

CAOS SEGÚN DEVANEY EN FUNCIONES MULTIVALUADAS

YINETH MASSIEL AMOROCHO CAMACHO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2025

# CAOS SEGÚN DEVANEY EN FUNCIONES MULTIVALUADAS

YINETH MASSIEL AMOROCHO CAMACHO

Trabajo de grado para optar al título de  
Matemática

Director  
Javier Enrique Camargo García  
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2025

## **DEDICATORIA**

A mis padres, Lilia Camacho Díaz y Martin Fernando Amorocho Forero, y a mi abuela, Socorro Forero, por su incondicional apoyo y motivación, pilares fundamentales para alcanzar este logro. También, a mí misma, como recordatorio de que pude, puedo y podré.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a todas las personas que, de manera directa o indirecta, contribuyeron a la realización de este trabajo. En especial, al profesor Javier Camargo por su apoyo, dedicación y paciencia al guiarme como director de este proyecto. También quiero expresar mi gratitud a mis compañeros de la universidad, en particular a mis amigos de Matemáticas y Física, por su constante motivación, amor y apoyo emocional que me brindaron a lo largo de esta etapa. Por último, a mis amigas Nathalia Franco y Gabriela Hakspiel por ser mis luceros guías.

## CONTENIDO

	<b>pág.</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1 Continuos . . . . .	11
1.2 Dinámica discreta . . . . .	12
<b>2 Dinámicas multivaluadas</b>	<b>21</b>
2.1 Definiciones generales . . . . .	21
2.1.1 Funciones multivaluadas . . . . .	22
2.1.2 Dinámica multivaluada . . . . .	25
2.2 Funciones caóticas según Devaney . . . . .	35
<b>Bibliografía</b>	<b>40</b>

## LISTA DE FIGURAS

	<b>pág.</b>
1.1 Función tienda. . . . .	18
1.2 Función $T^2$ . . . . .	18
1.3 Función $T^3$ . . . . .	19
2.1 Gráfica de $F$ . . . . .	24
2.2 Gráfica de $G$ . . . . .	27
2.3 Gráfica de $G$ . . . . .	29
2.4 Gráfica de $F$ . . . . .	31
2.5 Gráfica de $F$ . . . . .	33
2.6 Gráfica de $T$ . . . . .	35
2.7 Gráfica de $S$ . . . . .	36

## RESUMEN

**TÍTULO:** CAOS SEGÚN DEVANEY EN FUNCIONES MULTIVALUADAS \*

**AUTOR:** YINETH MASSIEL AMOROCHO CAMACHO \*\*

**PALABRAS CLAVE:** CAOS, SISTEMAS DINÁMICOS, FUNCIÓN MULTIVALUADA, DEVANEY.

### DESCRIPCIÓN:

Un sistema dinámico multivaluado es una pareja  $(X, F)$ , donde  $X$  es un espacio continuo y  $F$  es una función multivaluada semicontinua superiormente. En este trabajo, estudiamos el caos en funciones multivaluadas según la definición de Devaney, analizando propiedades como transitividad topológica, densidad de puntos periódicos y sensibilidad a condiciones iniciales. Además, exploramos ejemplos y teoremas que extienden los conceptos del caos en sistemas dinámicos usuales al contexto multivaluado.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctor en Matemáticas.

## ABSTRACT

**TITLE:** DEVANEY CHAOS ON MULTIVALUED FUNCTIONS \*

**AUTHOR:** YINETH MASSIEL AMOROCHO CAMACHO \*\*

**KEYWORDS:** CHAOS, DYNAMICAL SYSTEMS, MULTIVALUED FUNTION, DEVANEY.

### DESCRIPTION:

A set-valued dynamical system is a pair  $(X, F)$ , where  $X$  is a continuous space and  $F$  is an upper semi-continuous set-valued function. In this work, we study chaos in set-valued functions according to Devaney's definition, analyzing properties such as topological transitivity, density of periodic points, and sensitivity to initial conditions. Additionally, we explore examples and theorems that extend the concepts of chaos from classical dynamical systems to the set-valued context.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctor en Matemáticas.

## Introducción

Los sistemas dinámicos constituyen un campo de estudio en la matemática que examina la evolución temporal de una amplia gama de fenómenos naturales y artificiales. Estos sistemas se dividen en dos categorías principales: sistemas continuos y sistemas discretos. Mientras que en los sistemas continuos se puede describir la evolución en cada instante de tiempo, en los sistemas discretos solo se puede determinar la evolución en momentos específicos, como en horas, días o semanas. En nuestro trabajo, nos enfocamos en las propiedades dinámicas relacionadas con los sistemas discretos, donde analizaremos cómo la evolución temporal de estos sistemas se puede caracterizar y estudiar a través de instantes discretos.

Dentro del contexto de los sistemas dinámicos discretos, los sistemas caóticos destacan por su comportamiento impredecible y complejo. Según la teoría del caos, popularizada por Robert L. Devaney<sup>1</sup>, un sistema dinámico es caótico si cumple con tres propiedades esenciales: sensibilidad a las condiciones iniciales, transitividad topológica y densidad de puntos periódicos. Estas propiedades son fundamentales para comprender el comportamiento caótico en sistemas reales y han sido objeto de extensas investigaciones en el marco de los sistemas dinámicos discretos. Sin embargo, el estudio de estos sistemas se torna aún más desafiante cuando se los relaciona con funciones multivaluadas, especialmente cuando se incorporan las características de la semicontinuidad superior.

Las funciones multivaluadas son aquellas en las que a cada elemento del dominio se le asigna un subconjunto del codominio. Este tipo de funciones resulta esencial en el estudio de la dinámica de sistemas complejos, ya que permiten modelar situaciones en las que un estado puede evolucionar en múltiples direcciones simultáneamente. Las funciones semicontinuas superiormente son una clase particular de funciones multivaluadas que han demostrado ser herramientas útiles para abordar problemas en la topología general y en la teoría de funciones multivaluadas. Estas funciones no solo preservan ciertas propiedades de continuidad, sino que también facilitan la comprensión de la transitividad topológica y la sensibilidad a las condiciones iniciales en un contexto más amplio.

El objetivo de este trabajo es investigar a base del artículo de Javier Camargo y Sergio Macías<sup>2</sup>, la dinámica caótica de las funciones multivaluadas semicontinuas superiormente.

---

<sup>1</sup> R. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 3rd. CRC Press, 2018.

<sup>2</sup> J. Camargo y S. Macías. «Dynamics with set-valued functions and coselections». En: *Qualitative Theory*

te. Vamos a analizar cómo las propiedades caóticas definidas por Devaney se manifiestan en este contexto y exploraremos las interacciones entre las funciones multivaluadas semicontinuas y las características caóticas de los sistemas dinámicos discretos. Este estudio permitirá una comprensión más profunda de las condiciones que propician el caos en estos sistemas, ofreciendo nuevas perspectivas sobre la aplicación de conceptos topológicos y dinámicos en la teoría de funciones multivaluadas.

Este trabajo se estructura en dos capítulos principales. En el primero, se proporcionarán definiciones claves relacionadas con los sistemas dinámicos discretos tradicionales, y se presentarán funciones esenciales como la función Tienda y otras funciones usuales utilizadas en el análisis. Este capítulo establecerá la base necesaria para entender los conceptos fundamentales y las herramientas matemáticas que se utilizarán en el estudio. En el segundo capítulo, se enfocará en la dinámica de las funciones multivaluadas presentada en Camargo y Macías, «Dynamics with set-valued functions and coselections» y en la introducción de la definición de caos en este contexto. Se explorarán las propiedades caóticas definidas por Devaney y cómo estas se manifiestan en las funciones multivaluadas semicontinuas superiormente, proporcionando una comprensión más profunda de su comportamiento en sistemas discretos.

## 1. Preliminares

En este capítulo introducimos los conceptos y resultados básicos que servirán como base para la comprensión de este trabajo. Este capítulo lo dividimos en dos secciones: la sección 1.1 dedicada a mostrar algunos resultados relacionados con los continuos; y la sección 1.2 enunciamos algunas definiciones y resultados relacionados con los sistemas dinámicos discretos

### 1.1. Continuos

En este trabajo todos nuestros espacios serán espacios métricos compactos y las funciones que usaremos serán continuas. En algunos casos es importante considerar la conexidad del espacio, es por esto que introducimos la noción de continuo en la siguiente definición.

**Definición 1.1.1.** <sup>3</sup> *Un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo diferente del vacío. Un subcontinuo es un continuo contenido en un espacio métrico.*

El intervalo cerrado  $[0, 1]$  es un continuo. Un arco es cualquier espacio  $X$  homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

Dado  $X$  un espacio métrico con métrica  $d$ , en adelante, denotaremos por  $B(x; r)$  a la bola con centro  $x$  y radio  $r$ ; esto es,

$$B(x; r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

Los resultados presentados en esta sección son conocidos y pueden ser consultados en cualquier libro de topología general.

**Teorema 1.1.2.** <sup>3</sup> *Sean  $X$  y  $Y$  espacios métricos y  $f: X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva. Si  $X$  es un continuo, entonces  $Y$  es también un continuo.*

Por el teorema anterior, si consideramos la función  $f: [0, 1] \rightarrow S^1$ , donde  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ , definida por  $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  es continua y sobreyectiva. Así  $S^1$  es un continuo. Una curva cerrada simple es cualquier espacio homeomorfo a  $S^1$ .

---

<sup>3</sup> J. Camargo y E. Villamizar. *Topología General*. Bucaramanga: Ediciones UIS, 2019.

**Teorema 1.1.3.** <sup>3</sup> Sea  $\{X_i \mid i \in I\}$  una familia de continuos. Entonces  $\prod_{i \in I} X_i$  es un continuo si, y solo si,  $I$  es a lo más numerable.

Observemos además que dada una colección a lo más numerable de espacios métricos  $\{X_i : i \in I\}$ , como  $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$  definida por  $\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$  es continua y sobreyectiva, entonces si  $\prod_{i \in I} X_i$  es un continuo, implica que cada  $X_i$  es un continuo para cada  $i \in I$ .

Dado cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $[0, 1]^n$  es un continuo y se conoce como  $n$ -celda.  $S^1 \times S^1$  es conocido como toro, y representa otro ejemplo de continuo.

El cubo de Hilbert es el producto numerable del intervalo cerrado  $[0, 1]$ , y se denota por  $\mathcal{Q}$ ; es decir,  $\mathcal{Q} = \prod_{i \in \mathbb{N}} I_i$ , donde  $I_i = [0, 1]$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . También, es correcto escribir  $\mathcal{Q} = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ . El cubo de Hilbert es un ejemplo muy importante de continuo ya que, por el teorema de metrización de Urysohn, el cubo de Hilbert contiene una copia homeomorfa de cualquier continuo.

