PROCESOS DE INTERPRETACIÓN Y ACCIÓN DE PROFESORES QUE PARTICIPAN EN UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA EN LA QUE SE REALIZA EL DISEÑO CURRICULAR DE UN CURSO DE PRECÁLCULO

DANIEL MORENO CAICEDO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2015

PROCESOS DE INTERPRETACIÓN Y ACCIÓN DE PROFESORES QUE PARTICIPAN EN UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA EN LA QUE SE REALIZA EL DISEÑO CURRICULAR DE UN CURSO DE PRECÁLCULO

DANIEL MORENO CAICEDO

Trabajo de Grado para optar al título de
Magíster en Educación Matemática

Directora:
SANDRA EVELY PARADA RICO
Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2015

DEDICATORIA

Deseo con este trabajo, Dedicárselo a dos seres que me amaron y siempre se mostraban orgullosas por mi deseo de estudiar constantemente, lamentablemente ellas partieron al infinito, mientras hacia la maestría, mi abuela *Flavia* y mi tía *Alicia*; Gracias por quererme tanto, siempre estarán en mi corazón.

Para el ser que me dio la vida, mi querida madre *Carmelita*, que este muchos años a mi lado, para disfrutar de su amor incomparable.

A mi esposa Yolanda quien siempre está a mi lado y me apoyo en los momentos de flaqueza, a mis hijos (Marcela, Edward, Daniel y Lucero), a quienes siempre les he inculcado el amor al estudio, gracias por su amor y compartir la vida con alegría.

AGRADECIMIENTOS

A quienes me impulsaron a retomar el estudio de la Maestría, el agradecimiento del alma; gracias por ese consejo Jorge Fiallo y Sofía Pinzón.

A mi directora de tesis, la profesora Sandra Evely Parada por sus aportes y enseñanzas, han sido muy valiosos para el trabajo de la maestría, También me serán más útiles cuando los use en las asesorías a mis colegas los profesores.

A los profesores de la CoP del curso de Precálculo de la UIS, que me permitieron tomar información para el trabajo y aportaron a mi formación profesional, en especial a la profesora Lucero quien gentilmente me facilito tomar los datos de sus clases.

A Claudia Barajas por su invaluable aporte, muchos éxitos en su vida.

A los profesores de la maestría, Al profesor Mayorga, A la profesora Solange, al profesor Jorge, al profesor Martin, quienes siempre se mostraron muy dispuestos a compartir su conocimiento y son unas excelentes personas.

A Claudia Garavito, por su oportuna información y estar siempre dispuesta a las solicitudes de los estudiantes, un ser de bondad y servicial, mil gracias.

A Nataly, por sus contribuciones y apoyo en esa lengua extranjera, ojala quiten el requisito de Ingles ya que es un problema para la maestría en lugar de ser una herramienta para la profesionalización.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE ILUSTRACIONES

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

TÍTULO: PROCESOS DE INTERPRETACIÓN Y ACCIÓN DE PROFESORES QUE PARTICIPAN EN UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA EN LA QUE SE REALIZA EL DISEÑO CURRICULAR DE UN CURSO[1]

AUTOR: Daniel Moreno Caicedo[2]

PALABRAS CLAVE: Formación de profesores, Desarrollo profesional, Pensamiento Variacional, reflexión-y-acción, Comunidad de Práctica, Curso de precálculo.

El estudio que aquí se reporta tuvo como objetivo caracterizar los significados negociados (para concretar posibles aprendizajes) en una comunidad de práctica de educadores matemáticos que participan en un curso de precálculo, para estudiantes de nuevo ingreso a la universidad. El estudio se sustentó teórica y metodológicamente en una adaptación del modelo de Reflexión y Acción (R-y-A) de Parada (2011) que permite orientar y analizar los procesos de reflexión de profesores que participan en una comunidad de práctica (desde la perspectiva de Wenger (1998). Dicho modelo permite caracterizar las interpretaciones y acciones de los profesores como posibles significados negociados (aprendizaje), además categorizar los hallazgos en los tres componentes del pensamiento reflexivo de los profesores de matemáticas así: pensamiento matemático-variacional (por tratarse de un curso de precálculo), pensamiento didáctico, y pensamiento orquestal.

Después de reconstruir los significados negociados por la comunidad de práctica en tres versiones del curso se tiene que los profesores mejoraron su comprensión respecto a la variación y cómo el cambio está implícito en ella; la reflexión-sobre-la acción ha posibilitado la negociación de la concepción instrumental de la tecnología digital. El estudio además, permitió evidenciar que la interacción de los integrantes de la CoP promueve la confrontación entre diferentes concepciones propias de los objetos matemáticos del Cálculo Diferencial; así como, que los profesores de la CoP han negociado su rol protagónico en la clase para darle participación al estudiante durante los espacios de socialización de las actividades; y, los profesores tienen claro que la clase no puede estar sujeta a los potenciales de la tecnología digital pues el profesor es el encargado de orientar los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

---

[1] Proyecto de Grado.
[2] Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Directora: Dra. Sandra Evely Parada Rico.

ABSTRACT

TITLE: INTERPRETATION PROCESSES AND ACTION OF TEACHERS INVOLVED IN A COMMUNITY OF PRACTICE IN THE CURRICULUM DESIGN COURSE IS DONE[3]

AUTHOR: DANIEL MORENO CAICEDO[4]

Keywords: teacher training, variational thinking, R-and-A model, practicum community, precalculus course.

This study aimed at characterizing the negotiated meanings (to find out possible learnings) in a practicum community of mathematics educators involved in a PreCalculus course, for new University students. The study is sustained theoretical and methodologically in an adaptation of the Reflection and Action (R and A) model from Parada (2011) which allows to direct and analyze the processes of reflection of teachers participating in a practicum community, from the perspective of Wenger (1998). Such a model allows to characterize the interpretations and actions of teachers as possible negotiated meanings (learning), as well as to categorize the findings on the three components of reflective thinking of mathematics teachers, thus: variational thinking (since it is based on a PreCalculus course), didactic thought, and orchestral thinking.

After rebuilding the negotiated meanings by the practicum community in three versions of the course, it was found that the teachers improved their understanding regarding the variation and how change is implicit in it; the reflection-on-action has allowed the negotiation of the instrumental conception of digital technology. The study also allowed to show evidence that interaction among the members of the CoP promotes the confrontation between different specific conceptions of mathematical objects of Differential Calculus; teachers of the CoP have negotiated their starring role in the class to give the student the possibility to participate in the socialization spaces during the activities; and the teachers are clear that the class cannot be subjected to the potential of digital technology since the teacher is responsible for guiding students´ learning processes.

[3] Project Degree.

[4] Industrial University of Santander. Sciences Faculty. School of Mathematics. Master in Mathematics Education. Director: Dra Sandra Evely Parda Rico.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la formación de profesores, y concretamente de profesores de matemáticas, ha sido objeto de estudio para profesionales de diversos campos, entre ellos el de la Educación Matemática. Consideramos que parte de ello se debe a que se trata de orientar al profesor para que motive y guíe a los estudiantes para que sean ellos mismos quienes recorran responsablemente el camino de su propio aprendizaje, dejando de lado la mirada de la docencia como una labor transmisora de conocimientos que en otros momentos ocupó la mayor parte de su actividad.

Los profesores cuando son conscientes de mejorar su formación profesional buscan hacer estudios de especialización, maestrías etc... Pero estos programas son imitados por el tiempo. Cuando el profesor participa activamente en una CoP, su formación y aprendizaje es independiente del tiempo y puede ser más permanente (Parada, 2011).

Por iniciativa de profesores e investigadores, se han constituido grupos de trabajo que propenden por fortalecer las acciones pedagógicas de sus integrantes a través de la reflexión y la participación, estrategias de cooperación, colaboración y liderazgo, y donde simultáneamente se juegan diversos intereses e incentivos; algunos de estos grupos se transforman en comunidades de práctica que favorecen el desarrollo profesional de los profesores integrantes ya que no solo se comparte conocimiento, un reservorio de experiencia o de recursos. Es, por su propia naturaleza, un espacio que retroalimenta y construye nuevo conocimiento fruto de la discusión y la reflexión.

La investigación que se comunica en este documento busca responder a la pregunta *¿Qué significados negocian (procesos de interpretación y acción) los profesores de matemáticas que participan en una comunidad de práctica, constituida para diseñar e implementar un curso de precálculo dirigido a estudiantes de nuevo ingreso a la universidad*? para lograr dicha caracterización analizaremos el pensamiento reflexivo de los integrantes de la comunidad de práctica. Esto nos lleva consecuentemente a nuestro objetivo de la investigación: *caracterizar los significados negociados (para concretar posibles aprendizajes) en una comunidad de práctica de educadores matemáticos que participan en un curso de precálculo, para estudiantes de nuevo ingreso a la universidad.*

Las investigaciones en desarrollo profesional de los profesores basadas en los procesos de reflexión mencionan la importancia de que ésta se oriente para que el profesor centre su atención en aspectos puntuales de su acción pedagógica. El modelo teórico y metodológico, de Parada (2011) se ajustó para orientar esta investigación, en éste se definen ciertos procesos de desarrollo profesional de profesores de matemáticas dentro de comunidades de práctica.

A partir de dicho modelo logramos una reconstrucción de los significados negociados en la comunidad de práctica (CoP) de los profesores de matemáticas que realizan un curso de precálculo, curso que pretenden valorar y posibilitar el desarrollo del pensamiento matemático-variacional y de los procesos matemáticos asociados a la variación (objeto cognitivo del Cálculo Diferencial) como el razonamiento, la resolución y el planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (MEN, 1998, pág. 35). Dicha reconstrucción permitió observar los aprendizajes de los integrantes de la CoP en las tres primeras versiones del curso. A través del estudio de caso de Lucero se buscó conocer con más detalle las negociaciones de la comunidad, de tal suerte que la profesora nos permitió comprender la dinámica de la comunidad y aquellos aspectos en los cuales los profesores han trascendido profesionalmente y aquellos que enfatiza la necesidad de acompañar a los profesores en sus prácticas pedagógicas.

Este documento que constituye el reporte final de la investigación consta de las siguientes partes:

1. Directrices y antecedentes de la investigación.

En este capítulo presentamos algunos referentes bibliográficos sobre la formación de profesores, de las CoP de profesores de matemáticas, así como literatura relacionada con dificultades en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, con lo cual planteamos nuestra pregunta y objetivo de esta investigación.

2. Fundamentos Teóricos. Aquí se exponen de manera explícita los aspectos teóricos sobre los cuales se sustenta la investigación, detallando la teoría de la CoP en términos de Wenger, la adaptación del modelo R-y-A donde estamos interesados en las negociaciones del pensamiento matemático-variacional, el pensamiento didáctico concerniente con el cálculo diferencial y el pensamiento orquestal (uso de SGD). También relacionamos las herramientas usadas para apoyar los procesos de reflexión de los profesores, para- en y sobre la acción.

3. Diseño Metodológico. En este apartado se da cuenta de la metodología empleada para la obtención de los datos y su respectivo tratamiento con los fundamentos teóricos, descritos en el capítulo anterior.

4. Significados negociados de la CoP; aquí reportamos las negociaciones de la CoP que se evidenciaron en las tres etapas donde se ha realizado el curso del precálculo, en cada una de las etapas de identifican las reflexiones *para* la acción, reflexiones *en* la acción y las reflexiones *sobre* la acción, resaltando las cosificaciones presentes en cada una de ellas.

5. El caso de Lucero: una aproximación a los procesos de interpretación y acción de la CoP del curso de precálculo. Aquí se presentan los resultados del análisis de los datos de la profesora Lucero y de igual forma cómo fueron sus reflexiones *para-en- sobre* la acción de la tercera etapa, donde se filmaron 10 clases de la profesora y decidimos analizar su puesta en común del taller “caja sin tapa”, resultado de esta filmación se hicieron presentes unas reflexiones del pensamiento matemático-variacional, pensamiento didáctico y pensamiento orquestal, donde se le mostraron los episodios y por medio de unas entrevistas a la profesora, se resaltaron los significados negociados en cada uno de los pensamiento, comparando la ruta cognitiva planeada por la CoP y la ruta cognitiva lograda por Lucero.

6. Conclusiones; es el último apartado del cuerpo de esta disertación, en él se sintetizan los hallazgos de la caracterización y se ofrecen algunas recomendaciones para dar continuidad a este trabajo en futuras investigaciones.

En CD Anexo, se presentan las trascripciones de los videos de los procesos de reflexión en la comunidad y de reflexión del caso tomado como estudio, los datos que dejamos se enuncian a lo largo como Apéndices. En el CD también se agregan como apéndices las autorizaciones de los maestros participantes sobre el uso de sus fotografías.

1.

DIRECTRICES Y ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

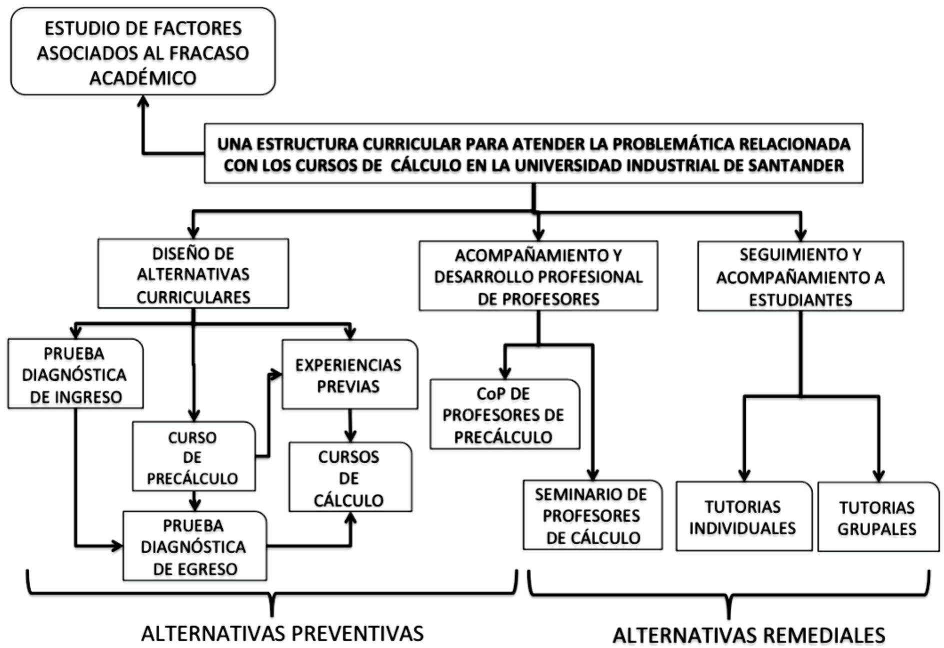
Para comprender la problemática de este estudio presentaremos a continuación el contexto en el cual se desarrolla la investigación y los antecedentes de los elementos directrices de la misma como lo son la formación y reflexión de profesores, los modelos de formación de profesores, las comunidades de práctica en formación de profesores de matemática y, por últimos, las dificultades de la enseñanza y aprendizaje del cálculo. Estas unidades conceptuales nos permitirán formular la pregunta y el objetivo de este trabajo.

1.1 CONTEXTO DEL ESTUDIO Y PROBLEMÁTICA

La mayoría de universidades del país para la admisión de sus estudiantes sólo tiene en cuenta los puntajes obtenidos en la Pruebas Saber 11, este es el caso de la Universidad Industrial de Santander (UIS). Algunos estudios (descriptivos) realizados por la Vicerrectoría Académica de la institución han mostrado que la reprobación del curso de Cálculo Diferencial es muy alta, lo que genera una gran preocupación para los administrativos y profesores debido al impacto social y económico que esto conlleva. Para resolver esta situación la UIS ha venido desarrollando una serie de alternativas que permitan mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las nociones matemáticas.

Dentro de estas alternativas de solución desde el año 2012, la Escuela de Matemáticas con el apoyo de la Vicerrectoría Académica de la institución, viene ejecutando el proyecto "*una estructura curricular para atender la problemática de cálculo I en la UIS",* propuesta planteada por Parada (2012). En la Ilustración 1 se muestra un esquema de todo lo que comprende la propuesta, que se empezó a implementar parcialmente desde ese mismo año y es precisamente desde la implementación de este proyecto y desde una de las actividades de las alternativas preventivas que se desprende el estudio que aquí reportamos.

