

Reconstrucción tridimensional digital de cráneos humanos para aplicaciones en ciencias forenses

Andrés Leonardo González Gómez

Trabajo de Grado para optar al título de Magister en Ingeniería de Sistemas e Informática

Director

Jaime Enrique Meneses Fonseca, PhD

Doctor en Ciencias de la Ingeniería

Codirector

Henry Arguello Fuentes, PhD

Doctor en Ingeniería Eléctrica y Computación

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas

Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática

Maestría en Ingeniería de Sistemas e Informática Bucaramanga

2020

Tabla de Contenido

Introducción	29
1. Objetivos	32
2. Fundamento Teórico del Análisis de Franjas	33
2.1. Principio de TPF	35
2.2. Obtención de la fase	36
2.3. El efecto gamma y la no linealidad	47
2.3.1. Análisis teórico del efecto gamma y la no linealidad de los dispositivos	51
2.3.2. Análisis experimental del efecto gamma y la no linealidad de los dispositivos	58
2.4. Análisis del espectro de Fourier en los algoritmos de corrimiento de fase	67
2.5. Reducción del error en la fase debido al efecto gamma y la no linealidad de los dispositivos	78
2.5.1. Método pasivo	80
2.5.2. Método activo	85
2.6. Desenvolvimiento de fase temporal	98
2.6.1. Algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal	111
2.6.2. Algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal con restricciones geométricas	114

3. Calibración de un sistema de R3DD usando la TPF	124
3.1. Calibración de la cámara	124
3.2. Calibración cámara-proyector	128
3.3. Calibración experimental cámara - proyector	132
3.3.1. Ajuste polinomial	143
4. R3DD del cráneo humano usando la TPF	145
4.1. Obtención de la fase continua absoluta Φ	147
4.2. Relación fase Φ - altura ($rad \rightarrow mm$)	154
4.2.1. Validación metrológica de la metodología de R3DD	155
4.3. R3DD del cráneo humano a 360° de observación	161
4.4. Transformación de la nube de puntos 3D en una superficie	165
4.4.1. Triangulación de Delaunay	168
4.4.2. Remallado isotrópico	172
5. Conclusiones	177
Referencias Bibliográficas	180
Apéndices	190

Lista de Figuras

Figura 1.	Diagrama esquemático que ilustra un sistema de R3DD usando la TPF.	36
Figura 2.	Diagrama de flujo que describe la secuencia metodológica de TPF.	37
Figura 3.	(a) Imagen de franjas simulada con $f = 5$ en una matriz de 800×600 pixel, y (b) su correspondiente sección transversal.	38
Figura 4.	Patrón de franjas simulado con $f = 5$, $L = 800$ y (a) $\delta_1 = +2\pi/3 \text{ rad}$, (b) $\delta_2 = 0 \text{ rad}$, (c) $\delta_3 = -2\pi/3 \text{ rad}$, y (d-e) sus respectivas secciones transversales.	42
Figura 5.	(a) Fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$ de un sistema de franjas simulado con $f = 5$, $L = 800$, y (b) su sección transversal.	43
Figura 6.	Superposición de la sección transversal de I^P , la sección transversal de la fase discontinua $\varphi(x_P, y_P)$, y los puntos x_i con $\varphi(x_P, y_P) = 0$.	45
Figura 7.	(a) Sección transversal de los ordenes $k_{(x_C, y_C)}$ correspondientes a la fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$ de la Figura 5, (b) Superposición de la sección transversal de los ordenes $k_{(x_C, y_C)}$, y la sección transversal de la fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$ de la Figura 5.	46
Figura 8.	(a) Fase continua absoluta $\Phi_{(x_C, y_C)}$ correspondiente al patrón de franjas de la Figura 4, y (b) su respectiva sección transversal junto a 4 secciones transversales de fases continuas relativas desenvueltas a partir de los puntos con $\varphi_{(x_C, y_C)} = 0$, $(x_{-2}, x_{-1}, x_1$ y $x_2)$.	46

- Figura 9. (a) Vista 3D de la fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$ de la Figura 5, y (b) vista 3D de la fase continua absoluta $\Phi_{(x_C, y_C)}$ de la Figura 8. 47
- Figura 10. (a) Imagen de franjas simulada con $f = 5$, $L = 800$ afectada por un $\gamma = 3$, y (b) su correspondiente sección transversal. 48
- Figura 11. (a) Vista 3D de la fase discontinua φ de un patrón de franjas con $f = 5$, afectado por $\gamma = 3$, y obtenida con un algoritmo de corrimiento de fase $N = 3$, y (b) su respectiva fase continua absoluta Φ . 49
- Figura 12. Distribución del espectro de Fourier: (a) del patrón de franjas simulado ideal I^P , y (b) del patrón de franjas simulado distorsionado I^C por el efecto $\gamma = 3$. 50
- Figura 13. Distribución del espectro de Fourier: (a) del patrón de franjas simulado ideal, (b) del patrón de franjas simulado con la influencia del efecto $\gamma = 3$ y la no linealidad de los dispositivos. 52
- Figura 14. Superposición de la sección transversal de la fase ideal Φ^P , y la sección transversal de la fase Φ^C afectada por $\gamma = 3$ y la no linealidad de los dispositivos, obtenida con un algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$ a partir de un patrón de franjas simulado con $f = 5$ y $L = 800$, y (b) la sección trasversal del error $\Delta\Phi = \Phi^C - \Phi^P$. 54
- Figura 15. Superposición de la sección transversal de una imagen de franjas simulada I^C con $f = 5$, $L = 800$, y $\gamma = 3$, y la sección trasversal del error $\Delta\Phi$ que se obtiene con un algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$. 55

- Figura 16. (a) Distribución del espectro de Fourier de la imagen de franjas simulada I^C con $f = 5$, afectada por $\gamma = 3$, y (b) distribución del espectro de Fourier de su respectivo error $\Delta\Phi$ para un algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$. 55
- Figura 17. Sección transversal del error $\Delta\Phi$ y su respectivo espectro de Fourier para un algoritmo de corrimiento de fase con con imágenes de franjas simuladas con $f = 5$, $L = 800$, $\gamma = 3$, y (a-b) $N = 4$, (c-d) $N = 5$, y (e-f) $N = 6$. 57
- Figura 18. Superposición de las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$ simuladas con el algoritmo de corrimiento de fase con: (a) $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$, (b) $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$, y (c) $N = 5$, y $N = 6$. 59
- Figura 19. Imágenes de franjas experimentales capturadas con la CCD con $f = 5$ y (a) $\delta_1 = +2\pi/3 \text{ rad}$, (b) $\delta_2 = 0 \text{ rad}$, (c) $\delta_3 = -2\pi/3 \text{ rad}$, y (d-e) sus respectivas secciones transversales. 60
- Figura 20. (a) Fase discontinua φ^C obtenida con las imágenes de franjas experimentales I^C de la Figura 19, (b) y su respectiva fase continua absoluta Φ^C . 61
- Figura 21. (a) Superposición de la sección transversal de la fase continua absoluta teórica Φ^P y la fase continua absoluta experimental Φ^C , y (b) sección transversal del error experimental $\Delta\Phi$ debido a el factor gamma y la no linealidad de los dispositivos. 62
- Figura 22. Superposición de la sección transversal del error $\Delta\Phi$ obtenido experimentalmente con un algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$, y la imagen de franjas experimental I_2^C con $f = 5$ normalizada. 63

Figura 23. (a) Espectro de Fourier de la imagen de franjas experimental I_2^C con $f = 5$, y (b) espectro de Fourier de la onda de error experimental $\Delta\Phi$ para un algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$.

64

Figura 24. Sección transversal del error experimental $\Delta\Phi$ y su espectro de Fourier con: (a-b) $N = 4$, (c-d) $N = 5$, (e-f) $N = 6$.

65

Figura 25. Superposición de las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$, correspondientes a la fase Φ^C de un patrón de franjas experimental con $f = 5$, obtenidas con el algoritmo de corrimiento de fase: (a) $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$, (b) $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$, y (c) $N = 5$, y $N = 6$.

66

Figura 26. Superposición del espectro de Fourier de las diferentes ondas de error $\Delta\Phi$ obtenidas experimentalmente usando algoritmos de corrimiento de fase con: (a) $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$, (b) $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$, y (c) $N = 5$, y $N = 6$.

67

Figura 27. Magnitud espectral de la función de transferencia del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$.

72

Figura 28. (a) Superposición de la función de transferencia $|H(\omega)|$ (normalizada) del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$, y una serie de armónicos simulados de igual amplitud y $f = 5$, y (b) armónicos que pasan el filtro del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$.

73

Figura 29. (a) Superposición de la función de transferencia $|H(\omega)|$ (normalizada) del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 4$, y una serie de armónicos simulados de igual amplitud y $f = 5$, y (b) armónicos que pasan el filtro del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 4$.

74

Figura 30. (a) Superposición de la función de transferencia $|H(\varphi)|$ (normalizada) del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 5$, y una serie de armónicos simulados de igual amplitud y $f = 5$, y (b) armónicos que pasan el filtro del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 5$.

76

Figura 31. (a) Superposición de la función de transferencia $|H(\omega)|$ (normalizada) del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 6$, y una serie de armónicos simulados de igual amplitud y $f = 5$, y (b) armónicos que pasan el filtro del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 6$.

77

Figura 32. (a) Superposición de la función de transferencia $|H(\omega)|$ del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$, y armónicos de I^C que pasan el filtro, (b) superposición de la función de transferencia $|H(\omega)|$ del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 6$, y armónicos de I^C que pasan el filtro, y (c) superposición de la distribución del espectro de Fourier de $\Delta\Phi$ correspondiente a cada uno de los algoritmos.

79

Figura 33. (a) Espectro de Fourier de la imagen de franjas experimental I_2^C con $f = 5$, y (b) superposición de su respectivo zum en los armónicos de interés y las funciones de transferencia de los algoritmos con $N = 3$ y $N = 6$.

79

Figura 34. Superposición de la sección transversal del error en la fase $\Delta\Phi$ de un patrón de franjas simulado con $f = 5$, después de usar los algoritmos de Bruning y P. de Groot. 82

Figura 35. (a) Superposición de $H|\omega|$ del algoritmo de Bruning *et al* y el espectro de Fourier de I^C , (b) superposición de $H|\omega|$ del algoritmo de P. de Groot y el espectro de Fourier de I^C , y (c) superposición del espectro de Fourier de las ondas de error $\Delta\Phi$ que se obtienen con los dos algoritmos. 84

Figura 36. Desviación estándar de las ondas de error $\Delta\Phi$ vs. valores $\bar{\gamma}$ (resultados experimentales obtenidos con el algoritmo a 3 imágenes, y paso de proyección de 24 pixeles). 88

Figura 37. Superposición de las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$, utilizando el algoritmo a 3 imágenes ($N = 3$), para un patrón de franjas experimentales con $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 2,2$. 88

Figura 38. (a) Superposición de los espectros de Fourier de las ondas de error en la fase $\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 2,2$, y (b) zoom del espectro de Fourier de la onda de error $\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 2,2$. 89

Figura 39. Desviación estándar de las ondas de error $\Delta\Phi$ vs. valores $\bar{\gamma}$ (resultados experimentales obtenidos con el algoritmo a 4 imágenes, y paso de proyección de 24 pixeles). 90

Figura 40. Superposición de las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$, utilizando el algoritmo a 4 imágenes ($N = 4$), para un patrón de franjas experimentales con $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 3,8$. 90

Figura 41. (a) Superposición de los espectros de Fourier de las ondas de error en la fase

$\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 3,8$, y (b) zoom del espectro de Fourier de la onda de error $\Delta\Phi$

con $\bar{\gamma} = 3,8$.

91

Figura 42. Desviación estándar de las ondas de error $\Delta\Phi$ vs. valores $\bar{\gamma}$ (resultados experi-

mentales obtenidos con el algoritmo a 6 imágenes, y paso de proyección de 24 píxeles).

91

Figura 43. Superposición de las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$, utilizan-

do el algoritmo a 6 imágenes ($N = 6$), para un patrón de franjas experimentales con

$\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 1,4$.

92

Figura 44. (a) Superposición de los espectros de Fourier de las ondas de error en la fase

$\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 1,4$, y (b) zoom del espectro de Fourier de la onda de error $\Delta\Phi$

con $\bar{\gamma} = 1,4$.

92

Figura 45. Desviación estándar de las ondas de error $\Delta\Phi$ vs. valores $\bar{\gamma}$ (resultados experi-

mentales obtenidos con el algoritmo a 9 imágenes, y paso de proyección de 24 píxeles).

93

Figura 46. Superposición de las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$, utili-

zando los algoritmos a 3 imágenes ($N = 3$) y 9 imágenes ($N = 9$), para los patrones de

franjas experimentales con $\bar{\gamma} = 2,2$ y $\bar{\gamma} = 1,0$ respectivamente.

94

Figura 47. (a) Superposición de los espectros de Fourier de las ondas de error en la fase

$\Delta\Phi$ que se obtienen utilizando los algoritmos a 3 imágenes ($N = 3$) con $\bar{\gamma} = 2,2$, y el

algoritmo de P. de Groot ($N = 9$) con $\bar{\gamma} = 1,0$, y (b) zoom del espectro de Fourier de la

onda de error $\Delta\Phi$ con $N = 9$ y $\bar{\gamma} = 1,0$.

95

- Figura 48. (a) Fase discontinua φ , y (b) fase continua absoluta Φ , obtenidas con el algoritmo de $N = 3$ con $\bar{\gamma} = 2,2$ y un algoritmo de desenvolvimiento de fase espacial. 96
- Figura 49. Superposición de la sección transversal de la onda de error $\Delta\Phi$, en la fila $y = 200$ de los mapas de fase con $N = 3$ ($\bar{\gamma} = 2,2$) y $N = 9$ ($\bar{\gamma} = 1,0$). 97
- Figura 50. Vista 3D del mapa de fase continua absoluta Φ que se obtiene usando el algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$, en el cráneo humano. 98
- Figura 51. Vista 3D del mapa de fase continua absoluta Φ que se obtiene usando el algoritmo de P. de Groot ($N = 9$), en el cráneo humano. 99
- Figura 52. Vista frontal de un cráneo humano con la proyección de un patrón de franjas, junto al zum de 2 regiones complejas en la topografía superficial del cráneo humano. 101
- Figura 53. Fase discontinua φ calculada con las imágenes de la vista frontal del cráneo humano, junto al zum de 2 regiones complejas en la topografía superficial del cráneo humano. 102
- Figura 54. Fase continua absoluta Φ calculada al desenvolver la fase discontinua φ de la Figura 53 usando un algoritmo de desenvolvimiento de fase espacial, junto al zum de 2 regiones complejas en la topografía superficial del cráneo humano. 103
- Figura 55. (a) Zum sobre la órbita ocular izquierda del mapa de fase discontinua φ correspondiente a una vista frontal del cráneo humano, y (b) sección transversal de la fase discontinua φ sobre la fila $y = 346$. 103

- Figura 56. (a) Zum sobre la órbita ocular izquierda del mapa de fase continua absoluta Φ correspondiente a una vista frontal del cráneo humano, y (b) sección transversal de la fase continua absoluta φ sobre la fila $y = 346$. 104
- Figura 57. Imagen de franjas y su respectiva fase discontinua φ para: (a) $t \Rightarrow f = 1$, (b) $t \Rightarrow f = 2$, y (c) $t \Rightarrow f = 3$. 105
- Figura 58. Generación del eje temporal para desenvolvimiento de fase φ , usando patrones de franjas con $f = 1, 2$, y 3 . 106
- Figura 59. (a) Diferencia de fases $\Delta\varphi_{21} = \varphi(2) - \varphi(1)$, (b) sección transversal del mapa $\Delta\varphi_{21}$, (c) discontinuidades d_{21} entre el mapa de fase $t = 2$ y $t = 1$, y (d) sección transversal del mapa d_{21} . 107
- Figura 60. Superposición de la sección transversal de la fase $\varphi(2)$ correspondiente a el mapa de fase $t \Rightarrow f = 2$, y la sección transversal del mapa de discontinuidades d_{21} . 108
- Figura 61. (a) Fase continua absoluta $\Phi(2)$ del plano de fase en $t \Rightarrow f = 2$, y (b) su respectiva sección transversal. 109
- Figura 62. (a) Superposición de las secciones transversales de las imágenes de franjas en $t(1), t(2)$, y $t(3)$, y (b) superposición de las secciones transversales de los mapas de fase discontinua $\varphi(1), \varphi(2)$ y $\varphi(3)$. 109
- Figura 63. (a-b) Imagen experimental de franjas con $f = 1$ y su respectivo mapa de fase discontinua φ_1 , y (b) imagen experimental de franjas con $f = 128$ y su respectivo mapa de fase discontinua φ_2 . 114

Figura 64. Montaje experimental, con restricciones geométricas, para la R3DD del cráneo

humano.

117

Figura 65. (a) Fase continua absoluta Φ_1 de un objeto plano ubicado entre Z_{min} y Z_{max} , y

(b) sus respectivas secciones transversales; (c) fase continua absoluta Φ_1 de un cráneo

humano ubicado entre Z_{min} y Z_{max} , y (d) su respectivas secciones transversales.

119

Figura 66. (a) Secciones transversales de: la fase discontinua φ_1 de un objeto plano,

$\Phi(Z_{max})$, y $\Phi(Z_{min})$, (b) Secciones transversales de: la fase continua absoluta Φ_1 de

un objeto plano, $\Phi(Z_{min})$ y $\Phi(Z_{max})$.

120

Figura 67. Vista 3D del mapa de fase continua Φ_2 del frontal de un cráneo humano desen-

vuelto utilizando: (a) el algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal con

$f_1 = 1$ y $f_2 = 128$, y (b) el algoritmo dual de desenvolvimiento de fase con restric-

ciones geométricas con $f_1 = 6$ y $f_2 = 128$.

123

Figura 68. Punto Ψ_1 de la imagen 1 de calibración, en coordenadas métricas de longitud,

respecto al sistema coordenado de la cámara.

126

Figura 69. Cuadrícula que forman los puntos Ψ_i ($i = 1, 2, 3 \dots 204$) de la imagen 1 de

calibración, en coordenadas métricas de longitud, respecto al sistema coordenado de

la cámara.

127

Figura 70. Cuadrículas formadas por los puntos Ψ_i de las 9 imágenes de calibración, en

coordenadas métricas de longitud, respecto al sistema coordenado de la cámara.

128

- Figura 71. Imagen del plano de calibración, con los puntos Ψ_i con coordenadas 3D en mm conocidas respecto al sistema coordenado del mundo, y sus correspondientes puntos ψ_i con coordenadas 2D en pixeles conocidas respecto al sistema coordenado del plano imagen. 130
- Figura 72. Ilustración del montaje experimental y el plano de calibración con franjas. 131
- Figura 73. Descripción gráfica de la estrategia de calibración para el mapeo fase vs. altura. 132
- Figura 74. Calculo de las esquinas en la imagen de calibración 1, que corresponden a los puntos ψ_i en coordenadas $(x_i, y_i)^T$ en pixeles en el plano imagen. 133
- Figura 75. (a) Puntos ψ_i en el sistema coordenado del plano imagen, y (b) puntos ψ_i en el plano imagen normalizado respecto al sistema coordenado de la cámara. 134
- Figura 76. Puntos ψ_i en el plano imagen normalizado respecto al sistema coordenado de la cámara. 135
- Figura 77. Coordenadas de los puntos Ψ_i en el plano de calibración, respecto al sistema coordenado del mundo: (a) con origen en la esquina superior izquierda, (b) con origen origin trasladado al centro de la distribución de puntos. 136
- Figura 78. Coordenadas de los puntos Ψ_i , en milímetros, respecto al sistema coordenado de la cámara. 138
- Figura 79. Coordenadas $(x_{cam}^i, y_{cam}^i, 1)^T$ en el plano imagen normalizado de los pixeles de la cámara. 139
- Figura 80. Superposición de las coordenadas $(X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})$ de todos los pixeles en el campo de observación de la cámara y de los puntos Ψ_i , para la imagen de calibración 1. 141

- Figura 81. Coordenadas de los puntos Ψ_i , en milímetros, respecto al sistema coordenado de la cámara para diferentes posiciones del plano de calibración. 142
- Figura 82. Imagen de calibración en la primera posición con: (a) proyección de luz blanca, (b) proyección de franjas, y (c) proyección de una linea blanca en la coordenada (x_0) de $\Phi = 0$. 143
- Figura 83. Coeficientes del ajuste polinomial: (a) $a(mm/rad^2)$, (b) $b(mm/rad)$, y (c) $c(mm/rad)$. 145
- Figura 84. Superposición del conjunto de puntos experimentales (Z_{exp}, Φ) y la curva resultante de evaluar el polinomio $Z_{teo} = a\Phi^2 + b\Phi + c$. 146
- Figura 85. Coordenadas 3D $(X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})$, respecto al sistema coordenado de la cámara, de todos los pixeles en el campo de observación de la cámara, usando las imágenes del plano de calibración ubicado en las posiciones Z_{min} y Z_{max} . 148
- Figura 86. Coordenadas 3D $(X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})$, respecto al sistema coordenado de la cámara, de todos los pixeles en el campo de observación de la cámara, usando las imágenes del plano de calibración ubicado en las posiciones Z_{min} y Z_{max} , junto a los planos teóricos ortogonales al eje óptico de la cámara. 149

- Figura 87. (a) Proyección de un patrón de franjas con $f = 6$ en el frontal de un cráneo humano, (b) fase discontinua φ_L del patrón de franjas con $f = 6$ proyectado sobre un cráneo humano, y (c) su respectiva sección transversal en la fila $y = 500$. (d) Proyección de un patrón de franjas con $f = 128$ en el frontal de un cráneo humano, (b) fase discontinua φ_H del patrón de franjas con $f = 128$ proyectado sobre un cráneo humano, y (c) su respectiva sección transversal en la fila $y = 500$. 151
- Figura 88. (a) Mapa de fase continua absoluta a baja frecuencia Φ_L del frontal de un cráneo humano, (b) su respectiva sección transversal en la fila $y = 500$, y (c) vista 3D. 152
- Figura 89. (a) Fase continua absoluta a baja frecuencia Φ_L , y (b) fase continua absoluta a alta frecuencia Φ_H . 153
- Figura 90. (a) Intensidad del fondo continuo de las imágenes de franjas $A_{(x_C, y_C)}$, y (b) gráfica de puntos con las coordenadas (u_i, v_i) del cráneo humano en el mapa de fase continua absoluta Φ . 154
- Figura 91. Puntos en las coordenadas X_{cam} , Y_{cam} , y Z_{cam} (en milímetros), respecto al sistema coordenado de la cámara, formando la nube 3D del frontal de un cráneo humano. 156
- Figura 92. (a) Nubes de puntos 3D del plano de referencia y de los planos a $5mm$ y $10mm$, y (b) sus vistas desde el plano XZ . 159
- Figura 93. Gráficos de dispersión para distancias medidas a: (a) $10mm$, (b) $5mm$, y (c) $1mm$ respecto al plano de referencia. 160
- Figura 94. Gráficos de dispersión para distancias medidas a: (a) $100\mu m$, y (b) $10\mu m$ respecto al plano de referencia. 161

- Figura 95. Nube de puntos 3D del cráneo humano desde su vista: (a) frontal, (b) fronto-temporal derecha, y (c) fronto-temporal izquierda. 162
- Figura 96. Nube de puntos 3D del cráneo humano desde su vista: (a) frontal, (b) fronto-temporal derecha, y (c) fronto-temporal izquierda. 166
- Figura 97. Nube de puntos 3D a 360° de observación del cráneo humano, vistas: (a) fronto-temporal-parietal derecha, (b) fronto-temporal-parietal izquierda, (c) occipital-parietal-temporal derecha, y (d) occipital-parietal-temporal izquierda. 167
- Figura 98. (a) Diagrama de Voronoi para una serie de puntos aleatorios X_i , y (b) su respectiva triangulación de Delaunay. 169
- Figura 99. (a) Serie de puntos aleatorios X_i distribuidos en el espacio 3D, y (b) su respectiva triangulación de Delaunay en 3D. 170
- Figura 100. Mallado triangular de Delaunay de la nube de puntos 3D del cráneo humano con su respectivo facetado. 172
- Figura 101. Mallado triangular de Delaunay de la nube de puntos 3D del cráneo humano sin facetado, desde su vista (a) fronto-temporal-parietal derecha, y (b) fronto-temporal-parietal izquierda. 173
- Figura 102. Mallado triangular de Delaunay de la nube de puntos 3D del cráneo humano sin facetado, desde su vista (a) occipital-parietal-temporal derecha, y (b) occipital-parietal-temporal izquierda. 173
- Figura 103. Remallado isotrópico de la nube de puntos 3D del cráneo humano con su respectivo facetado. 175

- Figura 104. Remallado isotrópico de la nube de puntos 3D del cráneo humano sin facetado, desde su vista (a) fronto-temporal-parietal derecha, y (b) fronto-temporal-parietal izquierda. 176
- Figura 105. Remallado isotrópico de la nube de puntos 3D del cráneo humano sin facetado, desde su vista (a) occipital-parietal-temporal derecha, y (b) occipital-parietal-temporal izquierda. 176
- Figura 106. Geometría de la cámara según el modelo de Pinhole. 216
- Figura 107. Relación de triángulos: (a) Plano Y , y (b) Plano X . 217
- Figura 108. Vista frontal del plano imagen. 219
- Figura 109. Transformación euclidiana entre el sistema coordenado de un objeto y el sistema coordenado de la cámara. 221
- Figura 110. Imagen de un patrón ajedrezado: (a) sin distorsión, y (b) con distorsión tangencial. 225
- Figura 111. Imagen de un patrón ajedrezado: (a) sin distorsión, (b) distorsión radial negativa, y (c) distorsión radial positiva. 226
- Figura 112. Descomposición de la distorsión geométrica. 228
- Figura 113. Patrón de calibración en el sistema coordenado del mundo. 232
- Figura 114. Imagen experimental del patrón de calibración, con una sub-área seleccionada para el procesamiento. 246
- Figura 115. Distribución de las esquinas de cuadros de la imagen de calibración (Figura 114), en el plano imagen normalizado. 255

Figura 116. (a) Coordenadas ψ_i , resultado de la transformación $\psi_i = H\psi'_i$, y (b) superposición de las coordenadas ψ_i y la imagen de calibración.

256

Figura 117. (a) Superposición de los puntos con coordenadas experimentales y los puntos con coordenadas teóricas sobre la imagen 1 de calibración, y (b) zum de la imagen 1 de calibración con los puntos de coordenadas teóricas y experimentales.

261

Figura 118. Distancia entre los puntos con coordenadas teóricas y los puntos con coordenadas experimentales.

262

Lista de Tablas

Tabla 1.	Valores de error $\Delta\Phi$ en la fase de un patrón de franjas simuladas con $f = 5$, $L = 800$, y $\gamma = 3$, usando algoritmos de corrimiento de fase con $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$.	58
Tabla 2.	Valores de error $\Delta\Phi$ en la fase de un patrón de franjas experimental con $N = 3$ y $f = 5$, proyectadas sobre un plano.	62
Tabla 3.	Valores de Error $\Delta\Phi$ en la fase de un sistema de franjas con $f = 5$ proyectadas sobre un plano, usando algoritmos de corrimiento de fase con $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$.	68
Tabla 4.	Valores de Error $\Delta\Phi$ en la fase de un sistema de franjas experimentales con $f = 5$, usando los algoritmo de corrimiento de fase de Bruning y P. de Groot.	83
Tabla 5.	Valores de Error $\Delta\Phi$ de la sección transversal $y = 200$ en la fase de un sistema de franjas experimentales con $f = 128$ proyectado sobre un cráneo humano, usando los algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$ y $N = 9$.	98
Tabla 6.	Valores experimentales de la onda de ruido en $\frac{f_2}{f_1}\Phi_1$, modificando f_1 para el mapa de fase inicial.	121
Tabla 7.	Valores experimentales de fase continua absoluta Φ y Z en el pixel (512, 384) de 15 posiciones en el volumen de calibración, junto a la evaluación del polinomio $Z_{teo} = a\Phi^2 + b\Phi + c$ y su diferencia $\Delta Z = Z_{exp} - Z_{teo}$.	147

- Tabla 8. Valores de desplazamientos teóricos ($10mm$, $5mm$, $1mm$), distancias medidas experimentalmente, y sus respectivos porcentajes de error. 159
- Tabla 9. Valores de desplazamientos teóricos ($100\mu m$, $10\mu m$), distancias medidas experimentalmente, y sus respectivos porcentajes de error. 160
- Tabla 10. Principales valores de la onda de error en la fase $\Delta\Phi$, en un sistema de franjas con paso de proyección 4,12,16, y 24, proyectado sobre un objeto plano variando el factor $\bar{\gamma}$. 212
- Tabla 11. Principales valores de la onda de error en la fase $\Delta\Phi$, en un sistema de franjas con paso de proyección 6,12, y 24, proyectado sobre un objeto plano variando el factor $\bar{\gamma}$.213
- Tabla 12. Principales valores de la onda de error en la fase $\Delta\Phi$, en un sistema de franjas con paso de proyección 6,12, y 24, proyectado sobre un objeto plano variando el factor $\bar{\gamma}$.214

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Ecuaciones Complementarias	190
Apéndice B. Valores experimentales del error en la fase $\Delta\Phi$	211
Apéndice C. Calibración de la cámara	215

Abreviaciones

2D: Dos dimensiones.

3D: Tridimensional.

ADN: Ácido desoxirribonucleico.

cam: Cámara.

CCD: Dispositivo de carga acoplada (*Charge coupled device*).

cos : Coseno.

CT: Tomografía computarizada (*Computed tomography*).

ETPU: Desnvolvimiento de fase temporal exponencial (*Exponential TPU*).

exp: Experimental.

GOTS: Grupo de óptica y tratamiento de señales.

GTPU: Desnvolvimiento de fase temporal generalizado (*Generalized TPU*).

ICP: Punto iterativo más cercano (*iterative closest point*).

LCD: Pantalla de cristal liquido (*Liquid crystal display*).

LTPU: Desnvolvimiento de fase temporal lineal (*Linear TPU*).

NN: Nomen nescio.

R3DD: Reconstrucción tridimensional digital.

RETPU: Desnvolvimiento de fase temporal exponencial inversa (*Reverse ETPU*).

sin : Seno.

tan : Tangente.

$\tan^{-1}$: Arcotangente.

TC: Tomógrafo computarizado.

teo: Teórico.

TPF: Tecnica de proyección de franjas.

TPU: Desenvolvimiento de fase temporal (*Temporal phase unwrapping*).

USB: Bus serial universal (*Universal serial bus*).

VGA: Matriz de gráficos de vídeo (*Video graphics array*).

ZUM: Procede del inglés Zoom.

Resumen

Título: Reconstrucción tridimensional digital de cráneos humanos para aplicaciones en ciencias forenses *

Autor: Andrés Leonardo González Gómez **

Palabras Clave: Reconstrucción tridimensional, proyección de franjas, desenvolvimiento de fase temporal, triangulación de Delaunay, remallado isotrópico.

Descripción: En este trabajo de investigación se presenta una estrategia metodológica de reconstrucción tridimensional especializada en el cráneo humano. La configuración experimental consta de una cámara CCD y un vídeo proyector comercial. La metodología se basa en una técnica de luz estructurada conocida como proyección de franjas, a la cual se le atribuyen importantes ventajas sobre otras técnicas de reconstrucción tridimensional de no contacto como son: gran versatilidad, mayor flexibilidad, relativo bajo costo, y alta precisión métrica. La investigación parte del estudio de la fundamentación teórica del análisis de franjas, desde la generación matemática del patrón de franjas para proyectar y los algoritmos básicos para recuperar la fase, hasta el análisis teórico y experimental del efecto gamma y la no linealidad de los dispositivos, junto con los métodos pasivos, activos y combinados más relevantes que se han desarrollado y publicado en los últimos años con el objetivo de reducir el error en la fase debido a armónicos residuales. El desenvolvimiento de la fase discontinua es otro de los retos científicos a los que se hace un aporte importante. Para esta necesidad particular, que deriva de la compleja topografía superficial del cráneo humano, se propone una novedosa estrategia a partir del algoritmo básico de desenvolvimiento de fase temporal pero utilizando únicamente dos frecuencias de proyección, y de este modo se logra reducir de cientos a dieciocho el número de imágenes que se deben adquirir y procesar para obtener la fase continua absoluta. Este logro se consigue aprovechando las restricciones geométricas del montaje experimental, sumado a la información de fase continua absoluta y coordenadas espaciales que son adquiridas con el ajuste polinomial propio del procedimiento de calibración. Finalmente, después de obtener nueve nubes de puntos tridimensionales de diferentes vistas del cráneo humano, que garantizan una exploración a 360° , se unifican en una única nube de puntos utilizando el algoritmo de registro ICP. La unificada nube de puntos tridimensional del cráneo humano a 360° , se dota de noción de superficie mediante un remallado isotrópico generado a partir de un mallado de base construido con el concepto de triangulación de Delaunay.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática. Director: Jaime Enrique Meneses Fonseca, Doctor en Ciencias de la Ingeniería.

Abstract

Title: Digital three-dimensional reconstruction of human skulls for applications in forensic sciences *

Author: Andrés Leonardo González Gómez **

Keywords: Three-dimensional reconstruction, fringe projection profilometry, dual temporal phase unwrapping, Delaunay triangulation, isotropic remeshing.

Description: In this research work a three-dimensional methodological reconstruction strategy specialized in the human skull is presented. The experimental setup consists of a CCD camera and a commercial video projector. The methodology is based on a structured light technique known as fringes projection profilometry, which is attributed significant advantages over other techniques of three-dimensional non-contact reconstruction such as: large versatility, wider flexibility, relative low cost, and high metric accuracy . The research is based on the study of the theoretical foundation of fringes analysis, from the mathematical generation of the pattern of fringes to project and the basic algorithms to recover the phase, to the theoretical and experimental analysis of the gamma effect and the non-linearity of the devices, together with the most relevant passive, active and combined methods that have been developed and published in recent years with the objective of reducing the phase error due to residual harmonics. The unwrapping of the wrapped phase is another of the scientific challenges to which an important contribution is made. For this particular need, which derives from the complex surface topography of the human skull, a novel strategy is proposed based on the basic algorithm of the dual temporal phase unwrapping, and in this way it is possible to reduce from hundreds to eighteen the number of images that must be acquired and processed to obtain the absolute continuous phase. This attainment is achieved by taking advantage of the geometric restrictions of the experimental set up, added to the absolute continuous phase information and spatial coordinates that are acquired with the polynomial adjustment of the calibration procedure. Finally, after obtaining nine clouds of three-dimensional points from different views of the human skull, which guarantee an exploration at 360° , they are unified into a single point cloud using the ICP registration algorithm. The unified three-dimensional point cloud of the human skull at 360° , is endowed with a notion of surface by an isotropic remeshing generated from a base mesh constructed with the Delaunay triangulation concept.

* Master Thesis

** Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática. Director: Jaime Enrique Meneses Fonseca, Doctor en Ciencias de la Ingeniería.

Introducción

El estudio métrico tridimensional (3D) del cráneo y de la estructura del rostro ha sido de gran interés en diferentes disciplinas científicas para obtener información tanto del pasado como del presente de la humanidad. Sus orígenes se remontan al siglo *XIX* con los primeros estudios sobre la evolución biológica y cultural de la humanidad, motivados por el interés de describir las poblaciones vivas y extintas. Más adelante, los datos métricos del cráneo humano permitieron a los paleontólogos desarrollar sofisticadas técnicas de evaluación y clasificación de diferencias raciales. Simultáneamente, los arqueólogos comenzaron a estudiar el cráneo para ordenar cronológicamente los restos esqueléticos de antiguas civilizaciones. Poco tiempo después, en las ciencias médicas, se encontró que la anatomía del cráneo aporta información a los médicos sobre posibles patologías que un individuo puede sufrir.

Otro hallazgo importante a partir de estos estudios, muestra que el cráneo en su forma o morfología posee información de la inserción de tejido blando (músculos, ligamentos, tendones, arterias, nervios, venas y órganos) que define la estructura externa de la cabeza (incluyendo el rostro) caracterizando e identificando al individuo durante su vida. Este tejido desaparece pronto después de la muerte, sin embargo, en el cráneo (como en los demás huesos del esqueleto) se preserva la evidencia de su existencia y de sus características, y dado a que los huesos son resistentes a muchos tipos de decaimiento, estos rasgos se convierten en el registro más duradero que identifica a un individuo. Por esta razón, el análisis detallado del cráneo también es un tema de interés para

las ciencias forenses; inicia con estudios métricos y de proporción para distinguir los cráneos de hombres y mujeres, hasta evolucionar a técnicas más complejas de antropometría y anatomía que permiten identificar otras características como la raza, la edad e información muy detallada sobre la nariz y posición de las orejas.

Producto de estos estudios, desde las ciencias forenses surge la Reconstrucción Facial; una técnica de identificación que permite a un especialista, a partir de un cráneo, reconstruir con materiales plásticos moldeables (hasta con un 80 % de precisión) el rostro real que tenía el sujeto en vida. A causa de los resultados que se han obtenido con la implementación de la técnica en procedimientos de identificación, se considera confiable y se sigue utilizando actualmente. De acuerdo con la literatura, el procedimiento crucial para la ejecución de la técnica es la obtención de una réplica exacta del cráneo, ya que los demás pasos del procedimiento dependen del análisis métrico y de textura de este modelo. De lo anterior se puede concluir que extraer información métrica 3D de la estructura externa del cráneo Humano aporta información determinante y valiosa para procesos empleados en ciencias forenses, antropología, arqueología, medicina, cosmetología, etc.

Por otro lado, los avances en ciencias computacionales han impulsado el desarrollo de la reconstrucción tridimensional digital (R3DD) como una poderosa herramienta para diferentes aplicaciones en sectores académicos, científicos, médicos, industriales, y de entretenimiento. La R3DD es en esencia una herramienta de digitalización que, a partir de técnicas de procesamiento de imágenes o visión por computador, permite analizar digitalmente objetos del mundo real y obtener las

propiedades cualitativas y cuantitativas de su forma y apariencia. La incorporación de la R3DD en diferentes procesos aporta facilidad, precisión, repetitividad, objetividad, y permite hacer mediciones y construcciones que de otro modo no serían posibles o no se podrían automatizar. Particularmente, la técnica de proyección de franjas (TPF) es una herramienta de R3DD rápida, versátil, de relativo bajo costo, y de alta precisión métrica.

En este trabajo de investigación se presenta una estrategia para extraer información métrica 3D de cráneos humanos, obteniendo su R3DD mediante la adaptación de TPF. Se ha conseguido una precisión de décimas de milímetro y reconstrucción total del cráneo a 360° de observación, con el fin de que, en un trabajo posterior, con los alcances de este trabajo se pueda pensar en el desarrollo de un prototipo como herramienta básica para la identificación de N.N.'s, adicionando digitalmente tejido blando (que permita establecer la apariencia del rostro) de acuerdo a la información métrica de la R3DD del cráneo.

1. Objetivos

Objetivo general

Desarrollar una estrategia para la R3DD de cráneos humanos mediante la adaptación del método de proyección de franjas, procesamiento de imágenes y algoritmos computacionales.

Objetivos específicos

Definir las condiciones experimentales con las que sea posible reconstruir un cráneo humano usando la técnica de proyección de franjas.

Determinar las condiciones teórico experimentales para la calibración de un sistema de proyección-adquisición, que permita obtener información 3D según las condiciones experimentales establecidas.

Validar metrológicamente los resultados de la estrategia propuesta, reconstruyendo objetos de dimensiones bien conocidas, como patrones de calibración.

Unificar las diferentes nubes de puntos 3D para su análisis a 360° de observación.

Desarrollar o acondicionar un algoritmo que permitan obtener un optimo renderizado de una nube 3D, para extraer la información métrica necesaria que permita en un trabajo posterior adicionar tejido blando.

2. Fundamento Teórico del Análisis de Franjas

En metrología óptica intuitivamente se recurre a variables de naturaleza óptica para medir variables físicas de interés en aplicaciones científicas, industriales y medicas. De este modo, sistemas interferométricos de metrología óptica generan (en intensidad) un sistema de franjas en los que se emplea la fase del frente de onda para codificar la variable de interés. Los métodos de análisis interferométrico para medir superficies iniciaron con los *Anillos de Newton*, fenómeno que inicialmente analizó Isaac Newton pero fue Robert Hooke quien lo publico en 1664 (Zhang, 2013).

Los avances en la tecnología han facilitado la evolución de los métodos de interferométricos, y en la actualidad es posible hablar de métodos computarizados que se utilizan para medidas de alta resolución. Actualmente, obtener una imagen con perfil en intensidad sinusoidal no es exclusivo de sistemas interferométricos, es ampliamente utilizada la técnica de proyección de franjas que consiste en proyectar un patrón de franjas con perfil sinusoidal sobre un objeto de interés para obtener una o varias imágenes de intensidad (sinusoidal), donde la fase se evalúa para codificar la superficie a medir.

Algunos métodos para el análisis de franjas utilizan la transformada de Fourier para recuperar información de fase de una única imagen de franjas mediante la transformada global o local (Takeda and Mutoh, 1983; Kemao et al., 2008). Estos métodos presentan un buen desempeño en aplicaciones de alta velocidad en las que una única imagen es suficiente para obtener la informa-

ción de la superficie de un objeto; sin embargo, están limitados para medir superficies relativamente “lisas” sin fuertes variaciones en la topografía superficial. Por el contrario, las técnicas basadas en corrimiento de fase recuperan la fase píxel por píxel, pero se requieren por lo menos tres imágenes para operar entre ellas y así recuperar el mapa de fase.

Los métodos basados en corrimiento de fase han sido más usados que los métodos basados en transformada de Fourier para aplicaciones en metrología óptica 3D, básicamente por estas dos ventajas que se les atribuyen (Zhang, 2013):

- Alta resolución espacial, ya que la fase (y por lo tanto la medición de profundidad) se puede realizar píxel por píxel.
- Menos sensibilidad al ruido ambiente y a variaciones de reflectividad de superficie, ya que en la operación de cálculo de fase se eliminan varias de estas componentes.

Sin importar el método de recuperación de fase su valor siempre se encuentra acotado entre $-\pi$ y $+\pi$, razón por la cual se requiere de un algoritmo espacial de desenvolvimiento de fase (Zhang, 2018), lo que limita el uso de la técnica a la topografía superficial del objeto puesto que variaciones muy abruptas o sombras oscuras distorsionan las franjas de tal forma que es imposible recuperar información de fase localizada afectando el mapa global de fase. Por esta razón se han desarrollado algoritmos temporales de desenvolvimiento de fase, que utilizan patrones de franjas a diferentes frecuencias, y aumentan la versatilidad de TPF (Zhang, 2018).

2.1. Principio de TPF

TPF es una técnica de R3DD que pertenece al grupo de técnicas de luz estructurada, en las que se utilizan patrones que varían en intensidad de forma “conocida” generalmente sinusoidales. El montaje experimental típico para la ejecución de la técnica consta de: un vídeo proyector, una cámara digital y un computador. El principio básico de R3DD se basa en el hecho de que al proyectar un patrón de franjas sobre la superficie de un objeto de superficie plana la imagen corresponde a un sistema de franjas rectas; pero si el objeto posee una superficie no plana, la imagen corresponde a franjas deformadas en función de la forma local de la superficie.

La Figura 1 ilustra un esquema que describe el principio básico de la técnica; el vídeo proyector ilumina el objeto 3D con franjas rectas verticales que equivalen a líneas de fase sobre el objeto.

La superficie del objeto 3D distorsiona el patrón de franjas ó las líneas de fase pasando de rectas a cualquier forma que pueda generar la superficie del objeto. Una cámara captura las imágenes de las franjas distorsionadas desde otro ángulo. En un sistema de este tipo, la correspondencia se establece mediante el análisis de la distorsión del patrón de franjas a partir de algoritmos para recuperar la fase (Zhang, 2013).

El diagrama de flujo que se presenta en la Figura 2, describe la secuencia metodológica que

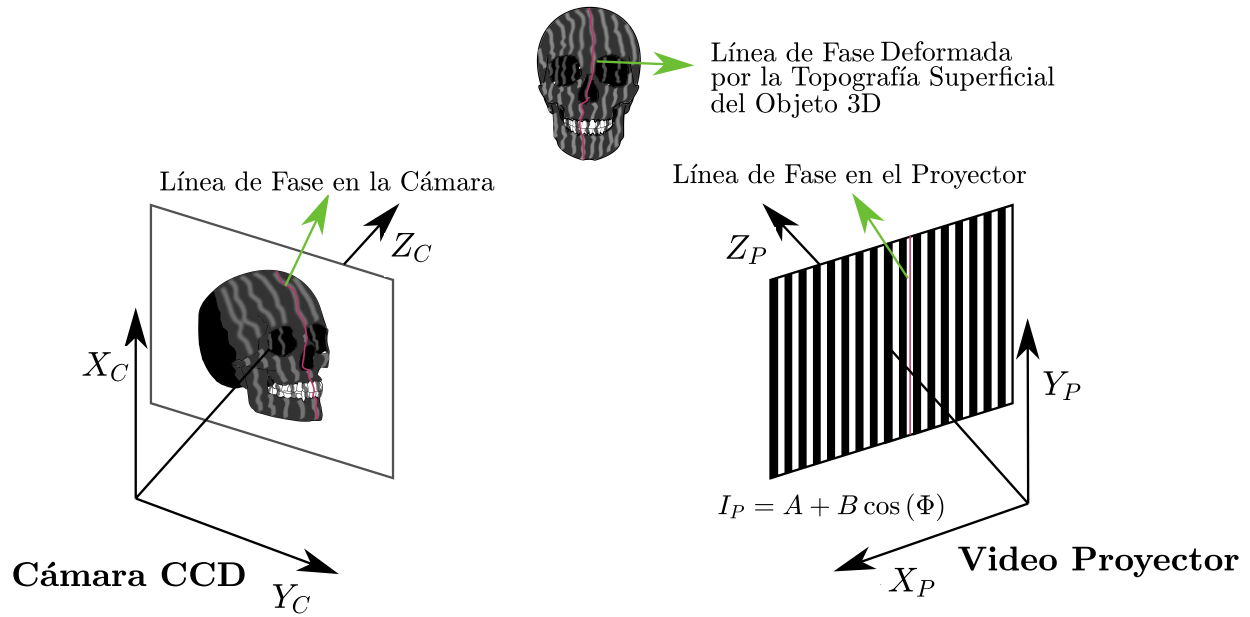


Figura 1. Diagrama esquemático que ilustra un sistema de R3DD usando la TPF.

se debe seguir al ejecutar TPF.

2.2. Obtención de la fase

En TPF se usan patrones de franjas que se suelen ajustar a un perfil sinusoidal, en los que la distribución de intensidad se describe matemáticamente con la ecuación 1, el origen de esta ecuación se puede consultar en el apéndice 1,

$$I = A + B \cos(\varphi), \quad (1)$$

en donde los términos A y B corresponden a la intensidad del fondo continuo y al contraste de las franjas, respectivamente; y φ es la fase inicial de las franjas. Con esta idea se puede generar

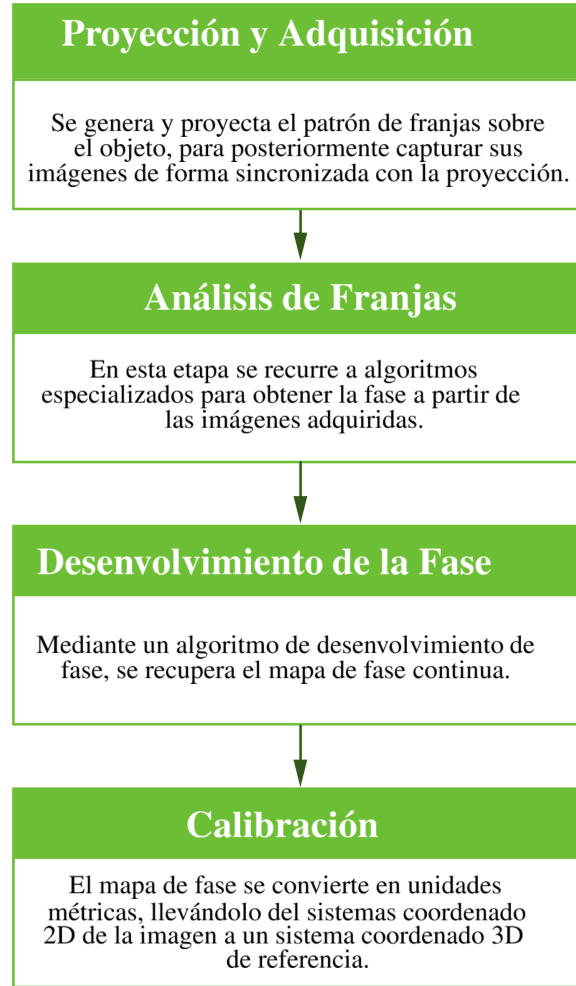


Figura 2. Diagrama de flujo que describe la secuencia metodológica de TPF.

una imagen de franjas digitales en el vídeo proyector, haciendo uso de la ecuación 2,

$$I_{(m,n)}^P = A + B \cos \left(\frac{2\pi f(m - m_o)}{L} \right), \quad (2)$$

generalmente a los términos A y B se les asigna un valor de 0,5, con la intención de cubrir el rango dinámico del vídeo proyector $[0 - 1]$ con la señal sinusoidal. Las coordenadas en el vídeo proyector en pixeles se denotan (m_P, n_P) , f corresponde al número de franjas en el campo de pro-

yección y L al número total de píxeles en la dirección transversal del patrón de franjas. El termino $(m - m_o)_P$, con m_o como la coordenada horizontal del centro de la LCD en el vídeo proyector, hace referencia a los píxeles horizontales y comprende los valores entre $-L/2 \dots 0 \dots L/2$. En la Figura 3 se muestra a modo de ejemplo una imagen de franjas verticales generada usando la ecuación 2, simulando un vídeo proyector con LCD de 800×600 píxeles y un valor de $f = 5$.

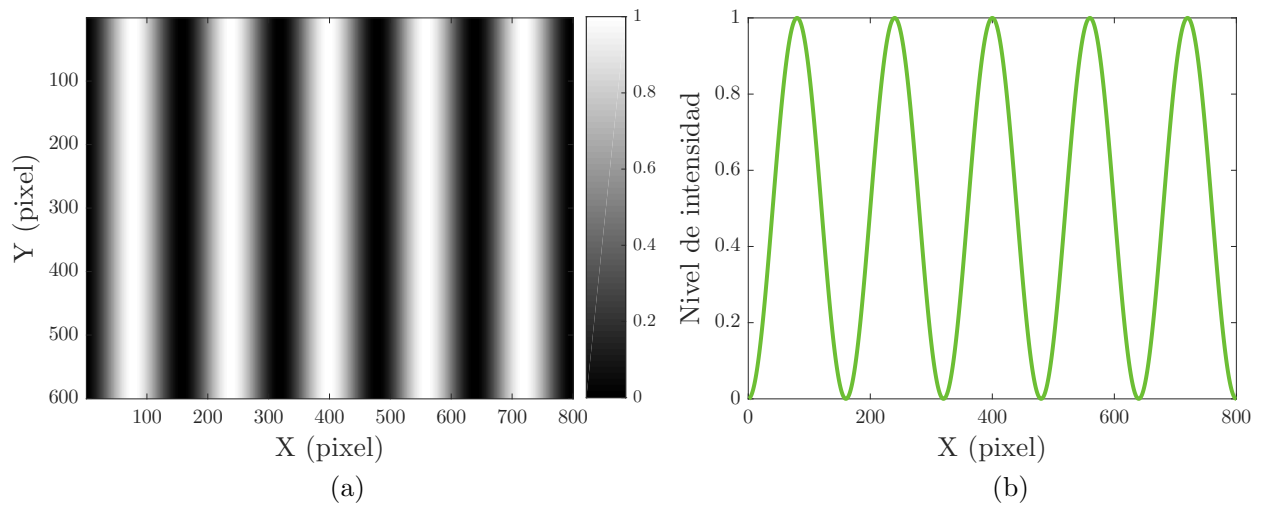


Figura 3. (a) Imagen de franjas simulada con $f = 5$ en una matriz de 800×600 pixel, y (b) su correspondiente sección transversal.

Cuando una imagen de franjas es proyectada sobre la superficie de un objeto, se distorsiona y la luz se refleja punto a punto. A la luz reflejada se le atribuyen dos fuentes: la luz del vídeo proyector y la luz ambiente. El patrón de franjas reflejado I^P combinado con la luz ambiente β_1 es modulado y reflejado por el objeto. La cámara captura imágenes de franjas distorsionadas punto a punto, la luz vista por la cámara incluye: luz reflejada por el objeto, y luz ambiente adicional β_2 que entra directamente en la cámara. La imagen de franjas vista por la cámara se define matemáti-

camente por la ecuación 3,

$$I_{(x_C, y_C)}^C = I_v \Delta t [\alpha_{(x_C, y_C)} [A^P + B^P \cos(\varphi_{(x_C, y_C)}) + \beta_{1(x_C, y_C)}] + \beta_{2(x_C, y_C)}], \quad (3)$$

en donde (x_C, y_C) corresponden a las coordenadas (pixel) en el plano imagen de la cámara, $I_{v(x_C, y_C)}$ la respuesta en intensidad en el sensor CCD, $\alpha_{(x_C, y_C)}$ es la reflectividad de la superficie del objeto, $\varphi_{(x_C, y_C)}$ es la fase del patrón de franjas distorsionado, la cual contiene información de profundidad de la superficie del objeto, y Δt es el tiempo de interacción en el sensor CCD. Sin embargo, la ecuación 3 es “complicada”, y generalmente la cantidad de interés es el componente de fase de la imagen de franjas. Por esta razón, y por simplicidad, en la literatura especializada (Zuo et al., 2018) $I_{(x_C, y_C)}^C$ se expresa con la ecuación 4,

$$I_{(x_C, y_C)}^C = A_{(x_C, y_C)} + B_{(x_C, y_C)} \cos(\varphi_{(x_C, y_C)}). \quad (4)$$

Para esta ultima expresión, ecuación 4, $A_{(x_C, y_C)}$ corresponde a la intensidad promedio de la imagen de franjas, y $B_{(x_C, y_C)}$ se conoce como la modulación de intensidad (Zuo et al., 2018). Ambos términos están estrechamente relacionados con los parámetros físicos reales de la reflectividad de la superficie y la luz ambiente de acuerdo con las ecuaciones 5 y 6,

$$A_{(x_C, y_C)} = \alpha_{(x_C, y_C)} [A^P + \beta_{1(x_C, y_C)}] + \beta_{2(x_C, y_C)}, \quad (5)$$

$$B_{(x_C, y_C)} = \alpha_{(x_C, y_C)} B^P. \quad (6)$$

Con el propósito de calcular la fase del sistema de franjas distorsionado visto por la cámara se han desarrollado diferentes algoritmos de corrimiento de fase (Buytaert and Dirckx, 2011a), cuyo principio básico de funcionamiento es generar más datos (ecuaciones) modificando el termino de fase de forma “controlada”, adicionando o restando valores conocidos, lo que físicamente se traduce como más imágenes. Dado que la ecuación 4 consta de tres incógnitas ($A_{(x_C, y_C)}$, $B_{(x_C, y_C)}$, $\varphi_{(x_C, y_C)}$) se necesitan de por lo menos dos ecuaciones más para resolver el sistema. En concordancia con lo anterior, se requiere de mínimo tres (datos por pixel) imágenes para calcular la fase de un sistema de franjas, utilizando un método de corrimiento de fase. La expresión genérica para crear las imágenes a proyectar en los métodos de corrimiento de fase se muestra en la ecuación 7,

$$I_{(m, n)}^P = A + B \cos \left(\frac{2\pi f(m - m_o)}{L} - \delta_i \right), \quad (7)$$

en donde $\delta_i = 2\pi(i - j)/N$ es el monto que modifica la fase (en *radianes*), N corresponde al número de imágenes (ecuaciones), $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, y $j = \lfloor N/2 \rfloor$ para obtener el mismo número de imágenes antes y después de la imagen con $\delta_i = 0$ cuando N es un número impar (algoritmo simétrico). Para un caso ejemplo con $f = 5$, el algoritmo básico de corrimiento de fase ($N = 3$) conduciría a los siguientes valores: para $i = 0, 1$, y 2 , y para $j = \lfloor 3/2 \rfloor = 1$, entonces las expresiones

para generar las imágenes están dadas por las ecuaciones 8-10,

$$I_{1(m,n)}^P = A + B \cos \left(\varphi_{(m)} + \frac{2\pi}{3} \right), \quad (8)$$

$$I_{2(m,n)}^P = A + B \cos \left(\varphi_{(m)} \right), \quad (9)$$

$$I_{3(m,n)}^P = A + B \cos \left(\varphi_{(m)} - \frac{2\pi}{3} \right). \quad (10)$$

La Figura 4 muestra las imágenes del patrón de franjas generado usando las ecuaciones 8-10, junto a sus respectivas secciones transversales.

Al capturar con la cámara las imágenes del patrón de franjas que se muestran en la Figura 4, denominadas I_1^C , I_2^C , e I_3^C respectivamente, se puede calcular con ellas la fase del sistema de franjas usando un algoritmo a tres imágenes ($N = 3$), como se muestra en la ecuación 11. La deducción de la ecuación 11 se puede consultar en el apéndice 2.

$$\varphi_{(x_C, y_C)} = \tan^{-1} \left(\sqrt{3} \frac{I_3^C - I_1^C}{2I_2^C - I_1^C - I_3^C} \right). \quad (11)$$

En la Figura 5 se puede observar la fase $\varphi_{(x_C, y_C)}$ del sistema de franjas de la Figura 4, esta se obtiene usando la ecuación 11. Debido a que la función $\tan^{-1}$ se encuentra acotada entre $-\pi$

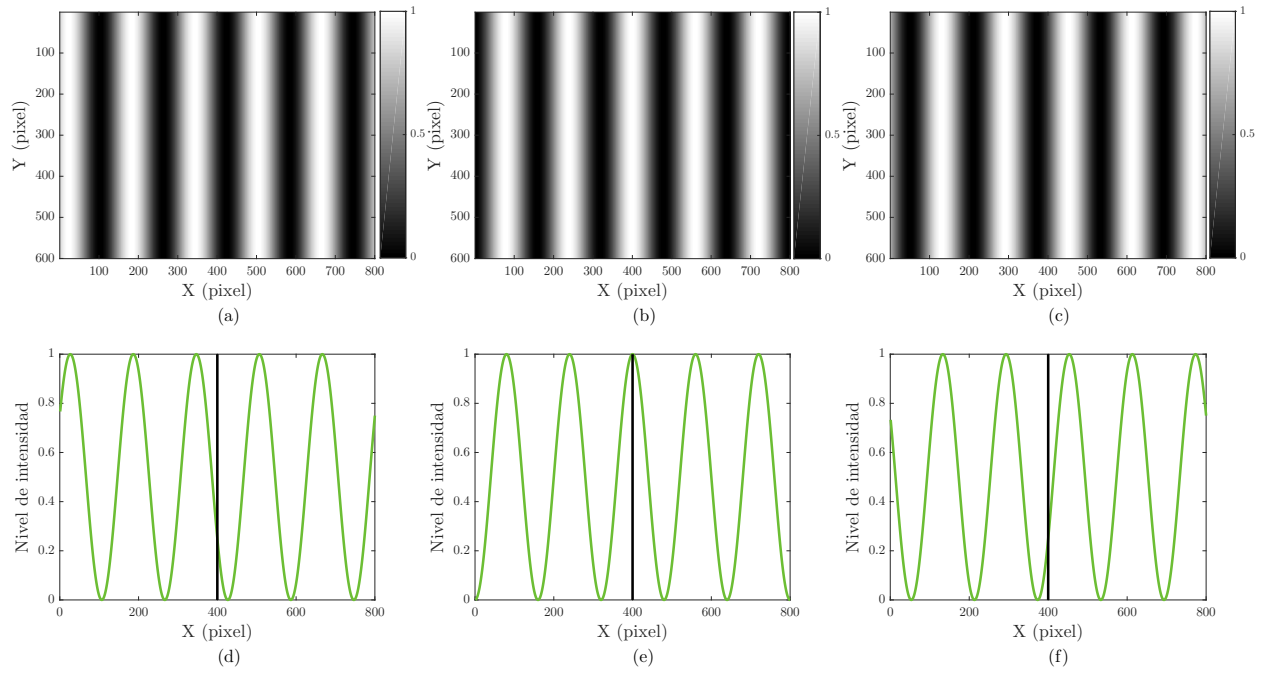


Figura 4. Patrón de franjas simulado con $f = 5$, $L = 800$ y (a) $\delta_1 = +2\pi/3 \text{ rad}$, (b) $\delta_2 = 0 \text{ rad}$, (c) $\delta_3 = -2\pi/3 \text{ rad}$, y (d-e) sus respectivas secciones transversales.

y π , la fase resultante presenta discontinuidades que se observan con mayor claridad en una vista transversal, Figura 5 (b). Por esta razón la fase φ se conoce como fase “discontinua” ó fase “envuelta”. Para desenvolver la fase, la ubicación de las transiciones a 2π se deben identificar y corregirse sumando o restando números enteros múltiplos de 2π . El valor de 2π para sumar a o restar a un punto (x, y) usualmente es llamado el orden de franja $k_{(x, y)}$.

Básicamente, los algoritmos de desenvolvemento de fase (*unwrapping*) se centran en determinar $k_{(x, y)}$ para cada punto del mapa de fase discontinua y realizar la operación de suma o resta correspondiente para así obtener la respectiva fase continua (Zhang, 2018).

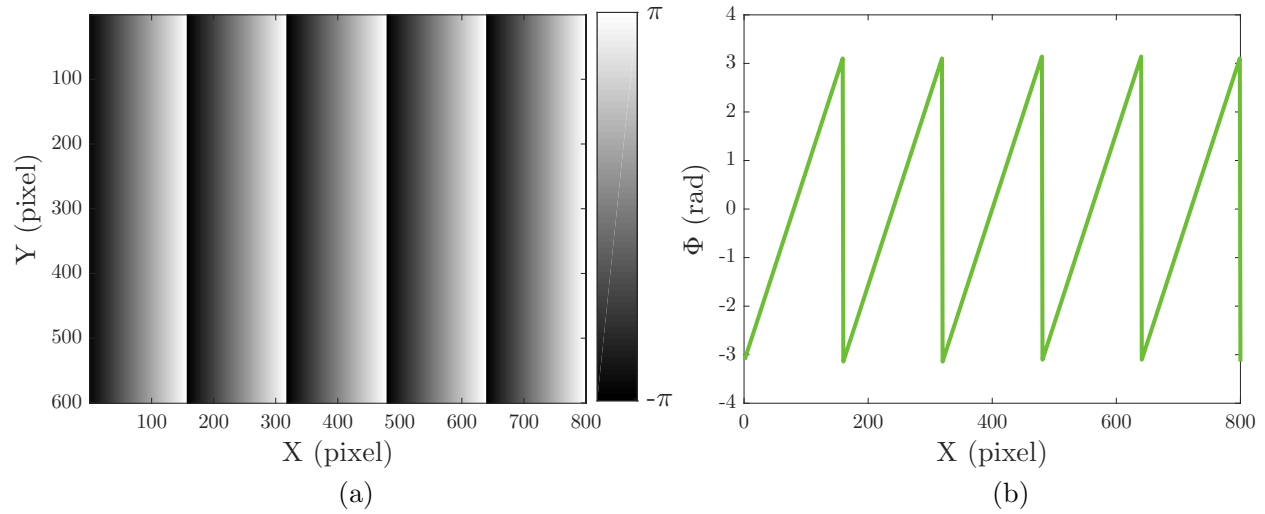


Figura 5. (a) Fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$ de un sistema de franjas simulado con $f = 5$, $L = 800$, y (b) su sección transversal.

La diferencia de valores de fase entre puntos (x_C, y_C) vecinos permite identificar las transiciones con valores igual a 2π , y de acuerdo con su posición espacial en el mapa de fase se determina el orden $k_{(x_C, y_C)}$ que en esencia corresponde al número de veces que se suma o se resta 2π , a partir del punto inicial de desenvolvimiento. Según la ecuación 2, cuando el termino $(m - m_o)_P = 0$ la fase también valdrá $\varphi = 0$, y esta coordenada horizontal corresponde a una franja con intensidad máxima en el vídeo proyector. Con el fin de obtener una fase continua absoluta Φ a partir de una fase discontinua φ , es necesario seleccionar el punto inicial de desenvolvimiento en la imagen adquirida por la cámara al punto que corresponda a la franja mas brillante (alta intensidad) que pase por $\Phi = 0$ del vídeo proyector. Experimentalmente esto se consigue proyectando una imagen de fondo negro (valor mínimo de intensidad) con la columna en la coordenada $(m - m_o) = 0$ en blanco (valor máximo de intensidad). Sobre la imagen adquirida por la cámara se puede seleccionar el punto x_0 que corresponde a la posición $(m - m_o) = 0$ en el proyector, con valor de fase $\Phi = 0$, y

a partir de este punto la fase continua Φ toma valores positivos en la dirección de incremento del eje X y negativos en la otra dirección (cuando se usa un patrón de franjas verticales). De este modo se definen ordenes $+k$ y ordenes $-k$, para obtener así la *fase continua absoluta* Φ .

Para fines prácticos, el punto x_0 se ubica en el centro del campo de proyección y de observación, puesto que es la forma más eficaz de encontrar la fase continua *absoluta* Φ de un sistema de franjas. Una fase continua desenvuelta a partir de cualquier otro punto inicial x_i en el mapa de fase discontinua φ diferente de x_0 , aunque presenta la misma forma y pendiente, no corresponde a la fase continua absoluta Φ del sistema de franjas. Esta fase se conoce como *fase continua relativa* y puede presentar valores en *radianes* mayores o menores a los de la fase continua absoluta. En la Figura 6 se muestra la superposición de: la sección transversal de I^P , y la sección transversal de la fase discontinua φ , junto al punto x_0 para ilustrar como el origen del perfil sinusoidal que describen las franjas corresponde a un valor de $\varphi = 0$ y de una franja con máxima intensidad; también se incluyen otros posibles puntos x_i de desenvolvimiento de fase, sin ser los únicos en todo el mapa de fase discontinua φ .

Por otro lado, aunque la coordenada “y” no suele ser relevante para el desenvolvimiento de fase φ en dirección horizontal (para un patrón de franjas verticales), se suele seleccionar un valor y_0 medio para garantizar que las coordenadas del punto inicial de desenvolvimiento correspondan a una región de la imagen con información de franjas sobre el objeto de interés. Continuando con el procedimiento de desenvolvimiento de fase discontinua φ , una vez calculados los ordenes $k_{(x_C, y_C)}$,

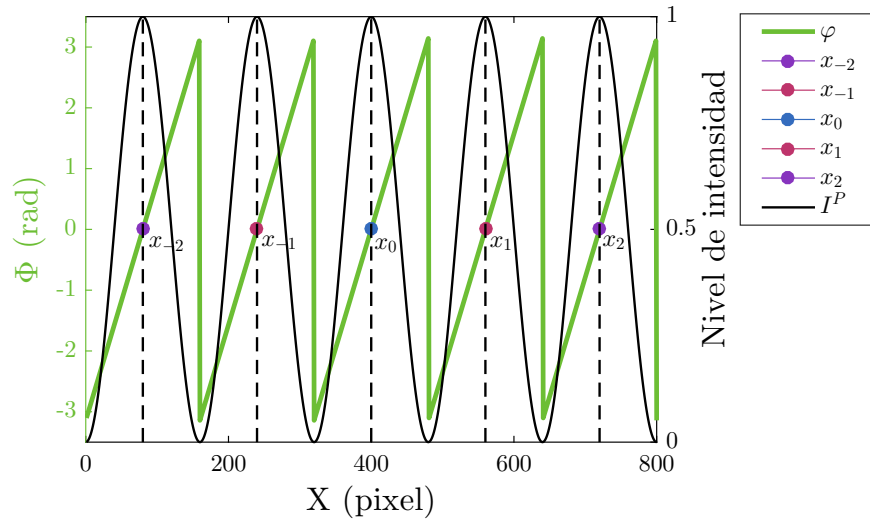


Figura 6. Superposición de la sección transversal de I^P , la sección transversal de la fase discontinua $\varphi(x_P, y_P)$, y los puntos x_i con $\varphi(x_P, y_P) = 0$.

matemáticamente se pueden relacionar la fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$ con la fase continua $\Phi_{(x_C, y_C)}$ como se muestra en la ecuación 12,

$$\Phi_{(x_C, y_C)} = \varphi_{(x_C, y_C)} + 2\pi k_{(x_C, y_C)}. \quad (12)$$

Para la fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$ de la Figura 5, sus ordenes $k_{(x_C, y_C)}$ correspondientes, a partir del punto inicial de desenvolvimiento con coordenadas (x_0, y_0) , se ilustran en la Figura 7 (a). La superposición de los ordenes $k_{(x_C, y_C)}$ y la fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$, que se muestra en Figura 7 (b), permite visualizar la forma en que se sumaran o restaran valores enteros de 2π para desenvolver la fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$ y obtener la fase continua absoluta $\Phi_{(x_C, y_C)}$.