## 1.2. Dinámica discreta

En esta sección, vamos a hablar sobre la dinámica de funciones continuas, donde  $X$  es un espacio métrico compacto o un continuo y  $f: X \rightarrow X$  es una función continua. Veremos algunas definiciones importantes, mostraremos propiedades básicas y daremos ejemplos para entender mejor cómo se comportan estas dinámicas. En adelante, un sistema dinámico discreto o simplemente, un sistema dinámico, es una pareja  $(X, f)$  donde  $X$  es un espacio métrico compacto y  $f: X \rightarrow X$  una función continua.

**Definición 1.2.1.** <sup>4</sup> Sea  $(X, f)$  un sistema dinámico discreto. Definimos la órbita de un punto  $x \in X$  bajo  $f$  como la sucesión:

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

En ocasiones, trataremos la órbita de un punto  $\mathcal{O}_f(x)$  como un subconjunto de  $X$ . Esto debe deducirse fácilmente por el contexto y no debería generar confusiones.

Dada  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $f(x) = x^2$  para cada  $x \in [0, 1]$ , es fácil ver que  $\mathcal{O}_f(x)$  es una sucesión constante siempre que  $x \in \{0, 1\}$ ; y será una sucesión convergente a cero si  $x \in (0, 1)$ .

---

<sup>4</sup> J. King y H. Méndez. *Sistemas Dinámicos Discretos*. UNAM, Facultad de Ciencias, 2014.

**Definición 1.2.2.** <sup>4</sup> Sea  $(X, f)$  un sistema dinámico discreto. Un punto  $x \in X$  se dice *periódico de  $f$*  si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x) = x$ . Denotaremos  $\text{Per}(f)$  como el conjunto de puntos periódicos de  $f$ . Diremos que el punto periódico  $x$  es de periodo  $n$  si  $n = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x = f^n(x)\}$ .

Del ejemplo anterior dado por la función  $f(x) = x^2$ , tenemos que  $\text{Per}(f) = \{0, 1\}$ .

**Ejemplo 1.2.3.** Sean  $f, g: S^1 \rightarrow S^1$  definidas para cada  $z \in S^1$ , por:

$$f(z) = ze^i \text{ y } g(z) = ze^{\frac{\pi}{2}i}.$$

Notemos que  $\text{Per}(f) = \emptyset$ ; pues si  $f^m(z) = z$  para algún entero  $m > 0$ , entonces  $ze^{mi} = z$ , lo que implica que  $e^{mi} = 1$ , por tanto,  $m$  es múltiplo de  $2\pi$ , una contradicción.

Por otra parte, observemos que  $g^4(z) = ze^{2\pi i} = z$  para cada  $z \in S^1$ ; esto es,  $\text{Per}(g) = S^1$ , donde todo punto es de periodo 4.

A continuación enunciamos un ejemplo más interesante.

**Ejemplo 1.2.4.** Sea  $f: S^1 \rightarrow S^1$  definida para cada  $z \in S^1$  por  $f(z) = z^2$ . De esta forma, los puntos periódicos de  $f$  satisfacen  $f^n(z) = z^{2^n} = z$ , lo que implica que  $z^{2^n-1} = 1$ , es decir,  $z$  debe ser una raíz de la unidad. Por lo tanto,  $z = e^{\frac{2\pi ik}{2^n-1}}$ , con  $k \in \{0, \dots, 2^n - 2\}$ . En consecuencia, los puntos periódicos de  $f$  son exactamente las raíces de la unidad de todos los órdenes  $2^n - 1$ , para  $n \geq 1$ .

Además,  $\text{Per}(f)$  es denso en  $S^1$ , ya que, cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $2^n - 1$  también crece, de manera que el número correspondiente de puntos periódicos aumenta continuamente y son distribuidos uniformemente sobre la circunferencia unitaria  $S^1$ . Note que si  $z = e^{2\pi i\alpha}$  con  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , entonces  $z$  no puede ser una raíz de la unidad porque no existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $\alpha m \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 1.2.5.** <sup>4</sup> Sea  $(X, f)$  un sistema dinámico discreto. Diremos que  $f$  es *topológicamente transitiva*, o simplemente *transitiva en  $X$* , si para todo par de conjuntos abiertos no vacíos de  $X$ ,  $U$  y  $V$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . Esto es, existe  $x \in U$  tal que  $\mathcal{O}_f(x)$  intersecta a  $V$ . En este caso diremos también que el sistema dinámico discreto  $(X, f)$  es *transitivo*.

Note que la función  $g$  definida en el Ejemplo 1.2.3, no es topológicamente transitiva. Para demostrarlo, tomemos dos abiertos  $U = \{z \in S^1 \mid 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{6}\}$  y  $V = \{z \in S^1 \mid \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{3}\}$ . Entonces, al aplicar iteraciones de  $g$  en  $U$ , obtenemos:  $g(U) = \{z \in S^1 \mid \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3}\}$ ,  $g^2(U) = \{z \in S^1 \mid \pi < \arg(z) < \frac{7\pi}{6}\}$  y  $g^3(U) = \{z \in S^1 \mid \frac{4\pi}{3} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2}\}$ . De manera que, las imágenes de  $U$  rotan en  $S^1$  sin llegar a intersectar a  $V$ .

En cambio, la función  $f$  dada en el Ejemplo 1.2.4, es topológicamente transitiva. Considere dos abiertos de  $S^1$ :  $U = \{z \in S^1 \mid \alpha < \arg(z) < \beta\}$ , con  $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$  y  $\beta - \alpha > 0$ , y  $V = \{z \in S^1 \mid \gamma < \arg(z) < \delta\}$ , con  $\gamma, \delta \in [0, 2\pi)$  y  $\delta - \gamma > 0$ . Bajo  $f^n$ , el arco  $U$  se transforma en  $f^n(U) = \{z \in S^1 \mid 2^n\alpha < \arg(z) < 2^n\beta\}$ . La longitud del arco  $f^n(U)$  es  $2^n(\beta - \alpha)$ . Dado que  $2^n$  crece,  $f^n(U)$  eventualmente cubre  $S^1$ . Por lo tanto,  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ , lo que implica que  $f$  es topológicamente transitiva.

**Definición 1.2.6.** <sup>4</sup> Sea  $(X, f)$  un sistema dinámico discreto. Decimos que  $f$  es sensible a las condiciones iniciales si existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $x \in X$  y  $\delta > 0$ , existen  $y \in B(x; \delta)$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon$ .

**Ejemplo 1.2.7.** La función  $f(z) = z^2$  definida en el Ejemplo 1.2.4, es sensible a las condiciones iniciales. Sea  $\epsilon = 1$ ,  $\delta > 0$  y  $z \in S^1$ . Como  $f^n(z) = z^{2^n}$ , esta función duplica los ángulos en cada iteración, lo que provoca que los puntos cercanos en el círculo unitario se separen al iterar  $f$ . Así, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(B(z, \delta)) = S^1$ . Esto garantiza que podemos encontrar dos puntos  $z_1$  y  $z_2$  dentro de  $B(z, \delta)$  tales que:

$$\arg(f^n(z_1)) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \arg(f^n(z_2)) = -\frac{\pi}{2}.$$

Dado que la distancia entre estos puntos es:

$$d(f^n(z_1), f^n(z_2)) = 2,$$

al menos uno de las siguientes condiciones debe ser cierta:

$$d(f^n(z), f^n(z_1)) > 1 \quad \text{o} \quad d(f^n(z), f^n(z_2)) > 1.$$

Esto muestra que  $f$  es sensible a las condiciones iniciales.

Observe que ninguna de las funciones del Ejemplo 1.2.3 es sensible a las condiciones iniciales, ya que ambas provocan que el comportamiento de dos puntos simplemente rote en un ángulo determinado, manteniendo constante su distancia relativa. Por lo tanto, no existirá ninguna iteración en la que dichos puntos se separen significativamente.

**Teorema 1.2.8.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto y sin puntos aislados y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Entonces,  $f$  es topológicamente transitiva si, y solo si, existe  $x_0 \in X$  tal que la órbita  $\mathcal{O}_f(x_0)$  forma un conjunto denso en  $X$ .

*Demostración.* ( $\implies$ ) Supongamos primero que  $f$  es topológicamente transitiva. Dado un abierto no vacío  $U \subset X$ , veamos que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U)$  es un abierto denso de  $X$ .

Como  $f$  es continua,  $f^{-n}(U)$  es abierto. Además, si  $W$  es un abierto de  $X$ , como  $f$  es topológicamente transitiva, existe  $k$  tal que  $f^k(W) \cap U \neq \emptyset$ . Así,  $W \cap f^{-k}(U) \neq \emptyset$  y  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U)$  es denso.

Sea  $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  una base numerable de  $X$ . Note que, por el Teorema de categorías de Baire (Teorema 9.13 de (Camargo y Villamizar, *Topología General*)),

$$H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-j}(B_n),$$

es denso. Sean  $x \in H$  y  $V$  un abierto de  $X$ . Como  $\mathcal{B}$  es base, existe  $B_k \in \mathcal{B}$  tal que  $B_k \subseteq V$ . Así,  $x \in f^{-j}(B_k)$  para algún  $j \in \mathbb{N}$ . De lo anterior,  $f^j(x) \in V$  y  $\overline{O_f(x)} = X$ .

( $\Leftarrow$ ) Recíprocamente, supongamos que existe  $x \in X$  tal que  $\overline{O_f(x)} = X$ . Sean  $U$  y  $V$  abiertos de  $X$ . Como  $\overline{O_f(x)} = X$ , existe  $m$  tal que  $f^m(x) \in U$ . Sea  $y = f^m(x)$ . Como  $X$  no tiene puntos aislados,  $V \setminus \{x, \dots, f^m(x)\}$  es un abierto no vacío. Así, existe  $l$  tal que

$$f^l(x) \in V \setminus \{x, \dots, f^m(x)\}.$$

Es claro que  $m < l$  y  $f^k(y) \in V$ , donde  $k = l - m$ . De lo anterior,  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$  y  $f$  es topológicamente transitiva.

□

La función  $f$  presentada en el Ejemplo 1.2.3 es topológicamente transitiva. Pues, dados dos abiertos  $U$  y  $V$  en  $S^1$ , cualquier punto  $z_0 \in U$  tiene una órbita que forma un subconjunto denso de  $S^1$ . Esto significa que existe un  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $ze^{ki} \in V$ . De manera que por el Teorema 1.2.8,  $f$  es topológicamente transitiva.

Existen diferentes nociones de caos. La definición que usaremos en este trabajo fué introducida por Robert Devaney y la enunciamos a continuación.

**Definición 1.2.9.** <sup>4</sup> Sea  $(X, f)$  un sistema dinámico discreto. Diremos que  $(X, f)$  es caótica según Devaney, o simplemente,  $f$  es caótica, si se satisfacen las siguientes afirmaciones:

1. El conjunto de  $\text{Per}(f)$  es denso en  $X$ ;
2.  $f$  es transitiva  $X$ ;
3.  $f$  es sensible a las condiciones iniciales.

El Teorema 1.2.11 que demostraremos a continuación, es muy importante, ya que nos indica que es suficiente demostrar que la función es transitiva y que tiene puntos periódicos densos para concluir que existe caos. Primero, demostraremos un lema que será de utilidad y, a continuación, enunciaremos el teorema.