Ilustración 1.Estructura general del proyecto institucional de la UIS para atender la problemática alrededor del Cálculo



Fuente: Parada (2012)

El proyecto atiende las problemática desde tres ejes fundamentalmente, mismos que describimos a continuación:

i. **Diseño de alternativas curriculares,** a la fecha en este eje se contempla un curso de precálculo como una alternativa para aquellos estudiantes que presentan más bajos puntajes en la valoración de Matemáticas de la prueba nacional Saber 11. El propósito principal de este curso es potenciar habilidades del “pensamiento variacional” de los estudiantes. El trabajo en el aula de este curso se posibilita mediante un proceso activo de resolución de problemas que involucra el razonamiento, la comunicación, la representación, las conexiones, la elaboración, comparación y ejecución de procedimientos, en dichos procedimientos la tecnología es una herramienta clave para la producción de aprendizajes significativos alrededor del cambio y la variación.

En este eje también se considera el diseño y la aplicación de una prueba que permita conocer el desempeño de los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad con la cual se pretende identificar dificultades y planear alternativas de apoyo por parte de la universidad como lo son las tutorías individuales.

ii. **Acompañamiento y desarrollo profesional de profesores** que se realiza a través de una comunidad de profesores que participan en el curso de precálculo y de varias de las actividades que comunidad dinamizan para su constante actualización. Estos espacios de discusión pretenden analizar e interpretar las concepciones y las creencias de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente del cálculo diferencial. Se espera que la participación de los profesores en estos espacios transforme su accionar pedagógico y les permitan hacer reflexiones sobre el desempeño de sus clases.

iii. Con el propósito de atender las necesidades específicas de los estudiantes de cálculo que presentan bajo rendimiento académico, se institucionaliza en 2012 el programa de **“Atención, Seguimiento y Acompañamiento a los estudiantes”** (ASAE) el cual contempla la tutorías individuales y las tutorías grupales bajo la premisa del trabajo entre pares dado que éstas son facilitadas por profesores en formación. Esta línea se ha consolidado bajo la coordinación de educadores matemáticos; ASAE se caracteriza porque sus tutores son estudiantes de licenciatura en matemáticas (para que de manera mutua y entre pares se enriquezcan las experiencias de docencia y de construcción del conocimiento alrededor del Cálculo Diferencial) y porque es dirigido a estudiantes de primer nivel que ven por primera vez Cálculo I; este proceso ya se ha caracterizado por Botello (2013).

Es en el eje “Acompañamiento y desarrollo profesional de profesores” donde se ubica el estudio que planteamos en este documento, el cual pretende aportar a la formación de los profesores quienes, a su vez, han conformado una comunidad de práctica (CoP) que tiene como propósito diseñar un curso de precálculo en el que se estudien las nociones variación y cambio desde un contexto didáctico.

Inicialmente para llevar a cabo el curso de precálculo la Escuela de Matemáticas conforma un Grupo de Trabajo Educativo (GTE) de profesores organizados para diseñar y desarrollar el curso. Este curso se ha desarrollado a la fecha en cuatro oportunidades:

a) Primer semestre académico del 2013 (2013-1).

b) Segundo semestre académico del 2013 (2013-2).
c) Primer semestre académico del 2014 (2014-1).
d) Segundo semestre académico del 2014 (2014-2).

El GTE adquiere características de una comunidad de práctica, ya que como lo menciona Wenger (1998) los participantes de un grupo educativo que además de convocarse para desarrollar actividades colaborativos logran negociar significados y llevarlos a un producto (cosificación) conforman así una CoP. Dicha comunidad se interesa por negociar significados para desarrollar un proyecto curricular como para mejorar sus prácticas profesionales, específicamente alrededor del cálculo diferencial, dichos intereses dan cuenta de las características de sus participantes, pues el grupo lo conforman estudiantes de Maestría en Educación Matemática o de Maestría en Matemática, profesores cátedra de la Escuela de Matemáticas de la UIS, también investigadores expertos en Educación Matemática y profesores en formación a quienes llamaremos “auxiliares”. Los profesores de la CoP se caracterizan por ser de diferentes edades, algunos tienen una larga trayectoria como docentes mientras que otros apenas inicia, no obstante cada uno tiene experiencias vividas y la formación profesional diferente, lo que hace que las reflexiones colectivas sean muy enriquecedoras conduciendo a cada participante a pensar y a negociar algunos aspectos de su práctica docente.

En una CoP se posibilita la *negociación de significados,* entendiendo “significado” como el producto de las experiencias vividas que influyen en la identidad y en las acciones individuales, las cuales se comparten cuando se posibilitan acciones colectivas (Wenger, 1998), sobre la conceptualización de CoP ampliaremos en el Capítulo 2.

De acuerdo al eje de diseño curricular, desde los inicios de la CoP se espera que los profesores planeen conjuntamente las clases del curso de precálculo para que, posteriormente, todos sigan la ruta establecida. Para lograr esto los profesores se reúnen para reflexionar sobre *aspectos del pensamiento matemático-variacional* que son inherentes a la actividad matemática que se propone para la clase; *aspectos didácticos* que se centran en identificar las formas, procedimientos y estrategias que serán tomadas en cuenta para transmitir el saber; y aspectos orientados al *desarrollo de la clase* una vez se esté en ella.

1.2 ANTECEDENTES

Orientamos la revisión de literatura a investigaciones de educación matemática que nos ayudaran a vislumbrar la teorización sobre los constructos de formación y la reflexión de profesores, comunidades de práctica y dificultades en el aprendizaje del cálculo. Este último tópico es importante para la investigación que estamos reportando porque, como lo hemos observado, la CoP del curso de precálculo gestiona acciones que busca que los estudiantes superen sus dificultades en el aprendizaje del cálculo a su vez que los profesores confrontan, evalúan y mejoran sus propios conocimientos matemáticos sobre el cambio y la variación.

1.2.1 Formación y reflexión de profesores

Es indiscutible el papel del profesorado como elemento determinante de la calidad educativa. La aproximación al constructo de la formación docente presenta diversos enfoques, varios de ellos expuestos por Grau, Gómez y Perandones (2009, pp. 13-15); mencionaremos a continuación algunas posturas clasificándolas según su definición:

- ✓ Berbaum (1982) entiende la acción de formación como aquella en la que el cambio se alcanza a través de una mediación que requiere un tiempo determinado y una participación consciente del sujeto y a la vez existe voluntad explícita del formador de conseguir un objetivo.
- ✓ Ferry (1991) entiende la formación como un proceso de desarrollo individual que pretende adquirir o perfeccionar capacidades lo cual permite distinguir la formación del profesorado en doble sentido ya que toma en cuenta la formación académica con la pedagógica. El autor también considera que este proceso forma profesionales por lo que es un tipo de perfeccionamiento profesional lo que conlleva a la coexistencia entre la formación de profesores y su práctica profesional.
- ✓ De manera similar, González (1995) nos habla de formación del profesorado como una acción o conjunto de actividades que se despliegan en contextos organizados e institucionales en donde las personas interaccionan e interiorizan conceptos, procedimientos y actitudes que les capacitan para intervenir en la enseñanza.
- ✓ Medina & Domínguez (1989) señalan la formación del profesorado como la preparación y autonomía profesional del docente para trasformar crítica, reflexiva y eficazmente una enseñanza que teja un aprendizaje significativo en sus estudiantes y

logre un *pensamiento-acción* innovador trabajando en equipo con los colegas para desarrollar un proyecto educativo común. En estos términos, estos autores visualizan al profesor como un sujeto reflexivo e innovador cuya formación se desarrolla en el contexto de su trabajo, junto con el resto de sus compañeros; por lo que consideran el trabajo colaborativo entre los profesores de una misma área como mejor camino de formación profesional.

- ✓ Marcelo (1994) entiende que la formación del profesorado es un concepto que puede referirse tanto a los sujetos que están realizando estudios para convertirse en profesores, como a aquellos docentes que llevan ya algunos años en la docencia. El autor también resalta la doble perspectiva de la formación del profesorado: individual y en equipo.

De esta forma, la formación del profesorado puede ser concebida como una actividad que envuelve a un sólo profesor (formación a distancia, asistencia a cursos específicos, etc.) o un grupo de profesores para realizar actividades de desarrollo profesional centradas en sus intereses y necesidades.

Llinares (2008, p. 1) nos dice que la formación de profesores enfatiza “la necesidad de pensar en la formación en función de estar preparado para realizar <<algo>> de manera competente al finalizar el proceso educativo. Pero además haber adquirido las destrezas que permitan seguir aprendiendo a lo largo de la vida” pese a que los profesores tienden a enseñar cómo les enseñaron o como han aprendido, y que esto puede influir directamente en cómo presentan los contenidos matemáticos a sus alumnos (Llinares & Krainer, 2006).

Shulman (1986) plantea que el profesor necesita tres tipos de conocimiento: el *conocimiento del contenido* de la materia; el *conocimiento didáctico* del contenido; y el *conocimiento curricular* y que al tener un conocimiento amplio en éstos el profesor contará con más herramientas en su labor profesional para el beneficio de sus estudiantes. Podríamos decir que es sobre ese conocimiento hecho de experiencias sobre el cual se espera que el profesor reflexione en el proceso de formación para cambiar o generar nuevo conocimiento que permita su desarrollo y mejoramiento profesional so pena de que muchas generaciones de docentes se han formado bajo otros paradigmas en los cuales la reflexión no tenía lugar.

De otra parte, Flórez (1998) señala más específicamente que la formación de profesores de matemáticas está permeada por un sistema didáctico formado por el profesor de matemáticas, los alumnos del nivel educativo, y los contenidos matemáticos.

> Los profesores se encuentran en este sistema en un plano de actuación práctica, en el que tienen que tomar decisiones y actuar. Los profesores que participan en este sistema didáctico ponen en juego un conocimiento profesional que se constituye en objeto de estudio para los investigadores teóricos en didáctica. En este conocimiento se incluyen distintos tipos de conceptos, destrezas y actitudes.

Flórez & Peñas (2003) señalan que el profesor debe sumergirse en un proceso de desarrollo profesional, es decir, de formación continua acorde con su forma de contemplar el mundo bajo la directriz de incluir en esta visión el mayor suma de perspectivas y variables posibles, dado que el profesor está sujeto a formar sujetos únicos por su individualidad y condiciones socioculturales que permean el sistema didáctico. Es precisamente por estas exigencias que los autores consideran que el profesor de matemáticas debe desarrollar una *actitud reflexiva* (Schón, 1992) que le permita contemplar y afrontar los problemas profesionales que se le van planteando (Stenhouse, 1991; Elliot, 1993 citados por Flórez & Peñas, 2003); dicha actitud conducirá al profesor a detectar nuevos aportes (ya sean teóricos o de la experticia de otros) para incorporar a su práctica.

Recientemente en la investigación en educación matemática hay consenso en que la reflexión guía el crecimiento profesional, estimula la construcción de conocimientos constituyéndose en una estrategia formativa.

> La reflexión comienza cuando nos formulamos preguntas, cuando tratamos de verificar la autenticidad de datos, la búsqueda de una solución, la aparición de una duda. Para Dewey el pensamiento se origina a partir de una «perplejidad, una confusión, una duda». A partir de este origen es necesario encontrar un camino, diseñar algún plan, hallar fundamentos teóricos a partir de conocimientos y experiencias anteriores. La actividad reflexiva es un proceso de inferencia, que «implica un salto de lo conocido a lo desconocido ». La observación y la memoria están presentes en el proceso de reflexión ya que se registran datos, se recuerdan hechos y experiencias pasadas (Anijovich, 2005, p. 22).

Para los profesores, según Dewey (1989 citado por Parada, 2011), el proceso de reflexión empieza cuando la práctica se torna difícil y aparece algún suceso problemático que no puede ser resuelto inmediatamente. Dewey refiere en sus trabajos que la reflexión es un elemento importante en la formación de los profesores ya que es un proceso de resolución de conflictos y de dudas a la vez que requiere de una actitud dispuesta a revisar las propias acciones por lo que, según Flórez & Peñas (2003) el profesor tiene que adquirir ciertas actitudes (por ejemplo, mente abierta, entusiasmo y responsabilidad) y herramientas de pensamiento razonamiento, pensamiento ordenado.

Dewey precisa, además, que la reflexión hay que verla como un activo y deliberativo proceso cognitivo, que incluye secuencias de ideas interconectadas que toman en cuenta las creencias y conocimientos de los profesores. Es precisamente sobre este aspecto: la reflexión, sobre el que se enfoca el proceso de negociación de significados de la comunidad de práctica (objeto de este estudio).

1.2.1.1 Modelos de formación de profesores

El modelo de formación basado en la reflexión, observación y supervisión se reseña en tres tipos; a continuación los sintetizaremos:

a) La reflexión para la formación

La reflexión es una estrategia donde cada profesor se cuestiona sobre sus actuaciones y cómo puede influir en sus actividades pedagógicas y didácticas lo cual conduce a fortalecer sus destrezas metacognitivas en relación a su práctica docente. Como estrategia la reflexión es un eje primordial en la docencia.

Marcelo (1994 citado por Grau, Gómez & Perandones, 2009), muestra que las estrategias de reflexión se clasifican en dos grupos: las que requieren observación y análisis de la enseñanza; y las que promueven la reflexión del profesor analizando el lenguaje de sus constructos personales. En estas últimas el autor identifica cinco formas de reflexión:

a) *La redacción y análisis de casos.* Las aulas de clase son lugares en donde los profesores tejen historias no solo de tipo cognitivo sino afectivo. Estas vivencias sirven para organizar el currículo y comunicarlas a lo largo de un curso por tal razón se puede pedir a los docentes que analicen una situación presentada o que redacten una situación vivida por ellos para ser discutida en un grupo.
b) *Análisis de biografías profesionales*: haciendo el análisis de las biografías de profesores destacados en las cuales los docentes pueden identificar estilos de trabajo y cuestionar o identificarse con las formas de desarrollar su profesión.
c) *Análisis de los constructos personales y teorías implícitas*: el profesor reflexiona sobre su trabajo para modificar sus propios constructos.

d) *Análisis del pensamiento a través de las metáforas*: el uso de metáforas puede permitir identificar las concepciones que tiene el profesor sobre la enseñanza, el análisis de estas metáforas le permiten al profesor reflexionar sobre las concepciones que presenta en su clase.
e) *Análisis del conocimiento didáctico del contenido:* "El conocimiento didáctico del contenido permite conocer las formas de representación utilizadas por los profesores para comprender el contenido que enseñan, y para transformarlo en conocimiento enseñable". Dialogar alrededor de este conocimiento es enriquecedor para el desarrollo profesional del profesor ya que se pide al profesor justificar sus decisiones y pensar cómo transformar sus esquemas de enseñanza.

b) La formación basada en la reflexión sobre la práctica

Este proceso de reflexión se hace sobre la clase desarrollada y se requiere de la observación de otro colega.

c) La observación como estrategia reflexiva

En ella se analizan la actuación del profesor en el aula de clase para analizar los datos y características de la actuación del profesor en su clase como elemento de retroacción.

El modelo R-y-A integra dinámicamente los tres tipos de reflexión expuestos. Parada y Tristancho (2012) explican que el modelo teórico R-y-A fue propuesto por Parada (2011) buscando aportar herramientas teóricas y prácticas que le ayuden al profesor de matemáticas a analizar su quehacer docente, yendo permanentemente entre sus reflexiones y acciones. Promueve y centra los procesos de reflexión en los profesores antes, durante y después de la clase para favorecer el desarrollo de su pensamiento reflexivo, el cual se descompone en: i) pensamiento matemático escolar, ii) pensamiento pedagógico y didáctico del área, iii) pensamiento orquestal.

Fruto de la reflexión y de la búsqueda de instrumentos teóricos para analizar el conocimiento del profesor de matemáticas, Escudero, Flores-Medrano, Climent, Carillo, Montes, Aguilar & Rojas (2013) elaboraron el modelo analítico *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) que considera la especialización en el conocimiento del profesor como característica definitoria del mismo. De manera que intentan, según explican

Escudero, Flores & Carrillo (2012), alejarse de la idea del conocimiento matemático para la enseñanza y pensar en el conocimiento del profesor de matemáticas que sólo tiene sentido para él, considerando al conocimiento especializado del profesor de matemáticas como un cúmulo que contempla conocimientos de distintas naturalezas.

