congruencia de triángulos. A raíz de esto se hizo una explicación geométrica en el tablero, donde pudieron despejar sus dudas.

El taller se desarrolló en forma rápida y tratando de despejar con especial cuidado las dudas de los estudiantes.

7.3.3 Análisis de resultados. Los estudiantes en el desarrollo de este taller alcanzaron los siguientes logros:

- ? Trabajaron los conceptos de triángulo isósceles, escaleno y equilátero, así como de triángulo rectángulo y oblicuángulo. Descubrieron las propiedades en cada uno de estos triángulos y establecieron relaciones entre ellos.
- ? A partir de la exploración en cada uno de los diferentes tipos de triángulos, encontraron las relaciones existentes entre la medida de sus ángulos, ya sean interiores o exteriores.
- ? Estudiaron y aplicaron los teoremas de congruencia de triángulos LLL, LAL, ALA. Y entendieron la diferencia que existe entre ser congruentes y tener igual área.
- ? Estudiaron los conceptos de ángulos opuestos por el vértice, adyacentes, correspondientes, alternos internos y alternos externos y su relación con rectas paralelas.

7.3.4 Conclusiones. Este taller se convirtió en una forma significativa de estudiar y repasar algunos conceptos relacionados con triángulos y sus elementos. A partir de este momento los estudiantes están en capacidad de trabajar con diferentes tipos de triángulos, establecer relaciones entre sus elementos, calcular ciertos valores por medio de las propiedades y teoremas que analizamos y estudiamos con atención.

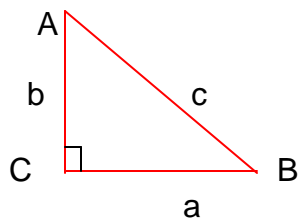
7.4 TALLER No. 3

TALLER No. 3

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Desde nuestra educación primaria nos han mencionado y hemos utilizado el teorema de Pitágoras, pero realmente conocemos su importancia en las matemáticas? ¿Podemos utilizarlo para solucionar diversos problemas? ¿Podemos hacer una demostración de este teorema? En este taller encontraremos el sentido del teorema de Pitágoras y conoceremos otras curiosidades que se derivan de este famoso teorema.

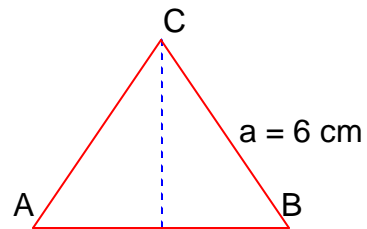
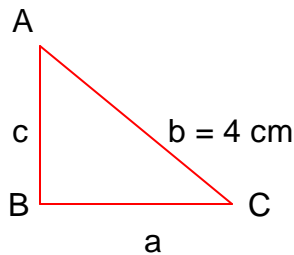
TEOREMA 1. Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

? Si $a = 6$ cm y $c = 8$ cm. Encuentre el valor de b.

Actividad No. 1



- ? En el triángulo isósceles ABC de la figura 1, encuentre el valor de c y el valor de a.
- ? En el triángulo equilátero ABC de la figura 2, encuentre el valor de la altura.

Actividad No. 2

Utilice la calculadora TI-92 Plus y el programa Cabri Geometry para comprobar el teorema de Pitágoras, de la siguiente manera:

1. Construya un triángulo rectángulo AOB, siendo O el ángulo recto.
2. Construya ahora los cuadrados ABCD, AOJR y BOKJ exteriores al triángulo AOB. Calcule el área de cada uno de los cuadrados.
3. Con la opción calcular sume las áreas de los cuadrados AOJR y BOKJ.
4. En la pantalla aparecerá la respuesta.
5. Verifique el teorema de Pitágoras.
6. Desplace los vértices del triángulo, sin perder la forma de triángulo rectángulo. Observe y responda: ¿Se conserva la igualdad entre el cuadrado de la hipotenusa y la suma de los cuadrados de los catetos?

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS. Si en vez de construir un cuadrado sobre cada lado del triángulo, construimos otra figura, por ejemplo un triángulo equilátero, ¿el área de la figura construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos?. Realice esta construcción. ¿Qué sucede? ¿Porqué se cumple esta generalización?

Actividad No. 3

Veamos ahora una demostración más formal. Construya un cuadrado ABCD. Siendo P, Q, R y S puntos sobre los lados del cuadrado de tal forma que: $AS = BP = CQ = DR = a$ y $SB = PC = QD = RA = b$.

1. Una los puntos P, Q, R y S y suponga que el lado del cuadrado PQRS es c.
2. ¿Cuál es el área del cuadrado ABCD?
3. ¿Cuál es el área de cada uno de los triángulos?
4. Calcule el área de los 4 triángulos.
5. Como el área del cuadrado ABCD es igual a la suma de las áreas de los 4 triángulos más el área del cuadrado PQRS, establezca esta relación y observe que sucede.
6. ¿Realmente es esta una demostración para este teorema? ¿Por qué?

Actividad No. 4

Analice ahora el siguiente problema y observe como se puede aplicar el teorema de Pitágoras.

Dados dos triángulos equiláteros ABC Y DEF, construya un triángulo equilátero PQR cuya área sea igual a la suma de las áreas de ABC y DEF.

1. Suponga que los lados del triángulo ABC mide cada uno x y los lados del triángulo DEF mide cada uno y.
2. Suponga también que los lados del triángulo PQR a construir mide cada uno z.
3. El área de cada triángulo es: $\frac{\sqrt{3}}{4} x^2$, $\frac{\sqrt{3}}{4} y^2$ y $\frac{\sqrt{3}}{4} z^2$. Compruébelo.
4. Como el área del triángulo PQR debe ser igual a la suma de las áreas de los triángulos ABC y DEF, establezca esta relación.
5. Simplifique. ¿Qué ocurre?
6. Bastará ahora con construir un triángulo equilátero sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos x e y. Constrúyalo utilizando Cabri Geometry.

Actividad No. 5.

Ahora intente resolver este problema que también involucra al teorema de Pitágoras. (Sin utilizar su calculadora)

1. Dibuje un rectángulo ABCD.
2. Dibuje un punto P en su interior.
3. Trace los segmentos AP, BP, CP y DP.
4. Demuestre que: $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$

El hecho de que aparezca en el enunciado una suma de cuadrados nos hace sospechar que debemos utilizar el teorema de Pitágoras.

7.4.1 Diseño y elaboración. Desde la educación primaria los estudiantes han utilizado el teorema de Pitágoras, pero realmente no conocen su importancia en las matemáticas, no pueden aplicarlo para solucionar diversos problemas y no están en la capacidad de realizar una demostración del mismo. Este taller es una sencilla demostración del sentido y la

importancia del teorema de Pitágoras y otras curiosidades que se derivan del mismo.

El taller ha sido diseñado con el propósito de presentar una serie de actividades donde se involucra el teorema de Pitágoras, para enriquecer el entendimiento del mismo y lograr en los estudiantes la capacidad de relacionarlo con diversos problemas que requieren de él para su solución.

Inicialmente se presenta la parte mecánica y rutinaria del teorema, es decir, ejercicios básicos de encontrar el valor de la hipotenusa o el valor de los catetos en algunos triángulos; también se incluyen ejercicios donde las propiedades de cierto tipo de triángulos son indispensables para su solución; adquiriendo así habilidad y recursividad en cada problema. Luego se presenta una verificación en forma clara y secuencial del teorema de Pitágoras utilizando el programa Cabri Geometry. También se incluye un actividad para generalizar el teorema de Pitágoras y una demostración un poco más formal para realizar en lápiz y papel.

Las dos actividades finales están relacionadas con aplicaciones del teorema, es decir; se presenta otra alternativa de presentación de problemas que lo involucran.

El taller ha sido diseñado para motivar a los estudiantes con actividades diferentes que tengan sentido y relación; además exponer los grandes poderes de este famoso teorema. (Ver anexo D).

7.4.2 Protocolo de la situación. En la actividad 1, los estudiantes aplicaron el teorema de Pitágoras para calcular la medida de todos los lados de tres triángulos rectángulos diferentes, entre los cuales se incluyó un triángulo rectángulo isósceles y un triángulo equilátero, para que a partir de las

propiedades de éstos pudieran aplicar el teorema y solucionarlos; dichos problemas se solucionaron con facilidad.

En la actividad 2 se realizó una verificación geométrica del teorema de Pitágoras, algunos alumnos siguieron detenidamente cada paso teniendo especial cuidado en las construcciones, es decir en el momento de construir un cuadrado lo hicieron con el procedimiento adecuado ya aprendido o utilizando la macro construcción ya elaborada. Otros por el contrario construyeron cuadrados sin ningún tipo de procedimiento pese a haberlo visto en el taller No 1, y sus construcciones fracasaron en el momento de cambiar las condiciones iniciales del triángulo. Los alumnos descubrieron la relación que existe entre los cuadrados de los catetos de un triángulo y el cuadrado de la hipotenusa, además por medio de una pequeña exploración pudieron darse cuenta que ésta relación se cumple en cualquier triángulo rectángulo y que es propiedad exclusiva de éstos.

Gracias al conocimiento de la construcción de un triángulo equilátero, los estudiantes pudieron hacer la prueba en una forma diferente; es decir, en lugar de construir un cuadrado sobre cada lado del triángulo construyeron triángulos equiláteros y pudieron observar como la relación entre los catetos y la hipotenusa se conserva. El problema se presentó cuando intentaron descubrir el porqué de esta situación, para ello se realizó una explicación en el tablero, descubriendo otra hermosa demostración del teorema de Pitágoras.

En la actividad No 3, los estudiantes demostraron de una manera formal, es decir un poco más argumentativa el teorema de Pitágoras. Pero se les dificultó responder porque ésta era una demostración real del teorema de Pitágoras, la mayoría de los estudiantes no respondieron, debido a que no

observaron que cada triángulo formado correspondía a un triángulo rectángulo y de ahí la demostración.

La actividad 4 se convirtió en una situación un poco difícil de entender para los estudiantes, debido a que se cambió la forma en que se presentan los problemas que involucran el teorema de Pitágoras, es decir no podían relacionar este teorema con el problema. Se sospechaba por el enunciado que había que utilizarse pero no era muy claro el porqué de dicha aplicación. Después de realizar paso a paso se fue aclarando un poco más la situación y la actividad logró sorprender a los estudiantes quienes a pesar de la completa explicación de los pasos, afortunadamente hacían preguntas relacionadas con el porqué de la solución del problema. Resultó muy interesante y muy agradable para cada uno de ellos.

En la actividad 5, la mayoría de los estudiantes construyeron triángulos rectángulos sobre los rectángulos y pudieron establecer relaciones por medio del teorema de Pitágoras para demostrar la igualdad presentada. Otros (muy pocos) no utilizaron éste recurso y hacían preguntas como : ¿Qué tiene que ver el teorema de Pitágoras con éste problema, si se trata de rectángulos?, esto es precisamente lo que se pretende superar con estos talleres, que los alumnos se olviden que los teoremas y las proposiciones en matemáticas están dadas sólo para ciertas figuras y ciertos problemas y que no pueden ser aplicables a ningún otro tipo.

7.4.3 Análisis de resultados. En el desarrollo de este taller se observaron los siguientes resultados:

- ? Los estudiantes entendieron el teorema de Pitágoras y mecanizaron su aplicación en triángulos rectángulos.

- ? Verificaron en diversas formas el teorema de Pitágoras: geoméricamente, algebraicamente y gráficamente. Y realizaron una demostración del mismo.
- ? Descubrieron otras aplicaciones del teorema de Pitágoras, diferentes al cálculo de medidas de los lados de un triángulo.
- ? Descubrieron la importancia de las propiedades de los triángulos, para solucionar problemas.
- ? Realizaron diferentes construcciones que dependían exclusivamente de construcciones ya realizadas, y entendieron porque deben realizarse adecuadamente las construcciones.

7.4.4 Conclusiones. El taller se convirtió en una actividad interesante, llena de curiosidades y cuestionamientos cuyas respuestas enriquecían más el conocimiento. Los estudiantes además de dominar la mecánica del teorema, pudieron darle aplicación al teorema en diversas formas, donde todo lo que hacían tenía sentido.

Pudieron comprender la importancia de este fantástico teorema que ha enriquecido por siglos la ciencia de las matemáticas y que lo seguirá haciendo en la medida que los estudiantes lo entiendan, lo analicen y lo puedan aplicar en el momento indicado y en la situación adecuada.

7.5 TALLER No 4

TALLER No. 4

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Enfrentarnos a un problema matemático, nos exige una actitud adecuada, estrategias de pensamiento, estrategias de solución, organización y estructuración de los conocimientos, inspiración, capacidad de observación y otros aspectos que si utilizamos adecuadamente, tendremos éxito en nuestra labor.

El objetivo de este taller es proporcionar una guía práctica para la adquisición de una serie de actitudes y estrategias con el fin de mejorar la forma de enfrentar un problema a través de diversas sugerencias y recomendaciones que se darán a continuación. La intención fundamental de este taller no es divertir, sino iluminar, motivar, orientar, y ayudar a ejercitar.

RECOMENDACIONES PRINCIPALES

Un verdadero problema es un auténtico reto. Por esta razón se debe enfrentar con confianza, tranquilidad, disposición de aprender, curiosidad y gusto por el reto. Algunas veces cuando nos enfrentamos a un problema, no sabemos que hacer, por donde empezar, que conceptos utilizar, es decir nos sentimos inhabilitados para resolver el problema. Existen diferentes tipos de bloqueos que entorpecen frecuentemente nuestra actividad mental y nos llevan a esta situación, entre ellos: pereza, miedo, apatía, desinterés, dificultad en la percepción del problema, incapacidad para desglosar el problema, desorganización de la información. Por esta razón debemos adquirir ciertos hábitos y ciertos procedimientos frente a los posibles bloqueos que amenazan nuestra actividad mental como por ejemplo:

- ? Utilizar la pregunta como anzuelo para extraer las ideas principales.
- ? Elaborar una lista de ideas entorno al problema, que nos ayude a definirlo más claramente y a hacer una revisión útil de los elementos concretos que nos pueden conducir a su solución.
- ? Entender el problema: interpretar el enunciado; clasificar las partes principales del problema: datos, condiciones; familiarizarse con el problema.
- ? Plantearse preguntas como: ¿Qué nos piden? ¿Cuáles son los datos? ¿Me recuerda algún otro problema parecido? ¿Puedo enunciar el problema de otra forma? ¿Qué hago? ¿Cómo lo hago? ¿Con qué cuento? ¿Cuáles son las condiciones? ¿Por qué hago esto? ¿Es lógica la solución? ¿Pueden existir otras?
- ? Utilizar diferentes estrategias de solución que expondremos más adelante en este taller.

Actividad No. 1 UN MODELO PARA LA SOLUCION DE UN PROBLEMA.

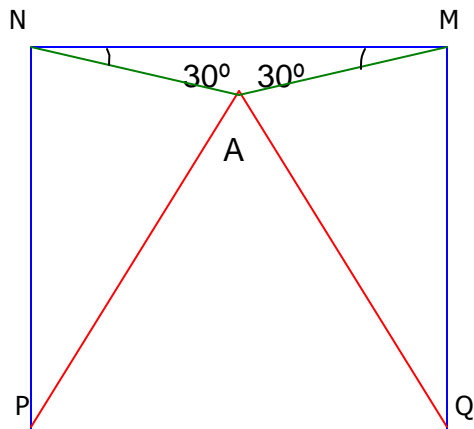
1. FAMILIARÍCESE CON EL PROBLEMA. Entienda a fondo el problema, organice la información, clasificándola en datos, incógnitas, condiciones. ¿Qué piden? ¿Cuáles son los datos? represente el problema, haga un dibujo con los datos del problema, explique y escriba este problema con sus propias palabras.

2. BUSQUE ESTRATEGIAS, PARA DISEÑAR UN PLAN DE SOLUCIÓN. Identifique a donde debe llegar, que conceptos y que estrategias puede utilizar, ¿Qué relación hay entre los datos? ¿Qué relación hay entre los datos y las incógnitas? ¿En que sentido afectan la condiciones al problema? ¿Cómo va a solucionarlo? ¿Por qué de esta forma?

3. EJECUTE EL PLAN DE SOLUCIÓN. Ejecute organizadamente paso por paso. Argumente y verifique cada paso. ¿Podría decir por que hace cada cosa? Si la estrategia le da algún problema insiste, si la estrategia falla claramente, cambia de estrategia.

4. REVISE EL PROCESO Y SAQUE CONCLUSIONES. Todo problema debe aportarnos nuevos conocimientos o reforzar los antiguos, por eso es importante revisar el procedimiento y sacar conclusiones. Cuando crea que ha terminado el problema repase el proceso paso a paso. ¿Es lógica la solución? ¿Puede existir otra solución?

Siga cada uno de estos pasos para resolver el siguiente problema, organizando la información, diseñando un plan de solución, utilizando su creatividad y todos los conocimientos adquiridos a través de los talleres anteriores.



En un cuadrado MNPQ, se traza el punto A como indica la figura. El triángulo APQ tiene toda la pinta de ser equilátero. ¿Lo es realmente? realice esta construcción en el programa Cabri Geometry y verifique su solución.