**Lema 1.2.10.** *Sean  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua tal que  $\text{Per}(f)$  tiene al menos dos puntos. Entonces, existe  $\delta_0 > 0$  tal que para todo  $x \in X$ , podemos encontrar un punto periódico  $q \in X$  donde  $d(x; \mathcal{O}_f(q)) > \frac{\delta_0}{2}$ .*

*Demostración.* Sea  $x$  un punto arbitrario de  $X$ . Consideremos dos puntos periódicos  $q_1$  y  $q_2$ . Sea

$$\delta_0 = \min\{d(z, y) : z \in \mathcal{O}_f(q_1), y \in \mathcal{O}_f(q_2)\}.$$

Sean  $m, n \in \mathbb{N}$  tales que

$$d(x; f^k(q_1)) \leq d(x; f^n(q_1)) \quad \text{y} \quad d(x; f^m(q_2)) \leq d(x; f^k(q_2)) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$\delta_0 \leq d(f^n(q_1); f^m(q_2)) \leq d(f^n(q_1); x) + d(f^m(q_2); x).$$

Sin pérdida de generalidad tomamos  $d(f^n(q_1); x) \leq d(f^m(q_2); x)$ . Entonces,

$$\delta_0 \leq d(f^n(q_1); x) + d(f^n(q_1); x) = 2d(f^n(q_1); x).$$

Así,

$$d(\mathcal{O}_f(q_1); x) \geq \frac{\delta_0}{2}.$$

□

Ahora, a partir del lema anterior, demostraremos el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.11.** <sup>4</sup> *Si  $f: X \rightarrow X$  es transitiva en  $X$  y el conjunto de  $\text{Per}(f)$  es denso en  $X$ , entonces  $f$  es sensible a las condiciones iniciales en  $X$ .*

*Demostración.* Tomando  $\delta_0$  del Lema 1.2.10, definimos  $\epsilon = \frac{\delta_0}{8}$ . Sean  $x \in X$  y  $\delta > 0$ . Debemos demostrar que existe  $z \in B(x; \delta)$  y un entero positivo  $n$  tal que  $d(f^n(x), f^n(z)) > \epsilon$ .

Por el Lema 1.2.10, existe un punto periódico  $q$  tal que  $d(x; \mathcal{O}_f(q)) \geq 4\epsilon$ . Sea  $U = B(x; \min\{\delta, \epsilon\})$ . Por la densidad de  $\text{Per}(f)$ , existe  $p \in \text{Per}(f) \cap U$  donde  $f^n(p) = p$ . Ahora definamos

$$V = \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(B(f^i(q); \epsilon)).$$

Es claro que  $V$  es abierto y no vacío, ya que  $q \in V$ . Como  $f$  es transitiva, se tiene que existen  $y \in U$  y  $k \in \mathbb{N}$  tales que  $f^k(y) \in V$ . Definimos  $j = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1$ . Con esto tenemos que  $1 \leq nj - k \leq n$  por la definición de  $j$ . Entonces

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subseteq B(f^{nj-k}(q); \epsilon).$$

También se tiene que  $f^{nj}(p) = p$  ya que el período de  $p$  es  $n$ , entonces por la desigualdad triangular tenemos que

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) = d(p, f^{nj}(y)) \geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)) - d(x, p).$$

Ya que  $p \in U$ ,  $f^{nj}(y) \in B(f^{nj-k}(q); \epsilon)$  y la distancia entre  $x$  y la órbita de  $q$  es mayor a  $4\epsilon$ , tenemos que

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 4\epsilon - \epsilon - \epsilon = 2\epsilon.$$

Usando la desigualdad triangular tenemos que,

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) + d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) > 2\epsilon.$$

Con esto tenemos que tanto  $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y))$  como  $d(f^{nj}(p), f^{nj}(x))$  no pueden ser menores a  $\epsilon$  al mismo tiempo. Por lo tanto,

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \epsilon \quad \text{o} \quad d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) > \epsilon.$$

En cualquiera de los dos casos hemos encontrado un punto en cualquier vecindad de  $x$  tal que en la  $nj$ -ésima iteración sus imágenes están a una distancia mayor a  $\epsilon$ , por lo que  $f$  es sensible a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad  $\epsilon$ .

□

Por lo mostrado anteriormente, la función  $f: S^1 \rightarrow S^1$  definida para cada  $z \in S^1$  por  $f(z) = z^2$  (Ejemplo 1.2.4) es caótica. Terminamos este capítulo mostrando un ejemplo de sistema dinámico caótico que usaremos varias veces en el siguiente capítulo.

**Ejemplo 1.2.12.** Sea  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

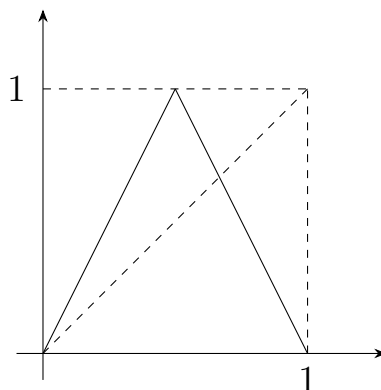


Figura 1.1: Función tienda.

La función  $T$  es conocida como la *Tienda*, es caótica según Devaney en  $[0, 1]$ . A continuación mostraremos, sin entrar en detalles, que la función tienda es caótica. Los detalles se pueden consultar en King y Méndez, *Sistemas Dinámicos Discretos*, Teorema 9.8. Observe primero que la función  $T$  solo tiene dos puntos fijos:  $x = 0$  y  $x = \frac{2}{3}$ . Ahora, analicemos los puntos periódicos de  $T^2$ . Para ello, basta con hacer un duplicado de  $T$  contrayéndola entre  $[0, \frac{1}{2}]$  y  $[\frac{1}{2}, 1]$ , con el propósito de identificar sus puntos fijos.

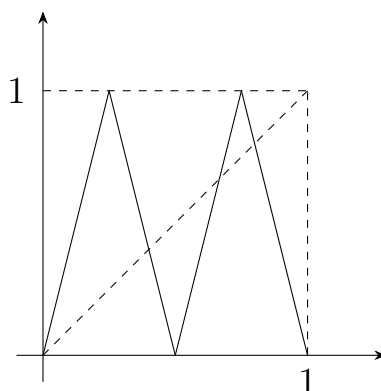


Figura 1.2: Función  $T^2$ .

De manera que  $T^2$  tiene 4 puntos fijos:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{2}{5}$ ,  $x_3 = \frac{2}{3}$ , y  $x_4 = \frac{4}{5}$ . Entre ellos,  $x_1$  y  $x_2$  son puntos fijos, mientras que  $x_3$  y  $x_4$  son puntos de período 2. Para estos últimos, las órbitas son:

$$\mathcal{O}_f\left(\frac{2}{5}\right) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \dots\right\},$$

y

$$\mathcal{O}_f\left(\frac{4}{5}\right) = \left\{\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \dots\right\}.$$

De manera análoga, procedemos para  $T^3$ , cuya gráfica se muestra a continuación

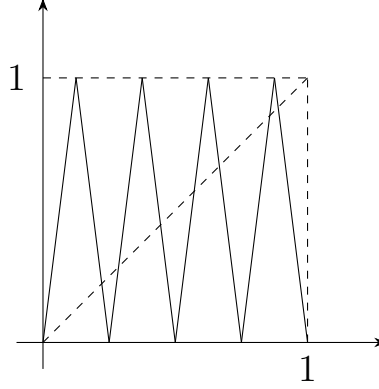


Figura 1.3: Función  $T^3$ .

Así, los puntos fijos de  $T^3$  son:  $\{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, 1\}$ . Para las iteraciones sucesivas de  $T^n$ , el proceso se repite dividiendo cada copia de la función tienda original en dos. De este modo, cada copia queda contenida en un intervalo de la forma

$$\left[ \frac{k-1}{2^n-1}, \frac{k}{2^n-1} \right],$$

donde  $k$  pertenece a los números naturales menores que  $2^n - 1$ . Esto implica que cada una de estas iteraciones estará representada por dos funciones biyectivas entre  $[0, 1]$  y el intervalo  $\left[ \frac{k-1}{2^n-1}, \frac{k}{2^n-1} \right]$ . Como la intersección de  $T^n$  con la diagonal  $\{(x, y) \mid x = y\}$  es no vacía, cada copia contiene al menos un punto fijo. En consecuencia,  $T^n$  tiene  $2^n$  puntos fijos, lo que implica que los puntos periódicos de período  $n$  para  $T$  están dados por los puntos fijos de  $T^n$ .

Esto lleva a concluir que los puntos periódicos de  $T$  son densos en  $[0, 1]$ . Para verificarlo, es suficiente observar que los intervalos donde se definen las copias de la función tienda pueden ser arbitrariamente pequeños a medida que se consideran iteraciones más altas. Denotemos el conjunto de puntos periódicos de  $T$  como  $Per(T)$ , y consideremos un intervalo abierto arbitrario  $U \subseteq [0, 1]$ . Para algún  $n \in \mathbb{N}$ , existe un  $k$  menor que  $2^n - 1$  tal que

$$\left[ \frac{k-1}{2^n-1}, \frac{k}{2^n-1} \right] \subseteq U.$$

Por construcción, al menos un punto fijo de  $T^n$  pertenece a este intervalo. Dado que estos puntos son periódicos de  $T$ , se tiene que  $A \cap Per(T) \neq \emptyset$  para cualquier abierto  $A \subseteq [0, 1]$ . Esto demuestra que los puntos periódicos de  $T$  son densos en  $[0, 1]$ .

Además,  $T$  es topológicamente transitiva, ya que, dados dos abiertos  $U$  y  $V$  en  $[0, 1]$ , existe un intervalo de la forma  $\left[ \frac{k-1}{2^n-1}, \frac{k}{2^n-1} \right] \subseteq U$  tal que  $T^n\left(\left[ \frac{k-1}{2^n-1}, \frac{k}{2^n-1} \right]\right) = [0, 1]$ . Por lo tanto,  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Por último, la función  $T$  es sensible a las condiciones iniciales. Sea  $\epsilon = \frac{1}{2}$ ,  $\delta > 0$  y  $x \in [0, 1]$ . Por la Proposición 7.2 de King y Méndez, Sistemas Dinámicos Discretos, existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $T^n(B(x, \delta)) = [0, 1]$ . Así, tenemos dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  tales que  $T^n(x_1) = 0$  y  $T^n(x_2) = 1$ . De aquí que

$$d(T^n(x), T^n(x_1)) > \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad d(T^n(x), T^n(x_2)) > \frac{1}{2}.$$

Consecuentemente,  $T$  es sensible a las condiciones iniciales.

## 2. Dinámicas multivaluadas

En este capítulo definiremos y estudiaremos propiedades dinámicas en el contexto de las funciones multivaluadas basadas en el artículo Camargo y Macías, «Dynamics with set-valued functions and coselections». Lo dividiremos en dos secciones: en la primera, introduciremos algunas definiciones generales de este tipo de dinámicas multivaluadas y presentaremos algunos ejemplos. En la segunda sección, definiremos función caótica basados en la definición de Robert Devaney, pero en el contexto multivaluado.