Finalmente, calculados los ordenes $k_{(x_C, y_C)}$, a partir del punto inicial de desenvolvimiento

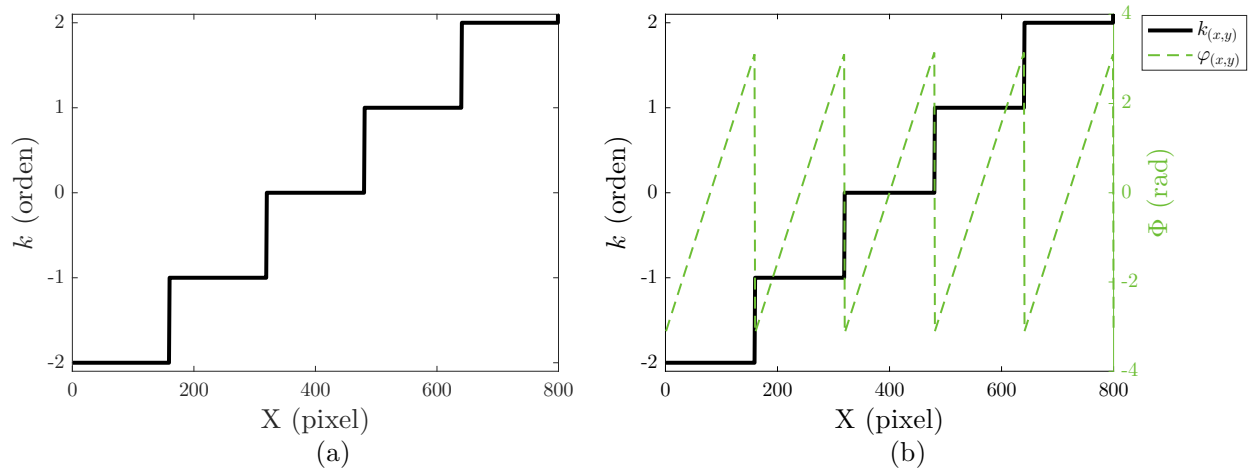


Figura 7. (a) Sección transversal de los ordenes $k_{(x_C, y_C)}$ correspondientes a la fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$ de la Figura 5, (b) Superposición de la sección transversal de los ordenes $k_{(x_C, y_C)}$, y la sección transversal de la fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$ de la Figura 5.

(x_0, y_0) , se desenvuelve la fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$ y se obtiene la fase continua absoluta $\Phi_{(x_C, y_C)}$.

Para el sistema de franjas del ejemplo de la Figura 4, la fase continua absoluta $\Phi_{(x_C, y_C)}$ se muestra en la Figura 8 (a); y su sección transversal junto con la sección transversal de 4 fases continuas relativas, desenvueltas a partir de los puntos $(x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_2, y_0)$, se muestran en la Figura 8 (b).

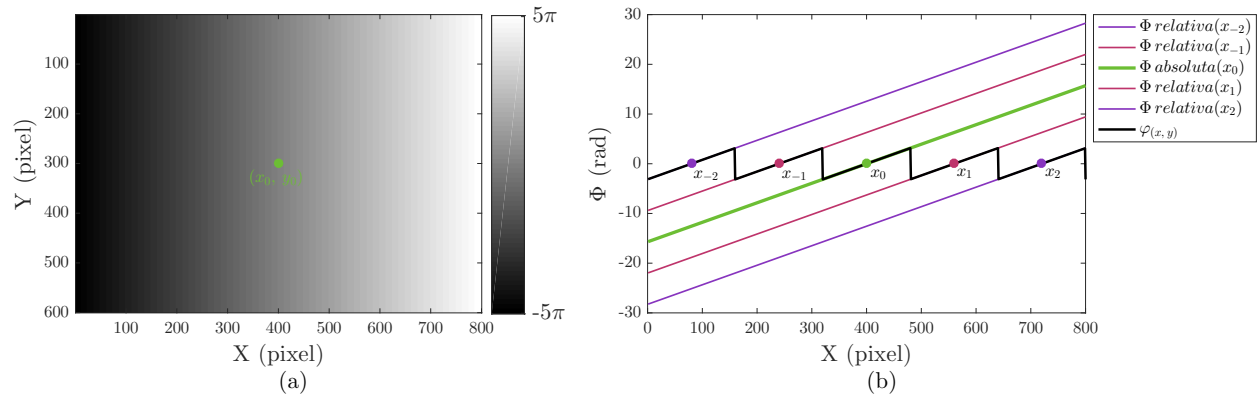


Figura 8. (a) Fase continua absoluta $\Phi_{(x_C, y_C)}$ correspondiente al patrón de franjas de la Figura 4, y (b) su respectiva sección transversal junto a 4 secciones transversales de fases continuas relativas desenvueltas a partir de los puntos con $\varphi_{(x_C, y_C)} = 0$, $(x_{-2}, x_{-1}, x_1$ y $x_2)$.

En la Figura 9 (a) se muestra la fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$ junto a su respectiva fase continua absoluta $\Phi_{(x_C, y_C)}$, Figura 9 (b), en una vista 3D.

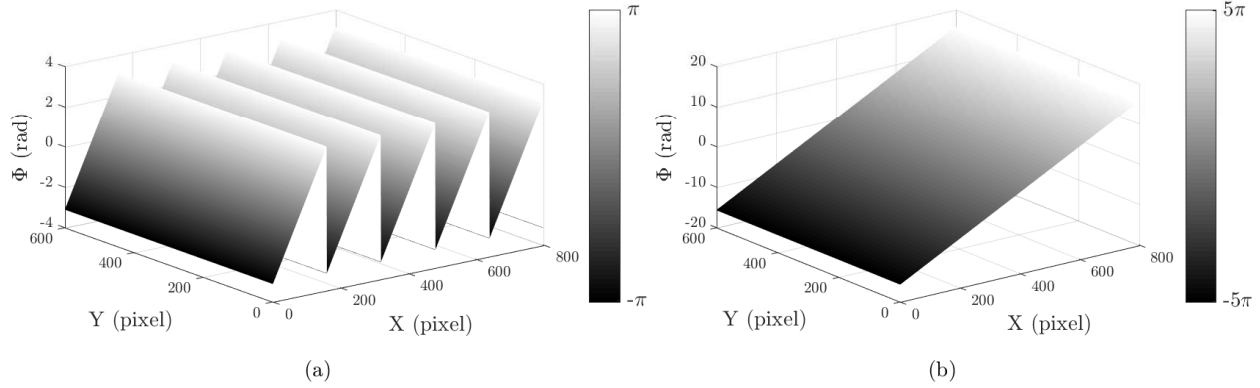


Figura 9. (a) Vista 3D de la fase discontinua $\varphi_{(x_C, y_C)}$ de la Figura 5, y (b) vista 3D de la fase continua absoluta $\Phi_{(x_C, y_C)}$ de la Figura 8.

2.3. El efecto gamma y la no linealidad

La codificación gamma es una operación exponencial que se usa para codificar y decodificar luminancia en sistemas de vídeo o imagen. Es necesaria para maximizar el ancho de banda en bits relativo a cómo el ser humano percibe la luz y el color. La visión humana sigue aproximadamente una función de potencia tipo gamma. Si las imágenes no están codificadas con gamma entonces se dedican demasiados bits o demasiado ancho de banda a los valores más brillantes de la imagen que el ser humano no es capaz de diferenciar, y muy pocos bits o ancho de banda a valores más oscuros a los que es más sensibles y que requieren más bits para la misma calidad visual (Poynton, 2012).

El efecto gamma γ de los vídeo proyectores comerciales ha sido estudiado y modelado como una función exponencial con un parámetro escrito en la ecuación 13 (Pan et al., 2009a), las

coordenadas (x, y) se omiten por simplicidad,

$$I^C = (I^P)^\gamma, \quad (13)$$

en donde I^C es el patrón de franjas visto por una cámara, asumiendo una respuesta lineal, con el nivel de gris modificado a partir de un nivel de gris de entrada que corresponde a un patrón de franjas sinusoidal ideal I^P , y γ es el factor que indica la influencia del efecto gamma. El factor γ es un número positivo que usualmente tiene valores entre $1 < \gamma < 3$ (Liu et al., 2010c), para el peor de los casos con $\gamma = 3$ una imagen franjas I^C con $f = 5$ y $L = 800$ se vería afectada como se muestra en la Figura 10.

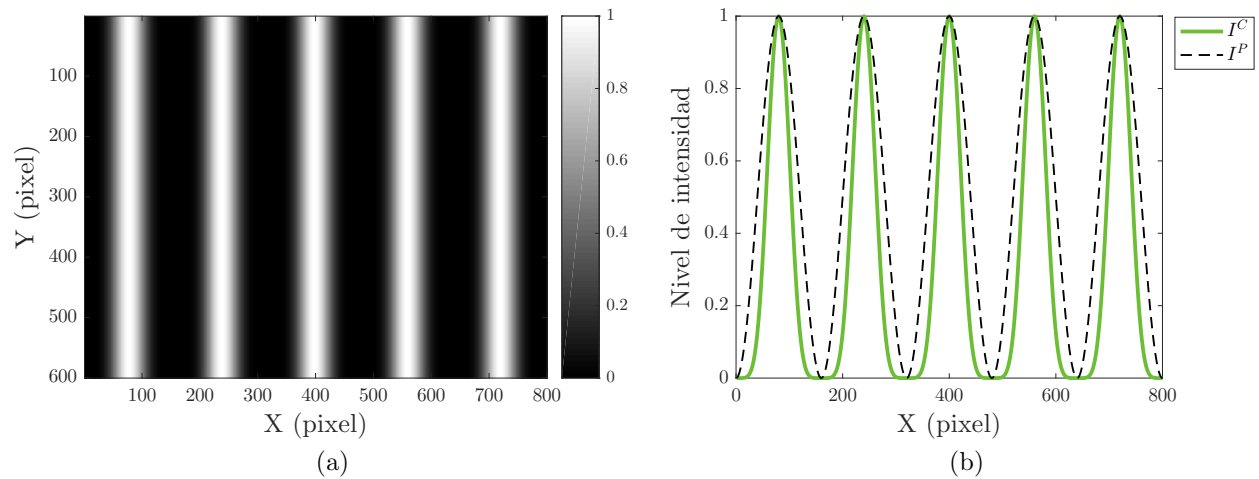


Figura 10. (a) Imagen de franjas simulada con $f = 5$, $L = 800$ afectada por un $\gamma = 3$, y (b) su correspondiente sección transversal.

El efecto del factor gamma γ en las imágenes de franjas I^C , repercute en la fase discontinua φ y por consiguiente en la fase continua absoluta Φ , en donde se percibe en forma de ondulaciones.

Lo anterior se puede observar en la Figura 11 (a), después de usar la ecuación 11 para calcular la fase discontinua φ del patrón de franjas simulado de la Figura 4, pero afectado por un $\gamma = 3$. Del mismo modo, el efecto del factor γ es evidente en la fase continua absoluta Φ que se obtiene al desenvolver la fase discontinua φ de la Figura 11 (a) y se muestra en la Figura 11 (b).

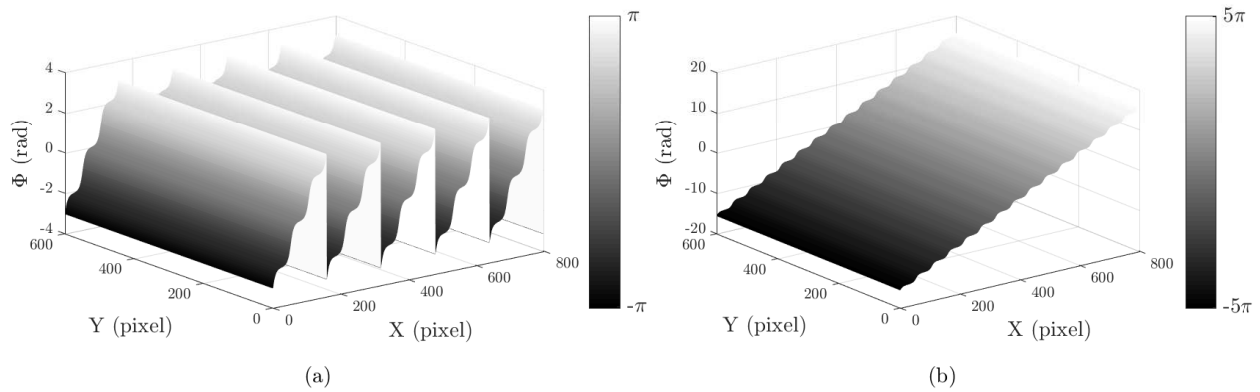


Figura 11. (a) Vista 3D de la fase discontinua φ de un patrón de franjas con $f = 5$, afectado por $\gamma = 3$, y obtenida con un algoritmo de corrimiento de fase $N = 3$, y (b) su respectiva fase continua absoluta Φ .

Por otra parte, como se muestra en la ecuación 13, la ecuación 4 es modificada por el efecto gamma γ dando lugar a la ecuación 14 (esta ecuación se escribe en detalle en el apéndice 3),

$$I^C = H + K \cos(\varphi) + L \cos(2\varphi) + M \cos(3\varphi), \quad (14)$$

en donde H, K, L , y M son constantes. La modificación de la ecuación de intensidad es una evidencia de la distorsión que sufre el patrón de franjas por la influencia del efecto gamma γ , que también se percibe en la distribución del espectro de Fourier de las imágenes de franjas I^C , en donde se pueden encontrar armónicos residuales, como se muestra en la Figura 12 (b), a los que

se les atribuye el rizado que distorsiona la fase continua Φ .

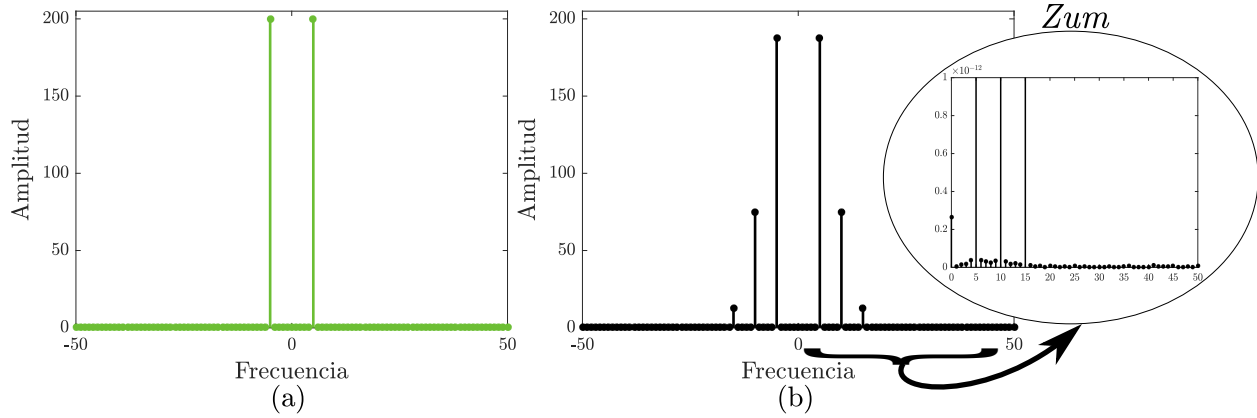


Figura 12. Distribución del espectro de Fourier: (a) del patrón de franjas simulado ideal I^P , y (b) del patrón de franjas simulado distorsionado I^C por el efecto $\gamma = 3$.

Ademas, considerando la respuesta no lineal de la cámara y del proyector, el modelo matemático se modifica (Huang and Zhang, 2006). Asumiendo que la entrada del patrón de franjas se genera como se muestra en la ecuación 15,

$$e = \frac{G}{2}[H + K \cos(\varphi) + L \cos(2\varphi) + M \cos(3\varphi)], \quad (15)$$

en donde G representa el máximo nivel de gris. En el caso ideal, la función de respuesta de la cámara y el proyector es lineal y se puede representar con la ecuación 16,

$$g(e) = a + be. \quad (16)$$

Sin embargo, si se considera un coeficiente residual de segundo orden c que combine la

función de respuesta del proyector y la cámara, la ecuación 16 se convierte en la ecuación 17,

$$g(e) = a + be + ce^2. \quad (17)$$

Reemplazando e en la ecuación 17, usando la definición de la ecuación 15, se obtiene una expresión que describe el patrón de franjas capturado incluyendo el efecto gamma y la respuesta no lineal como se muestra en la ecuación 18, una descripción más detallada de la deducción de esta ecuación se presenta en el apéndice 3,

$$g(e) = p + q\cos(\varphi) + r\cos(2\varphi) + s\cos(3\varphi) + u\cos(4\varphi) + v\cos(5\varphi) + w\cos(6\varphi), \quad (18)$$

en donde p, q, r, s, u, v , y w son constantes. Lo anterior implica que las imágenes vistas por la cámara difieren de las imágenes proyectadas I^P , las cuales se generan usando las ecuaciones de la 8 a la 10.

2.3.1. Análisis teórico del efecto gamma y la no linealidad de los dispositivos.

Considerando lo que se ha descrito en esta sección, y teniendo en cuenta que las imágenes de franjas vistas por la cámara I^C difieren del patrón de franjas que se diseña para proyectar I^P , se procede a realizar un análisis teórico de la influencia del efecto gamma y la no linealidad de los dispositivos en la TPF. Para empezar, las imágenes capturadas I_i^C para un algoritmo de corrimiento de fase a 3 imágenes ($N = 3$), con $\delta_i = 2\pi(i - 1)/3 \text{ rad}$ ($i = 0, 1 \dots N - 1$), se describen matemáticamente

mediante las ecuaciones 19-21,

$$I_1^C = p + q \cos(\varphi + \delta_0) + r \cos(2\varphi + 2\delta_0) + s \cos(3\varphi + 3\delta_0) + u \cos(4\varphi + 4\delta_0) + v \cos(5\varphi + 5\delta_0) + w \cos(6\varphi + 6\delta_0), \quad (19)$$

$$I_2^C = p + q \cos(\varphi) + r \cos(2\varphi) + s \cos(3\varphi) + u \cos(4\varphi) + v \cos(5\varphi) + w \cos(6\varphi), \quad (20)$$

$$I_3^C = p + q \cos(\varphi - \delta_2) + r \cos(2\varphi - 2\delta_2) + s \cos(3\varphi - 3\delta_2) - u \cos(4\varphi - 4\delta_2) + v \cos(5\varphi - 5\delta_2) + w \cos(6\varphi - 6\delta_2). \quad (21)$$

En la distribución del espectro de Fourier es posible observar una importante diferencia entre la imagen del patrón de franjas a proyectar I^P y la imagen del mismo patrón visto por la cámara I^C , el cual esta afectado por el factor gamma ($\gamma = 3$) y la no linealidad de los dispositivos, tal y como se muestra en la imagen simulada de la Figura 13.

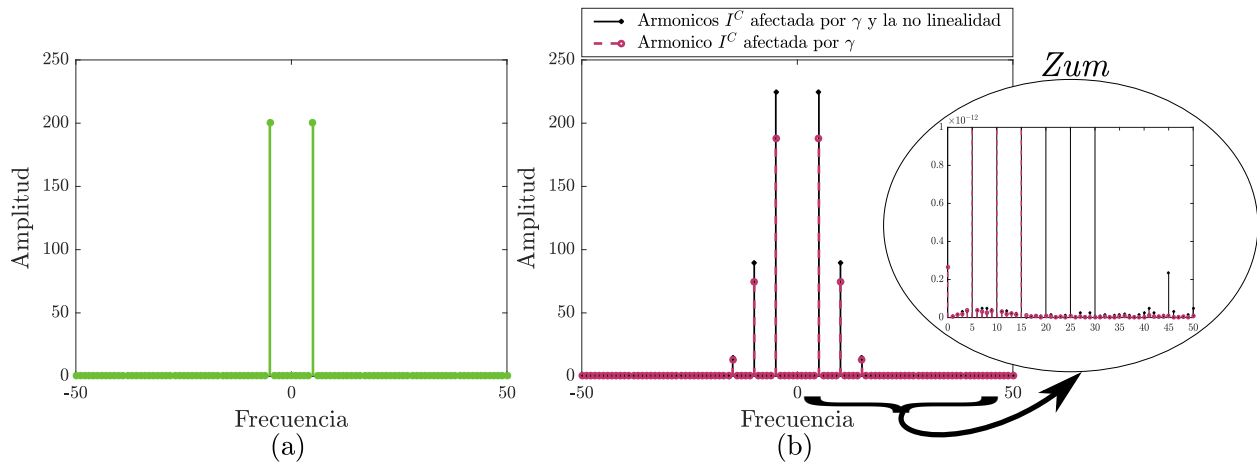


Figura 13. Distribución del espectro de Fourier: (a) del patrón de franjas simulado ideal, (b) del patrón de franjas simulado con la influencia del efecto $\gamma = 3$ y la no linealidad de los dispositivos.

Usando las ecuaciones 19-21 es posible calcular la fase del patrón de franjas visto por la cámara I^C , como se muestra en la ecuación 22 y se detalla en el apéndice 4,

$$\tan(\varphi^C) = \frac{q \sin(\varphi) - r \sin(2\varphi) + u \sin(4\varphi) - v \sin(5\varphi)}{q \cos(\varphi) + r \cos(2\varphi) + u \cos(4\varphi) + v \cos(5\varphi)}. \quad (22)$$

La diferencia de fase $\Delta\varphi$ introducida por los armónicos residuales se puede obtener con la ecuación 23,

$$\tan(\Delta\varphi) = \tan(\varphi^C - \varphi^P), \quad (23)$$

cuyo desarrollo matemático también se incluye en el apéndice 4 y conduce al resultado de la ecuación 24,

$$\Delta\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\sin(3\varphi)(u - r - 2v \cos(3\varphi))}{q - v + \cos(3\varphi)(r + u + 2v \cos(3\varphi))} \right). \quad (24)$$

De la ecuación 24 en donde se observa un número 3 acompañando el termino de fase φ y como lo demostró Huang *et al* (Huang et al., 2002), se puede afirmar que el número de crestas de la onda de error es tres veces el del patrón de franjas; esta afirmación se puede ilustrar gráficamente al comparar la fase continua absoluta Φ^P , que corresponde al patrón de franjas ideal I^P , con la fase continua absoluta Φ^C afectada por γ y la no linealidad de los dispositivos. En otras palabras se puede encontrar la onda del error en la fase $\Delta\Phi = \Phi^C - \Phi^P$, como se muestra en la Figura 14.

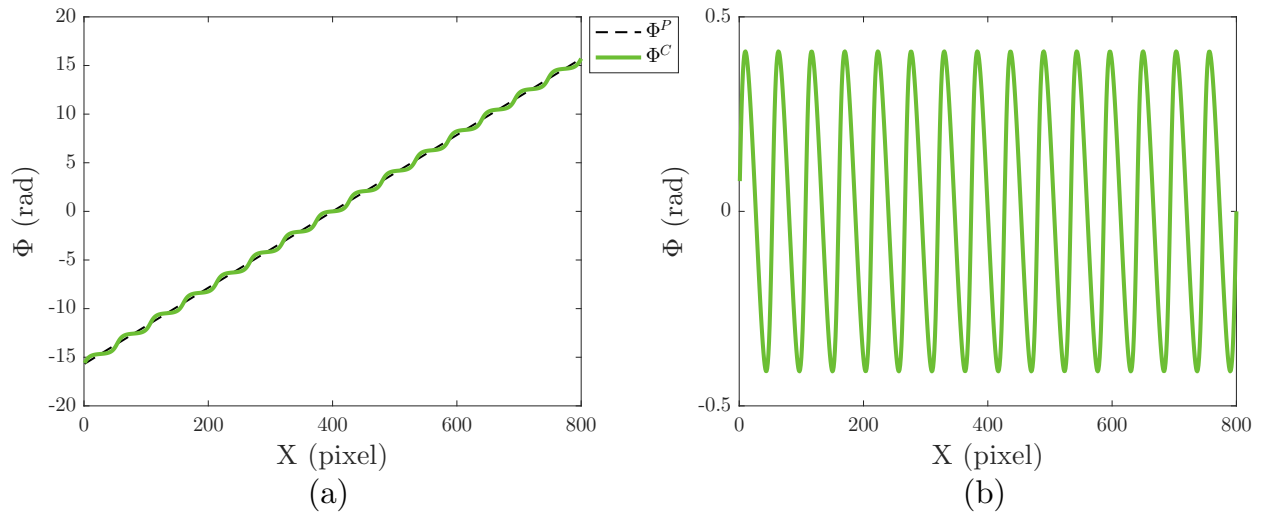


Figura 14. Superposición de la sección transversal de la fase ideal Φ^P , y la sección transversal de la fase Φ^C afectada por $\gamma = 3$ y la no linealidad de los dispositivos, obtenida con un algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$ a partir de un patrón de franjas simulado con $f = 5$ y $L = 800$, y (b) la sección trasversal del error $\Delta\Phi = \Phi^C - \Phi^P$.

Con la superposición de la sección transversal de una imagen de franjas I^C simulada con $f = 5$, y la sección transversal de su respectivo error $\Delta\Phi$ ejecutando un algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$, resulta más evidente el hecho de que el número de crestas de la onda de error $\Delta\Phi$ es 3 veces el del patrón de franjas, que a su vez está dado por el número de franjas f de la imagen, como se puede observar en la Figura 15.

La misma diferencia se encuentra en la distribución del espectro de Fourier, en donde se puede apreciar que la coordenada x de la posición de los armónicos de la onda de error $\Delta\Phi$ se incrementa 3 veces la coordenada de la posición de los armónicos de la imagen de franjas I^C , como se muestra en la Figura 16.

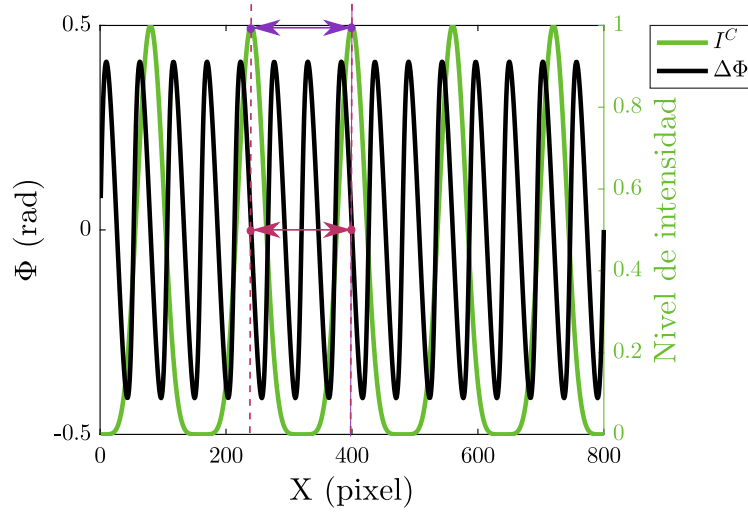


Figura 15. Superposición de la sección transversal de una imagen de franjas simulada I^C con $f = 5$, $L = 800$, y $\gamma = 3$, y la sección trasversal del error $\Delta\Phi$ que se obtiene con un algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$.

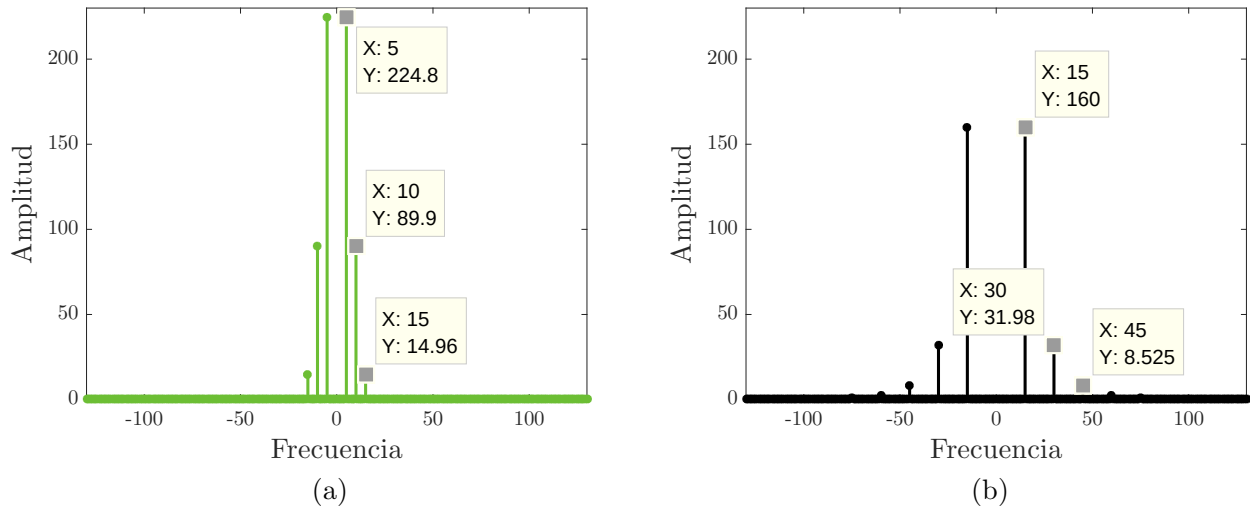


Figura 16. (a) Distribución del espectro de Fourier de la imagen de franjas simulada I^C con $f = 5$, afectada por $\gamma = 3$, y (b) distribución del espectro de Fourier de su respectivo error $\Delta\Phi$ para un algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$.

Como parte del análisis del efecto del factor γ y la no linealidad de los dispositivos, y su influencia en el error de fase $\Delta\Phi$ en la TPF, se repite el análisis que se ha descrito en esta sección pero modificando la cantidad de imágenes N en el algoritmo de corrimiento de fase. Los resultados

demuestran, de forma analítica y experimental (como se muestra en la siguiente subsección), que la frecuencia e intensidad de la onda de error están relacionadas con N , la cantidad de imágenes de franjas que se usan; y es precisamente la variación en la cantidad de imágenes N y el desfase δ_i que se introduce entre ellas, la principal diferencia entre los algoritmos de corrimiento de fase que se reportan en la literatura (Zuo et al., 2018).

No obstante, es importante tener presente que la ecuación para el cálculo de fase φ depende del número de imágenes N y el desfase δ_i entre ellas, por esta razón resulta muy útil la ecuación estándar de cálculo de fase para N -imágenes, propuesta por Bruning *et al* (Bruning et al., 1974), que se muestra en la ecuación 25 (en el apéndice 2 se incluyen más detalles de esta ecuación),

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^N I_i \sin(\delta_i)}{\sum_{i=1}^N I_i \cos(\delta_i)} \right). \quad (25)$$

La ecuación 24 y la Figura 15, evidencian que al usar un algoritmo de fase con $N = 3$ el número de crestas en la onda de error de fase $\Delta\Phi$ es 3 veces el número de franjas f del patrón de franjas. Sin embargo, al utilizar un algoritmo de corrimiento de fase con $N = 4$ las crestas en la onda de error $\Delta\Phi$ aumenta a 4 veces f del patrón de franjas, a la vez que su amplitud disminuye. El aumento de crestas en la onda de error y la disminución en su amplitud se incrementan con $N = 5$, y vuelve a ocurrir con $N = 6$ en la misma proporción Nf , como se ilustra en la Figura 17.

Las ondas de error en la fase $\Delta\Phi$ que se han simulado para este análisis teórico del efecto

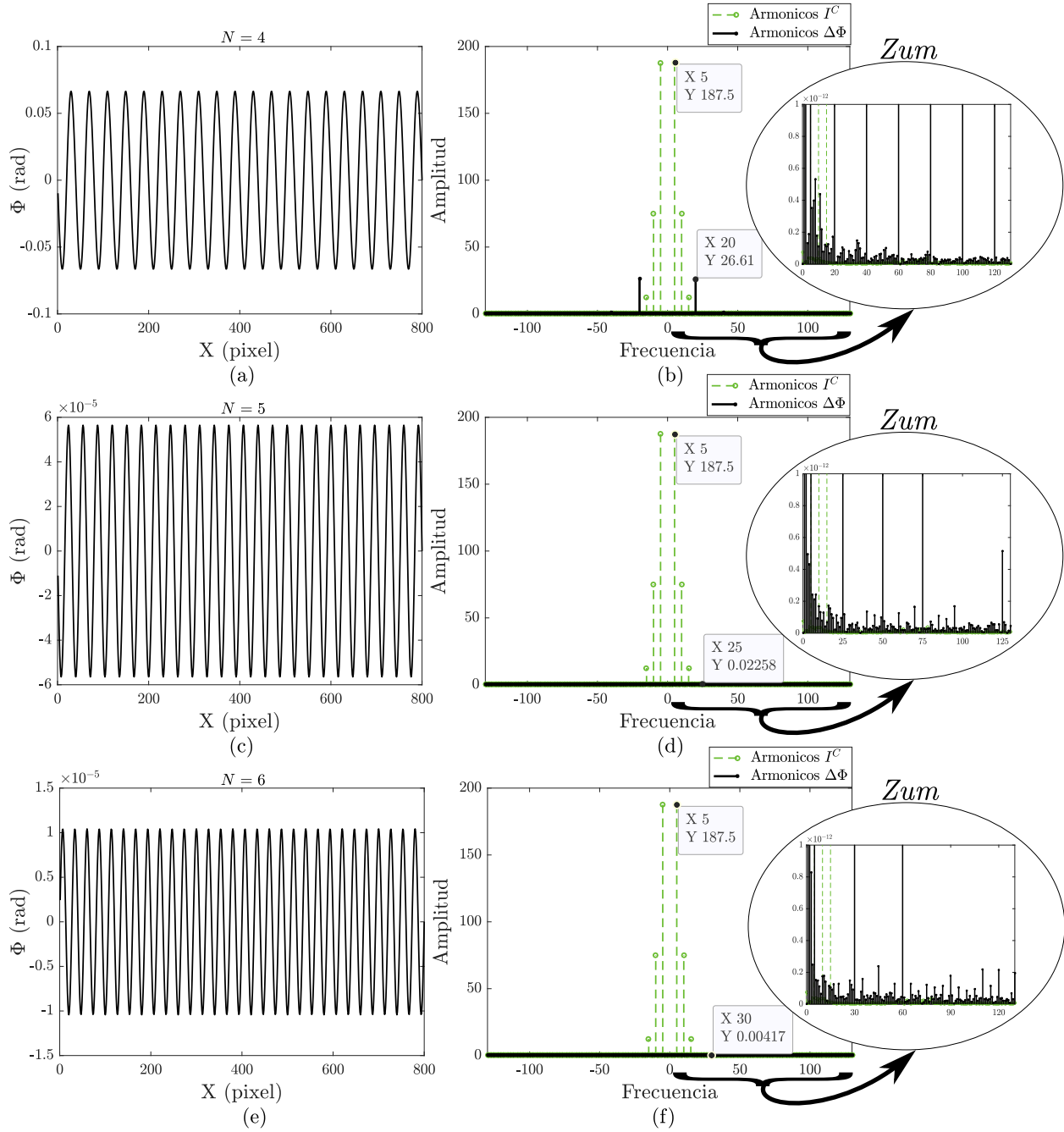


Figura 17. Sección transversal del error $\Delta\Phi$ y su respectivo espectro de Fourier para un algoritmo de corrimiento de fase con con imágenes de franjas simuladas con $f = 5$, $L = 800$, $\gamma = 3$, y (a-b) $N = 4$, (c-d) $N = 5$, y (e-f) $N = 6$.

gamma γ , parecen tener una forma perfectamente sinusoidal debida a su respectivo armónico más influyente ó fundamental, que se encuentra en su correspondiente espectro de Fourier en la coordenada Nf ; sin embargo, la imagen del zum en el espectro de Fourier de la onda de error $\Delta\Phi$ hace notar la presencia de más armónicos equidistantes en una proporción Nf .

La reducción en la amplitud de la onda de error $\Delta\Phi$ al aumentar el número de imágenes N en el algoritmo de corrimiento de fase resulta más evidente al superponer las secciones transversales de cada una de las ondas de error $\Delta\Phi$ simuladas, como se muestra en Figura 18.

A modo de resumen del análisis teórico sobre el efecto que tiene el factor γ y la no linealidad de los dispositivos en la fase Φ^C de un patrón de franjas I^C visto por la cámara, se registran en la Tabla 1 los principales valores de los errores $\Delta\Phi$ que se obtuvieron en la simulación.

Tabla 1

Valores de error $\Delta\Phi$ en la fase de un patrón de franjas simuladas con $f = 5$, $L = 800$, y $\gamma = 3$, usando algoritmos de corrimiento de fase con $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$.

N	Error $\Delta\Phi$ (rad.)			
	Val. Minimo	Val. Maximo	Val. Eficaz RMS	Desviación std.
3	-0,4113	0,4113	0,2888	0,2888
4	-0,0664	0,0664	0,0471	0,0471
5	-0.00005	0.00005	0,00003	0,00003
6	-0,00001	0,00001	0,000007	0,000007

2.3.2. Análisis experimental del efecto gamma y la no linealidad de los dispositivos. Utilizando un vídeo proyector DELL M210X de 2000 lumens ANSI y resolución VGA

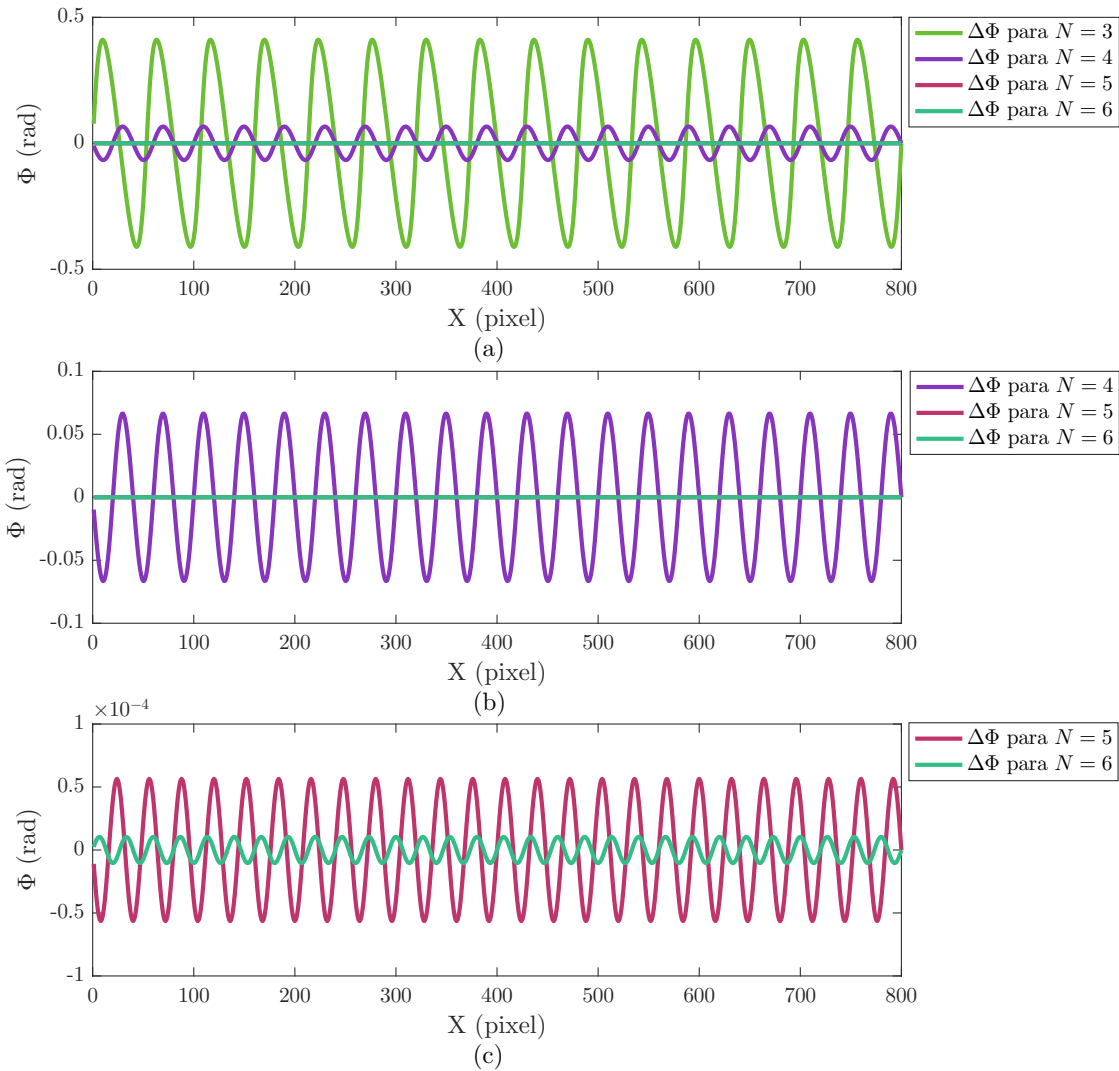


Figura 18. Superposición de las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$ simuladas con el algoritmo de corrimiento de fase con: (a) $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$, (b) $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$, y (c) $N = 5$, y $N = 6$.

de 1024x768 pixel, junto con una cámara CCD UEYE-UI2310M, USB 2.0 y resolución VGA de 800x600 pixel, con lente EDMUND OPTICS de 16mm/F1:1.4, se configuró un montaje experimental para evaluar la influencia del factor gamma y la respuesta no lineal de los dispositivos en la fase de un patrón de franjas proyectado sobre un objeto. Para este experimento se usó como objeto

un tablero de 30x30 cm construido en vidrio para garantizar su planitud, ya que de esta forma se puede calcular con precisión la fase teórica del objeto Φ^P para luego compararla con la fase experimental Φ^C , y de esta forma evaluar el error residual en la fase $\Delta\Phi$.

Inicialmente, usando la ecuación 7 se genera un patrón de franjas con 3 imágenes ($N = 3$) de 5 franjas ($f = 5$ con 160 pixeles de paso) en el campo de observación cada una; se proyectan sobre el plano y se capturan las imágenes que se observan en la Figura 19.

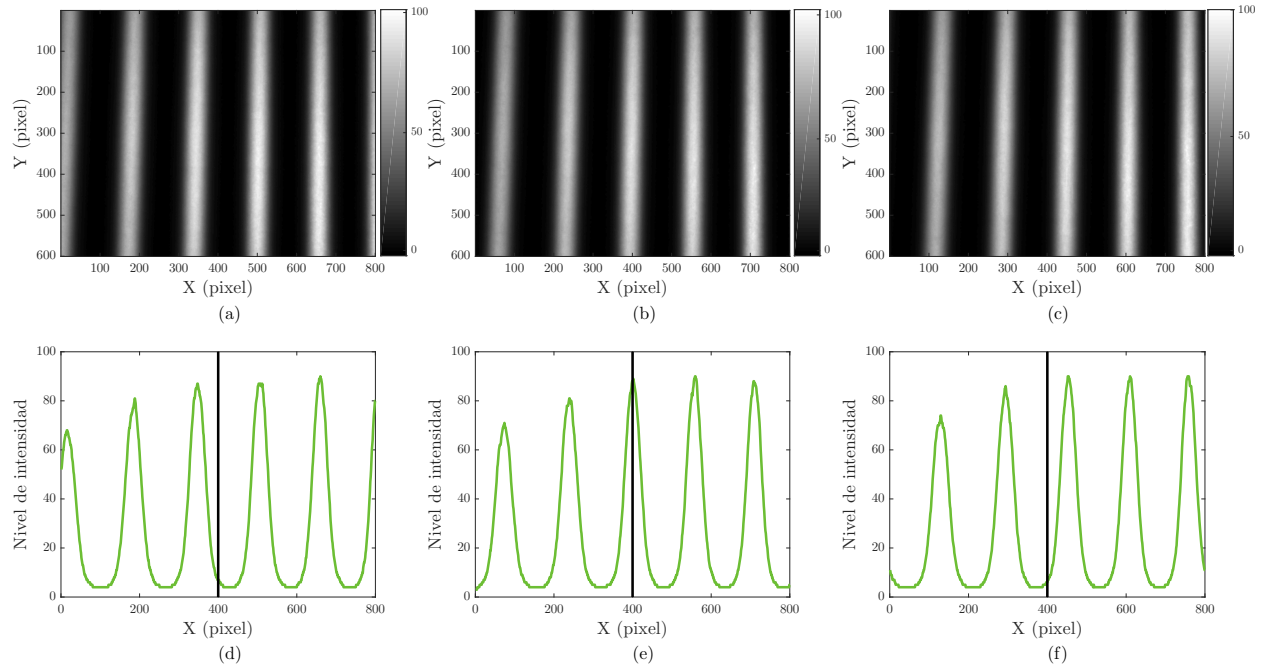


Figura 19. Imágenes de franjas experimentales capturadas con la CCD con $f = 5$ y (a) $\delta_1 = +2\pi/3 \text{ rad}$, (b) $\delta_2 = 0 \text{ rad}$, (c) $\delta_3 = -2\pi/3 \text{ rad}$, y (d-e) sus respectivas secciones transversales.

En la sección transversal de las imágenes de franjas que se muestra en la Figura 19 (d-f), se percibe el efecto del factor gamma y de la no linealidad de los dispositivos, al apreciar como el

perfil de las franjas se aleja de la forma sinusoidal con la que se crearon las imágenes inicialmente.

Usando la ecuación 11 se puede calcular la fase discontinua φ^C del patrón de franjas, que se muestra en Figura 19, y usando un algoritmo de desenvolvimiento de fase espacial (Meneses et al., 2005) se recupera la fase continua Φ^C ; estas fases se muestran en la Figura 20.

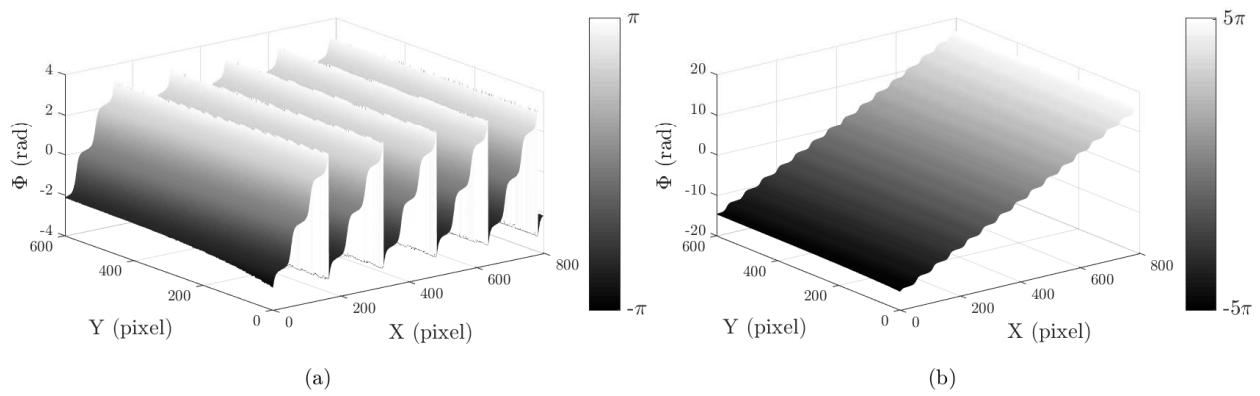


Figura 20. (a) Fase discontinua φ^C obtenida con las imágenes de franjas experimentales I^C de la Figura 19, (b) y su respectiva fase continua absoluta Φ^C .

En la fase discontinua φ^C ; y también en la fase continua absoluta Φ^C de la Figura 20, se pueden observar las ondulaciones de error $\Delta\Phi$ debido a los armónicos residuales generados por el efecto gamma γ y la no linealidad de los dispositivos. Usando la ecuación 11 y el mismo algoritmo de desenvolvimiento espacial (Meneses et al., 2005) se repite el procedimiento para calcular la fase teórica Φ^P del objeto. Al comparar la sección transversal de la fase teórica Φ^P y de la fase experimental Φ^C , Figura 21 (a), se puede apreciar la diferencia y cuantificar el error debido al factor gamma y la no linealidad de los dispositivos, como se muestra en la Figura 21 (b) y se registra en la Tabla 2.

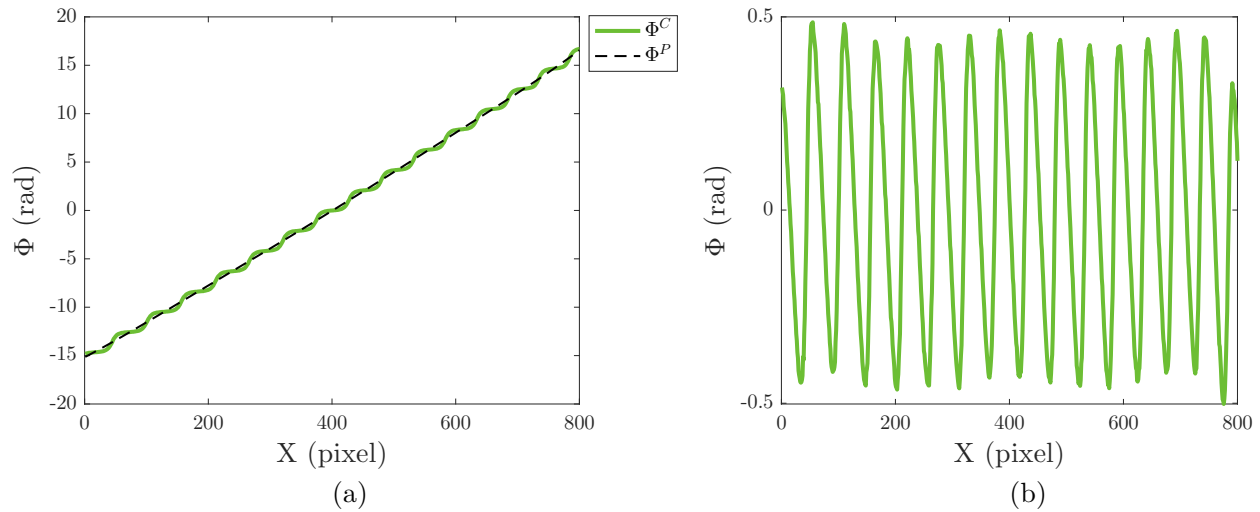


Figura 21. (a) Superposición de la sección transversal de la fase continua absoluta teórica Φ^P y la fase continua absoluta experimental Φ^C , y (b) sección transversal del error experimental $\Delta\Phi$ debido a el factor gamma y la no linealidad de los dispositivos.

Al superponer la sección transversal del error $\Delta\Phi$ con la de la imagen de franjas centrada I_2^C ($\delta_2 = 0 \text{ rad}$), se puede probar que efectivamente la frecuencia del error $\Delta\Phi$ es tres (3) veces la frecuencia f del patrón de franjas, para este caso en el que se implementó un algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$. En la Figura 22 se muestra la superposición de las sección transversal del error $\Delta\Phi$ y la sección transversal normalizada de la imagen de franjas I_2^C .

Tabla 2

Valores de error $\Delta\Phi$ en la fase de un patrón de franjas experimental con $N = 3$ y $f = 5$, proyectadas sobre un plano.

N	Error $\Delta\Phi$ (rad)			
	Va. Mínimo	Val. Máximo	Val. Eficaz RMS	Desviación std.
3	-0,5020	0,4860	0,3079	0,3081

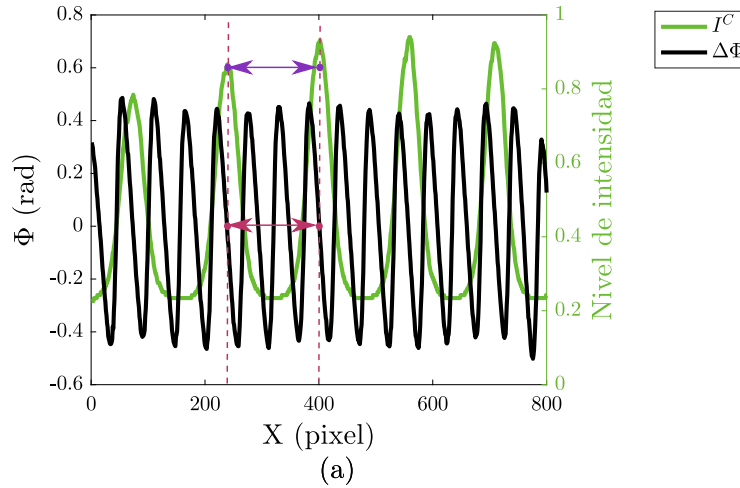


Figura 22. Superposición de la sección transversal del error $\Delta\Phi$ obtenido experimentalmente con un algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$, y la imagen de franjas experimental I_2^C con $f = 5$ normalizada.

El análisis del espectro de Fourier también es una evidencia clara de la variación y relación de frecuencia entre el patrón de franjas I^C y el error $\Delta\Phi$, como se muestra en la Figura 23. Al igual que en el análisis teórico, la frecuencia de los armónicos en la distribución del espectro de Fourier de la onda de error $\Delta\Phi$ es tres (3) veces la frecuencia f del patrón de franjas I^C , cuando se usa el algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$.

Repitiendo el procedimiento experimental pero adquiriendo más imágenes para evaluar el algoritmo de corrimiento de fase con $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$, se obtienen los mismos resultados del análisis teórico, lo que permite comprobar que la frecuencia del error es N veces la frecuencia f del patrón de franjas, teniendo en cuenta que N corresponde al número de imágenes que se utilizan

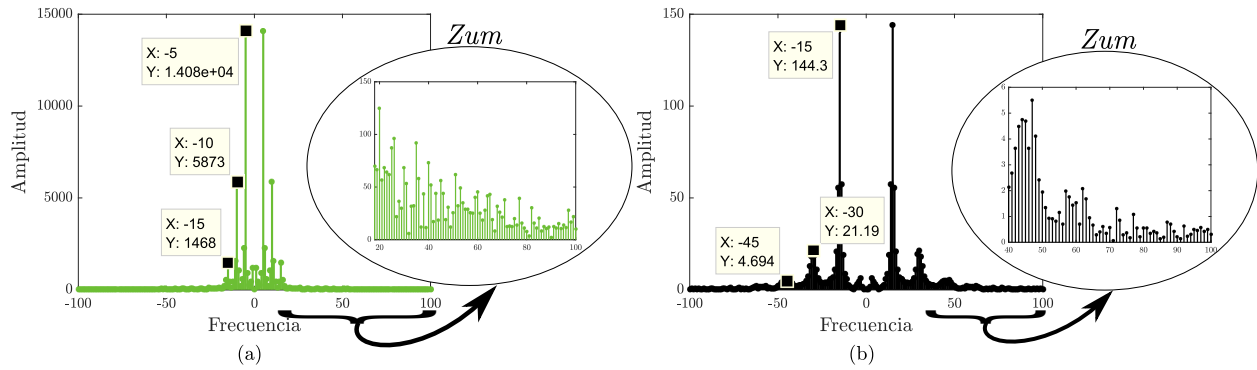


Figura 23. (a) Espectro de Fourier de la imagen de franjas experimental I_2^C con $f = 5$, y (b) espectro de Fourier de la onda de error experimental $\Delta\Phi$ para un algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$.

en el algoritmo de corrimiento de fase, esto se puede observar claramente en la Figura 24.

La variación en amplitud de los errores $\Delta\Phi$, ó su reducción en intensidad conforme se agregan más imágenes al algoritmo de corrimiento de fase, se hace más evidente al superponer sus respectivas secciones transversales como se muestra en la Figura 25.

Del mismo modo, la superposición de la distribución del espectro de Fourier de las diferentes ondas de error $\Delta\Phi$ obtenidas con los diferentes algoritmos de corrimiento de fase, a partir de imágenes de franjas experimentales I^C con $f = 5$, evidencia la reducción progresiva en la amplitud de los armónicos y el aumento en la frecuencia de los mismos a medida que se van agregando imágenes para el calculo de la fase Φ^C . Esto ultimo se ilustra en la Figura 26.

En la Tabla 3 se resumen los principales valores de los errores $\Delta\Phi$ que se obtuvieron en el análisis experimental de los algoritmos de corrimiento de fase modificando la cantidad de imágenes

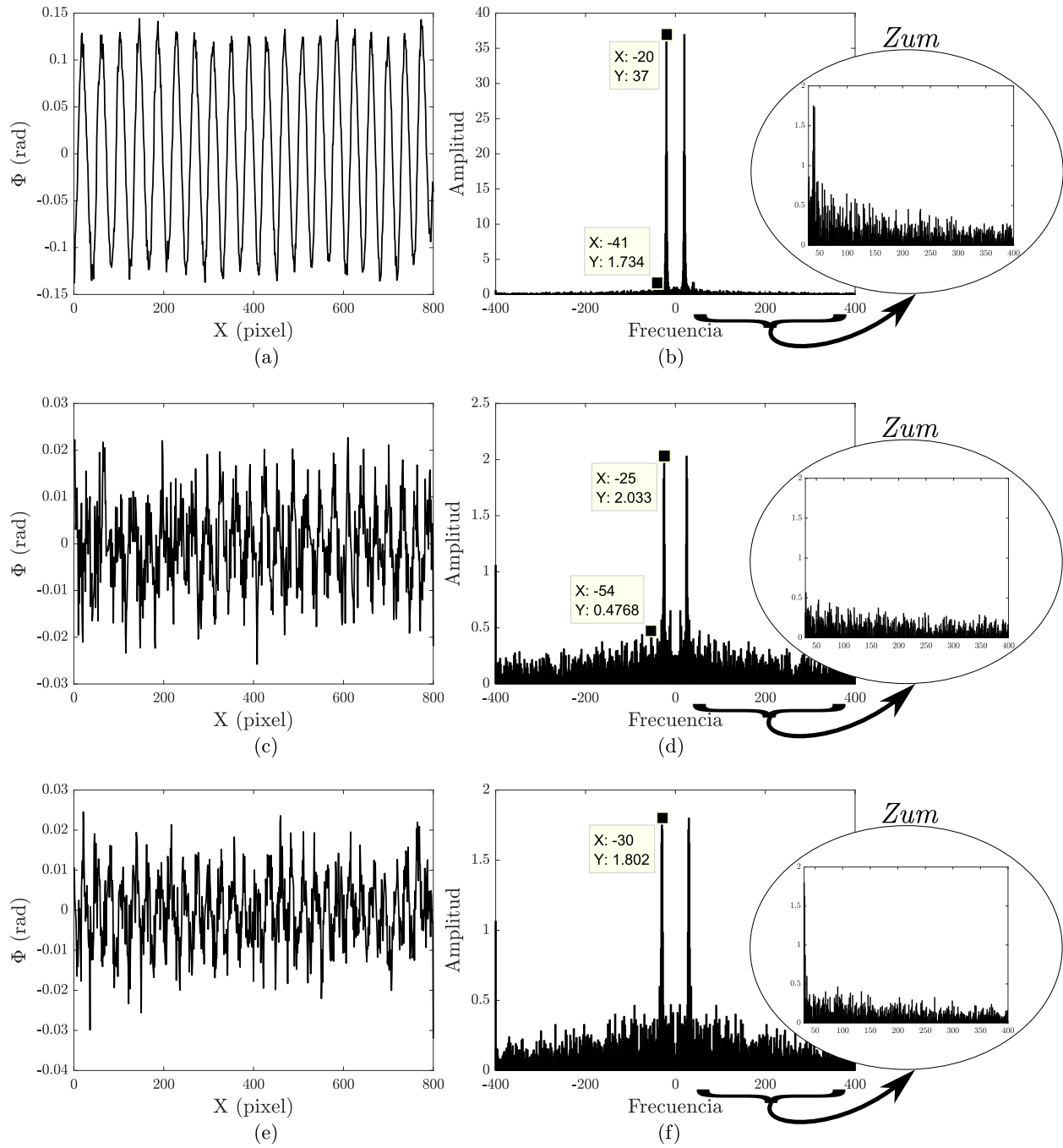


Figura 24. Sección transversal del error experimental $\Delta\Phi$ y su espectro de Fourier con: (a-b) $N = 4$, (c-d) $N = 5$, (e-f) $N = 6$.

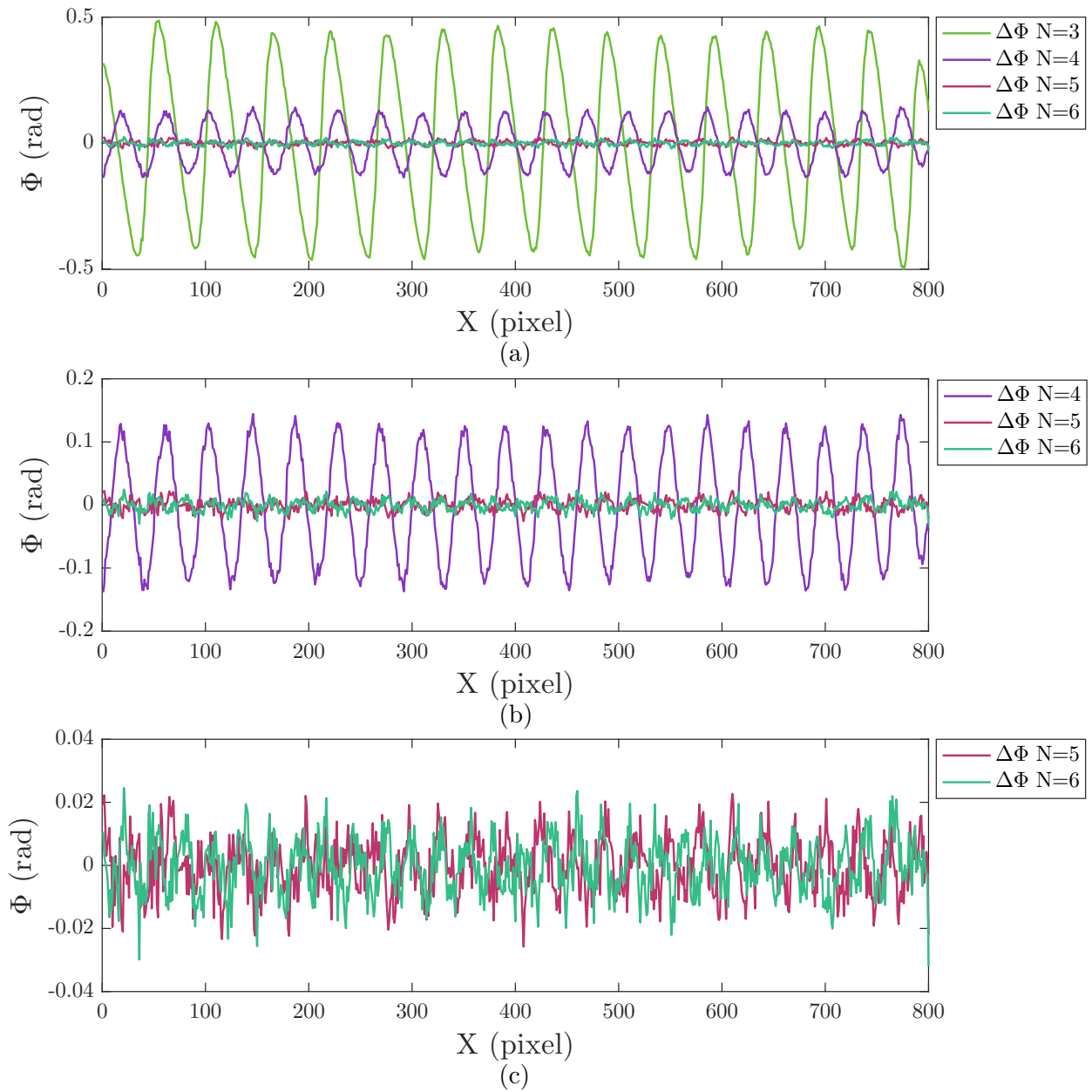


Figura 25. Superposición de las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$, correspondientes a la fase Φ^C de un patrón de franjas experimental con $f = 5$, obtenidas con el algoritmo de corrimiento de fase: (a) $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$, (b) $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$, y (c) $N = 5$, y $N = 6$.

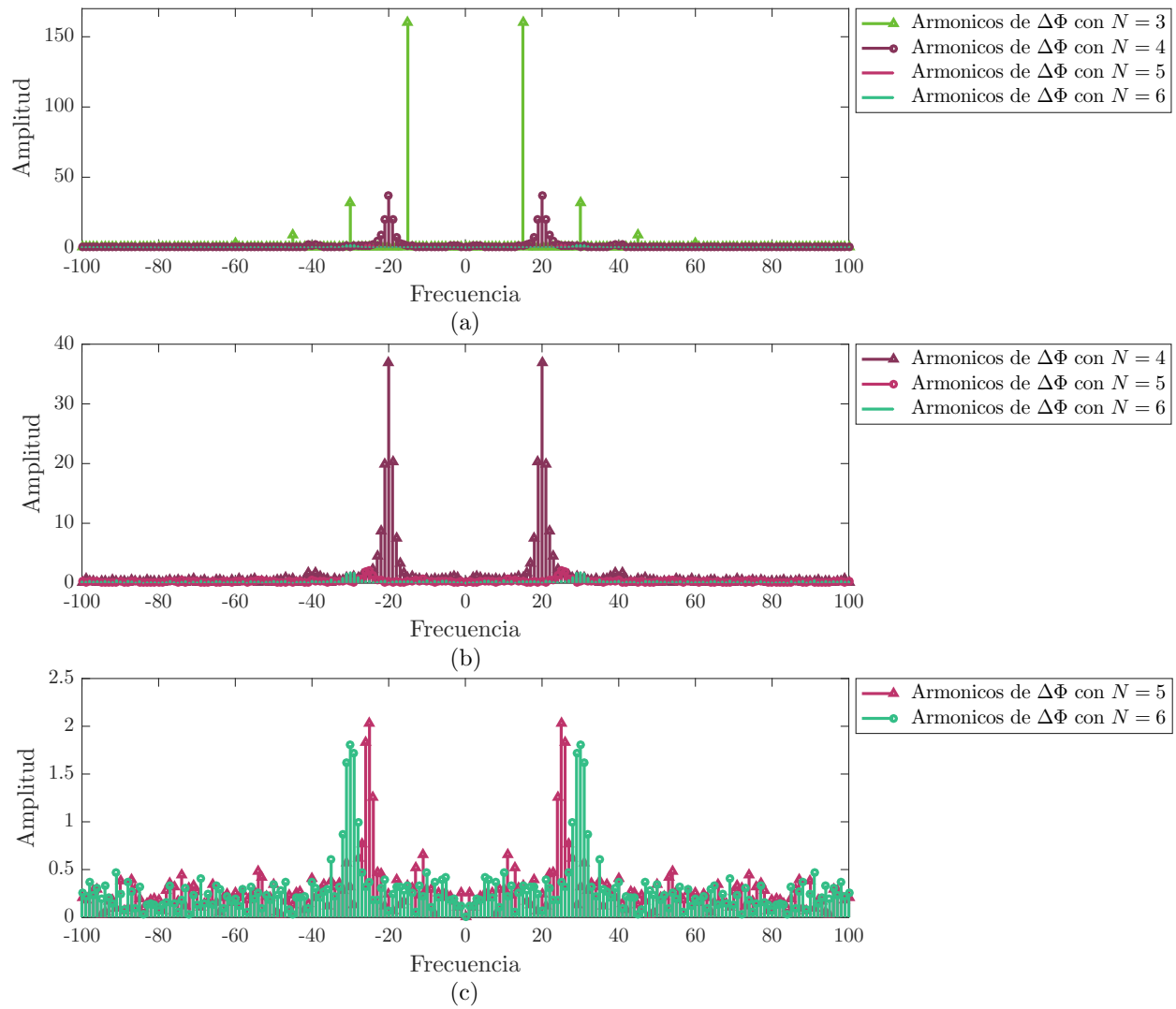


Figura 26. Superposición del espectro de Fourier de las diferentes ondas de error $\Delta\Phi$ obtenidas experimentalmente usando algoritmos de corrimiento de fase con: (a) $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$, (b) $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$, y (c) $N = 5$, y $N = 6$.

N .