Aunque no son del interés de esta investigación, mencionamos que Marcelo (1994 citado por Grau, Gómez & Perandones, 2009) señala tres categorías adicionales de modelos de formación profesoral: *autónomos*, *formación a través de la investigación e innovación curricular y formación a través de cursos de información*; éstos procesos de desarrollo profesional se realizan de forma grupal y se desarrollan en una lapso determinado por lo que al transcurrir el tiempo el profesor podría abandonar rápidamente sus deseos por implementar aquello que ha aprendido. Ante este fenómeno, las comunidades de práctica representan un espacio permanente para la reflexión sobre las prácticas profesionales de los docentes y, por ende, para el mejoramiento de su desempeño en el aula.

1.2.2 Comunidades de práctica en formación de profesores de matemática.

En nuestro contexto nacional, González (2012) analizó cómo se moviliza el conocimiento profesional de los profesores que enseñan estadística desde una comunidad de práctica. La autora presenta como ideas centrales de su investigación la comunidad de práctica, el conocimiento del profesor y el modelo R-y-A.

Las comunidades de práctica son un contexto de estudio interesante para la comunidad de investigadores en educación matemática pues en ellas existen una valiosa riqueza de experiencias y evidencias de las situaciones a las cuales se enfrentan los profesores cuando su formación inicial es insuficiente pues, como lo señala González (2012), la velocidad a la que marchan, por ejemplo, los cambios tecnológicos hace que los profesores necesiten estar actualizados, de modo que la interacción con otros alivia mucho las exigencias constantes de los procesos educativos. Sin embargo, como lo mencionan Galvis & Leal (2007)

> no basta con suscribirse a una lista de interés, con ir a conferencias, foros o eventos relacionados con lo que nos interesa para nuestro crecimiento profesional. Hay necesidad de participar. Y para lograr que esto suceda, es necesario sentirse en comunidad. La duda es ¿qué significa esto de una comunidad de práctica profesional? ¿Cómo lograr que esto se dé?

Para Lave & Wenger (1991) el aprendizaje se puede construir en un trabajo colaborativo y por ello surge la teoría de las comunidades de práctica. Esta es una teoría sociocultural donde el aprendizaje se puede compartir. Los autores conceptualizan la actividad y el aprendizaje utilizando la idea de *comunidad de práctica* e indican que la participación en un sistema de prácticas profesionales es lo que la constituye. Describen que el aprendizaje se construye a través de las propias prácticas laborales, y que éste se debe analizar como parte integrante de las prácticas sociales. Los autores asumen el "***aprendizaje***" como la participación en las actividades de una comunidad que puede existir fuera o dentro de una institución; por tanto cuando hay ***participación, reflexión y acción***, en esa misma proporción habrá aprendizaje.

Wenger (1998) presenta una teoría del aprendizaje en las CoP, y parte del compromiso del profesor en la práctica social ya que es un proceso fundamental por el cual el profesor aprende. Conocer es cuestión de participar de manera activa en la consecución de objetivos comunes siendo, finalmente, el producto del aprendizaje el **significado**. El *significado* es considerado como el producto negociado del aprendizaje en el cual retomamos nuestras experiencias y nuestra vida como algo que tiene sentido y es valioso. Así mismo, el significado es visto como un proceso de participación a través de la *práctica* (siendo ésta un conjunto de recursos, sistemas de referencias, perspectivas históricas socialmente compartidas, así como actuaciones que permiten asumir un compromiso mutuo en la acción).

Llinares (2000) define la comunidad de práctica como un grupo social en el que sus miembros comparten una determinada actividad. Las discusiones entre profesores (que participan en CoP) sobre sus maneras de enseñar, apoyadas en algunos videoclips de sus clases, permiten una mayor comprensión de la experiencia profesional de los participantes (Nicol & Crespo, 2003). Es por ello que para nuestro trabajo de investigación el videoclip será una de las herramientas para tomar los datos de la negociación de significados presentes en la comunidad de práctica pues la reflexión y la participación de profesores, como lo afirma Turner (2008), conllevan a la capacidad de ser críticamente reflexivo lo cual es especialmente benéfico dentro de las comunidades de práctica, ya que apoya el aprendizaje en una dirección positiva dado que tanto profesores como "didactas" tienen conocimientos y experiencias que al relacionarse de manera colaborativa aportan en el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas (Jaworski, 2008).

Amado (2010) habla de la importancia de que profesores novatos y profesores experimentados compartan sus experiencias al interior de una comunidad de práctica. El profesor experimentado no es aquel que lleva más años en un curso determinado, lo entenderemos como el profesor que tiene una “experticia” ya sea en el campo curricular, en sus conocimientos de la materia o en el uso de tecnologías computacionales.

Wenger hace un llamado al precisar que no todo aquello llamado comunidad es una comunidad de práctica. Son entonces importantes y determinantes tres características (2001, pp. 2-3) en una CoP:

a) *El dominio*: puesto que una comunidad de práctica se enfoca sobre un dominio de interés compartido.

b) *La comunidad*: en la consecución de los intereses de su dominio, los miembros se comprometen en actividades y discusiones conjuntas, se ayudan uno al otro y comparten información. Así es como forman una comunidad alrededor de su dominio y construyen relaciones.

c) *La práctica*: una comunidad de práctica no es meramente una comunidad de interés [...] Los miembros de una comunidad de práctica desarrollan un repertorio compartido de recursos: experiencias, historias, herramientas, formas de manejar problemas recurrentes –en una práctica breve y compartida.

Escudero (2009, citado por González, 2012) nos recuerda que las teorías socioculturales reconocen el valor y la importancia de las comunidades de práctica ya que estas ofrecen un marco de referencia en donde se da el aprendizaje mediado por la participación y el establecimiento de vínculos sociales e intelectuales entre las personas en diversos contextos de actividad. Así mismo, Parada & Fiallo (2014) resaltan la necesidad de fortalecer proyectos curriculares en las instituciones formadoras de profesores para conformar comunidades de práctica como alternativa de aprendizaje de los maestros, en los cuales las reflexiones personales y colectivas pueden provocar “un efecto de palanca” elevando y fortaleciendo sus procesos de desarrollo profesional, así como su confianza y competencias docentes. Es precisamente dicha perspectiva la que se asume en la investigación que aquí reportamos.

1.2.3 Algunos referentes asociados a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo

En el ámbito nacional (Colombia), la dificultad en la comprensión de los conceptos del cálculo se ve reflejada en las universidades, donde se detecta un alto índice de reprobación de esta materia (específicamente en estudiantes de primer nivel). Ante esta afirmación, parece necesario que las instituciones de educación superior dispongan de medios que les permitan evaluar las competencias matemáticas con las que ingresan los estudiantes, para que a partir de allí se puedan construir alternativas de enseñanza acordes a sus presaberes.

A continuación mencionamos algunas investigaciones que reportan algunos acercamientos a las problemáticas de enseñanza y aprendizaje de las nociones del cálculo.

Empezaremos mencionado que Artigue (1995), quien afirma que las dificultades que tiene los estudiantes con los conocimientos previos que se requieren para comprender el cálculo, la conceptualización y la formalización de la noción de límite se reduce a procesos puramente algebraicos. También se refiere a las dificultades para identificar lo que es realmente una función; las dificultades para relacionar los diferentes registros semióticos que permiten representar y trabajar con funciones (Artigue, 1998).

Cantoral & Farfán (1998) proponen el planteamiento situaciones problema en las aulas y no estar limitados al aprendizaje de definiciones ya que

> el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional entre los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional, como el caso del pensamiento algebraico (p. 10)

Hitt (2003), identifica como un problema de aprendizaje el concepto de función ya que los profesores lo muestran como una expresión algebraica y esto limita la comprensión de los estudiantes sobre el objeto matemático. Por su parte, Cantoral & Farfán (1998) identifican la importancia del desarrollo del *pensamiento y lenguaje variacional* ya que para iniciar el estudio del cálculo se necesita un lenguaje que permita hacer transferencias entre las representaciones del lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico, no obstante la dificultad señalada por Hitt & Artigue en los procesos de enseñanza de los profesores de matemáticas hace difícil que los estudiantes conecten tales representaciones.

Al respecto, Tall (2009) enfatiza en las dificultades didácticas relativas a métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario, donde se aproximan a una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, que acaba siendo rutinaria.

Investigadores como Pino-Fan, Godino & Font (2014) han mostrado que la comprensión del concepto de derivada que tienen los futuros profesores es limitada y a veces errónea, aunque hallaron que los profesores evidencian buen desempeño cuando se usa la derivada en un punto en su acepción como pendiente de la recta tangente en contraste con las dificultades cuando tienen que usar la derivada como razón instantánea de cambio en el caso de una situación de cierta complejidad. Estos resultados nos servirán como antecedente importante a los hallazgos emergentes del estudio de casos de esta investigación.

Ante las diferentes dificultades alrededor del cálculo diferencial se reconoce que el uso de tecnologías digitales podría influir en la forma de desarrollar y comprender las ideas matemáticas. En el curso de precálculo de la UIS las tecnologías digitales son el recurso transversal con el cual se desarrolla el mismo. El uso de estas herramientas en la práctica matemática, ha cambiado no solamente los métodos que se emplean en la disciplina, sino también los temas y problemas que se investigan (Artigue, 2002 citado en Santos, 2007). No obstante, a las dificultades conceptuales del cálculo se suman las dificultades para transformar las TIC's en instrumentos que abonen positivamente a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo.

Trouche (2002) plantea que la aparición de artefactos computacionales en la clase de matemáticas supone un problema de carácter didáctico para transformar los artefactos en instrumentos benéficos para la actividad matemática y que estos recursos por si solos no van a solucionar los problemas en el aprendizaje. Por tanto, los profesores de matemáticas requieren una formación para comprender y saber utilizar los artefactos computacionales en el aula de clase pues su uso reducido a "recursos que resuelven y solucionan" problemas de aprendizaje sesgarían el hecho de que el uso de tecnologías digitales influye en la forma de desarrollar y comprender las ideas matemáticas. El uso de estas herramientas en la práctica matemática, ha cambiado no solamente los métodos que se emplean en la disciplina, sino también los temas y problemas que se investigan (Artigue, 2002 citado en Santos, 2007).

La utilización de herramientas computacionales permite que los estudiantes “manipulen la matemática”, de manera que la manejen por sus propiedades a diferencia de los bosquejos o figuras que se hacen con lápiz y papel. Los estudiantes pueden manipular parte de las configuraciones y ver los cambios o invariantes, donde la observación de los invariantes en una representación es fundamental, para desarrollar conjeturas y en el proceso de argumentación de dichas conjeturas por parte de los alumnos (Santos, 2001).

De modo que a través de las herramientas computacionales las nociones de cambio y variación pueden ser exploradas por los estudiantes desde la manipulación del movimiento pues, como dice Moreno-Armella (2004, refiriéndose a Balacheff & Kaput, 1996),

> su mayor impacto es de carácter epistemológico, refiriéndose con ello al hecho que las herramientas computacionales han generado un nuevo realismo matemático. En efecto, los objetos virtuales que aparecen sobre la pantalla se pueden manipular de tal forma que se genera una sensación de existencia casi material. […] Las herramientas computacionales han modificado profundamente la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático.

No obstante, pese a los aspectos positivos que sobre la implementación de las herramientas tecnologías han sido reportados, en la enseñanza del cálculo aún prevalece el paradigma tradicional centrado en el desarrollo de procedimientos cuestión que, como señalan Salinas & Alanís,

> deja mucho que desear en cuanto al aprendizaje: elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas son hechos que han sido reportados en los últimos treinta años con respecto a los cursos de Cálculo en el nivel medio superior y superior de educación (2009, p. 359).

Artigue (2003) señala una cuestión subyacente muy compleja a este problema: los métodos de enseñanza del cálculo continúan siendo muy tradicionales ya que se enfocan en prácticas algorítmicas y algebraicas lo cual afecta negativamente la comprensión sobre *acumulación* y *variación.*

1.3 Pregunta y objetivo de investigación.

Como mencionamos anteriormente, el contexto de estudio es la CoP que pretende aportar a la formación de los profesores que participan en el diseño e implementación curso de precálculo de la UIS cuyo objetivo es posibilitar el desarrollo del pensamiento variacional y de los procesos matemáticos asociados a la variación desde una metodología que intenta superar el paradigma tradicional ya que busca desarrollar los procesos de enseñanza y aprendizaje desde la resolución de problema e incorporando las tecnologías digitales como recurso directriz.

De manera tal que este estudio se interesa por saber *¿Qué significados negocian (procesos de interpretación y acción) los profesores de matemáticas que participan en una comunidad de práctica, constituida para diseñar e implementar un curso de precálculo dirigido a estudiantes de nuevo ingreso a la universidad?* Significados alrededor del Cálculo Diferencial inherentes en las actividades del curso de precálculo, el uso de las tecnologías digitales para coadyuvar en el desarrollo el pensamiento variacional de los estudiantes, y la orquestación de los recursos para suplir las exigencias de la resolución de problemas como metodología de enseñanza, tres elementos que se conjugan como alternativa preventiva del fenómeno de las dificultades en el aprendizaje del cálculo de la UIS. De tal suerte que logremos c*aracterizar los significados negociados (para concretar posibles aprendizajes) en una comunidad de práctica de educadores matemáticos que participan en un curso de precálculo, para estudiantes de nuevo ingreso a la universidad*.

A continuación se explican los elementos teóricos usados para el diseño metodológico de la investigación y para el análisis de información que nos permitirán alcanzar el objetivo propuesto.

2.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A continuación puntualizaremos en la conceptualización de las comunidades de práctica y en el modelo metodológico de Reflexión-y-Acción de Parada (2011), conceptos sobre los cuales se realiza el diseño metodológico de la investigación que aquí se reporta, así como para el análisis de los resultados.

2.1 COMUNIDADES DE PRÁCTICA (CoP)

Como mencionamos, para Wenger (1998) una CoP es un grupo de personas que comparten una preocupación, un conjunto de problemas o un interés común acerca de un tema, y que profundizan su conocimiento en esta área a través de una estructura social basada en la construcción colaborativa de conocimientos a beneficio de todos sus miembros.

Parada & Sacristán (2011) nos dicen que las CoP consiguen superar la jerarquía tradicional y mantienen una forma organizacional más duradera; son informales y se organizan ellas mismas, son equipos con estructura que establecen sus propias agendas y eligen a sus líderes, pero son mucho más flexibles por lo que tienen una habilidad que los equipos de trabajo convencionales no tienen y es la de poder establecer conexiones con otras personas fuera de la comunidad, esta agrupación no está sujeta a la duración de un proyecto, un programa de estudio o trabajo, o los cambios que puedan darse en la organización de una institución.

Wenger (1998) señala tres características importantes de una CoP:

1. *Compromiso mutuo*: en la CoP es importante el conocimiento parcial de cada uno de los individuos ya que tiene más valor el que cada uno comparta su propio conocimiento y reciba el de los otros, que de aquel que lo sabe todo.
2. *Empresa conjunta*: los individuos de la CoP tienen objetivos y necesidades comunes que pueden ser el resultado de una negociación de objetivos heterogéneos; los

objetivos vienen siendo el estímulo de la CoP y suponen una fuente de coordinación.

3. *Repertorio compartido*: el repertorio es un atributo que da consistencia a las CoP. Se refiere al conjunto de rutinas, palabras, gestos, instrumentos, maneras de hacer y hablar, símbolos, relatos, conceptos, etc., que la comunidad produce o adopta en el curso de su existencia.

Otro aspecto importante de las CoP es que estas se desarrollan a través del aprendizaje colaborativo el cual se da en sistema de interacciones cuidadosamente diseñadas que organizan e inducen la influencia recíproca entre los integrantes de un equipo. Según Parada (2011, p. 37) “el aprendizaje colaborativo se desarrolla a través de un proceso gradual en el que hay un compromiso mutuo de cada miembro con el aprendizaje de los demás, generando una interdependencia positiva que no implica competencia”.