### 2.1. Definiciones generales

En esta sección, definiremos el tipo de funciones que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Sean  $X$  un continuo y consideremos una función multivaluada  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ , donde  $\mathcal{F}(X)$  representa el conjunto de subconjuntos finitos de  $X$ . Dotaremos a  $\mathcal{F}(X)$  de la topología de Vietoris, la cual está generada por la subbase:

$$\mathcal{S} = \{\langle U \rangle \mid U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\langle X, V \rangle \mid V \text{ es abierto en } X\},$$

donde:

$$\langle U \rangle = \{A \in \mathcal{F}(X) \mid A \subseteq U\} \text{ para } U \text{ abierto en } X; \text{ y} \quad (2.1)$$

$$\langle X, V \rangle = \{A \in \mathcal{F}(X) \mid A \cap V \neq \emptyset\} \text{ para } V \text{ abierto en } X.$$

Veamos que  $\mathcal{F}(X)$  es conexo no compacto. Definimos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el conjunto

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \subseteq X \mid 1 \leq |A| \leq n\},$$

de modo que obtenemos una sucesión creciente de subconjuntos:

$$\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{F}_2(X) \subseteq \mathcal{F}_3(X) \subseteq \dots$$

y, además

$$\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X).$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos la función  $\varphi: X^n \rightarrow \mathcal{F}_n(X)$  dada por  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Esta función es continua y sobreyectiva (ver K. Borsuk y S. Ulam. «On symmetric products of topological spaces». En: *Fundamenta Mathematicae* 19 (1931),

págs. 131-174). Como  $X$  es un continuo, por el Teorema 1.1.3, el producto  $X^n$  es también un continuo para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Dado que  $\varphi$  es continua y sobreyectiva, la imagen  $\mathcal{F}_n(X) = \varphi(X^n)$  es un continuo.

Ahora bien, a pesar que cada  $\mathcal{F}_n(X)$  es compacto, la unión  $\mathcal{F}(X)$  no es compacta. En el Ejemplo 2.1.1 vemos como podemos mostrar que en general, para todo continuo  $X$ , el espacio  $\mathcal{F}(X)$  no es compacto.

Finalmente, para ver que  $\mathcal{F}(X)$  es conexo, basta observar que  $\mathcal{F}(X)$  es una unión creciente de conjuntos conexos; esto es,  $\mathcal{F}_n(X)$  es conexo para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F}_n(X) \subseteq \mathcal{F}_{n+1}(X)$  para cada  $n$  y  $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X)$ .

**Ejemplo 2.1.1.** Sea  $X = [0, 1]$  y  $\mathbb{Q} = \{q_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Definimos  $A_n = \{q_1, \dots, q_n\}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Observe que  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $\mathcal{F}([0, 1])$ , pero esta sucesión no tiene una subsucesión convergente. En efecto, supongamos, que existe una subsucesión  $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge a un conjunto finito  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ . Esto implica que existen abiertos  $V_1, \dots, V_m$  en  $[0, 1]$  tales que  $b_i \in V_i$  para cada  $i$  y  $\overline{\bigcup V_i} \neq [0, 1]$ . Sea  $W$  un abierto de  $[0, 1]$  tal que  $W \cap (\bigcup V_i) = \emptyset$ . Dado que  $\mathbb{Q}$  es denso en  $[0, 1]$ , existe algún  $q_l \in W$ . Esto significa que  $q_l \in A_m$  para todo  $m \geq l$ , y en particular  $q_l \in A_{n_k}$  para infinitos  $k$ . Entonces,  $A_{n_k} \notin \langle V_1, \dots, V_m \rangle$  para todo  $k \geq l$ , contradiciendo la suposición de que  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} = B$ . Por lo tanto,  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  no tiene una subsucesión convergente.

### 2.1.1. Funciones multivaluadas

Dados dos conjuntos no vacíos  $X$  y  $Y$ , una *función multivaluada* de  $X$  en  $Y$  es una función  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ ; esto es, una función tal que  $F(x)$  es un subconjunto de  $Y$  para cada  $x \in X$ . En este trabajo nos vamos a enfocar en las multifunciones donde  $F(x)$  es un subconjunto finito de  $Y$ .

Note que, dadas dos funciones  $f, g: X \rightarrow Y$ , podemos definir una función multivaluada  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  como  $F(x) = \{f(x), g(x)\}$ , para cada  $x \in X$ .

Como mostramos en el capítulo anterior, un sistema dinámico discreto está formado por un continuo y una función continua que actúa sobre el espacio  $X$ . En el caso de las funciones multivaluadas, pediremos que estas funciones sean semicontinua superiormente. Esta noción la definimos a continuación.

**Definición 2.1.2.** <sup>3</sup> Sean  $X$  y  $Y$  continuos y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ . Decimos que  $F$  es *semicontinua superiormente* en  $x_0 \in X$ , si para cada abierto  $V$  en  $Y$  tal que  $F(x_0) \subseteq V$ , existe un abierto  $U$  en  $X$  con  $x_0 \in U$ , tal que  $F(x) \subseteq V$  para cada  $x \in U$ . Decimos que  $F$  es

*semi-continua superiormente (scs), si  $F$  es semicontinua superiormente en cada punto de  $X$ .*

Observemos que,  $F$  es semicontinua superiormente si y solo si  $F^{-1}(\langle U \rangle)$  es abierto en  $X$  para cada abierto  $U$  de  $X$  (ver (2.1)). Es importante resaltar que si  $F(x) = \{y_x\}$  para cada  $x \in X$ , entonces  $F$  es semicontinua superiormente si y solo si la función  $f: X \rightarrow X$  definida por  $f(x) = y_x$  es continua. De esta forma podemos decir que las funciones semicontinuas superiormente son una generalización de la continuidad en el contexto de las funciones multivaluadas.

**Definición 2.1.3.** <sup>3</sup> Sean  $X$  y  $Y$  continuos y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ . Decimos que  $F$  es *semicontinua inferiormente* en  $x_0 \in X$ , si para cualquier abierto  $V$  en  $Y$  tal que  $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ , existe un abierto  $U$  de  $x_0$  tal que  $F(x) \cap V \neq \emptyset$ , para todo  $x \in U$ . Decimos que  $F$  es *semicontinua inferiormente (sci)*, si  $F$  es semicontinua inferiormente en cada punto de  $X$ .

Observemos que  $F$  es semicontinua inferiormente si, y solo si,  $F^{-1}(\langle X, V \rangle)$  es abierto en  $X$  para todo  $V$  abierto en  $X$  (ver (2.1)). Claramente una función multivaluada  $f: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  será continua, si es continua cuando  $\mathcal{F}(Y)$  lo dotamos de la topología de Vietoris. O equivalentemente, tenemos la siguiente definición.

**Definición 2.1.4.** <sup>3</sup> Dados  $X$  y  $Y$  continuos, se dice que una multifunción  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  es *continua* si es tanto semicontinua superiormente como semicontinua inferiormente.

En general, si contamos con una colección finita de funciones continuas  $f_i: X \rightarrow Y$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ , podemos definir  $F(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ , que será multivaluada continua. La continuidad de  $F$  se obtiene porque, dado que cada  $f_i$  es continua, si tomamos una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_n \rightarrow x$ , entonces  $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$  para cada  $i$ . De este modo,  $F(x_n) \rightarrow F(x)$ , lo cual implica que  $F$  es continua.

Al hablar de dinámica, es esencial considerar la composición de funciones, lo que requiere establecer una forma estándar para definir la composición en el contexto de funciones multivaluadas. A continuación, introducimos esta definición.

**Definición 2.1.5.** <sup>3</sup> Sean  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  y  $G: Y \rightarrow \mathcal{F}(Z)$  funciones multivaluadas. Definimos la *composición entre  $F$  y  $G$* ,  $G \circ F: X \rightarrow \mathcal{F}(Z)$ , de la siguiente manera:

$$(G \circ F)(x) = \{z \in Z \mid \exists y \in F(x), z \in G(y)\} = \bigcup \{G(y) \mid y \in F(x)\},$$

para cada  $x \in X$ .

Es importante resaltar que esta composición, aunque se define de manera natural, es especial y requiere especial atención cuando la utilicemos. A continuación mencionamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.1.6.** Sea  $F: [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}([0, 1])$  definida por  $F(x) = \{x, x + \frac{1}{2}, 1\}$ . Note que:

$$F(0) = \{0, \frac{1}{2}, 1\};$$

$$F^2(0) = F(F(0)) = F(\{0, \frac{1}{2}, 1\}) = F(0) \cup F(\frac{1}{2}) \cup F(1) = \{0, \frac{1}{2}, 1\} \cup \{\frac{1}{2}, 1\} \cup \{1\} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}.$$

En general,  $F \circ F: [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}([0, 1])$  se define para cada  $x \in [0, 1]$  como:

$$(F \circ F)(x) = \bigcup \{F(y) \mid y \in F(x)\} = \bigcup \{F(y) \mid y \in \{x, x + \frac{1}{2}, 1\}\}$$

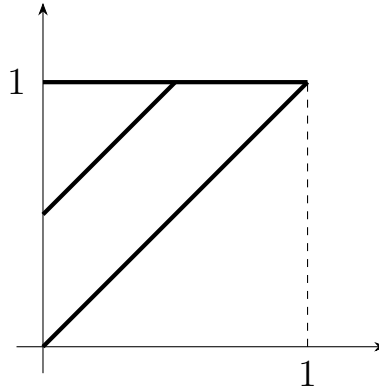


Figura 2.1: Gráfica de  $F$ .

Dados una función multivaluada  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  y  $A \subseteq X$  el conjunto  $F(A) = \bigcup \{F(x) \mid x \in A\}$ . Observemos que si  $A$  es un conjunto finito,  $F(A)$  es también finito. Denotaremos por  $F^{(0)}(x) = \{x\}$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F^{(n)}(x) = F(F^{(n-1)}(x))$  para cada  $x \in X$ . Esto es equivalente a calcular  $(F \circ F \circ \dots \circ F)(x)$ , donde  $F$  se compone  $n$  veces de acuerdo con la Definición 2.1.5.

A continuación mostraremos que la composición de funciones semicontinuas superiormente o inferiormente es nuevamente semicontinua superiormente o inferiormente, respectivamente.