2.4. Análisis del espectro de Fourier en los algoritmos de corrimiento de fase

Del analisis de la sección anterior se concluye que usando diferentes algoritmos de corrimiento de fase, variando el número de imagenes N , se afecta el contenido frecuencial de la onda

Tabla 3

Valores de Error $\Delta\Phi$ en la fase de un sistema de franjas con $f = 5$ proyectadas sobre un plano, usando algoritmos de corrimiento de fase con $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$.

N	Error $\Delta\Phi$ (rad)			
	Va. Mínimo	Val. Máximo	Val. Eficaz RMS	Desviación std.
3	-0,5020	0,4860	0,3079	0,3081
4	-0,1384	0,1442	0,0866	0,0866
5	-0,0320	0,0245	0,0089	0,0089
6	-0,0258	0,0227	0,0087	0,0087

de error $\Delta\Phi$. En esta sección se estudia la propuesta de Freischlad y Koliopoulos (Freischlad and Koliopoulos, 1990) mejorada posteriormente por Servin *et al* Servin et al. (2009), de “entender” el algoritmo de corrimiento de fase como un filtro en cuadratura compleja.

El análisis espectral de los algoritmos de corrimiento de fase tiene su primer registro hacia el año de 1990 con el trabajo de Freischlad y Koliopoulos, quienes con mucha precisión interpretaron los algoritmos de corrimiento de fase como filtros de cuadratura complejos en el dominio temporal, y usan la transformada de Fourier para encontrar el espectro de estos filtros (Freischlad and Koliopoulos, 1990). Más adelante, en el año 2009, Servin *et al* proponen una nueva forma de analizar el espectro de los algoritmos de corrimiento de fase basada en la función de transferencia de los filtros complejos asociados a los algoritmos (Servin et al., 2009).

Para iniciar este análisis, en la literatura se suele reportar la ecuación 4 reescrita como se

muestra en la ecuación 26,

$$I_{(x,y)} = A_{(x,y)} + \frac{1}{2}B_{(x,y)}e^{(i\varphi_{(x,y)})} + \frac{1}{2}B_{(x,y)}e^{(-i\varphi_{(x,y)})}. \quad (26)$$

De acuerdo con Servin *et al* el propósito de los algoritmos de corrimiento de fase, vistos como un filtro en cuadratura de fase, es filtrar el fondo continuo $A_{(x,y)}$, y una de las dos exponenciales complejas Servin et al. (2009); de este modo, la señal de salida $I_{out(x,y,t)}$ esta dada por la ecuación 27,

$$I_{out(x,y,t)} = \frac{1}{2}B_{(x,y)}e^{(i\varphi_{(x,y)})} = \frac{1}{2}B_{(x,y)}(\cos(\varphi_{(x,y)}) + i\sin(\varphi_{(x,y)})) = h(t) * I_{(x,y,t)}, \quad (27)$$

en donde el símbolo $*$ denota una convolución, y $h(t)$ es la respuesta al impulso del filtro complejo, que se presenta en la ecuación 28,

$$h(t) = hr(t) + ihi(t). \quad (28)$$

La propuesta de Servin *et al* consiste en analizar los espectros de la suma compleja de la ecuación 28, calculando la función de transferencia $H(w)$ o transformada de Fourier de $h(t)$, la cual se denota con la ecuación 29,

$$H(\omega) = F[h(t)], \quad (29)$$

con $\omega = 2\pi\nu$. De manera concreta, el modelo matemático del filtrado en cuadratura de fase permite filtrar en el dominio temporal t en donde el termino δ_i de la ecuación 7 corresponde a valores muestreados a intervalos conocidos de la frecuencia continua en t en el rango de $\omega = 2\pi$. La propuesta es filtrar en ω usando t . El espectro $H(\omega)$, es la relación del espectro de la señal de salida $I_{out}(x,y,t)$ con el espectro de la señal de entrada $I_{(x,y,t)}$, ecuación 30,

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{i\Delta\omega x} = \frac{I_{out}(\omega)}{I(\omega)}, \quad (30)$$

en donde la función $|H(\omega)|$ es la magnitud de $H(\omega)$, y $\Delta\omega$ corresponde a la variación de fase δ_i introducida por el filtro lineal. Teniendo en cuenta que los algoritmos de corrimiento de fase tienen una variación constante de fase $\Delta\omega = \delta_i$, la gráfica de $|H(\omega)|$ que corresponde a la magnitud de la función de transferencia, se puede usar para analizar el filtrado sobre el contenido frecuencial $I(\omega)$, la cual esta dada por la ecuación 31,

$$|H(\omega)| = |F[h(t)]| = \sqrt{Re(\omega)^2 + Im(\omega)^2}, \quad (31)$$

en donde $H(\omega) = Re(\omega) + iIm(\omega)$, siendo $Re(\omega)$ e $Im(\omega)$ funciones reales de ω ; y este es un importante aporte del trabajo de Servin *et al*, puesto que esta forma de graficar el espectro de un algoritmo de corrimiento de fase facilita la visualización de sus principales propiedades (Servin *et al.*, 2009). Por ejemplo, para el algoritmo básico de corrimiento de fase con $N = 3$ como ya se ha mostrado en las ecuaciones de la 8 a la 10, la variación de fase entre las tres imágenes es de $\delta_i = 2\pi/3 \text{ rad}$, entonces el desfase correspondiente a cada imagen es de: $\delta_1 = -2\pi/3$, $\delta_2 = 0$, y

$\delta_3 = 2\pi/3 \text{ rad}$. Según la ecuación 27, la componente imaginaria de $h(t)$ depende de $\sin(\varphi_{(x,y)})$ y la componente real de $\cos(\varphi_{(x,y)})$, de este modo la expresión para el cálculo de fase φ esta da por la ecuación 32,

$$\varphi_{(x,y)} = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Imag}(I_{out})}{\text{Real}(I_{out})} \right) = \tan^{-1} \left(\sqrt{3} \frac{I_3 - I_1}{2I_2 - I_1 - I_3} \right), \quad (32)$$

expresión equivalente a la ecuación 11, como se indica. De acuerdo con lo anterior, y teniendo en cuenta que los desfases que se introducen en la ecuación 7 para generar las imágenes son: $-2\pi/3, 0$ y $2\pi/3$, la respuesta al impulso $h(t)$ para el algoritmo con $N = 3$ esta dada por la ecuación 33,

$$h(t) = -1\delta(t + 2\pi/3) + 2\delta(t) - 1\delta(t - 2\pi/3) + i \left[-\sqrt{3}\delta(t + 2\pi/3) + \sqrt{3}\delta(t - 2\pi/3) \right], \quad (33)$$

donde δ es la función delta de Dirac: $\delta(t - 2\pi/3)$ es igual a cero para $t \neq 2\pi/3$ y es igual a 1 para $t = 2\pi/3$. De acuerdo con la ecuación 33, el espectro que corresponde al algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$ esta dado por la ecuación 34,

$$|H(\omega)| = \left| -\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}\omega} + 1 - \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}\omega} + i \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}\omega} + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}\omega} \right] \right|, \quad (34)$$

y su gráfica se muestra en la Figura 27.

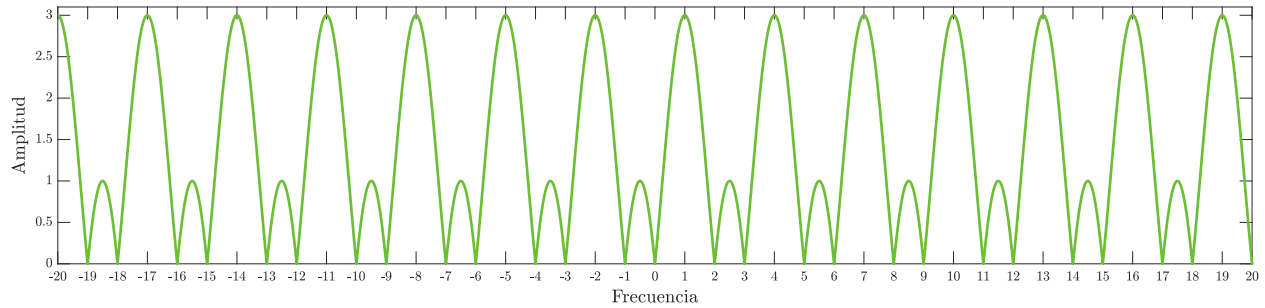


Figura 27. Magnitud espectral de la función de transferencia del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$.

Entendiendo que los algoritmos de corrimiento de fase se comportan como filtros, tal y como los interpretaron Freischlad y Koliopoulos (Freischlad and Koliopoulos, 1990), y que el comportamiento de ese filtro lo describe la magnitud de la función de transferencia $|H(\phi)|$ propia del algoritmo, como lo planteó Servin *et al* (Servin et al., 2009), se realizó para este trabajo un análisis teórico-experimental de los algoritmos de corrimiento de fase que hasta esta sección se han estudiado. Para ilustrar el comportamiento del filtro se simuló un sistema de franjas en intensidad con una secuencia de 20 armónicos de igual amplitud y distribución en su espectro de Fourier equidistante, buscando estudiar la influencia de los armónicos propios de una imagen de franjas I^C con 5 franjas ($f = 5$).

En la Figura 28 (a) se muestra la superposición de la función de transferencia $|H(\omega)|$ (normalizada) correspondiente al algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$, y el contenido frecuencial de las franjas simuladas con $f = 5$. En la Figura 28 (b) se muestran los armónicos que no son filtrados por la función de transferencia $|H(\omega)|$ del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$.

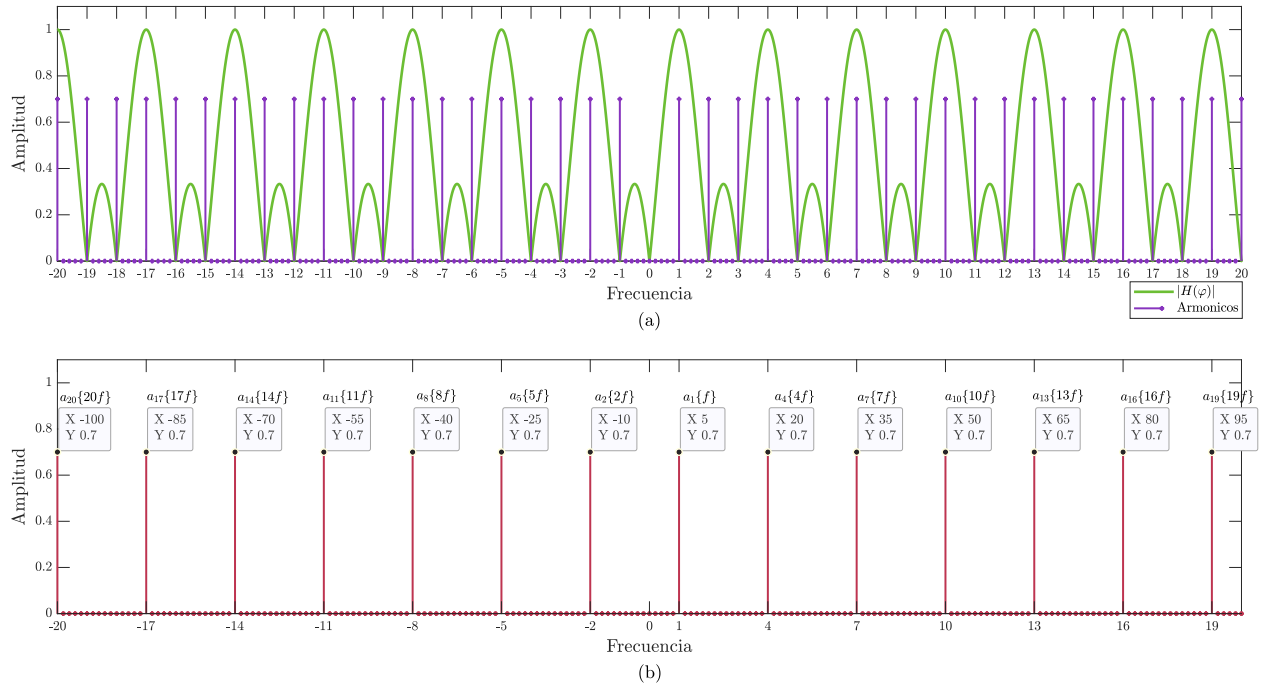


Figura 28. (a) Superposición de la función de transferencia $|H(\omega)|$ (normalizada) del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$, y una serie de armónicos simulados de igual amplitud y $f = 5$, y (b) armónicos que pasan el filtro del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$.

De acuerdo con la Figura 28 (a), la función de transferencia logra filtrar los armónicos: $-1, 2, \pm 3, -4, 5, \pm 6, -7, 8, \pm 9, -10, 11, \pm 12, -13, 14, \pm 15, -16, 17, \pm 18, -19, 20 \dots etc.$ Los armónicos que logran pasar, aparte del 1 (fundamental) que posee la información de fase requerida, son: $-2, 4, -5, 7, -8, 10, -11, 13, -14, 16, -17, 19, -20 \dots etc.$ y se encuentran distribuidos de forma equidistante a una distancia entre ellos equivalente a $3f$, generando una onda de error residual que corresponde a la ya mencionada onda de error en la fase $\Delta\Phi$, que presenta en su espectro de Fourier armónicos con una distribución en la posición de frecuencia equivalente a 3 veces la distribución predominante del espectro de Fourier del patrón de franjas; como se muestra en la Figura 28 (b). Esta descripción corresponde a la explicación de lo encontrado en el análisis teórico y expe-

rimental de las sub-secciones 2.3.1 y 2.3.2, que se puede observar en la Figura 16 y en la Figura 23.

En la Figura 29 (a) se muestra la superposición de la función de transferencia $|H(\omega)|$ (normalizada) correspondiente al algoritmo de corrimiento de fase con $N = 4$, y la secuencia de armónicos simulados con $f = 5$, y en la Figura 29 (b) se muestran los armónicos que no son filtrados por la función de transferencia $|H(\omega)|$ del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 4$.

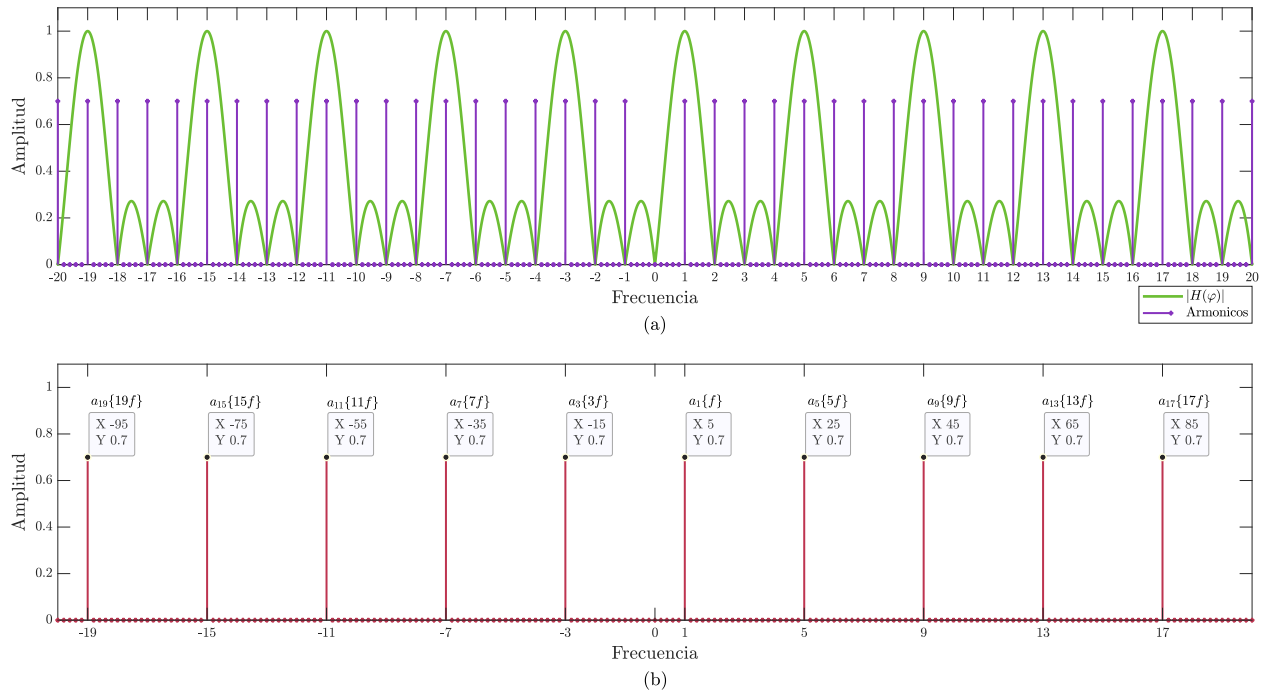


Figura 29. (a) Superposición de la función de transferencia $|H(\omega)|$ (normalizada) del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 4$, y una serie de armónicos simulados de igual amplitud y $f = 5$, y (b) armónicos que pasan el filtro del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 4$.

Para el caso del filtro del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 4$, descrito por su respectiva función de transferencia $|H(\omega)|$ como se muestra en la Figura 29 (a), logra filtrar los

armónicos: $-1, \pm 2, 3, \pm 4, -5, \pm 6, 7, \pm 8, -9, \pm 10, 11, \pm 12, -13, \pm 14, 15, \pm 16, -17, \pm 18, 19, \pm 20 \dots etc$. Los armónicos que logran pasar: $1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, -15, 17, -19 \dots etc$, se encuentran distribuidos de forma equidistante a una distancia entre ellos equivalente a $4f$, y generan una onda de error que presenta en su espectro de Fourier armónicos con una distribución en la posición de frecuencia equivalente a 4 veces la distribución predominante del espectro de Fourier del patrón de franjas, como se muestra en la Figura 29 (b).

Por su parte la función de transferencia del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 5$, que se muestra en la Figura 30 (a), filtra los armónicos: $-1, \pm 2, \pm 3, 4, \pm 5, -6, \pm 7, \pm 8, 9, \pm 10, -11, \pm 12, \pm 13, 14, \pm 15, -16, \pm 17, \pm 18, 19, \pm 20 \dots etc$; y los armónicos que logran pasar: $1, -4, 6, -9, 11, -14, 16, -19 \dots etc$, se encuentran distribuidos de forma equidistante a una distancia entre ellos equivalente a $5f$ en su espectro de Fourier, de acuerdo con la Figura 30 (b).

Cuando se trata del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 6$, su función de transferencia $|H(\omega)|$, que se puede observar en la Figura 31 (a), filtra los armónicos: $-1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, -7, \pm 8, \pm 9, \pm 10, 11, \pm 12, -13, \pm 14, \pm 15, \pm 16, 17, \pm 18, -19, \pm 20 \dots etc$; y los armónicos que logran pasar: $1, -5, 7, -11, 13, -17, 19 \dots etc$, se encuentran distribuidos de forma equidistante a una distancia entre ellos equivalente a $6f$ en su espectro de Fourier, como se puede observar en la Figura 31 (b).

Con los resultados obtenidos se puede concluir que los algoritmos de corrimiento de fase

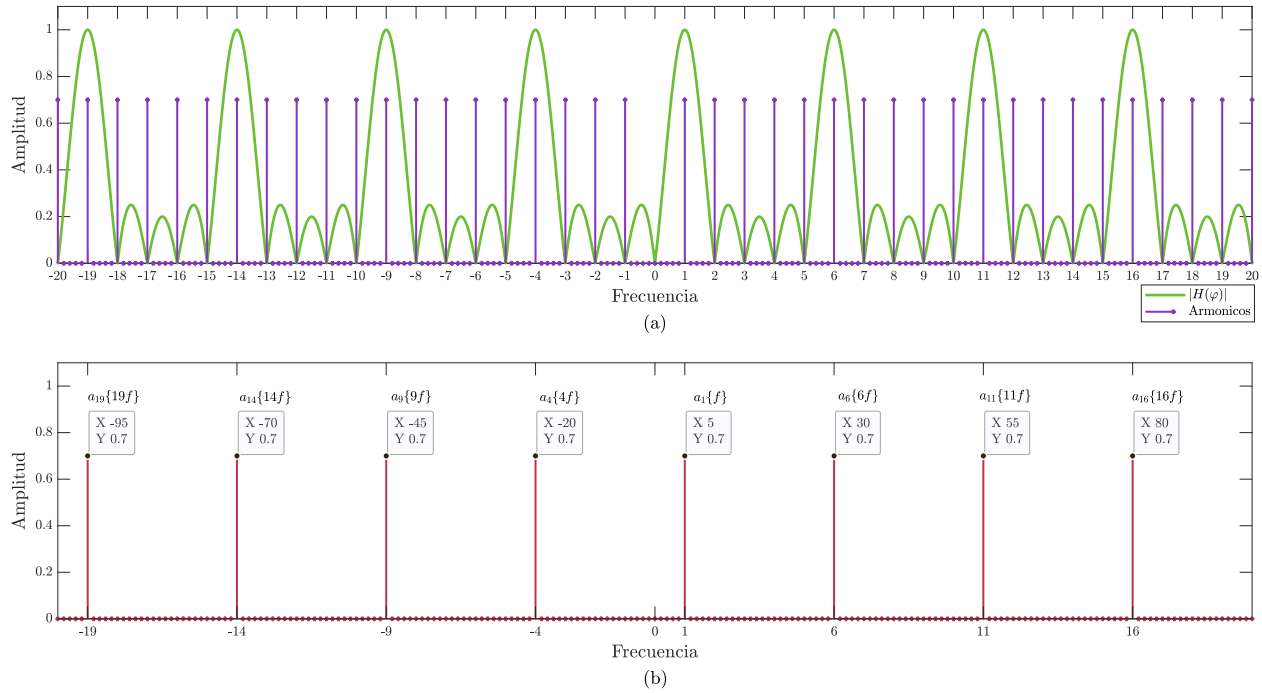


Figura 30. (a) Superposición de la función de transferencia $|H(\varphi)|$ (normalizada) del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 5$, y una serie de armónicos simulados de igual amplitud y $f = 5$, y (b) armónicos que pasan el filtro del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 5$.

generan una función de transferencia $|H(\omega)|$ que:

- Permite el paso del orden $+1$ y filtra el orden -1 , de esta forma se genera la cuadratura en fase.
- Filtra y elimina el orden 0 o fondo continuo ($f = 0$).
- Filtra y permite pasar ciertos armónicos en función del numero de imágenes del algoritmo de fase empleado. El contenido frecuencial de la onda de error depende de los armónicos que no se filtran y logran pasar.
- La amplitud de la onda de error depende de la amplitud de los armónicos que logran pasar

el filtro.

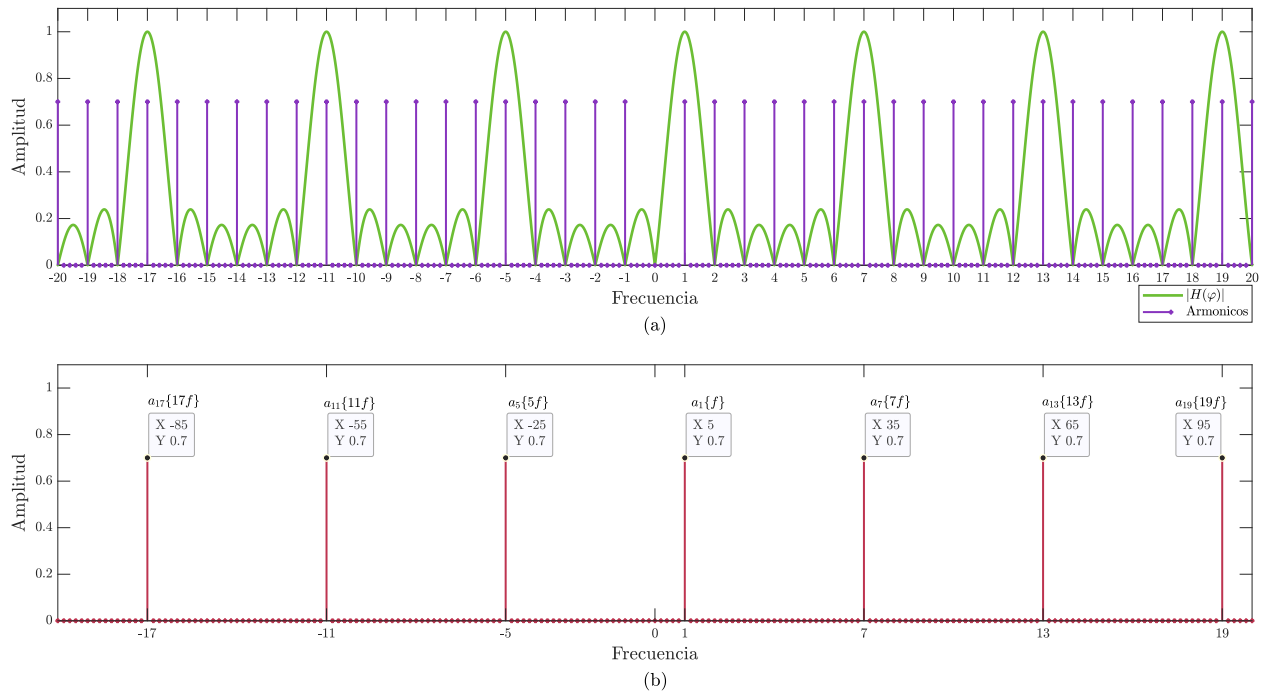


Figura 31. (a) Superposición de la función de transferencia $|H(\omega)|$ (normalizada) del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 6$, y una serie de armónicos simulados de igual amplitud y $f = 5$, y (b) armónicos que pasan el filtro del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 6$.

Por otro lado, los armónicos en el espectro de Fourier de la onda de error $\Delta\Phi$ que se obtiene al usar el algoritmo de corrimiento de fase con $N = 6$, prácticamente resultan despreciables al compararlos con los armónicos de la onda de error $\Delta\Phi$ que se obtiene al usar el algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$, este análisis se muestra en la Figura 32. Esto se debe a que, de los armónicos generados en las imágenes del patrón de franjas por el efecto gamma γ y la no linealidad, el armónico de mayor amplitud que logra pasar el filtro del algoritmo con $N = 6$ es el -5, el cual posee una amplitud 98,52 % menor que el armónico -2, que es el de mayor amplitud que pasa el filtro del algoritmo con $N = 3$.

Para tener presente esta comparación, en la Figura 33 (a) se muestra la distribución de armónicos en el espectro de Fourier de la imagen experimental I^C (mostrada en la Figura 20 (b)), y en la Figura 33 (b) se muestra la superposición del zoom de los armónicos de interés y las funciones de transferencia de los algoritmos con $N = 3$ y $N = 6$.

Del análisis en esta sección se concluye que la amplitud de los armónicos que logran pasar el filtro caracterizado por la función de transferencia $H(\omega)$, propia de cada algoritmo de corrimiento de fase a N imágenes, influye directamente en la amplitud del error residual en fase $\Delta\Phi$. Por lo tanto se busca en este trabajo de investigación, de forma teórico-experimental, un algoritmo de corrimiento de fase que filtre la mayor cantidad de armónicos, especialmente aquellos armónicos de amplitud considerable, de acuerdo a las amplitudes de los armónicos presentes en las franjas.

2.5. Reducción del error en la fase debido al efecto gamma y la no linealidad de los dispositivos

El error debido al efecto gamma y la no linealidad de los dispositivos, se reporta en la literatura especializada como el principal error en el cálculo de la fase usando la TPF (Lei et al., 2015). Este error se conoce como el efecto gamma γ , y en los últimos años se han propuesto diferentes métodos para reducirlo (Cai et al., 2017); en la actualidad estos métodos se clasifican principalmente en dos categorías: los métodos pasivos y los métodos activos (Cai et al., 2017; Zhang, 2015; Cai et al., 2016). Los métodos pasivos compensan el error en la fase cuando esta se ha calculado

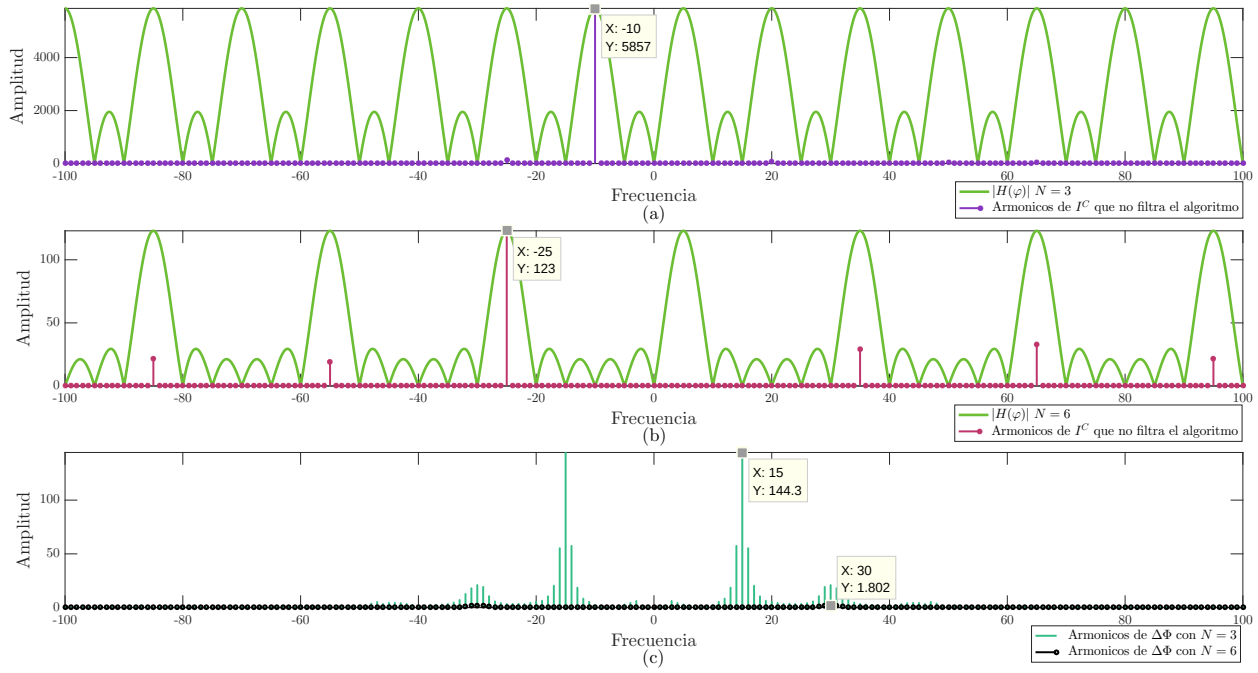


Figura 32. (a) Superposición de la función de transferencia $|H(\omega)|$ del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$, y armónicos de I^C que pasan el filtro, (b) superposición de la función de transferencia $|H(\omega)|$ del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 6$, y armónicos de I^C que pasan el filtro, y (c) superposición de la distribución del espectro de Fourier de $\Delta\Phi$ correspondiente a cada uno de los algoritmos.

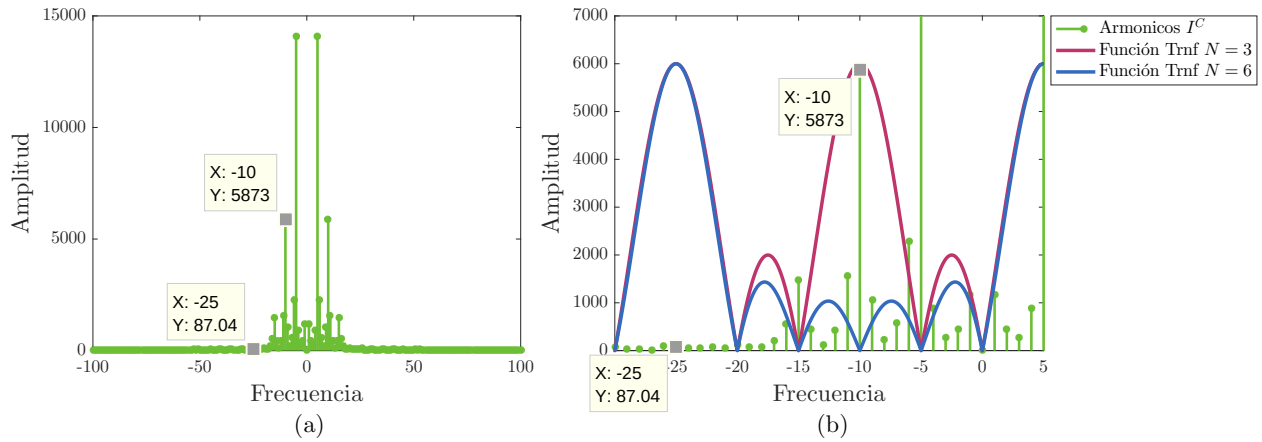


Figura 33. (a) Espectro de Fourier de la imagen de franjas experimental I_2^C con $f = 5$, y (b) superposición de su respectivo zoom en los armónicos de interés y las funciones de transferencia de los algoritmos con $N = 3$ y $N = 6$.

a partir de imágenes de franjas I^C afectadas por el efecto gamma γ (Lei et al., 2015; Pan et al., 2009b; Guo et al., 2004; Zhang and Yau, 2007), mientras que los métodos activos intervienen la proyección del patrón de franjas con la intención de obtener imágenes de franjas I^C con un perfil de intensidad que se aproxime mejor a la forma sinusoidal (Liu et al., 2010b; Hoang et al., 2010; Li and Li, 2011; Zhang et al., 2012; Cui et al., 2014; Ma et al., 2012).

2.5.1. Método pasivo. Dentro de los métodos pasivos, para reducir el error, se utilizan estrategias como incrementar el número de imágenes para el algoritmo de corrimiento de fase, y variar el desfase entre ellas para generar secuencias distintas; es decir, como la amplitud de los armónicos de las franjas se ve afectada por la función de transferencia óptica de la lente de la cámara, se pretende buscar un algoritmo de corrimiento de fase tal que su función de transferencia logre eliminar los armónicos más influyentes de acuerdo al error residual tolerado por el dispositivo de medida 3D. El principal referente de estos métodos es el algoritmo de doble corrimiento de fase a 3 imágenes ($N = 3$) propuesto por Huang *et al* Huang et al. (2002). Sin embargo, en un trabajo del 2011 publicado por Buytaert y Dirckx se presenta un estudio del rendimiento de 84 algoritmos de corrimiento de fase para interferometría, en el que los autores concluyen que los algoritmos de Bruning *et al* Bruning et al. (1974), y P. de Groot De Groot (1995), son los más robustos a los errores en la fase causados por la no linealidad Buytaert and Dirckx (2011b).

El algoritmo de Bruning *et al* consiste en generar 6 imágenes ($N = 6$) con un desfase $\delta_i = (i - 1)2\pi/6$, y usar la ecuación 35 para obtener la fase φ (Bruning et al., 1974); la deducción

de esta ecuación propuesta por Bruning *et al*, la cual parte del uso de la ecuación 25, se encuentra en el apéndice 5,

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}(I_2 + I_3 - I_5 - I_6)}{2I_1 + I_2 - I_3 - 2I_4 - I_5 + I_6} \right). \quad (35)$$

Por otro lado, Peter de Groot propone un algoritmo de corrimiento de fase generando 9 imágenes de franjas ($N = 9$) con un desfase de $\delta_i = ((i - 1)2\pi)/(N - 1)$, y calcular la fase φ usando la ecuación 36 (De Groot, 1995), más detalles de esta ecuación se pueden consultar en el apéndice 6,

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}(I_2 + I_4 - I_6 - I_8) + 2(I_3 - I_7)}{\sqrt{2}(I_2 - I_4 - I_6 + I_8) + I_1 + I_9 - 2I_5} \right). \quad (36)$$

Siguiendo la misma estrategia del análisis teórico que se propone en la subsección 2.3.1, como parte de este trabajo de investigación se evalúan los algoritmo de Bruning *et al* y P. de Groot, para comparar su rendimiento como métodos pasivos para reducir el error en la fase $\Delta\Phi$ debido a el efecto gamma γ y la no linealidad de los dispositivos. El procedimiento consiste en generar patrones de franjas con $f = 5$ y $\gamma = 3$, simulando una superficie plana, con la cantidad de imágenes que se requieren para ejecutar cada uno de los algoritmos. Una vez calculada la fase continua absoluta Φ con los dos algoritmos, estos valores se interpolan buscando el mejor plano que contenga los datos, para obtener así un mapa de fase “ideal”, como el que se obtiene con franjas de perfil sinusoidal. Luego, la diferencia entre el mapa de fase interpolado y cada una de las fases continuas absolutas Φ , obtenidas con las imágenes simuladas, corresponde a la medida de la onda de error

$\Delta\Phi$ para cada uno de los algoritmos.

En la Figura 34 se puede apreciar una importante diferencia en la amplitud de la onda de error $\Delta\Phi$ entre los resultados de los dos algoritmos. Los resultados de la simulación muestran un valor eficaz RMS de $7,3537 \times 10^{-6}$ en la onda de error $\Delta\Phi$ obtenida con el algoritmo de Bruning, y un valor eficaz RMS de $9,0438 \times 10^{-9}$ usando el algoritmo de P. de Groot, lo que se traduce en una reducción en el valor eficaz RMS de la onda de error $\Delta\Phi$ del 99,8771 %.

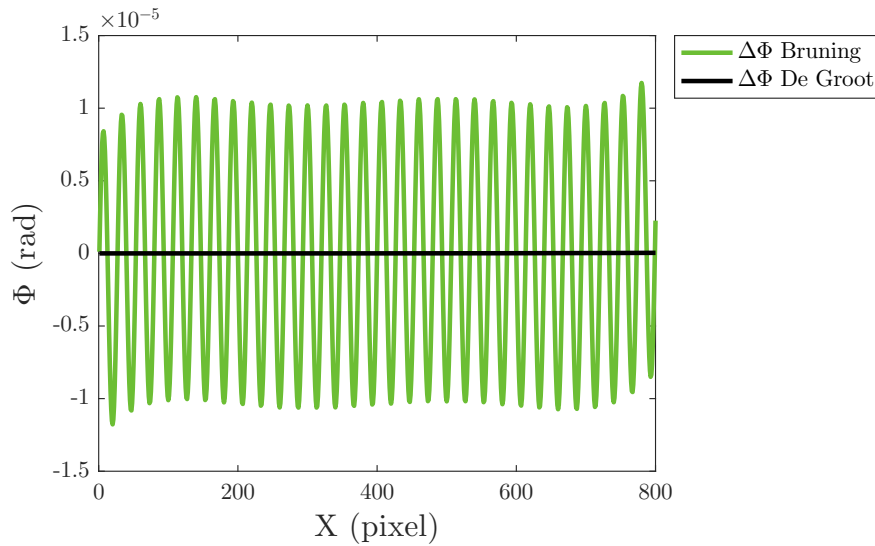


Figura 34. Superposición de la sección transversal del error en la fase $\Delta\Phi$ de un patrón de franjas simulado con $f = 5$, después de usar los algoritmos de Bruning y P. de Groot.

En la prueba experimental usando un objeto plano, e imágenes de franjas con $f = 5$, al interpolar y hallar la diferencia entre el plano “ideal” y el experimental, se encuentra una diferencia entre las ondas de error $\Delta\Phi$ que resultan de cada uno de los dos algoritmos, similar a la que se obtiene en la simulación. El algoritmo de P. de Groot muestra un mejor rendimiento en el análisis

experimental, este resultado se puede apreciar en los principales valores de las ondas de error $\Delta\Phi$ que se resumen en la Tabla 4, en donde se evidencia una diferencia en el valor eficaz RMS de $0,0037 \text{ rad}$.

Tabla 4

Valores de Error $\Delta\Phi$ en la fase de un sistema de franjas experimentales con $f = 5$, usando los algoritmo de corrimiento de fase de Bruning y P. de Groot.

Algoritmo	Error $\Delta\Phi$ (rad)			
	Va. Mínimo	Val. Máximo	Val. Eficaz RMS	Desviación std.
Bruning	-0,0512	0,0412	0,0096	0,0096
de Groot	-0,0383	0,0368	0,0058	0,0058

En cuanto al análisis del espectro de Fourier de los algoritmos de Bruning *et al* y P. de Groot, las respectivas funciones de transferencia $H|\omega|$ describen un filtro mucho más restrictivo para el caso del segundo algoritmo. El primer armónico de las imágenes experimentales de franjas I^C que pasa el filtro del algoritmo de P. de Groot, aparte del fundamental, es el 7, el cual tiene una amplitud 1,8 veces menor que la del armónico 5, que es el armónico más relevante que pasa el filtro del algoritmo de Bruning *et al*. La presencia de estos armónicos residuales en el calculo de la fase continua absoluta Φ generan la onda de error $\Delta\Phi$, y la distribución en el espectro de Fourier de la onda de error también presenta una disminución importante en amplitud y presencia de armónicos residuales, usando el algoritmo de P. de Groot. Lo anterior se ilustra gráficamente en la Figura 35.

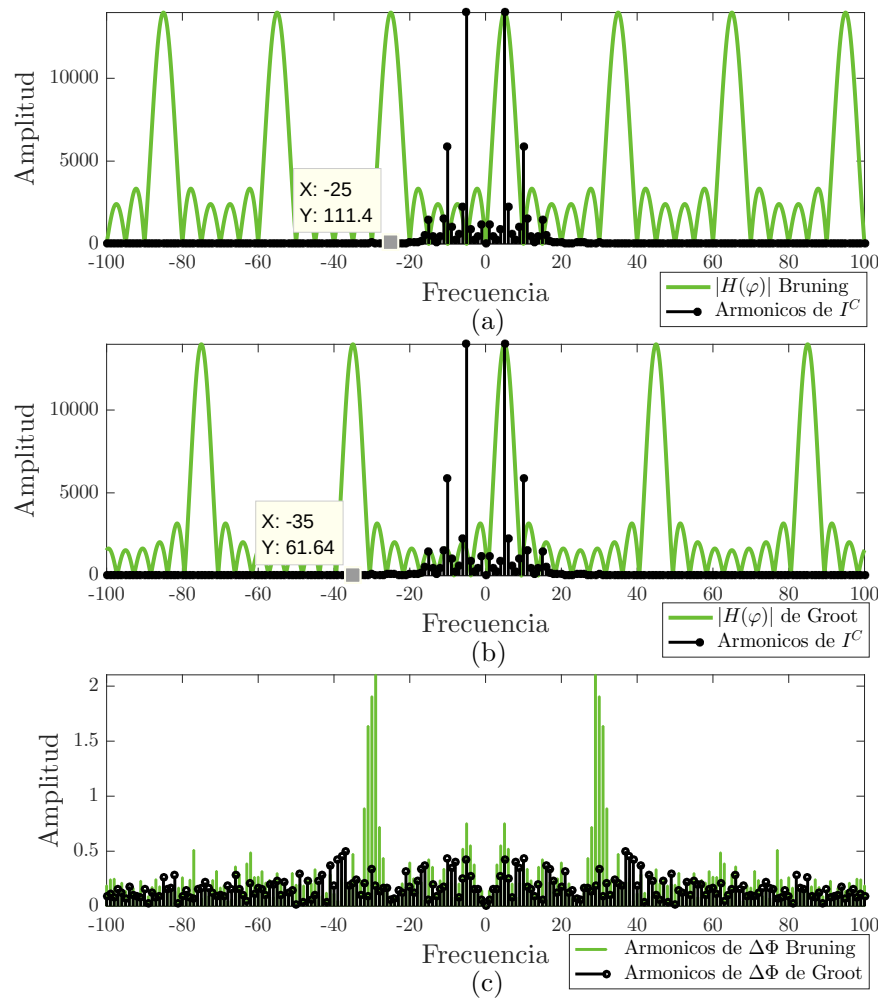


Figura 35. (a) Superposición de $H|\omega|$ del algoritmo de Bruning *et al* y el espectro de Fourier de I^C , (b) superposición de $H|\omega|$ del algoritmo de P. de Groot y el espectro de Fourier de I^C , y (c) superposición del espectro de Fourier de las ondas de error $\Delta\Phi$ que se obtienen con los dos algoritmos.

De acuerdo con los valores que se registraron en la Tabla 3, que corresponden al análisis experimental del error $\Delta\Phi$ que se obtiene con diferentes algoritmos de corrimiento de fase, y los valores que se registraron en la Tabla 4, que corresponden al mismo error $\Delta\Phi$ pero usando los algoritmos de Bruning *et al* y P. de Groot, se concluye que con este ultimo se logra una reducción en el valor eficaz RMS de la onda de error $\Delta\Phi$ de aproximadamente 0,3021 *rad* en comparación

con el error inicial que se obtiene con el algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$, usando un objeto plano y el montaje experimental descrito. Por esta razón se reconoce el algoritmo de P. de Groot como la mejor opción actual dentro de los métodos pasivos para reducir el error en la fase $\Delta\Phi$ debido al efecto gamma γ y la no linealidad de los dispositivos.

En esta subsección se demostró experimentalmente que como método pasivo para reducir el error en la fase $\Delta\Phi$ debido al efecto gamma γ y la no linealidad de los dispositivos, incrementar el número de imágenes en los algoritmos de corrimiento de fase, resulta muy efectivo, anulando la influencia de armónicos al filtrarlos tal y como lo describe su respectiva función de transferencia $H|\omega|$.

2.5.2. Método activo. Debido a que las condiciones de cada montaje experimental varían para cada caso particular, no es posible hablar de un procedimiento genérico entre los métodos activos que se pueda usar para cualquier caso (Zhang, 2015). Los métodos activos se centran en modificar el patrón de franjas que se crea en el computador, y pre-distorsionar la imagen de franjas antes de su proyección, según la función inversa del factor gamma γ del proyector, como se muestra en la ecuación 37,

$$I^C = \left(I_P^{1/\bar{\gamma}}\right)^\gamma, \quad (37)$$

en donde $1/\bar{\gamma}$, el nuevo termino que acompaña los demás ya presentados en la ecuación 13, corresponde a la función inversa del factor gamma γ y se incluye en la expresión de las franjas

digitales I^P con el propósito de pre-distorsionar la imagen, y anular el efecto del factor gamma γ en la proyección. Para obtener el valor de $\bar{\gamma}$, se han propuesto diferentes procedimientos de calibración que combinan resultados experimentales y numéricos con los que se busca encontrar el valor aproximado del factor γ real de un vídeo proyector específico (Zhang et al., 2012; Li and Li, 2011; Cai et al., 2017).

Algunos autores cuestionan la necesidad de complejos procedimientos de calibración para buscar un valor muy preciso de $\bar{\gamma}$, porque que la mayoría de métodos activos solo pueden concluir en una buena aproximación $\bar{\gamma} \approx \gamma$ (Zhang et al., 2012). Por esta razón, para este trabajo se evalúa experimentalmente: como la variación de $\bar{\gamma}$ influye en el aumento o reducción de la onda de error en la fase $\Delta\Phi$, y si se justifica desarrollar un procedimiento de calibración muy elaborado en busca de un valor exacto de $\bar{\gamma}$. Teniendo en cuenta que el valor de γ se ha caracterizado en otros trabajos de investigación y usualmente se encuentra entre $1 < \gamma < 3$ (Liu et al., 2010c), para el experimento en esta subsección se genera un patrón de franjas con la frecuencia de reconstrucción, aproximadamente $f = 42$ franjas en el campo de proyección (o de otro modo un paso de proyección de 24 píxeles).

Usando la ecuación 37 se distorsiona el patrón de franjas asignando valores al termino $\bar{\gamma}$ desde 1,0 hasta 5,0 con variaciones de 0,4. Los patrones de franjas distorsionados se proyectan sobre un objeto plano, y para recuperar la fase discontinua φ se utilizan los algoritmos de corrimiento de fase con $N = 3, 4, 6$ y 9 imágenes, con la intención de evaluar el desempeño de los 2

métodos (activo y pasivo) combinados para reducir la amplitud de la onda de error $\Delta\Phi$, la cual se calcula a partir de la diferencia entre la fase continua absoluta experimental Φ y la fase continua absoluta “ideal”, que se obtiene interpolando los valores experimentales.

En el apéndice 2, se presentan las tablas que resumen los principales valores de los resultados experimentales obtenidos en las ondas de error $\Delta\Phi$, según el número de imágenes N del algoritmo para recuperar la fase φ . Para los valores de la onda de error en la fase $\Delta\Phi$, que se obtienen utilizando el algoritmo con $N = 3$ imágenes, se encuentra una reducción máxima de aproximadamente el 87,74 % en la desviación estándar de los datos, tal y como se ilustra en la Figura 36. Este resultado es apreciable al superponer la sección transversal de las ondas de error en la fase $\Delta\Phi$, que se obtienen al usar $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 2,2$ para la proyección del patrón de franjas, en donde resulta apreciable una reducción importante en la amplitud de la onda de error para el segundo valor de $\bar{\gamma}$ respecto al primero. Esta descripción se puede observar en la Figura 37.

Por otra parte, al comparar el espectro de Fourier de las ondas de error en la fase $\Delta\Phi$ que se obtienen con $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 2,2$ (con $N = 3$), se aprecia una reducción significativa (aproximadamente del 91,21 %) en la amplitud del armónico fundamental del espectro de la onda con $\bar{\gamma} = 2,2$, como se muestra en la Figura 38(a). Otro detalle importante es que para este mismo espectro (el de la onda de error $\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 2,2$) no se observa ningún armónico, diferente del fundamental, con una amplitud considerablemente mayor a la del nivel de ruido; lo anterior se puede observar en el zoom del espectro que se muestra en la Figura 38(b).

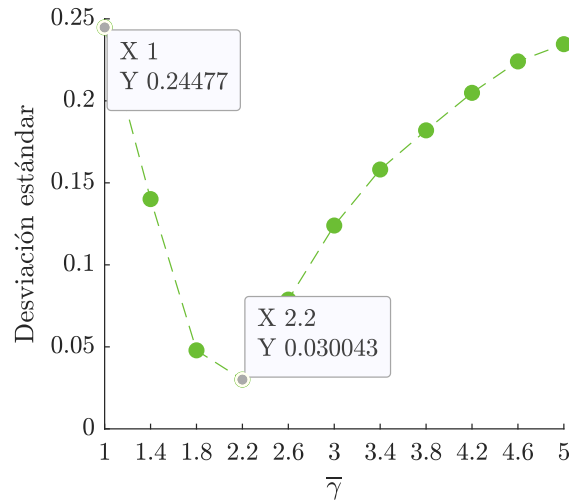


Figura 36. Desviación estándar de las ondas de error $\Delta\Phi$ vs. valores $\bar{\gamma}$ (resultados experimentales obtenidos con el algoritmo a 3 imágenes, y paso de proyección de 24 píxeles).

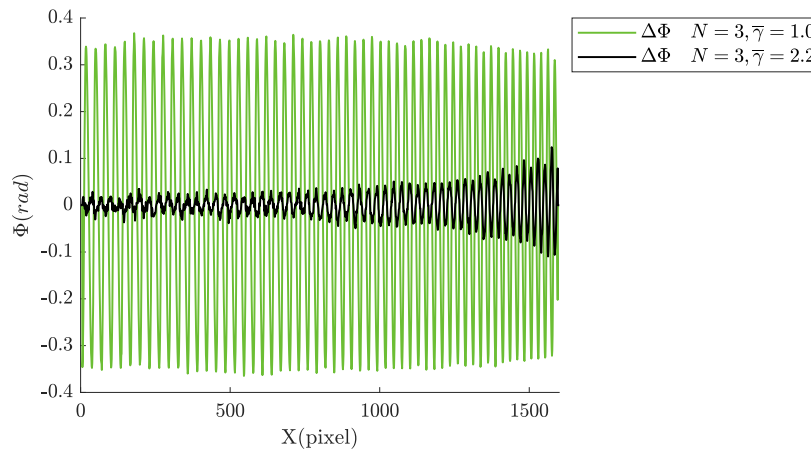


Figura 37. Superposición de las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$, utilizando el algoritmo a 3 imágenes ($N = 3$), para un patrón de franjas experimentales con $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 2,2$.

En el experimento con $N = 4$ imágenes, el mejor resultado se obtiene con $\bar{\gamma} = 3,8$, el cual presenta una reducción en la desviación estándar de la onda de error $\Delta\Phi$ respecto a la desviación estándar de la onda de error con $\bar{\gamma} = 1,0$, del 12,56% aproximadamente; esto último se muestra en la Figura 39. Por otra parte, en la superposición de las ondas de error $\Delta\Phi$ de ambos casos ($\bar{\gamma} = 1,0$

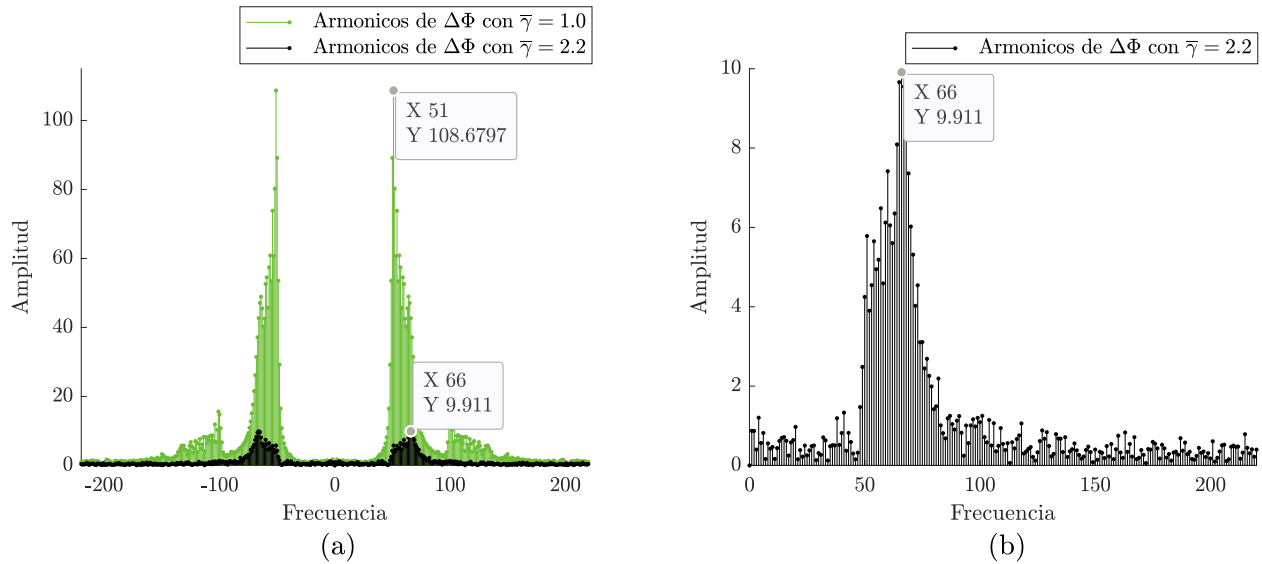


Figura 38. (a) Superposición de los espectros de Fourier de las ondas de error en la fase $\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 2,2$, y (b) zoom del espectro de Fourier de la onda de error $\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 2,2$.

y $\bar{\gamma} = 3,8$), ver Figura 40, no se perciben diferencias significativas a simple vista, aunque la reducción en el valor medio de la amplitud de la onda $\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 3,8$ es de aproximadamente 7,42 %, con respecto al valor medio de la onda de error $\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 1,0$. A pesar de que la amplitud de las ondas de error $\Delta\Phi$ para este caso no sobrepasa los $\pm 0,05 \text{ rad}$, aún conserva un comportamiento ondulatorio, que se confirma mediante sus respectivos espectros de Fourier, como se muestra en la Figura 41.

Para el algoritmo a 6 imágenes ($N = 6$), o algoritmo de Bruning, la reducción en la desviación estándar de la onda de error $\Delta\Phi$ usando $\bar{\gamma} = 1,4$ es de aproximadamente 59,75 % con respecto a la onda de error $\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 1,0$; en la Figura 42 se comparan estos resultados. En cuanto al valor medio de la amplitud de la onda de error $\Delta\Phi$, la reducción es aproximadamente del 63,08 %

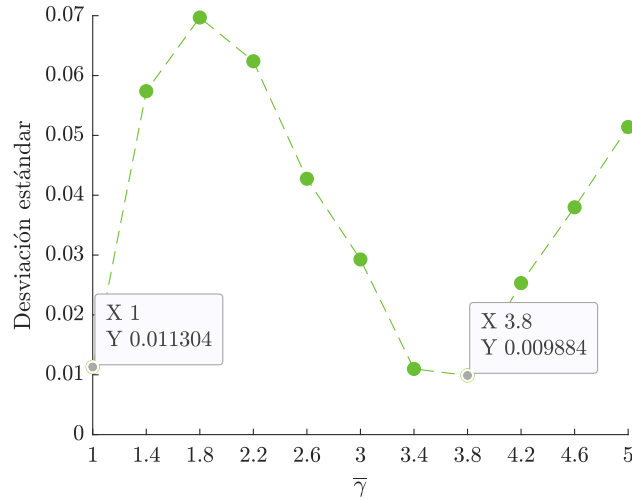


Figura 39. Desviación estándar de las ondas de error $\Delta\Phi$ vs. valores $\bar{\gamma}$ (resultados experimentales obtenidos con el algoritmo a 4 imágenes, y paso de proyección de 24 píxeles).

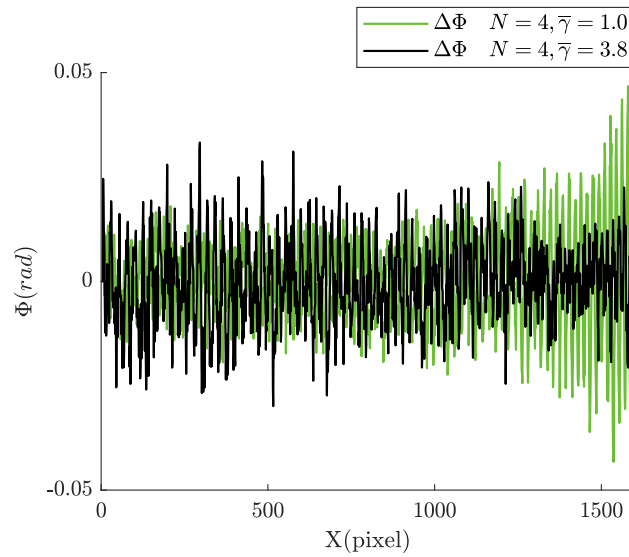


Figura 40. Superposición de las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$, utilizando el algoritmo a 4 imágenes ($N = 4$), para un patrón de franjas experimentales con $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 3,8$.

usando $N = 6$ y $\bar{\gamma} = 1,4$, lo cual se puede apreciar al superponer las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 1,4$, como se muestra en la Figura 43. En cuanto al espectro de Fourier de las ondas de error, el armónico fundamental se reduce en amplitud aproximadamente

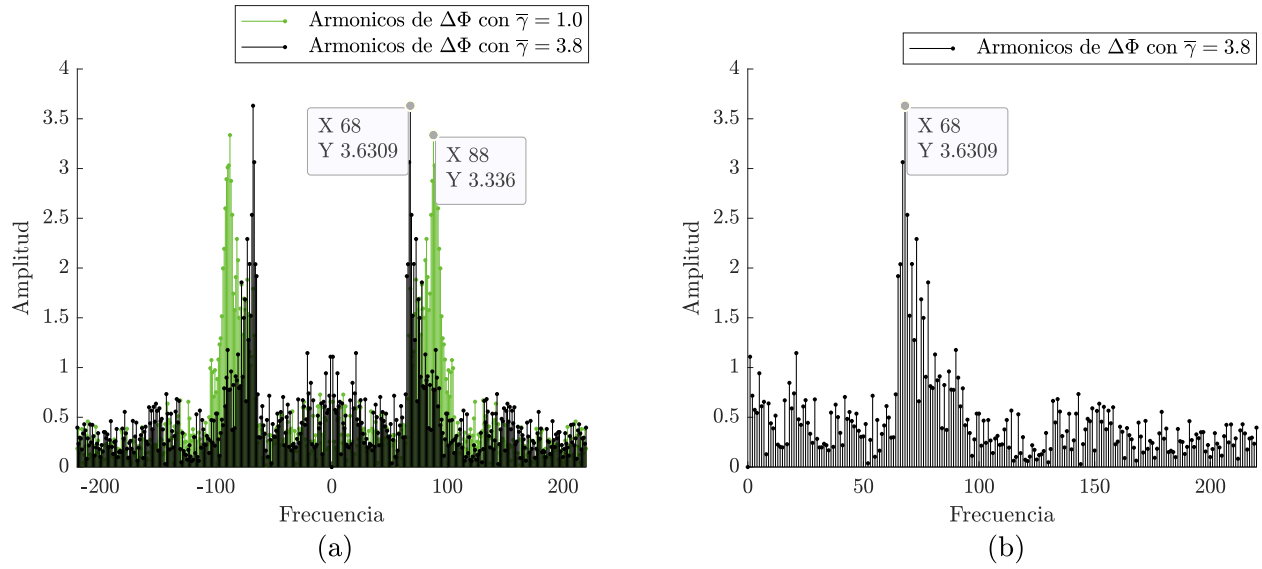


Figura 41. (a) Superposición de los espectros de Fourier de las ondas de error en la fase $\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 3,8$, y (b) zoom del espectro de Fourier de la onda de error $\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 3,8$.

el 67,93 % en el espectro de la onda con $\bar{\gamma} = 1,4$, como se puede apreciar en la Figura 44.

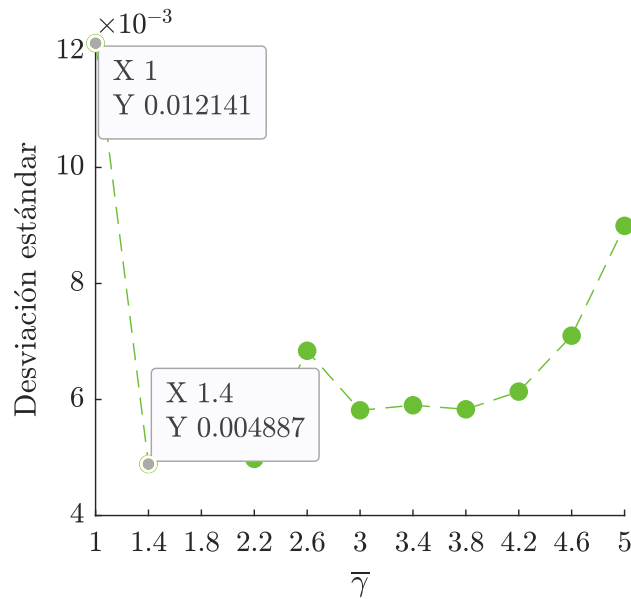


Figura 42. Desviación estándar de las ondas de error $\Delta\Phi$ vs. valores $\bar{\gamma}$ (resultados experimentales obtenidos con el algoritmo a 6 imágenes, y paso de proyección de 24 píxeles).

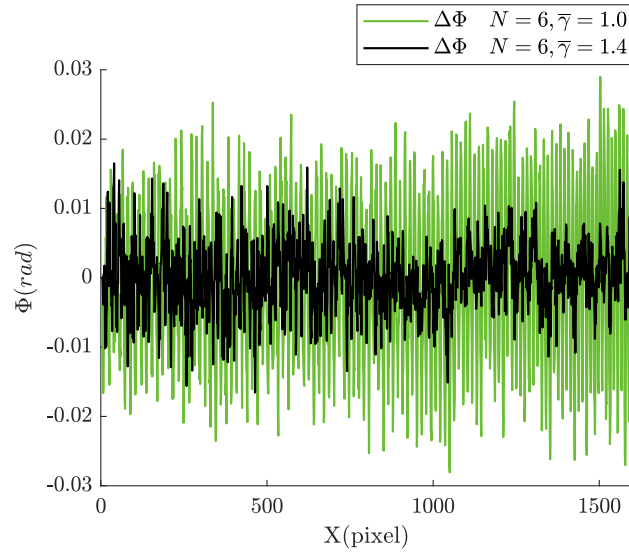


Figura 43. Superposición de las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$, utilizando el algoritmo a 6 imágenes ($N = 6$), para un patrón de franjas experimentales con $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 1,4$.

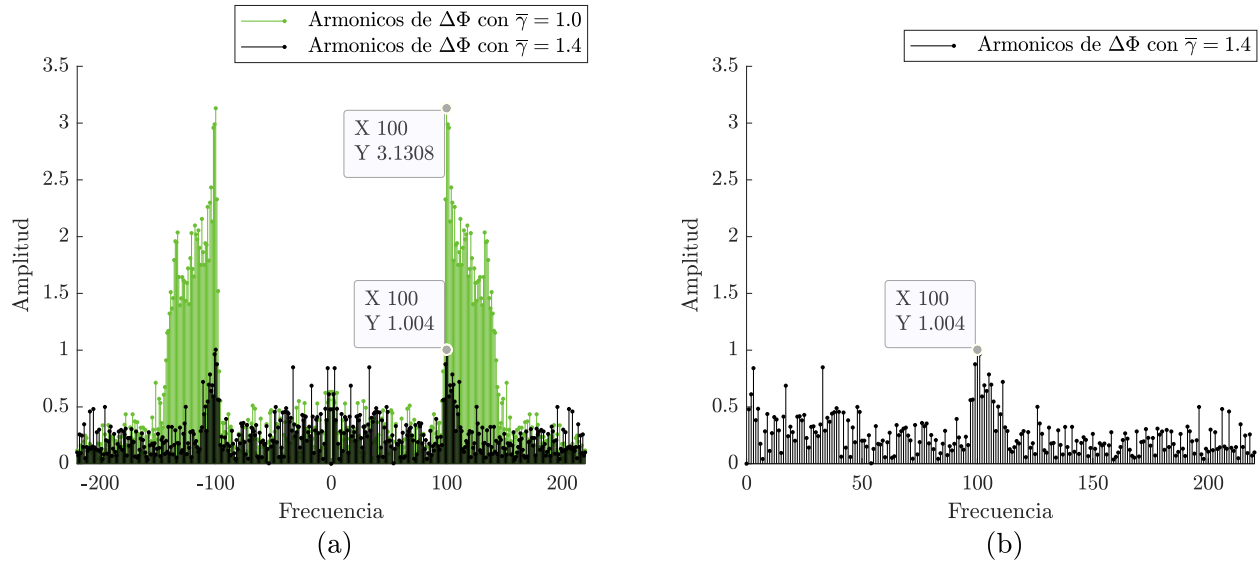


Figura 44. (a) Superposición de los espectros de Fourier de las ondas de error en la fase $\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 1,0$ y $\bar{\gamma} = 1,4$, y (b) zum del espectro de Fourier de la onda de error $\Delta\Phi$ con $\bar{\gamma} = 1,4$.

Finalmente, con el algoritmo a 9 imágenes ($N = 9$), o algoritmo de P. de Groot, usar la ecuación 39 para generar el patrón de franjas no presenta ninguna mejora considerable y por el contrario la menor desviación estándar de las ondas de error $\Delta\Phi$ se obtiene con $\bar{\gamma} = 1,0$. En la

Figura 45 se comparan los resultados experimentales de las desviaciones variando los valores de $\bar{\gamma}$. De esta forma se demuestra experimentalmente que con la combinación de un método pasivo (modificar el numero de imágenes en el algoritmo de recuperación de la fase φ), y un método activo (incluir la función inversa de gamma $1/\bar{\gamma}$ al generar las franjas digitales), se logra reducir la onda de error $\Delta\Phi$ hasta un 89,73 %. Los principales valores de los resultados experimentales se resumen en el apéndice 2.

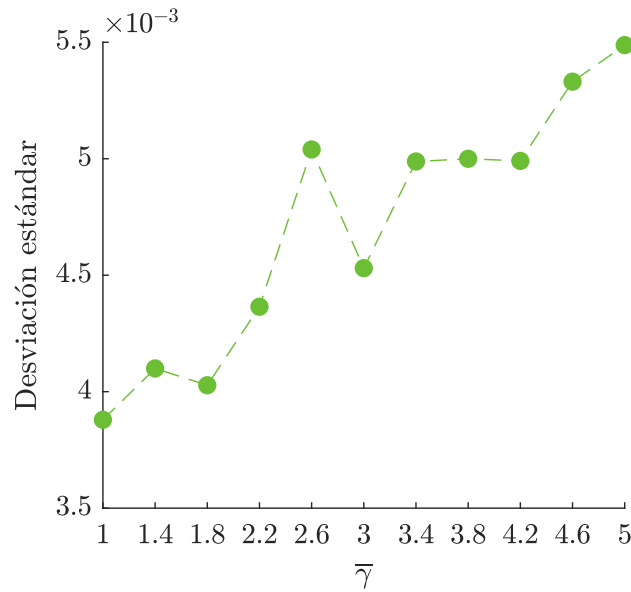


Figura 45. Desviación estándar de las ondas de error $\Delta\Phi$ vs. valores $\bar{\gamma}$ (resultados experimentales obtenidos con el algoritmo a 9 imágenes, y paso de proyección de 24 pixeles).