Las CoP pueden ser presenciales o virtuales, requieren de un moderador encargado de animar y dinamizar el enriquecimiento mutuo y el intercambio de experiencias. Para Wenger (1998) las funciones del moderador son:

- ✓ Identificar temas importantes que deben tratarse en el ámbito de la comunidad de práctica,
- ✓ Planificar y facilitar las actividades de la comunidad de práctica,
- ✓ Conectar informalmente a los miembros de la CoP,
- ✓ Potenciar el desarrollo de los miembros de la CoP,
- ✓ Gestionar la frontera entre la CoP y la organización formal, como por ejemplo los equipos y otras unidades organizacionales,
- ✓ Ayudar a construir la práctica, incluyendo el conocimiento, base, la experiencia adquirida, las mejores prácticas, las herramientas y los métodos, y las actividades de aprendizaje, y
- ✓ Valorar las contribuciones de los miembros a la organización.

La CoP es un grupo de trabajo que motiva el desarrollo de dos aspectos en particular: la ***negociación de significados*** y la ***cosificación***.

2.1.1 Negociación de significados

Wenger (1998) entiende el significado como el producto de las experiencias vividas que influyen en la identidad y en las acciones individuales, mismas que se comparten cuando se posibilitan acciones colectivas retomando nuestras experiencias y nuestra vida como algo que tiene sentido y es valioso. La negociación de significados es el proceso mediante el cual las personas, al interactuar con los otros, permean sus conocimientos con relación a los demás, no se necesita llegar a un acuerdo y pueden ser enriquecidos los conocimientos propios.

Así pues, la negociación de significados puede entenderse como la acción de compartir el conocimiento propio con el fin de interpretarlo en grupo y volverlo a crear por lo que la negociación de significados se configura desde los procesos de interpretación y acción.

Este aspecto es preponderante para el estudio que aquí se presenta ya que en la CoP se tejen interacciones entre los profesores novatos y expertos de manera tal que los participantes comparten, discuten, negocian y ajustan sus recursos cognitivos asociados a la enseñanza de la matemática para generar un nuevo aprendizaje (responsabilidad individual) que se ajusten a las exigencias del curso de precálculo.

2.1.2 La cosificación (*reification*)

El proceso de cosificación se refiere a hacer, diseñar, representar, nombrar, codificar, describir, percibir, utilizar o adaptar diferentes recursos. Y estos no sólo son objetos concretos sino también reflejos de las prácticas y de los significados propios de los participantes de una comunidad.

Por ejemplo, hay profesores que tienen un conocimiento por experiencia y otros por formación, del cual surge una cosificación que es la diferencia entre el Grupo de Trabajo Educativo (GTE) y la CoP.

Para Wenger (1998), la participación y la cosificación no se pueden considerar por separado. Para posibilitar una, es necesario posibilitar la otra y las interacciones entre ellas dan lugar a una variedad de experiencias de significado.

2.2 MODELO DE REFLEXIÓN Y ACCIÓN (R-y-A)

El modelo de Reflexión-y-Acción en comunidades de práctica de Parada (2011) se justifica y sustenta en la integración de los siguientes elementos teóricos:

2.2.1 La participación

Participar en una CoP no es solo asistir a unas actividades planeadas (ya sea física o virtualmente). Según Parada (2011, citando a Lave & Wenger 1991) inicialmente los miembros de una comunidad participan periféricamente en las actividades pero en la medida que constituyen contactos con los otros, van accediendo a la cultura del grupo. El aprendizaje es el resultado de un cambio entre una participación periférica y una participación plena; es un cambio de identidad de novatos a expertos en un dominio específico.

En base a la teoría de las comunidades de práctica de Wenger (1998) se define la participación como un *proceso complejo que combina hacer, hablar, pensar, sentir y pertenecer*.

2.2.2 Reflexión

La autora del modelo parte de la premisa de que los educadores de matemáticas poseen experiencias valiosas y saberes conceptuales y que la reflexión sobre éstos es lo que moviliza la formación y el desarrollo profesoral. De modo tal que la reflexión es el procesos sobre el cual se fundamente el modelo.

2.2.3 La acción

En el modelo la reflexión se centra en la acción, de modo que ésta es el recurso fundamental sobre el cual se reflexiona; “acción entendida como la actuación del profesor de matemáticas en sus propias prácticas” (Parada, 2011, p. 33). La acción es un proceso donde el individuo, a través de la participación en la CoP, pone en práctica las decisiones que se toman dentro de ella. Es un proceso de doble vía de la coordinación de perspectivas, interpretaciones, acciones y contextos para que la acción tenga los efectos que se esperan.

Según lo anterior, el modelo R-y-A de Parada (2011) pretende ser una guía metodológica para impulsar y favorecer el desarrollo profesional de profesores que participan en CoP de educadores matemáticos enfatizando en que

> la formación de profesores debe apuntar al desarrollo de un pensamiento reflexivo, en el que se privilegien los saberes adquiridos por cada maestro en el trayecto de su práctica y en las maneras como usen dichos saberes para resolver los problemas cognitivos, didácticos, tecnológicos, sociales y de otro tipo, que suelen darse en el aula (Parada, 2013, p. 824).

No obstante, Parada reconoce la complejidad de la labor y por ello, como ya se ha mencionado, descompone el pensamiento reflexivo del profesor de matemáticas en tres componentes, a saber:

- ✓ *Pensamiento matemático escolar*. Comprende los conocimientos de la matemática escolar que el profesor emplea para desarrollar la actividad matemática del aula ya que más allá de ser un experto en el área el profesor requiere usar el conocimiento específico del área y del grado de escolaridad de sus estudiantes.
- ✓ *Pensamiento didáctico*. Según Parada (2013, p. 825), este pensamiento está presente cuando el profesor "se cuestiona sobre las diferentes maneras de acercar los contenidos matemáticos a los estudiantes, buscando las formas más útiles de representar los contenidos mediante analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, y demostraciones que permitan hacerla más comprensible a los alumnos".
- ✓ *Pensamiento orquestal*. El modelo R-y-A caracteriza este pensamiento alrededor de conducción de la clase y de las formas como el profesor usa los recursos para favorecer la actividad matemática que tiene prevista según las condiciones socioculturales que enmarquen su práctica.

El modelo R-y-A contempla los tres tipos de pensamiento en el proceso de reflexión la actividad matemática que los profesores promueven en clase; para la reflexión de los profesores se tiene en cuenta tres procesos de reflexión, los cuales se caracterizan con base en algunas ideas de Dewey (1989) y Schön (1992): *antes*, *durante* y *después* de la clase (más adelante ahondaremos en ellos).

2.3 ADAPTACIÓN DEL MODELO R-y-A

Como hemos mencionado, para efectos de esta investigación usaremos como referente conceptual una adaptación del modelo metodológico de Reflexión y Acción (R-y-A) de Parada (2011). En la Ilustración 2 se muestra un bosquejo del modelo teórico adaptado a los aspectos que puntualmente se abordarán en la investigación que aquí planteamos, el bosquejo tiene una lectura del centro al exterior.

Ilustración 2. Adaptación del modelo de Reflexión-y-Acción (R-y-A)

Fuente: Adaptación de Parada (2011)

El anillo exterior describe los procesos que se realizan al interior de la comunidad de práctica de los profesores del curso de precálculo de la UIS; en el centro del modelo está el triángulo pedagógico tomado de Saint-Onge (1997, citado por Parada & Pluvinage, 2014) en el que identifican las siguientes relaciones:

- *profesor – matemática escolar* como relación didáctica;
- *profesor – estudiante* como mediación;
- y la relación *estudiante – matemática escolar* como estudio.

Parada (2011) considera que las interacciones que se desarrollan al interior del triángulo pedagógico posibilitan la actividad matemática del estudiante durante la clase y del profesor antes, durante y después de ella. Al interior del triángulo, al igual que el modelo original, se encuentra la actividad matemática sobre la que se centran los esfuerzos de desarrollo profesional.

Las tres flechas que están alrededor de la espiral dan cuenta de los tres aspectos sobre los cuales proponemos desarrollar el pensamiento reflexivo de los profesores de matemáticas: *pensamiento matemático-variacional, pensamiento didáctico (cálculo diferencial) y pensamiento orquestal (Uso de SGD).* Estos tres componentes tienen igual importancia y sobre los tres se reflexiona *antes*, *durante* y *después* de la clase, por ello están representados en un recorrido en forma de espiral como procesos de participación-reflexión-acción ya que consideramos que "cada experiencia vivida deja saberes particulares que posibilitan procesos consecuentes más sólidos, y que se transforman en la optimización de la actividad matemática, tanto de los maestros, como de los estudiante" (Parada, 2011, p. 35).

Respecto a la adaptación del modelo a esta investigación, veamos puntualmente las adaptaciones realizadas:

- ✓ En esta investigación no hablamos de *pensamiento matemático* sino de *pensamiento matemático-variacional* porque las actividades diseñadas por la CoP están diseñadas para un curso de precálculo.
- ✓ El pensamiento orquestal está centrado en el *uso de ambientes de geometría dinámica* ya que las actividades para los estudiantes son diseñadas en GeoGebra que es un *software* matemático.
- ✓ El pensamiento didáctico está enfocado en el *cálculo diferencial* teniendo en cuenta que las situaciones que desarrollan los estudiantes en el curso de precálculo les permitirá adquirir conceptos del cálculo diferencial y los talleres tienen que ver con la variación y la acumulación, dos pilares del cálculo.

A continuación precisaremos en los elementos del modelo y en la delimitación realizada para esta investigación.

2.3.1 Actividad Matemática

Este elemento es el centro del modelo R-y-A y aquí es tomado fielmente de la construcción realizada por Parada (2011). La autora explica que la actividad matemática surge de "hacer matemáticas" que es un trabajo del pensamiento al construir conceptos para resolver problemas que están enmarcados en el triángulo pedagógico *profesor-estudiante-matemática escolar*. La autora explica también que la matemática como actividad de resolución de problemas tiene una cualidad fundamental: la matematización. Matematizar, según Treffers (1987 en Parada, 2011, p. 13), es organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificando los aspectos matemáticos relevantes, descubriendo regularidades, relaciones y estructuras.

El interés de analizar la actividad matemática del profesor es identificar las condiciones necesarias del pensamiento reflexivo de éste, para que logre conducir la apropiación por parte de los estudiantes.

2.3.2 Delimitación del pensamiento reflexivo

El modelo propone que los profesores centren sus reflexiones sobre la actividad matemática del aula en los siguientes aspectos:

2.3.2.1 Pensamiento Matemático-Variacional del profesor

El pensamiento, es una actividad global del sistema cognitivo que ocurre cuando nos enfrentamos a una tarea o problema, con un objetivo y con incertidumbre sobre la forma de realizarla. Parada & Pluvinage (2014) acentúan que el pensamiento matemático del profesor resulta cuando éste necesita hacer usar sus conocimientos sobre el contenido matemático escolar para desarrollar la práctica profesional (proponer tareas, seleccionar, usar y diseñar recursos, comunicarse en el aula, hacer adaptaciones curriculares, evaluar y profesionalizarse).

De este modo, es conveniente que el profesor domine de los contenidos matemáticos que enseña y además conozca los objetivos de aprendizaje correspondiente al grado en que labora para que pueda utilizarlos como guía para la enseñanza. En este aspecto, centrando la atención en lo referentes a las nociones propias del pensamiento variacional, necesitamos entonces definir lo que se entiende en el contexto de la investigación a ese respecto.

Así, la revisión de la literatura sobre el pensamiento variacional, no muestra unicidad de conceptos; por ello y dado que los alumnos que ingresan al curso de precálculo son los recién egresados del bachillerato y por eso asumimos la definición de los estándares curriculares de matemática (2006) del MEN nos indica

> El desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de un mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de una representación. (MEN, 2006, p. 66).

Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la educación básica primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la educación media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (MEN, 2003).

Lo que se espera desde el pensamiento reflexivo del profesor de precálculo es que él cuente con un dominio formal de los objetos matemáticos del cálculo diferencial, el cual tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (MEN, 2006, p. 66). Así también implica la comprensión de los procesos matemáticos (asociados a este pensamiento) y dicha perspectiva da sustento a las actividades del curso de precálculo (curso experimental de la investigación) y se encuentran en proceso de conceptualización de los investigadores del grupo Edumat-UIS, quienes hasta el momento los exponen así:

a) Proceso de comunicación. Aprender puede describirse como: adquirir o modificar habilidades o conocimientos como resultado del estudio, la experiencia, el razonamiento y la observación, lo que implica comunicarse consigo mismo y con los demás. A su vez, como lo menciona Rojas, Suárez & Parada (2014), la comunicación requiere de habilidades para interpretar (requiere que el estudiante tenga la capacidad de comprender y dar sentido a la estructura de un problema expresado en un lenguaje verbal), así como para explicar, justificar y argumentar, las cuales se pueden promover cuando se solicita la explicación de un procedimiento y el porqué de la respuesta en esta actividad. Así mismo cuando se le pide escribir y exponer la solución a sus compañeros y al profesor describiendo el objeto de conocimiento con palabras claras o ejemplos. Cuando los estudiantes intercambian sus ideas y las someten a críticas reflexivas, agudizan su habilidad para criticar y seguir los argumentos de otros. Así mismo, desarrollan una comunicación más clara y coherente de sus comprensiones utilizando explicaciones verbales, notaciones y representaciones matemáticas apropiadas para explicar sus ideas sobre cambio, variación, interdependencia, aproximación y tendencia.

b) Proceso de representación. La modelación y la simulación de un problema de variación y cambio en un medio digital, permite: visualizar los variantes e invariantes del problema; ver qué variables y relaciones entre variables son importantes; ver atributos y el comportamiento tendencial de las gráficas; realizar aproximaciones a los infinitesimales y al infinito; facilita la conexión entre las representaciones gráficas bidimensionales y tridimensionales, algebraicas, numéricas y geométricas, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, geométricos y analíticos, obtener resultados y verificar que tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales del problema. Por ello Rueda, Parada & Fiallo (2015) plantea que las siguientes habilidades del proceso de representación: i) Construir representaciones de los objetos matemáticos, ii) Interpretar diferentes representaciones de los objetos matemáticos, iii) Reconocer, relacionar y conectar las diferentes representaciones de un mismo objeto matemático a través de sus invariantes.

c) Proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (ECEP). Para Barajas (2015) este procese implica la capacidad del estudiante para transformar procedimientos fijando su atención en las ideas centrales del cálculo diferencial (cambio y variación) y estableciendo relaciones entre ejes temáticos (patrones y regularidades;

procesos algebraicos, y análisis de funciones) para efectuar nuevos procedimientos específicos que respondan al fenómeno variacional que subyacen en el problema. La autora como habilidades de este proceso las que siguen: i) **Habilidades de tipo aritmético**. Estas requieren del dominio correcto del sistema de numeración decimal y de las cuatro operaciones básicas. Entre los más destacados procedimientos podemos señalar la lectura y escritura de números, el cálculo mental con dígitos y algunos números de dos cifras, el cálculo con lápiz y papel y el empleo de la calculadora; ii) **Habilidades de tipo métrico.** Estas tienen que ver con el empleo correcto de los aparatos de medida más comunes de las magnitudes longitud, tiempo, amplitud, capacidad, peso y superficie. También se incluye aquí el dominio del sistema métrico decimal; iii) **Habilidades de tipo geométrico.** Capacidad para construir un modelo de un concepto geométrico, para manipularlo o para hacer una representación del mismo en el plano. También se incluye el dominio y empleo correcto de determinados convenios para expresar relaciones entre conceptos geométricos; iv) **Habilidades de tipo analítico.** Tienen que ver específicamente con "álgebra", "funciones" y "cálculo diferencial e integral". Algunos ejemplos de este tipo de procedimientos son: modelar situaciones de cambio a través de las funciones, las gráficas y las tablas; traducir de una a otra de las distintas representaciones de una función; resolver ecuaciones; comprender y hallar las tasas de inflación, los intereses en un préstamo, etc.

d) Proceso de razonamiento. Consideramos aquí la demostración desde una perspectiva amplia, como el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para *explicar*, *verificar*, *justificar* o *validar* con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática. Esta caracterización de demostración permite considerar varios tipos de demostración, producto de un razonamiento intuitivo, inductivo o empírico, deductivo o abductivo (Fiallo, 2010). La habilidad de validación se refiere a la fuerza o firmeza que deben tener los argumentos para asegurar la validez de las conjeturas planteadas. Para favorecer la construcción de demostraciones en las actividades planteadas, siempre se invita al estudiante a explicar y justificar sus conclusiones después del trabajo con lápiz y papel o con el software interactivo.