**Lema 2.1.7.** <sup>3</sup> Sean  $X, Y$  y  $Z$  continuos y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  y  $G: Y \rightarrow \mathcal{F}(Z)$  multifunciones. Para cada  $U$  abierto en  $Z$ , se tiene que

$$(G \circ F)^{-1}(\langle U \rangle) = F^{-1}(\langle G^{-1}(\langle U \rangle) \rangle) \quad y \quad (G \circ F)^{-1}(\langle X, U \rangle) = F^{-1}(\langle X, G^{-1}(\langle X, U \rangle) \rangle).$$

*Demostración.* Queremos demostrar que  $(G \circ F)^{-1}(\langle U \rangle) = F^{-1}(\langle G^{-1}(\langle U \rangle) \rangle)$ . Sea  $x \in H^{-1}(\langle U \rangle)$ , siendo  $H = G \circ F$ . Entonces,  $H(x) \subseteq U$  (ver (2.1)), y dado que  $H(x) = \{G(y) \mid y \in F(x)\}$ , tenemos que  $G(y) \subseteq U$  para todo  $y \in F(x)$ . Esto implica que  $G(y) \in \langle U \rangle$ , lo que a su vez significa que  $F(x) \subseteq G^{-1}(\langle U \rangle)$ . Por lo tanto,  $x \in F^{-1}(\langle G^{-1}(\langle U \rangle) \rangle)$ . El procedimiento anterior puede revertirse, de manera que si  $x \in F^{-1}(\langle G^{-1}(\langle U \rangle) \rangle)$ , entonces  $x \in (G \circ F)^{-1}(\langle U \rangle)$ . Así, concluimos que  $(G \circ F)^{-1}(\langle U \rangle) = F^{-1}(\langle G^{-1}(\langle U \rangle) \rangle)$ .

Veamos ahora que  $(G \circ F)^{-1}(\langle X, U \rangle) = F^{-1}(\langle X, G^{-1}(\langle X, U \rangle) \rangle)$ . Sea  $x \in H^{-1}(\langle X, U \rangle)$ , siendo  $H = G \circ F$ . Entonces  $H(x) \cap U \neq \emptyset$ , y dado que  $H(x) = \bigcup \{G(y) \mid y \in F(x)\}$ , tenemos que existe  $y_0 \in F(x)$  tal que  $G(y_0) \cap U \neq \emptyset$ . Así,  $y_0 \in G^{-1}(\langle X, U \rangle)$ , por lo tanto,  $F(x) \cap G^{-1}(\langle X, U \rangle) \neq \emptyset$ ; es decir,  $x \in F^{-1}(\langle X, G^{-1}(\langle X, U \rangle) \rangle)$ . Así, concluimos que  $(G \circ F)^{-1}(\langle X, U \rangle) = F^{-1}(\langle X, G^{-1}(\langle X, U \rangle) \rangle)$ . □

**Teorema 2.1.8.** <sup>3</sup> Sean  $X, Y$  y  $Z$  continuos y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  y  $G: Y \rightarrow \mathcal{F}(Z)$  multifunciones. Si  $F$  y  $G$  son semicontinua superiormente o semicontinua inferiormente, entonces  $G \circ F$  también es semicontinua superiormente o semicontinua inferiormente, respectivamente.

*Demostración.* Sea  $U$  un abierto en  $Z$ . Como  $G$  es semicontinua superiormente, por la Definición 2.1.2, se tiene que  $G^{-1}(\langle U \rangle)$  es un abierto en  $Y$ . Además, dado que  $F$  también es semicontinua superior, se cumple que  $F^{-1}(\langle G^{-1}(\langle U \rangle) \rangle)$  es un abierto en  $X$ . Así, por el Lema 2.1.7,  $(G \circ F)^{-1}(\langle U \rangle)$  es un abierto en  $X$ , y nuevamente usando la Definición 2.1.2,  $G \circ F$  es semicontinua superior. De manera similar, utilizando la Definición 2.1.3 y el Lema 2.1.7, se puede demostrar que  $G \circ F$  es semicontinua inferiormente. □

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.1.9.** <sup>3</sup> Sean  $X, Y$  y  $Z$  continuos y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  y  $G: Y \rightarrow \mathcal{F}(Z)$  multifunciones. Si  $F$  y  $G$  son continuas, entonces  $G \circ F$  es continua.

*Demostración.* Sea  $F$  y  $G$  funciones continuas. Por la Definición 2.1.4,  $F$  y  $G$  son tanto semicontinuas superiormente como inferiormente. Además, por el Teorema 2.1.8, se tiene que  $G \circ F$  también es semicontinua superiormente e inferiormente. Así, nuevamente aplicando la Definición 2.1.4, podemos concluir que  $G \circ F$  es continua. □

## 2.1.2. Dinámica multivaluada

Un sistema dinámico discreto es una pareja  $(X, F)$ , donde  $X$  un continuo y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  una función multivaluada semicontinua superiormente (ver Definición 2.1.2). Tal vez el

concepto más importante en la teoría de los sistemas dinámicos es la noción de órbita. A continuación introduciremos un noción presentada en Camargo y Macías, «Dynamics with set-valued functions and coselections», mostramos lo que entenderemos como órbita en el contexto de los sistemas dinámicos multivaluados.

**Definición 2.1.10.** <sup>2</sup> Sea  $(X, F)$  un sistema dinámico discreto. Diremos que una órbita de un punto  $x \in X$  bajo  $F$  es una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  tal que  $x_0 = x$  y  $x_{n+1} \in F(x_n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . La colección de todas las órbitas de  $x$  la denotamos por  $\mathcal{O}_F(x)$ .

El siguiente lema nos será de utilidad para mostrar varios resultados de este capítulo. Dado un espacio producto  $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$  y  $n \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $\pi_n: \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow X_n$  la función proyección a la  $n$ -ésima coordenada; esto es, para cada  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$  definimos  $\pi_n((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = x_n$ .

**Lema 2.1.11.** Sea  $(X, F)$  un sistema dinámico discreto. Para cada  $x \in X$ , tenemos que  $\mathcal{O}_F(x) \subseteq X^{\mathbb{N}}$ , y se cumple que  $\pi_i(\mathcal{O}_F(x)) = F^{(i)}(x)$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Sea  $x \in X$ . Por definición sabemos que  $\mathcal{O}_F(x) \subseteq X^{\mathbb{N}}$ . Demostraremos que  $\pi_i(\mathcal{O}_F(x)) = F^{(i)}(x)$  para cada entero positivo  $i$ , mediante inducción matemática.

Sabemos que  $F^{(0)}(x) = \{x\}$ . Además, toda sucesión  $(x_0, x_1, \dots) \in \mathcal{O}_F(x)$  satisface  $x_0 = x$ , y por la definición de la proyección,  $\pi_0((x_0, x_1, \dots)) = x_0$ . Por lo tanto,  $F^{(0)}(x) = \{x\} = \pi_0(\mathcal{O}_F(x))$ . Así, se cumple para  $i = 0$ . Supongamos ahora que  $\pi_k(\mathcal{O}_F(x)) = F^{(k)}(x)$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ . Demostremos que  $\pi_{k+1}(\mathcal{O}_F(x)) = F^{(k+1)}(x)$ . Sea  $z \in \pi_{k+1}(\mathcal{O}_F(x))$ . Entonces, existe una sucesión  $(x_0, x_1, \dots) \in \mathcal{O}_F(x)$  tal que  $x_{k+1} = z$ . Por la definición de  $\mathcal{O}_F(x)$ , se cumple que  $x_0 = x$  y  $x_{j+1} \in F(x_j)$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . En particular, para  $j = k$  se tiene que  $x_{k+1} \in F(x_k)$ . Por la hipótesis inductiva, sabemos que  $x_k \in \pi_k(\mathcal{O}_F(x)) = F^{(k)}(x)$  y por lo tanto  $x_{k+1} \in F(F^{(k)}(x)) = F^{(k+1)}(x)$ , lo que implica que  $\pi_{k+1}(\mathcal{O}_F(x)) \subseteq F^{(k+1)}(x)$ .

Ahora, si  $z \in F^{(k+1)}(x)$ , entonces  $z \in F(F^{(k)}(x))$ . Por la hipótesis inductiva, existe  $x_k \in \pi_k(\mathcal{O}_F(x))$  tal que  $z \in F(x_k)$ . Esto permite construir una sucesión  $(x_0, x_1, \dots, x_k, z, \dots) \in \mathcal{O}_F(x)$ , con  $z = x_{k+1}$ , de donde se sigue que  $z \in \pi_{k+1}(\mathcal{O}_F(x))$ .

Por lo tanto,  $\pi_{k+1}(\mathcal{O}_F(x)) = F^{(k+1)}(x)$ . Por inducción, se tiene que  $\pi_i(\mathcal{O}_F(x)) = F^{(i)}(x)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . □

**Teorema 2.1.12.** Sea  $(X, F)$  un sistema dinámico donde  $X$  es un espacio métrico compacto y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  es una función semicontinua superiormente. Si  $x \in X$ , entonces  $\mathcal{O}_F(x)$  es cerrado en el espacio producto  $X^{\mathbb{N}}$ .

*Demostración.* Sea  $x \in X$ . Para mostrar que  $\mathcal{O}_F(x)$  es cerrado, veamos que el conjunto  $X^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{O}_F(x)$  es abierto. Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{O}_F(x)$ . Consideremos dos casos:

1.  $x \neq x_0$ . Tomamos  $x_0$  en un abierto  $U_0$  tal que  $x \notin U_0$ . Entonces,  $\pi_0^{-1}(U_0) = \{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \mid y_0 \in U_0\}$  es un abierto de  $X^{\mathbb{N}}$  donde no existe ninguna órbita que tenga a  $x$  como primer elemento. Así,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \pi_0^{-1}(U_0)$  y  $\pi_0^{-1}(U_0) \subseteq X^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{O}_F(x)$ .
2. Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{n+1} \notin F(x_n)$ . Como  $F$  es semicontinua superiormente, existen abiertos  $W$  de  $x_n$  en  $X$  y  $U$  de  $x_{n+1}$  en  $X$  tales que  $F(y) \cap U = \emptyset$ , para todo  $y \in W$ . Sabemos que  $\pi_n^{-1}(W) \cap \pi_{n+1}^{-1}(U)$  es un abierto de  $X^{\mathbb{N}}$ . Dado que para cualquier sucesión  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \pi_n^{-1}(W) \cap \pi_{n+1}^{-1}(U)$ ,  $y_n \in W$  y  $y_{n+1} \in U$ , se sigue que  $y_{n+1} \notin F(y_n)$ . Por lo tanto, ninguna de estas sucesiones puede pertenecer a  $\mathcal{O}_F(x)$ . Así,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \pi_n^{-1}(W) \cap \pi_{n+1}^{-1}(U)$  y  $\pi_n^{-1}(W) \cap \pi_{n+1}^{-1}(U) \subseteq X^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{O}_F(x)$ .

□

**Ejemplo 2.1.13.** Sea  $G: [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}([0, 1])$ , definida de acuerdo con la gráfica que presentamos en la Figura 2.2; esto es:

$$G(x) = \{0, x, 1\}, \text{ para cada } x \in [0, 1].$$

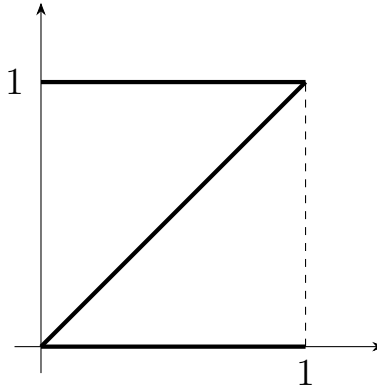


Figura 2.2: Gráfica de  $G$ .