Actividad No. 2

Las siguientes estrategias son útiles a la hora de resolver un problema.

- ? Empiece por lo fácil.
- ? Empiece por el final. Consiste en partir de la situación a llegar y , extrayendo de ella toda la información posible e ir retrocediendo hasta el principio.
- ? Experimente.
- ? Descomponga el problema en partes más pequeñas. Consiste en dividir el problema en partes pequeñas e ir resolviéndolas sin perder de vista cuál es el objetivo final.
- ? Resolver un problema más sencillo. Consiste en tratar de resolver el mismo problema con números más sencillos, con menos elementos, etc... de esta forma será más fácil comprender el problema y poder sacar conclusiones aplicables al problema que realmente se nos plantea.
- ? Saque partido de la simetría. Consiste en aprovechar la simetría de ciertas situaciones, figuras o expresiones para descomponer el problema en otros más sencillos o para descubrir alguna irregularidad.
- ? Generalice. Pasar del estudio de una situación concreta a una general extrayendo una idea válida para cualquier caso a partir de la comprobación regularidades observadas en situaciones u objetos analizados.
- ? Particulice. Consiste en trabajar con ejemplos concretos cuando se desea comprobar alguna cuestión o situación general.
- ? Utilice la técnica de ensayo y error. Consiste en elegir un resultado y comprobar si puede ser la solución del problema. Si la comprobación es satisfactoria habremos resuelto el problema. Si no se logra, se repite el proceso con un segunda solución supuesta. Y así sucesivamente, hasta encontrar la solución o demostrar que el problema no tiene solución.
- ? Sistematice el trabajo. Consiste en utilizar un método o sistema que nos permita explorar las diferentes posibilidades de forma ordenada, para evitar que se nos olvide alguna cosa.
- ? Simule la situación. Se trata de simular o reproducir la acción o la situación que describe el problema.
- ? Estudie todos los casos posibles. Consiste en analizar todos los casos posibles que se puedan dar en una situación determinada o todas las posibles soluciones.
- ? Haga un esquema, una figura, un diagrama. Consiste en representar, dibujar, esquematizar la situación descrita por el problema. La contemplación del aspecto gráfico del problema contribuye a la mejor comprensión del mismo.
- ? Escoja un lenguaje adecuado y una notación apropiada.
- ? Utilice todos los recursos disponibles.
- ? Revise todos los conceptos relacionados con el problema.

Solucione los siguientes problemas, elaborando para cada uno un modelo de solución:

- ? El profesor de matemáticas de un curso de 10º grado le dice a los alumnos que ha construido un triángulo y que, después de medir cuidadosamente sus ángulos y sus lados resulta que tienen 42° , 96° , 42° y 4, 5 y 7 cm respectivamente. Los alumnos creen que el profesor les está tomando el pelo. ¿Cómo podrían tener la certeza de que así es?
- ? Dos postes de teléfono de 10 m y 25 m de altura respectivamente se colocarán a una distancia de 40 m uno del otro. Los postes deben ser sujetados a un punto de apoyo situado entre ambos. ¿Dónde debe situarse el punto de apoyo para que la suma de las longitudes del cable de cada poste al punto de apoyo sea mínima?

7.5.1 Diseño y elaboración. El proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la adquisición de unos conocimientos lo más completos posible acerca de las cuestiones relacionadas con los contenidos. No sólo será necesario que el alumno pase largas y tediosas horas dedicado al uso y por qué no, abuso, de algoritmos y teorizaciones, sino que resultará igualmente interesante que adquiera experiencia y soltura en el manejo de datos, de interpretación de la información y manejo de estrategias de resolución de problemas. Con toda seguridad, la interpretación de resultados contribuirá mejor a la formación de un espíritu crítico que la “perfección” en los mecanismos de cálculo, si éstos no se acompañan de un “porqué”, un “para qué” y un “cuando” usarlos.

Cuando un problema incita al alumno a plantearse diferentes cuestionamientos sobre el mismo, por ejemplo, si es posible generalizar el resultado obtenido a otro tipo de números o figuras, o que pasaría si se modificaran las condiciones iniciales del problema; en este momento podemos decir que se ha generado una verdadera investigación que seguramente enseñará más sobre el contenido tratado que exclusivamente la reiteración de ejercicios. Esto sumado a las grandes ventajas que ofrece el programa Cabri Geometry de exploración y de reflexión nos dará como resultado un verdadero aprendizaje.

Pero no se aprende a resolver problemas por el simple hecho de haber aprendido determinados conceptos y algunos algoritmos de cálculo, se necesita más que eso. Por esta razón debemos proporcionar a nuestros estudiantes herramientas, técnicas específicas y pautas generales de resolución de problemas que les permitan enfrentarse a ellos sin miedo y con cierta garantía.

En este sentido, este taller ha sido diseñado con el fin de brindar una orientación sobre las técnicas, las herramientas, los posibles procedimientos a seguir en un determinado ejercicio. Esto no se hace de la noche a la mañana, pero el taller presenta una breve guía para que el alumno organice sus ideas y llegue a ser consciente de qué estrategia utilizará en un momento dado, sin que esta reflexión llegue a convertirse en un tratamiento sistemático de las distintas estrategias.

El objetivo principal de este taller es proporcionar una guía práctica para la adquisición de una serie de actitudes y estrategias con el fin de mejorar la forma de enfrentar un problema a través de diversas sugerencias y recomendaciones. La intención fundamental de este taller no es divertir, sino iluminar, motivar, orientar y ayudar a ejercitar.

En la actividad No 1 se presenta una serie de recomendaciones especiales dedicadas a entender el problema y saber que hacer clasificando ideas, conceptos y familiarizándose con el problema. Se presenta también un modelo para la solución de un problema que se compone de 4 fases: familiarización, búsqueda de estrategias y diseño de un plan de solución, ejecución del plan y revisión del proceso, con el fin de que el estudiante conozca esta alternativa de solución para que pueda ponerla en práctica o pueda a partir de ella diseñar su propio plan de solución.

Se debe a continuación resolver un problema organizando la información, diseñando un plan de solución, utilizando la creatividad y todos los conocimientos adquiridos a través de los talleres anteriores.

La actividad No 2 presenta una lista de herramientas generales adecuadas para solucionar problemas, las cuales los estudiantes deben analizar y hacer una buena socialización para entender las funciones respectivas de cada una

de ellas. Se presentan a continuación 2 problemas con el fin de aplicar dichas herramientas, diseñar planes de solución y observar que los procedimientos no siempre son los mismos, pero si hay unos más sofisticados que otros, y que gracias a la revisión del proceso podemos observar cual nos brinda mayores oportunidades de reflexión, análisis y adquisición de conocimientos. (Ver anexo E).

7.5.2 Protocolo de la situación. Este taller se caracterizó por ser en un gran porcentaje, teórico y de reflexión. Después de realizar detenidamente cada lectura, se iba haciendo la socialización correspondiente, se planteaban preguntas, se analizaba paso a paso cada idea, cada estrategia y se intentaban plantear ejemplos sencillos o simplemente se exponía lo que se entendía a cerca de cada estrategia.

Se generó una discusión acerca de lo que es realmente un problema, porque todos sabemos que no es problema todo lo que parece, ya que se presenta una confusión muy generalizada entre los términos “problema” y “ejercicio”. Se llegó a la conclusión que un problema es una situación que un estudiante no puede resolver usando los conocimientos que tienen inmediatamente disponibles. En un ejercicio, el estudiante conoce el algoritmo que una vez aplicado lo llevará a la solución. En realidad resolver un problema es simplemente lo que hacemos cuando no sabemos que hacer.

Entre las cosas que afectan el proceso de solución en los estudiantes se destacó la falta de una buena interpretación de la información, por que es allí donde inicia todo el fracaso de la solución. Todos estuvieron de acuerdo en afirmar que esto se debe a que no se hace una buena lectura de ésta y una buena organización de las ideas, datos e incógnitas.

Los estudiantes mencionaron los conocidos bloqueos asegurando que dichos bloqueos se presentan cuando se intenta resolver un problema. Por esta razón se hizo una breve discusión acerca de las posibles causas de estos bloqueos y se mencionaron estrategias e ideas para combatirlos. En este sentido se mencionaron las grandes fuentes de la mayoría de los bloqueos: La percepción del problema. Los estudiantes se ven afectados por una fijación que hace ver lo que no hay. Esto lo vimos cuando intentamos resolver otra figura que involucra triángulos pero que no los presenta directamente como ocurrió en uno de los ejercicios anteriores. El entorno cultural y la carga emocional. Estos bloqueos nacen del medio donde se mueve el estudiante. Por lo tanto tienen que ver con el lugar, el momento y con quien se esté trabajando, pudimos mencionar más específicamente: circunstancias físicas, prisas, agobios, falta de confianza, de concentración, miedo al riesgo, el horror a equivocarse, la incapacidad de relajamiento y la falta de motivación. El bloqueo intelectual y expresivo. Este bloqueo afecta principalmente a los procesos intelectivos y de aprendizaje del estudiante, por ejemplo la elección incorrecta del lenguaje para abordar el problema, el uso inadecuado de las estrategias y la falta de conceptos, de análisis de la información y de una buena organización de las ideas.

Después de analizar cada uno de estos bloqueos, todos estuvieron de acuerdo en afirmar que cualquiera que sea el caso del origen del bloqueo debemos estar atentos a que aparezcan y debemos ser conscientes de que aparecerán. De esta forma los recibiremos como algo natural y trataremos de atacarlos de la mejor forma.

En la actividad 1, se presentó un modelo para la solución de un problema, el cual fue analizado, estudiado, recomendado y del cual se esperan excelentes resultados. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de solucionar un problema geométrico, a partir de éste modelo de solución y pudieron darse

cuenta de la ayuda enorme que puede brindar una buena organización. En este problema se pedía demostrar que un triángulo era realmente equilátero y se presentó una situación muy significativa, ya que algunos estudiantes por medio de una asignación de valores al azar a los ángulos de la figura lograron que todos los ángulos del triángulo midieran 60° , otro alumno por el contrario, utilizando la misma estrategia logró hacerlo no equilátero, pero en las dos soluciones habían procedimientos sin justificar que se observaron al revisar el proceso. Los estudiantes observaron como un problema se presta para diferentes interpretaciones pero que deben ser conscientes de que no todo lo que brilla es oro y es en este momento cuando la argumentación constituye un papel primordial en la resolución de un problema. Inmediatamente se realizó la construcción en Cabri explicando el procedimiento para generar ángulos de un valor determinado y ángulos negativos, para obtener la construcción adecuada. Gracias a la interactividad de Cabri los estudiantes pudieron ver después de cambiar el valor del ángulo en la construcción y utilizando las herramientas de la calculadora que el triángulo es equilátero si los dos ángulos dados son 15° cada uno y no 30° . La solución geométrica para esto se realizó en el tablero, resultó un poco compleja para los estudiantes pero realmente logró impresionarlos.

En la actividad 2, los estudiantes analizaron diversas estrategias, entendiendo la función de cada una, para estar en capacidad de aplicarla en el momento indicado, se dieron ejemplos, hubo suficiente participación logrando generar un ambiente de motivación e interés.

Se solucionaron dos problemas para los cuales se pretendía utilizar planes de solución, estrategias y además el uso del programa Cabri Geometry; discutiendo la posibilidad de que fueran ejercicios y no problemas. En el problema 1, hicieron uso de los conceptos sobre triángulos y llegaron rápidamente a la solución, argumentaron muy bien. En el problema 2, los

estudiantes manejaron diferentes estrategias como la de hacer un diagrama, estudiar todos los casos posibles, además utilizaron el teorema de Pitágoras pese a que algunos estudiantes no pudieron relacionarlo debido a la falta de entendimiento del problema, no describieron sus planes de solución, pero a juzgar por lo que se observó si fueron utilizados. Algunos alumnos fueron muy recursivos utilizando el programa Cabri Geometry haciendo una construcción perfecta de la situación, observando todos los casos posibles, y pudieron darse cuenta de la grandiosa herramienta de trabajo con la que cuentan haciendo un mejor análisis de la situación. Otros por el contrario no entendieron el problema, no utilizaron la calculadora y no relacionaron el teorema de Pitágoras, pero gracias a las explicaciones realizadas por los estudiantes en la discusión de la solución pudieron darse cuenta que era algo muy fácil y que la solución si estaba en sus manos, faltó motivación para hacerlo.

7.5.3 Análisis de resultados. En el desarrollo de este taller se observaron los siguientes resultados:

- ? Los estudiantes lograron entender que un problema es un auténtico reto que se debe enfrentar con confianza, tranquilidad, disposición de aprender, curiosidad y gusto; y que la mejor forma de abordar un problema es construir un modelo de solución donde cada una de las etapas es igualmente importante: Familiarización, diseño, ejecución y revisión.
- ? Reconocieron que la comprensión del problema es el paso principal para obtener éxito en el proceso de solución. y que en revisar el problema se encuentra la mayor fuente de aprendizaje, ya que a partir de ésta se obtienen conclusiones muy importantes.

- ? Conocieron y analizaron diversas estrategias de solución adecuadas para enfrentarse a problemas de trigonometría.
- ? Aceptaron que resolver un problema es algo más significativo y grato que la simple repetición de ejercicios rutinarios y mecánicos.
- ? Conocieron diferentes bloqueos y sus posibles causas y determinaron cual son las mejores armas para combatirlos.
- ? Entendieron la importancia de contar con un modelo mental de las fases del proceso de resolución de un problema, puesto que facilitará el acercamiento al mismo.

7.5.4 Conclusiones. Los estudiantes estuvieron motivados e interesados con todo lo relacionado en el taller, ya que más que ser una guía práctica, se convirtió en respuestas a cuestionamientos propios de la labor del estudiante y además a partir de esta información lo estudiantes estarán en la capacidad de diseñar sus propios modelos de solución y ser conscientes de qué estrategia aplicar y en el momento adecuado.

7.6 TALLER No. 5

TALLER No 5

ANGULOS, SUS MEDIDAS Y SEMEJANZA DE TRIANGULOS

La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulo de los triángulos. El grado y el radián son unidades de medidas de los ángulos. El concepto de ángulo es fundamental en el estudio de la trigonometría, por esta razón dedicaremos este taller a repasar todos los conceptos relacionados con ángulos y sus medidas.

Se puede definir un ángulo como la región del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen su origen común. A las semirrectas se les llama **lados** y al origen común **vértice**. Si tomamos uno de los lados como inicial (inmóvil) y consideramos que el ángulo se forma cuando, el lado final rota sobre su origen en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, el ángulo es positivo, si el desplazamiento en sentido contrario el ángulo es negativo.

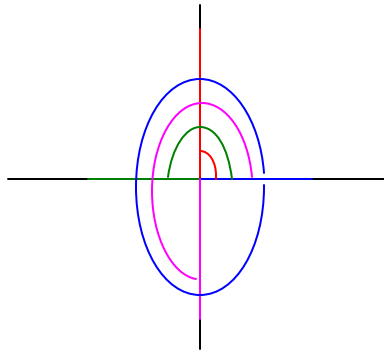
Actividad No. 1

Dado que un ángulo es una magnitud, podemos medirlo. Pero para ello necesitamos unidades de medidas adecuadas que vamos a definir en dos sistemas diferentes.:

Sistema Sexagesimal. Dadas dos rectas perpendiculares se llama ángulo recto a cada uno de los 4 ángulos iguales que forman al cortarse.

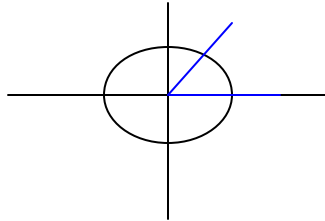
- ? En el programa *Cabri Geometry* construya dos rectas perpendiculares. Mida uno de los ángulos que se forman. ¿En grados cada región del sistema de coordenadas rectangulares a cuánto equivale?

Si dividimos este ángulo recto en 90 partes iguales, a cada parte se le llama grado sexagesimal ($^{\circ}$). Cada grado se subdivide en 60 minutos ($'$) y cada minuto en 60 segundos ($''$). Calcule el valor en grados de los ángulos que se presentan en la siguiente figura:



- ? Represente estos ángulos en la construcción realizada en la calculadora y verifique sus respuestas.

Sistema circular. Otra unidad de medición es el radián. Para medir un ángulo en radianes, utilizamos un sistema de coordenadas en el cual el lado inicial del ángulo coincide con el eje positivo X y el lado final se encuentra en el plano como en la figura.



Los lados del ángulo intersecan al círculo de radio r , en los puntos o y t , donde t es un valor entre 0 y 2π dado que una circunferencia completa tiene 360° y su longitud total es $2\pi r$, en la circunferencia caben $2\pi r / r = 2\pi$ radianes. Este número t es la medida en radianes del ángulo.

- ? A partir de este procedimiento calcule la medida en radianes para los ángulos: 90° , 180° , 270° , 360° .