De acuerdo con los resultados experimentales el algoritmo de P. de Groot resulta ser el método más efectivo a la hora de reducir la onda de ruido $\Delta\Phi$ en la fase, incluso al compararlo con métodos activos o métodos combinados. En la Figura 46 se superponen las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$ que se obtienen con la combinación del algoritmo $N = 3$ con $\bar{\gamma} = 2, 2$, y

el algoritmo $N = 9$ con $\bar{\gamma} = 1,0$, en donde se evidencia una diferencia en la amplitud media de las ondas de error de $0,02 \text{ rad}$ aproximadamente, con la amplitud mas pequeña para el algoritmo con $N = 9$.

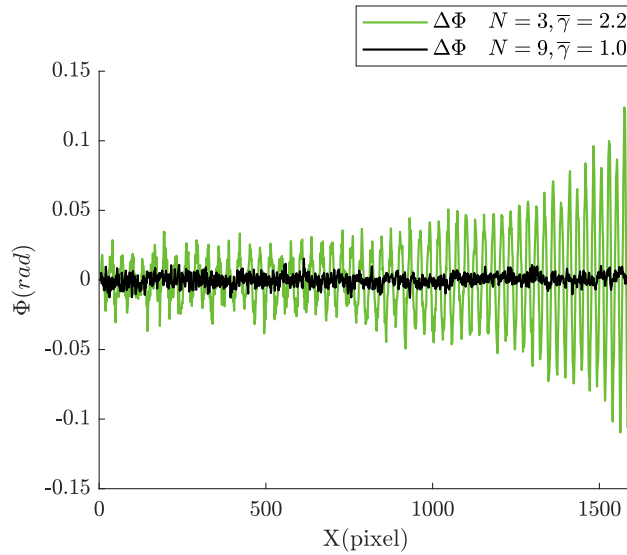


Figura 46. Superposición de las secciones transversales de las ondas de error $\Delta\Phi$, utilizando los algoritmos a 3 imágenes ($N = 3$) y 9 imágenes ($N = 9$), para los patrones de franjas experimentales con $\bar{\gamma} = 2,2$ y $\bar{\gamma} = 1,0$ respectivamente.

Al comparar los espectros de Fourier de las ondas de error en la fase $\Delta\Phi$ para los algoritmos con $N = 3$ y $\bar{\gamma} = 2,2$, y el algoritmo de P. de Groot ($N = 9$) con $\bar{\gamma} = 1,0$, resulta evidente que para el segundo algoritmo la componente ondulatoria en la onda de error $\Delta\Phi$ prácticamente se reduce en su totalidad al no percibirse ninguna armónico con amplitud superior al nivel del ruido como se muestra en la Figura 47(a), y se confirma con el zoom sobre la parte positiva del espectro de Fourier que se muestra en la Figura 47(b).

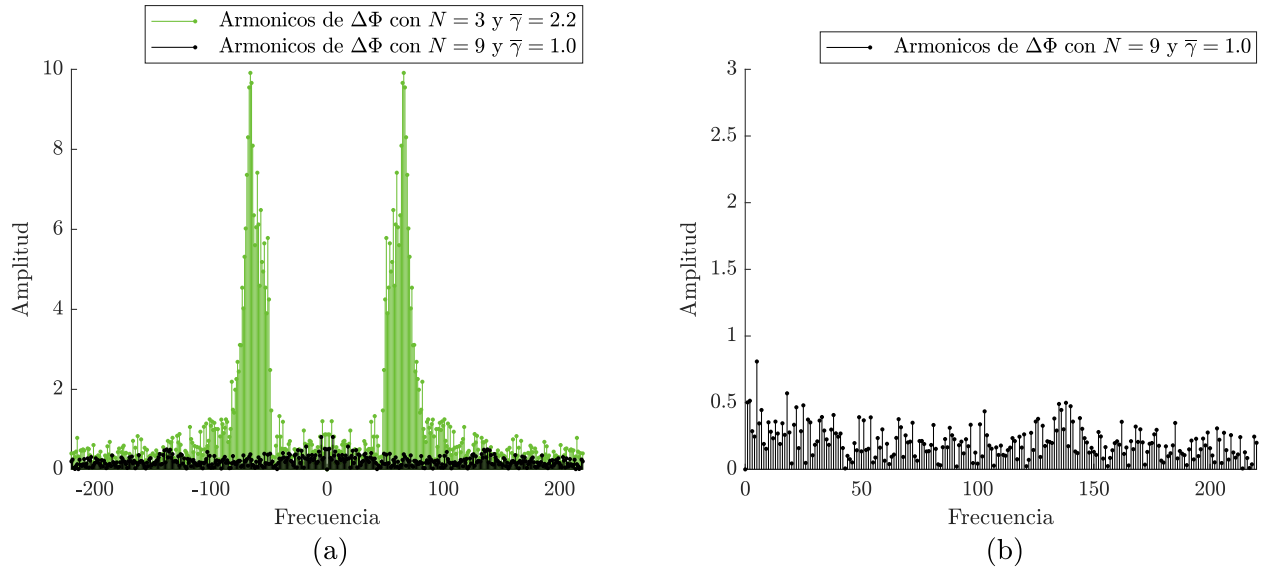


Figura 47. (a) Superposición de los espectros de Fourier de las ondas de error en la fase $\Delta\Phi$ que se obtienen utilizando los algoritmos a 3 imágenes ($N = 3$) con $\bar{\gamma} = 2,2$, y el algoritmo de P. de Groot ($N = 9$) con $\bar{\gamma} = 1,0$, y (b) zum del espectro de Fourier de la onda de error $\Delta\Phi$ con $N = 9$ y $\bar{\gamma} = 1,0$.

Con el mismo principio experimental, se compara el rendimiento del algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$ y $\bar{\gamma} = 2,2$, y el algoritmo de P. de Groot ($N = 9$) con $\bar{\gamma} = 1,0$, usando como objeto un cráneo humano. En este análisis experimental se genera un patrón con $f = 128$ franjas en la totalidad del campo de observación de 1024×768 pixel, y se usa un algoritmo de desdolvimiento de fase espacial Meneses et al. (2005) para desdolver la fase discontinua φ y obtener la fase continua absoluta Φ . En la Figura 48 se muestra la sección de interés de la fase discontinua φ y la fase continua absoluta Φ , obtenidas con el algoritmo de $N = 3$ con $\bar{\gamma} = 2,2$.

Al analizar la onda de error $\Delta\Phi$ en la fase para los dos mapas de fase continua absoluta Φ , el que se obtienen con el algoritmo $N = 3$ ($\bar{\gamma} = 2,2$) y el que se obtiene con el algoritmo de P. de

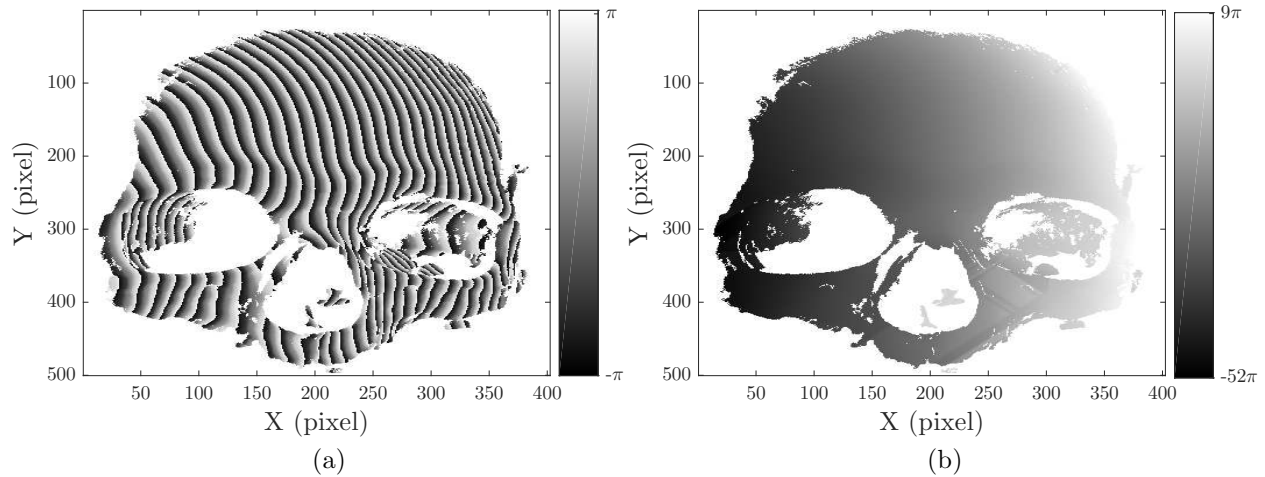


Figura 48. (a) Fase discontinua ϕ , y (b) fase continua absoluta Φ , obtenidas con el algoritmo de $N = 3$ con $\bar{\gamma} = 2, 2$ y un algoritmo de desenvolvimiento de fase espacial.

Groot ($N = 9$ y $\bar{\gamma} = 1, 0$), se encuentran ondulaciones de mayor amplitud en la onda de error $\Delta\Phi$ del mapa correspondiente al algoritmo básico de corrimiento de fase con $N = 3$. Para ilustrarlo, la sección transversal sobre la fila $y = 200$, en la zona frontal del cráneo humano, para ambos mapas de fase se superponen y se muestran en la Figura 49.

Los principales valores para esta sección transversal específica, la fila $y = 200$ en los mapas de fase continua absoluta Φ del cráneo humano, se resumen en la Tabla 5.

En la Figura 50 se muestra el mapa de fase continua absoluta Φ que se obtiene usando el algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$ ($\bar{\gamma} = 2, 2$), en una vista 3D. En esta figura se pueden apreciar las ondulaciones correspondientes al error en la fase $\Delta\Phi$, producto de los armónicos residuales que provoca el efecto gamma γ y la no linealidad de los dispositivos. Por el contrario, para el mapa de fase continua absoluta Φ que se obtiene combinando el algoritmo de P. de Groot ($N = 9$,

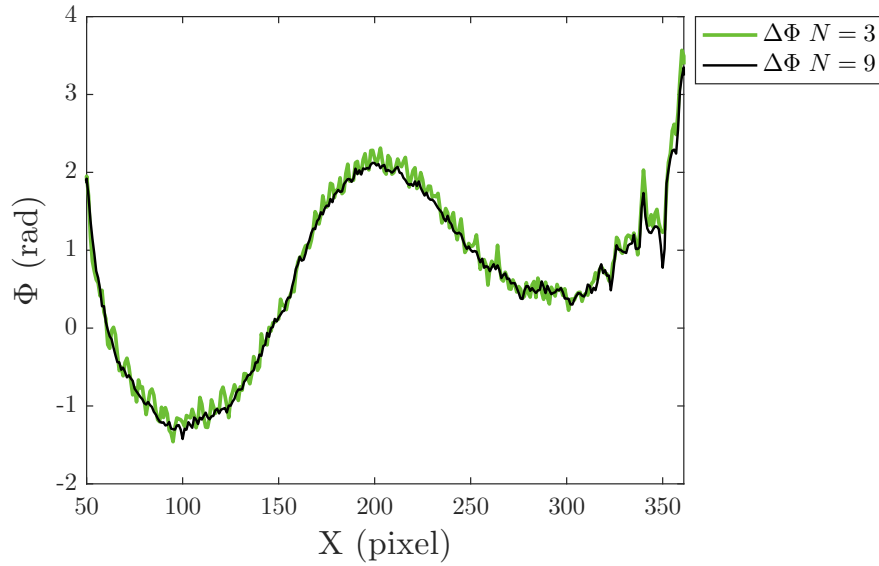


Figura 49. Superposición de la sección transversal de la onda de error $\Delta\Phi$, en la fila $y = 200$ de los mapas de fase con $N = 3$ ($\bar{\gamma} = 2, 2$) y $N = 9$ ($\bar{\gamma} = 1, 0$).

$\bar{\gamma} = 1, 0$), las ondulaciones del error $\Delta\Phi$ resultan imperceptibles, y se observa una fase continua absoluta Φ más prolija y acorde a la superficie del objeto real, como se muestra en la vista 3D de la Figura 51.

Considerando los resultados obtenidos en en las pruebas experimentales presentadas en esta sección, en donde se demuestra la eficiencia de los métodos aquí presentados para reducir el error en la fase $\Delta\Phi$, en este trabajo se decide implementar el algoritmo propuesto por P. de Groot con $N = 9$ y $\delta_i((i-1)2\pi)/(N-1)$ para recuperar la fase discontinua φ de los sistemas de franjas.

Tabla 5

Valores de Error $\Delta\Phi$ de la sección transversal $y = 200$ en la fase de un sistema de franjas experimentales con $f = 128$ proyectado sobre un cráneo humano, usando los algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$ y $N = 9$.

Algoritmo	Error $\Delta\Phi$ (rad)			
	Va. Minimo	Val. Maximo	Val. Eficaz RMS	Desviación std.
N=3 ($\bar{\gamma} = 2, 2$)	-1,3667	3,8083	1,2783	1,1034
de Groot ($\bar{\gamma} = 1, 0$)	-1,3101	3,4598	1,2303	1,0814

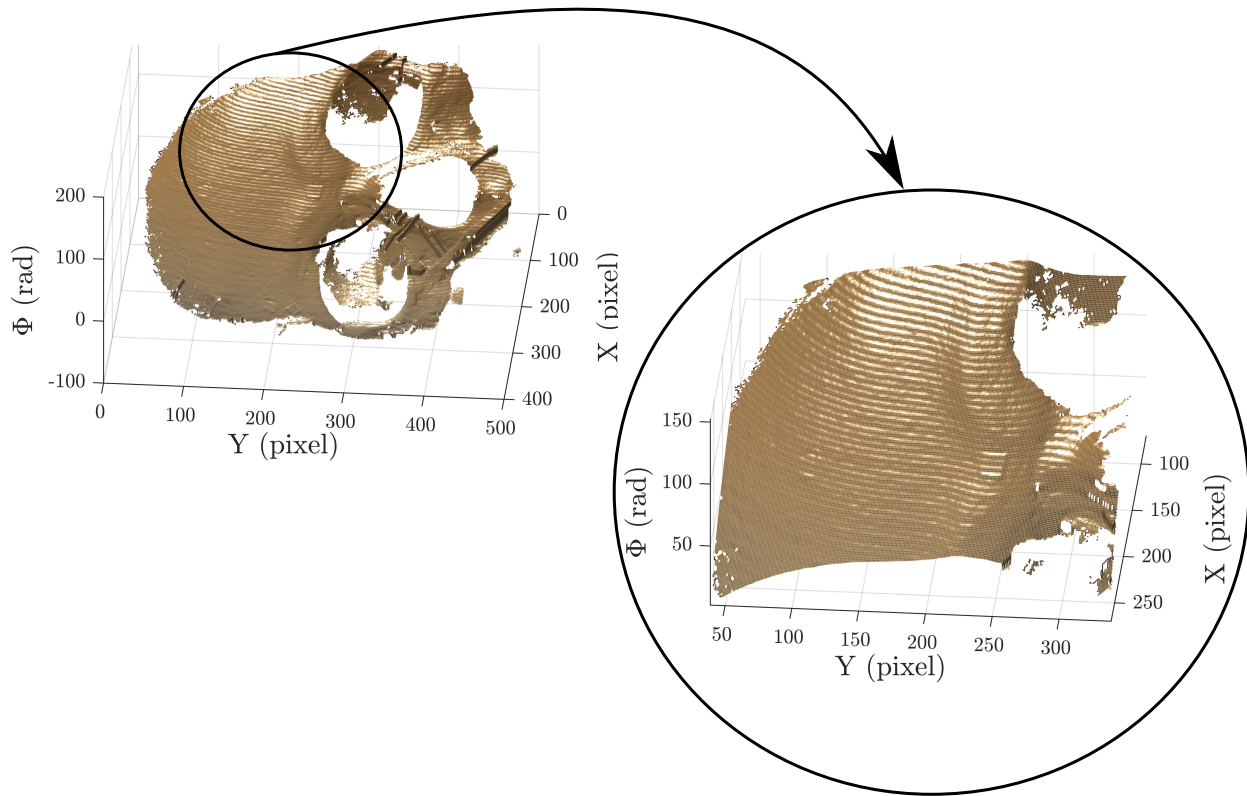


Figura 50. Vista 3D del mapa de fase continua absoluta Φ que se obtiene usando el algoritmo de corrimiento de fase con $N = 3$, en el cráneo humano.

2.6. Desenvolvimiento de fase temporal

Como ya se menciona en la sección 2.2, la fase φ que se obtiene usando la ecuación 11 se encuentra acotada en el rango entre $-\pi$ y π con discontinuidades de 2π . Para obtener infor-

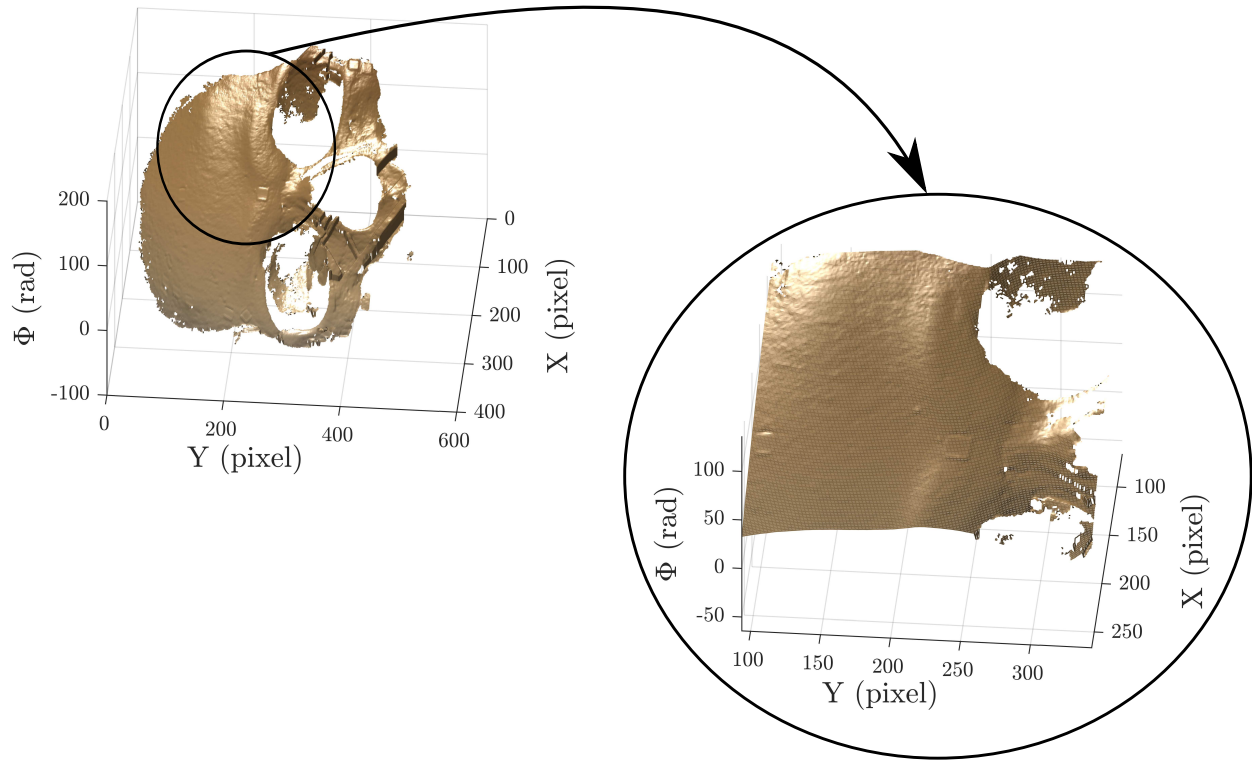


Figura 51. Vista 3D del mapa de fase continua absoluta Φ que se obtiene usando el algoritmo de P. de Groot ($N = 9$), en el cráneo humano.

mación 3D de la topografía superficial de un objeto se requiere de la fase continua absoluta Φ , y para llegar a esta se deben remover de forma apropiada dichas discontinuidades. El procedimiento que se describe someramente en la sección 2.2, es en esencia el principio de los algoritmos de *desenvolvimiento de fase espacial*, en los que se describe matemáticamente la relación entre la fase discontinua φ y la fase continua Φ mediante la ecuación 12 (Zhang, 2013).

La diferencia fundamental entre los algoritmos de desenvolvimiento de fase espacial y los de desenvolvimiento de fase temporal, es que estos últimos no requieren información de los pixeles vecinos espaciales para realizar el “desenvolvimiento”; por esta razón los algoritmos de desenvol-

vimiento de fase temporal son ideales cuando el objeto de estudio es de topografía compleja ó arbitraria Zhang (2013). Lo contrario ocurre con los algoritmos de desenvolvimiento de fase espacial que dependen de ubicar las discontinuidades iguales a 2π a partir de los pixeles vecinos espacialmente, por esta razón no funcionan muy bien cuando la topografía superficial de los objetos induce cambios de fase iguales ó mayores a 2π (Zuo et al., 2018).

En el caso del cráneo humano, que es reconocido en la literatura especializada como un objeto de topografía muy compleja y difícil de reconstruir manual ó digitalmente (Thompson and Black, 2008; Wilkinson and Rynn, 2012; Clement and Marks, 2005; Romeiro et al., 2014; Taylor, 2000), no resulta apropiado usar algoritmos de desenvolvimiento de fase espacial para reconstruirlo usando la TPF, debido a que las variaciones tan abruptas en su topografía superficial generan alteraciones en los valores de fase que luego generan errores en el desenvolvimiento de la fase φ . Específicamente, el cráneo humano presenta discontinuidades fuertes en su topografía y variaciones abruptas en la altura de su superficie que generan sombras y regiones ocultas que alteran la continuidad de las franjas, como se muestra en la Figura 52.

En las imágenes de zum de la Figura 52, se puede apreciar como en algunas regiones del cráneo humano, debido a las variaciones en su topografía, la continuidad de las franjas se ve interrumpida por algunas sombras ó incluso llegan a desaparecer en regiones oscuras. La falta de continuidad de las franjas genera valores erróneos en el calculo de la fase discontinua φ y regiones del mapa de fase sin información, como se muestra en la Figura 53. Al depender de los pixeles

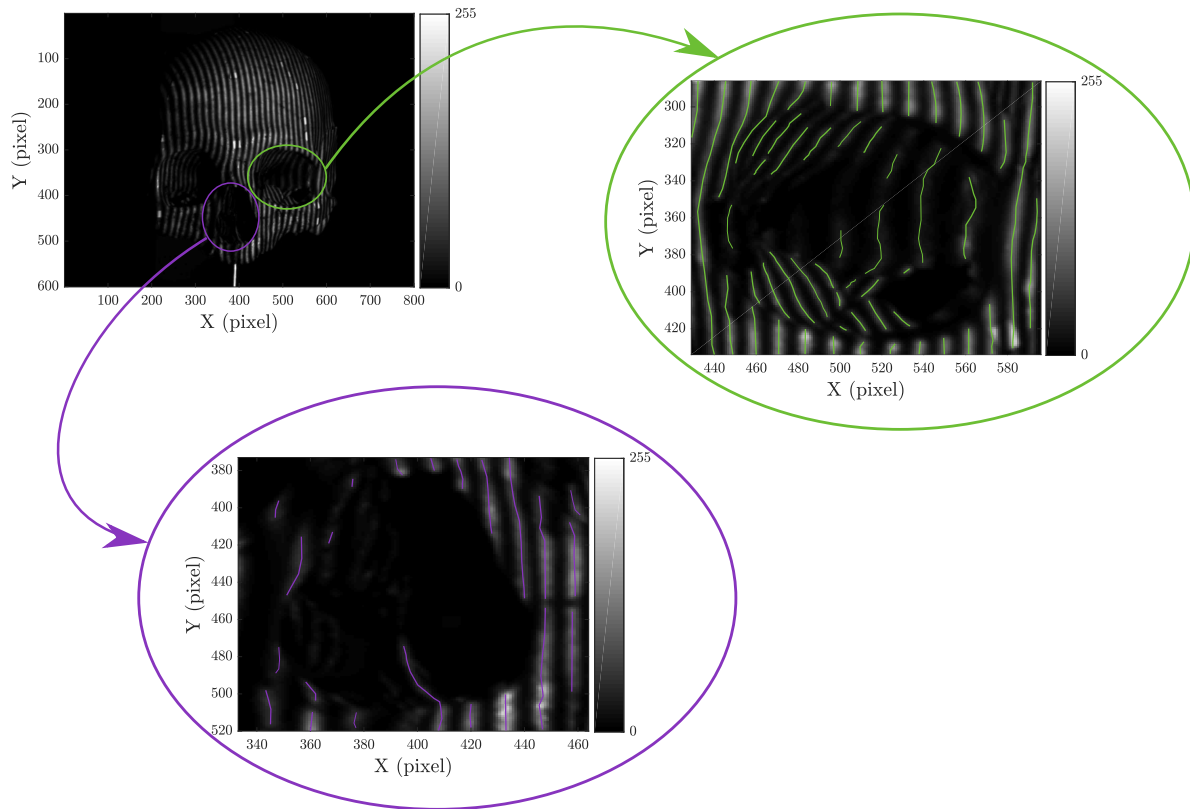


Figura 52. Vista frontal de un cráneo humano con la proyección de un patrón de franjas, junto al zum de 2 regiones complejas en la topografía superficial del cráneo humano.

vecinos espaciales para desenvolver la fase discontinua φ en los algoritmos de desenvolvimiento de fase espacial, la ausencia de información ó la información errónea genera errores en la fase continua absoluta Φ que se propagan sistematicamente, como se muestra en la Figura 54.

El problema resulta más evidente al observar la sección transversal del mapa de fase discontinua φ , en una región que presenta perdida de información, y valores de fase erróneos debido a interrupciones en el patrón de franjas provocadas por variaciones abruptas en la topografía superficial del objeto. En la Figura 55 (a) se muestra la imagen del mapa de fase discontinua φ de la vista

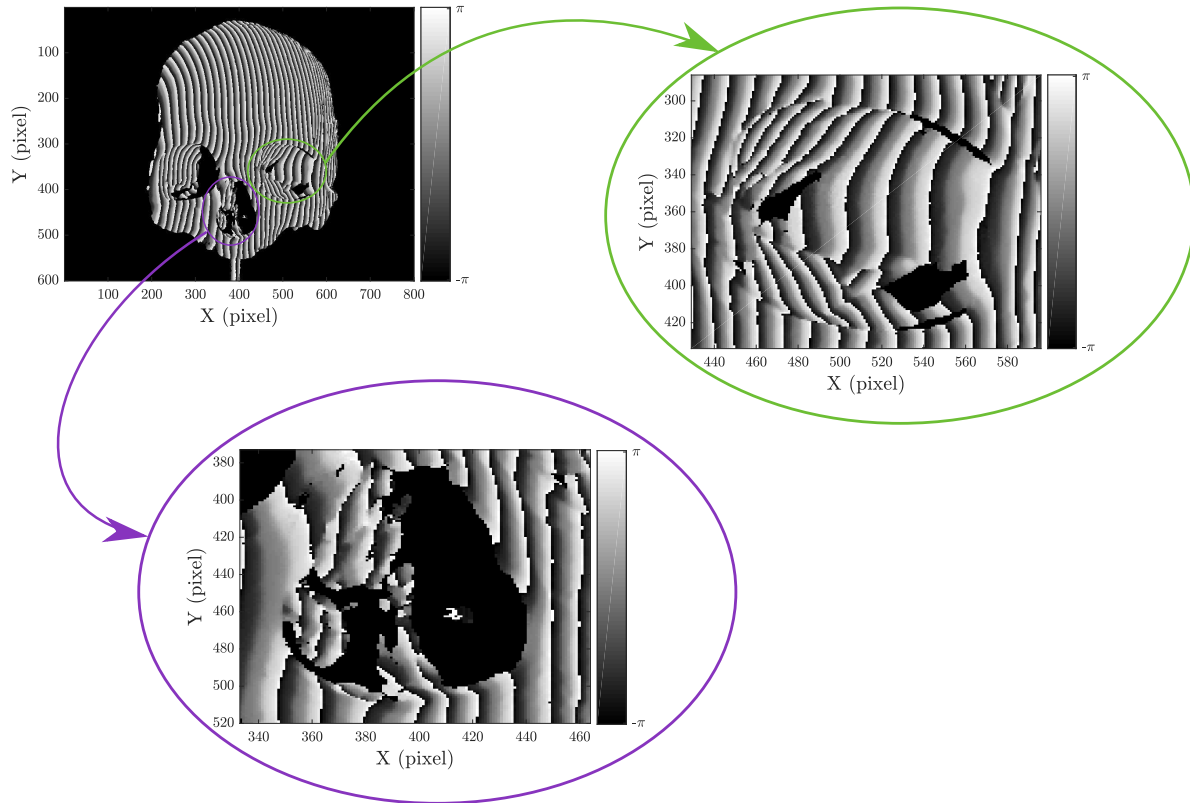


Figura 53. Fase discontinua φ calculada con las imágenes de la vista frontal del cráneo humano, junto al zum de 2 regiones complejas en la topografía superficial del cráneo humano.

frontal de un cráneo humano, con zum en la región que corresponde a la órbita ocular izquierda; y en la Figura 55 (b) se aprecia la sección transversal sobre la fila $y = 346$ de la misma región, en la que se observan variaciones anómalas en los valores de fase y secciones sin información.

En la sección transversal de la fase continua absoluta Φ , también se puede observar como los problemas que se generan en la fase discontinua φ alteran los valores de la fase continua absoluta Φ , generando errores que se propagan por el mapa de fase al utilizar un algoritmo espacial de desenvolvimiento. En la Figura 56, se muestra la fase continua absoluta Φ para la misma región de

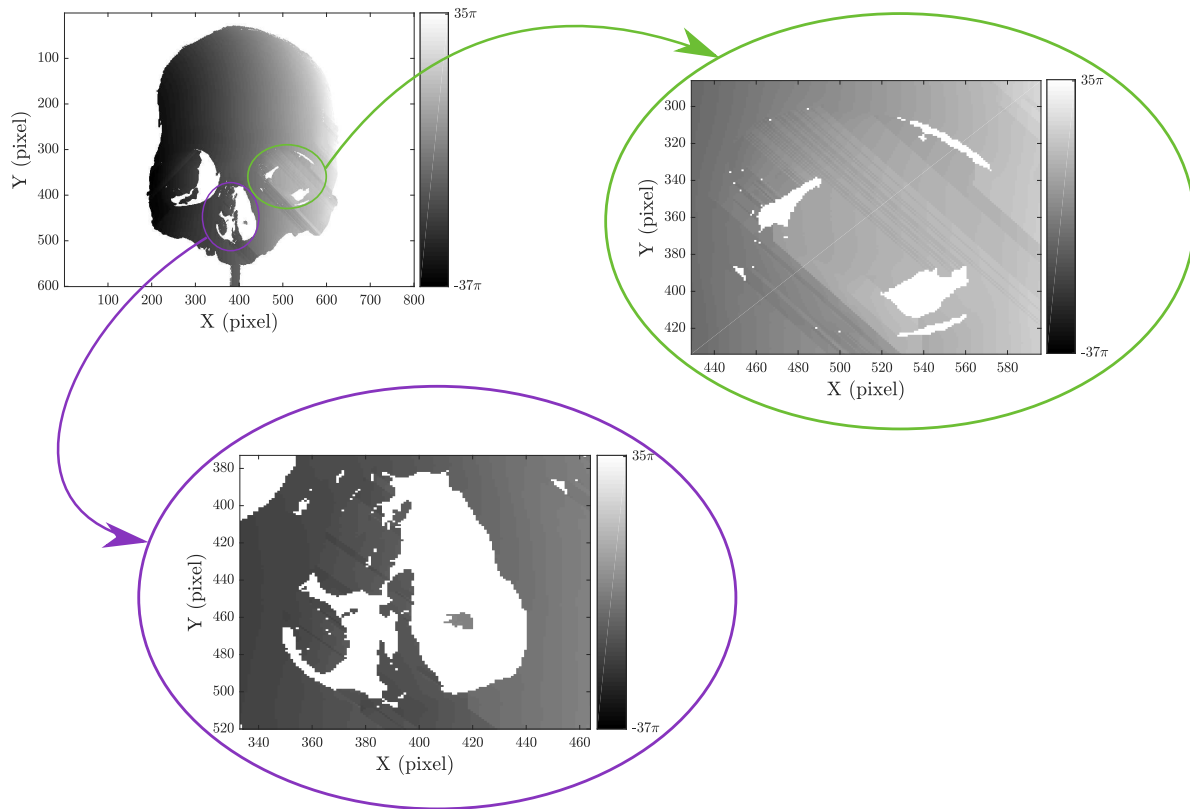


Figura 54. Fase continua absoluta Φ calculada al desenvolver la fase discontinua φ de la Figura 53 usando un algoritmo de desenvolvimiento de fase espacial, junto al zum de 2 regiones complejas en la topografía superficial del cráneo humano.

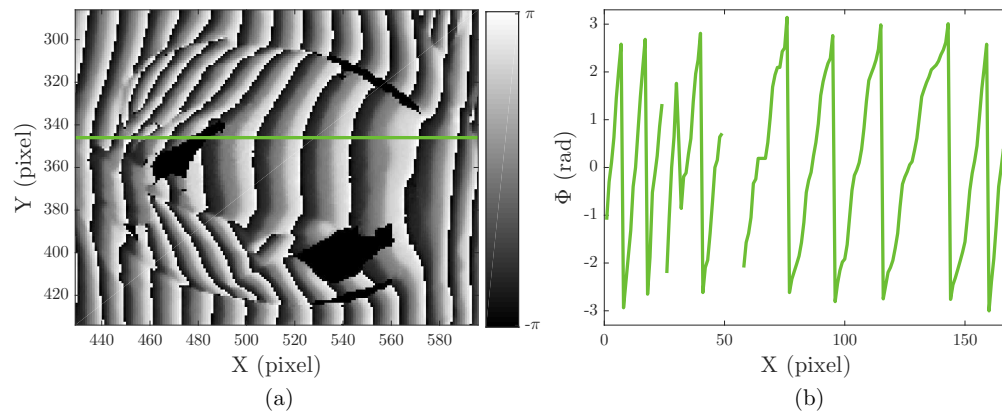


Figura 55. (a) Zum sobre la órbita ocular izquierda del mapa de fase discontinua φ correspondiente a una vista frontal del cráneo humano, y (b) sección transversal de la fase discontinua φ sobre la fila $y = 346$.

la Figura 55.

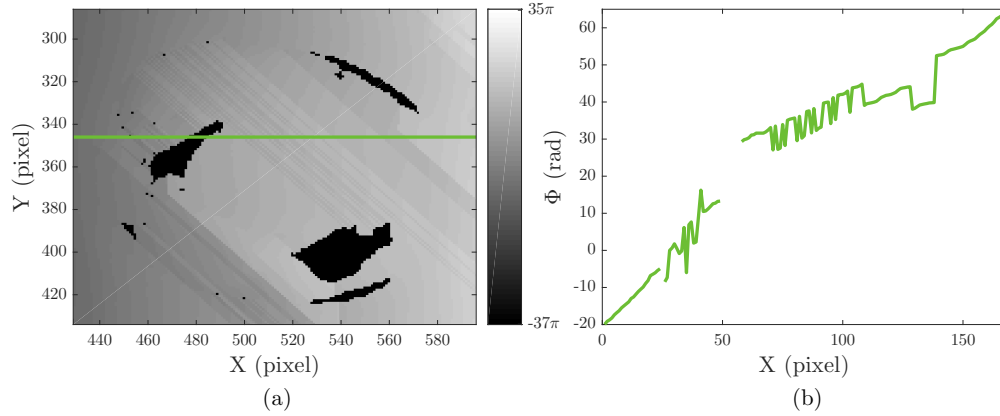


Figura 56. (a) Zum sobre la órbita ocular izquierda del mapa de fase continua absoluta Φ correspondiente a una vista frontal del cráneo humano, y (b) sección transversal de la fase continua absoluta ϕ sobre la fila $y = 346$.

Por esta razón, para este trabajo se propone una metodología de desenvolvimiento de fase diseñada especialmente para el cráneo humano y que se basa en algoritmos de desenvolvimiento de fase temporal. La idea principal de los algoritmos temporales es calcular la fase de cada pixel como función del tiempo, de este modo, el desenvolvimiento se lleva a cabo en el eje temporal para cada pixel de forma independiente, evitando así que se generen y se propaguen errores por variaciones fuertes en la superficie del objeto. El eje temporal se genera proyectando patrones de franjas con diferente cantidad de franjas f , y para cada patrón se calcula su fase discontinua ϕ .

A modo de ejemplo, se asume un objeto plano, los pixeles de la proyección ocupan todos los pixeles de la cámara, y se crea un eje temporal con $t = 1, 2$, y 3 a partir de los patrones de franjas con $f = 1, 2$, y 3 , y sus respectivas fases discontinuas ϕ como se muestra en la Figura 57.

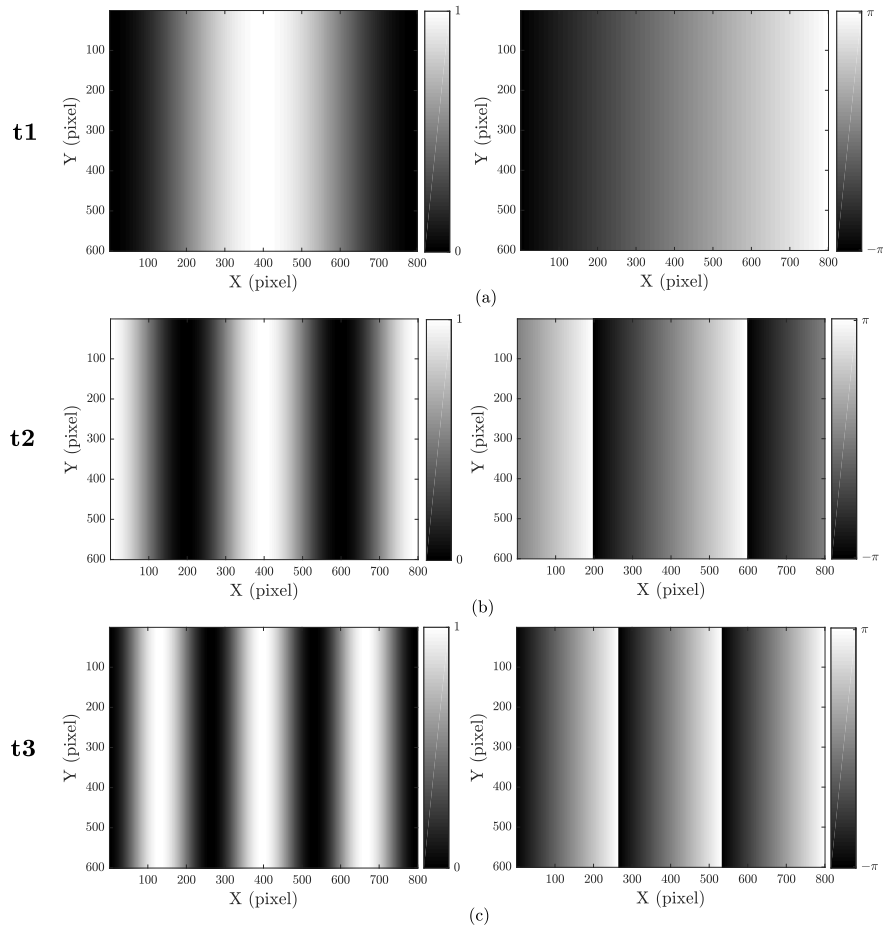


Figura 57. Imagen de franjas y su respectiva fase discontinua φ para: (a) $t \Rightarrow f = 1$, (b) $t \Rightarrow f = 2$, y (c) $t \Rightarrow f = 3$.

Con las fases discontinuas del ejemplo que se ilustra en la Figura 57 se construye el eje temporal, que para el caso del ejemplo va desde $t = 1$ hasta $t = 3$, pero se puede prolongar hasta $t = n$, según el requerimiento de la cantidad de franjas finales en el campo de observación. Dicho eje temporal se ilustra en la Figura 58.

La fase de un pixel de coordenadas (x, y) en el t -ésimo mapa de fase se denota como

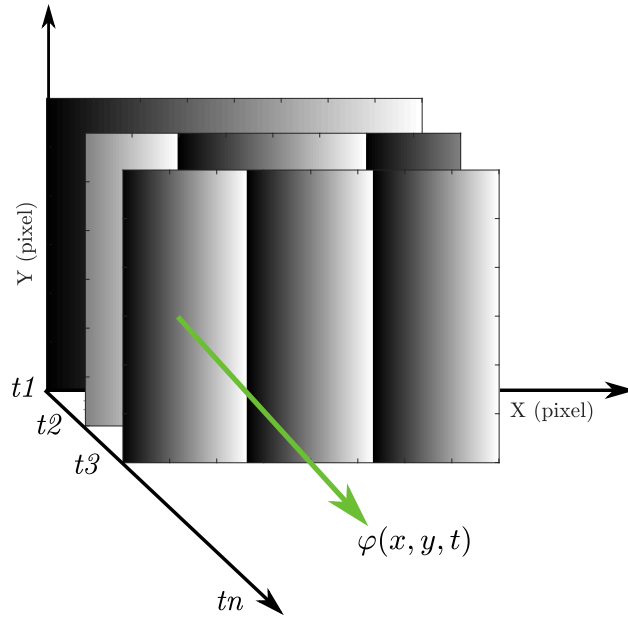


Figura 58. Generación del eje temporal para desenvolvimiento de fase φ , usando patrones de franjas con $f = 1, 2$, y 3 .

$\varphi(x, y, t)$, y las discontinuidades 2π entre los mapas de fase discontinua φ a lo largo del eje temporal se calculan con la ecuación 38,

$$d(x, y, t) = \left[\frac{\Delta\varphi(x, y, t)}{2\pi} \right], \quad (38)$$

en donde [...] representa redondeo al entero más cercano, y $\Delta\varphi$ es la diferencia entre el $(t-ésimo)$ y el $(t-ésimo) - 1$ mapa de fase, como se indica en la ecuación 39,

$$\Delta\varphi(x, y, t) = \varphi(x, y, t) - \varphi(x, y, t - 1). \quad (39)$$

En la Figura 59 (a), se muestra la diferencia de fases $\Delta\varphi_{21} = \varphi(2) - \varphi(1)$, y en la Figura 59 (b) las discontinuidades d entre los mapas de fase en $t = 2$ y $t = 1$.

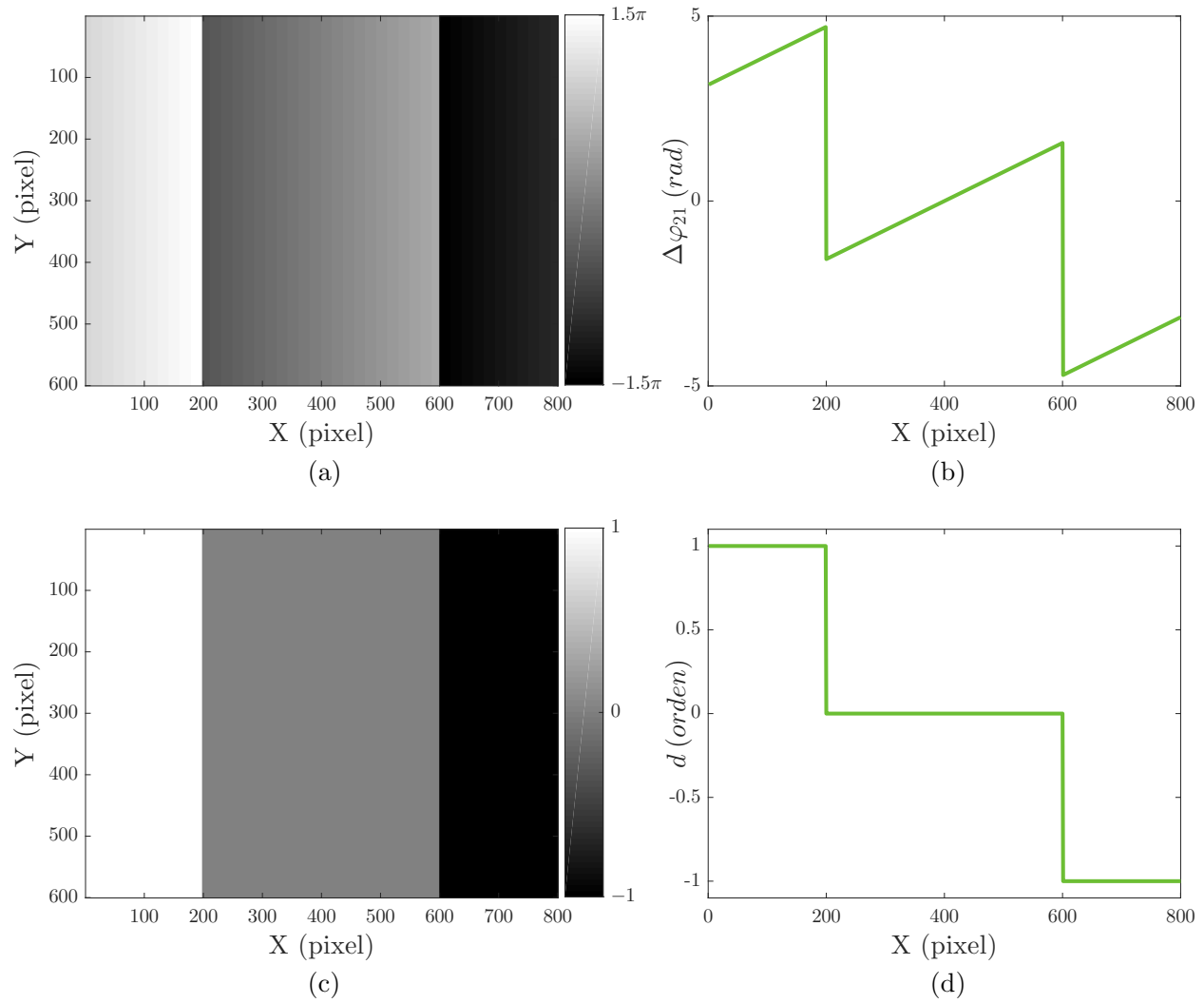


Figura 59. (a) Diferencia de fases $\Delta\varphi_{21} = \varphi(2) - \varphi(1)$, (b) sección transversal del mapa $\Delta\varphi_{21}$, (c) discontinuidades d_{21} entre el mapa de fase $t = 2$ y $t = 1$, y (d) sección transversal del mapa d_{21} .

Al superponer las discontinuidades d_{21} y la sección transversal del mapa de fase discontinua $\varphi(2)$, se evidencia que las discontinuidades d_{21} corresponden a los ordenes que se requieren para desenvolver la fase discontinua $\varphi(2)$, como se puede observar en la Figura 60. De esto ultimo se puede deducir entonces que para calcular la fase continua absoluta $\Phi(2)$ se debe restar $2\pi d_{21}$ al

mapa de fase discontinua $\varphi(2)$, como se resume en la ecuación 40,

$$\Phi(2) = \varphi(2) - 2\pi d_{21}. \quad (40)$$

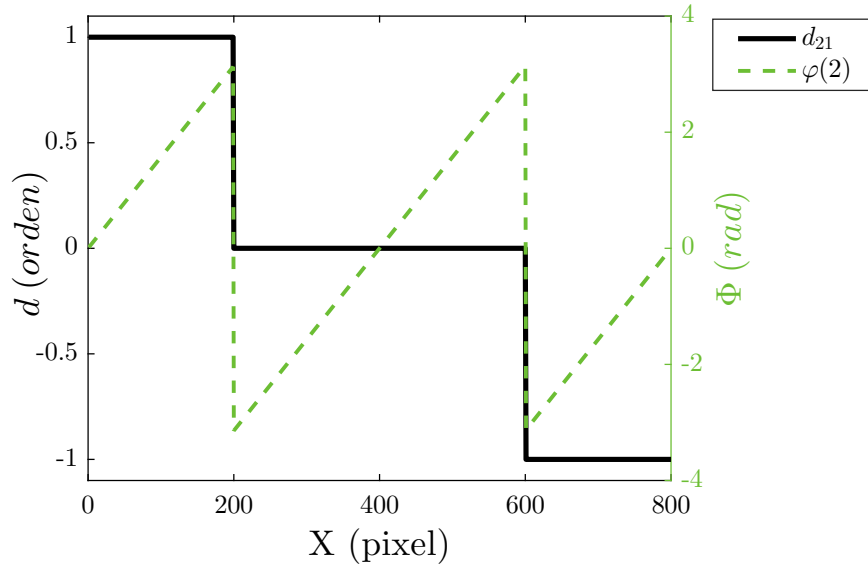


Figura 60. Superposición de la sección transversal de la fase $\varphi(2)$ correspondiente a el mapa de fase $t \Rightarrow f = 2$, y la sección transversal del mapa de discontinuidades d_{21} .

La fase continua absoluta $\Phi(2)$, resultado de la ecuación 40, se muestra en la Figura 61.

Debido a que los sistemas de franjas tienen en común el punto de origen x_0 , la fase continua Φ que se obtiene con este procedimiento corresponde a la fase continua absoluta Φ . En la Figura 62 (a) se muestra la superposición de las secciones transversales de la imagen de franjas con $\delta_i = 0$ de cada uno de los patrones de franjas en el eje temporal del ejemplo de la Figura 57, y en la Figura 62 (b) se muestra la sección transversal de los mapas de fase discontinua del mismo ejemplo. En las dos imágenes se puede observar el punto común x_0 que comparten las imágenes de franjas, y por lo tanto también es un punto común para los mapas de fase discontinua φ y los mapas de fase

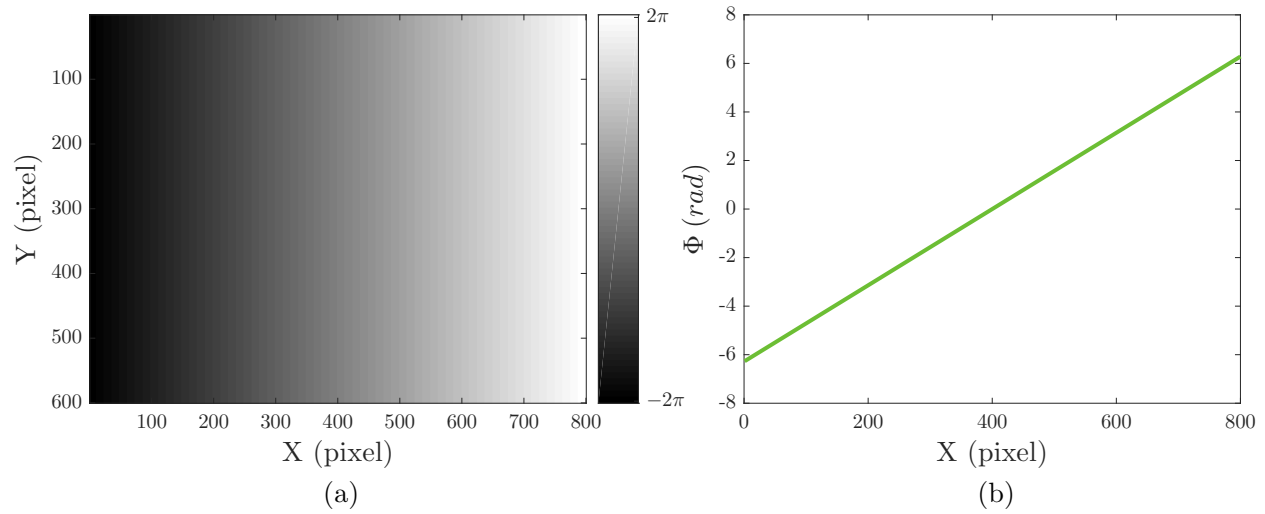


Figura 61. (a) Fase continua absoluta $\Phi(2)$ del plano de fase en $t \Rightarrow f = 2$, y (b) su respectiva sección transversal.

continua absoluta Φ . Por lo tanto, el procedimiento de desenvolvimiento de fase temporal permite obtener fases continuas absolutas Φ .

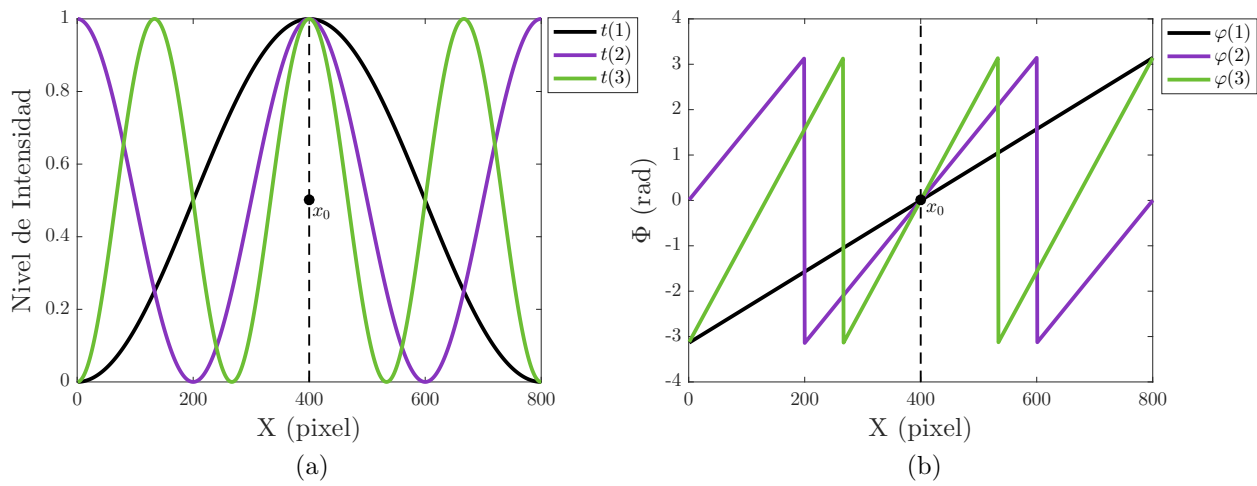


Figura 62. (a) Superposición de las secciones transversales de las imágenes de franjas en $t(1)$, $t(2)$, y $t(3)$, y (b) superposición de las secciones transversales de los mapas de fase discontinua $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ y $\varphi(3)$.

Continuando con el algoritmo temporal de desenvolvimiento de fase, y para desenvolver la fase discontinua $\varphi(3)$ en el mapa $t = 3$, se deben calcular las discontinuidades d_{32} y adicionarlas a las discontinuidades d_{21} . De forma general, el total de las discontinuidades 2π , hasta el n -ésimo mapa de fase, se calcula con la ecuación 41,

$$v(x, y, n) = \sum_{t=1}^n d(x, y, t), \quad (41)$$

y finalmente para calcular la fase continua absoluta $\Phi(n)$, se resta $2\pi v$ a $\varphi(x, y, n)$, como se concluye en la ecuación 42,

$$\Phi(x, y, n) = \varphi(x, y, n) - 2\pi v(x, y, n). \quad (42)$$

Teniendo en cuenta que el número de franjas f se va incrementando de forma lineal en la prolongación del eje temporal t ($t = 1, 2, 3 \dots n$), este algoritmo se conoce como *algoritmo lineal de desenvolvimiento de fase temporal*. Desde la aparición del algoritmo original de desenvolvimiento de fase temporal, publicado por Huntley y Saldner en 1993 (Huntley and Saldner, 1993), se han propuesto por la comunidad científica diversas modificaciones con el propósito de optimizar los resultados en la fase continua absoluta Φ , reducir el número de imágenes necesarias para del mismo modo bajar los tiempos de proyección-adquisición, y sobre todo evitar en lo posible intervención del usuario.

Los algoritmos más importantes de desenvolvimiento de fase temporal se reportan en la

literatura en la siguiente clasificación: Algoritmos lineales (LTPU) (Huntley and Saldner, 1993), Algoritmos exponenciales (ETPU) (Huntley and Saldner, 1997b), Algoritmos de secuencia exponencial inversa (RETPU) (Huntley and Saldner, 1997a), Algoritmos generalizados (GTPU) (Tian et al., 2008), y actualmente los trabajos en esta area se han centrado en el desarrollo de Algoritmos de frecuencia dual, buscando reducir tiempos de generación, proyección, adquisición, y procesamiento de imagenes, considerando que para calcular cada mapa de fase se requieren N imagenes, que pueden llegar a sumar una cantidad considerable dependiendo del algoritmo de corrimiento de fase implementado y de la prolongación del eje temporal t (Ding et al., 2012; Servin et al., 2015; Hyun and Zhang, 2016).

2.6.1. Algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal. Como se ha demostrado en diferentes investigaciones (Huntley and Saldner, 1997a; Zuo et al., 2012; Sansoni et al., 1999), los algoritmos temporales de desenvolvimiento de fase no presentan los problemas de los algoritmos espaciales cuando se pretende reconstruir objetos de forma compleja, con cambios abruptos en su topografía superficial, sombras ó regiones aisladas (Zuo et al., 2016). Sin embargo, a pesar del buen rendimiento de los algoritmos iniciales propuestos por Huntley y Saldner, casi desde su aparición se han planteado diferentes modificaciones con la intención de reducir la cantidad de imágenes necesarias para desenvolver la fase φ , puesto que en algunas aplicaciones dicha cantidad puede consumir demasiado tiempo y memoria física en equipos de computo, para su adquisición y procesamiento (Zuo et al., 2016).

En el año 2010, Liu *et al* (Liu et al., 2010a) proponen un algoritmo temporal de frecuencia

dual para desenvolver la fase a partir de la combinación de 2 mapas de fase, y evitar así todos los mapas de fase intermedios entre los mapas de fase extremos. El funcionamiento de este algoritmo se basa en la relación lineal entre la fase continua absoluta Φ y el número de franjas f de un determinado patrón de franjas; tal que: $\Phi_1/f_1 = \Phi_2/f_2$, entonces $f_1\Phi_2 = f_2\Phi_1$. Partiendo de la ecuación 12 del análisis de franjas, para 2 mapas de fase se tienen las ecuaciones 43 y 44,

$$\Phi_1 = \varphi_1 + 2\pi k', \quad (43)$$

$$\Phi_2 = \varphi_2 + 2\pi k, \quad (44)$$

y considerando que la ecuación 45 también corresponde al segundo mapa de fase Φ_2 ,

$$\Phi_2 = \frac{f_2}{f_1} \Phi_1, \quad (45)$$

se tiene entonces que el factor k se obtiene usando la ecuación 46,

$$\begin{aligned} \varphi_2 + 2\pi k &= \frac{f_2}{f_1} \Phi_1, \\ k &= \left[\frac{\frac{f_2}{f_1} \Phi_1 - \varphi_2}{2\pi} \right], \end{aligned} \quad (46)$$

en donde [...] representa redondeo al entero más cercano, y f_2/f_1 la relación entre el número de franjas de los mapas de fase como un factor que amplifica el mapa de fase absoluta Φ_1 .

El algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal es completamente funcional y logra el objetivo de reducir el número de imágenes únicamente a las necesarias para obtener 2 mapas de fase; sin embargo presenta una limitación importante, y es que como se observa en la ecuación 46, se requiere conocer la fase continua absoluta del primer mapa de fase Φ_1 , para poder desenvolver el segundo mapa de fase φ_2 , razón por la que se requiere usar imágenes de franjas con $f = 1$ para el mapa de fase inicial. Como se muestra en la Figura 63 (b), el mapa de fase discontinua φ es igual al mapa de fase continua absoluta Φ cuando se usan imágenes de franjas con $f = 1$.

El inconveniente de usar imágenes de franjas con $f = 1$ radica en el hecho de que al hacerse más grande la relación f_2/f_1 y actuar como un factor que amplifica la fase continua absoluta Φ_1 , como se observa en la ecuación 46, se amplifica también el ruido presente en este mapa de fase. Un pico en el ruido amplificado en Φ_1 puede incrementar el valor de k en el proceso de redondear al valor siguiente, generando un valor erróneo. Esta situación es equivalente a propagar un error en el procedimiento de desenvolvimiento de fase espacial, generando valores erróneos en el mapa de fase continua absoluta Φ .

El problema del ruido en la fase continua absoluta final Φ amplificada, debido a valores altos en la relación f_2/f_1 por la necesidad de usar el mapa inicial de fase con $f = 1$, ha sido el principal motivo para que se generen nuevas propuestas y modificar el algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal. Dentro de esas propuestas la que mejor se adapta a este trabajo, dadas las condiciones de tamaño y forma impuestas por el cráneo humano y la necesidad de desarrollar

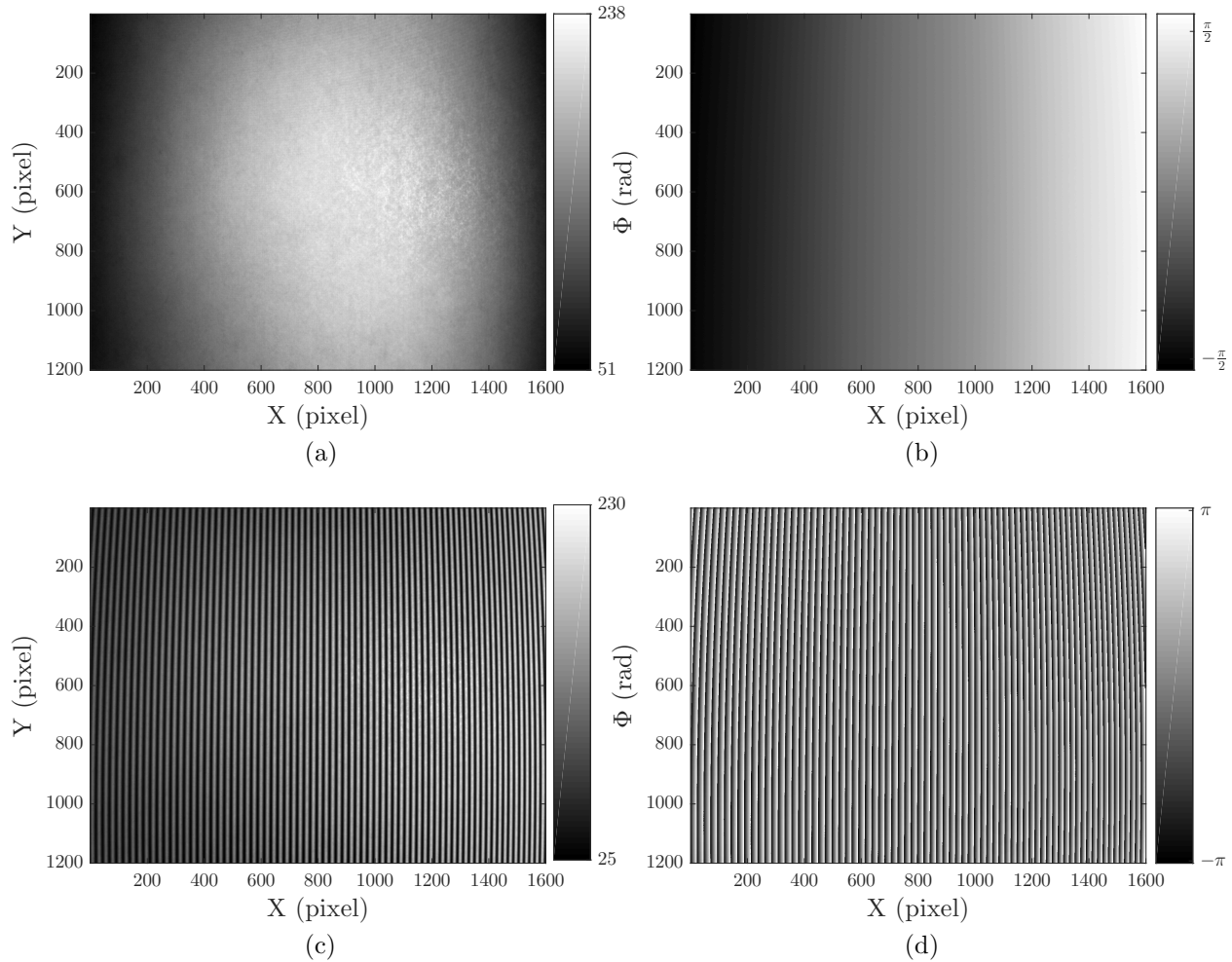


Figura 63. (a-b) Imagen experimental de franjas con $f = 1$ y su respectivo mapa de fase discontinua φ_1 , y (b) imagen experimental de franjas con $f = 128$ y su respectivo mapa de fase discontinua φ_2 .

una metodología de R3DD flexible y versátil, es la idea de incorporar restricciones geométricas a el montaje experimental, estrategia que se describe en la siguiente subsección.

2.6.2. Algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal con restricciones

geométricas. Como se menciona en la subsección 2.6.1, este tipo de algoritmos solo necesitan los 2 mapas de fase extremos para desenvolver la fase del patrón de franjas con mayor número de

frangas f_2 , lo que reduce significativamente el número de imágenes, el tiempo de adquisición y el de procesamiento. Sin embargo, los resultados de estos algoritmos temporales con 2 mapas de fase se ven muy afectados por el ruido, debido a que el patrón de frangas inicial siempre debe ser el de $f = 1$, y este propagara muchos errores en la fase cuando la relación de frecuencias es muy grande (Du et al., 2017).

De acuerdo con Jae-Sang Hyun y Song Zhang (Hyun and Zhang, 2016), es preferible utilizar algoritmos temporales de desenvolvimiento de fase que utilizan múltiples mapas de fase en lugar de algoritmos duales con una relación de frecuencias f_2/f_1 muy grande que amplifique el ruido en el mapa de fase con $f = 1$, especialmente en aplicaciones en las que el ruido es severo. Por tal motivo, Hyun y Zhang publicaron en 2016 un trabajo en el que proponen una estrategia para reducir el valor de la relación f_2/f_1 , suprimiendo la necesidad de usar el mapa de fase $f_1 = 1$ y en su lugar utilizar en el primer mapa de fase valores de f entre 2 y 4, lo que reduce significativamente la relación f_2/f_1 (Hyun and Zhang, 2016). El principal aporte de este trabajo es la metodología para desenvolver el mapa inicial $\varphi(1)$, ya que en un patrón de frangas con $f \neq 1$ la fase discontinua φ difiere de la fase continua absoluta Φ , y se requiere siempre partir de una fase continua absoluta Φ para iniciar el desenvolvimiento de los demás mapas de fase, en cualquier algoritmo temporal.

La metodología se basa en calcular la fase continua absoluta Φ_2 del mapa de fase con mayor número de frangas f_2 usando un procedimiento de calibración previo, y un modelo matemático que permite conocer con precision que porción de la fase absoluta Φ_1 proyectada es vista por la cáma-

ra, incluyendo unas restricciones geométricas en el volumen experimental de R3DD que permiten conocer la fase absoluta Φ_1 en la distancia más cerca de observación (Z_{min}) y en la más lejana (Z_{max}) (Hyun and Zhang, 2016).

El algoritmo de Hyun y Zhang no ha recibido mucha aceptación por que incluye un complejo procedimiento de calibración del vídeo proyector, además de la calibración propia de la TPF; por otro lado, parece no ser necesario el uso de dos mapas de fase, puesto que una calibración tan compleja y las restricciones geométricas del montaje experimental, proporcionan demasiada información que se puede usar para desenvolver la fase del mapa de fase final φ_2 directamente sin desenvolver antes un mapa de fase inicial φ_1 (Du et al., 2017). Sin embargo, la idea de las restricciones geométricas (Z_{min} y Z_{max}) resulta muy útil para la R3DD de un objeto como el cráneo humano, en el que las variaciones entre un cráneo y otro cráneo diferente están en el orden de milímetros (largo promedio del cráneo humano desde el punto nasoespinal hasta el punto opistocraneano: 176 mm en hombres, y 171 mm en mujeres), y es suficiente con calibrar un volumen estándar puesto que los cráneos siempre presentan una forma similar White et al. (2011).

Como parte de la metodología para la R3DD del cráneo humano, se propone en este trabajo de investigación un algoritmo temporal de desenvolvimiento de fase inspirado en el trabajo de Hyun y Zhang (Hyun and Zhang, 2016), en el que a partir de restricciones geométricas en el montaje experimental se desenvuelve un mapa inicial de fase ($\varphi(1)$) proyectado sobre el cráneo humano, y con la información de esta fase continua absoluta Φ_1 usando las ecuaciones 44 y 46

se desenvuelve el segundo mapa de fase φ_2 . En la Figura 64 se muestra un esquema que describe gráficamente el montaje experimental y sus restricciones geométricas: Z_{min} y Z_{max} .