Note que las sucesiones  $\bar{x} = (0, 1, 0, 1, 0, \dots)$  y  $\bar{y} = (0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$  son posibles órbitas del 0 bajo la función  $G$ . Más aún, cualquier sucesión de 0's y 1's que empiece en 0 es una órbita de 0; esto es:

$$\mathcal{O}_G(0) = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid x_0 = 0\}.$$

Note que  $\mathcal{O}_G(0)$  es homeomorfo al espacio de Cantor  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  y por tanto, compacto. Así,  $\mathcal{O}_G(0)$  es un cerrado de  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ . De manera análoga, para cualquier  $x \in [0, 1]$ , la órbita  $\mathcal{O}_G(x)$  contiene todas las sucesiones generadas iterativamente a partir de  $G(x) =$

$\{0, x, 1\}$ , lo cual permite construir sucesiones de 0's y 1's. Esto implica que  $\mathcal{O}_G(x)$  también es homeomorfo al espacio de Cantor  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Por lo tanto, por las propiedades del espacio de Cantor,  $\mathcal{O}_G(x)$  es no numerable.

A continuación mostramos que la única manera que el conjunto de las órbitas de un punto sea un conexo, para todo punto, es que la imagen de todo punto sea un conjunto finito degenerado; esto es, que tenga un solo punto.

**Teorema 2.1.14.** *Sean  $X$  un continuo y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  una función multivaluada. Entonces,  $\mathcal{O}_F(x)$  es un continuo para cada  $x \in X$  si, y solo si,  $F(x)$  es un punto para cada  $x \in X$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que  $\mathcal{O}_F(x)$  es conexo, para cada  $x \in X$ . Sea  $x \in X$ . Por el Lema 2.1.11,  $\pi_1(\mathcal{O}_F(x)) = F(x)$ . Como  $\pi_1$  es continua, tenemos que  $F(x)$  es conexo. Como  $x$  se tomó arbitrariamente en  $X$ , tenemos que  $F(x)$  es un conexo para todo punto  $x \in X$ . Como  $F(x)$  es finito, tenemos que  $F(x)$  es un punto para cada  $x \in X$ . Recíprocamente, como  $F(x)$  es un único punto,  $\mathcal{O}_F(x)$  se reduce a un conjunto unitario. Esto implica que  $\mathcal{O}_F(x)$  es un continuo, para todo  $x \in X$ .  $\square$

En la Definición 1.2.2 se describieron los puntos periódicos en el contexto usual. Ahora, procederemos a definirlos en el contexto actual de las funciones multivaluadas.

**Definición 2.1.15.** <sup>2</sup> *Sea  $(X, F)$  un sistema dinámico discreto. Un punto  $x \in X$  se dice periódico de  $F$  si existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(x)$  tal que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}$ , para algún  $k \in \mathbb{N}$ . Definimos  $\text{Per}(F)$  como el conjunto de puntos periódicos.*

Tomando el Ejemplo 2.1.13, vemos que la sucesión  $(1, 0, 1, 0, \dots) \in \mathcal{O}_G(1)$ . Así, 1 es un punto periódico. De forma similar podemos argumentar que todo punto en  $[0, 1]$  es periódico; esto es  $\text{Per}(G) = [0, 1]$ .

Como vimos en el Teorema 1.2.8, en el contexto de las dinámicas discretas tradicionales, la transitividad topológica y la existencia de un punto con órbita densa, son conceptos equivalentes. En el contexto de las funciones multivaluadas no tenemos una definición de órbita densa que resulte equivalente a la transitividad. Este hecho lo veremos seguidamente de la siguiente definición.

**Definición 2.1.16.** <sup>2</sup> *Sea  $(X, F)$  un sistema dinámico discreto donde  $X$  es un continuo y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  es una función multivaluada. Diremos que:*

1. *Un punto  $x \in X$  tiene órbita densa fuerte bajo  $F$  si existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(x)$  tal que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cap U \neq \emptyset$ , es decir, existe algún  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k \in U$ , para todo conjunto abierto no vacío  $U$  de  $X$ .*

2.  $F$  es topológicamente transitiva en  $X$  si para todo par de conjuntos abiertos no vacíos de  $X$ ,  $U$  y  $V$ , existe  $x \in U$  y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(x)$  tal que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cap V \neq \emptyset$ . En este caso, diremos también que el sistema dinámico  $(X, F)$  es transitivo.
3. Un punto  $x \in X$  tiene órbita densa débil bajo  $F$  si para cada subconjunto abierto no vacío  $U$  de  $X$ , existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(x)$  tal que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cap U \neq \emptyset$ , es decir, existe algún  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k \in U$ .

Dadas las definiciones anteriores, presentaremos algunas implicaciones y contraejemplos relacionados con estas. A continuación, mostraremos que si  $F$  posee un punto con órbita densa fuerte, entonces  $F$  es topológicamente transitiva. Más adelante, demostraremos que si  $F$  es topológicamente transitiva, entonces existe un punto que tiene órbita densa débil.

**Teorema 2.1.17.** *Sea  $X$  un continuo y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  una función semicontinua superiormente. Si existe  $x \in X$  con órbita densa fuerte, entonces  $F$  es topológicamente transitiva.*

*Demostración.* Supongamos que existe  $x \in X$  con órbita fuerte. Luego, existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(x)$  tal que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cap U \neq \emptyset$ , para todo  $U$  abierto no vacío en  $X$ , es decir, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k \in U$ . Ahora, consideremos un abierto no vacío  $V$  de  $X$ , se tiene que  $V \setminus \{x_0, \dots, x_k\}$  también es un abierto no vacío. Sea  $(x_k, x_{k+1}, \dots) \in \mathcal{O}_F(x_k)$ , como  $x_k$  tiene órbita densa, existe  $l > k$  tal que  $x_l \in V \setminus \{x_0, \dots, x_k\}$ . Por tanto,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cap V \neq \emptyset$  y  $F$  es topológicamente transitiva.  $\square$

**Ejemplo 2.1.18.** *Sea  $G: [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}([0, 1])$  definida para cada  $x \in [0, 1]$  por  $G(x) = \{g_1(x), g_2(x)\}$ , donde:*

$$g_1(x) = x^3 \quad g_2(x) = \sqrt{x}$$

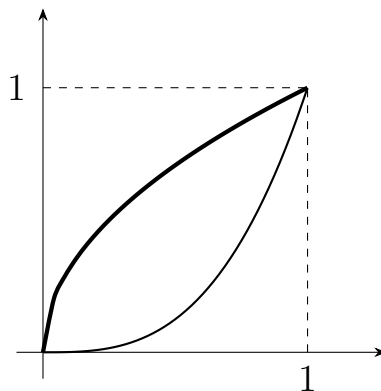


Figura 2.3: Gráfica de  $G$ .

Note que aplicando  $G(x)$   $p$ -veces a  $x$  podemos definir  $G^p(x) = x^{\frac{3^m}{2^n}}$ , donde  $p, m, n \in \mathbb{N}$  y  $p = m + n$ . Sin pérdida de generalidad, consideremos:

$$\underbrace{(G \circ G \circ \dots \circ G)(x)}_{p \text{ veces}} = \left( \left( \left( (x^3)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^3 \right) \dots$$

Dado que la operación potencia de potencias es conmutativa, podemos reescribir la expresión de manera más compacta como:

$$G^p(x) = (x^{3^m})^{\frac{1}{2^n}} = x^{\frac{3^m}{2^n}}$$

.

donde  $m, n$  es la cantidad de veces que se aplicó  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$ , respectivamente, y  $p = m + n$ .

Veamos que  $\text{Per}(G) = \{0, 1\}$ . Supongamos que existe  $x_0 \in X$  tal que  $x_0 = x_0^{\frac{3^m}{2^n}}$ , con  $m, n \in \mathbb{N}$ . Observemos que cuando  $x_0 = 0$  o  $x_0 = 1$ , se cumple la igualdad. Ahora, supongamos que  $x_0 \neq 0$  y  $x_0 \neq 1$ . Entonces, se tiene:

$$1 = x_0^{\frac{3^m}{2^n} - 1}$$

Lo que implica que

$$0 = \frac{3^m}{2^n} - 1 \implies 2^n = 3^m,$$

y esto solo es cierto cuando  $n = m = 0$ . Por lo tanto, los únicos puntos periódicos en  $X$  son  $x_0 = 0$  y  $x_0 = 1$ , lo que implica que  $\text{Per}(F) = \{0, 1\}$ .

Consideramos que la función  $G$  definida anteriormente, es además transitiva; sin embargo, no hemos encontrado un argumento formal que lo demuestre. Solo hemos realizado algunas verificaciones puntuales que nos llevan a conjeturar que la respuesta a la siguiente pregunta es afirmativa.

**Pregunta 2.1.19.** Sea  $G$  la función definida en el Ejemplo 2.1.18. ¿Es  $G$  topológicamente transitiva?

**Definición 2.1.20.** <sup>2</sup> Sea  $(X, F)$  un sistema dinámico discreto. Decimos que  $F$  es sensible a las condiciones iniciales si existe  $\epsilon > 0$  tal que, para todo  $x \in X$  y cualquier  $\delta > 0$ , existen  $y \in B(x; \delta)$  y dos órbitas  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(x)$  y  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(y)$  tales que  $d(x_i, y_i) \geq \epsilon$  para algún  $i \in \mathbb{N}$ .

**Ejemplo 2.1.21.** Sea  $F: [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}([0, 1])$  la función definida para cada  $x \in [0, 1]$  por  $F(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}$ , donde

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \sqrt{x}$$

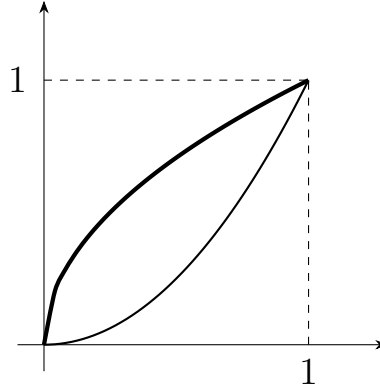


Figura 2.4: Gráfica de  $F$ .

Veamos que  $F$  satisface la Definición 2.1.20, que se refiere a la sensibilidad de  $F$  a las condiciones iniciales. Usaremos  $\epsilon = \frac{1}{2}$  y cualquier  $0 < \delta < 1$ . Sean  $x, y \in [0, 1]$  tales que  $d(x, y) < \delta$ . Notemos que  $x^{2^m} \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow \infty$  con  $x \neq 1$ , y  $y^{\frac{1}{2^n}} \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$  con  $y \neq 0$ . Por lo tanto, existe un  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $|x^{2^i}| < \frac{1}{4}$  y  $|1 - y^{\frac{1}{2^i}}| < \frac{1}{4}$ ; esto es,  $d(x_i, y_i) \geq \frac{1}{2}$ . De lo anterior,  $F$  es sensible.