Actividad No. 2

En Cabri realice lo siguiente:

- ? Represente una circunferencia. Marque dos radios y encuentre los puntos de intersección entre los radios y la circunferencia, llámelos A y B respectivamente. Mida el ángulo que se forma entre los radios.
- ? Construya un arco desde A hasta B en sentido contrario a las manecillas del reloj y calcule su longitud. Calcule la longitud del radio.
- ? Desplaza el punto B hasta que la longitud del radio y la longitud del arco sean iguales. ¿Cuál es la medida del ángulo?
- ? Modifique la circunferencia cambiando la medida, ¿Qué sucede con la longitud del arco? ¿Qué ocurre con la medida del ángulo?
- ? Este ángulo que se ha construido mide exactamente un radián. A partir de esta situación construya una definición para un radián.
- ? Si 360° equivale a 2π radianes, ¿A cuánto equivale 1 radián en grados? Comprueba este valor en la construcción realizada.
- ? Encuentre una regla general para convertir grados en radianes y radianes en grados y transforme $5\pi / 6$ en grados y 120° en radianes.

Actividad No. 3

Un ángulo central es un ángulo cuyo vértice es el centro de una circunferencia. Un arco es el segmento de circunferencia formado cuando los lados del ángulo central cortan la circunferencia.

1. Represente una circunferencia, calcule su longitud y calcule la longitud del radio.
2. Represente un ángulo central y marque los puntos de intersección que forman los lados del ángulo y la circunferencia.
3. Construya un arco entre los dos puntos en sentido contrario a las manecillas del reloj y calcule su longitud.
4. Sabemos que una circunferencia corresponde a 360° .
5. Establezca una regla de tres con los datos obtenidos, relacionando la longitud de la circunferencia con su medida en grados, para encontrar el valor del ángulo central.
6. Calcule el valor del ángulo central con las herramientas de la calculadora. ¿Coinciden?
7. A partir de este procedimiento. ¿Cómo se calcula la medida de un ángulo central? Generalice esta situación.

Actividad No. 4.

Un ángulo inscrito APB es un ángulo cuyo vértice es un punto cualquiera P del círculo y sus lados son dos cuerdas AP y PB del círculo que determinan un arco AB.

1. Realice la construcción de un ángulo inscrito en el programa Cabri .
2. Calcule la medida del ángulo central del arco intersecado.
3. Calcule el valor del ángulo P con la opción ángulo.
4. Establezca una relación entre los dos valores y complete la siguiente proposición.

La medida de un ángulo inscrito es la _____ de la medida de su arco central intersecado.

Generalice esta proposición, realizando diferentes desplazamientos, para obtener diversas formas de exploración.

Actividad No. 5

Así como existen criterios para la congruencia de triángulos, también existen criterios para la semejanza de triángulos:

Recuerde: Dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma.

En Cabri realice lo siguiente:

1. Construya un triángulo en el cual uno de sus ángulos interiores mida 35° .
2. Construya otro triángulo más grande en el cual uno de sus ángulos interiores mida también 35° .
3. ¿Son semejantes?

4. Mida todos los ángulos interiores de cada uno de los triángulos.
5. Transforme el triángulo hasta que obtenga la misma forma del primero, de tal forma que los triángulos no sean iguales.
6. ¿Qué ocurre con los ángulos?
7. Establezca el primer criterio de semejanza a partir de lo que se observa en este caso.
8. Aparentemente los lados correspondientes de los triángulos son paralelos, utilice las herramientas que le ofrece la calculadora en la opción "verificar propiedad" y compruebe ésta suposición.

Actividad No. 6

Recuerde: Una proporción es una igualdad entre dos razones.

Por ejemplo las razones a / b y c / d son proporcionales si $a / b = c / d$, siempre y cuando b y d sean diferentes de cero.

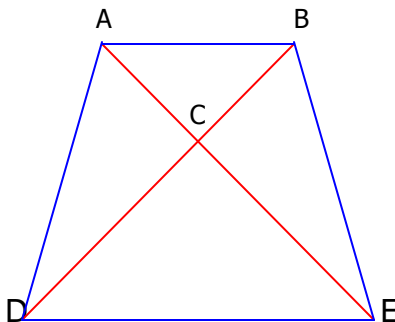
En Cabri realice lo siguiente:

1. Construya un triángulo cualquiera de base AB.
2. Trace una recta paralela al segmento AB que corte los otros lados del triángulo, marque los puntos de intersección entre la paralela y los lados del triángulo y llámelos D y E.
3. Mida los segmentos AC, DC, BC, CE, AB y DE.
4. Según la definición se puede establecer una proporción entre estos segmentos.
5. ¿Cuántos triángulos puede observar en esta figura?
6. ¿Son semejantes?
7. Establezca el segundo criterio de semejanza a partir de la construcción.

Existe otro criterio de semejanza llamado LAL (LADO - ANGULO - LADO): Si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de otro triángulo, y si los dos lados que comprenden al ángulo son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

¿Los triángulos ABC, DCE son semejantes? ¿Por qué?

¿Los triángulos ACD y BCE también son semejantes?



7.6.1 Diseño y elaboración. La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Un ángulo lo forman dos semirrectas, llamadas lado inicial y lado final respectivamente, con un origen llamado vértice. Los estudiantes sólo conocen una forma de calcular las medidas de los ángulos: “Utilizando el transportador”; desde su educación primaria les ha enseñado que los ángulos se miden en grados pero la definición de grado siempre está ausente y es imposible entender su significado. Este taller propone una nueva forma de abordar el estudio de la medida de los ángulos, por medio de la reflexión y la observación de regularidades en distintas situaciones, para llegar a leyes generales y de esta forma construir el conocimiento entendiendo cada concepto y relacionándolo con lo que corresponda.

El taller presenta en la actividad 1 la forma de medir ángulos en grados con el objetivo de que los estudiantes aprendan a ubicar ángulos en posición normal en un sistema de coordenadas rectangulares a partir del valor del ángulo en grados y de esta forma puedan calcular el valor en radianes de dicho ángulo, utilizando los puntos de corte entre la circunferencia y los lados del ángulo. De esta forma los estudiantes conocerán los dos sistemas utilizados para medir ángulos: sistema sexagesimal (grados) y sistema circular (radianes).

Resulta muy fácil dar una definición de radián como la siguiente: “Se llama radián al ángulo que teniendo su vértice en el centro de un círculo corta en su circunferencia un arco de longitud igual al radio” Tal vez los estudiantes se aprendan esto memorísticamente, pero nunca llegarán a entender lo que significa realmente. La actividad 2 tiene el propósito de dar esta definición a partir de una construcción en el programa Cabri Geometry, donde a través de cada paso utilizado el estudiante va creando su propia definición para así poder entender lo que dicen los libros acerca de lo que significa un radián.

También el estudiante por medio de la reflexión debe averiguar a cuánto equivale un radián en grados y verificar su respuesta en la construcción hecha en la calculadora y establecer una regla general para la conversión de grados en radianes y viceversa. También se brinda la oportunidad de que los estudiantes observen que objetos se involucran en la medición de ángulos en radianes.

La actividad 3 pretende mostrar como se calcula la medida de un ángulo central a partir de la longitud de su arco intersecado. En la actividad 4 relaciona la medida de un ángulo inscrito, con la medida de su ángulo central intersecado y en la actividad 5 y 6, el estudiante debe descubrir los criterios de semejanza de triángulos. Es muy normal que en la enseñanza de este tema, se reciten los criterios y se intente resolver ejercicios, resulta ser una tarea muy comprometedor, para quienes no logren entender las condiciones de cada criterio. En este sentido, esta actividad propone una nueva forma de entender los criterios, basada en la reflexión y en los análisis hechos por el estudiante.

Finalmente se presenta un ejercicio práctico sobre semejanza de triángulos para afianzar los conceptos.

Este taller ha sido elaborado con el fin de brindar seguridad y capacidad de argumentación a los estudiantes en lo relacionado con medición de ángulos, tema fundamental en el estudio de la trigonometría. (Ver anexo F).

7.6.2 Protocolo de la situación. Después de entender el concepto de ángulo se graficaron diferentes ángulos positivos y negativos; luego en la actividad 1 los estudiantes tuvieron la oportunidad de medir ángulos principales: 90° , 180° , 270° y 360° en grados y radianes de una forma fácil

comprendiendo gráficamente porque $90^\circ = \pi/2$, $180^\circ = \pi$, $270^\circ = 3\pi/2$ y $360^\circ = 2\pi$.

En la actividad 2, los estudiantes pudieron construir y observar cuando un ángulo mide un radián relacionando su medida en grados algebraicamente y verificando su respuesta con los datos suministrados por la calculadora; también pudieron establecer una regla general para hacer conversiones entre grados y radianes y los ejercicios los realizaron fácilmente entendiendo su procedimiento que es lo más importante que pudo sacarse de esta actividad.

Las actividades 3 y 4 se convirtieron en una sencilla forma de exploración de las relaciones existentes entre ángulos y sus arcos intersecados. Los estudiantes a partir de las reflexiones y observaciones realizadas a partir de las construcciones establecieron reglas generales para la medida de ángulos centrales e inscritos. Aquí se propuso como actividad para trabajar en casa, encontrar las relaciones que existen entre los ángulos y los arcos intersecados entre dos cuerdas que se cortan en una circunferencia. Estas actividades se caracterizaron porque cada paso del procedimiento tenía sentido para los estudiantes, quienes trabajaron con empeño y lograron excelentes resultados, presentado informes ordenados y lo más importante acertando en las conclusiones.

En la actividad 5, descubrieron que dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes estableciendo el primer criterio de semejanza, relacionando el concepto de paralelismo y verificando por medio de las herramientas de la calculadora que realmente los lados correspondientes de los triángulos semejantes son paralelos. Los estudiantes aprendieron a manejar la opción de rotación cuando se quiere construir una

figura con un ángulo determinado. Así las construcciones se hacen más perfectas y no tenemos que aproximar, otro de los grandes poderes de Cabri.

En la actividad 6, los estudiantes repasaron los conceptos de proporción y los otros dos criterios de semejanza de triángulos a partir de diferentes construcciones y reflexiones de las situaciones presentadas. A la hora de desarrollar los ejercicios de aplicación se notó un gran avance en la realización, gracias a esto se pudo comprobar que entendieron los criterios de semejanza y que por medio de actividades como ésta y utilizando el programa Cabri Geometry se pueden obtener excelentes resultados.

7.6.3 Análisis de resultados. En el desarrollo de este taller se alcanzaron los siguientes resultados:

- ? Los estudiantes entendieron el concepto de medición de ángulos en grados y radianes y el porqué de cada valor. Algo que casi siempre se omite dando por hecho que los estudiantes deben aceptar que $360^\circ = 2\pi$.
- ? Representaron los ángulos principales hallaron su valor en grados y en radianes y por medio de las herramientas de la calculadora pudieron verificar sus respuestas.
- ? Entendieron y construyeron el concepto de radián estableciendo una regla general para la conversión de medidas de los ángulos.
- ? Establecieron reglas generales para calcular medidas de ángulos centrales, inscritos, formados por la intersección de dos cuerdas; utilizando la medida de sus arcos intersecados.

- ? Estudiaron y manejaron criterios de semejanza de triángulos, entendiendo que dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma y no igual área y no es necesario que sean iguales, es decir; dos triángulos iguales son semejantes, pero dos triángulos semejantes no siempre son iguales.
- ? Observaron como se involucra el concepto de paralelismo y el de proporción en la semejanza de triángulos.

7.6.4 Conclusiones. Este taller antes de presentar ejercicios mecánicos se dedicó con especial cuidado a construir a partir de diferentes situaciones donde el estudiante reflexionó, analizó, observó y sacó conclusiones, pudo construir conocimientos relacionados con ángulos, indispensables para el estudio de la trigonometría.

En el taller se observaron grandes avances y mayor motivación para abordar el tema, gracias a la presentación de las actividades y los constantes cuestionamientos por parte de los estudiantes. La educación sería más agradable y más significativa si el estudiante pudiera asegurar que todo lo que aprende tiene sentido y relación.

7.7 TALLER No. 6

TALLER No. 6

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Resolver un triángulo es hallar el valor de sus lados y sus ángulos cuando se conocen algunos de ellos. Para esto contamos con las funciones trigonométricas de ángulos del triángulo en función de sus lados.

En el triángulo rectángulo adoptaremos, el siguiente convenio de nomenclatura para sus 6 elementos (3 lados, 3 ángulos). Al ángulo recto lo llamaremos B y los otros dos A y C respectivamente. A cada lado se le nombrará igual que al ángulo opuesto pero con letra minúscula. Dado un triángulo rectángulo, y fijándonos en uno de sus ángulos agudos, llamaremos cateto **opuesto** a él que tiene enfrente y cateto **adyacente** al que forma uno de sus lados. La **hipotenusa** es por definición el lado mayor del triángulo.

Actividad No. 1

Vamos a definir las funciones trigonométricas. Para ello necesitamos un conjunto de salida que serán todos los ángulos centrales de la circunferencia de radio r y un conjunto de llegada que serán todas las parejas ordenadas (x, y) que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. A cada ángulo central le asignamos el punto (x, y) correspondiente al extremo del lado final del ángulo, de la siguiente forma:

En Cabri realice lo siguiente:

- ? Represente una circunferencia de radio 1. Construya un ángulo central AOB y encuentre su medida.
- ? Trace por el punto B, una perpendicular al lado inicial del ángulo.
- ? Marque el triángulo que se forma al realizar esta construcción. Calcule la longitud de los catetos del triángulo.
- ? Calcule el valor del seno de el ángulo central y el valor del coseno del ángulo central. Compare estos datos con las longitudes de los catetos, ¿qué sucede?
- ? Según esta construcción, a que corresponden respectivamente Seno de ? y Coseno de ?.
- ? Amplíe la circunferencia, que sucede con esta relación.
- ? Calcule el cociente entre los catetos del triángulo y la longitud del radio. ¿Qué ocurre?
- ? Según esto, ¿A que corresponden respectivamente Seno ? y Cos ? cuando el radio es diferente de 1?

Además de las funciones Seno y Coseno, existe otra función trigonométrica fundamental: la función Tangente. Esta función hace corresponder cada ángulo con el cociente y/x de las coordenadas del extremo de lado final del ángulo.

- ? Compruebe con la construcción anterior esta definición.

Actividad No. 2

- ? Construya dos circunferencias concéntricas de radios 1 y 4 respectivamente. Trace un ángulo central que interseque las dos circunferencias. Encuentre los

puntos de intersección $P(x, y)$ y $Q(x_1, y_1)$ entre las circunferencias y el ángulo trazado.

- ? Trace por los puntos A y B respectivamente dos perpendiculares al lado inicial del ángulo.
- ? Marque los puntos de intersección entre el lado inicial del ángulo y las rectas perpendiculares y llámelos A y B respectivamente.
- ? Trace los dos triángulos OAP Y OBQ que se forman. Los triángulos que se han formado son semejantes. ¿Por qué?
- ? Si dos triángulos son semejantes los lados homólogos son proporcionales. Establezca esta proporción.
- ? Ahora bien, sabemos que $OA = x$, $OB = x_1$, $AP = y$, $BQ = y_1$, $OP = 1$, $OQ = R$.
- ? Reemplace estos datos en la proporción anterior.
- ? Tome parejas de estas tres razones y defina la funciones trigonométricas seno, coseno y tangente. ¿A que equivale $\text{Sen } ?$, $\text{Cos } ?$ y $\text{Tan } ?$, en la circunferencia de radio 1?
- ? Reemplace estos datos en la proporción y defina las funciones trigonométricas en una circunferencia de radio diferente de 1.

Actividad No. 3

Las razones trigonométricas de un ángulo en un triángulo rectángulo se definen en función de sus lados.

- ? Construya un triángulo rectángulo ABC, donde B es el ángulo recto, b es la hipotenusa y a y c son los catetos del triángulo.
- ? Calcule la longitud de cada uno de los lados del triángulo.
- ? Calcule la medida del ángulo C.
- ? Calcule la medida del Seno del ángulo C y del coseno del ángulo C, con la calculadora de Cabri.
- ? Establezca una relación entre los lados del triángulo y la medida del seno y el coseno del ángulo C.

Actividad No. 4

Sin utilizar la calculadora. Halle los valores de las funciones seno, coseno y tangente de los ángulos agudos en:

- ? Un triángulo rectángulo isósceles.
- ? En un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60° respectivamente.

Existen 6 funciones trigonométricas de las cuales hemos estudiado seno, coseno y tangente. Las otras tres son: cosecante, secante y cotangente, las cuales definiremos como los inversos multiplicativos del seno, coseno y tangente respectivamente.

? ¿Según esta información a que equivale cada una de estas nuevas funciones?

Las razones trigonométricas son la base fundamental de numerosas aplicaciones matemáticas y físicas. Su comprensión significa un avance importante en el estudio de las matemáticas.

7.7.1 Diseño y elaboración. Nuestro objeto de estudio son las relaciones trigonométricas, la ley del seno y la ley de coseno en el triángulo. Por esta razón los talleres anteriores fueron dedicados al estudio de conceptos relacionados con este tema y gracias a ello se realizará un estudio más significativo para alcanzar nuestros objetivos.

La mayoría de los estudiantes de trigonometría han aprendido una serie de fórmulas acerca de las funciones trigonométricas es decir conocen de memoria que el seno de un ángulo es igual al cateto opuesto sobre la hipotenusa, y así las otras 5 funciones restantes. Sería muy interesante poder mostrar al estudiante la validez de estas relaciones, todo lo que ellas significan y los elementos que involucran. En este sentido este taller pretende realizar esto y mucho más, para que éste estudio se convierta en algo interesante y con sentido para los estudiantes, lejos del aprendizaje de fórmulas y algoritmos para resolver ejercicios rutinarios.