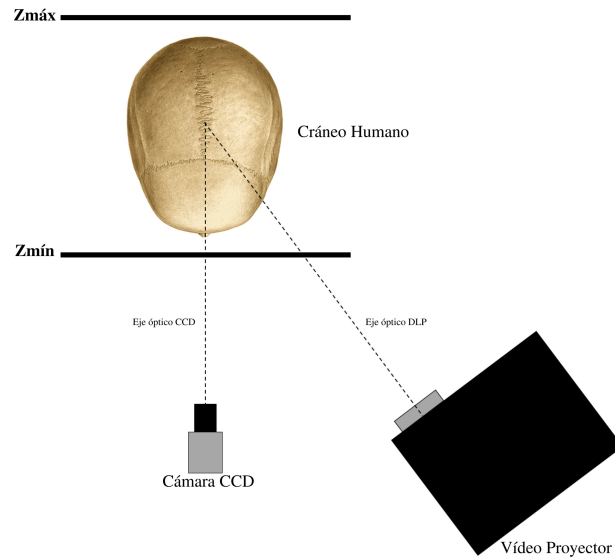


Figura 64. Montaje experimental, con restricciones geométricas, para la R3DD del cráneo humano.

La idea de las restricciones geométricas propuesta por Hyun y Zhang consiste en ubicar un plano en la parte del volumen de calibración más cercana a la cámara, la denominada posición Z_{min} , y capturar las imágenes de un patrón de franjas con f_1 bajo pero $f > 1$, proyectadas sobre el plano en esta posición. Luego, repetir el procedimiento pero con el plano ubicado en la parte del volumen de calibración más apartada de la cámara, la posición Z_{max} . De este modo se obtiene la fase continua absoluta Φ_1 para una superficie plana ubicada en los extremos del volumen de calibración. Teniendo en cuenta que la fase continua absoluta Φ_1 de cualquier objeto ubicado en el volumen entre Z_{min} y Z_{max} no va a traspasar los límites de las fases continuas absolutas $\Phi(Z_{min})$ y

$\Phi(Z_{max})$ de la superficie plana, siempre que los patrones de franjas usados para calcular las fases absolutas Φ tengan el mismo número de franjas f , esta información se usa para desenvolver la fase discontinua inicial φ_1 de un patrón de franjas proyectado sobre un cráneo humano ubicado en este volumen. De la misma forma que en un algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal, con esta fase continua absoluta Φ_1 se puede desenvolver el mapa de fase discontinua φ_2 que cuenta con un mayor número de franjas f_2 usando la ecuación 46, en donde se evidencia que si $f > 1$, la relación f_2/f_1 siempre sera menor que $f_2/1$.

Para ilustrar lo descrito en el párrafo anterior, se muestra en la Figura 65 (a – b) la fase continua absoluta Φ de un objeto plano ubicado en el volumen de calibración entre Z_{min} y Z_{max} , junto a sus respectivas secciones transversales; el patrón de franjas utilizado para el calculo de estas fases es de $f_1 = 1$, en el que $\varphi_1 = \Phi_1$. En la Figura 65 (c – d) se muestra lo mismo pero con un cráneo humano. Una vez se tiene la fase continua absoluta Φ_1 del patrón de franjas con $f_1 = 1$, que siempre es igual a la fase discontinua φ_1 , este valor se utiliza para desenvolver la fase discontinua del mapa de fase final con mayor número de franjas φ_2 . La fase continua absoluta Φ_2 se calcula usando la ecuación 46.

Este es en esencia el algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal, en el que se utiliza la información de fase de dos mapas extremos; lo que preocupa en los algoritmos de este tipo, es la relación f_2/f_1 de la ecuación 46, puesto que si el valor es muy grande el ruido en el mapa de fase continua absoluta Φ_1 se amplifica tanto que se puede interpretar como una discontinuidad, lo

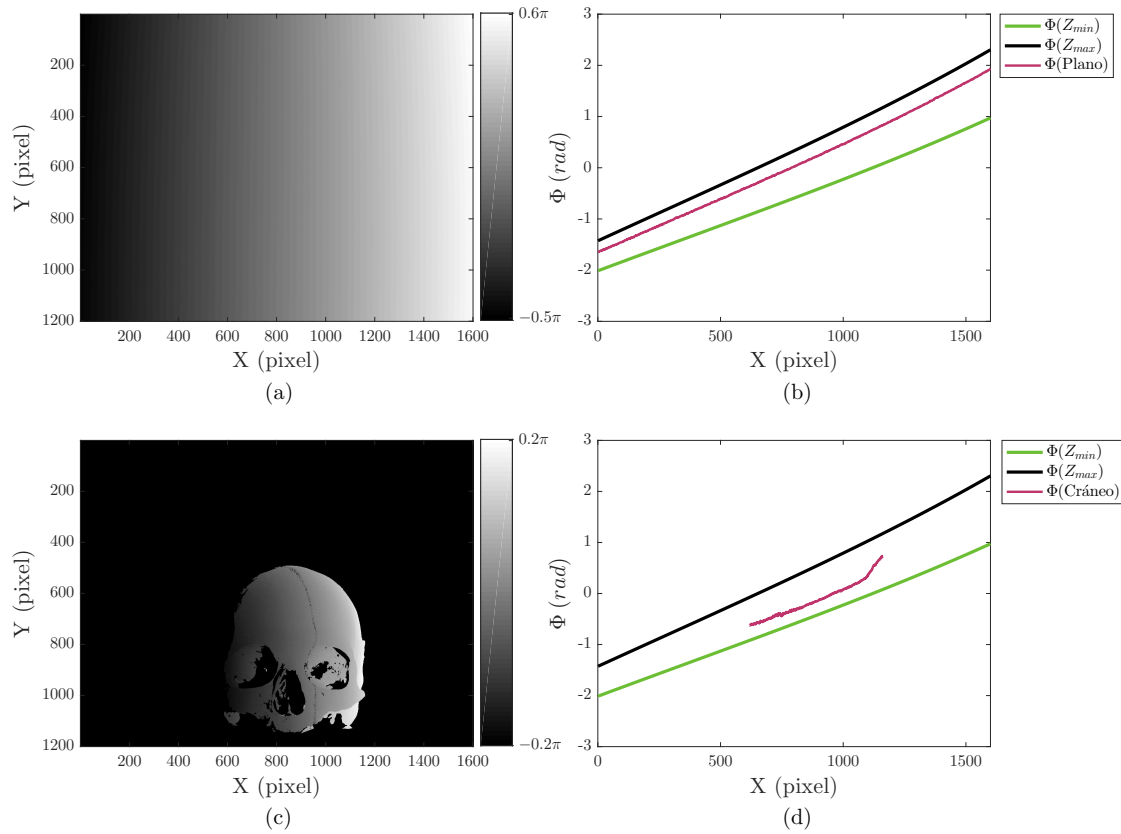


Figura 65. (a) Fase continua absoluta Φ_1 de un objeto plano ubicado entre Z_{min} y Z_{max} , y (b) sus respectivas secciones transversales; (c) fase continua absoluta Φ_1 de un cráneo humano ubicado entre Z_{min} y Z_{max} , y (d) su respectivas secciones transversales.

que alteraría el desenvolvimiento del segundo mapa de fase φ_2 .

Por otro lado, cuando se usa un patrón de franjas diferente de $f = 1$, la fase discontinua φ_1 es diferente de la fase continua Φ_1 , y se requiere entonces de un procedimiento de desenvolvimiento de fase. A modo de ejemplo, se muestra en la Figura 66 (a) la sección transversal de la fase $\varphi(1)$ de un patrón de franjas con $f_1 = 2$ proyectado sobre el mismo objeto plano en la misma posición que en la Figura 65. Como se conocen las fases continuas absolutas $\Phi(Z_{min})$ y $\Phi(Z_{max})$ de las

superficies planas en Z_{min} y Z_{max} respectivamente, es posible desenvolver la fase φ_1 de cualquier objeto ubicado en este mismo volumen usando la ecuación 47,

$$\Phi_{obj} = \varphi_{obj} + 2\pi \left[\frac{\Phi(Z_{max}) - \varphi_{obj}}{2\pi} \right], \quad (47)$$

en donde [...] representa redondeo al entero más cercano, igual que en los otros algoritmo temporales, y la operación dentro de los corchetes determina los 2π ordenes que se deben sumar o restar a la fase discontinua φ_{obj} para ser desenvuelta. En la Figura 66 (b) se muestra la sección transversal del resultado de la fase continua absoluta ($f_1 = 2$) Φ_1 después de usar la ecuación 47.

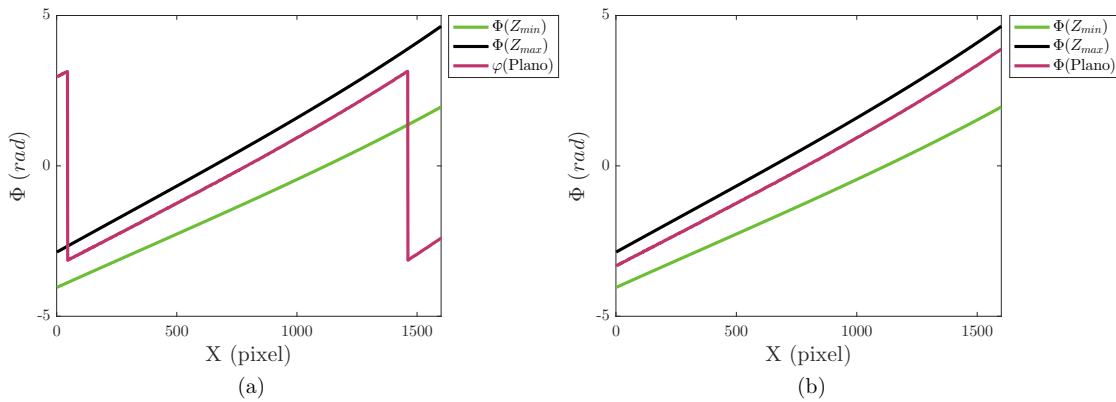


Figura 66. (a) Secciones transversales de: la fase discontinua φ_1 de un objeto plano, $\Phi(Z_{max})$, y $\Phi(Z_{min})$, (b) Secciones transversales de: la fase continua absoluta Φ_1 de un objeto plano, $\Phi(Z_{min})$ y $\Phi(Z_{max})$.

Para desenvolver un mapa de fase discontinua φ_2 con $f_2 = 128$, usando el mapa de fase continua absoluta Φ_1 de la Figura 66 con $f_1 = 2$, la relación $f_2/f_1 = 64$ amplía la onda de ruido en la fase Φ_1 de $0,0031 \text{ rad}$ a $0,2005 \text{ rad}$, 48,74% menos de amplitud de ruido en la fase continua absoluta Φ_1 que cuando se usa un mapa de fase con $f = 1$. En la Tabla 6 se resumen los principales

valores experimentales de la onda de ruido en la fase Φ_1 , después de multiplicarse por la relación f_2/f_1 , modificando el número de franjas f_1 en el patrón de franjas inicial, desde $f_1 = 1$ hasta $f_1 = 6$.

Tabla 6

Valores experimentales de la onda de ruido en $\frac{f_2}{f_1}\Phi_1$, modificando f_1 para el mapa de fase inicial.

$f_1 - f_2$	$\frac{f_2}{f_1}$	Onda de Ruido en $\frac{f_2}{f_1}\Phi_1$ (rad)			
		Val. Mínimo	Val. Máximo	Val. Eficaz RMS	Desviación std.
1 - 128	128	-2,891	2,7865	0,3912	0,3911
2 - 128	64	-1,3213	1,3365	0,2005	0,2005
3 - 128	42,66	-1,0105	0,8416	0,1328	0,1328
4 - 128	32	-0,7352	0,7591	0,0980	0,0981
5 - 128	25,6	-0,6002	0,5645	0,0816	0,0816
6 - 128	21,33	-0,5894	0,5555	0,0704	0,0704

Con los resultados de la Tabla 6 se demuestra que es posible desenvolver un mapa de fase utilizando un algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal, sin usar el mapa de fase con $f_1 = 1$ para evitar una posible afectación del ruido, el cual se logra reducir aproximadamente 82 % desarrollando un mapa de fase φ_2 con $f_2 = 128$ en un objeto plano, utilizando un mapa de fase φ_1 con $f_1 = 6$. La estrategia de las restricciones geométricas, Z_{min} y Z_{max} , es un procedimiento sencillo que permite desenvolver con facilidad mapas de fase con pocas franjas diferentes de $f = 1$.

Se concluye entonces que el *algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal con restricciones geométricas* adaptado en este trabajo, especialmente para la R3DD del cráneo humano, cumple con el objetivo de evitar la generación y propagación de errores en la fase debido a discontinuidades abruptas en la topografía superficial. Del mismo modo se evita la propagación de ruido

debido al valor de la relación f_2/f_1 al adaptar f_1 y reducir este factor amplificador. Otro objetivo que se cumple es el de reducir el número de imágenes, teniendo en cuenta que se requieren 9 imágenes para calcular la fase discontinua φ de cada mapa temporal t usando el algoritmo corrimiento de fase de Peter de Groot, se necesitan en total 1152 imágenes de franjas para desenvolver la fase discontinua φ de un patrón de franjas con $f = 128$ usando un algoritmo temporal lineal, y solo 18 imágenes usando el algoritmo temporal propuesto.

En la Figura 67(a) se muestra el resultado de desenvolver el mapa de fase discontinua φ_2 con $f_2 = 128$, usando un mapa de fase inicial Φ_1 con $f_1 = 1$ y el *algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal*; mientras que en la Figura 67(b) se muestra el resultado de desenvolver el mismo mapa de fase discontinua φ_2 , pero esta vez usando un mapa de fase discontinua inicial φ_1 con $f_1 = 6$ desenvuelto usando el *algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal con restricciones geométricas*. A diferencia de la fase continua absoluta Φ en un cráneo humano calculada con un algoritmo espacial de desenvolvimiento de fase que se muestra en la Figura 67, la fase continua absoluta Φ_2 de la Figura 67(b) calculada con el algoritmo temporal propuesto en este trabajo, no presenta errores debidos a las discontinuidades superficiales, ni valores erróneos de fase ocasionados por la amplificación del ruido a través del factor amplificador k como los que se observan en la Figura 67.

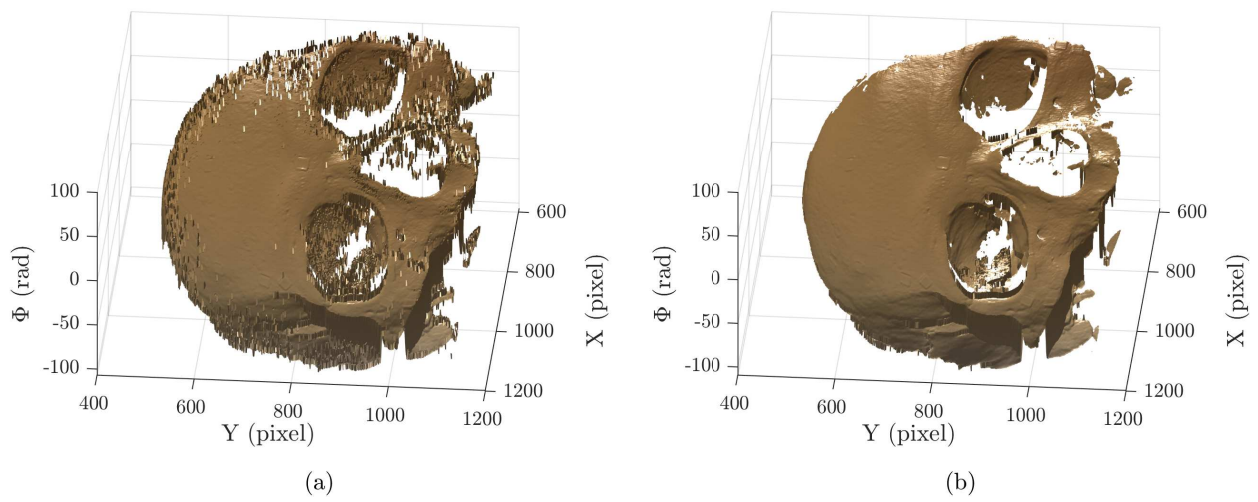


Figura 67. Vista 3D del mapa de fase continua Φ_2 del frontal de un cráneo humano desenvuelto utilizando: (a) el algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal con $f_1 = 1$ y $f_2 = 128$, y (b) el algoritmo dual de desenvolvimiento de fase con restricciones geométricas con $f_1 = 6$ y $f_2 = 128$.

3. Calibración de un sistema de R3DD usando la TPF

Como se mencionó anteriormente, se requiere de un procedimiento de calibración para convertir la fase absoluta del objeto en unidades métricas, *radianes* $\rightarrow$ *milímetros*. El procedimiento de calibración propuesto para este trabajo parte de la calibración de la cámara, y en una etapa posterior se calibra el conjunto cámara-proyector. Para calibrar la cámara se recurre a la técnica de calibración de Zhang (Zhang, 2000), detalles más precisos de este procedimiento se presentan en el apéndice ?? que incluye resultados experimentales de este trabajo de investigación.

Con la cámara calibrada, se adquieren imágenes del plano de calibración en diferentes posiciones del eje Z de la cámara, mientras el proyector lo ilumina con luz blanca y un patrón de franjas. Mediante un modelo de ajuste polinomial se relacionan las coordenadas en unidades métricas de longitud (X_{cam} , Y_{cam} , Z_{cam}) y los valores de fase continua absoluta Φ en radianes, para cada pixel del campo de observación de la cámara. Esta estrategia de calibración considera las distorsiones geométricas de la cámara y proyector sin requerir de platinas de traslación de alta precisión.

3.1. Calibración de la cámara

La calibración de la cámara es un procedimiento mediante el cual se estiman sus parámetros intrínsecos y extrínsecos. Los parámetros intrínsecos describen características internas de la cámara como la distancia focal, coeficientes de distorsión y el centro de la imagen. Por otra parte, los parámetros extrínsecos describen la posición y orientación de un objeto (o escena) visto por la cámara en el sistema coordenado del mundo. Para este trabajo de investigación, como ocurre en

aplicaciones de metrología óptica y visión por computador 3D, la calibración de la cámara es un procedimiento fundamental del que depende la precisión de los resultados finales.

En este trabajo la cámara se calibra según la técnica de Zhang (Zhang, 2000) y se utiliza el algoritmo desarrollado por Bouguet (Bouguet, 2004), en entorno MatLab[®], para ejecutar el procedimiento. Sin embargo, dado a que el tema no se centra en el procedimiento de calibración de la cámara y no se hace algún aporte significativo al mismo, la descripción precisa de esta parte del trabajo se documenta en el apéndice ??, incluyendo la calibración experimental de la cámara CCD para los resultados finales.

Una vez calibrada la cámara, se conocen los elementos que conforman las matrices K (ecuación 267) y $R_i[I|t_i]$ (ecuaciones de la 268 a la 276), es posible expresar las coordenadas (en unidades métricas de longitud) de un punto Ψ_i en el sistema coordenado de la cámara $(X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})^T$ si se conocen las coordenadas (en las mismas unidades) de este mismo punto en el espacio 3D respecto a el sistema coordenado del mundo $(X_W, Y_W, Z_W)^T$.

A modo de ejemplo, para la imagen 1 de calibración que se muestra en la Figura 114 se elige el punto Ψ_1 en la esquina superior izquierda como el origen del sistema coordenado del mundo para el plano de calibración en esa posición (imagen), por lo que sus coordenadas en milímetros son $\Psi_W^1 = [0 \ 0 \ 0]^T$. Usando la ecuación 185, y los respectivos parámetros extrínsecos para esta imagen $R_1[I|t_1]$ (ecuación 268), es posible calcular las coordenadas en milímetros del mismo punto

en el sistema coordenado de la cámara, como se muestra en la ecuación 48,

$$\Psi_{cam}^1 = \begin{bmatrix} -0.0756 & 0.9966 & -0.0330 \\ 0.9940 & 0.0780 & 0.0765 \\ 0.0789 & -0.0270 & -0.9965 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -162.4716 \\ -128.8720 \\ 629.3788 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -162.4716 \\ -128.8720 \\ 629.3788 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Con las coordenadas en milímetros que se obtienen en la ecuación 48 para el punto Ψ_1 , se grafica este punto respecto al sistema coordenado de la cámara, como se muestra en la Figura 68.

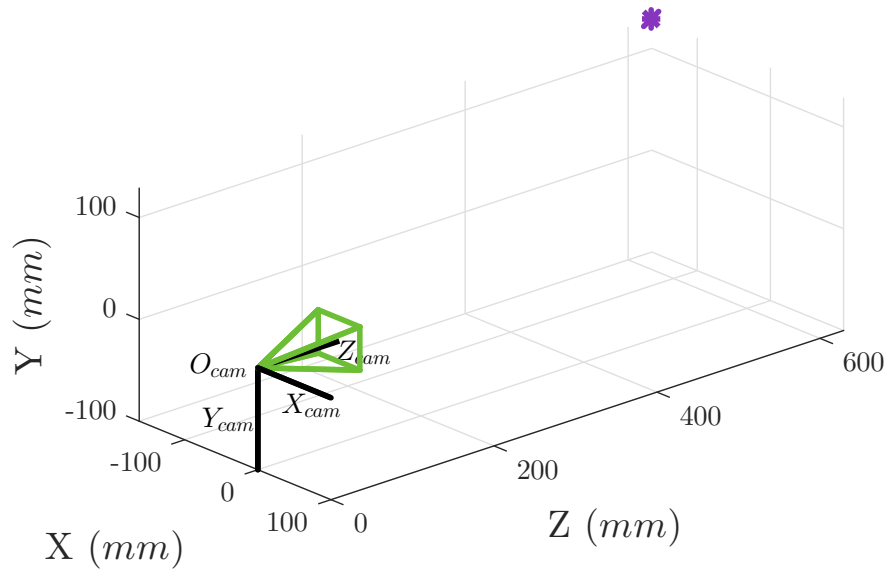


Figura 68. Punto Ψ_1 de la imagen 1 de calibración, en coordenadas métricas de longitud, respecto al sistema coordenado de la cámara.

Al repetir el procedimiento de la ecuación 48 para los restantes 203 puntos de control Ψ_i de la imagen 1 de calibración, que corresponden a las esquinas de los cuadros en el tablero de

calibración, de los cuales se conocen con precisión sus coordenadas 3D en unidades métricas de longitud (el tamaño de cada cuadrado es de $20 \times 20 \text{ mm}$) respecto al sistema coordenado del mundo (Figura 113), se puede visualizar el plano de calibración en coordenadas 3D respecto al sistema coordenado de la cámara, como se muestra en la Figura 69.

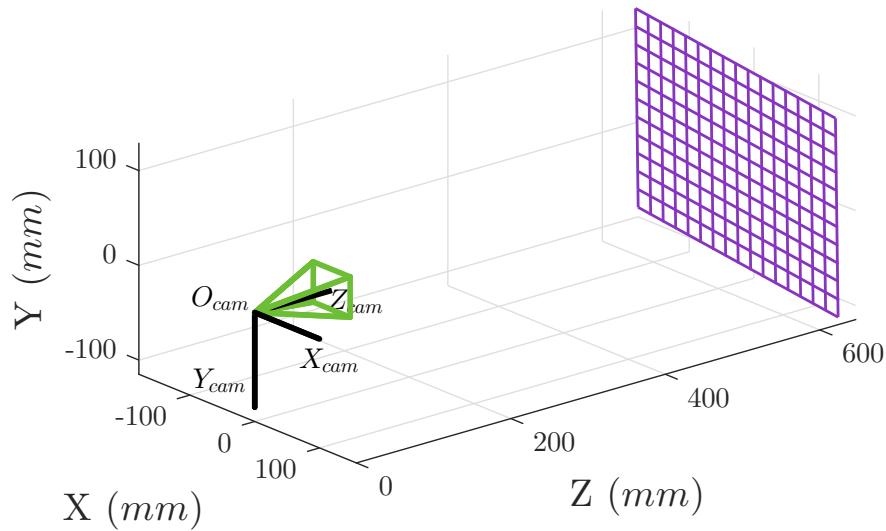


Figura 69. Cuadrícula que forman los puntos Ψ_i ($i = 1, 2, 3 \dots 204$) de la imagen 1 de calibración, en coordenadas métricas de longitud, respecto al sistema coordenado de la cámara.

En la Figura 70 se muestra el resultado de obtener las coordenadas 3D en unidades métricas de longitud, para las 9 imágenes de calibración, respecto al sistema coordenado de la cámara.

De esta forma se demuestra que al calibrar la cámara, y conociendo las coordenadas (en unidades métricas de longitud) de un punto Ψ_W en el espacio 3D respecto al sistema coordenado del mundo $(X_W, Y_W, Z_W)^T$, se pueden calcular las coordenadas $(X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})^T$ de ese mismo punto respecto al sistema coordenado de la cámara en las mismas unidades.

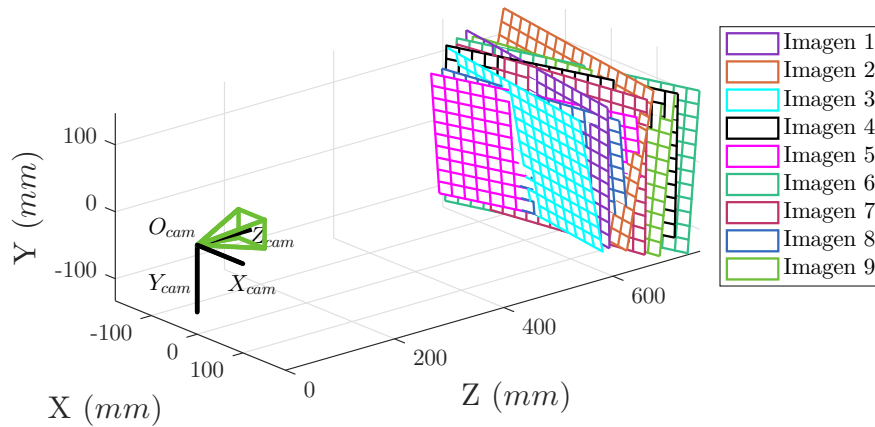


Figura 70. Cuadrículas formadas por los puntos Ψ_i de las 9 imágenes de calibración, en coordenadas métricas de longitud, respecto al sistema coordenado de la cámara.

3.2. Calibración cámara-proyector

La calibración de un sistema de R3DD por proyección de franjas consiste en determinar los parámetros necesarios para convertir la fase de la imagen del sistema de franjas (deformadas por la superficie del objeto), en coordenadas $(X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})^T$ en unidades métricas de longitud que describen una superficie 3D. Este procedimiento se suele denominar *mapeo fase vs altura*, y se basa en parámetros calculados en función de los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara CCD, algunas técnicas incluyen también estos mismo parámetros del vídeo proyector.

En este trabajo se propone una estrategia para calibrar un sistema de proyección de franjas que considera implícitamente las distorsiones de las lentes y emplea un modelo de ajuste polinomial para la relación fase-altura en cada pixel del campo de observación, sin necesidad de platinas de traslación de alta precisión. En el procedimiento se utiliza el plano de calibración con el patrón ajedrezado (cuadros blancos y negros), y la misma asunción de Zhang (Zhang, 2000) respecto al

sistema coordenado del mundo con origen en la esquina superior izquierda del plano, como se muestra en la Figura 113. De este modo, conociendo las dimensiones de los cuadros en el plano de calibración ($20 \times 20 \text{ mm}$), las coordenadas 3D $(X_W, Y_W, Z_W)^T$ en unidades métricas de longitud, respecto al sistema coordenado del mundo, de todas las esquinas en el plano de calibración (que corresponden a los puntos Ψ_i en el espacio 3D) son conocidas y tienen $Z = 0 \text{ mm}$.

Con una imagen del plano de calibración, como se muestra en la Figura 71, se calculan por tratamiento digital las coordenadas $(x_i, y_i)^T$ de los puntos ψ_i que corresponden a las esquinas de los cuadros en la imagen, y con la cámara calibrada previamente se transforman estas coordenadas en el plano imagen normalizado (usando los parámetros de la matriz K) para expresarlas en el sistema coordenado de la cámara. Luego, usando la ecuación 206, se calcula la matriz de homografía H entre las coordenadas de los puntos ψ_{cam} en el plano imagen normalizado y los puntos Ψ_W en el plano de calibración.

Como se muestra en las ecuaciones 209, 210, 235, y 236, con las matrices: H y K , es posible calcular los parámetros extrínsecos de la cámara para la imagen correspondiente (matriz R y vector t). Una vez conocidos los parámetros extrínsecos, usando la ecuación 185, se calculan las coordenadas 3D en unidades métricas de longitud para cada uno de los píxeles en el campo de observación, respecto al sistema coordenado de la cámara $(X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})^T$. Junto con la imagen de cuadros se adquieren imágenes de franjas, como se ilustra en la Figura 72, teniendo la precaución de que el plano no cambie de posición en ningún momento durante la toma de imágenes, y de esta forma se

relaciona cada uno de los pixeles en el campo de observación con un valor de fase continua absoluta Φ y con sus coordenadas 3D en el sistema coordenado de la cámara $\Psi_i = (X_{cam}^i, Y_{cam}^i, Z_{cam}^i, \Phi^i)$.

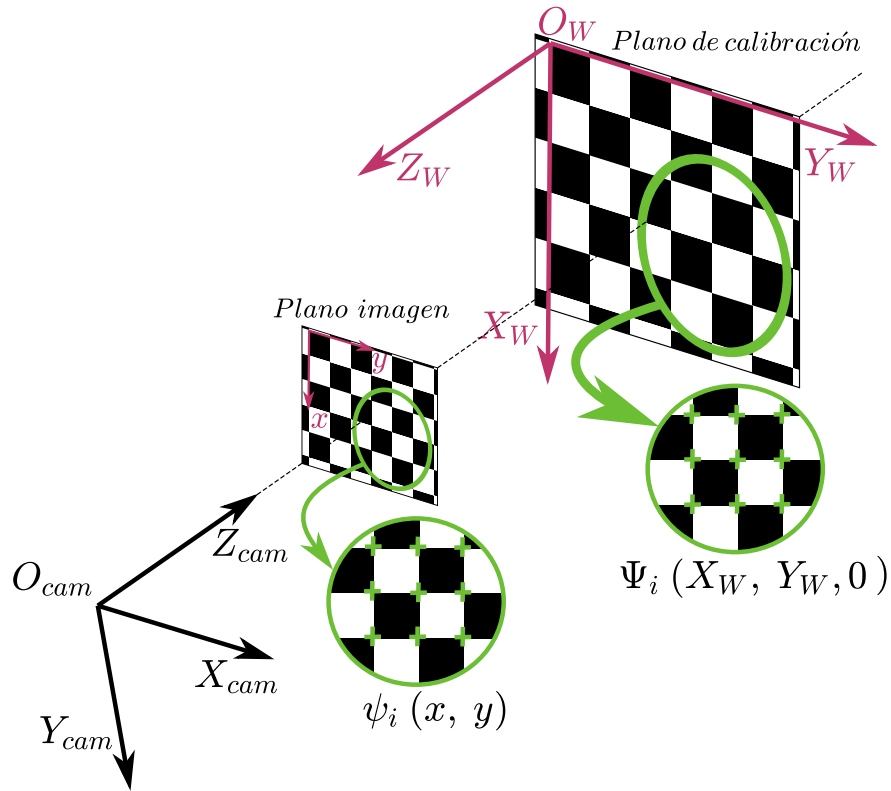


Figura 71. Imagen del plano de calibración, con los puntos Ψ_i con coordenadas 3D en *mm* conocidas respecto al sistema coordenado del mundo, y sus correspondientes puntos ψ_i con coordenadas 2D en pixeles conocidas respecto al sistema coordenado del plano imagen.

Para la estrategia propuesta se plantea: repetir el procedimiento que se ha descrito desplazando el plano de calibración, desde Z_{min} hasta Z_{max} , en el *eje Z* del sistema coordenado de la cámara, y así relacionar la variación de Z_{cam} en unidades métricas de longitud con un valor de fase continua absoluta Φ . De esta forma se realiza el mapeo *mapeo fase vs altura*, desplazando el plano de calibración a lo largo de 200 *mm* aproximadamente para garantizar que un cráneo humano

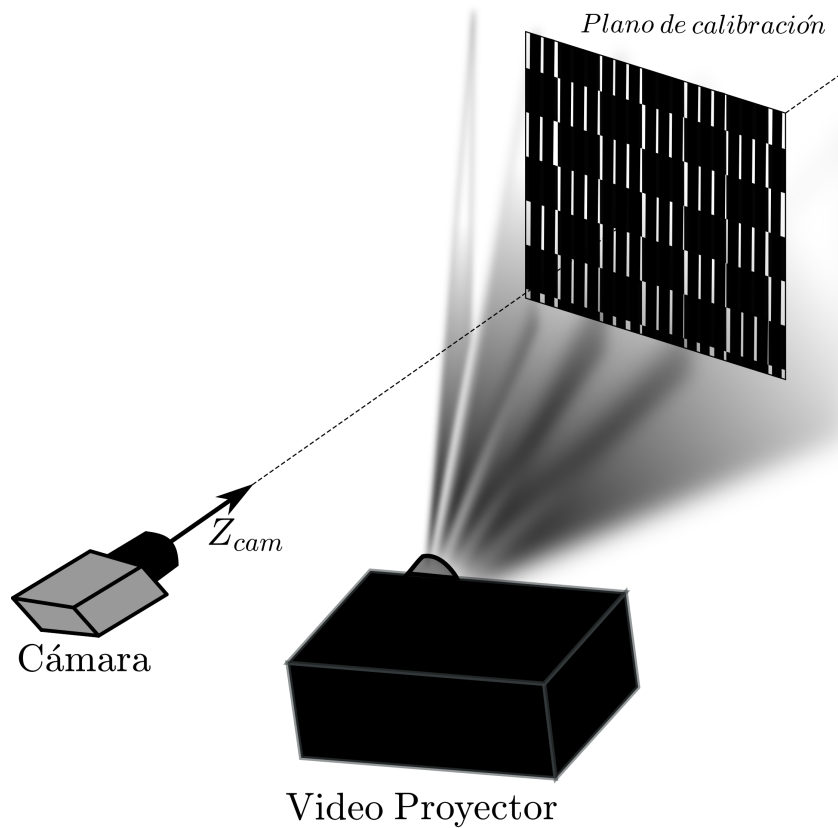


Figura 72. Ilustración del montaje experimental y el plano de calibración con franjas.

quede contenido en el volumen de calibración (largo promedio del cráneo humano desde el punto nasoespinal hasta el punto opistocraneano: 176 mm en hombres, y 171 mm en mujeres (White et al., 2011)), tomando imágenes cada 10 mm aproximadamente.

Debido a características de las lentes, en el vídeo proyector y la cámara, como la no telecentricidad sumado a la geometría del montaje experimental, la correspondencia entre las variaciones en Z_{cam} y los valores de fase continua absoluta Φ se alejan de una relación lineal, por lo que se requiere un ajuste cuadrático para encontrar el polinomio que mejor describa la distribución de

los puntos (Z, Φ) a lo largo del eje Z_{cam} . En la Figura 73 se describe gráficamente la estrategia de calibración.

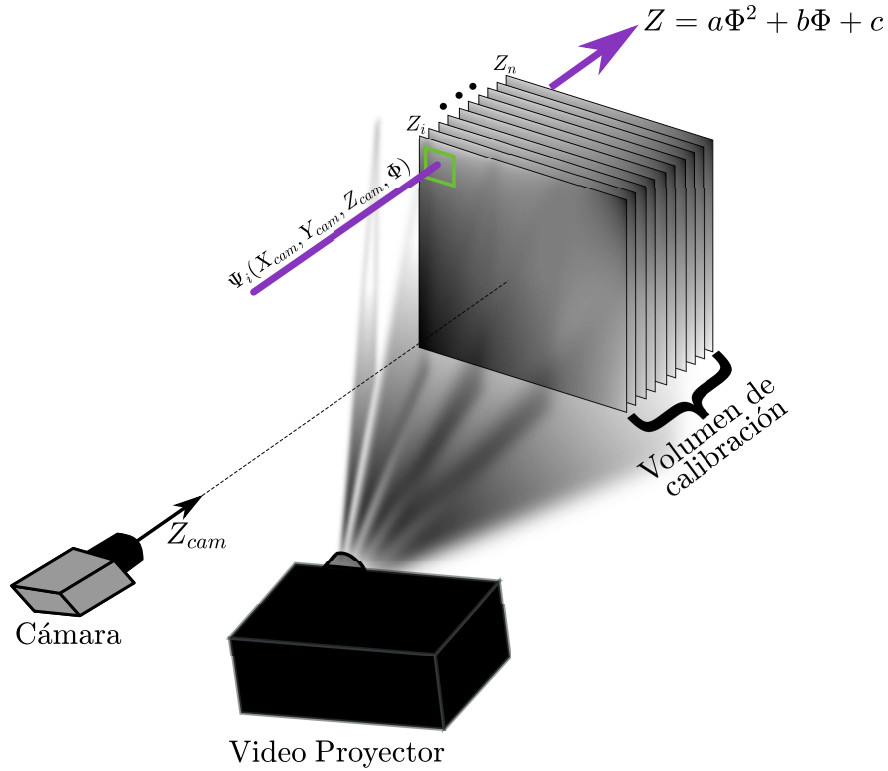


Figura 73. Descripción gráfica de la estrategia de calibración para el mapeo fase vs. altura.

3.3. Calibración experimental cámara - proyector

Con el mismo montaje experimental y la cámara calibrada como se ha descrito en el apéndice 3, se procede con la calibración cámara - proyector. Una vez tomadas las imágenes del plano de calibración trasladado en el eje Z_{cam} , el procedimiento inicia con el cálculo de los parámetros extrínsecos para cada una de las posiciones en las que se ubicó el plano de calibración para la toma de imágenes, para lo que se requiere encontrar las coordenadas 2D en píxeles de cada uno de los puntos $\psi_i = (x_i, y_i)^T$ que corresponden a las esquinas de los cuadros en el plano de calibración.

Este procedimiento se describe en detalle en el apéndice 3, y a modo de ejemplo se muestra el resultado con la imagen de calibración 1 en la Figura 74.

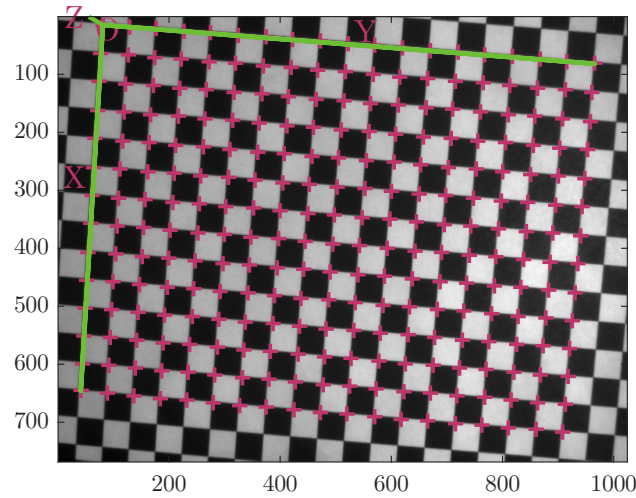


Figura 74. Calculo de las esquinas en la imagen de calibración 1, que corresponden a los puntos ψ_i en coordenadas $(x_i, y_i)^T$ en pixeles en el plano imagen.

Las coordenadas $(x_i, y_i)^T$ de los puntos ψ_i en el plano imagen, se expresan en el sistema coordenado de la cámara transformándolas en coordenadas en el plano imagen normalizado, usando los parámetros intrínsecos (ecuación 267), de acuerdo con la ecuación 49.

$$\begin{bmatrix} x_{cam}^i \\ y_{cam}^i \\ 1 \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} x_{cam}^i \\ y_{cam}^i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0006 & 0 & -0.2883 \\ 0 & 0.0006 & -0.2215 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Las coordenadas resultantes se muestran gráficamente en 2D en la Figura 75 (b), y en 3D en la Figura 76.

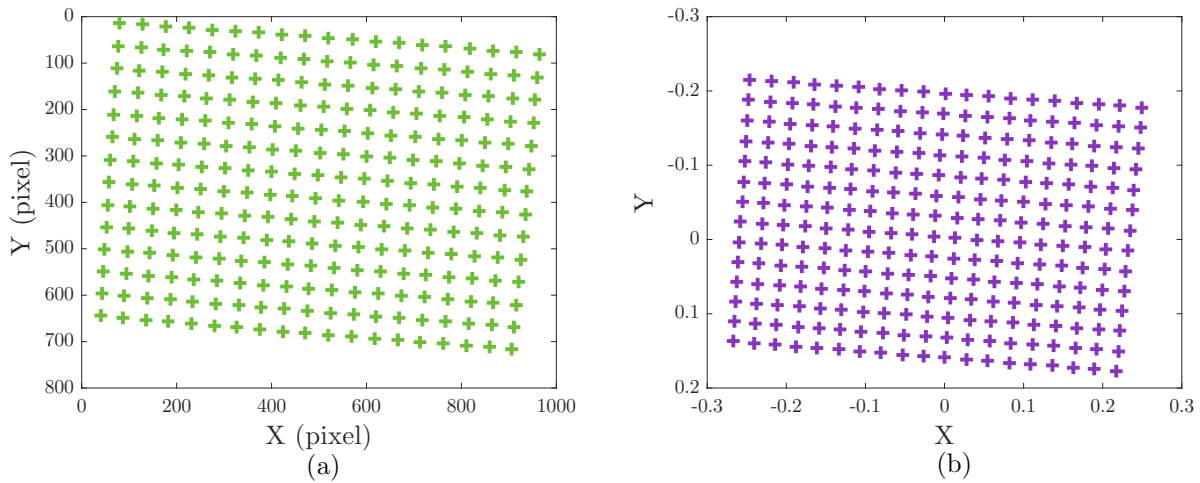


Figura 75. (a) Puntos ψ_i en el sistema coordenado del plano imagen, y (b) puntos ψ_i en el plano imagen normalizado respecto al sistema coordenado de la cámara.

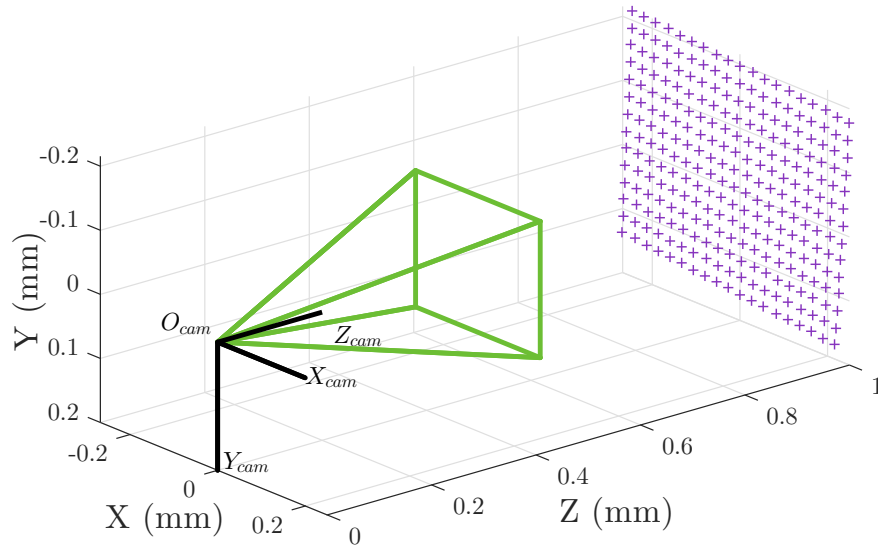


Figura 76. Puntos ψ_i en el plano imagen normalizado respecto al sistema coordenado de la cámara.

Por otra parte, las coordenadas 3D de las esquinas en el plano de calibración respecto al sistema coordenado del mundo con origen en la esquina superior izquierda, se conocen en unidades métricas de longitud (milímetros), y corresponden a los puntos $\Psi_i = (X_W, Y_W, 0)^T$ que se muestran en la Figura 77 (a). Al centrar el origen del sistema coordenado del mundo para los puntos Ψ_i , como con los puntos ψ_i en la imagen (ver Figura 75 (b)), se obtienen las coordenadas que se muestran en la Figura 77 (b).

Con las coordenadas de los puntos ψ_i y Ψ_i , y usando la ecuación 206 se calcula la matriz

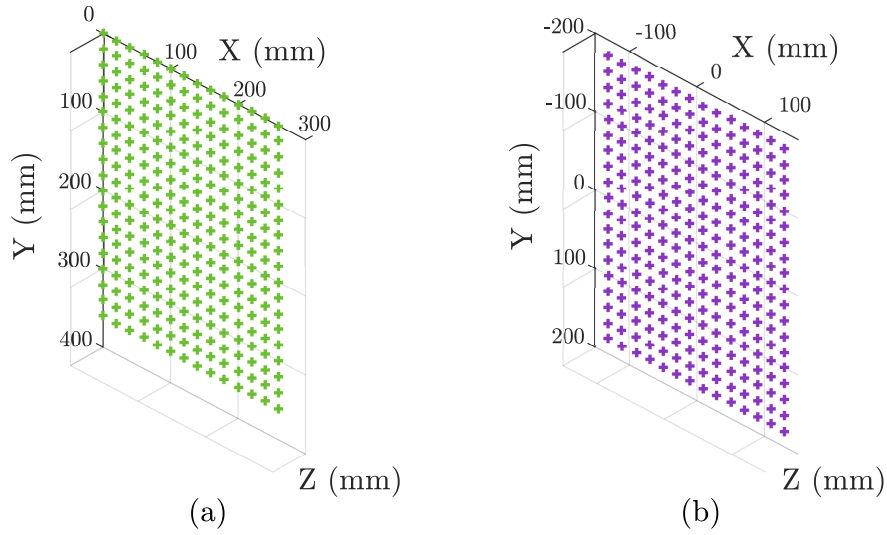


Figura 77. Coordenadas de los puntos Ψ_i en el plano de calibración, respecto al sistema coordinado del mundo: (a) con origen en la esquina superior izquierda, (b) con origen trasladado al centro de la distribución de puntos.

de homografía correspondiente, la cual se expresa en la ecuación 50,

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0.0775 & 0.9968 & -9.3405 \\ 0.9950 & 0.0789 & -13.1103 \\ 0.0613 & -0.0166 & 732.1676 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Una vez calculada la matriz de homografía H_1 para la imagen de calibración 1, se deducen sus respectivos parámetros extrínsecos usando las ecuaciones 209, 210, 235, y 236. El resultado para la matriz de rotación R_1 y el vector de traslación t_1 , se resume en las ecuaciones 51 y 52,

$$R_1 = \begin{bmatrix} -0.0775 & 0.9968 & 0.0214 \\ 0.9950 & 0.0789 & 0.0599 \\ 0.0613 & -0.0166 & -0.9979 \end{bmatrix}, \quad (51)$$

$$t_1 = \begin{bmatrix} -178.6599 \\ -156.6565 \\ 727.1567 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Con los parámetros extrínsecos y usando la ecuación 185 se transforman las coordenadas de los puntos Ψ_i , en unidades métricas de longitud, desde el sistema coordenado del mundo $(X_W, Y_W, Z_W)^T$ al sistema coordenado de la cámara $(X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})^T$, el resultado se muestra gráficamente en la Figura 78.

Con la información de la resolución de la cámara ($1024 \times 768 \text{ pixel}$) se conocen las coordenadas teóricas $(u_i, v_i)^T$ de cada pixel en el plano imagen, y con el procedimiento que se describe en el apéndice 3 se calculan las coordenadas experimentales $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)^T$ considerando las distorsiones geométricas de la cámara. Las coordenadas $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)^T$ se expresan en el sistema coordenado de la cámara, transformándolas en el plano imagen normalizado, usando los parámetros intrínsecos y la ecuación 53,

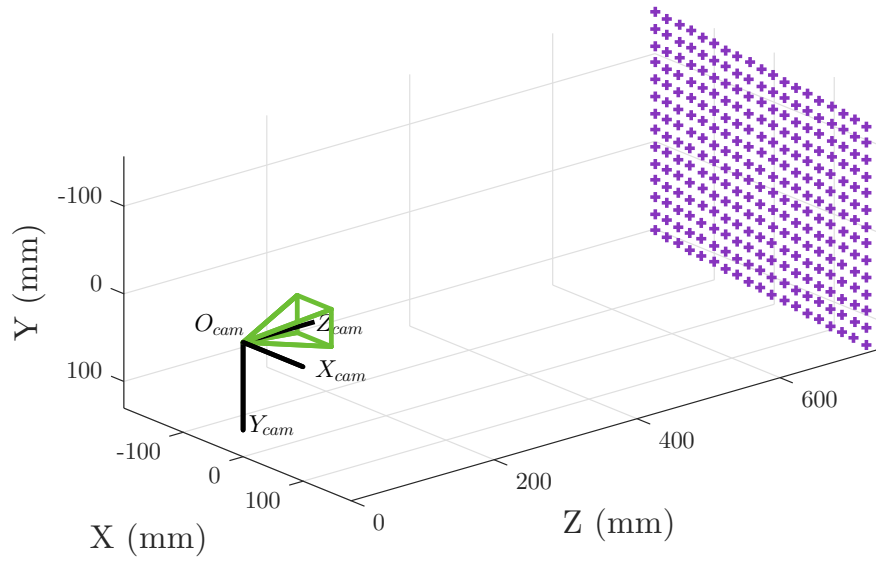


Figura 78. Coordenadas de los puntos Ψ_i , en milímetros, respecto al sistema coordenado de la cámara.

$$\begin{bmatrix} x_{cam}^i \\ y_{cam}^i \\ 1 \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_{cam}^i \\ y_{cam}^i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0006 & 0 & -0.2883 \\ 0 & 0.0006 & -0.2215 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

el resultado para la imagen de calibración 1 se muestra gráficamente en la Figura 79.

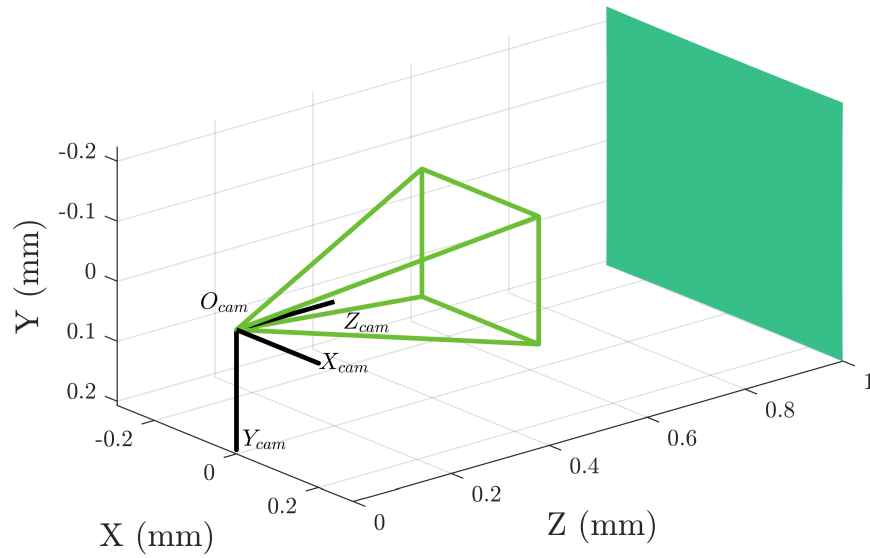


Figura 79. Coordenadas $(x_{cam}^i, y_{cam}^i, 1)^T$ en el plano imagen normalizado de los pixeles de la cámara.

De acuerdo con el modelo pinhole, una imagen se forma en la cámara por los rayos de luz que atraviesan el plano imagen y convergen en el origen de su sistema coordenado. Con las coordenadas $(x_{cam}^i, y_{cam}^i, 1)^T$ de los pixeles en el plano imagen normalizado se pueden deducir los vectores unitarios $\vec{u}_i$, ecuación 54, que describen la trayectoria inversa de los rayos de luz que entran en la cámara,

$$\vec{u}_i = \begin{bmatrix} \frac{x_{cam}^i}{\sqrt{(x_{cam}^i)^2 + (y_{cam}^i)^2 + (1)^2}} \\ \frac{y_{cam}^i}{\sqrt{(x_{cam}^i)^2 + (y_{cam}^i)^2 + (1)^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{(x_{cam}^i)^2 + (y_{cam}^i)^2 + (1)^2}} \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Al escalar los vectores unitarios, $\lambda_i \vec{u}_i$, hasta interceptar el plano de calibración en el sistema coordenado del mundo, se obtienen las coordenadas $(X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})$ de todos los pixeles en el

campo de observación de la cámara para una imagen determinada. Para calcular los factores λ_i que escalan los vectores $\vec{u}_i$ en una imagen, se requieren sus respectivos parámetros extrínsecos como se muestra en las ecuaciones 55 y 56 para la imagen de calibración 1,

$$Rz_1 = R_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow Rz_1 = \begin{bmatrix} -0.0214 \\ 0.0599 \\ -0.9979 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$\lambda_i = \frac{t_1 \cdot Rz_1}{\vec{u}_i \cdot Rz_1} \longrightarrow \lambda_i = \frac{-731.2485}{\vec{u}_i \cdot \begin{bmatrix} -0.0214 \\ 0.0600 \\ -0.9980 \end{bmatrix}}. \quad (56)$$

El resultado de escalar todos los vectores $\vec{u}_i$ de la imagen de calibración 1, de acuerdo a sus respectivos factores λ_i , se muestra gráficamente en la Figura 80, en donde se superponen las coordenadas $(X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})$ de todos los píxeles en el campo de observación de la cámara y de los puntos Ψ_i , en el plano de calibración, con los que se calcularon los parámetros extrínsecos (R_1 y t_1) de la imagen de calibración 1 (Figura 74).

Este procedimiento se repite con imágenes del plano de calibración ubicándose en diferentes posiciones a lo largo del eje Z_{cam} , desde Z_{min} hasta Z_{max} , para calcular los parámetros extrín-

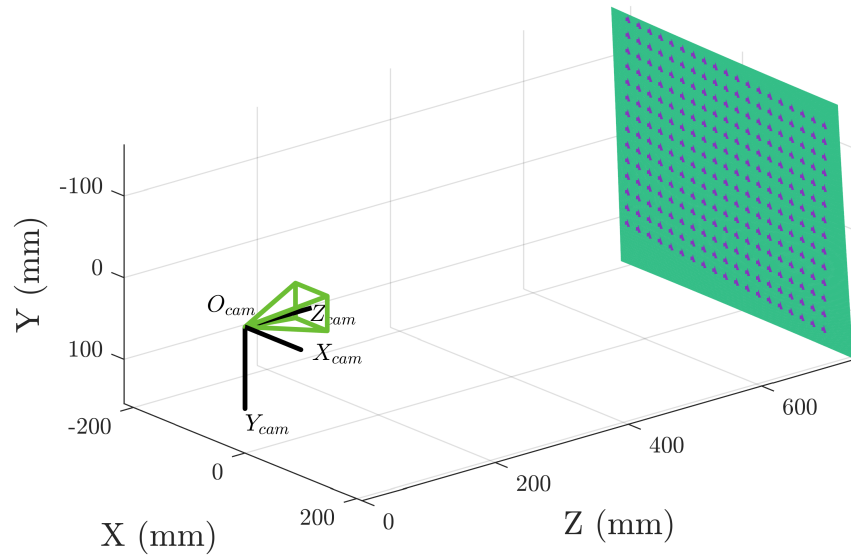


Figura 80. Superposición de las coordenadas $(X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})$ de todos los pixeles en el campo de observación de la cámara y de los puntos Ψ_i , para la imagen de calibración 1.

secos R_i y t_i en cada posición, y así obtener las coordenadas en milímetros $(X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})$ de todos los pixeles en el campo de observación de cada imagen respecto al sistema coordenado de la cámara; a modo de ejemplo se muestra en la Figura 81 la gráfica de los puntos de control Ψ_i que corresponden a las esquinas de los cuadros en el plano de calibración, en el sistema coordenado de la cámara.

Para cada posición en la que se ubica el plano de calibración, además de la imagen de cuadros, se adquieren también imágenes de franjas con $f = 128$ (“alta frecuencia” o $paso = 8$) y una imagen de fondo negro con una línea blanca en el centro de la LCD del proyector x_0 que corresponde a la posición con valor $\Phi = 0$, necesaria para encontrar la fase continua absoluta en la etapa de desenvolvimiento de fase φ . Es en esta etapa en la que se calcula también la fase continua Φ

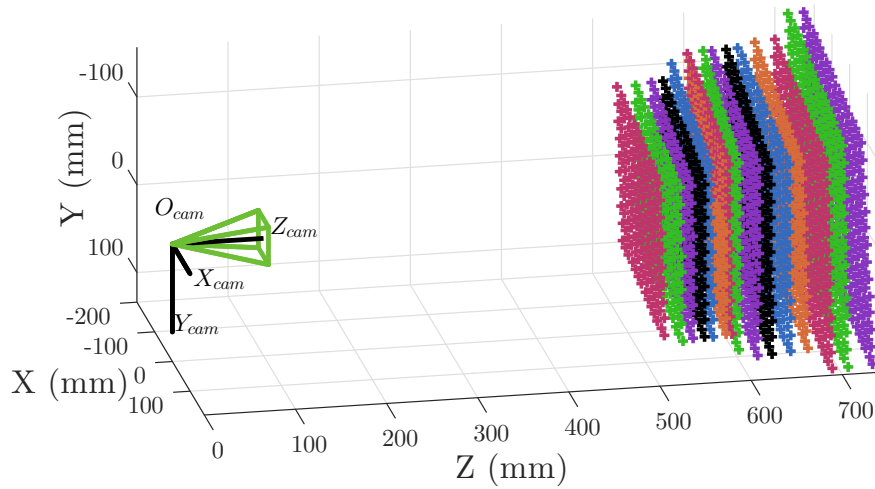


Figura 81. Coordenadas de los puntos Ψ_i , en milímetros, respecto al sistema coordenado de la cámara para diferentes posiciones del plano de calibración.

del plano en las posiciones Z_{min} y Z_{max} , para usarse posteriormente en el desenvolvimiento de fase discontinua φ del cráneo humano ubicado en el volumen de calibración, usando el algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal con restricciones geométricas. Por tratarse de una superficie plana, se puede utilizar el algoritmo de desenvolvimiento de fase espacial sin ningún inconveniente. Las imágenes tomadas de forma secuencial en la primera posición del plano de calibración, osea la posición Z_{min} , se muestran en la Figura 82.

Con las imágenes de franjas se obtiene la fase discontinua φ , y usando la línea blanca (Figura 82 b y c) con un algoritmo de desenvolvimiento de fase espacial, se recupera la fase continua absoluta $\Phi(x, y)_i$, para cada una de las posiciones del plano de referencia en el volumen de calibración. De este modo, se tiene información de las coordenadas en unidades métricas de longitud y de fase en radianes, para todos de los pixeles en el campo de observación de la cámara según

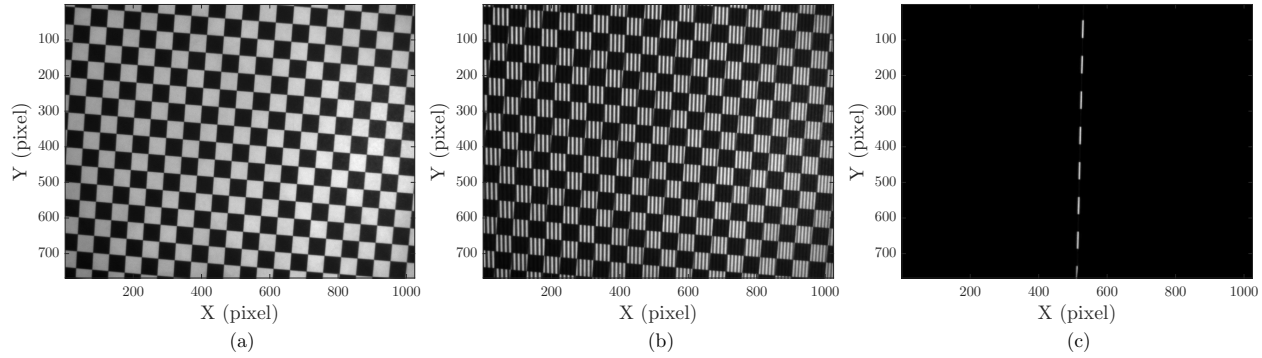


Figura 82. Imagen de calibración en la primera posición con: (a) proyección de luz blanca, (b) proyección de franjas, y (c) proyección de una línea blanca en la coordenada (x_0) de $\Phi = 0$.

las imágenes que se capturan en el desplazamiento del plano de referencia dentro del volumen de calibración (comprendido entre Z_{min} y Z_{max}).

3.3.1. Ajuste polinomial. Una vez calculada la información en coordenadas métricas de longitud y en fase continua absoluta $\Phi(xy)$, para cada uno de los pixeles en el campo de observación de la cámara dentro del volumen de calibración, el ajuste polinomial que mejor se aproxima al conjunto de puntos (Z, Φ) tiene por ecuación: $Z = a\Phi^2 + b\Phi + c$, en donde los coeficientes a , b , y c se calculan resolviendo simultáneamente las ecuaciones de la 57 a la 59,

$$\sum_{i=1}^N Z(x, y)_i = a \sum_{i=1}^N \Phi(x, y)_i^2 + b \sum_{i=1}^N \Phi(x, y)_i + cN, \quad (57)$$

$$\sum_{i=1}^N \Phi(x, y)_i Z(x, y)_i = a \sum_{i=1}^N \Phi(x, y)_i^3 + b \sum_{i=1}^N \Phi(x, y)_i^2 + c \sum_{i=1}^N \Phi(x, y)_i \quad (58)$$

$$\sum_{i=1}^N \Phi(x, y)_i^2 Z(x, y)_i = a \sum_{i=1}^N \Phi(x, y)_i^4 + b \sum_{i=1}^N \Phi(x, y)_i^3 + c \sum_{i=1}^N \Phi(x, y)_i^2, \quad (59)$$

denominadas *ecuaciones normales de la parábola de mínimos cuadrados*, en donde N representa el número de posiciones en las que se ubica el plano de referencia para la toma de imágenes dentro del volumen de calibración. El resultado experimental del cálculo de los coeficientes a , b , y c , se muestra en la Figura 83, los cuales se obtienen al minimizar la función de error ε en a , b , y c como se muestra en la ecuación 60,

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N (a\Phi(x, y)_i^2 + b\Phi(x, y)_i + c - Z(x, y)_i)^2. \quad (60)$$

Para validar los coeficientes a , b y c , se evalúa el polinomio usando los valores de fase continua absoluta Φ en el pixel (512, 384) para 15 posiciones del plano de referencia en el volumen de calibración, y se calcula de esta forma la coordenada Z teórica. El resultado de esta validación se muestra gráficamente en la Figura 84.

El error dado por la diferencia $\Delta Z = Z_{exp} - Z_{teo}$ presenta un valor medio de 0.1382 (mm) y un valor máximo de 0.3163 (mm). Los demás valores resultantes de esta validación se registran en la Tabla 7.

De esta forma, una vez calibrado el sistema cámara-proyector, se tienen los coeficientes a , b y c para relacionar la fase continua absoluta Φ de un cráneo humano ubicado en el volumen de calibración, con la altura Z de la superficie vista por la cámara (mapeo fase-altura), mediante un

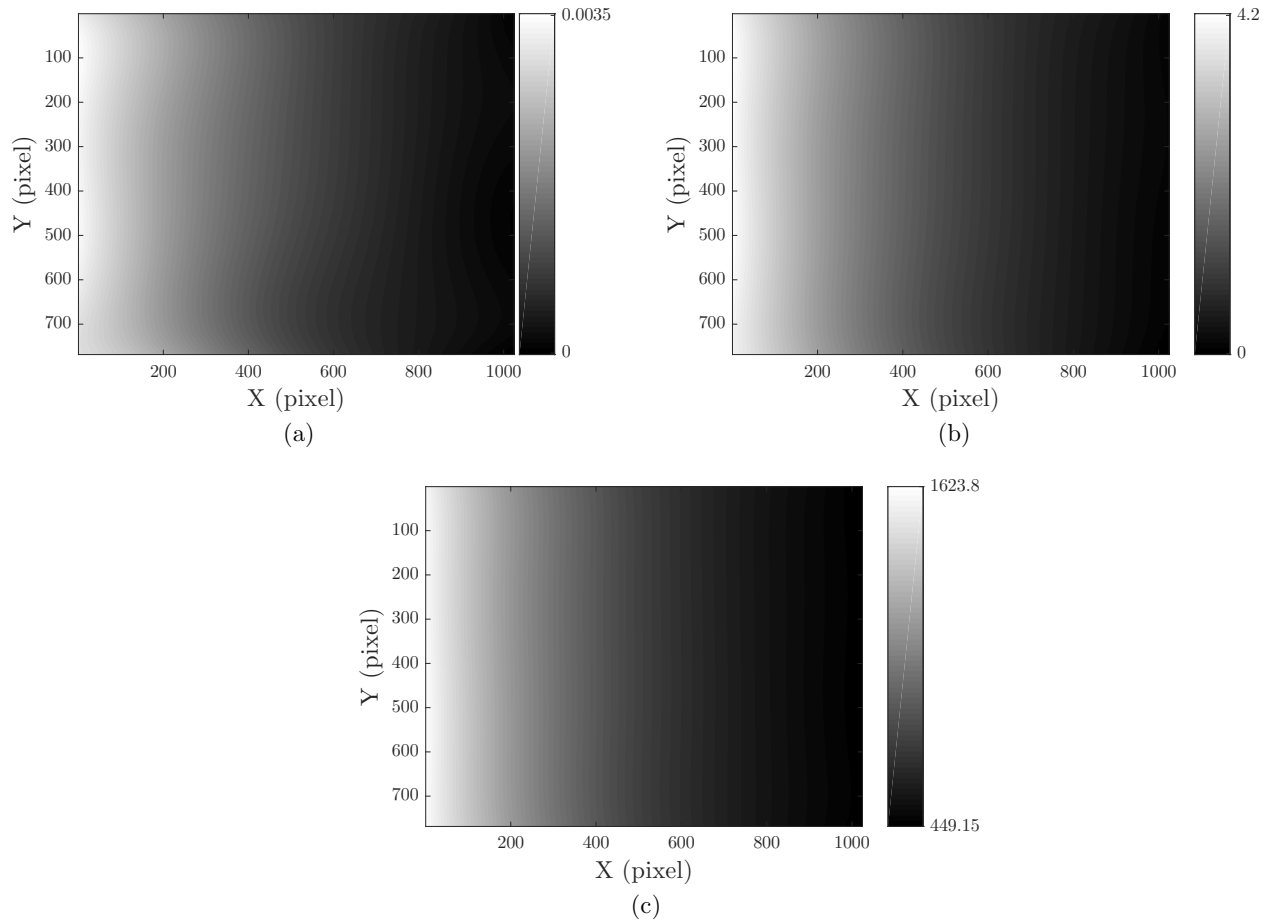


Figura 83. Coeficientes del ajuste polinomial: (a) $a(\text{mm/rad}^2)$, (b) $b(\text{mm/rad})$, y (c) $c(\text{mm/rad})$.

ajuste polinomial.

4. R3DD del cráneo humano usando la TPF

Una vez se ha calibrado el sistema de R3DD por proyección de franjas, considerando las restricciones geométricas impuestas por el montaje experimental para poder ejecutar el algoritmo TPU a 2 frecuencias propuesto en esta investigación, y se ha definido la estrategia metodológica para reducir el error en la fase continua absoluta $\Delta\Phi$, se procede entonces a obtener la R3DD del cráneo humano. Con la metodología presentada hasta este capítulo se logra obtener una nube de puntos

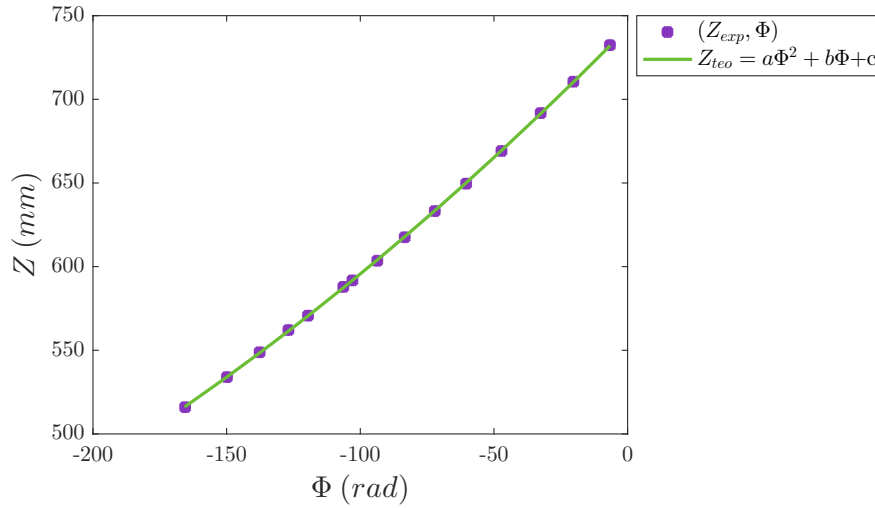


Figura 84. Superposición del conjunto de puntos experimentales (Z_{exp}, Φ) y la curva resultante de evaluar el polinomio $Z_{teo} = a\Phi^2 + b\Phi + c$.

con la información 3D de una parte del cráneo humano, específicamente la parte del cráneo que es observada por la cámara; se requiere entonces de un procedimiento intermedio para lograr una nube de puntos 3D a 360° de observación, para lo cual se propone utilizar el algoritmo de registro ICP.