Mostremos que no es topológicamente transitiva. Sean los abiertos  $U = (\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$  y  $V = (\frac{3}{20}, \frac{1}{5})$ . Observemos lo que sucede al aplicar  $F$  a  $U$  mediante las funciones componentes de  $F$ :

$$f_1(U) = \{x^2 \mid x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{5})\} \subseteq (\frac{1}{4}, \frac{9}{25}),$$

$$f_2(U) = \{\sqrt{x} \mid x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{5})\} \subseteq (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{5}).$$

Luego, al aplicar  $F$  nuevamente, se tiene que

$$f_1(f_1(U)) = f_1(\frac{1}{4}, \frac{9}{25}) \subseteq (\frac{1}{16}, \frac{81}{625}).$$

Nótese que  $\frac{1}{16} < \frac{81}{625} < \frac{1}{4} < \frac{9}{25}$ , lo cual muestra que los valores generados por iteraciones de  $f_1$  se mantienen en intervalos cada vez más pequeños dentro de  $(0, 1)$ . Además, como  $f_2$  es el inverso de  $f_1$ , tenemos que

$$f_2(f_1^2(U)) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{25}).$$

De este modo, ninguna de las iteraciones de  $F$  llevará  $U$  al abierto  $V$ , ya que las iteraciones de  $f_1$  y  $f_2$  no alcanzan los valores en  $U$ . Así,  $F^n(U) \cap V = \emptyset$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Con esto mostramos que  $F$  no es topológicamente transitiva.

Finalmente, observemos que  $\text{Per}(F) = [0, 1]$  ya que, para cada  $t \in [0, 1]$ , tenemos que  $f_1(f_2(t)) = t$ .

En el Teorema 2.1.17, demostramos que cuando  $F$  es semicontinua superiormente, la existencia de una órbita densa fuerte garantiza la transitividad de  $F$ . Ahora, mostraremos que si  $F$  es continua, una órbita densa fuerte no solo implica la transitividad, sino que también la transitividad implica la existencia de una órbita densa débil.

**Teorema 2.1.22.** *Sea  $X$  un continuo y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  una función continua. Si  $F$  es topológicamente transitiva, entonces existe  $x \in X$  con órbita densa débil.*

*Demostración.* Supongamos que  $F$  es topológicamente transitiva. Sea  $U$  un abierto no vacío en  $X$  y  $\langle X, U \rangle$  un abierto no vacío en  $\mathcal{F}(X)$  (ver (2.1)).

Demostremos que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(\langle X, U \rangle)$  es un abierto denso en  $X$ . Dado que  $F$  es semicontinua inferiormente y la unión de abiertos es abierta, se sigue que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(\langle X, U \rangle)$  es un abierto en  $X$ . Ahora, sea  $W$  es un abierto no vacío en  $X$ . Como  $F$  es transitiva, existe  $x \in W$  y una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(x)$  tal que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cap U \neq \emptyset$ . Es decir, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k \in U$ . Observemos que  $x \in W \cap F^{-k}(\langle X, U \rangle)$ . Esto muestra que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(\langle X, U \rangle)$  es denso en  $X$  para cualquier abierto  $U$  no vacío.

Sea  $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  una base numerable de  $X$ . Definamos  $W_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F^{-k}(\langle X, B_n \rangle)$ . Por el teorema de la categoría de Baire (Teorema 9.13 de Camargo y Villamizar, *Topología General*), como  $W_n$  es abierto y denso para todo  $n$ , tenemos que

$$M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$$

es denso no vacío. Sea  $x \in M$  y  $V$  un abierto en  $X$ . Como  $\mathcal{B}$  es una base, existe  $B_n \in \mathcal{B}$  tal que  $B_n \subseteq V$ . Dado que  $x \in W_n$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in F^{-k_0}(\langle X, B_n \rangle)$ , es decir,  $F^{k_0}(x) \in \langle X, B_n \rangle$ . Por lo tanto, existe un  $x_{k_0} \in F^{k_0}(x) \cap B_n$ . Así, podemos construir una sucesión  $(x_0, x_1, \dots, x_{k_0}, \dots) \in \mathcal{O}_F(x)$ , donde  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cap V \neq \emptyset$ .  $\square$

No sabemos si podemos debilitar la hipótesis del Teorema 2.1.22, como mostramos en la siguiente pregunta.

**Pregunta 2.1.23.** *Sea  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  una función semicontinua superiormente. ¿Si  $F$  es transitiva, entonces  $F$  tiene un punto con órbita densa débil?*

El siguiente ejemplo ilustra que una función multivaluada  $F$ , que es semicontinua superiormente, puede tener una órbita densa débil sin ser topológicamente transitiva.

**Ejemplo 2.1.24.** Sea  $F: [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}([0, 1])$  una función multivaluada semicontinua superiormente, definida por por:

$$F(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, -2x + \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}]; \\ x + \frac{1}{2}, 2x - \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

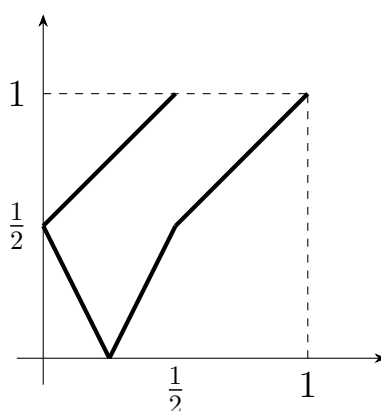


Figura 2.5: Gráfica de  $F$ .

Nótese que la función  $F$  no es topológicamente transitiva. En efecto, dados los abiertos  $U = (\frac{1}{2}, 1)$  y  $V = (0, \frac{1}{4})$ , si tomamos un punto  $x \in U$ , entonces  $(x, x, x, \dots) \in \mathcal{O}_F(x)$  y esta no intersectará a  $V$ , ya que  $F(x) = x$ , lo que implica que el punto permanece fijo. Sin embargo, para todo abierto  $U$  no vacío de  $X$ , tomando un punto  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ , su órbita puede seguir la dinámica de la función Tienda (Ejemplo 1.2.12) o  $F(x) = x + \frac{1}{2}$ . Lo que permite que el punto tenga una órbita densa débil.

**Proposición 2.1.25.** Sean  $X$  un continuo y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  una función semicontinua superiormente. Supongamos que existe  $f: X \rightarrow X$  tal que  $\text{Graf}(f) \subseteq \text{Graf}(F)$ . Entonces:

1. Si  $\text{Per}(f)$  es denso en  $X$ , entonces  $\text{Per}(F)$  es denso en  $X$ .
2. Si  $f$  es transitiva, entonces  $F$  es transitiva.
3. Si  $f$  es sensible a las condiciones iniciales, entonces  $F$  es sensible a las condiciones iniciales.

*Demostración.* 1. Queremos demostrar que, para cualquier abierto no vacío  $U \subseteq X$ , se cumple que  $\text{Per}(F) \cap U \neq \emptyset$ . Por hipótesis,  $\text{Per}(f)$  es denso en  $X$ , por lo que existe  $y \in \text{Per}(f) \cap U$ . Por definición de  $\text{Per}(f)$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(y) = y$ . Dado que  $\text{Graf}(f) \subseteq \text{Graf}(F)$ , tenemos  $f(x) \in F(x)$  para todo  $x \in X$ , en particular,  $f^i(y) \in F^i(y)$  para  $i \in \mathbb{N}$ . Sea  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(y)$ , donde  $y_i = f^i(y)$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Como  $y$  es periódico,  $y_{i+n} = y_i$ , y por lo tanto  $y \in \text{Per}(F)$ . De esta manera,  $y \in \text{Per}(F) \cap U$ .

2. Sean  $U$  y  $V$  dos abiertos no vacíos de  $X$ . Como  $f$  es transitiva, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ , es decir, existe un  $x \in U$  tal que  $f^n(x) \in V$ . Dado que  $\text{Graf}(f) \subseteq \text{Graf}(F)$ , se tiene que para cada  $x \in X$ ,  $f(x) \in F(x)$ . Por lo tanto,  $f^n(x) \in F^n(x)$ , lo que implica que  $F^n(x) \cap V \neq \emptyset$ . Así, concluimos que  $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$ , lo que prueba que  $F$  es transitiva en  $X$ .

3. Supongamos que  $f$  es sensible a las condiciones iniciales. Entonces, existe  $\epsilon > 0$  tal que para cualquier  $\delta > 0$  y cualquier  $x \in X$ , existen  $y \in B(x; \delta)$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon$ . Dado que  $\text{Graf}(f) \subseteq \text{Graf}(F)$ , se cumple que  $f^n(x) \in F(f^{n-1}(x))$  y  $f^n(y) \in F(f^{n-1}(y))$ . Por lo tanto, existen órbitas  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(x)$  y  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(y)$  tales que  $x_{n+1} = f^n(x)$  y  $y_{n+1} = f^n(y)$ ; de esta forma,  $d(x_{n+1}, y_{n+1}) \geq \epsilon$ .

□

Observemos que la recíproca de la Proposición 2.1.25 no es válida, ya que el Ejemplo 2.1.21 muestra un caso en el que  $F: [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}([0, 1])$  es sensible a las condiciones iniciales y además,  $\text{Per}(F) = [0, 1]$ , pero, la gráfica de  $F$  no incluye ninguna gráfica de una función  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que sea sensible, ni que tenga la colección de puntos periódicos denso.

**Corolario 2.1.26.** *Sea  $X$  un continuo y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  una multifunción continua, definida como  $F(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$  para cada  $x \in X$ , donde  $f_i: X \rightarrow Y$  es continua para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces, si existe  $f_i$  tal que:*

1.  $\text{Per}(f_i)$  es denso en  $X$ , entonces tenemos que  $\text{Per}(F)$  es denso en  $X$ .
2.  $f_i$  es topológicamente transitiva, entonces  $F$  es transitiva.
3.  $f_i$  es sensible a las condiciones iniciales, entonces  $F$  también es sensible a las condiciones iniciales.

## 2.2. Funciones caóticas según Devaney

En la Definición 1.2.9 se presentó el concepto de caos según Devaney en el contexto de los sistemas dinámicos discretos tradicionales. Ahora, el objetivo de esta sección es adaptar y estudiar esta definición en el marco de las funciones multivaluadas. A partir de este enfoque, exploraremos algunas de las propiedades que surgen y los resultados relacionados implicados. Para comenzar, partimos de la definición de lo que entendemos por sistema dinámico caótico multivaluado.

**Definición 2.2.1.** <sup>2</sup> Sea  $(X, F)$  un sistema dinámico discreto. Diremos que  $(X, F)$  es caótica en el sentido de Devaney, o simplemente que  $F$  es caótica, si se satisfacen las siguientes afirmaciones:

1. El conjunto de  $\text{Per}(F)$  es denso en  $X$ ;
2.  $F$  es transitiva  $X$ ;
3.  $F$  es sensible a las condiciones iniciales.

Por la Proposición 2.1.25, es inmediato verificar que el sistema dinámico definido en el siguiente ejemplo es caótico.