En la actividad No 1 se definen las funciones trigonométricas para un ángulo de un triángulo construido sobre una circunferencia de radio 1, mostrando en que forma afecta la longitud del radio a las funciones trigonométricas, gracias

al carácter interactivo de Cabri, definiendo así las funciones trigonométricas para un triángulo rectángulo a partir de un sistema de coordenadas.

En la actividad 2, los estudiantes deben definir nuevamente las funciones trigonométricas para un ángulo trazado en diferentes circunferencias concéntricas para descubrir que el valor de las funciones no depende de la longitud de los catetos sino exclusivamente de la amplitud del ángulo. Además a partir de las proporciones realizadas en esta situación debido a la semejanza de triángulos se establecerán las relaciones trigonométricas del ángulo.

En la actividad 3, se definirán las funciones trigonométricas para un triángulo rectángulo en función de sus catetos y su hipotenusa y servirá de ejemplo para asignar a cada elemento del triángulo la nomenclatura adecuada y en la actividad 4, el estudiante debe encontrar el valor de las funciones trigonométricas para ángulos de 45° , 30° y 60° utilizando todas las propiedades de los triángulos. Por esta razón el taller pide encontrar las funciones trigonométricas de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo isósceles. El estudiante debe estar en la capacidad de construir en un triángulo equilátero, 2 triángulos rectángulos, para encontrar el valor de las funciones para un ángulo de 60° y 30° .

Finalmente se definen las otras 3 funciones restantes secante, cotangente y cosecante.

Las razones trigonométricas son la base fundamental de numerosas aplicaciones matemáticas y físicas. Su comprensión significa un avance muy importante en el estudio de las matemáticas. Por esta razón este taller pretende exponerlas de forma diferente utilizando el programa Cabri Geometry y tratando de darle sentido a cada definición procurando verificar

gracias a la interactividad de Cabri, las relaciones existentes y los elementos sobre los cuales se encuentran definidas. (Ver anexo G).

7.7.2 Protocolo de la situación. Afortunadamente los estudiantes ya conocían las fórmulas de las funciones trigonométricas para un triángulo rectángulo, el taller les sirvió para comprobar valores, para encontrar relaciones y para entender el sentido geométrico de dichas funciones.

Todos los estudiantes conocían estas fórmulas para un triángulo rectángulo pero en el momento en que se llevó a un sistema de coordenadas rectangulares, se presentaron dificultades para relacionar el cateto opuesto con la coordenada y, y el cateto adyacente con la coordenada x. Después de una breve explicación entendieron la relación que existe y porque se debe trabajar sobre un sistema de coordenadas.. Por medio de las herramientas de Cabri descubrieron en que forma las funciones trigonométricas se ven afectadas por el radio con el que se esté trabajando.

En la actividad 2, descubrieron que las funciones trigonométricas no dependen de la longitud de los lados del triángulo sino de la amplitud del ángulo gracias a la interactividad de Cabri. Además calcularon las funciones en diferentes ángulos observando como se mantiene esta situación para condiciones iniciales diferentes.

La actividad 3, fue una simple retroalimentación de lo aprendido en un triángulo rectángulo y utilizando la nomenclatura adecuada y definiendo las funciones trigonométricas en función de los catetos del triángulo y la hipotenusa. No hubo ninguna dificultad para establecer dichas relaciones.

En la actividad 4, se definieron en la misma forma las funciones secante, cotangente y cosecante y se descubrieron las relaciones que existen entre

éstas y las funciones seno, coseno y tangente y luego se trabajaron 2 ejercicios, que rompieron la monotonía en que se trabajan los problemas sobre este tema, es decir, no se pidió al estudiante hallar las funciones en un triángulo rectángulo conocidos los valores de sus lados. Los estudiantes debieron utilizar las propiedades de los triángulos para encontrar el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos básicos y el proceso resultó todo un éxito, aunque se brindó un poco de asesoría para lograrlo, el segundo punto no pudo ser desarrollado por los estudiantes ya que les faltó un poco de creatividad para descubrir que un triángulo cuyas medidas de sus ángulos son 30° , 60° y 90° se encuentra fácilmente cuando se divide un triángulo equilátero en dos trazando su altura.

El taller se convirtió en una actividad fácil, de exploración, de análisis y de astucia para alcanzar todos los objetivos.

7.7.3 Análisis de resultados. En el desarrollo de este taller se alcanzaron los siguientes resultados:

- ? Se logró motivar a los estudiantes para el estudio de las relaciones trigonométricas presentándose dicho tema en forma diferente, logrando que todo lo que aprendieran tuviera sentido y relación.
- ? Los estudiantes observaron que las funciones trigonométricas no dependen de los lados del triángulo sino exclusivamente de la amplitud del ángulo.
- ? Se trabajó el concepto de semejanza de triángulos y se relacionó con el estudio de las funciones trigonométricas.

- ? Se utilizaron las propiedades de los triángulos y otros conceptos aprendidos anteriormente para encontrar el valor de las funciones trigonométricas de diferentes ángulos.

7.7.4 Conclusiones. El estudio de las funciones trigonométricas pasó de ser una simple memorización de fórmulas y aplicación, a una explicación significativa de su definición y las relaciones con los elementos involucrados convirtiéndose en una alternativa diferente de presentar las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, el cual logró motivar a los estudiantes quienes estuvieron atentos, concentrados y trabajaron con empeño logrando excelentes resultados.

7.8 TALLER No 7

TALLER No. 7

RESOLUCIÓN TRIANGULOS RECTANGULOS

Concentraremos ahora toda nuestra atención en resolver triángulos, donde el teorema de Pitágoras, las funciones trigonométricas y todas las propiedades de los triángulos serán nuestras herramientas de trabajo.

El programa Cabri Geometry permite plantear, resolver y comprobar el resultado de cualquier problema de resolución de triángulos, la representación gráfica y la manipulación de los objetos nos ayuda a comprender el proceso.

Actividad No. 1. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Resolver un triángulo es hallar el valor de sus lados y sus ángulos cuando se conocen algunos de ellos.

- ? Construya un triángulo cuyos lados $AB = 4\text{cm}$, $AC = 2.83\text{cm}$ el ángulo comprendido entre los dos, es decir, $A = 60^\circ$. ¿Cuál es el valor de los otros elementos? Utilice la calculadora para explorar.
- ? Si se conoce el lado $AB = 5\text{cm}$ los ángulos $A = 30^\circ$ y $B = 120^\circ$ ¿Se podría dibujar un triángulo de lados $AC = 6$, $CB = 5$ y el ángulo $A = 45^\circ$? Utilice la construcción anterior para explorar.
- ? ¿Conociendo dos ángulos de un triángulo cualquiera podemos conocer el tercer ángulo? ¿Por qué? Trate de demostrarlo.
- ? ¿Es suficiente conocer el valor de un ángulo de un triángulo rectángulo para conocer todos sus ángulos? ¿Qué ocurre en los triángulos isósceles y escaleno?
- ? ¿Se puede construir un triángulo rectángulo equilátero?
- ? Elabore una lista de las propiedades, teoremas, herramientas, que hemos estudiado y que nos ayudarán en esta parte de la trigonometría.

- ? Un triángulo ABC tiene un ángulo recto B y dos ángulos agudos A y C . Los lados del triángulo AB y AC miden 3 y 4 cm respectivamente. Encuentre el valor del tercer lado y utilice las funciones Seno y Coseno para encontrar la medida de los ángulos A y B . Asegúrese de que su calculadora este en modo DEGREE.
- ? Resuelva el triángulo ABC , en el cual $c = 36$ m y el ángulo $A = 56^\circ$.
- ? Construya estos triángulos en el programa Cabri Geometry y verifique sus respuestas.

Actividad No. 2. CONSTRUCCIÓN DE TRIANGULOS RECTANGULOS.

Resolver un triángulo es un proceso mecánico, donde a través de la práctica se logra la perfección. Tal vez resulte aburrido repetir este proceso que fácilmente podría hacerlo una calculadora si la programamos para ello. Lo importante es conocer el proceso y saber el porqué de dicho proceso. En este sentido esto ya lo conocemos, ahora vamos a simplificar el trabajo:

Vamos a elaborar un diseño en Cabri para construir triángulos rectángulos, conocidos algunos de sus elementos. De esta forma podemos conocer todos los valores restantes.

- ? Vamos a construir un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa mide 1.5 cm y un cateto mide 1 cm y vamos a calcular todos sus elementos.
1. Edite los valores $a = 1.5$ cm y $c = 1$ cm. En una semirrecta de origen B , transfiera las medidas anteriores.
 2. Construya una circunferencia con centro en B y radio 1.5 .
 3. Trace una recta perpendicular a la semirrecta y que pase por el punto C .

4. Encuentre el punto de intersección entre la circunferencia y la recta perpendicular.
 5. Construya el triángulo formado por los puntos B, C, y A en el punto de intersección.
 6. Calcule la medida de todos los lados y todos los ángulos.
 7. Se ha construido un modelo para resolver cualquier triángulo rectángulo conocido dos de sus lados.
 8. Teclee doble Enter en cada uno de los valores asignados y cambie los datos. Observe lo que sucede.
- ? De esta misma forma construya un modelo para construir triángulos rectángulos conocidos el valor de un lado y un ángulo.
- ? ¿Se puede construir un modelo similar para triángulos rectángulos conociendo los tres ángulos?
- ? ¿Qué conclusión se puede sacar de todo esto?

Actividad No. 3 Medir la altura de una montaña.

En la llanura desde un punto cualquiera se mide el ángulo B de elevación a una montaña y se obtiene 43° , nos acercamos a la montaña 80 m y se vuelve a medir el ángulo C de elevación obteniéndose 52° . Halle la altura de la montaña. Resuelva este problema sin utilizar su calculadora, elaborando un plan de solución y utilizando todo su ingenio para llegar a la respuesta.

- ? Ahora realice el siguiente procedimiento en Cabri:
1. Edite los valores 0.8, 43 y 52. Recuerde que en Cabri debemos dividir entre 100 las cantidades grandes, para que las figuras puedan representarse fácilmente, al final debemos multiplicar la respuesta por 100.
 2. Construya una semirrecta que empiece en B. Transfiera 0.8 sobre la semirrecta. Gírela 43° respecto del punto B y gírela 52° respecto del punto C. Etiquete el punto como D en la intersección de las dos semirrectas. Trace una perpendicular que pase por D y llame A al punto de intersección de las semirrectas perpendiculares. Construya los triángulos, oculte lo que no sea necesario.
 3. Mida los ángulos.
 4. Mida la altura. ¿La altura de la montaña es 275 m? Compare esta respuesta con la de su ejercicio.
 5. Construya la montaña con la opción polígono tecleando Enter en los distintos vértices, el último tiene que coincidir con el primero.

Actividad 4.

Solucione el problema que se presenta a continuación únicamente utilizando la calculadora, construya un diseño para la situación y encuentre la respuesta con las herramientas de la calculadora.

Se necesita construir una rampa para llegar a una puerta. La distancia entre el suelo y el nivel de la puerta es de 1.5 pies. No quiere que el ángulo de inclinación sea mayor de 15.24° grados. La distancia desde la calle a la puerta es de 6 pies. ¿Hay suficiente espacio para construir la rampa?

Como ocurre en el problema que se planteó es habitual que se presente la necesidad de efectuar algunas mediciones que de no ser por la trigonometría, supondrían un trabajo arduo. En la mayoría de los casos basta con recolectar algunos datos y relacionar las fórmulas trigonométricas con los elementos apropiados en un triángulo rectángulo. De este modo pueden llevarse a cabo mediciones que tal vez logren asombrarte.

7.8.1 Diseño y elaboración. La trigonometría tiene su origen en el estudio de las medidas del triángulo. Muchos problemas del mundo real requieren resolución de triángulos. Además en muchos temas de matemáticas de importancia, tales como a representación matricial de giros, los ángulos de dirección de vectores, las coordenadas polares y la expresión en forma trigonométrica de números complejos, se necesitan razones trigonométricas, subrayando más intensamente la conexión que existe entre la geometría y el álgebra.

Las calculadoras científicas deben facilitar la enseñanza de la trigonometría al proporcionar más tiempo lectivo y más potencia en los cálculos. Las utilidades gráficas proporcionan herramientas dinámicas que permiten que el alumno realice el modelo de muchas situaciones de problemas realistas por medio de ecuaciones trigonométricas. Las situaciones gráficas deben jugar también un papel importante en la adquisición de estructuras conceptuales de las propiedades de las funciones trigonométricas.

Los estudiantes deben estar en la capacidad de resolver triángulos aplicando métodos trigonométricos. En este sentido este taller busca presentar de forma diferente el proceso de resolución de triángulos, utilizando la tecnología como herramienta fundamental para ahorrar cálculos y procedimientos innecesarios y para que por medio de las reflexiones realizadas a partir de la utilización del programa Cabri Geometry, se puedan sacar diversas conclusiones y construir el conocimiento.

En la actividad 1, se presenta por medio de preguntas y análisis de situaciones, las pautas generales para la resolución de triángulos, el estudiante en este nivel de la propuesta debe estar en capacidad de resolver dichas preguntas y saber que conceptos debe utilizar, cuando utilizarlos y porqué utilizarlos.

Para esta propuesta metodológica adquirir una habilidad en la búsqueda de valores de los elementos del triángulo, es un proceso necesario pero que en cierta forma se convierte en un ejercicio aburrido para el estudiante que domina la mecánica de solución, por esta razón, este taller proporciona al estudiante procedimientos para construir en el programa Cabri Geometry un modelo de solución de triángulos, para que a partir de una asignación de valores determinados se solucionen diferentes tipos de triángulos rectángulos. Lo importante es que el estudiante conozca y entienda el proceso, pero el programa es quien hace la tarea larga.

Se presentan problemas que involucran la resolución de triángulos rectángulos, donde el estudiante además de realizar todo el proceso de solución, utilizando las relaciones trigonométricas tiene la oportunidad de verificar su solución construyendo un diseño para la misma situación en Cabri, para realizar más adelante los problemas de este tipo de una forma más sistemática y rápida.

Es importante explicar, que los procedimientos que realiza la calculadora son procesos mecánicos, que el estudiante conoce y domina y que en cualquier situación donde no cuente con éste tipo de ayuda, podrá resolverla sin problema. Esto sólo constituye una forma más práctica, más amena y más rápida de solución.

7.8.2 Protocolo de la situación. Los estudiantes conocían el proceso de solución de triángulos rectángulos pero el taller se convirtió en un proceso más significativo, donde a partir del análisis hecho por los estudiantes se sacaron diversas conclusiones y el proceso de enseñanza – aprendizaje se hizo mas enriquecedor en diferentes aspectos.

Los estudiantes resolvieron diferentes tipos de triángulos, de diversas formas, adquiriendo fácilmente la mecánica de resolución, utilizaron las herramientas y los conocimientos adquiridos en los talleres anteriores, para interpretar, analizar y afianzar todos sus conocimientos acerca de solución de triángulos rectángulos.

En la actividad 1, cada punto propuesto se desarrolló haciendo la respectiva socialización y entendiendo más a fondo el proceso. En los primeros puntos de la actividad 1, se presenta una situación muy interesante ya que se pide al estudiante que construya por medio de Cabri un triángulo con datos pre determinados, el cual no puede ser construido, los estudiantes intentaron construir dicho triángulo, usando el método de ensayo y error, pero no lo lograron, luego después de sugerir que utilizaran la opción de rotación para generar los ángulos conocidos, se verificó gráficamente que dicho triángulo no podía ser construido, es decir; los estudiantes conocieron de datos algunos datos en un triángulo, en algunos casos dichos datos no originan ningún triángulo. Se presentan también ejercicios prácticos donde el estudiante adquiere la mecánica de la resolución de triángulos. Algunos

estudiantes fueron muy ordenados y no tuvieron problema para resolver los ejercicios, otros por el contrario presentaron dificultades, pero gracias a la socialización realizada se adquirió la mecánica de solución de triángulos de forma clara, convirtiéndose en un proceso fácil para los estudiantes.

Los estudiantes utilizaron adecuadamente las herramientas de transferencia de medidas, rotación y edición numérica necesarias para construir un diseño perfecto verificando con éxito sus respuestas. Algunos intentaban hacerlo al azar pero siempre aproximaban.

En la actividad 2 después de construir un modelo propuesto para la solución de triángulos rectángulos en Cabri, exploraron diversos triángulos cambiando las condiciones iniciales, trataron de diseñar su propio modelo utilizando otras condiciones iniciales, pero la mayoría de modelos no funcionaban como el anterior, ¿Por qué? Tal vez el hecho de que en la anterior apareciera una circunferencia podría darnos una idea para construir el otro. La verdad no hubo ningún estudiante tan inspirado, pero se intentó, se utilizaron rotaciones y perpendiculares para construir el triángulo rectángulo con estas condiciones y los estudiantes pudieron construir el modelo de solución para éste caso, seguidos de las instrucciones impartidas. Para construir el modelo correspondiente a 3 ángulos como condiciones iniciales, se utilizaron rotaciones, teniendo en cuenta el sentido en que se originan los ángulos. El taller fue placentero para los estudiantes y se salió de la monotonía sobre la cual constantemente se trabaja este tema.