Una vez se tiene la R3DD del craneo humano a 360° de observación, se debe dotar de superficie la nube de puntos 3D. Este procedimiento puede resultar extenso por la complejidad en los conceptos de topología y geometría computacional que requiere, sin embargo para los alcances y objetivos trazados en este trabajo de investigación se considera suficiente los resultados que se obtienen con los principios básicos de teselación que comprenden la triangulación de Delaunay y el remallado isotropico.

Tabla 7

Valores experimentales de fase continua absoluta Φ y Z en el pixel (512, 384) de 15 posiciones en el volumen de calibración, junto a la evaluación del polinomio $Z_{teo} = a\Phi^2 + b\Phi + c$ y su diferencia $\Delta Z = Z_{exp} - Z_{teo}$.

N	$\Phi (rad)$	$Z_{exp} (mm)$	$Z_{teo} (mm)$	$\Delta Z (mm)$
1	-6.5229	732.4289	732.1141	0.3147
2	-20.2174	710.3155	710.3994	0.0839
3	-32.2801	691.7339	691.7614	0.0276
4	-47.0947	669.2367	669.4986	0.2619
5	-60.3402	649.9426	650.1793	0.2367
6	-72.2077	633.2495	633.3391	0.0896
7	-83.3955	617.8551	617.8698	0.0147
8	-93.7517	603.9060	603.9018	0.0042
9	-103.1610	591.5758	591.5038	0.0721
10	-106.3367	587.5144	587.3824	0.1321
11	-119.3788	570.9416	570.7893	0.1522
12	-126.6973	561.8623	561.7129	0.1493
13	-137.7132	548.5809	548.3691	0.2118
14	-149.9293	534.0128	534.0186	0.0058
15	-165.7512	515.8146	516.1308	0.3163

4.1. Obtención de la fase continua absoluta Φ

Como se ha descrito en el Capítulo 3, durante el procedimiento de calibración cámara-proyector se recuperan las coordenadas 3D ($X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam}$) en unidades métricas de longitud (milímetros) de todos los pixeles en el campo de observación de la cámara, usando las imágenes del plano de calibración ubicado en 15 posiciones diferentes dentro del volumen (de calibración) comprendido entre las posiciones Z_{min} y Z_{max} . Dichas coordenadas 3D, respecto al sistema coordenado de la cámara, del plano de calibración ubicado en las posiciones Z_{min} y Z_{max} (las restricciones geométri-

cas) se muestran gráficamente en la Figura 85.

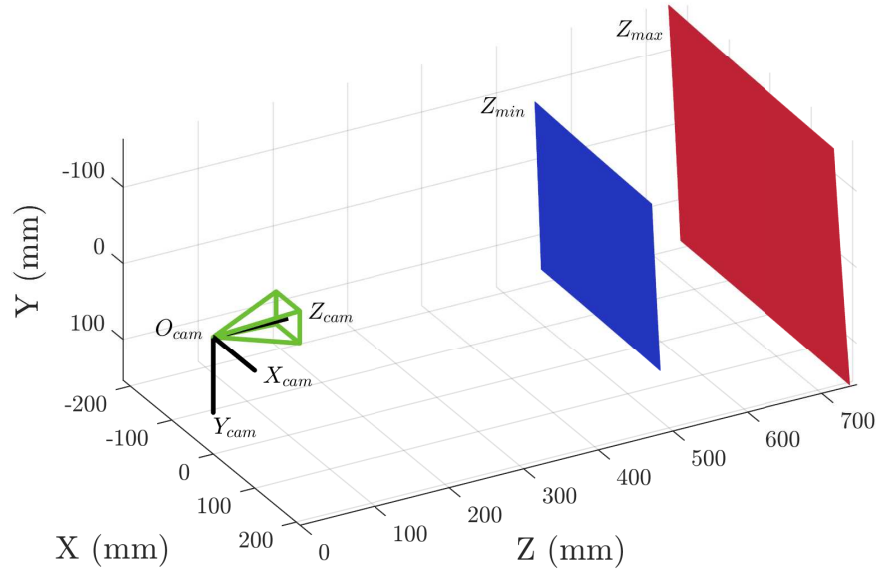


Figura 85. Coordenadas 3D ($X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam}$), respecto al sistema coordenado de la cámara, de todos los píxeles en el campo de observación de la cámara, usando las imágenes del plano de calibración ubicado en las posiciones Z_{min} y Z_{max} .

Con la información 3D de estas coordenadas es posible ubicar, dentro del volumen de calibración, el punto más cercano $Z_{min}^{(X_{cam}^i, Y_{cam}^i)}$ y el más lejano $Z_{max}^{(X_{cam}^i, Y_{cam}^i)}$ a lo largo del eje Z_{cam} , y con estas coordenadas se calculan dos planos teóricos ortogonales al eje óptico de la cámara ubicados en las posiciones Z_{min} y Z_{max} . En la Figura 86, se muestran en color verde los planos teóricos, contruidos a partir de la información 3D de las imágenes experimentales. Matemáticamente, utilizando los coeficientes a, b y c del ajuste polinomial descrito en procedimiento de calibración, se puede calcular la fase continua absoluta teórica Φ_H^T , que corresponde al valor de $f_2 = 128$ (teniendo en cuenta que este fue el valor de f experimental con el que se calcularon los coeficientes a, b , y c en el procedimiento de calibración), para los planos teóricos en las posiciones Z_{min} y Z_{max} . En

las ecuaciones 61 y 62, se presentan las expresiones precisas.

$$\Phi_{Hz_{min}}^T = \frac{-b\sqrt{b^2 - 4a(c - Z_{min}^{(X_{cam}, Y_{cam})})}}{2a}, \quad (61)$$

$$\Phi_{Hz_{max}}^T = \frac{-b\sqrt{b^2 - 4a(c - Z_{max}^{(X_{cam}, Y_{cam})})}}{2a}. \quad (62)$$

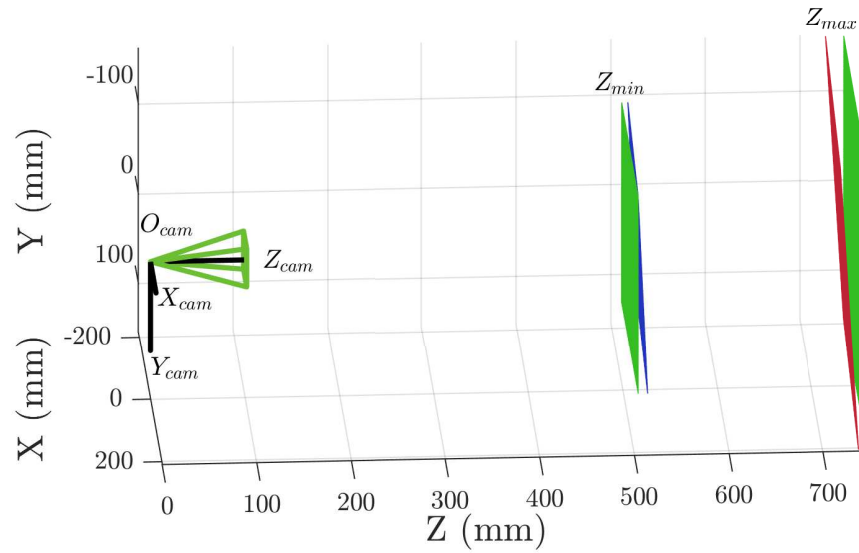


Figura 86. Coordenadas 3D $(X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})$, respecto al sistema coordenado de la cámara, de todos los pixeles en el campo de observación de la cámara, usando las imágenes del plano de calibración ubicado en las posiciones Z_{min} y Z_{max} , junto a los planos teóricos ortogonales al eje óptico de la cámara.

Una vez calculada la fase continua absoluta teórica de alta frecuencia ($f_2 = 128$) Φ_H^T , para los dos planos teóricos que definen las restricciones geométricas del volumen de calibración, se puede calcular la fase continua absoluta teórica de baja frecuencia ($f_1 = 6$) Φ_L^T para ambos planos con la relación que se presenta en las ecuaciones 63 y 64,

$$\Phi_{Lz_{min}}^T = \frac{f_1}{f_2} \Phi_{Hz_{min}}^T, \quad (63)$$

$$\Phi_{Lz_{max}}^T = \frac{f_1}{f_2} \Phi_{Hz_{max}}^T. \quad (64)$$

Estas fases continuas absolutas teóricas a baja frecuencia $\Phi_{Lz_{min-max}}^T$ resultan útiles para desenvolver la fase discontinua a baja frecuencia experimental φ_L del cráneo humano, entendiendo que la fase continua absoluta a baja frecuencia Φ_L de cualquier objeto ubicado dentro del volumen de calibración no puede rebasar los extremos que ellas delimitan. Lo mismo ocurre con la fase continua absoluta a alta frecuencia Φ_H de cualquier objeto ubicado dentro del volumen de calibración, con referencia a las fases continuas absolutas teóricas a alta frecuencia $\Phi_{Hz_{min-max}}^T$.

Después de adquiridas las imágenes de calibración, se adquieren imágenes del cráneo humano ubicado en el volumen de calibración, utilizando patrones de franjas con $f_1 = 6$ y $f_2 = 128$ para implementar el algoritmo dual de desenvolvimiento de fase temporal a dos frecuencias con restricciones geométricas, y así poder recuperar la fase continua absoluta Φ_H . Las imágenes del cráneo con los dos patrones de franjas ($f_1 = 6$ y $f_2 = 128$), la fase discontinua φ para cada uno (φ_L y φ_H), y sus respectivas secciones transversales se muestran en la Figura 87.

Las fase continua absoluta a baja frecuencia Φ_L del cráneo humano se desenvuelve utili-

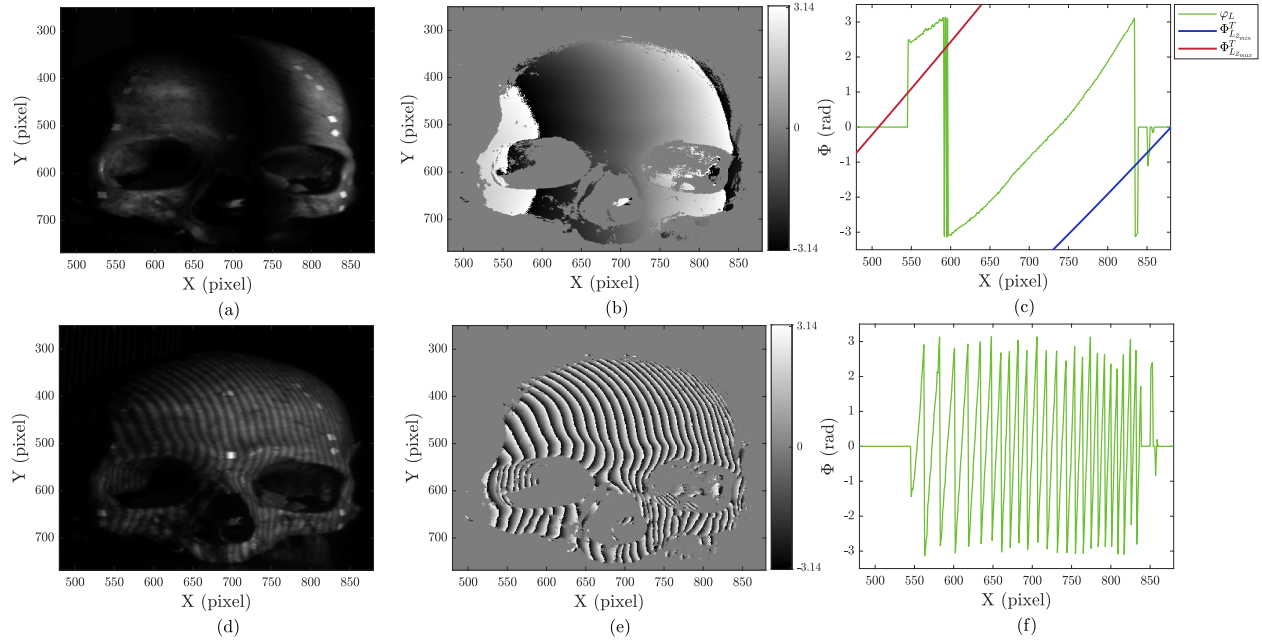


Figura 87. (a) Proyección de un patrón de franjas con $f = 6$ en el frontal de un cráneo humano, (b) fase discontinua φ_L del patrón de franjas con $f = 6$ proyectado sobre un cráneo humano, y (c) su respectiva sección transversal en la fila $y = 500$. (d) Proyección de un patrón de franjas con $f = 128$ en el frontal de un cráneo humano, (e) fase discontinua φ_H del patrón de franjas con $f = 128$ proyectado sobre un cráneo humano, y (f) su respectiva sección transversal en la fila $y = 500$.

zando la ecuación 65,

$$\Phi_L = \varphi_L + 2\pi K, \quad (65)$$

en donde el factor K está dado por las expresiones en 66,

$$K = \begin{cases} -1 & 2\pi < \varphi_L - \Phi_{Lz_{min}}^T, \\ 0 & 0 \leq \varphi_L - \Phi_{Lz_{min}}^T < 2\pi, \\ 1 & 0 > \varphi_L - \Phi_{Lz_{min}}^T. \end{cases} \quad (66)$$

El resultado de este procedimiento de desenvolvimiento se muestra en la Figura 88.

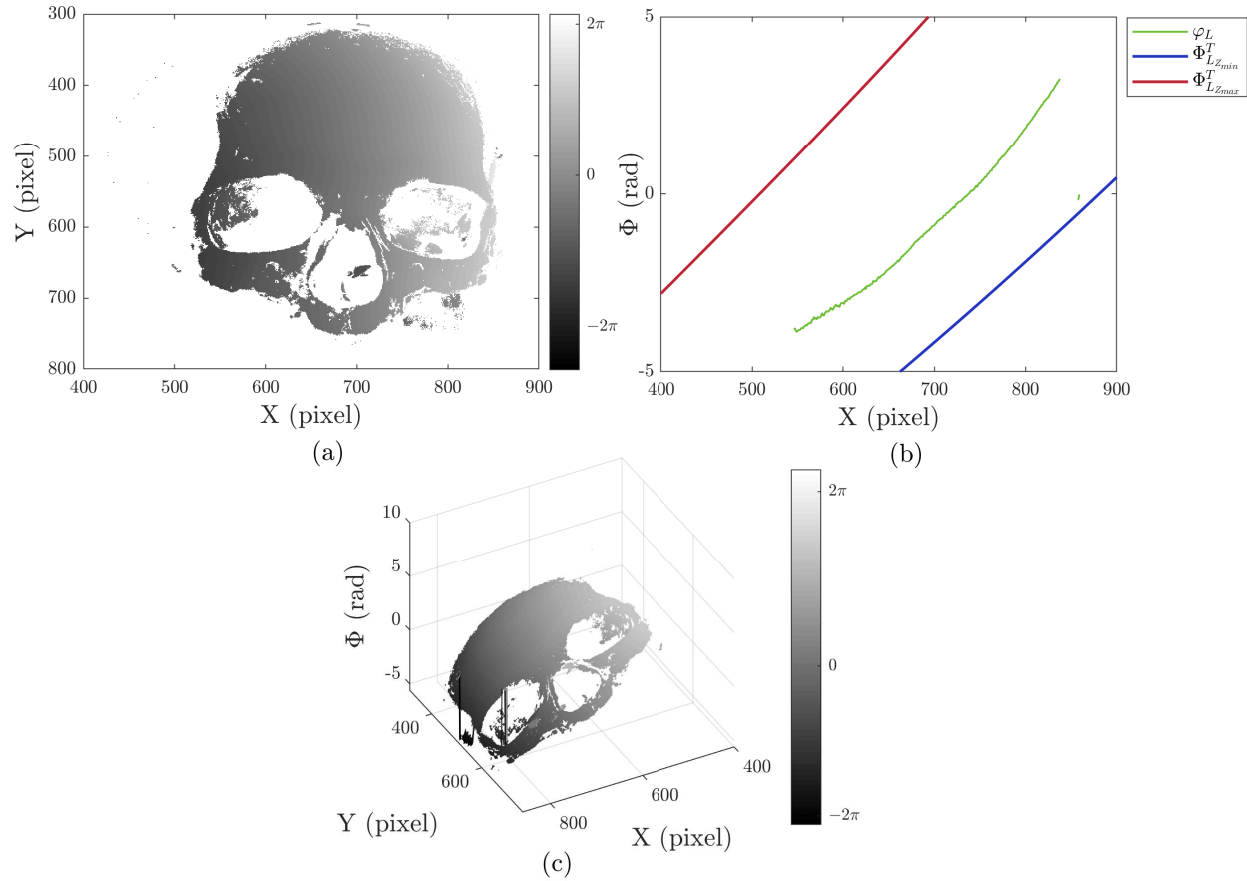


Figura 88. (a) Mapa de fase continua absoluta a baja frecuencia Φ_L del frontal de un cráneo humano, (b) su respectiva sección transversal en la fila $y = 500$, y (c) vista 3D.

Una vez desenvuelta la fase discontinua a baja frecuencia φ_L , del frontal del cráneo humano, y obtenida la fase continua absoluta a baja frecuencia Φ_L , esta se utiliza para desenvolver la fase discontinua a alta frecuencia φ_H , del mismo objeto, haciendo uso del algoritmo de desenvol-

vimiento de fase temporal a dos frecuencias como se describe en la ecuación 67,

$$\Phi_H = \varphi_H + 2\pi K, \quad (67)$$

en este caso el factor K se calcula con la ecuación 68,

$$K = \frac{\frac{f_2}{f_1}\Phi_L - \varphi_H}{2\pi}. \quad (68)$$

De este modo, finalmente se obtiene la fase continua absoluta a alta frecuencia Φ_H , de un cráneo humano ubicado en el volumen de calibración, utilizando la estrategia flexible de calibración (cámara - proyector) y el algoritmo de desenvolvemento de fase temporal a dos frecuencias con restricciones geométricas, como parte de la metodología de R3DD especializada en el cráneo humano propuesta en este trabajo de investigación. En la Figura 89(b) se muestra el resultado de la fase continua absoluta Φ_H .

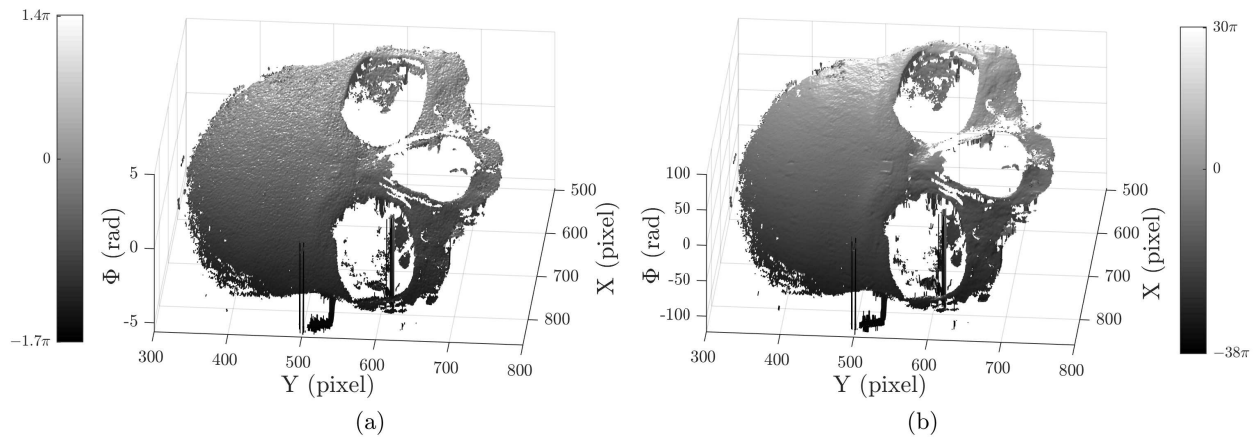


Figura 89. (a) Fase continua absoluta a baja frecuencia Φ_L , y (b) fase continua absoluta a alta frecuencia Φ_H .

4.2. Relación fase Φ - altura ($rad \rightarrow mm$)

Este procedimiento inicia buscando las coordenadas en pixeles (u_i, v_i) de los puntos en el mapa de fase continua absoluta Φ , para lo cual resulta útil la intensidad del fondo continuo de las imágenes $A_{(x_C, y_C)}$, que para el algoritmo de P. de Groot se calcula usando la ecuación 69. En la Figura 90, se pueden observar la imagen de intensidad del fondo continuo $A_{(x_C, y_C)}$ (a), y los puntos con las coordenadas (u_i, v_i) en pixeles (b).

$$A = \sqrt{(2(I_7 - I_3) - \sqrt{2}(I_2 + I_4) + \sqrt{2}(I_6 + I_8))^2 + (2I_5 - (I_1 + I_9) + \sqrt{2}(I_4 - I_2) + \sqrt{2}(I_6 - I_8))^2}. \quad (69)$$

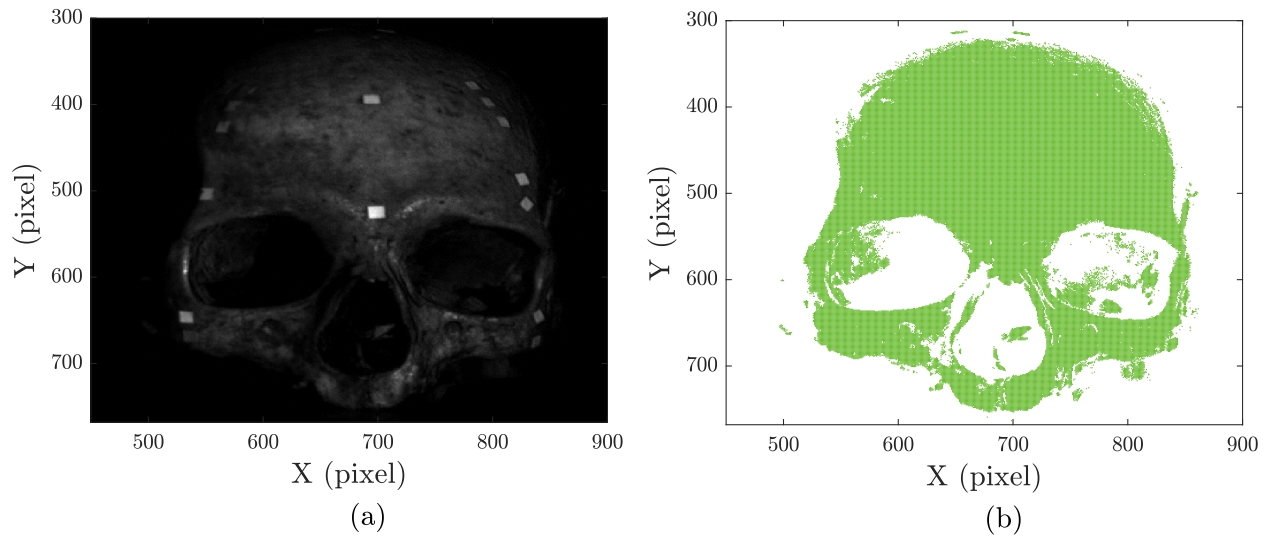


Figura 90. (a) Intensidad del fondo continuo de las imágenes de franjas $A_{(x_C, y_C)}$, y (b) gráfica de puntos con las coordenadas (u_i, v_i) del cráneo humano en el mapa de fase continua absoluta Φ .

La componente Z de los pixeles (u_i, v_i) con información de fase Φ se puede calcular en

milímetros respecto al sistema coordenado de la cámara, utilizando el ajuste polinomial descrito en la sección 3.3.1, más exactamente con la ecuación 70,

$$Z_{cam} = a\Phi^2 + b\Phi + c. \quad (70)$$

Las coordenadas (u_i, v_i) de los pixeles con información de la fase continua absoluta Φ del cráneo humano, se pueden expresar en unidades métricas de longitud (milímetros) respecto al sistema coordenado de la cámara utilizando la matriz de calibración K , como se muestra en la ecuación 71,

$$\begin{bmatrix} X_{cam} \\ Y_{cam} \\ 1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

En el apéndice ?? se describe el procedimiento para calcular los elementos de la matriz de calibración K , y sus resultados experimentales se muestran en la ecuación 267 del mismo apéndice. Resolviendo la ecuación 71 se obtienen las coordenadas X_{cam}, Y_{cam} , y Z_{cam}), en milímetros respecto al sistema coordenado de la cámara, con las cuales se forma la nube de puntos 3D del frontal de cráneo humano, como se muestra en la Figura 91.

4.2.1. Validación metrológica de la metodología de R3DD. Para evaluar la resolución métrica y el margen de error que pueden inducir los parámetros de calibración de la

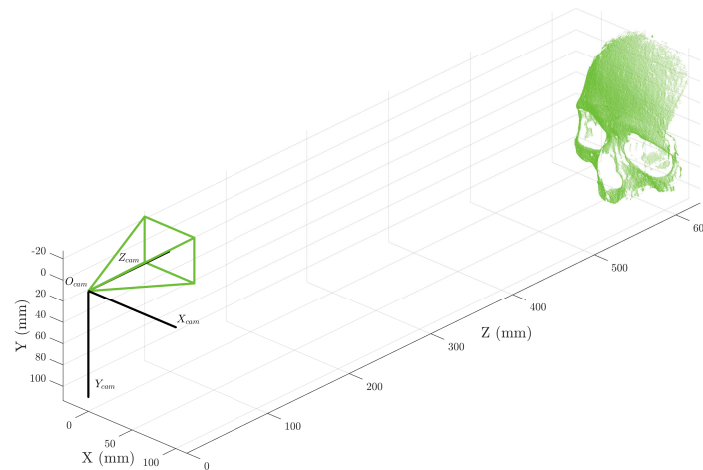


Figura 91. Puntos en las coordenadas X_{cam} , Y_{cam} , y Z_{cam} (en milímetros), respecto al sistema coordenado de la cámara, formando la nube 3D del frontal de un cráneo humano.

metodología de R3DD que se ha descrito hasta esta parte del documento, se diseña y se ejecuta un experimento que aporta suficiente información métrica. Dicho experimento consiste en reconstruir un objeto plano (forma bien definida y conocida), ubicado en diferentes posiciones conocidas a lo largo del eje Z_{cam} . Para desplazar el plano se utiliza un tornillo micrométrico de $10\mu m$ de resolución; al medir las distancias entre las nubes de puntos 3D del plano reconstruido, estas deben ser similares a los desplazamientos teóricos que se han introducido en el experimento.

Para medir estas se deduce la ecuación del plano asociado a la nube de puntos 3D obtenida en una determinada posición de referencia, y a partir de tal ecuación se calculan las distancias mas cercanas entre las nubes de puntos 3D del plano cuando se ha desplazado. Considerando que la

ecuación del plano para una determinada nube de puntos 3D está dada por la expresión 72,

$$C_1X_{cam} + C_2Y_{cam} + C_3Z_{cam} + C_4 = 0, \quad (72)$$

y siendo A el arreglo de puntos que perteneces a la nube 3D, los coeficientes (C_1, C_2, C_3, C_4) se pueden calcular resolviendo el sistema de ecuaciones lineales de la ecuación 73,

$$AC = 0, \quad (73)$$

en donde A corresponde a la expresión 74,

$$A = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_k & Y_k & Z_k & 1 \end{bmatrix}, \quad (74)$$

y C a la expresión 75,

$$C = (C_1, C_2, C_3, C_4). \quad (75)$$

Los coeficientes contenidos en el vector C se pueden calcular a partir de la descomposición en valores singulares de la matriz A , como $A = UDV^T$, en donde la ultima columna de V contiene el valor de los coeficientes C_i . Para la primera parte del experimento se reconstruyen los planos

ubicados a $10mm$ y $5mm$ de distancia respecto al plano de referencia. La ecuación del plano de referencia está dada por la expresión 76,

$$-80,3610 \times 10^{-6}X_{cam} - 0,0014Y_{cam} - 3.7847 \times 10^{-6}Z_{cam} + 1 = 0. \quad (76)$$

En la Figura 92 se muestran las nubes de puntos 3D del plano de referencia, y de los planos desplazados a $5mm$ y $10mm$. Para medir la distancia más cercana de un punto a un plano, se recurre a la ecuación 77,

$$d(\mathbf{X}, \Pi) = \frac{C_1X_{cam} + C_2Y_{cam} + C_3Z_{cam} + C_4}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}, \quad (77)$$

en donde $\mathbf{X} = (X_{cam}, Y_{cam}, Z_{cam})$ corresponde a los puntos de la nube 3D, y Π el plano de referencia. El valor promedio de las distancias entre los puntos de la nube 3D a $10mm$ del plano de referencia, se registra en la expresión 78,

$$\bar{d}(\mathbf{X}_{10mm}, \Pi_{ref}) = 10.4926mm, \quad (78)$$

y el promedio de las distancias de los puntos de la nube 3D a $5mm$ en la expresión 79,

$$\bar{d}(\mathbf{X}_{5mm}, \Pi_{ref}) = 5.1034mm. \quad (79)$$

Al repetir el procedimiento anterior, pero esta vez desplazando el plano $1mm$ respecto a la posición de referencia, el valor medio de las distancias medidas entre la nube de puntos 3D a $1mm$

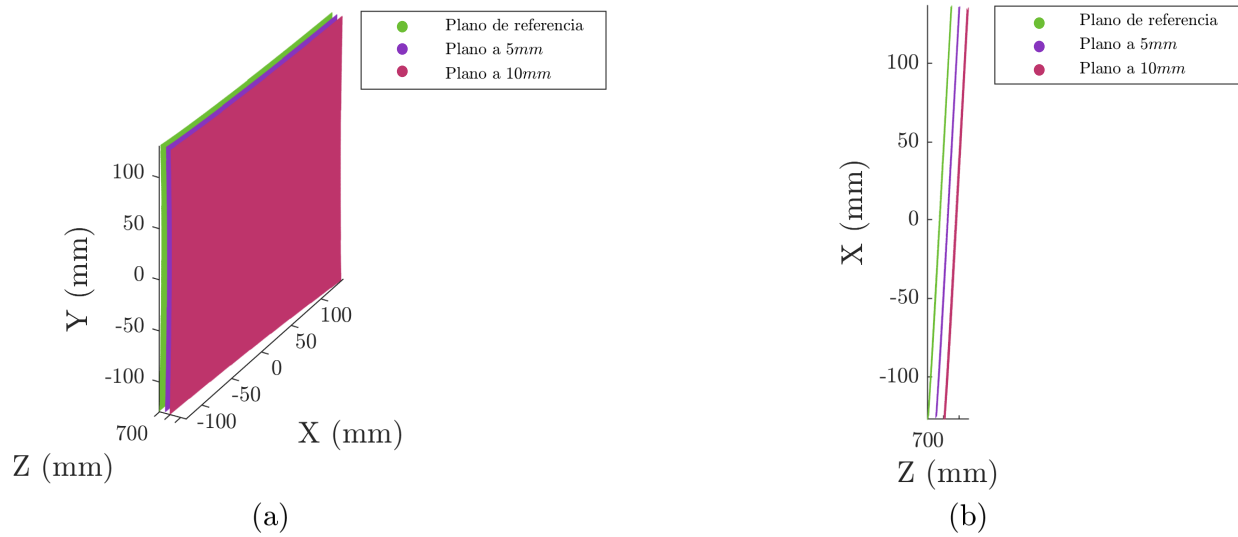


Figura 92. (a) Nubes de puntos 3D del plano de referencia y de los planos a 5mm y 10mm, y (b) sus vistas desde el plano XZ.

de distancia respecto al plano de referencia se registra en la expresión 80,

$$\bar{d}(\mathbf{X}_{1mm}, \Pi_{ref}) = 0.9936mm. \quad (80)$$

En la Figura 93 se muestran los gráficos de dispersión de las distancias medidas entre los planos a 10mm, 5mm y 1mm; y en la Tabla 8 se resumen los valores de distancias teóricas, medidas experimentales y sus respectivos porcentajes de error.

Tabla 8

Valores de desplazamientos teóricos (10mm, 5mm, 1mm), distancias medidas experimentalmente, y sus respectivos porcentajes de error.

$\Delta_{teo} \pm \sigma_{teo} (mm)$	$\Delta_{exp} \pm \sigma_{exp} (mm)$	Error (%)
10mm $\pm$ 0,01mm	10,4926mm $\pm$ 0,1159mm	4,9200 %
5mm $\pm$ 0.01mm	5,1034mm $\pm$ 0,0471mm	2.0680 %
1mm $\pm$ 0.01mm	0.9936mm $\pm$ 0,0505mm	0.6400 %

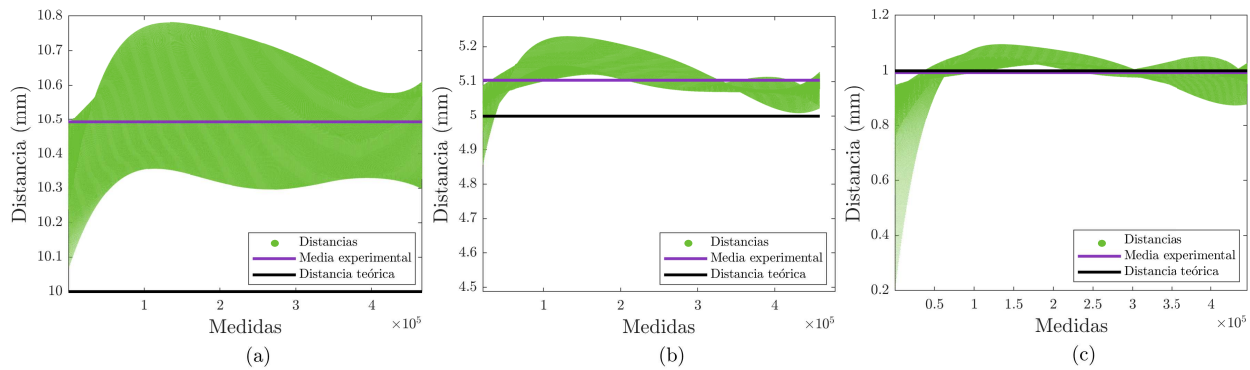


Figura 93. Gráficos de dispersión para distancias medidas a: (a) 10mm, (b) 5mm, y (c) 1mm respecto al plano de referencia.

Al intentar medir décimas, y hasta centésimas, de milímetro utilizando el mismo experimento y aplicando el mismo procedimiento, los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 9, para distancias de 100 μ m y 10 μ m respecto al plano de referencia.

Tabla 9

Valores de desplazamientos teóricos (100 μ m, 10 μ m), distancias medidas experimentalmente, y sus respectivos porcentajes de error.

$\Delta_{teo} \pm \sigma_{teo}(\text{mm})$	$\Delta_{exp} \pm \sigma_{exp}(\text{mm})$	Error (%)
100 μ m $\pm$ 10 μ m	95,9 μ m $\pm$ 51,2 μ m	4,92 %
10 μ m $\pm$ 10 μ m	32,6 μ m $\pm$ 95,3 μ m	226 %

En la Figura 94 se muestran los gráficos de dispersión de las distancias medidas entre los planos a 100 μ m y 10 μ m respecto al plano de referencia.

Los resultados registrados en las Tablas 8 y 9 indican que con la metodología de R3DD propuesta es posible medir variaciones topográficas de décimas de milímetro con un error máximo

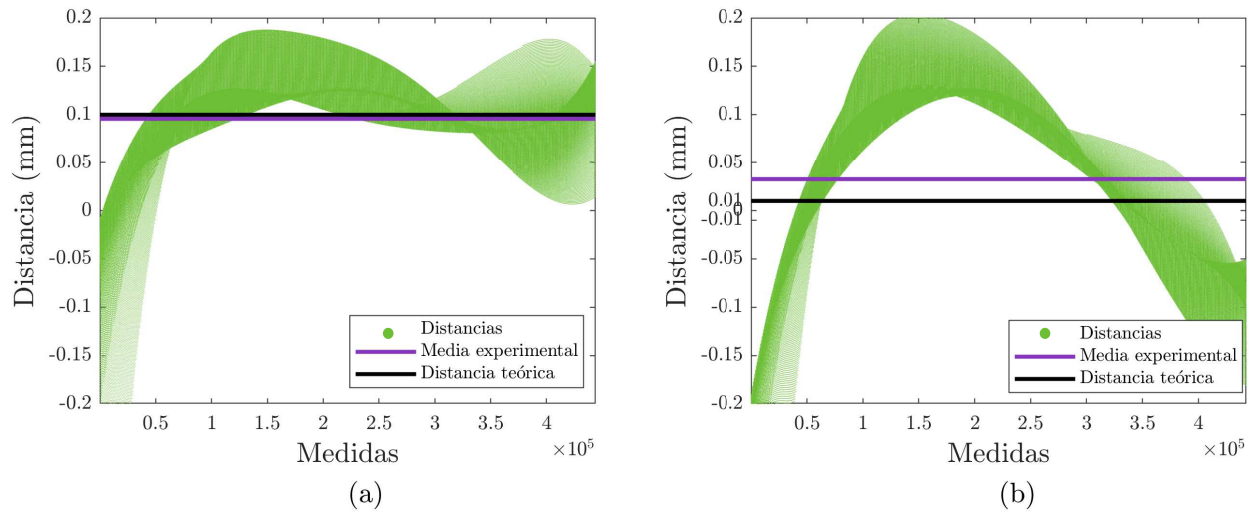


Figura 94. Gráficos de dispersión para distancias medidas a: (a) $100\mu m$, y (b) $10\mu m$ respecto al plano de referencia.

de $\pm 51.2\mu m$

4.3. R3DD del cráneo humano a 360° de observación

Con el procedimiento que se ha descrito para obtener coordenadas métricas a partir de la información de fase continua Φ se obtiene una R3DD parcial del cráneo humano, como se puede observar en la Figura 91, explícitamente sólo se reconstruye la superficie sobre la que se proyectan franjas y que es captada por la cámara. Por esta razón se requiere de un procedimiento adicional para lograr una R3DD a 360° de observación.

En este trabajo de investigación se propone como alternativa para lograr una R3DD a 360° de observación, realizar tomas del cráneo humano rotando su posición para obtener nubes de puntos de diferentes vistas, como se muestran en la Figura 95, y posteriormente unificar la información 3D en una única nube implementando el algoritmo de registro ICP (Chen and Medioni, 1992), co-

nocido así por las iniciales de su nombre en ingles *Iterative Closets Points*.

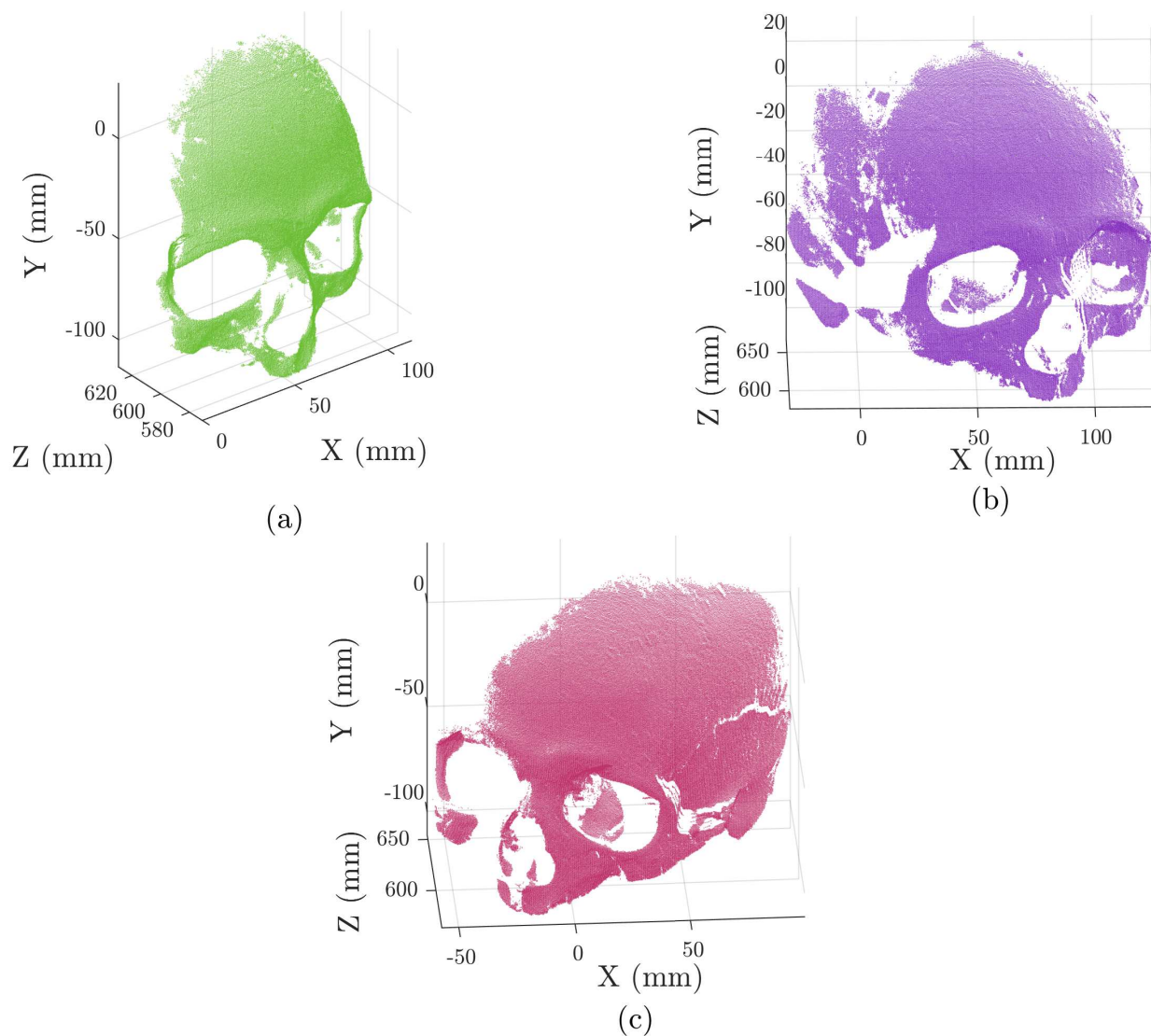


Figura 95. Nube de puntos 3D del cráneo humano desde su vista: (a) frontal, (b) fronto-temporal derecha, y (c) fronto-temporal izquierda.

El algoritmo ICP, propuesto originalmente en 1991 por *Chen y Medioni*, es tal vez la estrategia computacional más usada y referenciada para minimizar la distancia entre dos nubes de

puntos (Rusinkiewicz and Levoy, 2001). El procedimiento parte del hecho de que dos vistas de una misma superficie se pueden registrar, si cualquier par de puntos (p_i, q_j) de las dos vistas representan la misma superficie. Los puntos se pueden hacer coincidir aplicando una transformación rígida, esto se puede expresar como se muestra en la ecuación 81,

$$\forall p_i \in P, \exists q_j \in Q \rightarrow \|Tp_i - q_j\| = 0, \quad (81)$$

en donde Tp_i es el resultado de aplicar T a p_i . En coordenadas homogéneas la matriz de transformación T se puede expresar como se muestra en la ecuación 82,

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & t_x \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & t_y \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (82)$$

Para encontrar la matriz de transformación T , el algoritmo original establece definir una nube de puntos como referencia (Q) y una segunda nube de puntos como “flotante” (P), esta última se transforma para que coincida con la nube de referencia. El algoritmo revisa iterativamente la transformación T buscando minimizar la distancia (o métrica de error) desde la nube de puntos flotante a la nube de puntos de referencia, sumando las diferencias al cuadrado entre las coordenadas

de los puntos coincidentes. Esta definición se resume en la ecuación 83,

$$e^k = \sum_{i=1}^N \|T^k p_i - q_j^k\|^2, \quad (83)$$

con q_j^k , como se expresa en la ecuación 84

$$q_j^k = q | \min_{q \in Q} \|T^{k-1} p_i - q_j\|. \quad (84)$$

Detalles mas precisos del proceso iterativo en el algoritmo ICP se pueden consultar en el articulo original (Chen and Medioni, 1992). A modo de ejemplo, en esta sección se describe brevemente la etapa de registro de las 3 nubes de puntos 3D que se muestran en la Figura 95. En la Figura 96 (a) y (c), se evidencia por la superposición de las nubes de punto 3D, que estas corresponden a diferentes vistas de un mismo objeto y que poseen puntos comunes. En primer lugar se define como nube de referencia la nube de puntos 3D del frontal del cráneo humano, Figura 95(a), las otras dos nubes de puntos 3D, Figura 95(b) y Figura 95(c), se definen en este caso como nubes flotantes.

Después de aplicar el algoritmo ICP entre las nubes de puntos 3D del frontal del cráneo humano y la del fronto-temporal derecha se obtiene la matriz de transformación de la ecuación 85 y el resultado de la transformación se muestra en la Figura 96(b). Del mismo procedimiento entre la nube frontal y la fronto-temporal izquierda, se obtiene la matriz de transformación de la

ecuación 86 y el resultado de la transformación se muestra en la Figura 96(d).

$$T_{b \rightarrow a} = \begin{bmatrix} 0.92 & 0.39 & 0.03 & -248.32 \\ -0.39 & 0.92 & 0.02 & 74.76 \\ -0.02 & -0.03 & 1 & 20.57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$T_{c \rightarrow a} = \begin{bmatrix} 0.89 & -0.46 & -0.03 & 336.55 \\ 0.46 & 0.89 & -0.04 & 75.49 \\ 0.04 & 0.03 & 1 & -17.16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (86)$$

De esta forma, repitiendo el procedimiento que se describe en el párrafo anterior, entre la nube de registro que se va creando y las demás nubes de puntos 3D que se van añadiendo, que incluyen las vistas de los huesos parietales y occipital, se logra consolidar la información 3D en una única nube de puntos 3D del cráneo humano. En la Figura 97, se muestra la nube de puntos 3D del cráneo humano a 360° de observación desde diferentes vistas.

4.4. Transformación de la nube de puntos 3D en una superficie

La metodología de R3DD especializada en el cráneo humano finaliza dotando de una noción de superficie la nube de puntos 3D. Esta parte del procedimiento es de vital importancia no solo para visualizar la R3DD del cráneo humano, también lo es por todo lo que comprende su posterior aná-

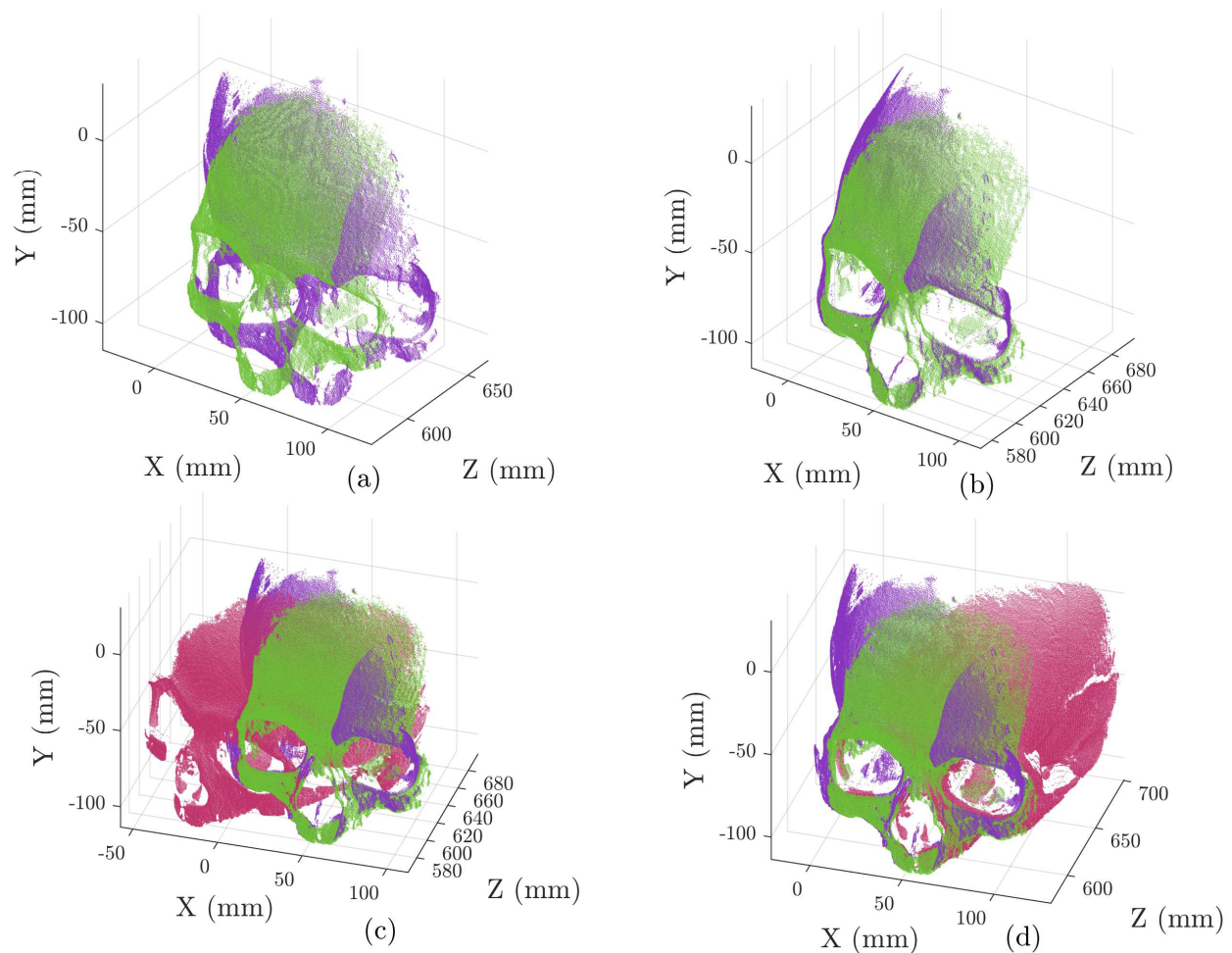


Figura 96. Nube de puntos 3D del cráneo humano desde su vista: (a) frontal, (b) fronto-temporal derecha, y (c) fronto-temporal izquierda.

lisis en aplicaciones de ciencias forenses (o cualquier otra). Cabe resaltar que las áreas de “*Visual Computing*” y “*3D Imaging*” actualmente son campos de investigación muy activos y amplios, que comprenden conceptos avanzados de geometría espacial y topología (Ascher and Huang, 2018), con los que perfectamente se podría llevar a cabo un trabajo de investigación en búsqueda de la mejor forma para dotar de superficie la R3DD del cráneo humano; sin embargo para los objetivos de este trabajo, y para evitar la extensión excesiva del mismo, es suficiente con los conceptos bási-

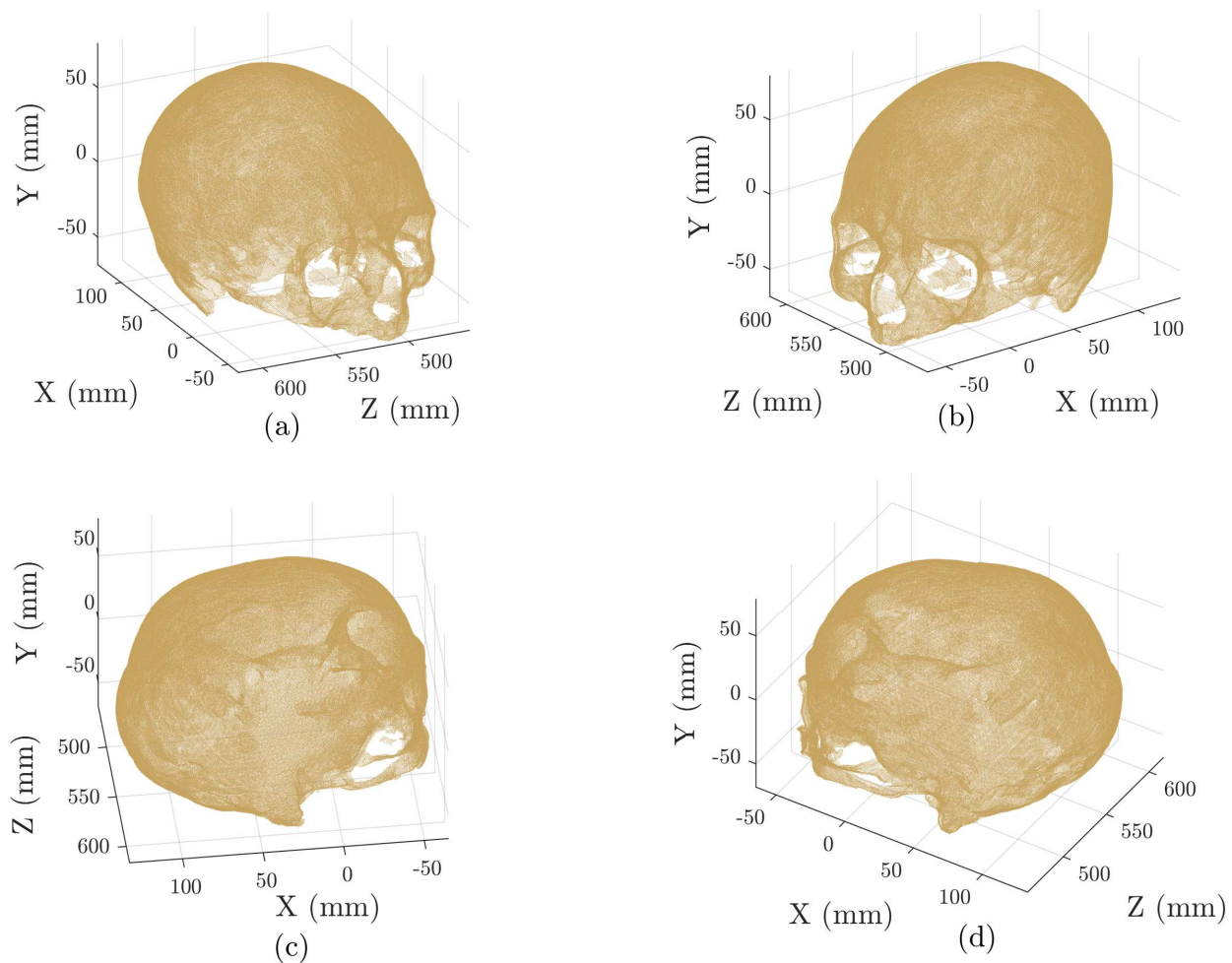


Figura 97. Nube de puntos 3D a 360° de observación del cráneo humano, vistas: (a) fronto-temporal-parietal derecha, (b) fronto-temporal-parietal izquierda, (c) occipital-parietal-temporal derecha, y (d) occipital-parietal-temporal izquierda.

cos de teselación que comprenden la triangulación de Delaunay y el remallado isotrópico.

La aproximación a una superficie se consigue construyendo una malla por partes, estas mallas se construyen de forma cuadrada o triangular, en este trabajo se abordan los mallados triangulares. Una malla se define mediante una lista de vértices, aristas, triángulos, y las reglas de unión.

Un *vértice* (o punto) representa una posición en el espacio 3D, una *arista* es la línea que une dos vértices, y un triángulo es la superficie o *faceta* que forman tres vértices que se definen en una lista ordenada.

4.4.1. Triangulación de Delaunay. Normalmente, para dividir el espacio euclidiano en regiones específicas se suele usar una herramienta geométrica conocida como *diagramas de Voronoi*, *teselación de Dirichlet*, o *polígonos de Thiessen*. Un diagrama de Voronoi se construye a partir de un conjunto de puntos conocidos como semillas o generadores, a los cuales les corresponde una región de influencia que comprende todos los puntos cercanos a la semilla y se conocen como *celdas de Voronoi* (Toth et al., 2017).

Específicamente, los diagramas de Voronoi segmentan el espacio en polígonos convexos o celdas de Voronoi de manera que cada polígono contenga una única semilla, y cualquier punto P dentro de una celda esté más cerca de su semilla que de cualquier otra. En la Figura 98(a) se muestra el diagrama de Voronoi para una serie de puntos aleatorios X_i , y se evidencia como cualquiera punto P dentro de la celda 9 está más cerca de su propia semilla (X_9) que de cualquier otra.

Existe una representación geométrica dual análoga a los diagramas de Voronoi y se conoce como *triangulación de Delaunay*. Los triángulos de Delaunay se construyen usando como vértices las semillas de los diagramas de Voronoi, los cuales se unen considerando que los vértices de los bordes Voronoi se encuentran en los circuncentros de los triángulos de Delaunay. En la Figura

98(b) se muestra como ejemplo el circuncentro C del triángulo de Delaunay $\{|X_4|, |X_5|, |X_9|\}$, y su correspondencia exacta con un vértice del respectivo diagrama de Voronoi.

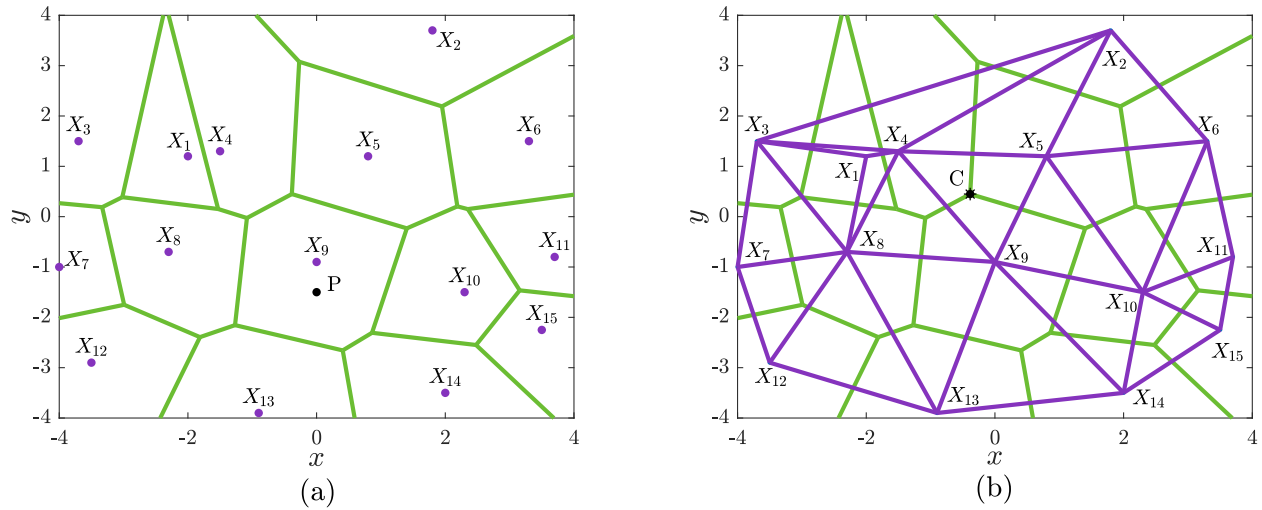


Figura 98. (a) Diagrama de Voronoi para una serie de puntos aleatorios X_i , y (b) su respectiva triangulación de Delaunay.

Un diagrama de Voronoi representa la interpolación con menor error, o mayor proximidad, de una superficie que se pretenda modelar mediante celdas discretas; sin embargo, también es considerado un método de alta complejidad. Por esta razón, se prefiere utilizar la triangulación de Delaunay como método interpolativo puesto que es la estructura más simple con la que se puede representar una superficie tridimensional (Toth et al., 2017). A modo de ejemplo se muestra en la Figura 99(a) los puntos aleatorios X_i de la Figura 98(a) dispersos en el espacio 3D, y en la Figura 99(b) su respectiva triangulación de Delaunay en 3D.

Un mallado triangular de Delaunay consta de dos componentes, una geométrica y una com-

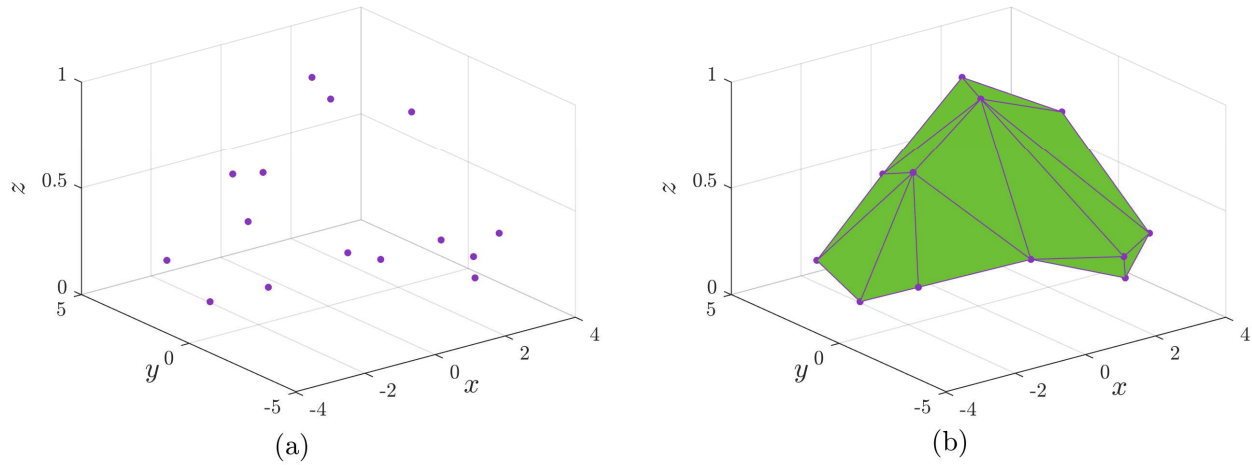


Figura 99. (a) Serie de puntos aleatorios X_i distribuidos en el espacio 3D, y (b) su respectiva triangulación de Delaunay en 3D.

ponente topológica (Botsch et al., 2010). La componente topológica se representa por un conjunto de vértices, como se describe en la ecuación 87,

$$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_V\}, \quad (87)$$

y un conjunto de facetas triangulares conectadas entre si, ecuación 88,

$$\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}, \quad \forall \quad f_i \in \{v_j, v_k, v_l\}. \quad (88)$$

La conectividad de un mallado triangular se puede representar en términos de sus respectivas aristas, ecuación 89,

$$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_E\}, \quad \forall \quad e_i \in \{v_i \times v_j\}. \quad (89)$$

El acople geométrico de una faceta f_i en un mallado triangular en $\mathbb{R}^3$ se especifica mediante la asociación de un vector posición $\vec{p}_i$, ecuación 90, en el espacio 3D para cada vértice $v_i \in \mathcal{E}$.

$$\vec{p}_i = \begin{pmatrix} x(v_i) \\ y(v_i) \\ z(v_i) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \quad \vec{p}_i \in \mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_V\}, \quad (90)$$

de tal manera que cada faceta f_i representa en realidad un triangulo en el espacio 3D definido por los tres vectores posición de sus respectivos vértices $\{v_j, v_k, v_l\}$. Dado a que un triangulo es una estructura 2-símplex, el mallado triangular se convierte en la estructura más simple para la representación de superficies lo que permite implementar algoritmos de procesamiento geométrico de alta eficiencia.

En la literatura especializada se reportan varios algoritmos, y sus variantes, para generar un mallado triangular de Delaunay a partir de una nube de puntos dispersos en 3D (Hjelle and Dæhlen, 2006). Los algoritmos de mallado triangular, en general, retornan un arreglo de facetas $\mathcal{F}$ como una matriz de dimensiones $(N, 3)$ en donde N , como se observa en la ecuación 88, corresponde al total de facetas f_i computadas para la nube de puntos 3D.

En la Figura 100 se muestra el mallado de la nube de puntos 3D del cráneo humano, construido a partir de la triangulación de Delaunay, con su respectivo facetado (aristas de cada faceta

delineadas en color negro). En la Figura 101 se muestran 2 vistas de la parte anterior del mismo mallado pero sin facetado, y en la Figura 102 2 vistas de la parte posterior.

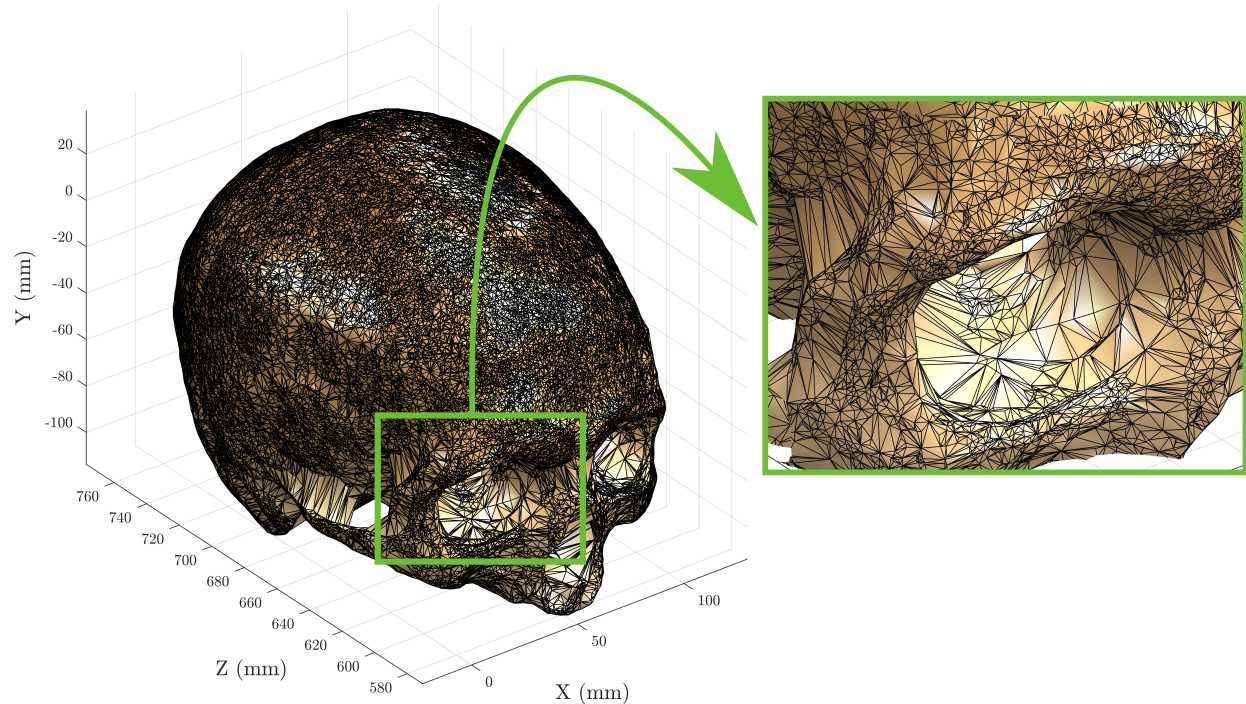


Figura 100. Mallado triangular de Delaunay de la nube de puntos 3D del cráneo humano con su respectivo facetado.

4.4.2. Remallado isotrópico. Las facetas que se forman al construir un mallado mediante la triangulación de Delaunay son basicamente triángulos irregulares; razón por la que se denomina a este tipo de mallados como de *baja isotropía*. En cambio, triángulos cuasi equiláteros forman mallados que se conocen como de *alta isotropía*, y de acuerdo con Botsh *et al* (Botsch et al., 2010) este tipo de mallados presentan un mayor rendimiento en aplicaciones numéricas y computacionales.