También es importante que el profesor de matemáticas tenga conocimiento sobre este tipo de pensamiento para que logre: i) proponer tareas; ii) seleccionar, usar y diseñar recursos; iii) comunicarse en el aula; iv) hacer adaptaciones curriculares; v) evaluar; vi) colaborar; y vii) profesionalizarse (Parada, 2011, p. 55) alrededor de la variación y el cambio como ideas centrales del cálculo diferencial, y así superar el tratamiento algebraico que han señalado autores como Artigue (1998) y Hitt (1998) que conlleva a dificultades en la comprensión de conceptos.

2.3.2.2 Pensamiento Didáctico asociado al Cálculo Diferencial

El pensamiento didáctico del profesor se da cuando se cuestiona sobre las estrategias para llevar los conocimientos matemáticos a los estudiantes, buscando los medios para que el estudiante comprenda de la mejor manera posible las situaciones problema de la matemática dando ejemplos y haciendo comparaciones entre los presaberes y las nuevas situaciones. Para ello es importante que el profesor tenga, para el caso de nuestra investigación, la suficiente fundamentación del pensamiento variacional para que logre nutrir su pensamiento didáctico sobre el Cálculo Diferencial al momento de asesorar a sus estudiantes y movilizar de varias formas las dificultades o preguntas de sus estudiantes en el aula.

Desde la perspectiva del grupo de investigación de Edumat-UIS, en el que se encuentra inscrito el contexto de la investigación que aquí se reporta; el pensamiento didáctico del profesor que enseña Cálculo necesita comprender los procesos matemáticos que posibilitan el desarrollo del pensamiento variacional para que puedan gestionar desde las actividad matemática que promueven en el aula el desarrollo de dichos procesos.

Las habilidades que el profesor de matemáticas tenga en su pensamiento didáctico le permitirán recrear de diversas formas el conocimiento que posee alrededor del cálculo diferencial, en particular de las ideas de cambio y variación para de esta manera favorecer la construcción del conocimiento. Este pensamiento está presente durante la práctica docente y en cada uno de los tres procesos de reflexión ya que permite tomar conciencia de las dimensiones de la acción educativa tanto en la planeación de la clase, en su desarrollo y en la posterior retroacción de lo acontecido en el aula.

2.3.2.3 Pensamiento Orquestal asociado a Ambientes de Geometría Dinámica (SGD)

El pensamiento orquestal gira alrededor de los recursos. Como lo mencionan Tristancho y Parada (2012), son diversos los recursos didácticos que pueden seleccionar o usar los docentes para promover actividad matemática en el aula; como pueden ser: libros de texto, lápiz, papel, calculadora, material manipulable, videos, software, internet, entre otras recursos de tecnología digital (TD). Un recurso adicional que consideramos importante desde el contexto de la investigación, es el uso o apoyo del recurso humano dado que en la metodología del curso de precálculo se propone el acompañamiento de un auxiliar docente. Los auxiliares son estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la institución, cuyas funciones son:

- Apoyar al profesor en el aula de clase en la orientación de actividades de cada sesión;
- Acompañar y guiar a los estudiantes en cuanto al diseño y desarrollo de estrategias para la resolución de los problemas propuestos;
- Atender dudas o dificultades por parte de los estudiantes en cuanto al uso del software;
- Apoyar al profesor en el proceso de reflexión-en-la acción atendiendo las situaciones emergentes de las clases

De manera semejante, Parada (2011) señala que también son recursos los problemas, preguntas, hojas de trabajo, materiales didácticos (manipulables y observables) y todas aquellas formas de comunicación que use el profesor para acercar los contenidos matemáticos a sus estudiantes y promover la actividad matemática en el aula.

Como se ha mencionado, en el curso de precálculo se fomentan los procesos de enseñanza y aprendizaje con el uso de la tecnología digital (en particular con GeoGebra). Este recurso se emplea durante toda la sesión de clase además del lápiz, el papel y el taller que acompaña cada clase. Estos recursos se fusionan para favorecer la metodología de resolución de problemas a través de la participación activa de los estudiantes.

De modo que para caracterizar el pensamiento orquestal de los profesores que participan en la CoP del curso de precálculo se analizará cómo ellos usan los recursos físicos y humanos con los que cuentan en el aula de clase para gestionar la construcción del conocimiento teniendo en cuenta que, como menciona Llinares (2000), los instrumentos seleccionados y la manera en que se utilizan influyen en el tipo de comprensión matemática y creencias de los estudiantes. El análisis de la práctica profesional de los profesores de matemáticas implica enfocarse, no sólo en el uso de los recursos, sino también en cómo los usan y para qué propósito.

2.3.3 Procesos de Reflexión

Para Dewey (1989) la reflexión es un proceso de resolución de conflictos, de dudas, a la vez que provee una oportunidad para que el profesor revise su actuación. La reflexión de los profesores comienza cuando, en la experiencia, se encuentran dificultades y surgen problemas que no pueden resolverse de inmediato. El autor describe tres procesos de reflexión, mismos que son recuperados en el modelo R-y-A y que serán tomados en esta investigación:

a) reflexión-*para*-la acción: se da cuando el profesor planifica la actividad matemática esperada por parte de los estudiantes, tiene en cuenta los recursos que usará y la forma como desarrollará su trabajo en el aula de clase;

b) reflexión-*en*-la acción: se hace presente en la clase y se desarrolla en los intercambios entre el profesor y los estudiantes en torno al contenido matemático de estudio y;

c) reflexión-*sobre*-la acción: se da después de la clase cuando el profesor evalúa la actividad matemática que había planeado comparada con la actividad matemática que logró, y se inicia otra vuelta en el espiral de modo que al realizar los tres procesos de reflexión, nuevamente se inicia el desarrollo de los procesos de reflexión en forma continua.

Para concretar los procesos de reflexión se considera el uso de unas herramientas que posibilitan en los profesores la reflexión sobre su práctica docente. A continuación describiremos las herramientas que usaremos y que son contempladas en el modelo R-y-A.

2.3.3.1 Herramientas para apoyar los procesos de reflexión

Estas herramientas son como unos lentes que pueden permitir al profesor "verse en su accionar" para así hacer un análisis crítico y objetivo de su práctica. A continuación presentamos estas herramientas:

a) Rutas cognitivas. Una ruta cognitiva es una estructura conceptual del contenido matemático procesado durante la clase: toma en cuenta los conceptos matemáticos, los tipos de herramientas usadas (para representar o calcular) y los tipos de tareas dadas a los estudiantes. "Las rutas cognitivas en el estudio se usan como herramienta de análisis para el investigador y de reflexión para el profesor ya que permiten organizar los objetivos de la clase con respecto a los procesos matemáticos esperados" (Parada & Pluvinage, 2014, p. 90); también se emplean para esbozar la actividad matemática y los logros que finalmente se logran alcanzar en la clase.

b) Eventos de la clase. Dewey (1989) menciona que en el momento en que se empieza a reflexionar, necesariamente se empieza a observar, a fin de tomar nota de las condiciones. Algunas de estas observaciones se realizan mediante el uso directo de los sentidos; otras, a través del recuerdo de observaciones previas, propias o ajenas. Es por esto que se considera de gran importancia que los profesores se observen a través de videos de las actividades realizadas. De manera tal que en este estudio las clases de la profesora son videogradas e incluso las reuniones de la CoP.

c) Entrevistas dirigidas. Al hacer la revisión de los videos, se mostrarán episodios relevantes del desarrollo de la clase y se preguntará al profesor sobre su planteamiento al hacer una pregunta al estudiante o sobre las decisiones tomadas en el desarrollo de la clase. Estas entrevistas dirigidas buscan caracterizar los significados en el pensamiento matemático-variacional, el pensamiento didáctico y el pensamiento orquestal del desarrollo de las actividades matemáticas.

d) Estudio Comparativo. Se hace una comparación entre la ruta cognitiva de la clase planeada y clase realizada; para este estudio es fundamental el análisis de los videos de clase de los casos de estudio y los videos de la CoP para identificar los cambios resultantes de las rutas cognitivas y las consecuencias de estos cambios. Finalmente, al hacer este análisis tendremos en cuenta la entrevista dirigida para que el profesor haga sus propias reflexiones sobre las situaciones presentadas.

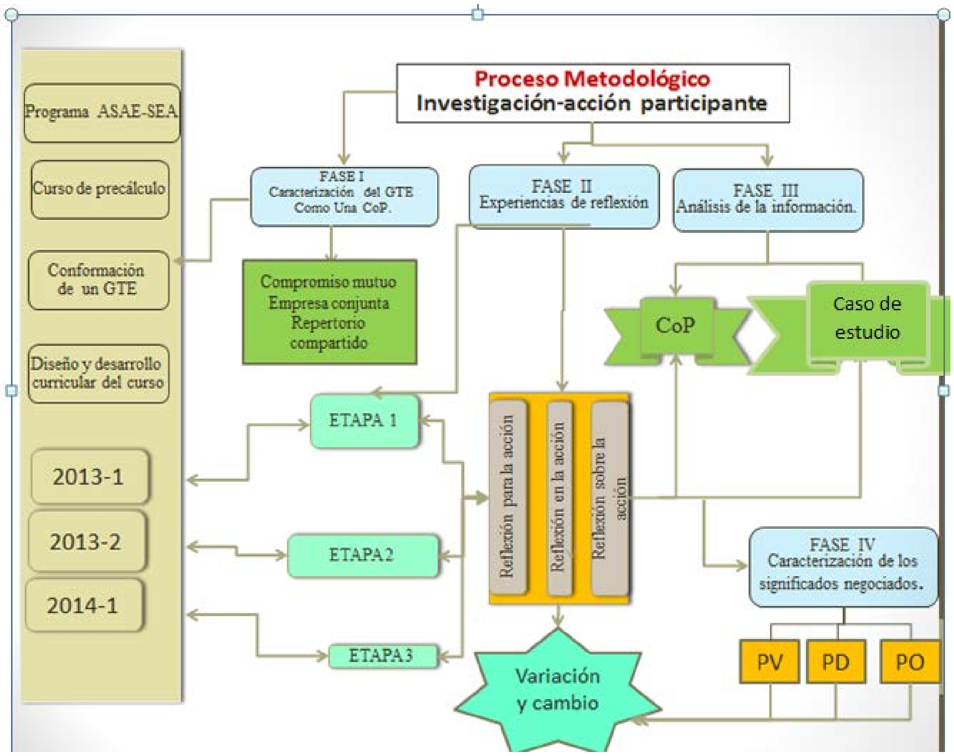
Diremos entonces que para caracterizar los significados de la CoP emplearemos el modelo R-y-A, para lo cual usaremos la metodología de estudio de casos la cual nos permitirá ampliar nuestro conocimiento de las dinámicas presentes en ésta alrededor del pensamiento reflexivo de sus participantes. A continuación presentaremos el proceso metodológico que posibilitó alcanzar el objetivo de esta investigación.

3. DISEÑO METODOLÓGICO.

La metodología que sigue este trabajo es de una investigación-acción participante, y la entenderemos como la investigación donde se combinan dos procesos, *el de conocer y el de actuar* (refiriéndonos con ellos a los procesos de reflexión y acción que posibilitan la negociación de significados de la comunidad de práctica conformada por los profesores del curso de precálculo) y en donde, además, quien investiga es participante de la CoP. Esto permite recuperar y sistematizar datos que serán valiosos para la caracterización que pretende este estudio.

La estructura general de la metodología se puede observar en la Ilustración 3

Ilustración 3. Estructura de la metodología de la investigación



La investigación se realizó en cuatro fases:

1. Fase I. Caracterización del Grupo de Trabajo Educativo (GTE) como una CoP.
2. Fase II. Experiencias de reflexión.
3. Fase III. Análisis de la información.
4. Fase IV. Caracterización de los significados negociados.

Como se aprecia en el costado izquierdo la anterior ilustración, el curso de precálculo se ha desarrollado a la fecha en cuatro oportunidades (los dos periodos académicos del 2013: 2013-1 y 2013-2; y los dos del 2014: 2014-1 y 2014-2). Para efectos de esta investigación se tomaron datos de los períodos 2013-1, 2013-2 y 2014-1.

A continuación, describiremos en detalle cada fase y los resultados de algunas de ellas.

3.1 FASE I. CARACTERIZACIÓN DEL GTE COMO UNA CoP

En esta fase se analizó cómo el GTE del curso de precálculo conformado inicialmente en el primer semestre académico del 2013 se caracterizaría como una CoP en términos de la teoría de Wenger (1998).

En la UIS, desde la Escuela de Matemáticas, se ofreció desde 2009 hasta 2012 el curso de precálculo para estudiantes de décimo y undécimo grado en cuyo proyecto de vida estuviera el ingresar a la educación superior. Barajas nos dice que “el curso se desarrolló con una metodología tradicional pues el profesor exponía en su cátedra definiciones, propiedades y teoremas; planteaba ejercicios (incluso demostraciones), dejaba tareas y se realizaban las evaluaciones de rigor” (2015, pág. 34), curso en el cual predominaban los conceptos sobre sistemas numéricos, geometría analítica, funciones y límites.

En 2013 por las reflexiones de los investigadores participantes en la CoP alrededor de la estructura del curso de precálculo que se venía ofreciendo, se establece cambios que atienden a las perspectivas actuales de la didáctica del Cálculo, ellos son:

- ✓ Cambió de paradigma. Fiallo & Parada (2014) señalan que el propósito del curso es coadyuvar en el desarrollo del pensamiento matemático-variacional, orientando el trabajo en el aula como un proceso activo de resolución de problemas y con la mediación de artefactos digitales. Dicho trabajo diseñado alrededor de las dos ideas centrales del Cálculo: el cambio y la variación.

- ✓ El programa ya no estaría adscrito a la Escuela de Matemáticas sino que se integra al Sistema de Apoyo a la Excelencia Académica, esto con el propósito de atender, desde una visión preventiva, a estudiantes de nuevo ingreso de la UIS.

De manera que la conformación del GTE emerge como exigencia del diseño de un curso de precálculo *diferente*. Para ello, uno de los investigadores del grupo de Didáctica del Cálculo convocó a 10 profesores para presentarles el proyecto del curso; objetivo, metodología y recursos didácticos. Queremos resaltar aquí la característica que viene a permitir que el GTE se vaya transformando en una CoP; esto consolidando una de las alternativas preventivas que se habían presentado en Parada (2012).

Otra decisión tomada que nos parece importante es que el perfil de los profesores convocados fue abierto en cuanto a su nivel de formación y experticia: cinco (5) investigadores en formación los cuales pertenecen a la Maestría en Educación Matemática de la UIS incluyendo a quien reporta el presente estudio; cinco (5) profesores cátedra de los curso de cálculo de la UIS, uno de ellos con maestría y aspirante a doctorado, dos profesoras con más de 10 años como docente de cálculo y dos profesores con menos de dos años de experiencia como docente de cálculo.

De igual forma, para el desarrollo del curso, se convocaron a diez (10) profesores en formación quienes son estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Institución. Estos estudiantes fueron elegidos bajo dos criterios:

1. Haber participado en el programa de tutorías de ASAE (quienes, a su vez, han aprobado las asignaturas de las líneas de cálculo y de didácticas del pensum).
2. Haber sido un tutor destacado de ASAE.

Es importante notar que los auxiliares no fueron convocados a las reuniones del GTE ni participaron en el diseño del material didáctico.

3.1.1 Caracterización de la CoP de educadores matemáticos UIS

Según Wenger (1998), los participantes de una comunidad de práctica se distinguen por tener un objetivo común que los une.

La CoP del curso de precálculo de la UIS es una comunidad con características diferenciadoras ya que:

- ✓ Los integrantes tiene una característica común: todos están involucrados en procesos de educación matemática, por esto la comunidad es una CoP de educadores matemáticos. Por ende, los integrantes son investigadores, investigadores en formación, profesores de matemáticas, y profesores en formación.
- ✓ La CoP de educadores matemáticos de la UIS se consolida para el diseño curricular y el desarrollo de un curso de precálculo.