En la actividad 3, se llevó a la práctica lo aprendido y los alumnos se beneficiaron de las propiedades de la calculadora para explorar y verificar sus respuestas. Gracias a la interactividad de Cabri, con un solo triángulo se obtienen registros de diferentes triángulos para que el estudiante saque

por sí solo conclusiones importantes y establezca reglas generales para engrandecer más su conocimiento.

El último problema lo trabajaron directamente en la calculadora, haciendo diseños muy creativos y con respuestas acertadas. Se escogió el mejor diseño realizado por un estudiante para anexar en este proyecto. Algunos estudiantes no pudieron realizar la construcción por sí solos, pero con un poco de orientación lo lograron.

7.8.3 Análisis de resultados. En el desarrollo de este taller, los alumnos alcanzaron los siguientes resultados:

- ? Conocieron y manejaron el proceso de solución de triángulos rectángulos.
- ? Establecieron relaciones entre los conceptos adquiridos anteriormente y el proceso de solución de triángulos rectángulos.
- ? Determinaron a partir de las diferentes reflexiones hechas a partir de las construcciones cuáles elementos mínimos se requieren para solucionar un triángulo completamente.
- ? Pudieron darse cuenta en que forma la tecnología se convierte en una gran herramienta de trabajo.
- ? Construyeron y manejaron diseños para solucionar triángulos en el programa Cabri Geometry para ahorrar tiempo y cálculos innecesarios.

- ? Pudieron relacionar el proceso de solución con actividades prácticas donde se ponía en juego la buena interpretación de la información y la excelente relación del problema con los conocimientos adquiridos hasta este momento.
- ? Realizaron los ejercicios sobre triángulos rectángulos en el programa Cabri Geometry sin necesidad de utilizar lápiz y papel, logrando mayor habilidad en la interpretación de la información y la construcción de gráficas que representaran exactamente la situación.

7.8.4 Conclusiones. El proceso de resolución de triángulos es un tema agradable, fácil muy importante en el estudio de la trigonometría de él depende básicamente el éxito de ella. En este sentido, este taller se convirtió en una forma enriquecedora de presentar dicho proceso, dejando de un lado la monotonía y la repetición de ejercicios sin ningún sentido.

Se trató de llegar a los estudiantes en forma clara, precisa y concisa sobre todo lo relacionado con el tema, se utilizó la tecnología como fuente fundamental del desarrollo del pensamiento y se logró motivación gracias a la interactividad de Cabri. Es muy interesante poder enseñar con sentido y relación y utilizando favorablemente los recursos que nos proporciona el entorno y la vida actual.

7.9 TALLER No. 8

TALLER No. 8

LA LEY DEL SENO Y LA LEY DEL COSENO

RESOLUCIÓN DE TRIANGULOS NO RECTÁNGULOS

Hasta el momento hemos trabajado con triángulos rectángulos, ahora centremos toda nuestra atención en el proceso de solución para triángulos no rectángulos, por esta razón incluiremos dos teoremas fundamentales: La ley del seno y la ley del coseno en el triángulo.

En este tipo de triángulos (ya que no hay ningún ángulo recto), necesitamos saber al menos tres de los 6 elementos, y de ellos, al menos uno ha de ser un lado. Veamos.

Para resolver triángulos oblicuángulos (no rectángulos) contamos con dos teoremas o leyes fundamentales: LA LEY DEL SENO Y LA LEY DEL COSENO.

Recordemos que las definiciones seno, coseno y tangente sólo son aplicables a triángulos rectángulos, pues sólo en estos triángulos es posible hablar de cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa.

Actividad 1. LEY DEL SENO.

1. Construya un triángulo ABC.
2. Mida cada uno de sus lados.
3. Marque y mida sus ángulos. Para marcar los ángulos existe en Cabri en F7 - 7 dicha opción. Inténtelo. Ahora para medir los ángulos sólo debe dar Enter sobre la marca del ángulo, es más fácil. Compruébelo.
4. Elija construir mediatriz, teclee Enter en cada uno de los lados y marque el circuncentro O en el punto de intersección de las mediatrices. Oculte las mediatrices.
5. Construya la circunferencia circunscrita.
6. Construya y mida su diámetro.
7. ¿Qué relación hay entre el cociente que se obtiene al dividir cada lado por el seno del ángulo opuesto y el valor del diámetro?
8. Arrastre uno cualquiera de los vértices para modificar el triángulo. ¿Qué le sigue sucediendo al cociente que se obtiene al dividir cada lado por el seno del ángulo opuesto y el valor del diámetro?
9. ¿Qué puede concluir de esto? Establezca esta relación.
10. Esta es la ley del seno para triángulos oblicuángulos.
11. Cuando un ángulo es recto, ¿Qué particularidad tiene el lado opuesto?
12. Guarde la construcción como Seno.
13. Trace una de las alturas del triángulo y utilice el teorema de Pitágoras para demostrar la ley del seno para cada uno de los lados del triángulo.

Actividad 2

Resuelva un triángulo sin utilizar la calculadora en el que se conoce: $a = 2.2$ cm, $b = 3.4$ cm y $A = 48^\circ$. ¿Qué ocurre?

Ahora realice el siguiente procedimiento en Cabri

1. Edite los valores a , b anteriores y $A = 24^\circ$.
 2. Construya una semirrecta de origen A .
 3. Transfiera 3.4 sobre la semirrecta y etiquete el punto como C .
 4. Gire la semirrecta por el punto A , 24° .
 5. Transfiera 2.2 sobre el punto C , en cualquier parte.
 6. Construya una circunferencia de centro C y que pase por el punto transferido.
 7. Halle las intersecciones de la semirrecta girada con la circunferencia, etiquete los puntos como B_1 y B_2 .
 8. Construya los dos triángulos AB_1C y AB_2C .
 9. Oculte lo que no necesite.
 10. Marque y mida los ángulos A , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 . Observe muy bien los dos triángulos para hacer las marcas correctas.
 11. Mida los lados de los dos triángulos. ¿Qué se observa?
- ? Responda: ¿Cuántas soluciones encontramos para las condiciones anteriores?
- ? Edite los valores del ángulo $A = 48^\circ, 12^\circ, 90^\circ$. ¿Qué ocurre?
- ? ¿Qué podríamos decir de las soluciones de un triángulo cuando se conocen 2 lados y un ángulo opuesto a uno de ellos?

Actividad 3 LA LEY DEL COSENO

Vamos a trabajar con otro teorema importante para la solución de triángulos no rectángulos que no pueden resolverse por la ley del seno.

Construya un triángulo en que: $a = 2,8$ cm, $b = 1,3$ cm y $C = 57^\circ$. Calcule el lado c midiendo y utilizando la calculadora, compruebe que se obtiene: $c = 2.36$ cm.

Compruebe la siguiente igualdad a partir de los valores obtenidos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

- ? Cambie los valores iniciales y observe que sucede?
- ? ¿Qué ocurre si es un triángulo rectángulo?
- ? Esta es la ley del coseno.

La ley del coseno podría formularse verbalmente diciendo que en un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble del

producto de ambos por el coseno del ángulo que forman, esto es, para cada uno de los lados tendríamos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{ó} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{ó} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A$$

Vamos a demostrar la primera, pues en las otras el razonamiento sería el análogo, sin utilizar la calculadora.

1. Dibuje un triángulo ABC cualquiera y trace la altura h correspondiente al vértice B.
 2. Aplique el teorema de Pitágoras al triángulo BDC.
 3. y en el triángulo ADB.
 4. Realice la sustitución adecuada hasta relacionar los elementos involucrados en la primera fórmula de la ley del coseno.
 5. Demuestre a partir de ésta relación y de la gráfica construida, la primera fórmula de la ley del coseno.
 6. Compruebe este resultado para todos los elementos del triángulo utilizando las herramientas de la calculadora y la construcción de la actividad No 3.
- ? Realice los despejes correspondientes y exprese en forma escrita las fórmulas adecuadas para calcular el valor de los ángulos en un triángulo cualquiera.

Actividad 4 (Sin utilizar la calculadora)

- ? Resuelva un triángulo en el que se conoce $A = 36^\circ$; $b = 13$ cm y $c = 6$ cm.
? Resuelva un triángulo en el que se conoce $A = 45^\circ$, $B = 75^\circ$ y $c = 10$ cm.

Actividad 5

1. Construya un triángulo en el que se conoce: $a = 3,4$ cm , $B = 55^\circ$ y $C = 28^\circ$. Cambie los valores, explore y responda:

- ? ¿Cuántas soluciones tiene un triángulo cuando se conocen dos ángulos y un lado?

2. Construye un triángulo en el que se conoce: $a = 2,6$ cm, $b = 1,7$ cm y $C = 39^\circ$. Cambien los valores, explore y responda:

- ? ¿Cuántas soluciones tiene un triángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos?

7.9.1 Diseño y elaboración. Hasta el momento hemos trabajado con triángulos rectángulos, ahora concentraremos toda nuestra atención en el proceso de solución para triángulos oblicuángulos. Este taller tiene como propósito exponer el proceso de solución para triángulos de este tipo y de esta forma completar el proceso de solución de cualquier tipo de triángulos, utilizando el teorema de Pitágoras, las propiedades geométricas necesarias, las funciones trigonométricas, la ley del seno y la ley del coseno y todas las relaciones que hemos podido establecer a lo largo del desarrollo de esta propuesta metodológica.

El taller ha sido diseñado de manera tal que el estudiante a partir de sus observaciones y el análisis hecho a las diferentes situaciones pueda deducir, interpretar y demostrar la ley del seno y la ley del coseno.

También se presentan dentro de las actividades ejercicios de mecanización para desarrollar la habilidad en la solución de triángulos. Se incluyen problemas donde la buena interpretación de la información garantiza el éxito de la solución.

Por medio de la interactividad del programa Cabri Geometry, en la actividad 5 el estudiante debe deducir ciertas características importantes en la resolución de triángulos.

Este taller ha sido diseñado para exponer de forma creativa y significativa el estudio de la ley del seno y la ley del coseno en el triángulo. (Ver anexo I).

7.9.2 Protocolo de la situación. Inicialmente los estudiantes entendieron el porqué del estudio de este nuevo tema dentro de la trigonometría, lo cual resultó muy importante para la motivación de ellos hacia el taller.

En la actividad 1, los estudiantes descubrieron la famosa relación llamada ley del seno y los elementos que en ella se encuentran relacionados.

Didácticamente resulta más interesante y significativo que el estudiante descubra por sí mismo las leyes generales de la matemática y afortunadamente el programa Cabri Geometry brinda dichas posibilidades de deducción y descubrimiento. En este sentido, los estudiantes a través del desarrollo de esta actividad encontraron las igualdades que relaciona el valor de los lados con el valor del seno de los ángulos opuestos a dichos lados. También tuvieron la oportunidad de realizar una demostración geométrica de la ley del seno, para darle sentido y relación a esta nueva definición, en este punto no resultó tan fácil para ellos hacer dicha demostración, pero al explicarles su procedimiento entendieron que sólo se necesitaba un poco de análisis y utilizar todo lo aprendido anteriormente, se esperaba que ellos pudieran hacerlo, pero desafortunadamente no fue así, aunque algunos alumnos tuvieron ideas buenas y utilizaron los conceptos apropiados.

Los estudiantes pudieron observar las maravillosas herramientas de Cabri y las grandes ventajas de su utilización. También pudieron observar por medio de la exploración que cuando se conocen de un triángulo 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, el problema puede tener solución única, dos soluciones o ninguna solución. Inmediatamente se les preguntó cuántas soluciones podría tener un triángulo donde se conocen sus 3 lados, después de pensarlo un instante, respondieron con seguridad que sólo una, haciendo una pequeña ilustración en el tablero.

En la actividad 3, la ley del coseno fue presentada en la forma tradicional, aunque afortunadamente gracias a la interactividad de Cabri se pudo observar la veracidad de la igualdad llamada ley del coseno. También se pidió demostrar geoméricamente la ley del coseno y los estudiantes

podieron establecer las fórmulas para obtener el valor de un ángulo cualquiera en un triángulo oblicuángulo. Se presentaron también ejercicios básicos para adquirir la mecánica del teorema, en la actividad 4.

En la actividad 5, los estudiantes presentaron dificultad para responder las preguntas debido a la falta de interpretación en las construcciones, pero a través de orientaciones adecuadas pudieron observar lo que se esperaba y concluir lo que se debía.

El taller resultó agradable y lleno de aspectos significativos que contribuyeron a la construcción de los conceptos relacionados con el proceso de solución en triángulos oblicuángulos.

7.9.3 Análisis de resultados. En el desarrollo de este taller se obtuvieron los siguientes resultados:

- ? Los estudiantes analizaron la ley del seno y los elementos relacionados en ella para resolver triángulos oblicuángulos.
- ? Los estudiantes demostraron la ley del seno mediante la descomposición de un triángulo cualquiera en triángulos rectángulos.
- ? Estudiaron y analizaron la ley del coseno y los elementos relacionados en ella para resolver triángulos oblicuángulos.
- ? Demostraron la ley del coseno en condiciones similares a las de la ley del seno.

- ? Discutieron las posibles soluciones de triángulos oblicuángulos en diferentes casos.
- ? Resolvieron problemas de cálculo de lados y ángulos de triángulos oblicuángulos mediante las relaciones estudiadas.

7.9.4 Conclusiones. En el desarrollo de este taller el estudiante se capacitó en el proceso de solución de triángulos de cualquier tipo mediante la ley del seno y la ley del coseno, entendiendo dicho proceso de solución dándole sentido y relación para lograr una excelente aplicación.

Las metodologías de enseñanza propuestas en este taller fueron elaboradas con el propósito de desarrollar en el estudiante su capacidad de interpretación, de deducción y de análisis de las diferentes situaciones presentadas, complementando dicho proceso con la ayuda de las nuevas tecnologías para la enseñanza de las matemáticas, mas específicamente el programa Cabri Geometry.

7.10 TALLER No. 9

TALLER NO. 9

UN POCO DE HISTORIA

La teoría que conduce a las soluciones numéricas de los problemas geométricos relacionados con triángulos, es la trigonometría, cuyo significado literal es medición de triángulos. Esta teoría fue desarrollada por Ptolomeo alrededor de 150 d.C, en su obra principal EL ALMAGESTO'

Hallar el valor del seno o el coseno de un ángulo en nuestros tiempos es sólo cuestión de introducir unos datos en la calculadora e inmediatamente obtenemos el valor. Sería muy interesante estudiar en que forma lo hicieron los matemáticos de la antigüedad a quienes les debemos este hermoso trabajo. Ptolomeo no compuso tablas de los valores seno y coseno para un ángulo, él creó la función cuerda referida a un arco θ . Definida como la longitud de la cuerda que corresponde al arco de un ángulo de θ grados en una circunferencia de radio 60, nosotros trabajaremos con radio r .

Encontraremos ahora, la relación que existe entre esta función cuerda y la función seno, a partir de la siguiente actividad:

Actividad 1

1. Construya una circunferencia de radio r y un ángulo central θ .
2. Marque los dos puntos de intersección entre la circunferencia y el ángulo central
3. Construya la cuerda de circunferencia que se forma uniendo los puntos de intersección. Mida la longitud de la cuerda. Este es el valor de cuerda de θ , para un ángulo θ en una circunferencia de radio r .
4. Trace ahora una bisectriz por el ángulo θ . ¿Cuál es el valor de los ángulos que se forman?
5. Se han formado 2 triángulos rectángulos. Encuentre el valor del cateto opuesto en términos de la función seno.
6. ¿Cuál es la relación que existe entre la función cuerda de Ptolomeo y la función seno? Compruebe esta relación con los datos obtenidos en la calculadora.

La mayor parte de los problemas geométricos pueden reducirse a formas que contienen únicamente lados y ángulos de triángulos y éstas pueden resolverse con una tabla de cuerdas de Ptolomeo.

Probaremos ahora que dados 3 de estos valores, de los cuales uno al menos ha de ser un lado, son calculables los 3 valores restantes. Si se cuenta con una tabla de cuerdas, pero como no contamos con ellas, podemos relacionarlas con la función seno y encontrar su valor.

Actividad 2

1. Construya el triángulo ABC de hipotenusa c y catetos a , b y ángulos α , β y γ .
2. Trace cada una de las mediatrices del triángulo y marque el punto de intersección entre éstas.
3. ¿Dónde se encuentra ubicado exactamente el punto de intersección de las mediatrices en un triángulo rectángulo?
4. ¿Sucede esto con otros triángulos?
5. Oculta las mediatrices.

6. Construye una circunferencia con centro en el punto de intersección y diámetro igual a la hipotenusa del triángulo rectángulo. ¿Qué ocurre?
7. Trace un segmento desde el centro de la circunferencia hasta el vértice C del triángulo rectángulo.
8. Si el ángulo $A = \theta$, ¿Cuál es la medida del arco CB ?
9. Calcule la media del ángulo θ y la medida del arco CB .
10. El lado a corresponde a la cuerda del ángulo central formado. Establezca esta relación.
11. Entonces, si conocemos de θ , a y c dos valores podemos conocer el tercero. ¿Por qué?
12. Encuentre el valor de Cuerda de θ (utilizando la relación con la función seno) y compruebe los valores.