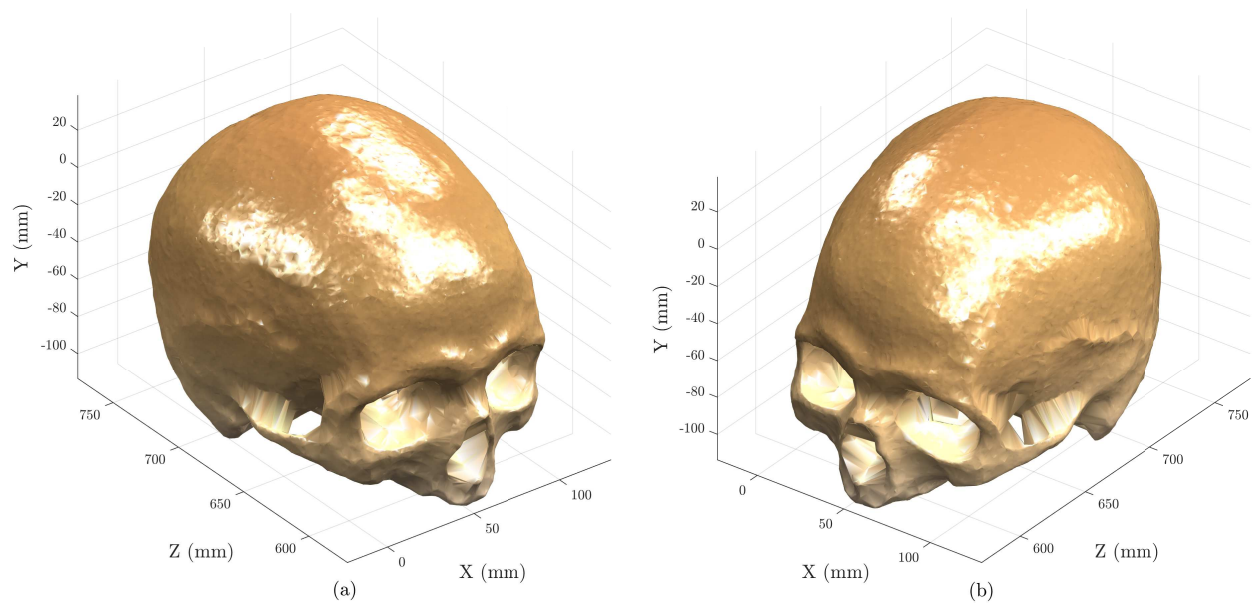


Figura 101. Mallado triangular de Delaunay de la nube de puntos 3D del cráneo humano sin facetado, desde su vista (a) fronto-temporal-parietal derecha, y (b) fronto-temporal-parietal izquierda.

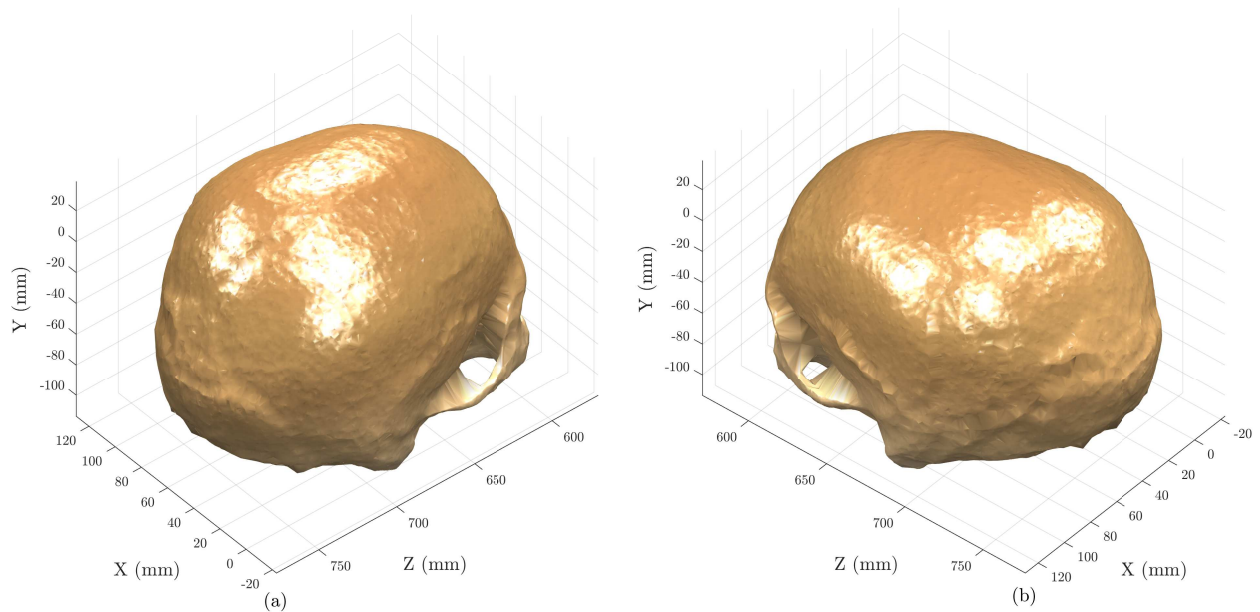


Figura 102. Mallado triangular de Delaunay de la nube de puntos 3D del cráneo humano sin facetado, desde su vista (a) occipital-parietal-temporal derecha, y (b) occipital-parietal-temporal izquierda.

Al proceso de construir otro mallado a partir de un mallado de entrada, se le conoce como *remallado*. El remallado isotrópico fue propuesto por Botsh *et al* (Botsch et al., 2010), y consiste en convertir cualquier mallado triangular en un mallado con alta isotropía en el que los triángulos cuasiequiláteros poseen casi la misma longitud de borde. El algoritmo del remallado isotrópico toma como entrada un mallado con la triangulación de Delaunay, que consta de un arreglo de vértices $\mathcal{V}$ y facetas $\mathcal{F}$, y a partir de una determinada longitud de borde L y número de iteraciones repite la aplicación de los *operadores locales* de remallado.

Los operadores locales de remallado dividen los bordes de cada faceta, eliminan los bordes cortos sustituyéndolos por un vértice, realizan las conexiones y reubican los vértices hasta obtener aristas de una longitud aproximadamente igual a L . Paso seguido, los vértices son modificados usando la relajación tangencial para regularizar el mallado y luego son proyectados de regreso a la superficie original. Este procedimiento se repite un determinado número de iteraciones, Dunyach *et al* afirman que el número de iteraciones debe ser entre 5 y 10 (Dunyach et al., 2013).

El algoritmo define el intervalo $[L_{min}, L_{max}]$ a partir de los factores $4/5$ y $4/3$, respectivamente, de la longitud de borde L como se muestra en la ecuación 91,

$$L_{min} = \frac{4}{5}L \wedge L_{max} = \frac{4}{3}L. \quad (91)$$

El propósito de esta definición (ecuación 91) es que los operadores locales de remallado mantengan los bordes convergiendo a longitudes de borde uniformes. Una descripción más deta-

llada de cada uno de los operadores locales de remallado se encuentra en el libro de Botsch *et al*: “*Polygon Mesh Processing*” (Botsch et al., 2010).

Finalmente, en la Figura 103 se muestra el remallado isotrópico, con su respectivo facetado, que se obtiene al tomar como entrada el mallado de la triangulación de Delaunay que se muestra en la Figura 100. En la Figura 104 se muestran 2 vistas de la parte anterior del mismo mallado pero sin facetado, y en la Figura 105 2 vistas de la parte posterior.

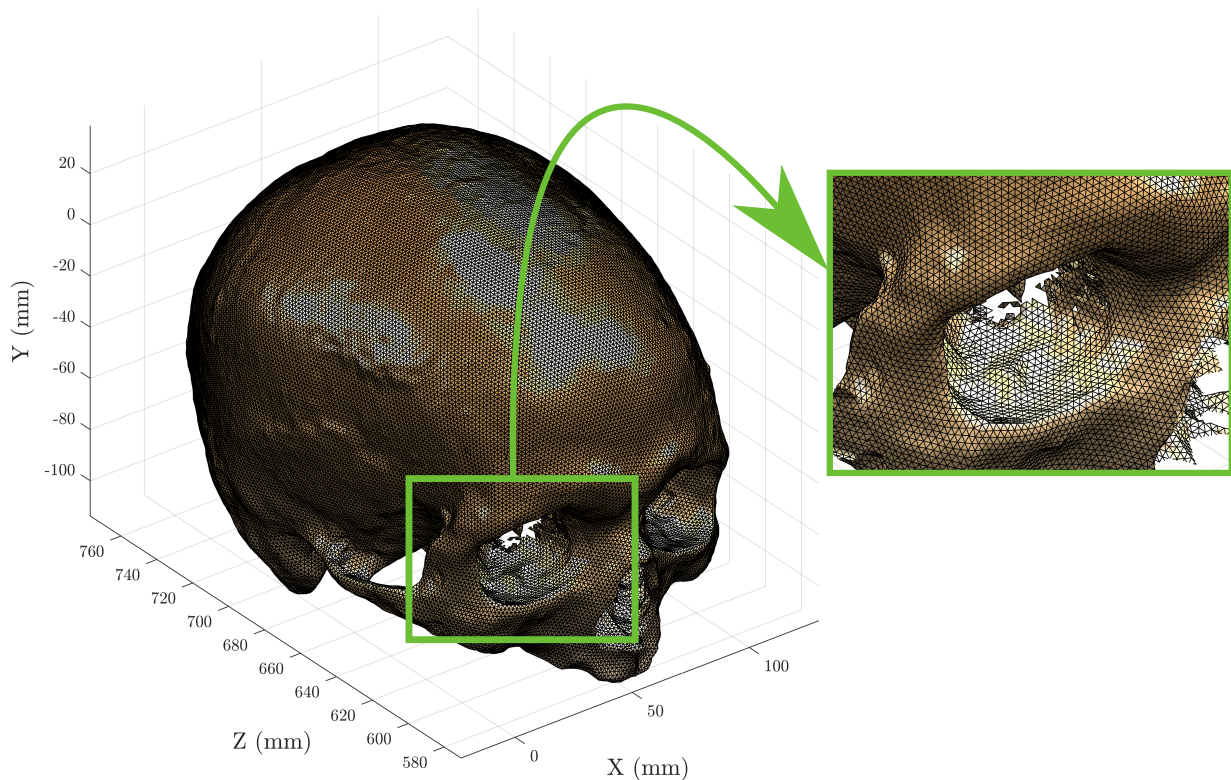


Figura 103. Remallado isotrópico de la nube de puntos 3D del cráneo humano con su respectivo facetado.

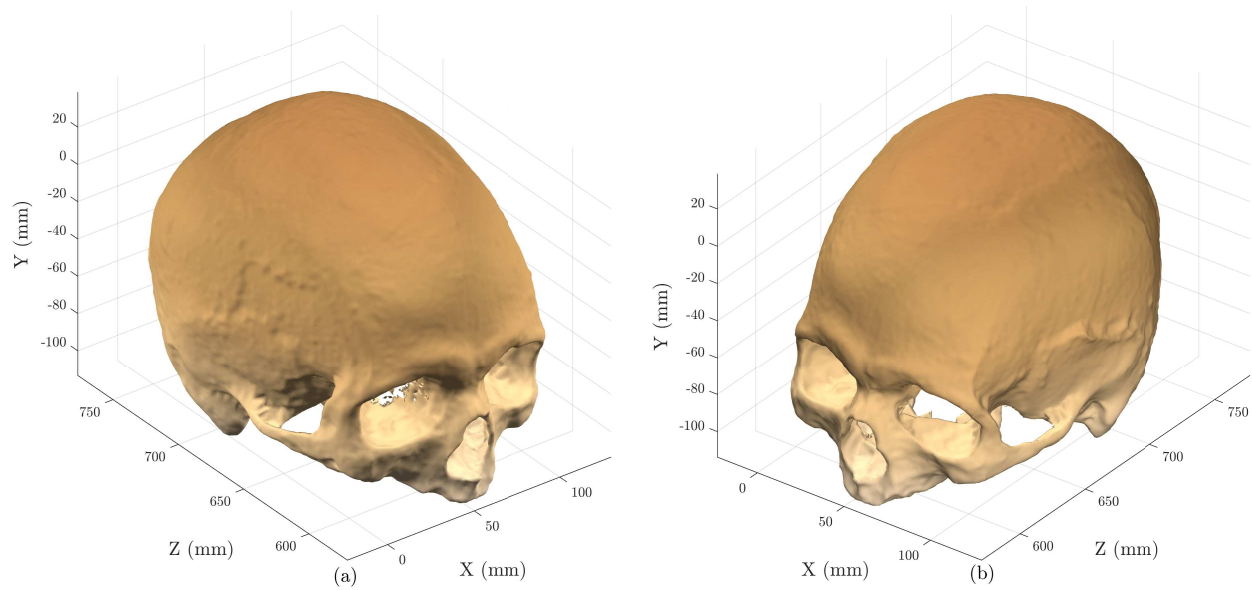


Figura 104. Remallado isotrópico de la nube de puntos 3D del cráneo humano sin facetado, desde su vista (a) fronto-temporal-parietal derecha, y (b) fronto-temporal-parietal izquierda.

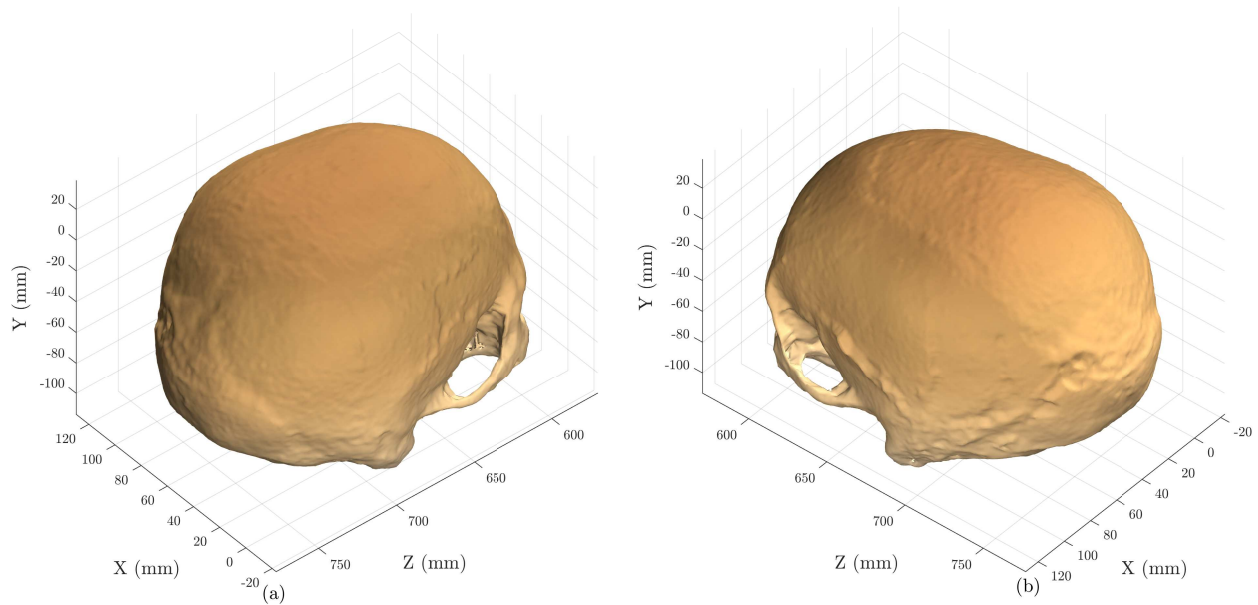


Figura 105. Remallado isotrópico de la nube de puntos 3D del cráneo humano sin facetado, desde su vista (a) occipital-parietal-temporal derecha, y (b) occipital-parietal-temporal izquierda.

5. Conclusiones

Este trabajo de investigación concluye con la propuesta de una novedosa, y de relativo bajo costo, metodología de R3DD especializada en el cráneo humano. La configuración experimental consta de una cámara digital y un vídeo proyector comercial, y se basa en un técnica óptica de luz estructurada conocida como proyección de franjas. En ningún momento, durante todo el procedimiento, se requiere de unidades de fijación o de traslación de alta precisión, lo que le atribuye versatilidad y flexibilidad a esta metodología, a demás de otras ventajas como rapidez y precisión, propias de la técnica de proyección de franjas. De este modo se establece que las condiciones experimentales son básicamente: evitar mover los dispositivos después de haber calibrado, y ubicar el cráneo a reconstruir dentro del volumen de calibración, en el campo de observación de la cámara, que a su vez debe corresponder con las distancias en donde se han focalizado la observación y la proyección. La oscuridad es deseable, para evitar ruido en las imágenes por iluminación ambiente o otras fuentes de luz, sin embargo no es indispensable y se pueden regular los efectos de la iluminación ambiente con la manipulación del diafragma de la cámara y la intensidad luminosa del vídeo proyector.

El análisis del espectro de Fourier de los algoritmos de corrimiento de fase, permite tener una visión clara de como los armónicos debidos al efecto gamma generan unas franjas residuales en la fase continua que se relacionan con la frecuencia de proyección y el número de imágenes del algoritmo de corrimiento de fase. Al entender estos algoritmos como un filtro de cuadratura compleja se puede concluir que la función de transferencia propia de cada uno filtra el fondo con-

tinuo, permite el paso del armónico de orden $+1$ y filtra el de orden -1 , filtra algunos armónicos en función del número de imágenes, y la amplitud de la onda de error depende de la amplitud de los armónicos que no se alcanzan a filtrar. En la búsqueda de reducir el error en la fase debido al efecto gamma y la no linealidad de los dispositivos (cámara y vídeo proyector), se analizaron las principales propuestas reportadas en la literatura que comprenden los métodos pasivos, activos y combinados. La principal conclusión de este análisis es que a mayor número de imágenes en el algoritmo de corrimiento de fase, la función de transferencia genera un filtro cada vez más restrictivo que va filtrando mayor cantidad de armónicos. Los mejores resultados se obtienen utilizando el algoritmo de Peter De Groot que requiere de 9 imágenes desfasadas $2\pi/8$.

Para el desenvolvimiento de fase, considerando la compleja topografía superficial que presenta el cráneo humano, se propone en este trabajo un algoritmo temporal a dos frecuencias con restricciones geométricas y ajuste polinomial, el cual se pudo demostrar experimentalmente evita la generación y propagación de errores debido a discontinuidades abruptas en la topografía superficial y reduce significativamente el ruido ocasionado por el factor amplificador que deriva de la relación de las dos frecuencias extremas. Para calibrar la configuración cámara- proyector y poder realizar la conversión que relaciona los valores de fase continua (*rad*) con alturas (*mm*), se incorpora como parte de la metodología propuesta una estrategia de calibración que requiere únicamente de un plano de calibración ajedrezado. Este mismo plano se utiliza inicialmente para calibrar la cámara mediante la reconocida técnica de Zhang, la cual permite obtener los parámetros intrínsecos y extrínsecos de una cámara. Una vez calculados estos parámetros, se adquieren imágenes

del mismo plano de calibración ubicado frente a la cámara, desplazándolo regularmente dentro del volumen de calibración (aproximadamente 20 cm). Estas imágenes, con el patrón ajedrezado y el patrón de franjas de reconstrucción, aportan información importante que comprende las coordenadas tridimensionales de unos puntos de control y su respectivo valor de fase continua absoluta, lo que permite mediante un ajuste polinomial encontrar los coeficientes con los que se pueden encontrar las coordenadas tridimensionales respecto al sistema coordenado de la cámara a partir de su información de fase continua absoluta.

A partir de la validación metrológica de la metodología de reconstrucción tridimensional propuesta se concluye que permite medir variaciones en la topografía superficial del orden de décimas de milímetro ($100\mu m$) con un error máximo de $\pm 51.2\mu m$. Dos algoritmos computacionales clásicos se utilizan para las etapas de: registro, la cual permite obtener la reconstrucción tridimensional del cráneo humano a 360° , y la etapa de mallado, en la cual se dota de noción de superficie la nube de puntos. El primero es el algoritmo ICP (Iterative Closets Points), y el segundo es el algoritmo de Remallado Isotrópico.

Finalmente, dentro de los resultados de este trabajo de investigación se destacan algunos productos como: la publicación de un artículo de divulgación científica publicado en una revista internacional indexada en categoría A1 por Colciencias Gonzalez and Meneses (2019), la participación en una conferencia científica nacional:

- XXVII Congreso Nacional de Física, Octubre de 2017, Cartagena Colombia,

y la participación en cinco conferencias científicas internacionales:

- XV Encuentro Nacional de Óptica y VI Conferencia Andina y del Caribe en Óptica y sus Aplicaciones. Noviembre de 2017, Bucaramanga Colombia,
- Frontiers in Optics and Laser Science, Septiembre de 2018, Washington D.C. - EE.UU Gonzalez and Meneses (2018b),
- Latin America Optics and Photonics Conference, Noviembre de 2018, Lima Peru Gonzalez and Meneses (2018a),
- Digital Holography and Three-Dimensional Imaging, Mayo de 2019, Bordeaux Francia González and Meneses (2019b)
- Frontiers in Optics and Laser Science, Septiembre de 2019, Washington D.C. - EE.UU González and Meneses (2019a).
- X Reunión Iberoamericana de Óptica, Septiembre de 2019, Cancún México.
- XVI Encuentro Nacional de Óptica y VII Conferencia Andina y del Caribe en Óptica y sus Aplicaciones. Noviembre de 2019, Montería Colombia.

Referencias Bibliográficas

- Ascher, U. M. and Huang, H. (2018). Numerical analysis in visual computing what we can learn from each other. *Vietnam Journal of Mathematics*, 46(4):745–759.
- Botsch, M., Kobbelt, L., Pauly, M., Alliez, P., and Lévy, B. (2010). *Polygon mesh processing*. AK Peters/CRC Press.
- Bouguet, J.-Y. (2004). Camera calibration toolbox for matlab. http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/index.html.
- Bouguet, J.-Y. et al. (1999). *Visual methods for three-dimensional modeling*. Citeseer.
- Bruning, J. H., Herriott, D. R., Gallagher, J., Rosenfeld, D., White, A., and Brangaccio, D. (1974). Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces and lenses. *Applied optics*, 13(11):2693–2703.
- Buytaert, J. A. and Dirckx, J. J. (2011a). Study of the performance of 84 phase-shifting algorithms for interferometry. *Journal of Optics*, 40(3):114.
- Buytaert, J. A. and Dirckx, J. J. (2011b). Study of the performance of 84 phase-shifting algorithms for interferometry. *Journal of Optics*, 40(3):114.
- Cai, Z., Liu, X., Peng, X., Zhang, Z., Jiang, H., Yin, Y., and Huang, S. (2016). Phase error compensation methods for high-accuracy profile measurement. *Measurement Science and Technology*, 27(4):045201.

- Cai, Z., Liu, X., Tang, Q., Peng, X., and Yin, Y. (2017). Comparison of active, passive and adaptive phase error compensation methods using a universal phase error model. In *International Conference on Optical and Photonics Engineering (icOPEN 2016)*, volume 10250, page 102502Z. International Society for Optics and Photonics.
- Chen, Y. and Medioni, G. (1992). Object modelling by registration of multiple range images. *Image and vision computing*, 10(3):145–155.
- Clement, J. and Marks, M. (2005). *Computer-Graphic Facial Reconstruction*. ELSEIVER, Burlington.
- Cui, H., Zhao, Z., Wu, Y., Dai, N., Cheng, X., and Zhang, L. (2014). Digital fringe image gamma modeling and new algorithm for phase error compensation. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 125(24):7175–7181.
- De Berg, M., Van Kreveld, M., Overmars, M., and Schwarzkopf, O. (1997). Computational geometry. In *Computational geometry*, pages 1–17. Springer.
- De Groot, P. (1995). Derivation of algorithms for phase-shifting interferometry using the concept of a data-sampling window. *Applied Optics*, 34(22):4723–4730.
- Ding, Y., Xi, J., Yu, Y., Cheng, W., Wang, S., and Chicharo, J. F. (2012). Frequency selection in absolute phase maps recovery with two frequency projection fringes. *Optics express*, 20(12):13238–13251.

- Du, G., Wang, M., Zhou, C., Si, S., Li, H., Lei, Z., and Li, Y. (2017). Improved phase-unwrapping method using geometric constraints. *Journal of Modern Optics*, 64(13):1263–1269.
- Dunyach, M., Vanderhaeghe, D., Barthe, L., and Botsch, M. (2013). Adaptive remeshing for real-time mesh deformation.
- Forsyth, D. A. and Ponce, J. (2003). A modern approach. *Computer vision: a modern approach*, pages 88–101.
- Freischlad, K. and Koliopoulos, C. L. (1990). Fourier description of digital phase-measuring interferometry. *Josa a*, 7(4):542–551.
- Gonzalez, A. and Meneses, J. (2018a). A novel calibration method for fringe projection profilometry considering projector lens distortion. In *Latin America Optics and Photonics Conference*, page Th5B.2. Optical Society of America.
- Gonzalez, A. and Meneses, J. (2019). Accurate calibration method for a fringe projection system by projecting an adaptive fringe pattern. *Applied Optics*, 58(17):4610–4615.
- Gonzalez, A. L. and Meneses, J. E. (2018b). Three-dimensional digital reconstruction methodology specialized in human skulls. In *Frontiers in Optics / Laser Science*, page JW4A.131. Optical Society of America.
- González, A. L. and Meneses, J. E. (2019a). Double-frequency tpu method with geometric constraints and polynomial adjust. In *Frontiers in Optics + Laser Science APS/DLS*, page JW4A.100. Optical Society of America.

- González, A. L. and Meneses, J. E. (2019b). Fourier spectral analysis to reduce the gamma effect in fringe projection profilometry. In *Digital Holography and Three-Dimensional Imaging 2019*, page Th3A.31. Optical Society of America.
- Gruen, A. and Huang, T. S. (2013). *Calibration and orientation of cameras in computer vision*, volume 34. Springer Science & Business Media.
- Guo, H., He, H., and Chen, M. (2004). Gamma correction for digital fringe projection profilometry. *Applied optics*, 43(14):2906–2914.
- Hanning, T. (2011). *High precision camera calibration*. Springer.
- Hartley, R. and Zisserman, A. (2003). *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge university press.
- Hjelle, Ø. and Dæhlen, M. (2006). *Triangulations and applications*. Springer Science & Business Media.
- Hoang, T., Pan, B., Nguyen, D., and Wang, Z. (2010). Generic gamma correction for accuracy enhancement in fringe-projection profilometry. *Optics letters*, 35(12):1992–1994.
- Huang, P. S., Hu, Q. J., and Chiang, F.-P. (2002). Double three-step phase-shifting algorithm. *Applied optics*, 41(22):4503–4509.
- Huang, P. S. and Zhang, S. (2006). Fast three-step phase-shifting algorithm. *Applied optics*, 45(21):5086–5091.

- Huntley, J. M. and Saldner, H. (1993). Temporal phase-unwrapping algorithm for automated interferogram analysis. *Applied Optics*, 32(17):3047–3052.
- Huntley, J. M. and Saldner, H. O. (1997a). Error-reduction methods for shape measurement by temporal phase unwrapping. *JOSA A*, 14(12):3188–3196.
- Huntley, J. M. and Saldner, H. O. (1997b). Shape measurement by temporal phase unwrapping: comparison of unwrapping algorithms. *Measurement Science and Technology*, 8(9):986.
- Hyun, J.-S. and Zhang, S. (2016). Enhanced two-frequency phase-shifting method. *Applied optics*, 55(16):4395–4401.
- Kemao, Q., Wang, H., and Gao, W. (2008). Windowed fourier transform for fringe pattern analysis: theoretical analyses. *Applied optics*, 47(29):5408–5419.
- Lei, Z., Wang, C., and Zhou, C. (2015). Multi-frequency inverse-phase fringe projection profilometry for nonlinear phase error compensation. *Optics and Lasers in Engineering*, 66:249–257.
- Li, Z. and Li, Y. (2011). Gamma-distorted fringe image modeling and accurate gamma correction for fast phase measuring profilometry. *Optics letters*, 36(2):154–156.
- Liu, K., Wang, Y., Lau, D. L., Hao, Q., and Hassebrook, L. G. (2010a). Dual-frequency pattern scheme for high-speed 3-d shape measurement. *Optics express*, 18(5):5229–5244.
- Liu, K., Wang, Y., Lau, D. L., Hao, Q., and Hassebrook, L. G. (2010b). Gamma model and its analysis for phase measuring profilometry. *JOSA A*, 27(3):553–562.

- Liu, Y., Xi, J., Yu, Y., and Chicharo, J. (2010c). Phase error correction based on inverse function shift estimation in phase shifting profilometry using a digital video projector. In *Optical Metrology and Inspection for Industrial Applications*, volume 7855, page 78550W. International Society for Optics and Photonics.
- Ma, S., Quan, C., Zhu, R., Chen, L., Li, B., and Tay, C. (2012). A fast and accurate gamma correction based on fourier spectrum analysis for digital fringe projection profilometry. *Optics Communications*, 285(5):533–538.
- Meneses, J., Gharbi, T., and Humbert, P. (2005). Phase-unwrapping algorithm for images with high noise content based on a local histogram. *Applied optics*, 44(7):1207–1215.
- Pan, B., Kemao, Q., Huang, L., and Asundi, A. (2009a). Phase error analysis and compensation for nonsinusoidal waveforms in phase-shifting digital fringe projection profilometry. *Optics Letters*, 34(4):416–418.
- Pan, B., Kemao, Q., Huang, L., and Asundi, A. (2009b). Phase error analysis and compensation for nonsinusoidal waveforms in phase-shifting digital fringe projection profilometry. *Optics Letters*, 34(4):416–418.
- Poynton, C. (2012). *Digital video and HD: Algorithms and Interfaces*. Elsevier.
- Romeiro, R., Marroquim, R., Esperana, C., Breda, A., and Figueredo, C. M. (2014). Forensic facial reconstruction using mesh template deformation with detail transfer over HRBF. *Brazilian Symposium of Computer Graphic and Image Processing*, pages 266–273.

- Rusinkiewicz, S. and Levoy, M. (2001). Efficient variants of the icp algorithm. In *3dim*, volume 1, pages 145–152.
- Sansoni, G., Carocci, M., and Rodella, R. (1999). Three-dimensional vision based on a combination of gray-code and phase-shift light projection: analysis and compensation of the systematic errors. *Applied optics*, 38(31):6565–6573.
- Servin, M., Estrada, J., and Quiroga, J. (2009). Spectral analysis of phase shifting algorithms. *Optics Express*, 17(19):16423–16428.
- Servin, M., Padilla, J., Gonzalez, A., and Garnica, G. (2015). Temporal phase-unwrapping of static surfaces with 2-sensitivity fringe-patterns. *Optics express*, 23(12):15806–15815.
- Takeda, M. and Mutoh, K. (1983). Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-d object shapes. *Applied optics*, 22(24):3977–3982.
- Taylor, K. T. (2000). *Forensic Art and Illustration*. CRC Press, New York.
- Thompson, T. and Black, S., editors (2008). *Forensic Human Identification: An Introduction*. CRC Press, Boca Raton.
- Tian, J., Peng, X., and Zhao, X. (2008). A generalized temporal phase unwrapping algorithm for three-dimensional profilometry. *Optics and Lasers in Engineering*, 46(4):336–342.
- Toth, C. D., O’Rourke, J., and Goodman, J. E. (2017). *Handbook of discrete and computational geometry*. Chapman and Hall/CRC.

- Tsai, R. (1987). A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3d machine vision metrology using off-the-shelf tv cameras and lenses. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 3(4):323–344.
- White, T. D., Black, M. T., and Folkens, P. A. (2011). *Human osteology*. Academic press.
- Wilkinson, C. and Rynn, C., editors (2012). *Cranofacial Identification*. Cambridge University Press, New York.
- Zhang, S. (2013). *Handbook of 3D machine vision: Optical metrology and imaging*. CRC press.
- Zhang, S. (2015). Comparative study on passive and active projector nonlinear gamma calibration. *Applied optics*, 54(13):3834–3841.
- Zhang, S. (2018). Absolute phase retrieval methods for digital fringe projection profilometry: A review. *Optics and Lasers in Engineering*, 107:28–37.
- Zhang, S. and Yau, S.-T. (2007). Generic nonsinusoidal phase error correction for three-dimensional shape measurement using a digital video projector. *Applied optics*, 46(1):36–43.
- Zhang, X., Zhu, L., Li, Y., and Tu, D. (2012). Generic nonsinusoidal fringe model and gamma calibration in phase measuring profilometry. *JOSA A*, 29(6):1047–1058.
- Zhang, Z. (2000). A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 22.

- Zuo, C., Chen, Q., Gu, G., Feng, S., and Feng, F. (2012). High-speed three-dimensional profilometry for multiple objects with complex shapes. *Optics express*, 20(17):19493–19510.
- Zuo, C., Feng, S., Huang, L., Tao, T., Yin, W., and Chen, Q. (2018). Phase shifting algorithms for fringe projection profilometry: A review. *Optics and Lasers in Engineering*, 109:23–59.
- Zuo, C., Huang, L., Zhang, M., Chen, Q., and Asundi, A. (2016). Temporal phase unwrapping algorithms for fringe projection profilometry: A comparative review. *Optics and Lasers in Engineering*, 85:84–103.

Apéndices

Apéndice A. Ecuaciones Complementarias

A.1 Origen de la ecuación de intensidad usada en TPF

La ecuación de intensidad típica en el uso de la TPF con vídeo proyectores comerciales tiene su origen en la óptica física, en donde se describe matemáticamente el frente de onda de una fuente de luz como se muestra en la ecuación 92,

$$w(x, y) = a(x, y)e^{i[\Phi(x, y)]}, \quad (92)$$

en donde x y y corresponden a las coordenadas espaciales, $a(x, y)$ es la amplitud del frente de onda, y la fase $\Phi(x, y)$ esta dada por la ecuación 93,

$$\Phi(x, y) = \frac{2\pi h(x, y)}{\lambda}. \quad (93)$$

En la ecuación 93 λ es la longitud de onda, y $h(x, y)$ es la distancia que viaja la luz desde su origen.

Asumiendo dos frentes de onda, uno de referencia $w_r(x, y)$ y otro de prueba $w_p(x, y)$, con la misma longitud de onda, estos se describirían de acuerdo a las ecuaciones 94 y 95,

$$w_r(x, y) = a_r(x, y)e^{i[\Phi_r(x, y)]}, \quad (94)$$

$$w_p(x, y) = a_p(x, y)e^{i[\Phi_p(x, y)]}, \quad (95)$$

en donde $a_r(x, y)$ y $a_p(x, y)$ son las respectivas amplitudes de los frentes de onda, y $\Phi_r(x, y)$ y $\Phi_p(x, y)$ son sus respectivas fases. Cuando los dos frentes de onda se encuentran, el frente de onda equivalente se puede describir como se muestra en la ecuación 96,

$$w(x, y) = w_r(x, y) + w_p(x, y). \quad (96)$$

La interferencia de los dos frentes de onda resulta en un patrón de franjas, cuya intensidad se puede calcular como se muestra en la ecuación 97,

$$I(x, y) = |w_r(x, y) + w_p(x, y)|^2. \quad (97)$$

Obviando las coordenadas (x, y) , por simplicidad, la magnitud al cuadrado de la suma de los dos frentes de onda da como resultado la ecuación 98,

$$\begin{aligned}
|w_r + w_p|^2 &= [w_r + w_p] [w_r + w_p]^* , \\
|w_r + w_p|^2 &= w_r w_r^* + w_r w_t^* + w_t w_r^* + w_t w_t^* .
\end{aligned} \tag{98}$$

Bajo esta consideración la ecuación 97 se puede reescribir como se muestra en la ecuación 99,

$$\begin{aligned}
I &= a_r e^{i\Phi_r} a_r e^{-i\Phi_r} + a_r e^{i\Phi_r} a_t e^{-i\Phi_t} + a_t e^{i\Phi_t} a_r e^{-i\Phi_r} + a_t e^{i\Phi_t} a_t e^{-i\Phi_t} , \\
I &= a_r^2 e^{i(\Phi_r - \Phi_r)} + a_r a_t e^{i(\Phi_r - \Phi_t)} + a_r a_t e^{i(\Phi_t - \Phi_r)} + a_t^2 e^{i(\Phi_t - \Phi_t)} , \\
I &= a_r^2 + a_t^2 + a_r a_t \left[e^{i(\Phi_r - \Phi_t)} + e^{i(\Phi_t - \Phi_r)} \right] , \\
I &= a_r^2 + a_t^2 + 2a_r a_t \cos(\Phi_r - \Phi_t) ,
\end{aligned} \tag{99}$$

en donde la intensidad del fondo continuo esta dada por la ecuación 100,

$$A = a_r^2(x, y) + a_t^2(x, y), \tag{100}$$

y el contraste o modulación de las franjas dado por la ecuación 101,

$$B = 2a_r(x, y)a_t(x, y). \quad (101)$$

Si se define la diferencia de fase como se muestra en la ecuación 102,

$$\varphi(x, y) = \Phi_r(x, y) - \Phi_t(x, y), \quad (102)$$

se obtiene la ecuación fundamental de la TPF, ecuación 103,

$$I(x, y) = A(x, y) + B(x, y) \cos(\varphi(x, y)). \quad (103)$$

A.2 Algoritmo de corrimiento de fase a tres imágenes

Usando las ecuaciones 8 - 10 se genera el sistema de franjas para el algoritmo de corrimiento de fase a tres imágenes ($N = 3$). Con la ecuación 8 se define una expresión para el termino A , tal y como se muestra en la ecuación 104,

$$\begin{aligned}
I_1 &= A + B \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right), \\
A &= I_1 - B \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right).
\end{aligned} \tag{104}$$

Reemplazando A en la ecuación 10 se obtiene una expresión para B , ecuación 105,

$$\begin{aligned}
I_3 &= A + B \cos \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right), \\
I_3 &= I_1 + B \left(\cos \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) - \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \right), \\
I_3 &= I_1 + B(\sqrt{3} \sin(\varphi)), \\
B &= \frac{I_3 - I_1}{\sqrt{3} \sin(\varphi)}.
\end{aligned} \tag{105}$$

Repitiendo el procedimiento, reemplazar A , pero en la ecuación 9 se obtiene la ecuación 106,

$$\begin{aligned}
I_2 &= A + B \cos(\varphi), \\
I_2 &= I_1 + B \left(\cos(\varphi) - \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \right), \\
I_2 &= I_1 + B \left(\frac{3}{2} \cos(\varphi) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\varphi) \right), \\
B &= \frac{2(I_2 - I_1)}{3 \cos(\varphi) + \sqrt{3} \sin(\varphi)}.
\end{aligned} \tag{106}$$

Finalmente, igualando las ecuaciones 105 y 106 se llega a una expresión para calcular la fase usando tres imágenes desfasadas $\delta = 2\pi/3$, ecuación 107,

$$\begin{aligned}
\frac{2(I_2 - I_1)}{3 \cos(\varphi) + \sqrt{3} \sin(\varphi)} &= \frac{I_3 - I_1}{\sqrt{3} \sin(\varphi)}, \\
\frac{2(I_2 - I_1)}{I_3 - I_1} &= \frac{3 \cos(\varphi)}{\sqrt{3} \sin(\varphi)} + 1, \\
\frac{2(I_2 - I_1) - I_3 + I_1}{I_3 - I_1} &= \sqrt{3} \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}, \\
\tan \varphi &= \sqrt{3} \frac{I_3 - I_1}{2I_2 - I_1 - I_3}, \\
\varphi &= \tan^{-1} \left(\sqrt{3} \frac{I_3 - I_1}{2I_2 - I_1 - I_3} \right).
\end{aligned} \tag{107}$$

Ecuación estándar de corrimiento de fase para N-imágenes. La ecuación estándar propuesta por Bruning *et al* Bruning et al. (1974) para obtener la fase de un deter-

minado patrón de franjas usando un algoritmo de corrimiento de fase a $N - \text{imágenes}$, deriva de la solución general por mínimos cuadrados para una serie de N imágenes desfasadas δ_i . Teniendo en cuenta que la ecuación general para el corrimiento de fase 7 se puede reescribir como se muestra en la ecuación 108,

$$I_i = A + B \cos(\varphi) \cos(\delta_i) + B \sin(\varphi) \sin(\delta_i), \quad (108)$$

o de otro modo,

$$I_i = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\delta_i) + \alpha_2 \sin(\delta_i), \quad (109)$$

en donde,

$$\alpha_0 = A, \quad (110)$$

$$\alpha_1 = B \cos(\varphi), \quad (111)$$

$$\alpha_2 = B \sin(\varphi). \quad (112)$$

La ecuación 109 se presenta en la forma apropiada para un ajuste de mínimos cuadrados

generalizado de las intensidades I . La diferencia de cuadrados entre las intensidades medidas y las intensidades calculadas con la ecuación 109 para de las tres variables α_0 , α_1 , y α_2 esta dada por la ecuación 113,

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^N [I_i - \alpha_0 - \alpha_1 \cos(\delta_i) - \alpha_2 \sin(\delta_i)]. \quad (113)$$

Este error se minimiza con la diferencia de cada una de las tres incógnitas e igualando estos tres resultados a cero. La solución simultánea de estas tres ecuaciones produce el resultado de mínimos cuadrados, y esta dado por la ecuación matricial 114,

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = P^{-1}Q, \quad (114)$$

los componentes de las matrices se presentan en la ecuación 115,

$$P = \begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^N \cos(\delta_i) & \sum_{i=1}^N \sin(\delta_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos(\delta_i) & \sum_{i=1}^N \cos^2(\delta_i) & \sum_{i=1}^N \cos(\delta_i) \sin(\delta_i) \\ \sum_{i=1}^N \sin(\delta_i) & \sum_{i=1}^N \cos(\delta_i) \sin(\delta_i) & \sum_{i=1}^N \sin^2(\delta_i) \end{pmatrix}, \quad (115)$$

y en la ecuación 116,

$$Q = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N I_i \\ \sum_{i=1}^N I_i \cos(\delta_i) \\ \sum_{i=1}^N I_i \sin(\delta_i) \end{pmatrix}. \quad (116)$$

Una vez se determinan los valores de las tres incógnitas α_0 , α_1 , y α_2 , la fase φ se calcula con la ecuación 117,

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right), \quad (117)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^N I_i \sin(\delta_i)}{\sum_{i=1}^N I_i \cos(\delta_i)} \right). \quad (118)$$

A.3 Ecuación de intensidad de franjas afectadas por un factor $\gamma = 3$

La ecuación 4 es modificada por el efecto de un factor $\gamma = 3$ como se muestra en la ecuación 119:

$$\begin{aligned}
 I^C &= (A + B \cos(\varphi))^3, \\
 I^C &= A^3 + 3A^2B \cos(\varphi) + 3AB^2 \cos(\varphi)^2 + B^3 \cos(\varphi)^3, \\
 I^C &= A^3 + 3A^2B \cos(\varphi) + \frac{3AB^2}{2} (\cos(2\varphi) + 1) + \frac{B^3}{4} (3 \cos(\varphi) + \cos(3\varphi)), \\
 I^C &= \left(A^3 + \frac{3AB^2}{2} \right) + \left(3A^2B + \frac{3B^3}{4} \right) \cos(\varphi) + \left(\frac{3AB^2}{2} \right) \cos(2\varphi) + \left(\frac{B^3}{4} \right) \cos(3\varphi), \\
 I^C &= H + K \cos(\varphi) + L \cos(2\varphi) + M \cos(3\varphi). \tag{119}
 \end{aligned}$$

Incluyendo la no linealidad de la cámara y el video proyector. La ecuación 18 contiene el termino cuadrático que incluye la respuesta no lineal de la cámara y el vídeo proyector, al incluir en esta expresión las definiciones dadas por las ecuaciones 15 y 16 se llega a la ecuación 120,

$$\begin{aligned}
 g(e) &= a + b \left\{ \frac{G}{2} [H + K \cos(\varphi) + L \cos(2\varphi) + M \cos(3\varphi)] \right\} \\
 &\quad + c \left\{ \frac{G}{2} [H + K \cos(\varphi) + L \cos(2\varphi) + M \cos(3\varphi)] \right\}^2. \tag{120}
 \end{aligned}$$

Al expandir el segundo termino de la ecuación 120 se obtiene la expresión 121,

$$\frac{bGH}{2} + \frac{bGK}{2} \cos(\varphi) + \frac{bGL}{2} \cos(2\varphi) + \frac{bGM}{2} \cos(3\varphi). \quad (121)$$

Con el mismo procedimiento, del tercer termino de la ecuación 120 resulta la expresión 122,

$$\begin{aligned} & \frac{cG^2H^2}{4} + \frac{cG^2HK}{2} \cos(\varphi) + \frac{cG^2HL}{2} \cos(2\varphi) + \frac{cG^2HM}{2} \cos(3\varphi) \\ & + \frac{cG^2K^2}{4} \cos(\varphi)^2 + \frac{cG^2KL}{2} \cos(\varphi) \cos(2\varphi) + \frac{cG^2KM}{2} \cos(\varphi) \cos(3\varphi) \\ & + \frac{cG^2L^2}{4} \cos(2\varphi)^2 + \frac{cG^2LM}{2} \cos(2\varphi) \cos(3\varphi) + \frac{cG^2M^2}{4} \cos(3\varphi)^2. \quad (122) \end{aligned}$$

Considerando las ecuaciones de la 123 a la 128, como una forma alternativa de expresar algunos términos de 122,

$$\cos(\varphi)^2 = \frac{\cos(2\varphi)}{2} + \frac{1}{2}, \quad (123)$$

$$\cos(2\varphi)^2 = \frac{\cos(4\varphi)}{2} + \frac{1}{2}, \quad (124)$$

$$\cos(3\varphi)^2 = \frac{\cos(6\varphi)}{2} + \frac{1}{2}, \quad (125)$$

$$\cos(\varphi)\cos(2\varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{2} + \frac{\cos(3\varphi)}{2}, \quad (126)$$

$$\cos(\varphi)\cos(3\varphi) = \frac{\cos(2\varphi)}{2} + \frac{\cos(4\varphi)}{2}, \quad (127)$$

$$\cos(2\varphi)\cos(3\varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{2} + \frac{\cos(5\varphi)}{2}, \quad (128)$$

la expresión 122 se puede reescribir como se muestra en la expresión 129,

$$\begin{aligned} & \frac{c G^2 H^2}{4} + \frac{c G^2 H K}{2} \cos(\varphi) + \frac{c G^2 H L}{2} \cos(2\varphi) + \frac{c G^2 H M}{2} \cos(3\varphi) \\ & + \frac{c G^2 K^2}{8} \cos(2\varphi) + \frac{c G^2 K^2}{8} + \frac{c G^2 K L}{4} \cos(\varphi) + \frac{c G^2 K L}{4} \cos(3\varphi) \\ & + \frac{c G^2 K M}{4} \cos(2\varphi) + \frac{c G^2 K M}{4} \cos(4\varphi) + \frac{c G^2 L^2}{8} \cos(4\varphi) + \frac{c G^2 L^2}{8} \\ & + \frac{c G^2 L M}{4} \cos(\varphi) + \frac{c G^2 L M}{4} \cos(5\varphi) + \frac{c G^2 M^2}{8} \cos(6\varphi) + \frac{c G^2 M^2}{8}. \quad (129) \end{aligned}$$

Ordenando y agrupando los términos que conforman la ecuación 120 se obtienen las expresiones de la 130 a la 136,

$$a + \frac{bGH}{2} + \frac{cG^2H^2}{4} + \frac{cG^2K^2}{8} + \frac{cG^2L^2}{8} + \frac{cG^2M^2}{8}, \quad (130)$$

$$\left[\frac{bGK}{2} + \frac{cG^2HK}{2} + \frac{cG^2KL}{4} + \frac{cG^2LM}{4} \right] \cos(\varphi), \quad (131)$$

$$\left[\frac{bGL}{2} + \frac{cG^2HL}{2} + \frac{cG^2K^2}{8} + \frac{cG^2KM}{4} \right] \cos(2\varphi), \quad (132)$$

$$\left[\frac{bGM}{2} + \frac{cG^2HM}{2} + \frac{cG^2KL}{4} \right] \cos(3\varphi), \quad (133)$$

$$\left[\frac{cG^2KM}{4} + \frac{cG^2L^2}{8} \right] \cos(4\varphi), \quad (134)$$

$$\left[\frac{cG^2LM}{4} \right] \cos(5\varphi), \quad (135)$$

$$\left[\frac{cG^2M^2}{8} \right] \cos(6\varphi), \quad (136)$$

reemplazando los valores constantes por los términos p, q, r, s, u, v , y w , se obtiene finalmente la ecuación 137, que corresponde a un patrón de franjas afectado por el efecto gamma del vídeo proyector y la no linealidad de la cámara y del vídeo proyector,

$$g(e) = p + q \cos(\varphi) + r \cos(2\varphi) + s \cos(3\varphi) + u \cos(4\varphi) + v \cos(5\varphi) + w \cos(6\varphi). \quad (137)$$

A.4 Diferencia de fase introducida por los armónicos residuales en un sistema de franjas a 3 imágenes con $\gamma = 3$

De acuerdo con la ecuación 11, la fase de un sistema de franjas ideales, generadas con las ecuaciones 8-10 para ser proyectadas, esta dada por la ecuación 138,

$$\tan(\varphi^P) = \sqrt{3} \frac{I_3^P - I_1^P}{2I_2^P - I_1^P - I_3^P}. \quad (138)$$

Al reemplazar I_1^P, I_2^P , e I_3^P en 138, la ecuación se puede reescribir como se muestra en 139,

$$\begin{aligned} \tan(\varphi^P) &= \sqrt{3} \frac{A + B \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) - A - B \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3})}{2A + 2B \cos(\varphi) - A - B \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) - A - B \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3})}, \\ \tan(\varphi^P) &= \sqrt{3} \frac{B(\cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) - \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}))}{B(2\cos(\varphi) - \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) - \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}))}, \\ \tan(\varphi^P) &= \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}B \sin(\varphi)}{3B \cos(\varphi)}, \\ \tan(\varphi^P) &= \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}. \end{aligned} \quad (139)$$

Por otra parte, la fase de un sistema de franjas afectadas por gamma ($\gamma = 3$) y la no linealidad de los dispositivos, como se describen en las ecuaciones 19-21, esta dada por la ecuación 140,

$$\tan(\varphi^C) = \sqrt{3} \frac{I_3^C - I_1^C}{2I_2^C - I_1^C - I_3^C}. \quad (140)$$

Considerando las ecuaciones de la 141 a la 146, que corresponden a la operación $I_3^C - I_1^C$ en el numerador de la ecuación 140,

$$q(\cos(\varphi - 2\pi/3) - \cos(\varphi + 2\pi/3)) = \sqrt{3}q \sin(\varphi), \quad (141)$$

$$r(\cos(2\varphi - 4\pi/3) - \cos(2\varphi + 4\pi/3)) = -\sqrt{3}r \sin(2\varphi), \quad (142)$$

$$s(\cos(3\varphi - 6\pi/3) - \cos(3\varphi + 6\pi/3)) = 0, \quad (143)$$

$$u(\cos(4\varphi - 8\pi/3) - \cos(4\varphi + 8\pi/3)) = \sqrt{3}u \sin(4\varphi), \quad (144)$$

$$v(\cos(5\varphi - 10\pi/3) - \cos(5\varphi + 10\pi/3)) = -\sqrt{3}v \sin(5\varphi), \quad (145)$$

$$w(\cos(6\varphi - 12\pi/3) - \cos(6\varphi + 12\pi/3)) = 0, \quad (146)$$

y las ecuaciones de la 147 a la 152, que corresponden a la operación $2I_2^C - I_1^C - I_3^C$ en el denominador de 140,

$$q(2\cos(\varphi) - \cos(\varphi + 2\pi/3) - \cos(\varphi - 2\pi/3)) = 3q\cos(\varphi), \quad (147)$$

$$r(2\cos(2\varphi) - \cos(2\varphi + 4\pi/3) - \cos(2\varphi - 4\pi/3)) = 3r\cos(2\varphi), \quad (148)$$

$$s(2\cos(3\varphi) - \cos(3\varphi + 6\pi/3) - \cos(3\varphi - 6\pi/3)) = 0, \quad (149)$$

$$u(2\cos(4\varphi) - \cos(4\varphi + 8\pi/3) - \cos(4\varphi - 8\pi/3)) = 3u\cos(4\varphi), \quad (150)$$

$$v(2\cos(5\varphi) - \cos(5\varphi + 10\pi/3) - \cos(5\varphi - 10\pi/3)) = 3v\cos(5\varphi), \quad (151)$$

$$w(2\cos(6\varphi) - \cos(6\varphi + 12\pi/3) - \cos(6\varphi - 12\pi/3)) = 0, \quad (152)$$

la ecuación 140 se puede escribir como se muestra en la ecuación 153.

$$\begin{aligned} \tan(\varphi^C) &= \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}(q\sin(\varphi) - r\sin(2\varphi) + u\sin(4\varphi) - v\sin(5\varphi))}{3(q\cos(\varphi) + r\cos(2\varphi) + u\cos(4\varphi) + v\cos(5\varphi))}, \\ \tan(\varphi^C) &= \frac{q\sin(\varphi) - r\sin(2\varphi) + u\sin(4\varphi) - v\sin(5\varphi)}{q\cos(\varphi) + r\cos(2\varphi) + u\cos(4\varphi) + v\cos(5\varphi)}. \end{aligned} \quad (153)$$

La diferencia de fase $\Delta\varphi$ introducida por los armónicos residuales se puede calcular con la ecuación 154,

$$\begin{aligned}
\tan(\Delta\varphi) &= \tan(\varphi^C - \varphi^P), \\
\tan(\Delta\varphi) &= \frac{\tan(\varphi^C) - \tan(\varphi^P)}{1 + \tan(\varphi^C) \tan(\varphi^P)}, \\
\tan(\Delta\varphi) &= \frac{\frac{q \sin(\varphi) - r \sin(2\varphi) + u \sin(4\varphi) - v \sin(5\varphi)}{q \cos(\varphi) + r \cos(2\varphi) + u \cos(4\varphi) + v \cos(5\varphi)} - \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}}{1 + \left(\frac{q \sin(\varphi) - r \sin(2\varphi) + u \sin(4\varphi) - v \sin(5\varphi)}{q \cos(\varphi) + r \cos(2\varphi) + u \cos(4\varphi) + v \cos(5\varphi)} \right) \left(\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \right)}. \quad (154)
\end{aligned}$$

Considerando las ecuaciones de la 155 a la 158, que corresponden a las operaciones en el numerador de 154,

$$q(\sin(\varphi) \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cos(\varphi)) = 0, \quad (155)$$

$$r(\sin(2\varphi) \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cos(2\varphi)) = r \sin(3\varphi), \quad (156)$$

$$u(\sin(4\varphi) \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cos(4\varphi)) = u \sin(3\varphi), \quad (157)$$

$$v(\cos(\varphi) \cos(5\varphi) + \sin(\varphi) \sin(5\varphi)) = 2 \sin(3\varphi) \cos(3\varphi), \quad (158)$$

y las ecuaciones de la 159 a la 162, a las operaciones en el denominador de 154,

$$q(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = q, \quad (159)$$

$$r(\cos(\varphi)\cos(2\varphi) - \sin(\varphi)\sin(2\varphi)) = r\cos(3\varphi), \quad (160)$$

$$u(\cos(\varphi)\cos(4\varphi) + \sin(\varphi)\sin(4\varphi)) = u\cos(3\varphi), \quad (161)$$

$$v(\cos(\varphi)\cos(5\varphi) - \sin(\varphi)\sin(5\varphi)) = v\cos^2(3\varphi) - v\sin^2(3\varphi). \quad (162)$$

La ecuación 154 se puede simplificar como se muestra en la ecuación 163,

$$\begin{aligned} \tan(\Delta\varphi) &= \frac{u\sin(3\varphi) - r\sin(3\varphi) - 2v\sin(3\varphi)\cos(3\varphi)}{q + r\cos(3\varphi) + u\cos(3\varphi) + v\cos^2(3\varphi) - v\sin^2(3\varphi)}, \\ \tan(\Delta\varphi) &= \frac{\sin(3\varphi)(u - r - 2v\cos(3\varphi))}{q + r\cos(3\varphi) + u\cos(3\varphi) + v\cos^2(3\varphi) - v(1 - \cos^2(3\varphi))}, \\ \Delta\varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{\sin(3\varphi)(u - r - 2v\cos(3\varphi))}{q - v + \cos(3\varphi)(r + u + 2v\cos(3\varphi))} \right). \end{aligned} \quad (163)$$

A.5 Algoritmo de Bruning

El algoritmo de Bruning *et al* utiliza 6 imágenes de franjas ($N = 6$), con un desfase entre ellas de $\delta_i = (i - 1)2\pi/3$ Bruning et al. (1974). Usando la ecuación 164, se genera el patrón de franjas para este algoritmo,

$$I_i^P = A + B \cos \left(\varphi - \frac{2\pi(i-1)}{6} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, 6. \quad (164)$$

Para calcular la fase φ , Bruning *et al* proponen la ecuación 165, que deducen a partir de la ecuación 25,

$$\begin{aligned} \varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^6 I_i \sin \left(\frac{2\pi(i-1)}{6} \right)}{\sum_{i=1}^6 I_i \cos \left(\frac{2\pi(i-1)}{6} \right)} \right), \\ \varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{I_1 \sin(0) + I_2 \sin(\frac{\pi}{3}) + I_3 \sin(\frac{2\pi}{3}) + I_4 \sin(\pi) + I_5 \sin(\frac{4\pi}{3}) + I_6 \sin(\frac{5\pi}{3})}{I_1 \cos(0) + I_2 \cos(\frac{\pi}{3}) + I_3 \cos(\frac{2\pi}{3}) + I_4 \cos(\pi) + I_5 \cos(\frac{4\pi}{3}) + I_6 \cos(\frac{5\pi}{3})} \right), \\ \varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}I_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}I_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}I_5 - \frac{\sqrt{3}}{2}I_6}{I_1 + \frac{I_2}{2} - \frac{I_3}{2} - I_4 - \frac{I_5}{2} + \frac{I_6}{2}} \right), \\ \varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}(I_2 + I_3 - I_5 - I_6)}{2I_1 + I_2 - I_3 - 2I_4 - I_5 + I_6} \right). \end{aligned} \quad (165)$$

A.6 Algoritmo de Peter de Groot

El algoritmo de P. de Groot consiste en generar 9 imágenes de franjas ($N = 9$) con un desfase de $\delta_i = ((i-1)2\pi)/(N-1)$, mediante la ecuación 166 De Groot (1995),

$$I_i^P = A + B \cos \left(\varphi - \frac{2\pi(i-1)}{9-1} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, 9. \quad (166)$$

Para calcular la fase φ , P. de Groot se basó en la ecuación estándar de corrimiento de fase para N-imágenes, propuesta por Bruning *et al* Bruning et al. (1974) y que se muestra en la ecuación 25. Para este caso la expresión de calculo de fase estaría dada por la ecuación 167,

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^9 I_i \sin \left(\frac{2\pi(i-1)}{8} \right)}{\sum_{i=1}^9 I_i \cos \left(\frac{2\pi(i-1)}{8} \right)} \right), \quad (167)$$

en donde los términos en el numerador conforman la expresión 168,

$$\begin{aligned} I_1 \sin(0) + I_2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) + I_3 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) + I_4 \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) + I_5 \sin(\pi) \\ + I_6 \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) + I_7 \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) + I_8 \sin \left(\frac{7\pi}{4} \right) + I_9 \sin(2\pi), \quad (168) \end{aligned}$$

y los términos del denominador la expresión 169,

$$\begin{aligned}
& I_1 \cos(0) + I_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + I_3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + I_4 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + I_5 \cos(\pi) \\
& + I_6 \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + I_7 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + I_8 \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + I_9 \cos(2\pi), \quad (169)
\end{aligned}$$

dando lugar a la ecuación 170,

$$\begin{aligned}
\varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{I_2}{\sqrt{2}} + I_3 + \frac{I_4}{\sqrt{2}} - \frac{I_6}{\sqrt{2}} - I_7 - \frac{I_8}{\sqrt{2}}}{I_1 + \frac{I_2}{\sqrt{2}} - \frac{I_4}{\sqrt{2}} - I_5 - \frac{I_6}{\sqrt{2}} + \frac{I_8}{\sqrt{2}} + I_9} \right), \\
\varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{I_2 + \sqrt{2}I_3 + I_4 - I_6 - \sqrt{2}I_7 - I_8}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}I_1 + I_2 - I_4 - \sqrt{2}I_5 - I_6 + I_8 + \sqrt{2}I_9}{\sqrt{2}}} \right), \\
\varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}(I_2 + \sqrt{2}I_3 + I_4 - I_6 - \sqrt{2}I_7 - I_8)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}I_1 + I_2 - I_4 - \sqrt{2}I_5 - I_6 + I_8 + \sqrt{2}I_9)} \right), \\
\varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}(I_2 + I_4 - I_6 - I_8) + 2(I_3 - I_7)}{\sqrt{2}(I_2 - I_4 - I_6 + I_8) + 2I_1 + 2I_9 - 2I_5} \right). \quad (170)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que las imágenes con $\delta_1 = 0$ y $\delta_9 = 2\pi$, que corresponden respectivamente a los desfases en las imágenes I_1 e I_9 , son iguales, P. de Groot propone promediar estas imágenes modificando levemente la ecuación 170 como se muestra en la ecuación 171,

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}(I_2 + I_4 - I_6 - I_8) + 2(I_3 - I_7)}{\sqrt{2}(I_2 - I_4 - I_6 + I_8) + I_1 + I_9 - 2I_5} \right). \quad (171)$$

Apéndice B. Valores experimentales del error en la fase $\Delta\Phi$

Tabla 10

Principales valores de la onda de error en la fase $\Delta\Phi$, en un sistema de franjas con paso de proyección 4,12,16, y 24, proyectado sobre un objeto plano variando el factor $\bar{\gamma}$.

N=4												
$\bar{\gamma}$	Paso = 4			Paso = 12			Paso = 16			Paso = 24		
	Min(rad)	Max(rad)	Medio(rad)	Min(rad)	Max(rad)	Medio(rad)	Min(rad)	Max(rad)	Medio(rad)	Min(rad)	Max(rad)	Medio(rad)
1.0	-0,0783	0,0765	0,0207	-0,0321	0,0367	0,0083	-0,0411	0,0353	0,0083	-0,0432	0,0467	0,0085
1.4	-0,0727	0,0690	0,0202	-0,0664	0,0652	0,0293	-0,1061	0,0948	0,0414	-0,1220	0,1207	0,0508
1.8	-0,0888	0,0750	0,0209	-0,0774	0,0818	0,0352	-0,1164	0,1097	0,0480	-0,1346	0,1480	0,0618
2.2	-0,0789	0,0814	0,0215	-0,0807	0,0798	0,0340	-0,1087	0,1040	0,0453	-0,1198	0,1241	0,0554
2.6	-0,0731	0,0844	0,0215	-0,0702	0,0711	0,0255	-0,0883	0,0880	0,0340	-0,0984	0,0982	0,0375
3.0	-0,1008	0,0767	0,0209	-0,0522	0,0628	0,0187	-0,0673	0,0732	0,0219	-0,0667	0,0681	0,0255
3.4	-0,0832	0,0807	0,0212	-0,0344	0,0423	0,0095	-0,0408	0,0491	0,0107	-0,0343	0,0368	0,0087
3.8	-0,0847	0,0865	0,0211	-0,0280	0,0372	0,0068	-0,0273	0,0307	0,0072	-0,0298	0,0332	0,0079
4.2	-0,0820	0,0909	0,0218	-0,0389	0,0401	0,0110	-0,0471	0,0474	0,0154	-0,0579	0,0518	0,0224
4.6	-0,0950	0,0842	0,0210	-0,0550	0,0619	0,0186	-0,0595	0,0739	0,0257	-0,0907	0,0806	0,0336
5.0	-0,0883	0,0870	0,0213	-0,0692	0,0724	0,0245	-0,0810	0,1074	0,0354	-0,1331	0,1133	0,0455

Tabla 11

Principales valores de la onda de error en la fase $\Delta\Phi$, en un sistema de franjas con paso de proyección 6,12, y 24, proyectado sobre un objeto plano variando el factor $\bar{\gamma}$.

$\bar{\gamma}$	N=6											
	Paso = 6			Paso = 12			Paso = 24					
	Min(rad)	Max(rad)	Medio(rad)	Min(rad)	Max(rad)	Medio(rad)	Min(rad)	Max(rad)	Medio(rad)			
1.0	-0,0342	0,0485	0,0095	-0,0243	0,0252	0,0053	-0,0280	0,0289	0,0104			
1.4	-0,0368	0,0424	0,0097	-0,0201	0,0211	0,0051	-0,0165	0,0165	0,0038			
1.8	-0,0360	0,0462	0,0096	-0,0205	0,0217	0,0049	-0,0193	0,0185	0,0046			
2.2	-0,0416	0,0430	0,0094	-0,0206	0,0209	0,0051	-0,0145	0,0207	0,0039			
2.6	-0,0414	0,0466	0,0098	-0,0225	0,0212	0,0055	-0,0210	0,0285	0,0054			
3.0	-0,0392	0,0394	0,0100	-0,0189	0,0272	0,0056	-0,0181	0,0188	0,0046			
3.4	-0,0389	0,0397	0,0102	-0,0268	0,0232	0,0055	-0,0180	0,0201	0,0046			
3.8	-0,0424	0,0393	0,0106	-0,0251	0,0285	0,0061	-0,0215	0,0200	0,0045			
4.2	-0,0373	0,0492	0,0107	-0,0206	0,0252	0,0061	-0,0235	0,0227	0,0048			
4.6	-0,0432	0,0501	0,0110	-0,0299	0,0313	0,0073	-0,0229	0,0228	0,0056			
5.0	-0,0381	0,0464	0,0108	-0,0301	0,0355	0,0081	-0,0320	0,0258	0,0072			

Tabla 12

Principales valores de la onda de error en la fase $\Delta\Phi$, en un sistema de franjas con paso de proyección 6,12, y 24, proyectado sobre un objeto plano variando el factor $\bar{\gamma}$.

$\bar{\gamma}$	N=8					
	Paso = 16			Paso = 24		
	Min(rad)	Max(rad)	Medio(rad)	Min(rad)	Max(rad)	Medio(rad)
1.0	-0,0177	0,0157	0,0037	-0,0128	0,0152	0,0030
1.4	-0,0154	0,0157	0,0038	-0,0128	0,0126	0,0032
1.8	-0,0152	0,0190	0,0038	-0,0126	0,0140	0,0032
2.2	-0,0163	0,0165	0,0040	-0,0160	0,0141	0,0034
2.6	-0,0163	0,0154	0,0039	-0,0141	0,0174	0,0040
3.0	-0,0179	0,0186	0,0042	-0,0182	0,0127	0,0035
3.4	-0,0178	0,0222	0,0042	-0,0176	0,015	0,0039
3.8	-0,0218	0,0223	0,0047	-0,0163	0,0147	0,0039
4.2	-0,0196	0,0178	0,0048	-0,0167	0,0183	0,0039
4.6	-0,0199	0,0231	0,0049	-0,0188	0,0175	0,0041
5.0	-0,0237	0,0224	0,0051	-0,0210	0,0168	0,0043

Apéndice C. Calibración de la cámara

La calibración de la cámara consiste en encontrar sus parámetros intrínsecos, extrínsecos, y posibles distorsiones. Para ello se usan expresiones matemáticas deducidas a partir de la relación entre las propiedades de la cámara y su geometría. El modelo matemático de la cámara representa el mapeo que realiza la cámara desde un punto en el espacio 3D a una imagen en dos dimensiones (2D). El modelo matemático mas usado para la representación matemática de cámaras finitas (cámaras con su centro definido en un punto específico) es el modelo *Pinhole* (Forsyth and Ponce, 2003).

C.1 Modelo Pinhole

En el modelo *Pinhole* se asume que los puntos del espacio 3D se proyectan sobre el *plano imagen*. El centro del *plano imagen* se conoce como punto principal $\mathbf{p}$, y es colineal con el centro de la cámara $\mathbf{C}$. Estos puntos son, de manera independiente, el origen de un sistema de coordenadas euclidianas y se encuentran sobre el eje óptico de la cámara (*eje Z*).

En la Figura 106 se describe gráficamente el mapeo de un punto Ψ en el espacio con coordenadas $(X, Y, Z)^T$, a un punto ψ en el plano imagen con coordenadas $(x, y)^T$.