Esta caracterización se logra ya que los profesores tienen el *compromiso mutuo* de diseñar y desarrollar el curso de precálculo, este grupo de profesores tiene una *empresa conjunta* que consiste en mejorar profesionalmente en sus procesos didácticos al igual que negociar y compartir su *repertorio* (saberes del pensamiento matemático-variacional, saberes sobre el uso de ambientes tecnológicos y saberes de su pensamiento didáctico) todas estas características forman parte de los elementos de las CoP.

La experticia de los profesores del GTE es diversa por lo que hay docentes con poca experiencia docente en contraste con otros que tienen 16 y hasta 32 años de experiencia. En las cuatro versiones del curso, el promedio de mujeres y de profesores varones ha sido seis (ver Tabla 1); cinco profesores (3 mujeres y dos hombres) han participado en las tres primeras etapas del curso.

Tabla 1. Distribución de género de los profesores del GTE del curso de precálculo

Etapa / Género	2013-1	2013-2	2014-1	2014-2
Hombre	4	5	9	5
Mujer	6	5	9	5
TOTAL	10	10	18	10

Desde que el grupo se reconoce como CoP se reconoce la siguiente estructura entre sus integrantes:

- ✓ Un moderador, quien es investigador en educación matemática.
- ✓ Profesores, quienes lideran los procesos en aula y diseñan materiales.
- ✓ Auxiliares, quienes apoyan el trabajo de los profesores en el aula.

Como se infiere del apartado anterior, el nivel profesional de los participantes varía entre licenciados, especialistas, magísteres y doctores de la disciplina de la educación matemática.

Al revisar los datos, notamos que la evolución de la CoP permite hablar de profesores y auxiliares *nuevos*. Es decir, son nuevos integrantes que la CoP adopta para fortalecer el desarrollo del curso. Esta apertura a nuevos profesores permite que se movilicen experiencias y conocimientos alrededor de los recursos y la metodología del curso de precálculo para promover aprendizajes individuales desde la negociación de significados, lo cual se convierte en el alimento de la caracterización que pretende este estudio.

También observamos un valor agregado importante en cuanto a formación profesional: los integrantes “novatos” tienen altas posibilidades de cambiar su rol a “expertos” en la metodología del curso de precálculo, lo que conduce a que en cada nuevo curso los participantes en la periferia sean los nuevos.

La CoP ha establecido un rutero para el diseño y el desarrollo del curso:

1. El curso se ejecuta exactamente antes de iniciar semestre académico (salvo que algunas condiciones institucionales forjen una modificación de calendario).
2. El curso se desarrolla en 15 sesiones de trabajo de cuatro horas. Su duración es de 3 semanas (si no hay novedades en la institución).
3. La CoP es convocada a sesiones presenciales por lo menos un mes antes del inicio del curso para el primer encuentro y hasta dos semanas después del cierre del mismo, con el fin de orientar los procesos de reflexión-(para, en y sobre)-la acción.
4. El Moderador revisa y actualiza el material didáctico durante el receso de los encuentros de la CoP; en la primera reunión él socializa las modificaciones, en caso de existir.
5. Los auxiliares son convocados a algunas reuniones de la CoP; con el fin de que comprendan las maneras como se esperan sus apoyos en el desarrollo del curso.

A través de la reconstrucción de las experiencias de reflexión de la CoP veremos cómo las características de la comunidad permean los procesos de interpretación y acción de los profesores que participan en la comunidad. En la CoP se da la oportunidad a los auxiliares, para que una vez se hayan graduado de Licenciados en matemáticas, lleguen a ser profesores de la CoP, esto se evidenció con dos profesores en la cuarta vez que se hizo el curso, siendo la CoP el espacio donde inicialmente se formaron y luego llegaron como profesores expertos a dirigir un curso de precálculo.

3.2. FASE II. EXPERIENCIAS DE REFLEXIÓN

En esta fase identificamos los procesos de reflexión logrados en la CoP para los semestres 2013-1, 2013-2 y 2014-1. Para ello fue necesario reconstruir la evolución de la CoP esto a través de entrevistas a los integrantes y recabando en los registros escritos y digitales existentes. Esto con el propósito de aproximarnos, desde los tiempos de reflexión de acuerdo al modelo R-y-A de Parada (2011) descrito en el capítulo 2, a los procesos de interpretación y acción emergentes en cada uno de los tres semestres.

Los procesos de interpretación y acción que reportamos en el siguiente capítulo evidencian el compromiso de los integrantes de la CoP de educadores de matemáticas del curso de precálculo para consolidar el diseño curricular del mismo, característica que moviliza los procesos de reflexión en torno a la interpretación de las necesidades del curso y de sus sujetos para ejecutar acciones que favorezcan el diseño.

Queremos señalar que durante el proceso de reconstrucción de los significados negociados por la CoP en las versiones 2013-1, 2013-2 y 2014-1 fue tomando protagonismo la transformación de un integrante quien inició como auxiliar y se convirtió en profesor del curso y líder en la CoP.

3.3 FASE III. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Los datos tomados para identificar los procesos de reflexión de la CoP y del caso de estudio corresponden a las filmaciones de las reuniones generales de la CoP del semestre 2014-1. En este semestre se contó con la participación de una profesora a quien llamaremos “Lucero” como caso de estudio, es de destacar que ella ha participado en las tres primeras versiones del curso.

De las reflexiones de las dos primeras versiones del curso se tienen como evidencia las notas de las intervenciones en las reuniones de la CoP. En 2014-1 se tomaron videos de sus clases, contando con el permiso de la profesora; de ellos se hace la investigación que aquí reportamos como explico a continuación.

Elegido el taller que serviría para aproximarnos al pensamiento reflexivo de la profesora estudio de caso, usando los videos, se identificaron los episodios de la clase que nos aportaran sobre su pensamiento matemático-variacional, didáctico y orquestal. Teniendo de referentes los episodios seleccionados, identificaríamos los procesos de negociación de la profesora, como producto de su participación en esta investigación, dichos hallazgos serían enriquecidos con lo que la literatura ya ha reportado.

Para apoyar los procesos de reflexión se realizaron entrevistas individuales; en esta entrevista se le mostraron los episodios seleccionados a la profesora para que reflexionara sobre la situación de tal suerte que pudiéramos aproximarnos a sus procesos de reflexión en los tres elementos del marco conceptual ya señalado.

Para hacer el análisis cualitativo de los procesos de reflexión de la profesora e identificar la negociación de significados alrededor del pensamiento matemático-variacional, el pensamiento didáctico y el pensamiento orquestal. Este estudio consideró las herramientas que se proponen desde el modelo R-y-A, como son:

a) *Las rutas cognitivas* de las sesiones planeadas por la CoP, y las rutas cognitivas que corresponden a la clase realizada por la profesora para evidenciar las modificaciones que sufre la actividad planeada y la actividad hecha en el salón, y comprender si la situación planeada y la situación vivida alcanzaron los objetivos de aprendizaje propuesto.
b) *Entrevistas dirigidas*: de acuerdo a los episodios seleccionados de las clases y con el uso de las rutas cognitivas, se buscarían aquellas situaciones presentes en el aula de clase que modificaron los objetivos de aprendizaje.
c) *Estudio comparativo de situaciones de aula*: después de ver las filmaciones de las clases, y teniendo en cuenta el modelo de R-y-A adaptado, haríamos el análisis de las situaciones presentes para comprender los procesos de reflexión del docente.

3.4 FASE IV. CARACTERIZACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS NEGOCIADOS

Finalmente, del proceso metodológico expuesto se espera presentar evidencias del proceso que permitan responder a los objetivos de investigación, que específicamente reportaremos así:

- Descripción de los productos cosificados por la CoP como resultado de la negociación de los significados posibilitados en ella.
- Caracterización de los procesos de interpretación y acción de un caso de estudio, la profesora Lucero.

En el siguiente capítulo presentaremos los significados negociados de la CoP en las versiones que hemos mencionado a través de este capítulo.

4. SIGNIFICADOS NEGOCIADOS DE LA CoP.

Teniendo en cuenta que esta investigación busca caracterizar los significados negociados (para concretar posibles aprendizajes) en una comunidad de práctica de educadores matemáticos que participan en un curso de precálculo, para estudiantes de nuevo ingreso a la universidad, en este capítulo presentaremos las negociaciones realizadas por la comunidad reconstruyéndolas desde las reflexiones-(para-en-sobre)-la acción, de tal suerte que logremos caracterizar los significados negociados en los tres componentes del pensamiento reflexivo.

4.1 RECONSTRUCCIÓN DE LAS NEGOCIACIONES DE LA CoP

A continuación mostraremos cómo fueron los procesos de reflexión-y-acción de la CoP en las etapas de recolección de datos (2013-1, 2013-2 y 2014-1) en tanto a la negociación de significados alrededor del pensamiento matemático-variacional, orquestal y didáctico.

4.1.1 Etapa 1. Primera versión del curso.

Desde sus inicios la CoP centró sus reflexiones en la pertinencia del diseño curricular de un curso de precálculo con características diferenciadas a las de los tradicionales (en los que se hace repaso de lo que se ha visto o no en el bachillerato). En ese sentido Fiallo & Parada (2014) describen las características del curso de precálculo de la UIS tiene como objetivo posibilitar actividades que favorezcan la comprensión de los objetos matemáticos de estudio y el desarrollo de procesos matemáticos (razonamiento, resolución y el planteamiento de problemas, comunicación, modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos) tal como lo describen los lineamientos curriculares de Colombia (MEN, 1998), Es así como todas las reflexiones de la comunidad en la primera versión del curso se centran en entender cómo pude contribuirse al desarrollo del pensamiento variacional, cuál es papel del profesor como mediador y qué papel juega la tecnología en la comprensión de los objetos matemáticos del Cálculo.

4.1.1.1 Reflexión-*para*-la acción: Diseño de las actividades.

Una de las primeras cuestiones sobre las cuales reflexionó la CoP fue la metodología que orientaría los procesos de enseñanza y aprendizaje del curso. Para realizar una intervención didáctica que superara la metodología tradicional en la cual el estudiante es un individuo pasivo en la clase y el profesor es un expositor de temas y se favorece la enseñanza enfocada en procedimientos algorítmicos, la CoP consideró que todas las actividades del curso estarían permeadas explícitamente por los procesos matemáticos señalados por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM).

Para favorecer la comprensión de éstos, el moderador consideró realizar la lectura del documento *Principios y Estándares para la Educación Matemática* del NCTM (2003). De modo tal que con la lectura del documento señalado, los profesores reflexionaron sobre su pensamiento orquestal en tanto que para desarrollar los procesos matemáticos se requiere que el estudiante sea el protagonista en la actividad matemática planteada y no que el profesor sea quien dé soluciones ni sea expositor en el tablero como ocurre con la metodología tradicional de clase; esto se pudo evidenciar en uno de los encuentros de la comunidad los cuales se encuentran transcritos en el Apéndice 1 [5].

> Moderador: Esto ha sido pensado desde un principio como un curso diferente a los tradicionales, donde generalmente lo que se hace es un repaso de temas que el estudiante no aprendió durante la secundaria y el bachillerato. El objetivo primordial del curso pre cálculo es desarrollar habilidad del pensamiento variacional, con una metodología que requiere el uso de un software de matemática interactivo, en este caso GeoGebra, que requiere pues un manejo de parte del profesor y una metodología de resolución de problemas donde se supone que el estudiante está en el aula, en un ambiente casi matemático, enfrentándose a un problema y tratando de resolver ese problema. Y adicionalmente en cada una de las actividades, teniendo en cuenta los Lineamientos que se dan desde el Ministerio de Educación Nacional, y a nivel internacional los Principios y Estándares para la Educación Matemática dado por los profesores de matemática de Estados Unidos, que comúnmente conocemos como el NCTM. [1]- (Episodio 1).

El estudio y las reflexiones de los estándares del NCTM condujeron a los profesores a negociar aspectos importantes de su pensamiento didáctico como:

[5] Los episodios recuperados como evidencia de los procesos de reflexión-y-acción posibilitados en la comunidad de práctica se citarán a lo largo del texto, así (episodio No) y en la cita textual se agregará el número de línea de la transcripción correspondiente. El Apéndice 1 contiene las trascripciones de los procesos de reflexión en la comunidad, los cuales se citan en el capítulo 4. El Apéndice 2 corresponde a las trascripciones de los procesos de reflexión de la profesora Lucero, los cuales se citan en el capítulo 5.

- Insistir en que el estudiante resuelva las actividades propuestas y luego se permita la socialización como lo paute el taller mismo.
- El profesor debe movilizarse constantemente entre los estudiantes para observar dificultades y recolectar diferentes estrategias de trabajo que nutran la socialización.
- El desarrollo del taller no debe centrarse solo en el trabajo acertado de los estudiantes buenos; se deben aprovechar las dificultades detectadas y los errores cometidos por los estudiantes.
- En la socialización, la intervención del profesor debe ir orientada a cuestionar al estudiante sobre las respuestas elaboradas (ya sea verbal u oralmente).
- Movilizar al grupo para que refuten o apoyen (usando argumentos diferentes) las participaciones de los compañeros.
- Confrontar los conceptos que traen los estudiantes para lograr una mayor comprensión de la actividad matemática presente (esto teniendo en cuenta que en algunos grupos del curso resultan estudiantes que vienen de otras universidades que ya han cursado cálculo diferencial o estudiantes que están adelantándolo o que en sus colegios avanzaron lo suficiente en el currículo de cálculo).

Lo anterior ha movilizado las concepciones de los profesores del curso pues la metodología de resolución de problemas en el curso pretende potenciar el pensamiento variacional a través de una actividad matemática enriquecida en los procesos matemáticos. El proceso de resolución de problemas se entiende como "la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea" (Puig, 1996, p. 34).

Por tal razón, la CoP diseñó una secuencia didáctica de fenómenos de cambio y variación con 15 talleres en los cuales se presenta uno o dos problemas que los estudiantes deben resolver pensando estrategias para llegar a la solución y poniendo en juego el saber matemático que traen de sus colegios, las fortalezas y debilidades referidas al pensamiento variacional.

De las negociaciones dadas alrededor de la metodología de resolución de problemas que debería direccionar cada taller, se negociaron cinco fases que les permitiría a los profesores interpretar más acertadamente la metodología del curso. Las fases a saber, que a su vez fueron inspiradas por las fases del Modelo de Van Hiele (Fiallo & Parada, 2014) son:

a. *Fase de información y exploración libre:* al inicio de la clase se plantea el problema relacionado con la temática a estudiar, para que el estudiante lo resolviera de manera individual o en parejas sin el uso del software.

b. *Fase de socialización*: en esta fase el profesor promueve la participación de los estudiantes para que comuniquen sus soluciones, las discutan en grupo, se aclaren las dudas y principalmente, se corrijan los errores, se repasen conceptos y se promueva la necesidad de ofrecer una solución matemáticamente válida al problema planteado.

c. *Fase de exploración dirigida*: en esta fase se parte de la exploración de un archivo en GeoGebra (el cual ya fue diseñado por los profesores) para que, a través de la exploración en el *software*, y con la orientación guiada por preguntas, el estudiante usando las diferentes herramientas del *software*, vaya encontrando respuestas al problema, plantee conjeturas y justifique matemáticamente los resultados.

d. *Fase de explicitación*: en la actividad propuesta se hace la socialización con los estudiantes y con el profesor, de tal manera que se llegue a la construcción del conocimiento, el cual es el objetivo de la actividad.

e. *Orientación libre*: se propone una situación problema para aplicar lo que aprendió.

Se acordó en la comunidad que el diseño y desarrollo de las actividades debían seguirse las fases antes descritas y el uso del software GeoGebra.

Los participantes de la CoP eran conscientes de que su característica primordial era el trabajo colectivo, por lo que posteriormente cada pareja presentó su propuesta para ser evaluada y retroalimentada por los demás profesores pues en algunos talleres no fue fácil plasmar que no se trataba de un repaso de algebra ni los conceptos que se presuponen se aprenden en la Educación básica en Colombia.