Actividad 3

1. En un triángulo rectángulo ABC inscrito en una circunferencia de diámetro igual a la hipotenusa b del triángulo, encuentre el valor de cuerda BC y cuerda AB en términos de las funciones seno y coseno.
2. Encuentre el valor de la hipotenusa b en términos de éstas cuerdas.
3. Geométricamente la hipotenusa en ésta circunferencia es igual a $2r$. Reemplace este valor en la ecuación y observe el resultado que se obtiene.
4. Seguramente todos conocíamos este resultado, y ahora hemos conocido su demostración.

Actividad 4.

Compruebe ahora que, dados en un triángulo cualquiera un ángulo θ y sus lados adyacentes b y c , podemos encontrar el tercer lado y los dos ángulos restantes. Sugerencia: Trace la altura h , para dividir el triángulo en dos triángulos rectángulos.

Siempre que θ sea dado se debe duplicar el valor y buscar en la tabla de cuerdas el valor de cuerda de 2θ y dividir por el diámetro el valor hallado. Esta última operación es muy sencilla pues dividir entre el diámetro equivale a dividir por 2 y después por el radio.

En resumen todo lo que necesitaban era simplemente calcular la mitad de la cuerda del arco duplo. Hubiese sido más fácil preparar tablas de cuerdas para la función mitad del arco duplo, en vez de tablas de la función cuerda. Así lo hicieron los hindúes. La cuerda mitad fue llamada *jiva* en sánscrito.

Ahora bien la palabra *jiva* tiene las mismas consonantes de la palabra árabe *jaib*, que significa entrada. No es extraño que, cuando se tradujeron al latín las obras árabes de astronomía, los traductores, que sabían árabe pero no sánscrito, tomaron por *jaib* el título de la tabla y lo identificaron con la palabra latina *sinus* es decir, entrada.

Fue así como nuestra función seno recibió su curioso nombre; y efectivamente como ya hemos visto, la cuerda mitad del arco duplo corresponde a lo que hoy llamamos seno de un arco.

7.10.1 Diseño y elaboración. Es importante reconocer el trabajo de nuestros antepasados y mas aún cuando se trata de temas tan importantes e influyentes en el estudio de las matemáticas. En este sentido la teoría que conduce a la soluciones numéricas de los problemas geométricos relacionados con triángulos, es la trigonometría, cuyo significado literal es medición de triángulos. Esta teoría fue desarrollada por Claudio Ptolomeo alrededor de 150 d.C, en su obra el ALMAGESTO. Hallar el valor del seno o el coseno en nuestros días es sólo cuestión de introducir unos datos en la calculadora e inmediatamente obtendremos el valor. Sería muy interesante que los estudiantes conocieran en que forma lo hacían los matemáticos de la antigüedad a quienes les debemos este hermoso trabajo. Ptolomeo no compuso tablas de los valores seno y coseno para un ángulo. Él creó la función cuerda referida a un arco θ . Definida como la longitud de la cuerda que corresponde al arco de un ángulo de θ grados en una circunferencia de radio 60.

Este taller tiene como propósito mostrar a los estudiantes las grandes teorías que descubrieron los antiguos matemáticos con respecto a nuestro objeto de estudio y la relación existente entre éstas y las fórmulas actuales.

En la actividad 1, se presenta una explicación de la relación existente entre la función cuerda de Ptolomeo y la función seno de nuestros tiempos. El taller quiere mostrar a partir de la segunda actividad, cómo la mayor parte de los problemas geométricos pueden reducirse a formas que contienen

únicamente lados y ángulos de triángulos y éstas pueden resolverse con una tabla de cuerdas de Ptolomeo. En este sentido, probaremos que dados 3 de estos valores, de los cuales uno al menos ha de ser un lado, son calculables los 3 valores restantes. En la actividad 3, se demuestra a partir de la función cuerda de Ptolomeo un resultado muy conocido y trabajado por los estudiantes: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

En la actividad 4 se invita al estudiante a comprobar que dados en un triángulo cualquiera un ángulo y sus lados adyacentes, se puede encontrar el tercer lado y los dos ángulos restantes trazando la altura para dividir el triángulo en dos triángulos rectángulos.

Finalmente se da una explicación de cómo nuestra función seno recibió su curioso nombre y como se relacionó con la función cuerda de Ptolomeo. (Ver anexo J).

7.10.2 Protocolo de la situación. Inicialmente el taller se tornó un poco monótono debido a la extensión de la introducción, pero era estrictamente necesario hacer dicha introducción para que los estudiantes entendieran el porqué de del taller y de la importancia de su desarrollo.

En la actividad 1, los estudiantes manejaron los conceptos de cuerda de un círculo y pudieron a través de la actividad establecer relaciones entre la función cuerda de Ptolomeo, la cual entendieron y conocieron y la función seno con la que habían venido trabajando anteriormente.

En la actividad 2, los estudiantes a partir de ciertos conocimientos geométricos pudieron demostrar que dados 3 valores en un triángulo se pueden conocer los otros sí se cuenta con una tabla de cuerdas como la de Ptolomeo. Descubrieron además otras propiedades relacionadas con las

mediatrices de un triángulo rectángulo y su punto de intersección. Trabajaron con medidas de arcos, de ángulos y para encontrar relaciones que les permitieran entender el procedimiento de nuestros antiguos matemáticos.

La actividad 3, logró sorprender a los estudiantes quienes descubrieron que las leyes generales de la trigonometría tienen sus bases en los trabajos realizados por nuestros antepasados, de quienes debemos valorar que no contaban con la tecnología con la cual contamos hoy nosotros.

La actividad 4, fue de carácter exclusivamente demostrativo y argumentativo, donde los estudiantes encontraron relaciones entre los triángulos rectángulos y los triángulos no rectángulos. Es importante mencionar que los estudiantes en este momento cuentan con una completa base de conocimientos adquiridos en el desarrollo de esta propuesta metodológica, que les permite argumentar, interpretar, proponer y lo más importante entender el conocimiento y sus respectivas aplicaciones.

7.10.3 Análisis de resultados. En el desarrollo de este taller se obtuvieron los siguientes resultados:

- ? Los estudiantes conocieron los procedimientos elaborados por los matemáticos de la antigüedad en trigonometría.
- ? Establecieron relaciones entre los procedimientos adoptados por los antiguos matemáticos y nuestros procedimientos actuales, en cuánto a trigonometría se refiere.

- ? Verificaron otras curiosidades importantes en el área de la trigonometría por medio de los procedimientos utilizados en la antigüedad.
- ? Descubrieron el proceder de la palabra Seno de nuestra función y su relación con la función cuerda utilizada por Ptolomeo.

7.10.4 Conclusiones. El taller se convirtió en un proceso muy significativo para los estudiantes, y para lograr uno de los mayores objetivos de esta propuesta metodológica: enseñar con sentido y relación. No cabe duda, que conocimientos como éstos hacen que el estudiante valore y se interese más por el estudio de las matemáticas y por descubrir las maravillosas curiosidades que se encierran en las matemáticas hechas por nuestros antepasados.

Aunque se vuelve a caer en el tradicionalismo de enseñar la historia de las matemáticas, se cuenta con un arma poderosa: Cabri Geometry, que hace a través de su dinamismo y sus magníficas herramientas que todo lo que se enseñe tenga sentido y relación en el aspecto geométrico de cada concepto.

CONCLUSIONES

La propuesta metodológica anteriormente desarrollada constituye una herramienta de trabajo excelente para quienes deseen enseñar en forma diferente y significativa las relaciones trigonométricas, la ley del seno y la ley del coseno en el triángulo.

La garantía de que esta propuesta realmente funciona esta reflejada en los resultados obtenidos a partir de los análisis realizados a cada situación observada en las diferentes etapas de su desarrollo.

Tal vez ofreciendo alternativas de enseñanza como ésta logremos alcanzar el objetivo fundamental que nos propusimos alcanzar cuando escogimos esta profesión: Enseñar con sentido.

RECOMENDACIONES

Crear una propuesta metodológica que complemente ésta propuesta trabajando las aplicaciones de los temas vistos bajo el enfoque de resolución de problemas, que debido a la extensión de este tema, no pudo incluirse dentro de esta propuesta, sería un proyecto muy interesante.

BIBLIOGRAFÍA

BARTLE, Robert G y SHERBERT, Donald R. Introducción al Análisis matemático de una variable. Editorial Limusa, segunda Edición. México, 2000.

BALDOR, J.A. Geometría plana y del espacio. Editorial Vasco Americana, S.A. España, 1967.

BOYER, Carl B. A History of Mathematics. John Wiley & sons. New York, 1968.

CLEMENS, Stanley R, O`DAFFER, Phares G y COONEY, Thomas J. Geometría con aplicaciones y solución de problemas. Addison- Wesley Iberoamericana. México, 1998.

FRANS AYRES, JR. Teoría y problemas de trigonometría plana y esférica. Editorial Mc Graw-Hill. México, 1970.

GUZMÁN, Miguel De. Para pensar mejor. Editorial Labor S.A, 1991.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Enlace Editores Ltda. Bogotá, D.C., Diciembre 2001 – Enero 2002.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas. Punto EXE Editores. Bogotá, D.C., 1999.

PEREZ, Jorge, CARO, Víctor E. y OBONAGA, Edgar. Matemática 5 Trigonometría y Geometría Analítica. PIME Ltda. Editores. Cali, Colombia, 1985.

PERSIS, Redgrave y JAMES Roberge. Practica Programada de Geometría Moderna Estructura y Método. México, 1969.

POLYA, George. Como plantear y resolver problemas. Editorial Trillos. México, 1989.

PURCELL, Edwin. Cálculo con Geometría Analítica. Cuarta Edición. Prantice– Hall Hispanoamericana, S.A. México, 1987.

SÁNCHEZ Darío y MUÑOZ José. Álgebra y trigonometría. Universidad Nacional. Bogotá, D.C., 1981.

SANTOS TRIGO, Luz Manuel. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Editorial Iberoamericana. México, 1997.

TOM M, Apostol. Análisis Matemático. Editorial Reverté, S.A. Segunda edición. España, 1981.

URIBE CALAD, Julio. Matemática una propuesta curricular. Bedout Editores S.A. Medellín, Colombia, 1990.

Estándares Internacionales para la Educación Matemática.

ANEXOS

ANEXO A
DESARROLLO TALLER No.1

JENNIFER K. VILLARONA
10-1.

①. Punto ACTIVIDAD 1:

a. Segmento.
RHO MEDIO
RECTA PERPENDICULAR
DISTANCIA Y LONGITUD.

b. MIDIENDO LAS DISTANCIAS Y LA LONGITUD DE CADA SEGMENTO.

ACTIVIDAD 2.

②. HALLA LA DISTANCIA DE CADA UNO DE LOS LADOS DEL TRIANGULO.
HALLA EL PERIMETRO
HALLA EL AREA

* SE DESPLAZAN HAY MAS LOS DOS VERTICES O SEGMENTOS QUE VIEREN UNIDOS AL VERTICE

ACTIVIDAD 4 =

EL TIENE DE DIVIDIR LA LONGITUD DEL LA CIRCUNFERENCIA SOBRE EL RADIO (DIAMETRO)

ACTIVIDAD 5 =

SEGUN PROVA QUE ES UN CUADRADO PORQUE TORS SUS LADOS SON IGUALES

JENIFER DAIANA BATISTA GUTIERREZ
10-1 21-10-03

Actividad 1

Los comandos utilizados fueron puntero, punto, punto sobre objeto, segmento, recta perpendicular, punto medio, distancia y longitud, ocultar/mostrar, abrir, guardar como, borrar todo.

* Se verifica haciendo un triángulo y midiendo sus lados. Si son iguales

Actividad 2

a. En los vértices se empujaron el triángulo, el triángulo se mueve completo y las etiquetas también se mueven.

* En la movida de la etiqueta cambian los ángulos, el perímetro, las distancias pero menos la suma de los ángulos.

Bergo Anteliz

Comandos: segmentos, puntos, punto sobre objeto, recta perpendicular, punto medio, distancia y longitud

* Se verifica haciendo un Δ y midiendo sus lados. Si son iguales

Actividad 2

a. En los vértices se empujaron el Δ , el triángulo se mueve completo y las etiquetas también se mueven.

En la movida de la etiqueta cambian los ángulos, el perímetro, las distancias pero menos la suma de los ángulos y la suma de Area

ANEXO B DESARROLLO TALLER No 2

DESARROLLO:

1.- hice una circunferencia, saque el diametro, por el centro de circunferencia trace una perpendicular con respecto al diametro, busque los puntos de interseccion, oculte todo menos los puntos que forman el triangulo y uni los puntos.

2.- Dos de sus lados son iguales.

- ~~Los dos lados son iguales~~

- Tiene dos angulos iguales (cada uno mide 45°)

3. No, no es posible ya que al tener los dos angulos iguales se forman los dos lados iguales (isocetes).

4. Deben ser todos desiguales.

II 2. Su suma es de 180° , si esto ocurre en todos los triangulos.

3. Que estos miden 90°

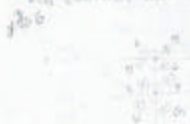
7. angulo D = la suma del angulo c y el angulo a. (angulos opuestos)

angulo E = la suma del angulo c y el angulo b. (angulos opuestos)

que sumados miden 180°

III. 6. Dos triangulos son congruentes cuando sus angulos, lados, perimetro y area son iguales.

2) todos los Δ en circunferencia y que $L-L-L$
Los triangulos son congruentes como $A-L-A$



Triangulo No	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle E$
1	97.16°	41.25°	35.60°	138.75°	32.84°
2	86.32°	53.14°	40.54°	126.66°	43.69°
3	89.97°	46.40°	43.64°	133.60°	40.03°
4	90.00°	43.37°	46.63°	131.65°	40.00°

ANEXO C

DESARROLLO TALLER No 3

Martha Patricia Hernández García
TALLER No. 3
10-1
EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Desde nuestra educación primaria nos han mencionado y hemos utilizado el teorema de Pitágoras, pero realmente conocemos su importancia en las matemáticas? ¿podemos utilizarlo para solucionar diversos problemas? ¿Podemos hacer una demostración de este teorema? En este taller encontraremos el sentido del teorema de Pitágoras y conoceremos otras curiosidades que se derivan de este famoso teorema.

TEOREMA 1. Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$c^2 = a^2 + b^2$

$$8^2 = 6^2 + b^2$$

$$64 = 36 + b^2$$

$$64 - 36 = b^2$$

$$\sqrt{28} = \sqrt{b^2} \rightarrow 2\sqrt{7} = b$$

$$\begin{array}{r} 28 \overline{) 28} \\ \underline{14} \\ 14 \\ \underline{14} \\ 0 \end{array}$$

• Si $c = 8$ cm y $a = 6$ cm. Encuentre el valor de b .

ACTIVIDAD No. 1

$$h^2 = a^2 + c^2$$

$$4^2 = a^2 + 3^2$$

$$16 = 2a^2 + 9$$

$$\frac{16-9}{2} = a^2$$

$$a = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

$b = 4$ cm

$a = 6$ cm

• En el triángulo isósceles ABC de la figura 1, encuentre el valor de c y el valor de a .
• En el triángulo equilátero ABC de la figura 2, encuentre el valor de la altura.

ACTIVIDAD No. 2

Utilice la calculadora TI-32 Plus y el programa Cabri Geometry para demostrar el teorema de Pitágoras, de la siguiente manera:

1. Construya un triángulo rectángulo AOB, siendo O el ángulo recto.
2. Construya ahora los cuadrados ABCD, AOJR y BOKJ exteriores al triángulo AOB.
3. Calcule el área de cada uno de los cuadrados.
4. Con la opción calcular sume las áreas de los cuadrados AOJR y BOKJ.
5. En la pantalla aparecerá la respuesta.
6. Verifique el teorema de Pitágoras.
7. Desplace los vértices del triángulo, sin perder la forma de triángulo rectángulo. Observe y responda: ¿Se conserva la igualdad entre el cuadrado de la hipotenusa y la suma de los cuadrados de los catetos?

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS. Si en vez de construir un cuadrado sobre cada lado del triángulo, construimos otra figura, por ejemplo un triángulo equilátero, ¿el área de la figura construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos?. Realice esta construcción. ¿Qué sucede? ¿Porqué se cumple esta generalización?

Actividad No. 3

Veamos ahora una demostración más formal. Dado el cuadrado ABCD de lado $a + b$ como en la figura. Sea P, Q, R y S puntos sobre los lados del cuadrado de tal forma que: $AS = BP = CQ = DR = a$.

Porque la suma de los cuadrados que van en los 2 catetos es igual al área del cuadrado que va en la hipotenusa.