El plano imagen esta ubicado a una distancia f del centro de la cámara C (distancia focal), entonces las coordenadas 3D del punto ψ con respecto a el punto C son $(x, y, f)^T$. Los puntos Ψ , ψ , y C son colineales, lo que permite expresar las coordenadas (x, y) del punto ψ de la

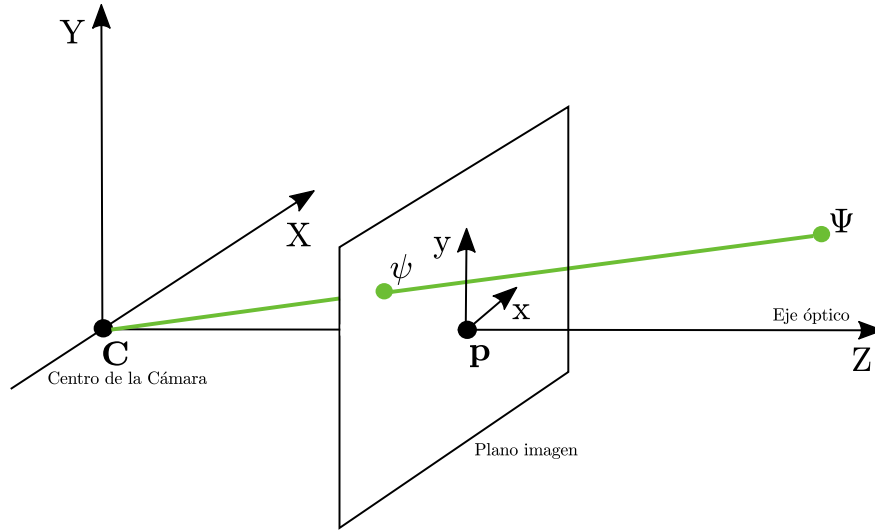


Figura 106. Geometría de la cámara según el modelo de Pinhole.

imagen en términos de las ecuaciones 172 y 173 que se deducen a partir de la relación de triángulos que se ilustra en la Figura 107.

$$\frac{X}{Z} = \frac{x}{f} \implies x = \frac{fX}{Z} \quad (172)$$

$$\frac{Y}{Z} = \frac{y}{f} \implies y = \frac{fY}{Z} \quad (173)$$

De este modo, el mapeo de las coordenadas 3D de un punto en el espacio a las coordenadas 2D del mismo punto en una imagen, se puede expresar mediante la ecuación 174,

$$(X, Y, Z)^T \longrightarrow \left(\frac{fX}{Z}, \frac{fY}{Z} \right)^T. \quad (174)$$

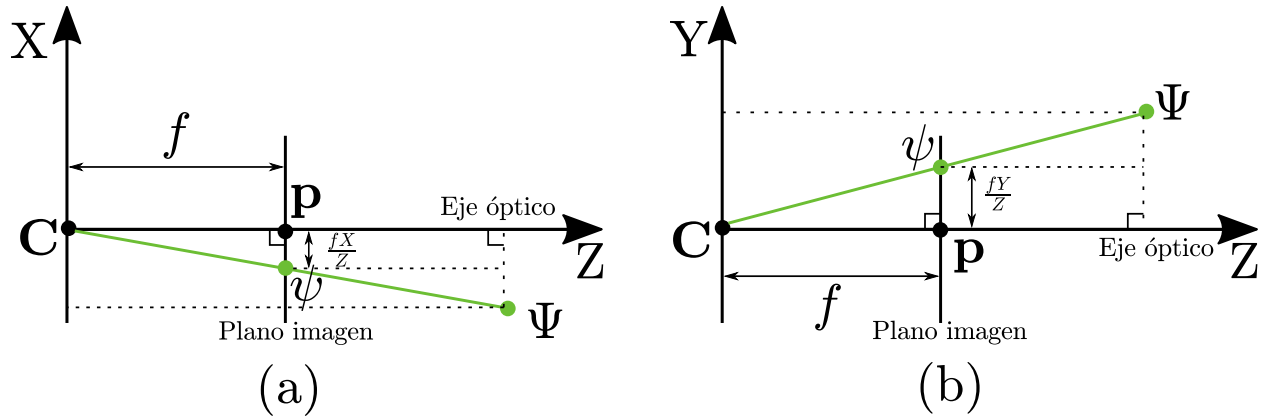


Figura 107. Relación de triángulos: (a) Plano Y, y (b) Plano X.

La ecuación 174 describe un mapeo desde el espacio Euclidiano 3D a el Espacio Euclidiano 2D ($\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$). Los puntos del mundo real y los de su imagen se pueden representar como un mapeo lineal de sus coordenadas homogéneas, según la *geometría proyectiva* (Hartley and Zisserman, 2003), de este modo la ecuación 174 se expresa en términos de una multiplicación de matrices, como se muestra en la ecuación 176,

$$\left(\frac{fX}{Z}, \frac{fY}{Z}\right)^T = \begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix}, \quad (175)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (176)$$

La ecuación 176 se suele escribir de forma compacta como se muestra en la ecuación 177,

$$\psi = P[I|0]\Psi, \quad (177)$$

en donde Ψ es el vector con las coordenadas del punto en el espacio 3D, y ψ es el vector con las coordenadas del punto en la imagen 2D, ambos en coordenadas homogéneas; $[I, 0]$ una matriz formada por una matriz identidad de 3x3 y un vector columna con sus 3 elementos iguales a 0, y P representa la matriz que se muestra en la ecuación 178, y se conoce como la

matriz de proyección de la cámara,

$$P = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (178)$$

En la ecuación 174 se asume que el origen de coordenadas del plano imagen es el punto principal p , y esto no se cumple, lo que obliga a modificar la ecuación como se muestra en la ecuación 179,

$$(X, Y, Z)^T \longrightarrow \left(\frac{fX}{Z} + p_x, \frac{fY}{Z} + p_y \right)^T, \quad (179)$$

en donde $(p_x, p_y)^T$ son las coordenadas del punto principal p , como se muestra en la Figura 108.

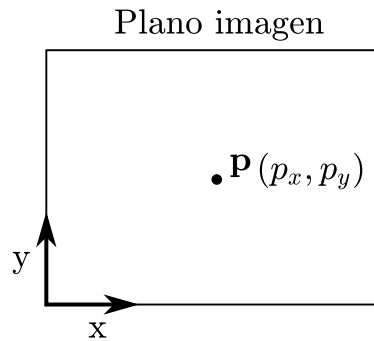


Figura 108. Vista frontal del plano imagen.

La ecuación 179 se puede reescribir en coordenadas homogéneas como se muestra en la ecuación 180,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} fX + Zp_x \\ fY + Zp_y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x & 0 \\ 0 & f & p_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (180)$$

y de forma compacta se expresa como se muestra en la ecuación 181,

$$\psi = K[I|0]\Psi. \quad (181)$$

En la ecuación 182 se detalla la matriz K , que se conoce como la matriz de la cámara,

$$K = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (182)$$

Otra consideración importante es que los objetos en el espacio 3D se suelen relacionar a un sistema coordinado diferente al de la cámara que se conoce como el *sistema coordinado del mundo*, como se muestra en la Figura 109.

En la Figura 109, $\tilde{\Psi}_W$ es un vector con las coordenadas del punto Ψ en el sistema coordenado del mundo, $\tilde{\Psi}_{cam}$ contiene las coordenadas del mismo punto en el sistema coordenado de la cámara, y $\tilde{C}$ las coordenadas del centro de la cámara en el sistema coordenado del mundo. Ambos sistemas se pueden relacionar mediante la ecuación 183,

$$\tilde{\Psi}_{cam} = \tilde{\Psi}_W - \tilde{C}. \quad (183)$$

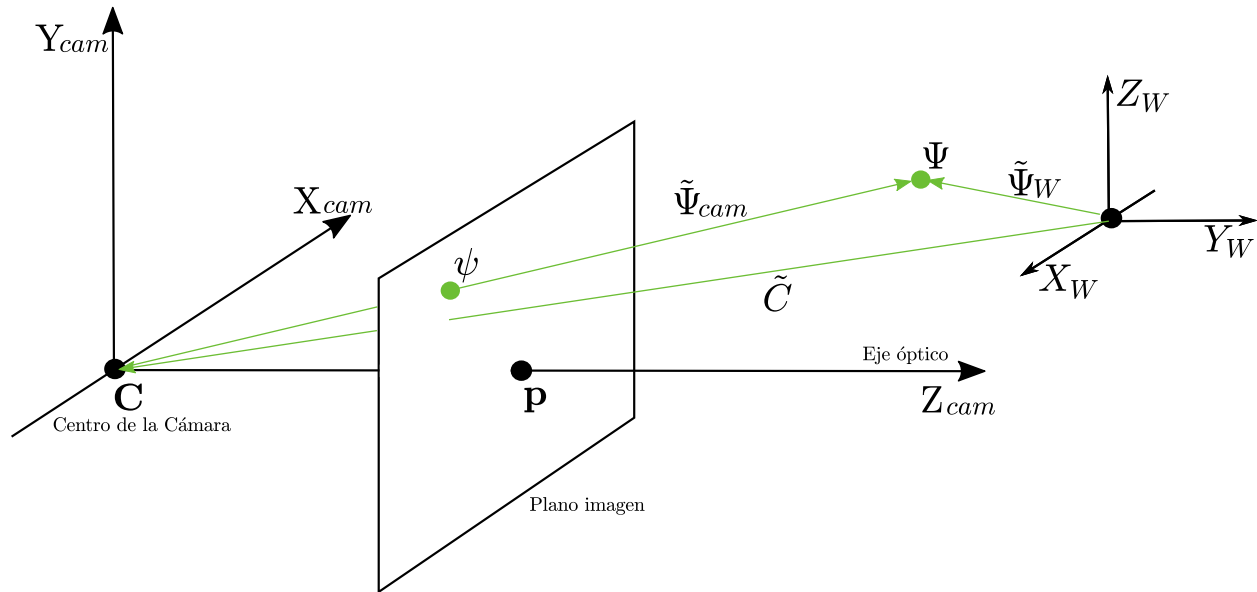


Figura 109. Transformación euclidiana entre el sistema coordenado de un objeto y el sistema coordenado de la cámara.

La diferencia angular entre ambos sistemas coordenados se incluye en la ecuación 183 con una matriz de tres grados de libertad que se representa como R y da lugar a la ecuación 184,

$$\tilde{\Psi}_{cam} = R\tilde{\Psi}_W - R\tilde{C}. \quad (184)$$

La ecuación 184 se suele presentar en la literatura como se muestra en la ecuación 185, en donde t representa el termino $-R\tilde{C}$ (Hartley and Zisserman, 2003),

$$\tilde{\Psi}_{cam} = R\tilde{\Psi}_W + t. \quad (185)$$

En coordenadas homogéneas, la ecuación 184 se expresa como un producto de matrices como se muestra en la ecuación 187,

$$\tilde{\Psi}_{cam} = \begin{bmatrix} R\tilde{\Psi}_W & -R\tilde{C} \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad (186)$$

$$\tilde{\Psi}_{cam} = \begin{bmatrix} R & -R\tilde{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_W \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (187)$$

Considerando que el vector $\tilde{\Psi}_{cam}$ contiene las coordenadas del punto Ψ de la ecuación 181, reemplazarlo daría lugar a la ecuación 191,

$$\psi = K[I|0] \begin{bmatrix} R & -R\tilde{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_W \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (188)$$

$$\psi = K \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & -R\tilde{C}_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & -R\tilde{C}_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & -R\tilde{C}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_W \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (189)$$

$$\psi = K \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & -R\tilde{C}_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & -R\tilde{C}_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & -R\tilde{C}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_W \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (190)$$

$$\psi = KR[I|-\tilde{C}]\tilde{\Psi}_W. \quad (191)$$

Los elementos de la matriz de calibración de la cámara K (distancia focal f , y coordenadas del punto principal $\mathbf{p}$) se conocen como los parámetros internos de la cámara ó *parámetros intrínsecos*; los elementos de la matriz R y los del vector $\tilde{C}$, que relacionan la orientación y posición de la cámara con el sistema coordenado del mundo, se conocen como los parámetros externos de la cámara ó parámetros extrínsecos (Hartley and Zisserman, 2003).

Cámaras CCD. La consideración mas importante respecto a las cámaras CCD en el modelo *Pinhole*, es que no tienen pixeles perfectamente cuadrados, razón por la que se deben incluir factores de corrección en cada dirección. Asumiendo m_x y m_y como los factores de corrección para el *eje X* y el *eje Y*, respectivamente, la transformación desde el *sistema coordenado del mundo* a las coordenadas en pixel esta dada por la ecuación 192,

$$K = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (192)$$

en donde $\alpha_x = fm_x$ y $\alpha_y = fm_y$, representan la longitud focal de la cámara en términos de las dimensiones del pixel en ambos ejes, y (x_0, y_0) son las coordenadas del punto principal $\mathbf{p}$ con las dimensiones del pixel, $x_0 = m_x p_x$ y $y_0 = m_y p_y$. Finalmente, se incluye en la matriz de calibración K un parámetro de oblicuidad s (skew) como se muestra en la ecuación 193,

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (193)$$

Distorsiones geométricas. Hasta este momento, el modelo que se ha presentado para describir matemáticamente el comportamiento de una cámara es completamente

lineal; así un punto en el espacio 3D Ψ , el mismo punto en la imagen ψ , y el punto principal de la cámara $\mathbf{p}$ son colineales, afirmación que no se cumple en aplicaciones reales debido a que las imágenes capturadas por una cámara presentan distorsiones que se clasifican principalmente como radiales y tangenciales (Hartley and Zisserman, 2003).

La distorsión tangencial se presenta cuando los elementos que conforman el sistema de lentes están mal centrados, y se percibe en las imágenes por el desplazamiento de los puntos en ángulos rectos a las líneas radiales a partir del eje óptico. Muchas veces los efectos de la distorsión tangencial no son considerados por ser menos nocivos que los efectos de la distorsión radial (Hanning, 2011). En la Figura 110 se muestra una imagen que simula los efectos de la distorsión tangencial.

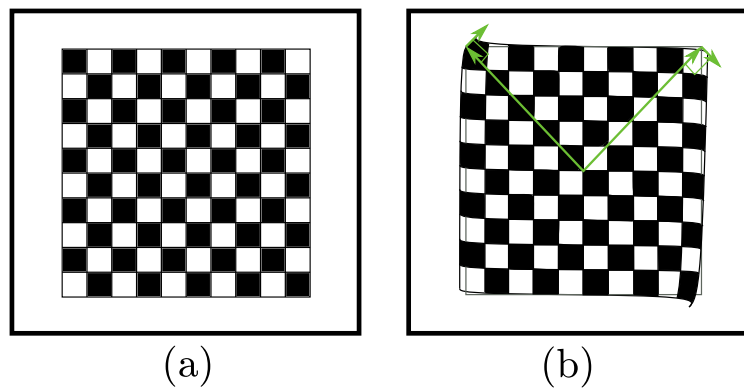


Figura 110. Imagen de un patrón ajedrezado: (a) sin distorsión, y (b) con distorsión tangencial.

La literatura reporta la distorsión radial como la mas importante (Gruen and Huang, 2013), esta distorsión es causada por un pulido defectuoso de la lente, y se percibe como un desplazamiento de los puntos en las imágenes en forma radial a partir de un centro de distorsión,

como se muestra en la Figura 111.

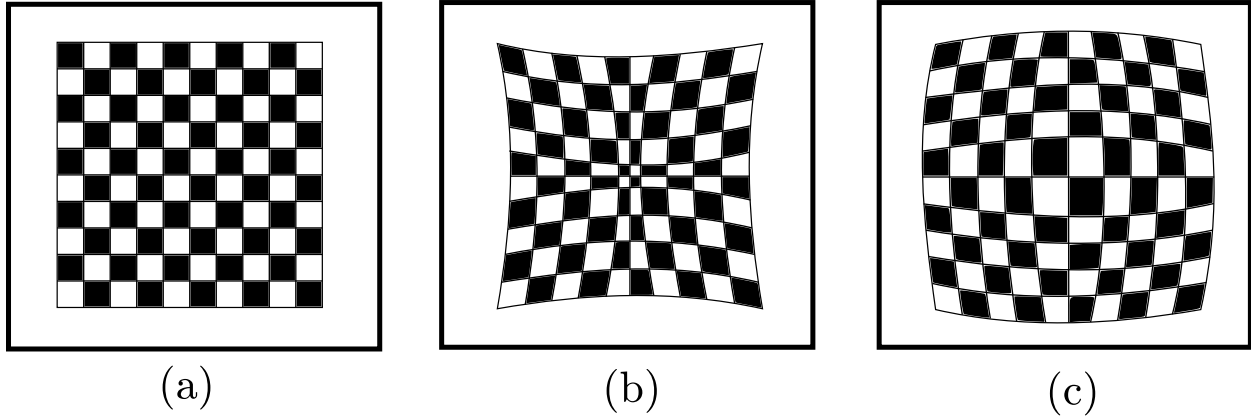


Figura 111. Imagen de un patrón ajedrezado: (a) sin distorsión, (b) distorsión radial negativa, y (c) distorsión radial positiva.

La relación entre un punto distorsionado y uno ideal (sin distorsiones) esta dada por la ecuación 194,

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_d \\ \tilde{y}_d \end{pmatrix} = L(\tilde{r}) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}, \quad (194)$$

las coordenadas $(\hat{x}, \hat{y})$ corresponden a la proyección lineal del punto ideal sin distorsión, las coordenadas $(\tilde{x}_d, \tilde{y}_d)$ describen la posición real del punto en la imagen afectado por la distorsión radial, y $L(\tilde{r})$ es un factor de distorsión que se expresa en función de la distancia radial $\tilde{r}$ medida desde el centro de la distorsión. Al corregir la distorsión, las coordenadas de la corrección se expresan como se muestra en las ecuaciones 195 y 196,

$$\hat{x} = x_c + L(\tilde{r})(\tilde{x}_d - x_c), \quad (195)$$

$$\hat{y} = y_c + L(\tilde{r})(\tilde{y}_d - y_c), \quad (196)$$

y en este caso $(\tilde{x}_d, \tilde{y}_d)$ siguen haciendo referencia a las coordenadas distorsionadas, $(\hat{x}, \hat{y})$ ahora representan las coordenadas corregidas, y (x_c, y_c) las coordenadas del centro de la distorsión radial, con $\tilde{r} = \sqrt{(\tilde{x}_d - x_c)^2 + (\tilde{y}_d - y_c)^2}$. Después de corregidas las distorsiones, las coordenadas $(\hat{x}, \hat{y})$ se relacionan con las coordenadas 3D de un punto en el espacio de la misma forma como lo haría una cámara lineal sin distorsiones.

La función $L(\tilde{r})$ esta definida únicamente para valores positivos de $\tilde{r}$ y $L(0) = 1$. Con una expansión de Taylor se llega a una aproximación arbitraria, $L(\tilde{r}) = 1 + k_1 r + k_2 r^2 + k_3 r^3 \dots k_n r^n$, los coeficientes k_i son infinitos y se consideran parte de la calibración interna de la cámara; sin embargo, Tsai en su trabajo de 1987 demostro que con un unico coeficiente k_1 se obtienen buenos resultados en la corrección de distorsiones (Tsai, 1987). Tsai inicia considerando que la variación sobre la posición (x, y) de un punto, debida al error inducido δ_i , esta dada por las ecuaciones 197 y 198,

$$\tilde{x}_d = x + \delta_x, \quad (197)$$

$$\tilde{y}_d = y + \delta_y. \quad (198)$$

La diferencia entre la posición real $(\tilde{x}_d, \tilde{y}_d)$ y la ideal (x, y) se descompone en: las componentes rectangulares (δ_x, δ_y) , la componente radial δ_r , y la componente tangencial δ_t , como se muestra en la Figura 112.

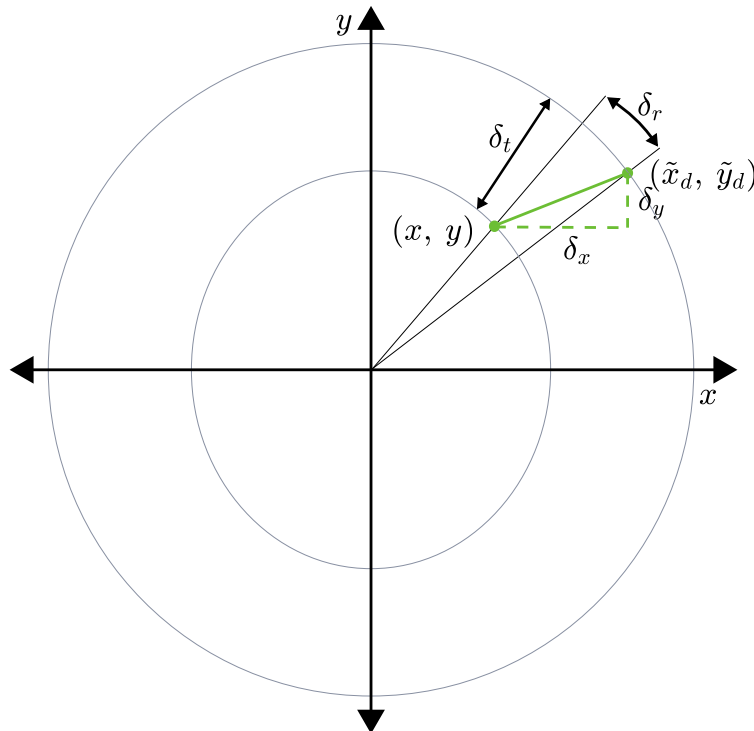


Figura 112. Descomposición de la distorsión geométrica.

El modelo mas usado para compensar la distorsión radial, por su grado de proximidad, es el

propuesto por Heikkilä y Silvén, el cual se basa en la ecuación 199,

$$\begin{bmatrix} \delta \tilde{x}_i^{(r)} \\ \delta \tilde{y}_i^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i(1 + k_1 r_i^2 + k_2 r_i^4 \dots) \\ y_i(1 + k_1 r_i^2 + k_2 r_i^4 \dots) \end{bmatrix}, \quad (199)$$

en donde $k_1, k_2 \dots$ son coeficientes para la distorsión radial y normalmente es suficiente con uno para compensarla. Los mismo autores proponen la ecuación 200 para la distorsión tangencial,

$$\begin{bmatrix} \delta \tilde{x}_i^{(t)} \\ \delta \tilde{y}_i^{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_3 x_i y_i + k_4 (r_i^2 + 2x_i^2) \\ k_3 (r_i^2 + 2y_i^2) + 2k_4 x_i y_i \end{bmatrix}, \quad (200)$$

en donde k_3 y k_4 son coeficientes para la distorsión tangencial.

Considerando las componentes de la distorsión geométrica, la matriz de calibración K se suele expresar como se muestra en la ecuación 201,

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 + \delta_x \\ 0 & \alpha_y & y_0 + \delta_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (201)$$

teniendo en cuenta que m_x y m_y son los parámetros en unidades métricas de las dimensiones del pixel, se tiene que $\delta_x = m_x \delta \tilde{x}$ y $\delta_y = m_y \delta \tilde{y}$ (componentes de la distorsión geométrica), y s

el parámetro de oblicuidad que en la mayoría de los casos vale 0 (cero).

En conclusión, es importante considerar las componentes de error siempre que se pretende ejecutar algún procedimiento de medida con imágenes obtenidas con cualquier tipo de cámara, y a partir de la publicación de Heikkilä y Silvén en 1997 se sugiere que la mejor forma de estimar los parámetros de la cámara es minimizar la diferencia entre los puntos ideales del modelo matemático sin distorsiones (x_i, y_i) y los N puntos reales de la imagen obtenida con la cámara $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$, en donde $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Esto quiere decir que el calculo de los parámetros de la cámara se convierte en un proceso de optimización no lineal cuya función de error se expresa como se muestra en la ecuación 202,

$$F = \sum_{i=1}^N (\tilde{x}_i - x_i)^2 + \sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - y_i)^2, \quad (202)$$

en donde $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ son las coordenadas experimentales y (x_i, y_i) las teóricas de un punto Ψ_i .

C.2 Calibración de la cámara

Las técnicas actuales para calibrar una cámara se dividen en dos categorías: *calibración fotogramétrica* y *auto-calibración*. En las técnicas del primer grupo, se toman imágenes de un objeto del cual se conocen con precision sus características 3D, los objetos de calibración suelen ser 2 o 3 planos ortogonales entre si. También hay métodos en los que se utiliza un único plano, y este se desplaza con precision entre posiciones bien definidas; para lo que se

requiere unidades de desplazamiento y montajes experimentales geoméricamente muy elaborados (Gruen and Huang, 2013; Hanning, 2011).

En las técnicas de auto-calibración se toman imágenes de una escena estática desplazando una cámara con parámetros intrínsecos fijos, la relación entre 3 imágenes es suficiente para recuperar todos los parámetros (Gruen and Huang, 2013), estas son técnicas muy flexibles pero no siempre obtienen parámetros confiables (Hanning, 2011).

Para este trabajo se requiere obtener los parámetros de la cámara de forma rápida, sencilla, en repetidas ocasiones, y sobre todo que sean valores confiables a la hora de obtener información métrica. Por esta razón se selecciono dentro de las técnicas fotogramétricas la propuesta por Zhang en el 2000 (Zhang, 2000), la cual se describe en la siguiente sub-sección.

La técnica de calibración de Zhang. En la técnica propuesta por Zhang (Zhang, 2000), se requiere que un objeto de calibración plano sea visto por la cámara en al menos dos posiciones diferentes. El objeto de calibración es un patrón ajedrezado (cuadros a dos colores), que se puede imprimir con una impresora convencional y pegarse sobre una superficie plana. Los movimientos se pueden realizar manualmente, no se requiere información sobre los desplazamientos, tampoco conocer la distancia entre el patrón de calibración y la cámara CCD.

El autor clasifica la técnica entre *fotogramétrica* y *auto-calibración*, porque se basa en información métrica 2D que se obtiene a partir de imágenes de un patrón plano con información métrica 3D implícita. La técnica se basa en el modelo *Pinhole*, y parte desde la suposición que el patrón de calibración observado por la cámara, se encuentra en la posición $Z = 0$ del sistema coordenado del mundo, como se muestra en la Figura 113.

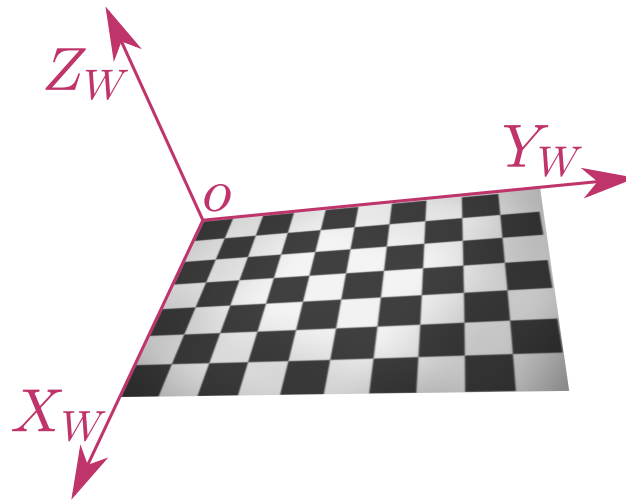


Figura 113. Patrón de calibración en el sistema coordenado del mundo.

De este modo, la ecuación 191 se reduce a la ecuación 205, expresando los vectores columna de R como $[r_1 \ r_2 \ r_3]$ y el vector columna $-\tilde{C}$ como $[t]$,

$$\psi = K \begin{bmatrix} R & -\tilde{C} \end{bmatrix} \Psi_W, \quad (203)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = K \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (204)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = K \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (205)$$

La transformación entre el plano imagen de la cámara y un plano físico, básicamente es una transformación entre dos planos, en *Geometría Proyectiva* se conoce como una *Homografía*. Matemáticamente, esta transformación se define como la multiplicación entre las coordenadas de un punto en el plano y su respectiva matriz de *Homografía* (matriz de proyección reducida), como se muestra en la ecuación 206,

$$\psi = H \Psi_W. \quad (206)$$

Al relacionar la ecuaciones 205 y 206, se tiene que la matriz de *Homografía* esta dada por la

ecuación 207,

$$H = K \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & t \end{bmatrix}. \quad (207)$$

Expresando los vectores columna de H como $[h_1 \ h_2 \ h_3]$, los términos r_1 y r_2 se pueden expresar de acuerdo con las ecuaciones 209 y 210,

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & t \end{bmatrix}, \quad (208)$$

$$r_1 = h_1 K^{-1}, \quad (209)$$

$$r_2 = h_2 K^{-1}. \quad (210)$$

Teniendo en cuenta que r_1 y r_2 son ortogonales, se deben cumplir las ecuaciones 211 y 212,

$$r_1^T r_2 = 0,$$

$$h_1^T (K^{-1})^T h_2 K^{-1} = 0, \quad (211)$$

$$r_1^T r_1 = r_2^T r_2,$$

$$h_1^T (K^{-1})^T h_1 K^{-1} = h_1^T (K^{-1})^T h_1 K^{-1}. \quad (212)$$

Para hallar la inversa de la matriz de calibración de la cámara, K^{-1} , se requiere encontrar su determinante como se muestra en la ecuación 213,

$$\det(K) = \begin{vmatrix} \alpha_x & s & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha_x \alpha_y. \quad (213)$$

Una vez calculado el determinante de K , se halla su matriz adjunta como se muestra en la

ecuación 214,

$$K^* = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_y & y_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & y_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & \alpha_y \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} s & x_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_x & x_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_x & s \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} s & x_0 \\ \alpha_y & y_0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_x & x_0 \\ 0 & y_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_x & s \\ 0 & \alpha_y \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_y & 0 & 0 \\ -s & \alpha_x & 0 \\ sy_0 - x_0\alpha_y & -y_0\alpha_x & \alpha_x\alpha_y \end{bmatrix}, \quad (214)$$

y seguidamente la transpuesta de la adjunta, como se muestra en la ecuación 215,

$$(K^*)^T = \begin{bmatrix} \alpha_y & -s & sy_0 - x_0\alpha_y \\ 0 & \alpha_x & -y_0\alpha_x \\ 0 & 0 & \alpha_x\alpha_y \end{bmatrix}. \quad (215)$$

Finalmente, la matriz inversa de K se calcula multiplicando el inverso de su determinante

$1/\det(K)$ por la transpuesta de su matriz adjunta $(K^*)^T$, como se muestra en la ecuación 216,

$$K^{-1} = \frac{1}{\alpha_x \alpha_y} \begin{bmatrix} \alpha_y & -s & sy_0 - x_0 \alpha_y \\ 0 & \alpha_x & -y_0 \alpha_x \\ 0 & 0 & \alpha_x \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x} & -\frac{s}{\alpha_x \alpha_y} & \frac{sy_0 - x_0 \alpha_y}{\alpha_x \alpha_y} \\ 0 & \frac{1}{\alpha_y} & -\frac{y_0}{\alpha_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (216)$$

La transpuesta de la inversa de la matriz de calibración $(K^{-1})^T$, se muestra en la ecuación 217,

$$(K^{-1})^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x} & 0 & 0 \\ -\frac{s}{\alpha_x \alpha_y} & \frac{1}{\alpha_y} & 0 \\ \frac{sy_0 - x_0 \alpha_y}{\alpha_x \alpha_y} & -\frac{y_0}{\alpha_y} & 1 \end{bmatrix}. \quad (217)$$

El producto $(K^{-1})^T K^{-1}$, presente en las ecuaciones 211 y 212, Zhang lo define como la matriz B , y se detalla en la ecuación 219,

$$(K^{-1})^T K^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x} & 0 & 0 \\ -\frac{s}{\alpha_x \alpha_y} & \frac{1}{\alpha_y} & 0 \\ \frac{sy_0 - x_0 \alpha_y}{\alpha_x \alpha_y} & -\frac{y_0}{\alpha_y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x} & -\frac{s}{\alpha_x \alpha_y} & \frac{sy_0 - x_0 \alpha_y}{\alpha_x \alpha_y} \\ 0 & \frac{1}{\alpha_y} & -\frac{y_0}{\alpha_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (218)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x^2} & -\frac{s}{\alpha_x^2 \alpha_y} & \frac{sy_0 - x_0 \alpha_y}{\alpha_x^2 \alpha_y} \\ -\frac{s}{\alpha_x^2 \alpha_y} & \frac{s^2}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} + \frac{1}{\alpha_y^2} & -\frac{s(sy_0 - x_0 \alpha_y)}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} - \frac{y_0}{\alpha_y^2} \\ \frac{sy_0 - x_0 \alpha_y}{\alpha_x^2 \alpha_y} & -\frac{s(sy_0 - x_0 \alpha_y)}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} - \frac{y_0}{\alpha_y^2} & \frac{(sy_0 - x_0 \alpha_y)^2}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} + \frac{y_0^2}{\alpha_y^2} + 1 \end{bmatrix}. \quad (219)$$

Al incluir la matriz B , las ecuaciones 211 y 212 se reescriben como se muestra en las ecuaciones 220 y 221,

$$h_1^T B h_2 = 0, \quad (220)$$

$$h_1^T B h_1 = h_2^T B h_2. \quad (221)$$

La solución de las ecuaciones 220 y 221, como se describe primero en la ecuación 222,

$$h_1^T B h_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} & ((h_{11}B_{11} + h_{12}B_{12} + h_{13}B_{13})h_{21} + (h_{11}B_{12} + h_{12}B_{22} + h_{13}B_{23})h_{22} \\ & + (h_{11}B_{13} + h_{12}B_{23} + h_{13}B_{33})h_{23}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (h_{11}h_{21})B_{11} + (h_{12}h_{21} + h_{11}h_{22})B_{12} + (h_{12}h_{22})B_{22} + (h_{13}h_{21} + h_{11}h_{23})B_{13} \\ & + (h_{13}h_{22} + h_{12}h_{23})B_{23} + (h_{13}h_{23})B_{33} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{22} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} h_{11}h_{21} \\ h_{11}h_{22} + h_{12}h_{21} \\ h_{12}h_{22} \\ h_{13}h_{21} + h_{11}h_{23} \\ h_{13}h_{22} + h_{12}h_{23} \\ h_{13}h_{23} \end{bmatrix} = 0. \quad (222)$$

y de forma similar para la segunda expresión se muestra en la ecuación 223,

$$h_1^T B h_1 = h_2^T B h_2,$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_{21} & h_{22} & h_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{22} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} h_{11}h_{11} \\ h_{11}h_{12} + h_{11}h_{12} \\ h_{12}h_{12} \\ h_{13}h_{11} + h_{11}h_{13} \\ h_{12}h_{13} + h_{12}h_{13} \\ h_{13}h_{13} \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{22} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} h_{21}h_{21} \\ h_{21}h_{22} + h_{21}h_{22} \\ h_{22}h_{22} \\ h_{23}h_{21} + h_{21}h_{23} \\ h_{22}h_{23} + h_{22}h_{23} \\ h_{23}h_{23} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{223}$$

da como resultado las ecuaciones 224 y 225,

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{22} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} h_{11}h_{21} \\ h_{11}h_{22} + h_{12}h_{21} \\ h_{12}h_{22} \\ h_{13}h_{21} + h_{11}h_{23} \\ h_{13}h_{22} + h_{12}h_{23} \\ h_{13}h_{23} \end{bmatrix} = 0, \quad (224)$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{22} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} h_{11}h_{11} \\ h_{11}h_{12} + h_{11}h_{12} \\ h_{12}h_{12} \\ h_{13}h_{11} + h_{11}h_{13} \\ h_{12}h_{13} + h_{12}h_{13} \\ h_{13}h_{13} \end{bmatrix} = 0. \quad (225)$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{22} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} h_{21}h_{21} \\ h_{21}h_{22} + h_{21}h_{22} \\ h_{22}h_{22} \\ h_{23}h_{21} + h_{21}h_{23} \\ h_{22}h_{23} + h_{22}h_{23} \\ h_{23}h_{23} \end{bmatrix}.$$

Al definir los vectores b y v , que se muestran en las ecuaciones 226 y 227,

$$b = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{22} \\ B_{13} \\ B_{23} \\ B_{33} \end{bmatrix}, \quad (226)$$

$$v_{ij} = \begin{bmatrix} h_{i1}h_{j1} \\ h_{i1}h_{j2} + h_{i2}h_{j1} \\ h_{i2}h_{j2} \\ h_{i3}h_{j1} + h_{i1}h_{j3} \\ h_{i3}h_{j2} + h_{i2}h_{j3} \\ h_{i3}h_{j3} \end{bmatrix}, \quad (227)$$

las ecuaciones 220 y 221 se pueden reescribir como se muestra en la ecuación 228,

$$\begin{bmatrix} v_{12}^T \\ v_{11}^T - v_{22}^T \end{bmatrix} b = 0. \quad (228)$$

Si se toman n imágenes del patrón de calibración, se calculan sus respectivas matrices de homografía H y se agrupan según la ecuación 228, se tiene la ecuación 229,

$$Vb = 0, \quad (229)$$

en donde V es una matriz de $2n \times 6$, con la que se puede calcular los elementos del vector b . Una vez conocidos los elementos de la matriz B , se pueden calcular los parámetros intrínsecos que son los que conforman la matriz K . Para esto ultimo se usan las ecuaciones que se deducen a partir de la matriz B , y se describen en las ecuaciones de la 230 a la 234,

$$y_0 = \frac{B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}, \quad (230)$$

$$\alpha_x = \sqrt{\frac{1}{B_{11}}}, \quad (231)$$

$$\alpha_y = \sqrt{\frac{B_{11}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}}, \quad (232)$$

$$s = -B_{12}\alpha_x^2\alpha_y, \quad (233)$$

$$x_0 = \frac{sy_0}{\alpha_y} - B_{13}\alpha_x^2. \quad (234)$$

Una vez se ha calculado la matriz K , los parámetros extrínsecos se calculan usando las ecuaciones 209, 210, 235, y 236,

$$r_3 = r_1 \times r_2, \quad (235)$$

$$t = h_3 K^{-1}. \quad (236)$$

Distorsiones geométricas

Una vez calibrada la cámara, se pueden estimar los coeficientes k para las distorsiones geométricas a partir de las ecuaciones 199 y 200, de las cuales derivan las ecuaciones 237 y 238,

$$\begin{bmatrix} (x_i - x_0)r_i^2 & (x_i - x_0)(r_i^2)^2 \\ (y_i - y_0)r_i^2 & (y_i - y_0)(r_i^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_i^r \\ \tilde{y}_i^r \end{bmatrix}, \quad (237)$$

$$\begin{bmatrix} 2(x_i - x_0)(y_i - y_0) & (r_i^2 + 2(x_i - x_0)^2) \\ (r_i^2 + 2y_i^2) & 2(x_i - x_0)(y_i - y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_i^t \\ \tilde{y}_i^t \end{bmatrix}. \quad (238)$$

Para la distorsión radial (ecuación 237) y para la tangencial (ecuación 238), si se tienen m puntos en n imágenes se pueden agrupar todas las ecuaciones para obtener un total de $2mn$ ecuaciones, o en la forma matricial $Dk = d$. La solución lineal por mínimos cuadrados esta

dada por la ecuación 239,

$$k = (D^T D)^{-1} D^T d. \quad (239)$$

C.3 Calibración experimental de una cámara CCD

Mediante la técnica de calibración de Zhang (Zhang, 2000), se pueden calcular los parámetros intrínsecos y extrínsecos usando un modelo lineal. Al considerar las aberraciones geométricas de los sistemas formadores de imágenes, las ecuaciones 195 y 196 se deben incluir en la ecuación 199, y el modelo matemático pasa a ser un proceso de optimización no lineal.

Para la calibración de la cámara con esta técnica, se requiere de un patrón de calibración, que en esencia es un objeto plano con una impresión de cuadros a dos colores adherida (generalmente blanco y negro para garantizar un alto contraste). Los cuadros del patrón ajedrezado deben tener dimensiones bien conocidas y uniformes, para identificar cada una de sus esquinas en coordenadas $(X_i, Y_i)_W$ como los puntos de control Ψ_i , y con las imágenes adquiridas por la cámara CCD se calculan sus respectivas coordenadas (x_i, y_i) para los puntos ψ_i .

Para este trabajo se calibra una cámara CCD de marca UEYE referencia UI2310M, con conexión USB 2.0, monocromática y resolución VGA de 1024×768 píxel; con lente EDMUND OPTICS de $8.5mm/F1.3$. Como plano de calibración se utiliza un vidrio de dimensiones $40 \times 40 \times 0.5$ cm, con un patrón ajedrezado de cuadros blancos y negros de dimensiones

$2 \times 2 \text{ cm}$. El procedimiento inicia con la toma de imágenes del patrón de calibración, con el plano en mas de 2 posiciones diferentes, Tsai el autor inicial del algoritmo (Tsai, 1987) sugiere mas de 6 imágenes para contar con suficiente información para el proceso iterativo.

En 1999 Jean-Yves Bouguet desarrollo una herramienta computacional de código abierto, disponible en: http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/, para la calibración de cámaras (Bouguet et al., 1999), la cual ajusto posteriormente en 2015 a la técnica de Zhang. Usando la toolbox de Bouguet, después de tomar 9 imágenes de calibración para este caso particular, el primer paso es identificar las esquinas de los cuadros en la imagen; para esto se selecciona una sub-área, con el fin de garantizar una región de la imagen en la que se encuentren cuadros completos y sus esquinas sean identificables, como se ilustra en la Figura 114.

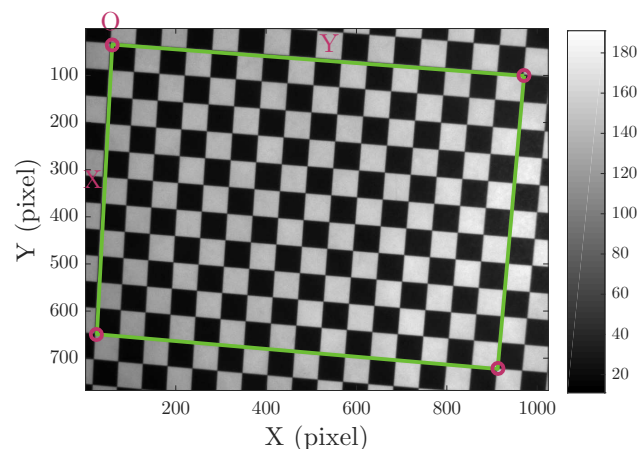


Figura 114. Imagen experimental del patrón de calibración, con una sub-área seleccionada para el procesamiento.

La sub-área seleccionada, que se muestra en la Figura 114, corresponde a la sección del patrón de calibración que se va a procesar, y se asume como el plano imagen de la cámara con origen de su sistema coordenado en la esquina superior izquierda. Las coordenadas de los 4 puntos P_i que delimitan el área de procesamiento se presentan en las ecuaciones de la 240 a la 243,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 971.1277 & 100.9271 \end{bmatrix}^T, \quad (240)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 912.4895 & 722.8471 \end{bmatrix}^T, \quad (241)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 25.5276 & 644.1755 \end{bmatrix}^T, \quad (242)$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 59.5551 & 34.4782 \end{bmatrix}^T. \quad (243)$$

Con las ecuaciones de la 240 a la 243, que corresponden a las coordenadas 2D en pixel de los 4 puntos P_i sobre la imagen de calibración, se construye la matriz P en coordenadas homogéneas que se muestra en la ecuación 244,

$$P = \begin{bmatrix} 971.1277 & 912.4895 & 25.5276 & 59.5551 \\ 100.9270 & 722.8470 & 644.1754 & 34.4782 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (244)$$

Las coordenadas homogeneizadas de los 4 puntos P_i en 2D, ordenadas en la matriz P como

vectores columna, se pueden normalizar y de esta forma relacionarlas con el plano imagen normalizado mediante una homografía $2D \rightarrow 2D$, operación que resulta útil para calcular una primera matriz de homografía H' . Para normalizar los vectores columna de P se requiere la matriz N que se muestra en la ecuación 245,

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x} & 0 & \frac{\bar{x}}{\sigma_x} \\ 0 & \frac{1}{\sigma_y} & \frac{\bar{y}}{\sigma_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{519.9294} & 0 & \frac{492.1750}{519.9294} \\ 0 & \frac{1}{359.2710} & \frac{376.8569}{359.2710} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0019 & 0 & -0.9466 \\ 0 & 0.0028 & -1.0489 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (245)$$

Una vez calculada la matriz N se pueden normalizar los vectores columna contenidos en P con el producto de la ecuación 246,

$$P_{norm} = NP = \begin{bmatrix} 0.9212 & 0.8084 & -0.8975 & -0.8321 \\ -0.7680 & 0.9630 & 0.7580 & -0.9530 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (246)$$

La matriz P_{norm} , contiene las coordenadas homogéneas $2D$ normalizadas de los 4 puntos seleccionados sobre la imagen de calibración que se muestra en la Figura 114, las coordenadas de sus correspondientes 4 puntos en el plano imagen normalizado, son precisamente las coordenadas de sus 4 extremos, que se presentan en las ecuaciones de la 247 a la 250,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (247)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (248)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (249)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (250)$$

Las coordenadas homogéneas en $2D$ de los 4 extremos del plano imagen normalizado se agrupan en la matriz M que se describe en la ecuación 251,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (251)$$

Cuando se tiene una correspondencia de 4 puntos o mas, se puede realizar una transformación $2D \rightarrow 2D$, convirtiendo la ecuación 206 en la ecuación 252,

$$P_{norm} = H' M,$$

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{21} & h'_{31} \\ h'_{12} & h'_{22} & h'_{32} \\ h'_{13} & h'_{23} & h'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (252)$$

La operación de la ecuación 252 resulta útil para calcular la matriz H' (matriz de homografía de 8 grados de libertad con $h_{33} = 1$), la cual se requiere para transformar las coordenadas homogéneas $2D$ del plano imagen normalizado en las coordenadas homogéneas $2D$ normalizadas de los 4 puntos seleccionados en la imagen de calibración (Figura 114). La solución de H' se considera una solución no homogénea (Hartley and Zisserman, 2003), por lo que la ecuación 252 se reescribe en coordenadas euclidianas como se muestra en la ecuación 253,

$$\begin{aligned}
 x_i &= \frac{x'_i h'_{11} + y'_i h'_{21} + h'_{31}}{x'_i h'_{13} + y'_i h'_{23} + 1}, & y_i &= \frac{x'_i h'_{12} + y'_i h'_{22} + h'_{32}}{x'_i h'_{13} + y'_i h'_{23} + 1}, \\
 \begin{bmatrix} x'_i & y'_i & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_i x'_i & -x_i y'_i \\ 0 & 0 & 0 & x'_i & y'_i & 1 & -y_i x'_i & -y_i y'_i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} h'_{11} \\ h'_{21} \\ h'_{31} \\ h'_{12} \\ h'_{22} \\ h'_{32} \\ h'_{13} \\ h'_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{253}$$

Incluyendo los términos de las matrices P_{norm} y M en la ecuación 253, se obtiene la ecuación

254,

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.8084 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -0.9630 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.8975 & 0.8975 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -0.7580 & -0.7580 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8321 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.9530
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 h'_{11} \\
 h'_{21} \\
 h'_{31} \\
 h'_{12} \\
 h'_{22} \\
 h'_{32} \\
 h'_{13} \\
 h'_{23}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0.9212 \\
 -0.7680 \\
 0.8084 \\
 0.9630 \\
 -0.8975 \\
 0.7580 \\
 -0.8321 \\
 -0.9530
 \end{bmatrix}, \quad (254)$$

y despejando se pueden calcular los términos h'_{ij} , como se muestra en la ecuación 255,

$$\begin{bmatrix}
 h'_{11} \\
 h'_{21} \\
 h'_{31} \\
 h'_{12} \\
 h'_{22} \\
 h'_{32} \\
 h'_{13} \\
 h'_{23}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -0.5283 & 0.0180 & 0.5283 & -0.0180 & 0.4717 & 0.0180 & -0.4717 & -0.0180 \\
 -1.0582 & 0.4841 & 0.0582 & -0.4841 & -0.0582 & 0.4841 & 1.0582 & -0.0180 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0.5619 & -0.9785 & -0.5619 & 0.9785 & 0.5619 & 0.0215 & -0.5619 & -0.0215 \\
 -0.0666 & -0.4456 & 0.0666 & -0.5544 & -0.0666 & 0.5544 & 0.0666 & 0.4456 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0.5835 & 0.0223 & -0.5835 & -0.0223 & 0.5835 & 0.0223 & -0.5835 & -0.0223 \\
 0.0699 & -0.05818 & -0.0699 & 0.5818 & 0.0699 & -0.5818 & -0.0699 & 0.5818
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0.9212 \\
 -0.7680 \\
 0.8084 \\
 0.9630 \\
 -0.8975 \\
 0.7580 \\
 -0.8321 \\
 -0.9530
 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} h'_{11} \\ h'_{21} \\ h'_{31} \\ h'_{12} \\ h'_{22} \\ h'_{32} \\ h'_{13} \\ h'_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0908 \\ -1.7657 \\ 0.9212 \\ 1.7572 \\ -0.1993 \\ -0.7680 \\ 0.0272 \\ 0.0150 \end{bmatrix} . \quad (255)$$

Ordenando los términos de la ecuación 255, como se muestra en la ecuación 256, se obtiene la matriz de homografía H' , que corresponde una transformación entre términos normalizados.

$$H' = \begin{bmatrix} -0.0908 & -1.7657 & 0.9212 \\ 1.7572 & -0.1993 & -0.7680 \\ 0.0272 & 0.0150 & 1 \end{bmatrix} . \quad (256)$$

Luego, para “desnormalizar” la matriz de homografía H' se debe multiplicar por la inversa de la matriz de normalización N , como se muestra en la ecuación 257,

$$\begin{aligned}
 H &= N^{-1}H', \\
 H &= \begin{bmatrix} 519.9294 & 0 & 492.1750 \\ 0 & 359.2710 & 376.8569 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0908 & -1.7657 & 0.9212 \\ 1.7572 & -0.1993 & -0.7680 \\ 0.0272 & 0.0150 & 1 \end{bmatrix}, \\
 H &= \begin{bmatrix} -33.8446 & -910.6788 & 971.1277 \\ 641.5607 & -65.9314 & 100.9270 \\ 0.0272 & 0.0150 & 1 \end{bmatrix}. \tag{257}
 \end{aligned}$$

Como se puede apreciar en la Figura 114, la imagen de calibración, respecto al origen del sistema coordenado del plano imagen, posee 11 esquinas de cuadros en la dirección del eje X y 16 en la del eje Y . Teniendo en cuenta que los cuadros son del mismo tamaño, las coordenadas de las esquinas en el plano imagen normalizado se pueden calcular dividiendo el área del plano imagen normalizado en el numero de total de esquinas, como se muestra en la Figura 115.

Mediante una transformación de homografía $2D \rightarrow 2D$, las coordenadas de las esquinas de los cuadros se pueden trasladar del plano imagen normalizado al plano imagen usando la matriz de homografía: $\psi_i = H\psi'_i$, en donde ψ'_i corresponde a las coordenadas (x'_i, y'_i) de cada una de

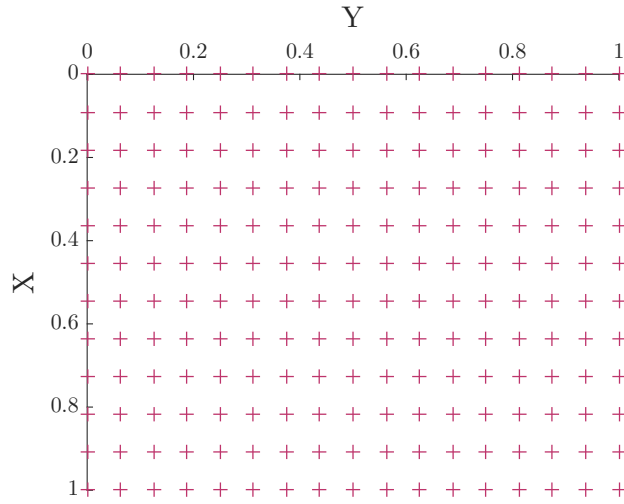


Figura 115. Distribución de las esquinas de cuadros de la imagen de calibración (Figura 114), en el plano imagen normalizado.

las esquinas de los cuadrados en el plano imagen normalizado. El resultado de esta operación se gráfica en la Figura 116 (a), y para verificar el resultado de la matriz de homografía H se superponen las coordenadas ψ_i sobre la imagen de calibración, como se muestra en la Figura 116 (b).

Las esquinas encontradas corresponden a los puntos ψ_i en la imagen, y a los puntos Ψ_i en el plano de calibración. Las coordenadas de los puntos , en el plano de calibración, se pueden deducir en coordenadas métricas gracias a que las dimensiones de los cuadros son conocidas y asumiendo que para el plano de calibración $Z = 0$ respecto al sistema coordenado del mundo. Este procedimiento se repite para las 8 imágenes restantes, y con estos datos se ejecuta el algoritmo de calibración calculando inicialmente la matriz de Homografía H para cada imagen, como se muestra en la ecuación 206. En las ecuaciones de la 258 a la 266, se muestran los

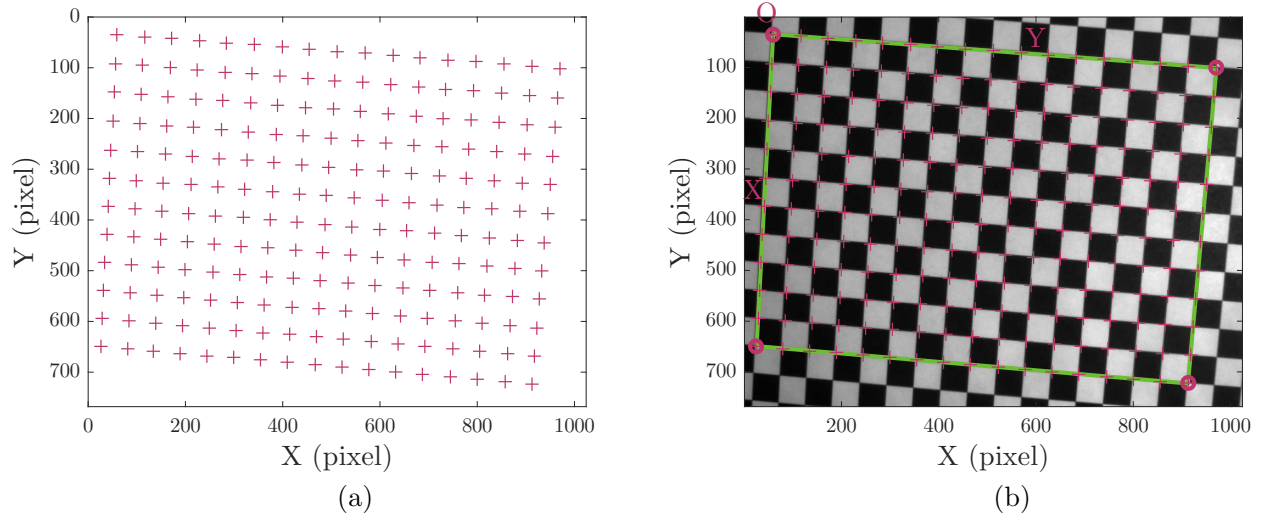


Figura 116. (a) Coordendas ψ_i , resultado de la transformación $\psi_i = H\psi'_i$, y (b) superposición de las coordenadas ψ_i y la imagen de calibración.

resultados obtenidos para la matriz H de las 9 imágenes procesadas,

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0.1512 & 2.8274 & 55.0086 \\ 2.8969 & 0.2062 & 30.5105 \\ 0.0001 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (258)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -0.3124 & 2.5584 & 107.6981 \\ 2.4817 & 0.1862 & 17.5867 \\ -0.0002 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (259)$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0.0162 & 3.0638 & 70.3818 \\ 3.1738 & 0.2209 & 30.3699 \\ 0.0004 & -0.0001 & 1 \end{bmatrix}, \quad (260)$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} -0.1613 & 3.2140 & 75.4085 \\ 3.1392 & 0.4259 & 11.4609 \\ 0 & 0.0007 & 1 \end{bmatrix}, \quad (261)$$

$$H_5 = \begin{bmatrix} -0.2670 & 3.4807 & 102.7632 \\ 3.4376 & 0.4626 & 69.7230 \\ 0.0004 & 0.0008 & 1 \end{bmatrix}, \quad (262)$$

$$H_6 = \begin{bmatrix} -0.1112 & 3.0603 & 58.8309 \\ 2.9135 & 0.4 & 30.2993 \\ -0.0001 & 0.0007 & 1 \end{bmatrix}, \quad (263)$$

$$H_7 = \begin{bmatrix} -0.1819 & 3.1755 & 109.4840 \\ 3.0806 & 0.3661 & 17.6642 \\ 0.0001 & 0.0005 & 1 \end{bmatrix}, \quad (264)$$

$$H_8 = \begin{bmatrix} -0.1946 & 3.4010 & 117.2331 \\ 3.3348 & 0.3927 & 9.0652 \\ 0.0003 & 0.0005 & 1 \end{bmatrix}, \quad (265)$$

$$H_9 = \begin{bmatrix} -0.1620 & 2.9794 & 100.3708 \\ 2.8033 & 0.3392 & 41.2716 \\ -0.0001 & 0.0005 & 1 \end{bmatrix}. \quad (266)$$

Con el valor de los vectores h_{ij} , se crea la matriz V y se calculan los elementos del vector b , como se muestra en la ecuación 229, y así usando las ecuaciones de la 230 a la 234 se llega a la matriz de la cámara K . Para este caso los valores de los parámetros intrínsecos de la cámara, que conforman la matriz K , se muestran en la ecuación 267,

$$K = \begin{bmatrix} 1799.7 & 0 & 519.6 \\ 0 & 1802.5 & 399.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (267)$$

Conociendo las matrices K y H se pueden hallar los parámetros extrínsecos, que corresponden a la matriz de rotación R_i y el vector de traslación t_i , usando las ecuaciones 209, 210, 235, y 236. Los parámetros extrínsecos para las 9 imágenes de la calibración experimental se presentan en las ecuaciones de la 268 a la 276,

$$R_1[I|t_1] = \begin{bmatrix} -0.0756 & 0.9966 & -0.0330 & -162.4716 \\ 0.9940 & 0.0780 & 0.0765 & -128.8720 \\ 0.0789 & -0.0270 & -0.9965 & 629.3788 \end{bmatrix}, \quad (268)$$

$$R_2[I|t_2] = \begin{bmatrix} -0.0813 & 0.9965 & -0.0176 & -159.1119 \\ 0.9873 & 0.0781 & -0.1381 & -147.3356 \\ -0.1362 & -0.0286 & -0.9903 & 695.2076 \end{bmatrix}, \quad (269)$$

$$R_3[I|t_3] = \begin{bmatrix} -0.0676 & 0.9965 & -0.0501 & -144.7692 \\ 0.9653 & 0.0781 & 0.2493 & -118.8055 \\ 0.2524 & -0.0315 & -0.9671 & 579.9955 \end{bmatrix}, \quad (270)$$

$$R_4[I|t_4] = \begin{bmatrix} -0.0577 & 0.9080 & -0.4149 & -142.1181 \\ 0.9981 & 0.0437 & 0.0433 & -123.9901 \\ 0.0212 & 0.4167 & -0.9088 & 575.8174 \end{bmatrix}, \quad (271)$$

$$R_5[I|t_5] = \begin{bmatrix} -0.1328 & 0.9103 & 0.3921 & -123.2415 \\ 0.9734 & 0.0454 & 0.2244 & -97.3785 \\ 0.1865 & 0.4115 & -0.8921 & 532.1040 \end{bmatrix}, \quad (272)$$

$$R_6[I|t_6] = \begin{bmatrix} -0.0149 & 0.9142 & 0.4049 & -155.1550 \\ 0.9968 & 0.0452 & -0.0654 & -124.1603 \\ -0.0781 & 0.4027 & -0.9120 & 606.0216 \end{bmatrix}, \quad (273)$$

$$R_7[I|t_7] = \begin{bmatrix} -0.0729 & 0.9575 & 0.2792 & -134.2046 \\ 0.9963 & 0.0569 & 0.0649 & -124.7876 \\ 0.0463 & 0.2829 & -0.9580 & 588.9337 \end{bmatrix}, \quad (274)$$

$$R_8[I|t_8] = \begin{bmatrix} -0.1122 & 0.9586 & 0.2618 & -122.9317 \\ 0.9767 & 0.0579 & 0.2065 & -119.1301 \\ 0.1828 & 0.2789 & -0.9428 & 549.8537 \end{bmatrix}, \quad (275)$$

$$R_9[I|t_9] = \begin{bmatrix} -0.0312 & 0.9571 & 0.2882 & -146.2294 \\ 0.9957 & 0.0550 & -0.0749 & -124.7915 \\ -0.0875 & 0.2846 & -0.9546 & 627.7533 \end{bmatrix}. \quad (276)$$

Una vez calculados los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara, matrices K y $R_i[I|t_i]$, se calculan las coordenadas teóricas (x_i, y_i) de los puntos ψ_i en pixeles; para esto se usan las coordenadas (X_i, Y_i, Z_i) en milímetros de los puntos Ψ_i en el plano de calibración, y la ecuación 203. De este modo, la función a optimizar esta dada por la diferencia en coordenadas entre los puntos experimentales y los puntos teóricos, como se muestra en la ecuación 202.

En la Figura 117 (a) se muestra la re-proyección de los puntos, con coordenadas experimentales y teóricas, sobre la primer imagen de calibración (Figura 114). La mayor diferencia entre 2 puntos, que corresponde a el error mas grande para la primer imagen de calibración, es de 0.3018 pixeles. En la Figura 117 (b) se muestra un zum de la imagen de calibración en donde se evidencia que la separación entre los puntos experimentales y teóricos está por debajo de los 0.5 pixeles.

En la toolbox de Bouget (Bouguet, 2004) se minimiza la función de error a partir del método de optimización de *gradiente descendiente*, y se usan como parámetros de entrada los valores de K y $R_i[I|t_i]$ calculados experimentalmente con el modelo lineal. En el procedimiento de optimización no lineal se incluyen 5 coeficientes que definen las aberraciones geométricas,

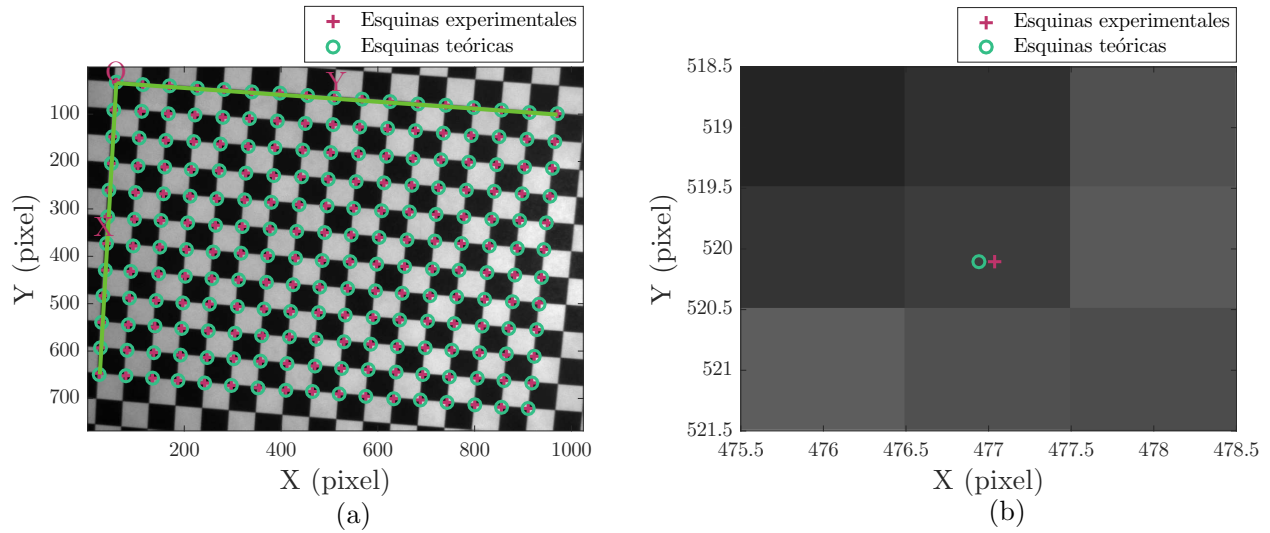


Figura 117. (a) Superposición de los puntos con coordenadas experimentales y los puntos con coordenadas teóricas sobre la imagen 1 de calibración, y (b) zoom de la imagen 1 de calibración con los puntos de coordenadas teóricas y experimentales.

para este caso particular se muestran en la ecuación 277,

$$k = \begin{bmatrix} -0.0695 & -0.0508 & 0.0003 & -0.0004 & 0 \end{bmatrix}. \quad (277)$$

Finalmente, en la Figura 118 se gráfica la diferencia de coordenadas (x, y) entre los puntos teóricos y experimentales en las 9 imágenes de calibración, lo que corresponde a el error en la calibración que para este caso esta por debajo de los 0,5 pixeles.

Calculo de distorsiones geométricas. La resolución de la cámara es de $1024 \times 768 \text{ pixel}$, las coordenadas (u_i, v_i) de cada pixel en el sensor CCD se pueden expresar en el plano imagen normalizado respecto al sistema coordenado de la cámara usando la matriz K y la ecuación 278,

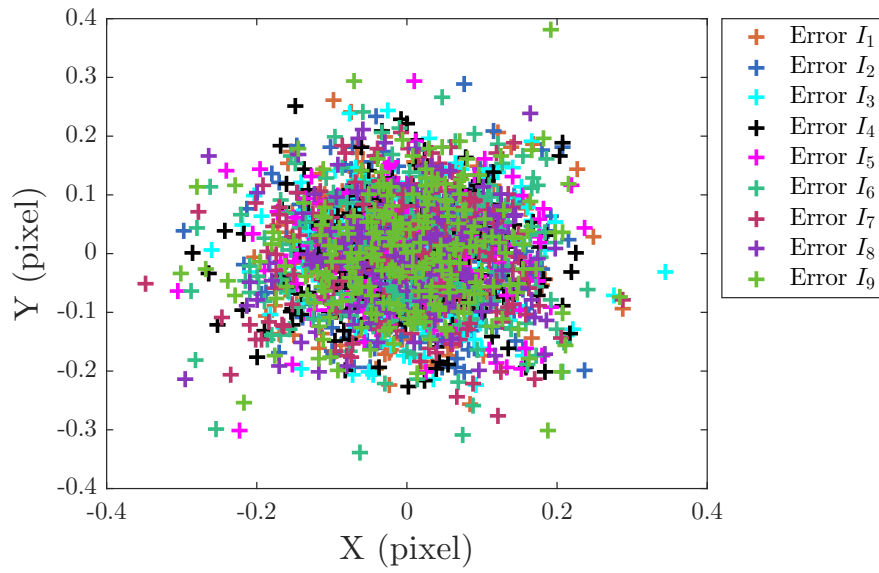


Figura 118. Distancia entre los puntos con coordenadas teóricas y los puntos con coordenadas experimentales.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} &= K \begin{bmatrix} X_i/Z_i \\ Y_i/Z_i \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 K^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_i/Z_i \\ Y_i/Z_i \\ 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{278}$$

Al igual que en el modelo de Zhang, se asume que el centro de distorsión coincide con el eje

óptico de la cámara, por lo que r_i^2 esta dado por la ecuación 279,

$$r_i^2 = X_i^2 + Y_i^2, \quad (279)$$

por el número de puntos (786432) no es practico escribir el resultado para cada uno en este documento. Usando los coeficientes k de la ecuación 277, se calculan las coordenadas $(\tilde{X}_i^r, \tilde{Y}_i^r)$ afectadas por la distorsión radial, como se muestra en la ecuación 280,

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_i^r \\ \tilde{Y}_i^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i(1 + (-0.0695)r^2 + (-0.0508)(r^2)^2) \\ Y_i(1 + (-0.0695)r^2 + (-0.0508)(r^2)^2) \end{bmatrix}, \quad (280)$$

y las coordenadas afectadas por la distorsión tangencial en la ecuación 281,

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_i^t \\ \tilde{Y}_i^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.0003)2X_iY_i + (-0.0004)(r_i^2 + 2X_i^2) \\ (0.00030)(r_i^2 + 2Y_i^2) + (-0.0004)2X_iY_i \end{bmatrix}. \quad (281)$$

Finalmente las coordenadas distorsionadas se calculan con la ecuación 282,

$$\begin{bmatrix} Xd_i \\ Yd_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_i^r + \tilde{X}_i^t \\ \tilde{Y}_i^r + \tilde{Y}_i^t \end{bmatrix}, \quad (282)$$

para expresarlas en pixeles se utiliza la ecuación 283,

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{v}_i \\ 1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} Xd_i \\ Yd_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (283)$$

y la diferencia entre coordenadas distorsionadas $(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$ y no distorsionadas (u_i, v_i) se calcula con la ecuación 284,

$$\begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i - \hat{u}_i \\ v_i - \hat{v}_i \end{bmatrix}. \quad (284)$$