Por ejemplo, Lucero y Alejandro[6] elaboraron el la actividad *Análisis de Datos*, veamos la Tabla 2 que sigue:

Tabla 2. Objetivo y problema del taller “Análisis de Datos”, versión 2013-1 del curso

<table>
<tr><th>OBJETIVO</th><th>PROBLEMA</th></tr>
<tr><td>Modelar un fenómeno del mundo real a través de funciones polinómicas, empleando diferentes representaciones y traducirlas mediante expresiones orales, tablas, gráficas y expresiones algebraicas.</td><td>La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina en litros, de un vehículo Toyota Corolla que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico.
<table>
<tr><td>Recorrido (km)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr>
<tr><td>Consumo (L)</td><td>0.14</td><td>0.21</td><td>0.31</td><td>0.46</td><td>0.55</td><td>0.64</td><td>0.78</td><td>0.83</td><td>0.99</td><td>1.10</td><td>1.20</td></tr>
</table>
¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico?</td></tr>
</table>

El objetivo es una versión parafraseada de un estándar emanado por el Consejo Nacional de Profesores de los Estados Unidos (NCTM). La actividad de diseño a la cual se enfrentaron los profesores de la CoP los movió a buscar fuentes reconocidas que les permitiera realizar un taller acertado, vemos también que intentó (junto con su compañero) establecer una conexión entre el objetivo y el problema de manera que éste permitiera la gestión de (nuevos) contenidos y aprendizajes, tratando además de que los problemas propuestos fueran adecuados a las capacidades de los estudiantes (graduandos de undécimo grado), que crearan conflictos cognitivos en tanto que no fueran problemas rutinarios e intentando con ellos motivar la actividad matemática del estudiante para proponer una solución al fenómeno variacional.

Productos del trabajo colectivo de la CoP fue el diseño de los quince talleres que integran el uso de *archivos* diseñados en GeoGebra, que son: *Análisis de Datos, Números y Operaciones, Unidades de Medida, Razones Trigonométricas en el Triángulo Rectángulo, Razones Trigonométricas en el Plano Cartesiano, Funciones Trigonométricas, Cuerdas Vibrantes, Fenómenos Físicos, Perímetro Fijo y Área Variable, Caja sin Tapa, Funciones por Partes, Derivada como Razón de Cambio, Transformaciones de Funciones, Área Fija y Perímetro Variable*, y por último *Teorema Fundamental del Cálculo*. En términos de

[6] Los nombres son ficticios para proteger la identidad de los profesores.

Wenger (1998) estos talleres diseñados son cosificación de la negociación de significados resultados de la comunidad.

Los recursos que distinguirían al curso fue otro aspecto de reflexión ya que los profesores que habían enseñado en undécimo grado y en primer nivel en instituciones de educación superior Cálculo, compartían que el tablero y el marcador no eran suficientes para hacer ver a los estudiantes los fenómenos de cambio y variación. Estas inquietudes permitieron negociar que el tablero, el lápiz y el papel no estarían fuera de las actividades del curso de precálculo de la UIS sino que serían complementados por un *software matemático multi-plataforma* (GeoGebra). Es por esto que en la primera parte de cada sesión los estudiantes resuelven el problema propuesto usando sus conocimientos y sus herramientas de estudio (Calculadora, regla, internet) y luego se les entrega un taller diseñado en Geogebra, por los profesores de la CoP para que verifiquen o refuten sus ideas de la primera parte del taller.

La metodología del profesor en el aula fue un aspecto sobre el cual los investigadores de la CoP estudiaron intensamente pues esta debía responder a la visión de realizar un curso de precálculo diferente.

> Moderador: La idea no es que el profesor le resuelva los problemas al estudiante. Cuando un estudiante se acerca y le pregunta al profesor *cómo se hace esto*, entonces el profesor no le va a decir “venga le hago el procedimiento” ni menos va a valorar diciendo “esto está bien, esto está mal”. El profesor debe seguir preguntando “¿qué pasa si hace esto?”; proponer otro el uso de una representación, ya sea a mano o en el software. Pero lo más importante es que no valore como excelente algo hasta que no se haya discutido. Dentro de la metodología hay tiempos para que el estudiante trabaje solo, sin software, tiempos para que él trabaje con el software y tiempos para que él trabaje con los compañeros y el profesor. Entonces lo que se quiere finalmente es que el estudiante sea el que razone y resuelva el problema con sus propios conocimientos, adquiera nuevos conocimientos a través de la actividad. Para eso también se tiene pensado una puesta en común, donde pues también hay que aclarar los conceptos y la idea. Esa es básicamente la razón de hacer la actividad del profesor. [2]- (Episodio 2).

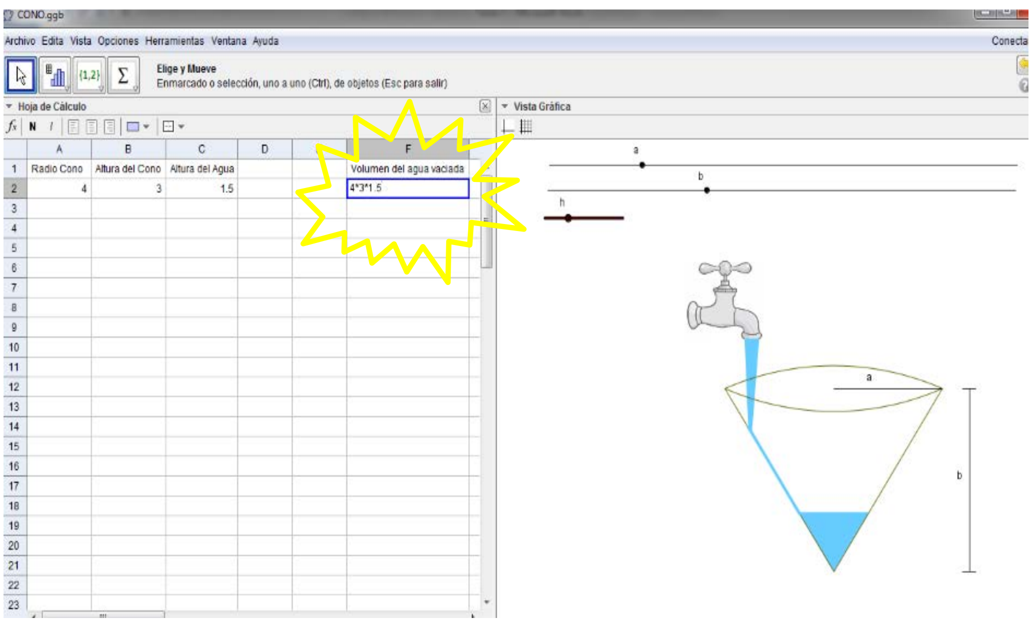
Todos los talleres del curso siguen las cinco fases antes descritas; dado que en el momento que se construye esta investigación, la coordinación del curso adelanta la construcción de un libro en el cual se explicitarán estos recursos, sólo se mostrarán aquí algunos apartados y problemas y no una actividad completa.

Los significados negociados de la comunidad en esta fase de reflexión se concretan en cosificaciones que hoy representan al curso: la secuencia didáctica, la estructura de los talleres y el acompañamiento de un auxiliar.

4.1.1.2 Reflexión-*en*-la acción: implementación de las actividades diseñadas

Al desarrollar las actividades ya planeadas, las sesiones se desarrollaron en salas de computadores tratando de garantizar un computador por estudiante. En esta versión 2013-1 del curso, la CoP acordó una reunión semanal (al final de la semana) para comentar las situaciones presentadas al desarrollar los talleres. En dicha reunión los profesores comunicaron dudas sobre el uso del manejo del *software*, como por ejemplo: cómo hacer para escribir en la hoja de cálculo del programa GeoGebra, cómo escribir la fórmula para obtener muchos valores de una función y no meter dato por dato (ver Ilustración 4). En la reunión un profesor experto en el uso de programa, compartió su experiencia para que los profesores hicieran este trabajo de diferentes maneras, lo cual aportó a la formación de los profesores y además facilitó el trabajo para los siguientes talleres.

Ilustración 4. Dudas sobre el uso de la hoja de cálculo de GeoGebra



La metodología del curso fue permeando las prácticas de los profesores llevándolos a inquietarse de modo que éstos negociaron el uso tradicional de tablero y el marcador para formarse en el uso de GeoGebra como recurso para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Las reflexiones sobre cómo los profesores habían desarrollado ese taller inquietaron a la CoP y a su moderador, por lo que emergió la necesidad de diseñar un recurso que ayudara a los profesores a identificar los aspectos importantes de cada actividad. Por ello, la CoP consideró crear una "*guía para el docente*". Este producto de la CoP consiste, según las negociaciones concurrentes, en un documento de consulta para el profesor en el cual se irían registrando aspectos importantes del taller que orientarían respecto de cuestiones didácticas y del conocimiento conceptual. La CoP consideró que cada taller de la secuencia didáctica tendría una guía para el docente.

El hecho de que los profesores crearan un recurso que orientara sus acciones es una negociación muy importante de la comunidad ya que esto resalta su tendencia a reconocer la necesidad de una formación continuada ya sea en los aspectos matemáticos del cálculo o en los didácticos u orquestales de la enseñanza. Por ejemplo, los profesores constantemente manifestaban en las reuniones de la CoP su entusiasmo con las actividades del curso, pues para varios de ellos era nueva la forma en que se empleaba GeoGebra en la clase de matemáticas.

> Profesor: Para mí ha sido buenísimo lo de GeoGebra. Poder ver en la pantalla lo que cambia y cómo eso afecta todo, me parece espectacular, y más para los chicos que con eso se les hace más fácil analizar la variación y el cambio cuando usan el programa. Uno sí ve ahora lo que significa la variación. [3] - (Episodio 3).

La falta de experiencia en la enseñanza de matemáticas con estudiantes universitarios inquietó a un grupo de profesores de la CoP. Lucero y otros de sus compañeros de formación del programa de maestría que también estaban en el curso, decidieron reunirse en un espacio diferente al de la CoP, esto debido a las exigencias conceptuales de la secuencia didáctica. En ese espacio ellos revisaban línea por línea los talleres, discutían las interpretaciones a las que daban lugar las preguntas y actividades propuestas.

Podríamos decir que la responsabilidad común de los profesores en el desarrollo del curso los movilizó hacia un común aprendizaje que les permitiera estar más cerca de las expectativas que sobre sus prácticas docentes había. También podemos interpretar que Lucero y sus compañeros compartían y aprendían unos de los otros a través del contacto físico con una meta o necesidad de resolver problemas, con la intención de compartir experiencias, técnicas o metodologías, todo programado para construir mejores prácticas (McDermott, 2000). La cualidad de ser compañeros de estudio (y el dominio de los conceptos abordados en los talleres) los motivó a crear un espacio colaborativo diferente al que estaba liderado por el moderador de la comunidad; éste le dio un sentido de identidad adicional al estar cómodos entre pares.

> Lucero: Nosotros nos reuníamos todos los días para resolver la siguiente actividad. Entonces nos sentábamos y tratábamos de resolver el problema desde diferentes maneras, y de pronto hacer preguntas que un estudiante les pueda realizar. Primero resolvíamos a mano, cada uno el taller. Lo resolvía solito. Después los discutíamos, porque a veces había problemas de redacción en el documento; cosas que generaban ambigüedad y ahí nos poníamos de acuerdo que preguntas hacer y ahí le quitábamos pedazos. Por ejemplo, recuerdo la del carro, la que hizo "una de las profesoras", ahí habían unas preguntas que no se entendían lo que buscaban; también en unas actividades de trigonometría de "otro profesor". Entonces nosotros todos acordábamos, esa pregunta no la vamos a trabajar y la abordamos de otra manera. [4]-(Episodio 4).

En lo anterior se palpa cómo los integrantes de la comunidad consolidaban su sentido de identidad y de pertenencia, y la posibilidad tangible de interacción entre los miembros antiguos y nuevos de una comunidad. También es visible que, en términos de Wenger (2001), la comunidad generaba y mantenía una identidad definida por su área de interés, la cual comprometía a sus miembros y los diferenciaba de otras personas.

Para el caso de Lucero, su participación activa en la comunidad fue caracterizándola como líder académico de la comunidad, pues ella poco a poco asumía un rol comprometido que posibilitaba la integración de los nuevos profesores en la CoP del curso.

En particular, Lucero señaló que en el taller de "Unidades de Medida" observó que los estudiantes emplearon mucho tiempo realizando ejercicios de conversión de medidas (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), aspecto sobre el cual se cuestionó al estar desarrollando el taller pues percibió que la actividad se centró en procedimientos aritméticos.

Ilustración 5. Preguntas orientadas a conversión de unidades en el taller "Unidades de Medida"

d) Utilizando la hoja de cálculo, halla el volumen del agua vaciada en el cono de radio $a = 4\ m$, altura $b = 3\ m$ y altura del agua $h = 1{,}5\ m$ propuesto en el inciso f) de la Actividad 1.4.

e) Usando la hoja de cálculo, halla el volumen del problema del inciso f en decímetros cúbicos.

f) En la hoja de cálculo, halla el volumen del problema del inciso f en centímetros cúbicos.

g) Halla el volumen del problema del inciso f en litros.

h) Halla el volumen del agua vaciada en el cono de radio $a = 5\ m$, altura $b = 29\ cm$ y altura del agua $h = 55\ mm$. Calcula el volumen del agua vaciada en centímetros cúbicos usando la hoja de cálculo.

i) Halla el volumen del agua vaciada en el cono de radio $a = 32\ cm$, altura $b = 4$ *pulgadas* y altura del agua $h = 2\ cm$. Calcula el volumen del agua vaciada en centímetros cúbicos usando la hoja de cálculo.

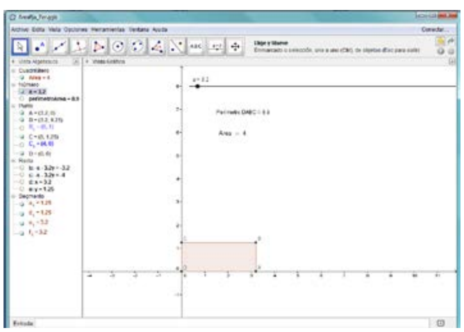
j) Halla el volumen del agua vaciada en el cono de radio $a = 2$ *pies*, altura $b = 2$ *pulgadas* y altura del agua $h = 2\ cm$. Calcula el volumen del agua vaciada en litros usando la hoja de cálculo.

k) Halla el volumen del agua vaciada en el cono de radio $a = 2\ m$, altura $b = 2$ *pies* y de radio del nivel del agua $r = 25\ cm$. Calcula el volumen del agua vaciada en litros usando la hoja de cálculo.

Como pudimos apreciar, los significados negociados por la comunidad giraron en torno al pensamiento didáctico y orquestal ya que el uso de GeoGebra y la metodología del curso eran dos elementos nuevos para los profesores, por tal razón la *"guía del profesor"* se consolida en el producto negociado por la CoP.

Para tal fin se diseñó, para la última sesión, el taller *Área fija y Perímetro variable* que tiene por problema hallar el rectángulo de menor perímetro entre los rectángulos de área fija. Para realizar esta evaluación fue necesario diseñar algunos indicadores que orientaran el proceso de evaluación de los estudiantes (ver Ilustración 6); éstos representan una cosificación del proceso de reflexión sobre los aspectos del pensamiento variacional inmersos en la evaluación.

Ilustración 6. Archivo e indicadores de la evaluación del período 2013-1



1. Modela diversas situaciones de cambio a través de funciones y expresa dichas funciones inicialmente en palabras y luego simbólicamente, representándolas en forma gráfica, tabular y mediante expresiones algebraicas.
2. Representa y analiza funciones utilizando para ello tablas, expresiones orales, expresiones algebraicas, ecuaciones y gráficas y hace traducciones entre estas representaciones.
3. Formula conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa y usa la calculadora para comprender dicho comportamiento.
4. Interpreta gráficos que describen diversas situaciones.
5. Analiza tablas y gráficas para descubrir patrones, hace predicciones e identifica propiedades y relaciones.

Entre las indicaciones dadas por la coordinación del curso para la evaluación final, en el marco del pensamiento orquestal, estaba no orientar al estudiante sobre cuándo y cómo usar GeoGebra ya que justamente este tipo de decisiones debían ser tomadas por el estudiante y brindarían información sobre la influencia que tuvo el curso en cuanto a cómo y cuándo emplear la tecnología para apoyar el trabajo con problemas de fenómenos variacionales.

El informe final del desempeño de los estudiantes fue otro aspecto sobre el cual se reflexionó en la CoP teniendo en cuenta que el curso de precálculo de la UIS es un curso no tradicional. La negociación colectiva se cosificó en un informe que contemplaba:

- ✓ Una descripción individual sobre el nivel alcanzado por el estudiante de acuerdo a los cinco indicadores propuestos. Para hacer la descripción de cada estudiante en los indicadores se tuvo en cuenta la participación durante el curso y una evaluación escrita final titulada “Perímetro mínimo”.