DIEGO ACEVEDO
10⁵
Actividad No 1

$? = b$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$18 \text{ cm}^2 = (6 \text{ cm})^2 + b^2$$

$$64 \text{ cm}^2 - 36 \text{ cm}^2 = b^2$$

$$28 \text{ cm}^2 = b^2$$

$$b = \sqrt{28 \text{ cm}^2}$$

$$b = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

$? = c$

Isósceles

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Como el lado a es igual al b

$$b^2 = a^2 + a^2$$

$$b^2 = 2a^2$$

$$b = \sqrt{2a^2}$$

$$b = a\sqrt{2}$$

$$4 = a\sqrt{2}$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad c = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Equilátero

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(6 \text{ cm})^2 = b^2 + (3)^2$$

$$36 \text{ cm}^2 = b^2 + 9 \text{ cm}^2$$

$$36 \text{ cm}^2 - 9 \text{ cm}^2 = b^2$$

$$27 \text{ cm}^2 = b^2$$

$$\sqrt{27 \text{ cm}^2} = b$$

$$b = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

altura = $3\sqrt{3}$ cm

Actividad No 3

ADPQRS = c^2

APBQCS = $2ab + c^2$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$A_{ABQCS} = (a+b)^2$$

$$A_{ABQCS} = a^2 + 2ab + b^2$$

$$A_{APBQCS} = \frac{b \cdot b}{2} = \frac{ab}{2}$$

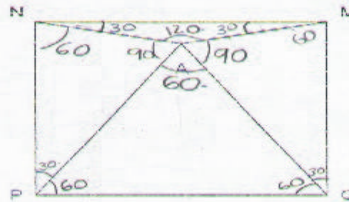
$$A_{APBQCS} = 4 \cdot \frac{ab}{2} = 2ab$$

ANEXO D DESARROLLO TALLER No 4

DIEGO ACEVEDO.

Siga cada uno de estos pasos para resolver el siguiente problema, organizando la información, diseñando un plan de solución, utilizando su creatividad y todos los conocimientos adquiridos a través de los talleres anteriores.

- En un cuadrado MNPQ, se traza el punto A como indica la figura. El triángulo APQ tiene toda la pinta de ser equilátero. ¿Lo es realmente?



Realice esta construcción en el programa Cabri Geometry y verifique su solución.

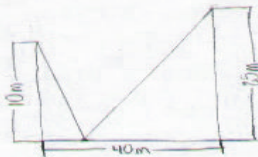
Actividad 2.
Solución



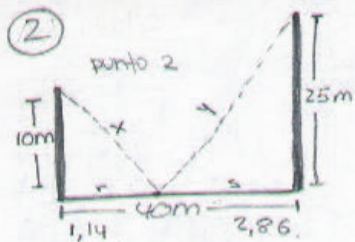
AL TENER EL Δ 2 \times QUE MIDEN 42°
SU LADOS DEBEN SER IGUALES PERO
NO LO SON Y ASI LOS ALUMNOS SE
PUDIERON DAR CUENTA.

ACTIVIDAD 2

NO SE PUEDE PORQUE TIENE 2 ANGULOS IGUALES Y LA MEDIDA DE SUS LADOS SON DESIGUALES.



PIA: el punto de apoyo debe situarse desde 0,93 hasta 1,34 hacia la izquierda del poste de 10m y la suma mínima de las longitudes de los cables desde la cima de los postes al punto de apoyo será 5,32m.



$$x + y = \text{mínimo} = 5,32.$$

$$x^2 = 10^2 + r^2$$

$$x^2 = 100 + r^2$$

$$x = \sqrt{100 + r^2}$$

$$y^2 = 25^2 + s^2$$

$$y^2 = 625 + s^2$$


$$y = \sqrt{625 + s^2}$$

$$r + s = 40 \text{ m}$$

$$x + y = \sqrt{100 + r^2} + \sqrt{625 + s^2}$$

hay muchas respuestas

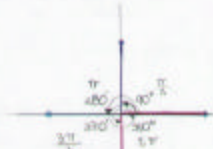
ANEXO E DESARROLLO TALLER No 5



$\rightarrow 104,26^\circ$
 • Qué ocurre con la medida del α ? cambia
 $\rightarrow 57,26^\circ$
 • Qué sucede con la medida del arco s es igual a la del radio.
 • Qué ocurre con la medida del α ? no cambia.
 $360^\circ \rightarrow 2\pi \text{ rad} \rightarrow \frac{360 \times 1 \text{ rad}}{2 \times 3,14} \rightarrow \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \rightarrow \frac{180^\circ}{3,14} \rightarrow 57,26^\circ$
 \rightarrow un radian en grados equivale a $57,26^\circ$
 $\frac{2\pi}{6}$ en grados: $\frac{5\pi}{6} (180^\circ) \rightarrow 150^\circ$
 $\frac{120^\circ}{180^\circ} = \frac{x}{\pi} = \frac{2}{3} \pi \text{ rad.}$
 $5,38 \rightarrow 360^\circ$
 $2,36 \rightarrow x \rightarrow \frac{360^\circ \times 2,36}{5,38} = 157,92^\circ$
 $\text{Ent: } \frac{360^\circ \times \text{long. del arco}}{\text{long. de la } \odot} = \frac{360^\circ \times 1,4}{2\pi r} = \frac{1,4}{r}$

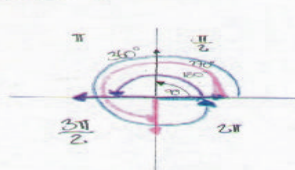
11-4
El α central es el doble de la medida del α inscrito.

11-5
3. No son semejantes.
5. Los lados iguales.
7. Cuando 2α son iguales a los 2α de otro Δ .



Actividad 2
 $\frac{2\pi r}{6} \times (180^\circ) = 20 \times 5 = 150^\circ$
 $x = 110^\circ = \frac{110^\circ}{\pi} \text{ rad}$
 $x = \frac{110^\circ \pi}{180} = \frac{11}{9} \pi = 3,8 \pi$
 Actividad 3-5
 $360^\circ \rightarrow 2,38$
 $x \rightarrow 1,49$
 $x = \frac{1,49 \times 360^\circ}{5,38} = 99,6^\circ$
 Si inscrito
 Medida 104°
 la medida del ángulo central es el doble que el ángulo inscrito.
 Actividad 4-6
 Δ 30° $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
 Δ 30°
 cuando los lados son proporcionales.
 Actividad 1-3
 3. No son iguales.
 5. No semejantes cuando los ángulos son iguales.

ACTIVIDAD 1



$\frac{2\pi}{x} = \frac{\pi}{2}$

ACTIVIDAD 2

• ¿Qué ocurre con la medida del ángulo?
 RA: Cambia $57,26^\circ$

• ¿Qué sucede con la longitud del arco?
 RA: es igual a la del radio.

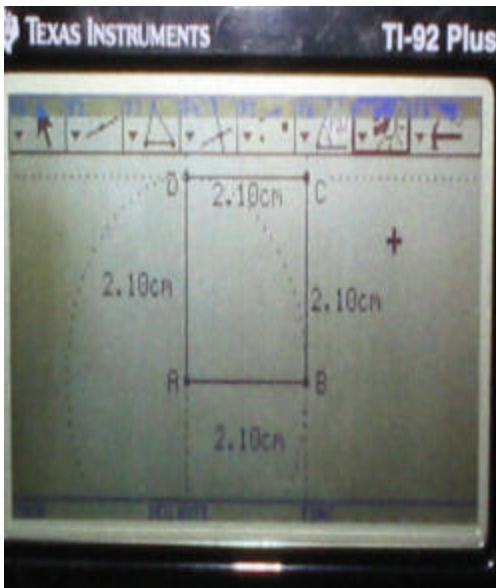
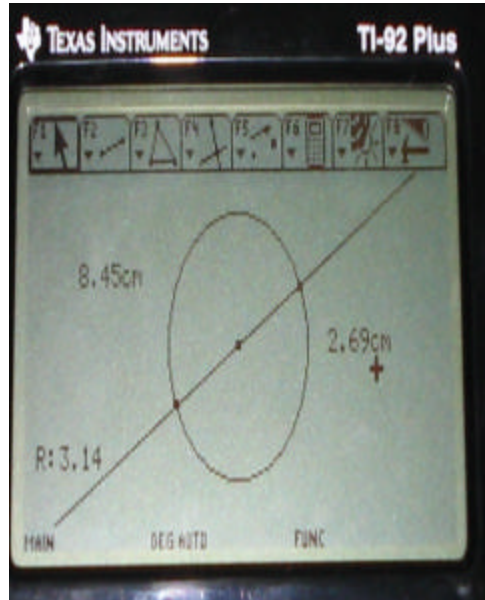
• ¿Qué ocurre con la medida del ángulo?
 RA: no cambia.

$360^\circ \rightarrow 2\pi \text{ rad}$
 $x \rightarrow 110^\circ$

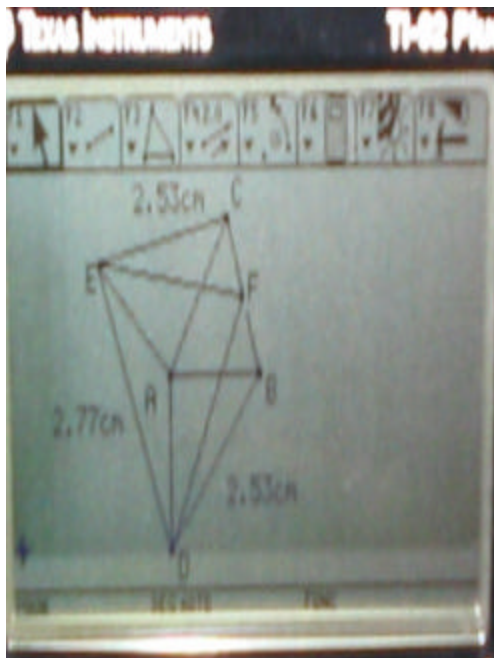
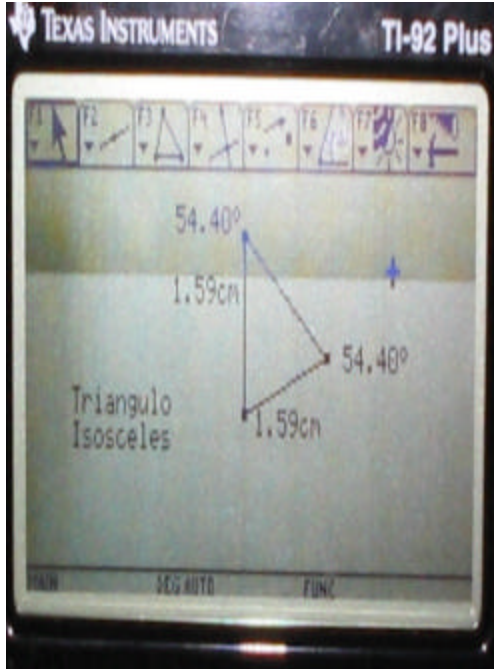
$x = \frac{360^\circ \times 1 \text{ rad}}{2 \pi \text{ rad}} = \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{180^\circ}{3,14} = 57,26^\circ$

* un radian en grados equivale a $57,26^\circ$
 * $\frac{2\pi}{6}$ en grados: $\frac{5\pi}{6} (180^\circ) = 150^\circ$
 * 120° en rad: $\frac{120^\circ}{180^\circ} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \pi \text{ rad}$

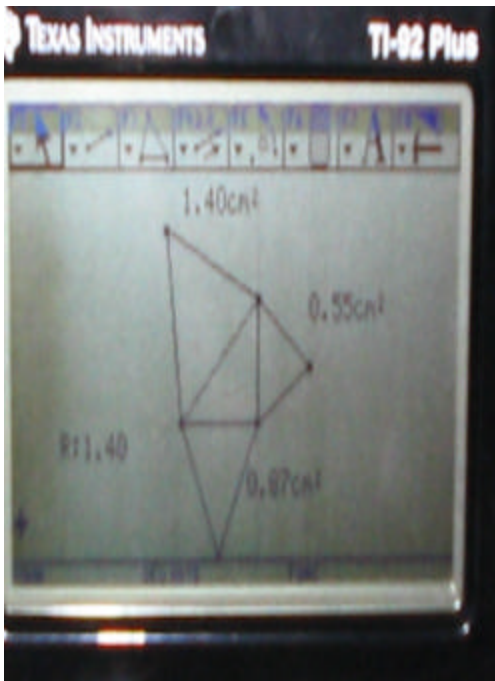
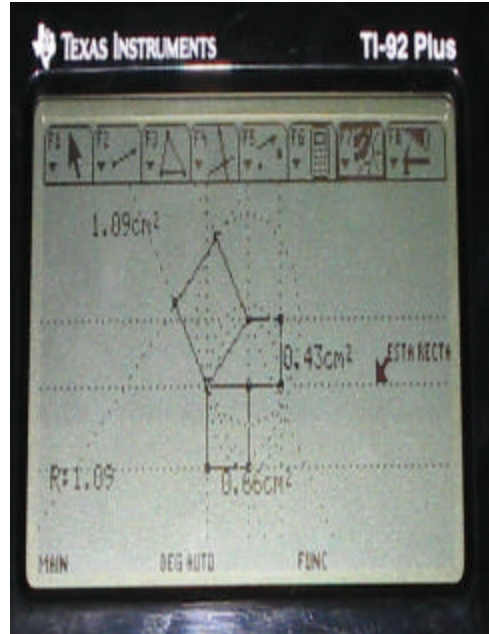
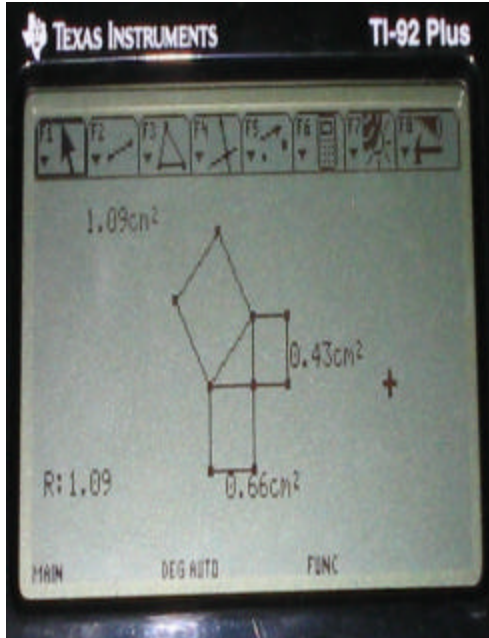
ANEXO F
FOTOS TALLER No 1



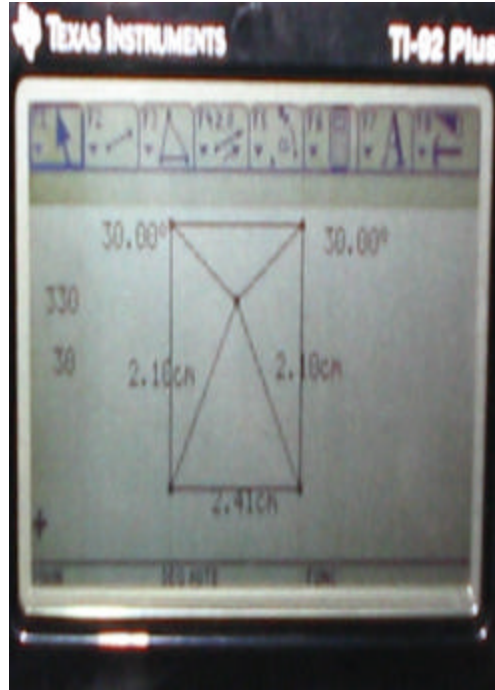
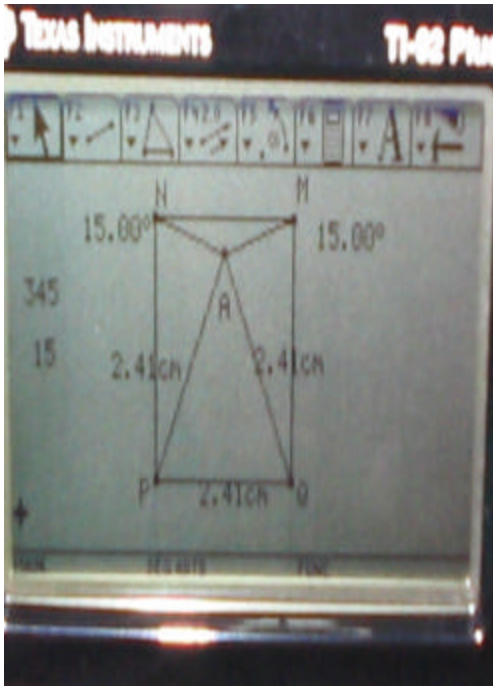
ANEXO G
FOTOS TALLER No 2