**Ejemplo 2.2.2.** Sea  $T: [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}([0, 1])$  la función multivaluada definida como  $T(x) = \{t_1(x), t_2(x)\}$ , donde

$$t_1(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad t_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}; \\ \{1\}, & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

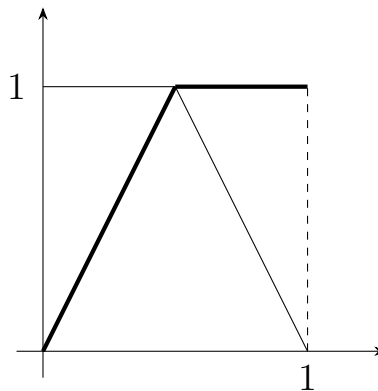


Figura 2.6: Gráfica de  $T$ .

La gráfica de la función  $T$  incluye a la gráfica de la función *Tienda*, descrita en el Ejemplo 1.2.12. Como resultado de la Proposición 2.1.25, esta función posee el conjunto  $\text{Per}(F)$  denso en  $X$ , es topológicamente transitiva y además presenta sensibilidad a las condiciones iniciales.

En el siguiente ejemplo, ilustraremos lo mencionado en el Corolario 2.1.26. Si la multifunción  $F(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$  contiene alguna función  $f_i$  que cumpla con alguna de las propiedades de la Definición 1.2.9, entonces  $F$  será caótica en el sentido de Devaney.

**Ejemplo 2.2.3.** Sean  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  y  $S: S^1 \rightarrow S^1$  la función multivaluada definida como  $S(z) = \{s_1(z), s_2(z)\}$ , donde:

$$s_1(z) = ze^i \quad s_2(z) = ze^{\pi i}$$

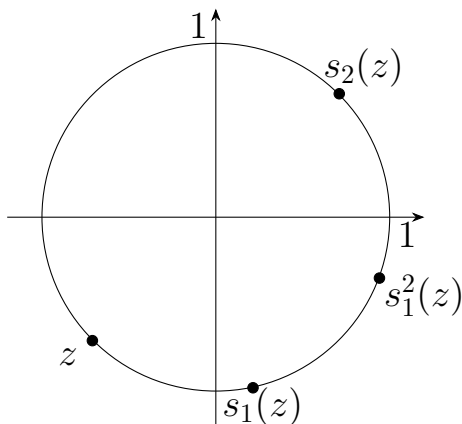


Figura 2.7: Gráfica de  $S$ .

Observe que la función  $s_1(z)$  es topológicamente transitiva, mientras que la función  $s_2(z)$  tiene sus puntos periódicos densos en  $S^1$  y es sensible a condiciones iniciales. Así, según el Corolario 2.1.26, la función  $S$  será transitiva, tendrá sus puntos periódicos densos en  $S^1$  y será sensible a condiciones iniciales. Por la Definición 2.2.1,  $S$  es caótica según Devaney.

Como vimos anteriormente, el Teorema 1.2.11 establece que, en el contexto usual, si una función  $f$  es topológicamente transitiva y el conjunto de sus puntos periódicos es denso, entonces  $f$  es sensible a las condiciones iniciales. Cabe destacar que la función del Ejemplo 2.2.3 cumple estas propiedades: tiene puntos periódicos densos, es topológicamente transitiva y, por lo tanto, es sensible a las condiciones iniciales. Por otro lado, en el Ejemplo 2.1.24 analizamos una función que no es transitiva, aunque tiene órbita

densa débil, a pesar de que  $\text{Per}(F)$  es denso en  $X$ , esto no garantiza que la función multivaluada sea sensible a las condiciones iniciales.

A continuación, presentamos un lema que será útil para demostrar que, si  $F$  tiene órbita densa fuerte y  $\text{Per}(F)$  es denso en  $X$ , entonces  $F$  es sensible a las condiciones iniciales. La demostración sigue la misma idea presentada en J. Banks et al. «On Devaney's Definition of Chaos». En: *American Mathematical Monthly* 99.4 (1992), págs. 332-334.

**Lema 2.2.4.** *Sean  $X$  un continuo y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  una función semicontinua superiormente tal que  $\text{Per}(F)$  contiene al menos dos puntos. Entonces, existe  $\delta_0 > 0$  tal que, para todo  $x \in X$ , se puede encontrar una sucesión  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(q)$ , donde  $q$  es un punto periódico y  $d(x, q_i) > \frac{\delta_0}{2}$  para algún  $i \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Sea  $x$  un punto arbitrario de  $X$ . Consideremos dos puntos periódicos  $q$  y  $p$ , para los cuales existen  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(q)$  y  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(p)$  tales que  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} = (q_{n+k_1})_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} = (p_{n+k_2})_{n \in \mathbb{N}}$ , para algunos  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ . Ahora, definimos

$$\delta_0 = \min\{d(q_{i_1}, p_{i_2}) \mid (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(q) \text{ y } (p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(p), \text{ para algún } i_1, i_2 \in \mathbb{N}\}.$$

Sean  $m, n \in \mathbb{N}$  tales que

$$d(x, q_n) \leq d(x, q_k) \quad \text{y} \quad d(x, p_m) \leq d(x, p_k) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Entonces, tenemos que

$$\delta_0 \leq d(q_n, p_m) \leq d(q_n, x) + d(p_m, x).$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $d(q_n, x) \leq d(p_m, x)$ . Entonces,

$$\delta_0 \leq d(q_n, x) + d(q_n, x) = 2d(q_n, x).$$

Así, obtenemos que  $d(q_i, x) \geq \frac{\delta_0}{2}$  para algún  $i \in \mathbb{N}$ . □

En general, no tenemos un resultado equivalente al Teorema 1.2.11 en el contexto de las funciones multivaluadas; es decir, no sabemos si la densidad de los puntos periódicos y la transitividad, implican caos, como planteamos en la siguiente pregunta.

**Pregunta 2.2.5.** *Sea  $(X, F)$  un sistema dinámico discreto multivaluado. ¿Si  $F$  es transitiva y  $\text{Per}(F)$  es denso en  $X$ , entonces  $F$  sensible a las condiciones iniciales?*

Cerramos nuestro trabajo con el siguiente teorema que establece que la existencia de una órbita densa fuerte (en particular la función va ser transitiva por el Teorema 2.1.17) y

la densidad de los puntos periódicos, implican que el sistema dinámico discreto multivaluado es caótico en el sentido de Devaney.

**Teorema 2.2.6.** Sean  $X$  un continuo y  $F: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  una función multivaluada semicontinua superiormente. Si existe  $x \in X$  con órbita densa fuerte y el conjunto de  $\text{Per}(F)$  es denso en  $X$ , entonces  $F$  es sensible a las condiciones iniciales en  $X$ .

*Demostración.* Sean  $x \in X$  y  $\delta > 0$ . Demostraremos que existe  $y \in B(x, \delta)$  y dos órbitas  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(x)$  y  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(y)$  tales que  $d(x_i, y_i) \geq \epsilon$  para algún  $i \in \mathbb{N}$ . Consideremos  $\delta_0$  según el Lema 2.2.4 y definamos  $\epsilon = \frac{\delta_0}{8}$ .

Por el Lema 2.2.4, existe un punto periódico  $q$  tal que hay una sucesión  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(q)$ , donde  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} = (q_{n+k_1})_{n \in \mathbb{N}}$  para algún  $k_1 \in \mathbb{N}$ . Además, dicha sucesión satisface  $d(x, q_i) \geq 4\epsilon$  para algún  $i \in \mathbb{N}$ . Sea  $r = \min\{\delta, \epsilon\}$  y  $U = B_d(x; r)$ .

Por la densidad de los puntos periódicos en  $\text{Per}(F)$ , existe  $p \in \text{Per}(F) \cap U$ , con una sucesión  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(p)$  tal que  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} = (p_{n+k_2})_{n \in \mathbb{N}}$  para algún  $k_2 \in \mathbb{N}$ . Ahora definimos el conjunto

$$V = \bigcap_{i=0}^n F^{-i}(\langle B(q_i; \epsilon) \rangle).$$

Note que  $V$  es abierto y no vacío, ya que  $q_i \in V$ . Como existe un punto  $y \in X$  que tiene órbita densamente fuerte, hay  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(y)$  tal que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \cap U \neq \emptyset$  para todo abierto no vacío de  $X$ . Esto implica que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $y_k \in V$ .

Definimos:

$$j = \left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil + 1,$$

lo cual implica que  $1 \leq nj - k \leq n$ . Por la construcción, se tiene:

$$y_{nj} \in F^{nj}(y) = F^{nj-k}(F^k(y)).$$

En particular,  $y_k \in F^k(y)$ , por lo que  $F^{nj-k}(y_k) \in \langle B(q_{nj-k}; \epsilon) \rangle$ . Así,  $F^{nj-k}(y_k) \subseteq B(q_{nj-k}; \epsilon)$ , lo que implica  $d(y_{nj}, q_{nj-k}) < \epsilon$ . Por otro lado, sabemos que  $d(x, q_{nj-k}) \geq 4\epsilon$ . Usando la desigualdad triangular, tenemos:

$$d(p_{nj}, y_{nj}) = d(p_{nj+k_2}, y_{nj}) \geq d(x, y_{nj-k}) - d(x_{nj-k}, p_{nj+k_2}),$$

$$d(p_{nj}, y_{nj}) \geq d(x, q_{nj-k_1}) - d(q_{nj-k_1}, y_{nj}) - d(x, p_{nj+k_2}).$$

Como  $p \in U$  y  $y_{n_j} \in B(q_{n_j-k}; \epsilon)$ , sustituyendo valores:

$$d(p_{n_j}, y_{n_j}) \geq 4\epsilon - \epsilon - \epsilon = 2\epsilon.$$

Usando nuevamente la desigualdad triangular

$$d(x_{n_j}, y_{n_j}) + d(p_{n_j}, x_{n_j}) > 2\epsilon.$$

Esto implica que

$$d(x_{n_j}, y_{n_j}) > \epsilon \quad \text{o} \quad d(p_{n_j}, x_{n_j}) > \epsilon.$$

De esta manera, hemos encontrado un punto  $y$  en una vecindad de  $x$ , con  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(x)$  y  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_F(y)$  tales que  $d(x_i, y_i) \geq \epsilon$  para algún  $i \in \mathbb{N}$ .

□

## Bibliografía

- Banks, J. et al. «On Devaney's Definition of Chaos». En: *American Mathematical Monthly* 99.4 (1992), págs. 332-334 (vid. pág. 37).
- Borsuk, K. y S. Ulam. «On symmetric products of topological spaces». En: *Fundamenta Mathematicae* 19 (1931), págs. 131-174 (vid. pág. 21).
- Camargo, J. y S. Macías. «Dynamics with set-valued functions and coselections». En: *Qualitative Theory of Dynamical Systems* 21.2 (2022), Art. 25 (vid. págs. 9, 10, 21, 26, 28, 30, 35).
- Camargo, J. y E. Villamizar. *Topología General*. Bucaramanga: Ediciones UIS, 2019 (vid. págs. 11, 12, 15, 22-25, 32).
- Devaney, R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 3rd. CRC Press, 2018 (vid. pág. 9).
- King, J. y H. Méndez. *Sistemas Dinámicos Discretos*. UNAM, Facultad de Ciencias, 2014 (vid. págs. 12-16, 18, 20).