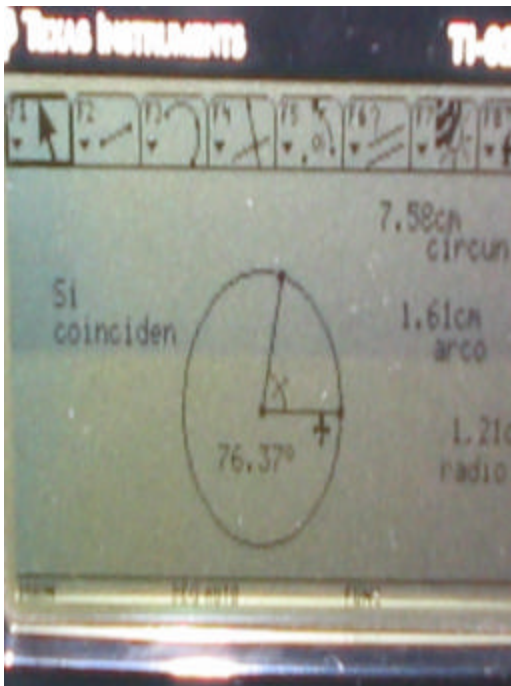
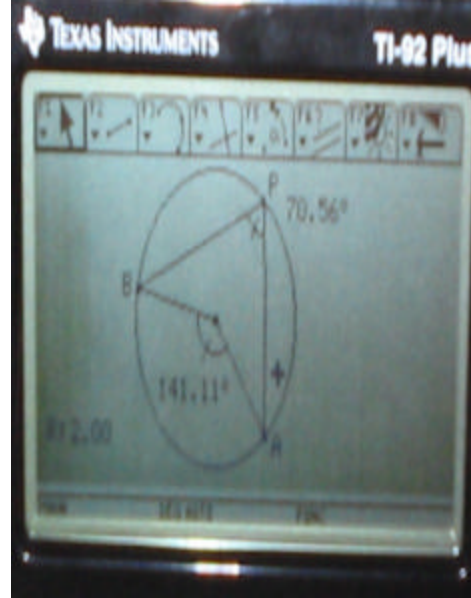
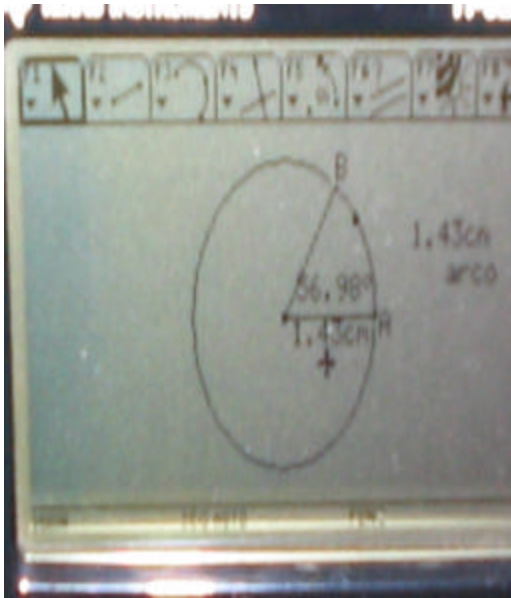
ANEXO H
FOTOS TALLER No 3



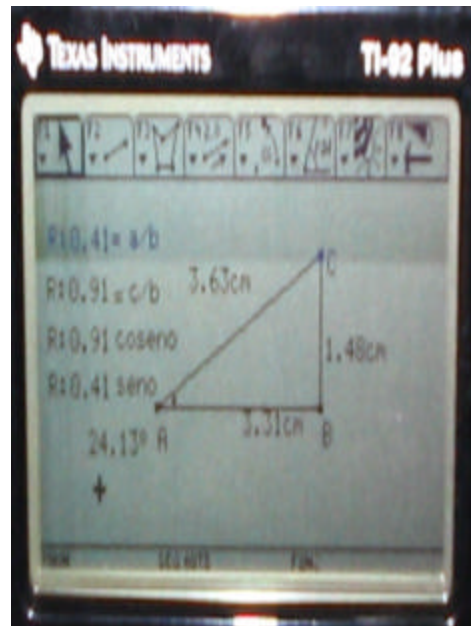
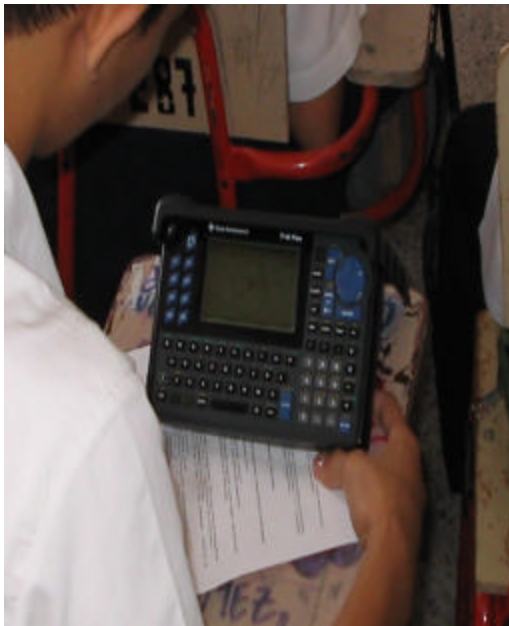
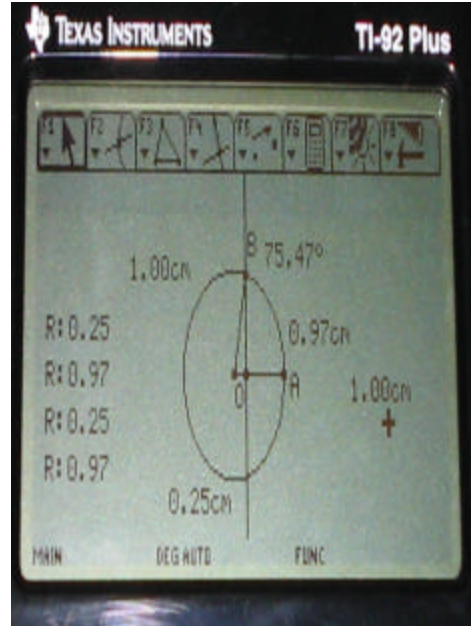
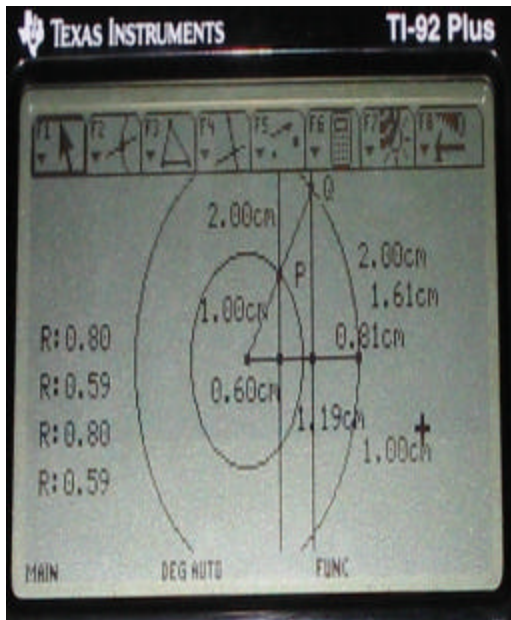
ANEXO I
FOTOS TALLER No 4



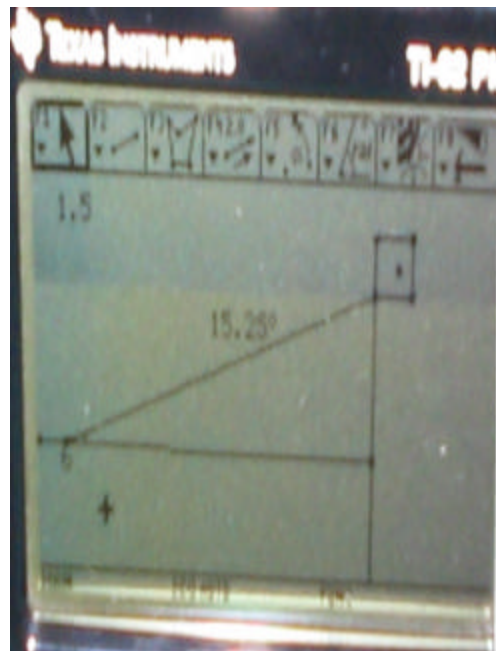
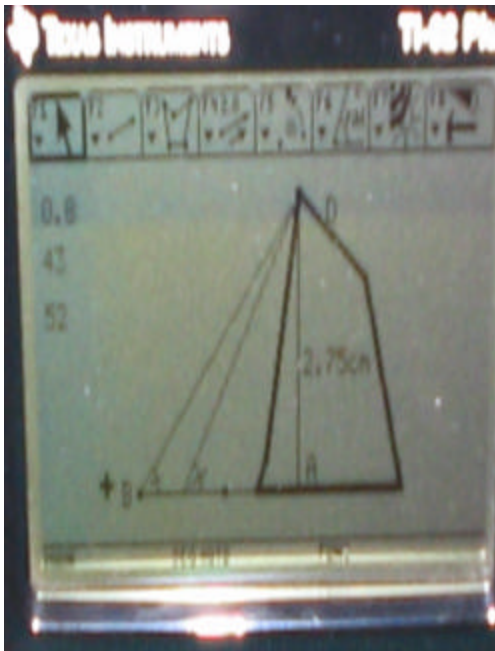
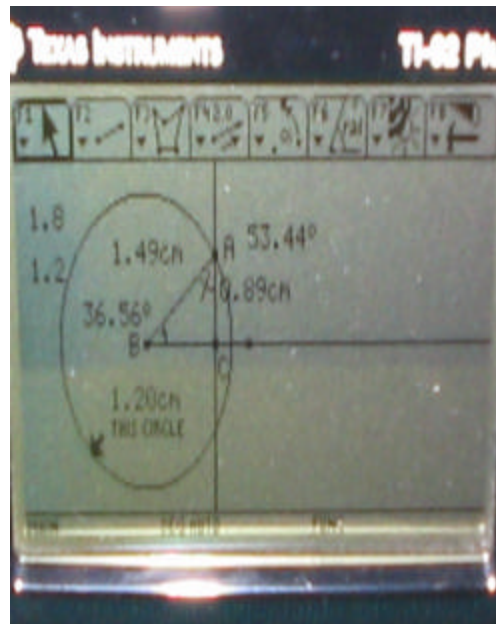
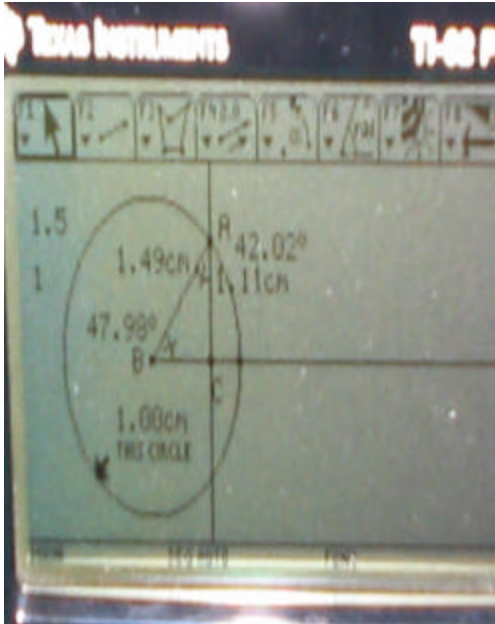
ANEXO J
FOTOS TALLER No 5



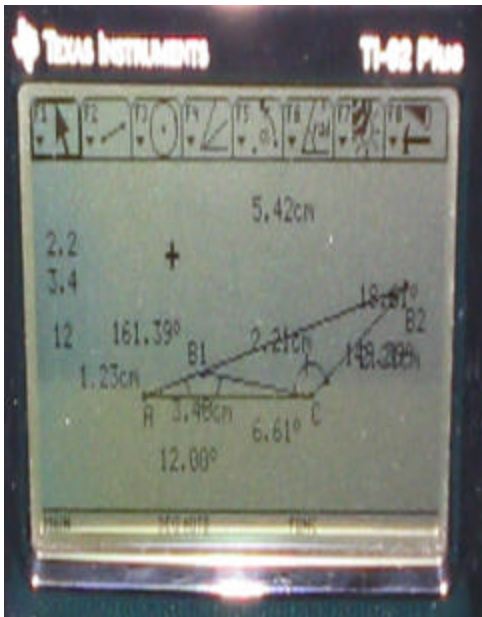
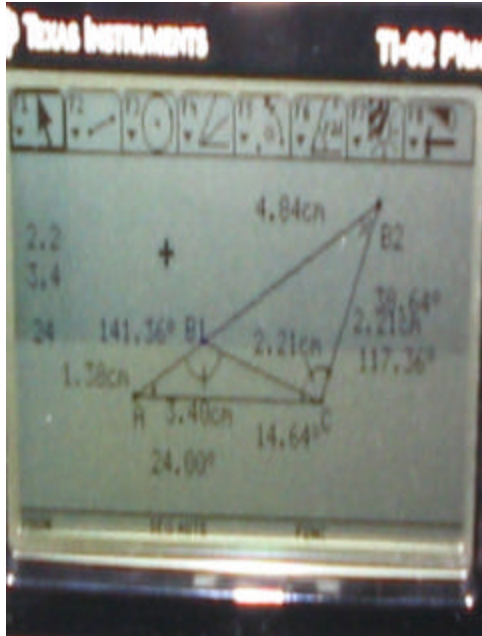
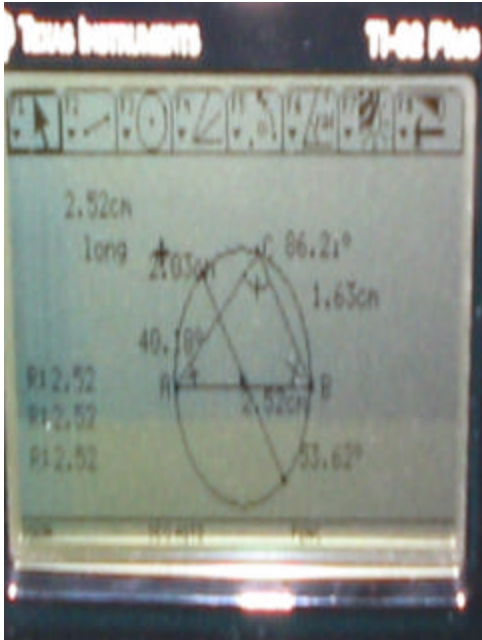
ANEXO K
FOTOS TALLER No 6



ANEXO L
FOTOS TALLER No 7



ANEXO M
FOTOS TALLER No 8

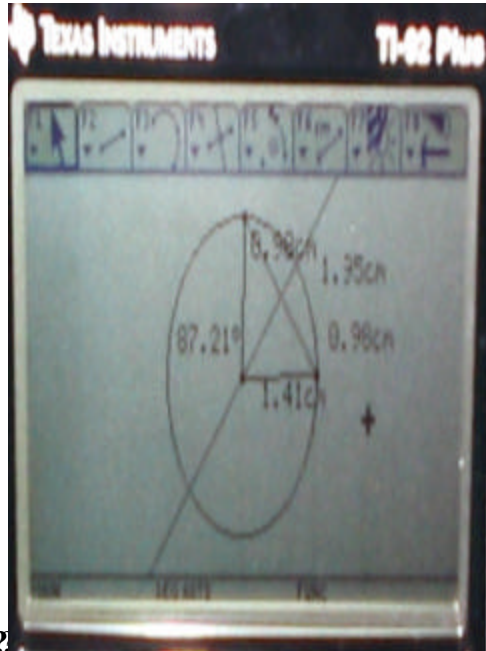
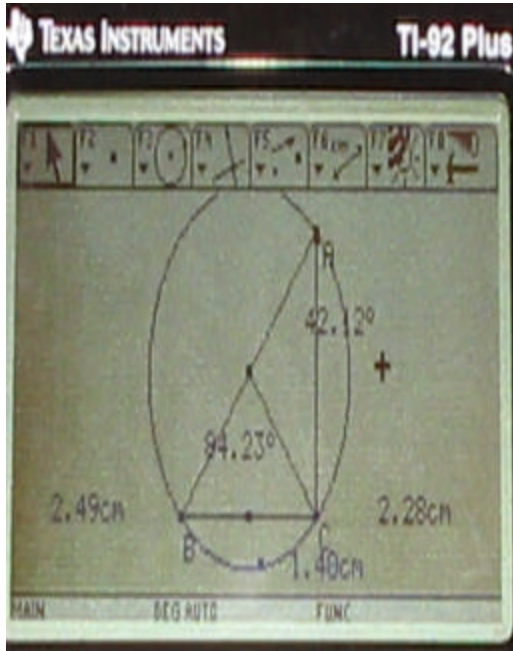


?

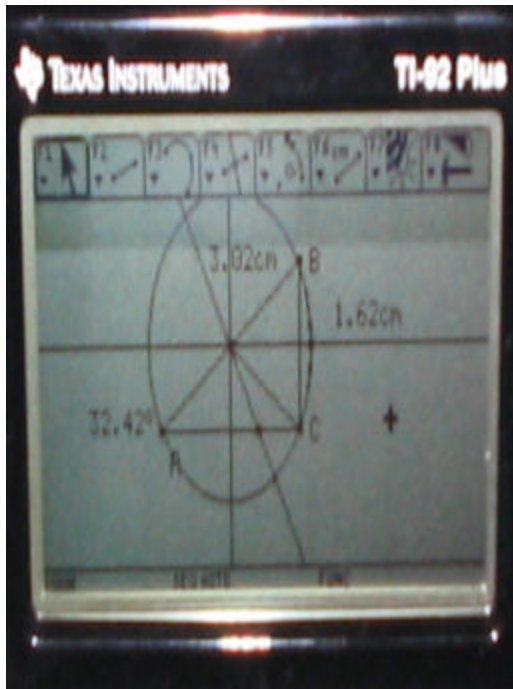
???????

???????

?



?





????????



?