- ✓ La asistencia de los estudiantes del curso.
- ✓ Una malla (ver Ilustración 7) para relacionar los estudiantes y su respectivo desempeño en el taller final (se acordó emplear los juicios de valor *Bajo, Medio* y *Alto* esto considerando los procesos matemáticos *Modelar, Representar, Formular, Interpretar y analizar*) que responde al logro de evaluación “Organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre como de las ciencias y las matemáticas donde la variación se encuentra como sustrato de ellos”.

Ilustración 7. Malla de evaluación del taller final del curso 2013-1

ESTUDIANTES		1. Modela			2. Representa			3. Formula			4. Interpreta			5. Analiza		
		B	M	A	B	M	A	B	M	A	B	M	A	B	M	A
1																
2																
3																

Fuente: Coordinación curso precálculo UIS

Otra cosificación lograda por la CoP en esta etapa fue la elaboración de una encuesta realizada a los estudiantes sobre su percepción del curso de precálculo. Para la CoP es importante conocer la percepción de los estudiantes sobre el curso. Para esta versión, la encuesta propuso a los estudiantes:

- ✓ Valorar cada uno de los talleres (escala de 1 a 5, siendo cinco la nota más alta);
- ✓ Valorar los aspectos metodológicos del curso (esto a través de seis preguntas);
- ✓ Una apreciación sobre el profesor y el auxiliar (esto con cuatro preguntas);
- ✓ Una autovaloración de su motivación.

De los resultados obtenidos, el Taller “Caja sin tapa” fue el que mejor valoración tuvo con una calificación promedio de 4,7 seguido de “Cuerdas vibrantes” con 4,6; a la fecha de la realización de este estudio ambos talleres continúan haciendo parte de la secuencia didáctica del curso.

4.1.1.4 Significado negociados en la Etapa 1

Las reuniones de la CoP resultan fundamentales para el crecimiento profesional de los profesores participantes y del fortalecimiento de la estructura curricular del curso; al ser la primera versión del curso a la luz de la metodología de resolución de problemas mediada por las tecnologías digitales exigió de los profesores apertura para comprender las exigencias de esos elementos pedagógicos, además de la constante reflexión sobre sus propias prácticas docentes. De manera que, como menciona Wenger (1998), al ser la CoP un grupo de personas que comparten un interés común y una preocupación, éstas ahondan su conocimiento a través de una estructura social basada en la reconstrucción colaborativa de conocimientos a favor de todos los integrantes. Los significados negociados que logramos identificar en esta etapa de reconstrucción son:

Respecto al *pensamiento variacional* los profesores mejoraron su comprensión respecto a la variación y cómo el cambio está implícito en ella. Este significado es muy importante ya desarrollar el pensamiento variacional implica "desarrollar una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos" (MEN, 2004).

Respecto al *pensamiento didáctico*, el primer gran significado negociado por los profesores que participaron plenamente de las actividades de esta etapa, fue el reconocer en la discusión entre pares el vehículo más valioso para realizar una reflexión profunda sobre los problemas de los talleres del curso, esto para interpretar colectivamente el contenido matemático subyacente en cada taller.

Respecto al *pensamiento orquestal*, encontramos que la mayoría de profesores sintieron la necesidad de proponer estrategias variadas en la clase, vinculando actividades a lápiz y papel, con material concreto y tecnologías digitales. Para ellos era claro que necesitaban poner en juego sus saberes didácticos y hacer una orquestación concreta para incorporar nuevos recursos, mismos que aún no son de su completo dominio.

4.1.2 Etapa 2: Segunda versión del curso.

Esta etapa se dio en 2013-2 con 10 grupos, con 30 estudiantes cada uno. El 60% de los profesores había participado en la versión anterior incluyendo a Lucero; ingresaron tres nuevos profesores quienes eran estudiantes de la Maestría en Educación Matemática y un profesor con más de 20 años de experiencia como profesor de secundaria y también profesor cátedra de la universidad. Para el fortalecimiento de la CoP, quien hacía de Moderador era el mismo investigador de la primera versión.

4.1.2.1 Reflexión-*para*-la acción: Diseño de las actividades

El Moderador de la CoP convocó a los profesores y auxiliares (tanto nuevos como antiguos) a la primera reunión de la CoP, una semana antes de iniciar el curso. En ella orientó nuevamente a los profesores novatos sobre la característica más destacable del curso en relación a otros cursos de precálculo.

> Moderador: A diferencia de un curso tradicional de Cálculo, donde predomina el carácter estático de las representaciones de los objetos matemáticos, en este proyecto introducimos representaciones dinámicas generadas por un software de geometría dinámica: GeoGebra. Proveer a los estudiantes de representaciones dinámicas sobre ideas centrales del Cálculo como la variación y la acumulación, puede generar en ellos un pensamiento dinámico que contribuye a la construcción de significados de las ideas estudiadas. [5]- (Episodio 5).

De manera que el Moderador motivaba a los profesores a incorporar el uso de la tecnología para favorecer las representaciones de los objetos matemáticos. Luego de reinterpretar la metodología de las clases de precálculo, el Moderador insistía en la construcción de nociones y conceptos por parte de los estudiantes y que se debía organizar la actividad matemática para que cada uno alcanzara los logros propuestos para el desarrollo del pensamiento variacional.

> Moderador: y eso [se está socializando la función $f(x) = \frac{1}{x}$] nos acerca a la noción de limite, jugando a averiguar qué pasa en el término enésimo, sin que hablemos directamente de los límites con esa definición, concepto que le costó varios años a los matemáticos para ponerse de acuerdo, y así, el estudiante va comprendiendo. La idea no es llegar al concepto formal del límite, que ocurre por la derecha, por la izquierda sino construir su noción. [6]- (Episodio 6).

Los profesores en formación (auxiliares) fueron ubicados con los profesores “novatos” del curso para que les apoyaran ya que tres de ellos participaron en la primera versión. Los auxiliares fueron un gran apoyo para estos profesores novatos; ya que les aportaron su experiencia en el manejo del software, lo cual les facilitó el desarrollo de la actividad matemática planeada por la CoP. La presencia de profesores “novatos” en esta segunda versión del curso, hizo que el Moderador insistiera en el fundamento teórico que sustentan los talleres de la secuencia didáctica; veamos:

> Moderador: Entonces las actividades están diseñadas para también promover habilidades de los procesos. Esto pues no tiene que saber el profesor ‘perse’ que llega y vea las actividades pues si

> no conoce ese fundamento teórico y metodológico, posiblemente implemente esas actividades de manera errada y no funcionen como deberían ser. Entonces teniendo en cuenta esas ideas, cada pregunta que se plantea [en los talleres] tiene un objetivo, tiene una finalidad y obedece a ese marco teórico y a ese marco metodológico […]. [7]- (Episodio 7).

El Moderador motiva a los profesores "antiguos" del curso de precálculo, para que compartan sus experiencias. En esta ocasión la profesora Lucero llamó la atención sobre el impacto que la metodología del curso tuvo en sus estudiantes en la versión anterior del curso:

> Lucero: Pues fue difícil. Porque primero los estudiantes van a copiar lo que el profesor escriba en el tablero, entonces llegan preparados con su libreta y que el profesor llegue es a explicar, explicar. Entonces ellos como que se estrellaron contra el mundo porque ellos llegaron a empezar a utilizar lo que tenían para resolver o abordar problemas. Entonces siempre habían estudiantes que se trataban "no, explíqueme, explíqueme, primero explíqueme y después póngame el ejercicio" que es lo que generalmente se hace. Entonces fue un poco complicado. [8] - (Episodio 8).

Esta experiencia le permitió a la CoP reflexionar sobre las concepciones de los estudiantes sobre el contrato didáctico lo cual los llevó a rescatar la importancia de realizar una introducción en la primera sesión, de manera que tenga herramientas para comprender el ambiente de aprendizaje del curso.

Parte importante de las reuniones orientadas a la reflexión-*para-la* acción es poner a consideración la secuencia didáctica. Los profesores acordaron continuar con los talleres realizados en la versión anterior aunque cambiaron los cuatro últimos; los nuevos talleres se ven en la Tabla 3.

Tabla 3. Modificación de talleres en 2013-2

PRIMERA VERSIÓN	SEGUNDA VERSIÓN
La piscina	La Derivada como Razón de Cambio (Parte 1)
Transformaciones de funciones.	La Derivada como Razón de Cambio (Parte 2)
Área fija-perímetro variable.	Perímetro Mínimo (Evaluación)
Teorema fundamental del cálculo.	Transformaciones de Funciones

Esto obedece a que los profesores de la comunidad discuten aspectos como el orden de los talleres en la secuencia didáctica o algún aspecto del diseño de cada uno. Las inquietudes son expuestas al Moderador, quien asesora el diseño de los talleres y los recursos de

GeoGebra, y de manera colectiva se toman decisiones que afectan algún aspecto de los recursos del curso.

Esta parte del proceso de reflexión tuvo como propósito examinar el taller "Unidades de Medida" y su aplicación para determinar si se ajustaría. Uno de aspectos que movió la reflexión de la comunidad sobre el taller fue que éste proponía al estudiante realizar procedimientos aritméticos para realizar conversión de unidades, cuestión que llamó la atención de los profesores porque, como lo reporta Chamorro (1995 citado por Abrate, Pochulu, & Vargas, 2006), estas actividades versan fundamentalmente sobre cuestiones aritméticas más que de medida y variación.

De manera que la CoP decidió ajustar el taller "Unidades de Medida"; pues bien, dicha iniciativa fue realizada por Lucero quien compartió con la comunidad que era importante que la actividad matemática enfatizara en los conceptos básicos de la medida y no solamente en transformar unidades.

Ante esta movilización reflexiva sobre lo didáctico en los talleres, el Moderador respaldaba la iniciativa:

> Moderador: Chévere que sean ustedes los que planteen esas ideas, aquí no ha sido la idea hacer los talleres impuestos, algunas cosas logísticas sí, pero la idea es que todos aportemos a la construcción de los talleres que haremos del curso de precálculo. De hecho yo también aporto en el diseño de las actividades, […] lo hago con agrado. [9]- (Episodio 9).

Otro taller que movilizó las reflexiones-para-la acción fue "Caja sin tapa" en el cual se propone al estudiante construir una caja sin tapa a partir de una hoja rectangular de tamaño 60 cm por 40 cm, cortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas, esto para estudiar el máximo de la función que modela el volumen de la caja. Para la actividad exploratoria se le proporciona a los estudiantes cartulina para realizar la construcción (ver Ilustración 8), sin embargo los profesores negociaron en esta ocasión que en lugar de recortar se <u>doblaran</u> las esquinas, quedando de la siguiente forma: *Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja rectangular de tamaño 60 cm por 40 cm cortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas y doblándolos hacia arriba.*

Entre los aspectos que llevaron a la comunidad a realizar esa negociación se debió al temor de los estudiantes a dañar la cartulina proporcionada para la construcción.

La evaluación realizada en la primera versión fue otro aspecto que promovió procesos de reflexión: emergió la importancia de conocer de manera cuantitativa el desempeño colectivo e individual de los estudiantes que ingresaban al curso.

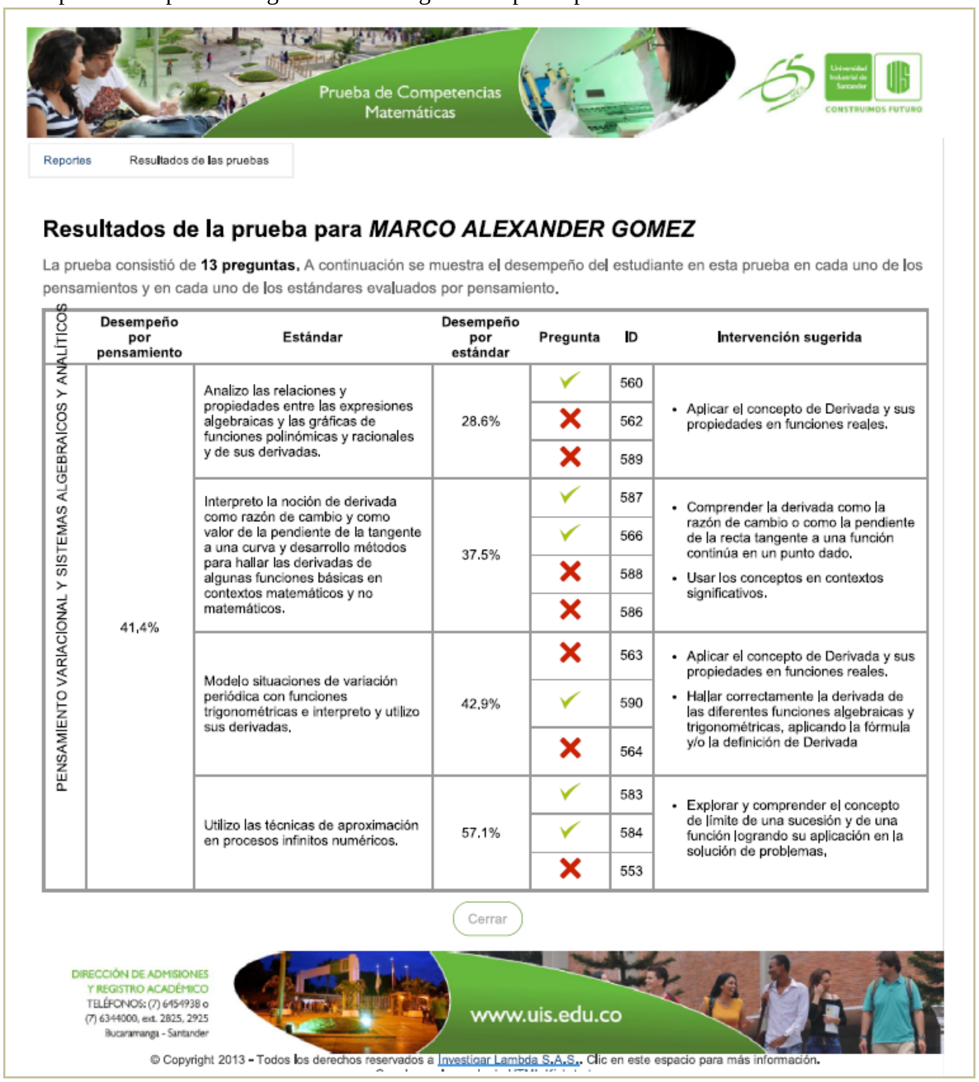
Ilustración 8. Estudiantes construyendo la caja sin tapa

Por tal razón, dos profesoras de la CoP diseñaron una prueba diagnóstica inicial con 14 problemas de fenómenos variacionales; cada uno de ellos permitía medir un indicador que respondía a uno de los cuatro estándares de competencias en matemáticas del grado undécimo emanados por el MEN (2006). Esta prueba fue socializada con algunos profesores de la CoP quienes realizaron sus aportes en cuanto a la formulación de algunas preguntas y la pertinencia de algunas opciones de respuestas contempladas en los problemas.

Con el apoyo de la Vicerrectoría Académica de la UIS, la prueba de selección múltiple con única respuesta se ejecutó en una plataforma de manera que ésta arrojaba, una vez el estudiante realizara la prueba, el nivel de desempeño (Alto, Medio y Bajo) en la misma de tal suerte que cada profesor tendría en un reporte digital los aciertos y desaciertos de cada estudiante (ver Ilustración 9), paralelo a que la coordinación del curso obtendría información cuantitativa (en términos de porcentaje) del nivel de desempeño en la prueba.

De manera que la CoP logró una prueba diagnóstica inicial más sistemática apoyada en un recurso tecnológico, cosificación que fue muy importante para el curso ya que esto facilita la caracterización de las dificultades con las cuales ingresan los estudiantes a la universidad.

Ilustración 9. Reporte de la prueba diagnóstica inicial generado por la plataforma



Resultados de la prueba para *MARCO ALEXANDER GOMEZ*

La prueba consistió de **13 preguntas.** A continuación se muestra el desempeño del estudiante en esta prueba en cada uno de los pensamientos y en cada uno de los estándares evaluados por pensamiento.

	Desempeño por pensamiento	Estándar	Desempeño por estándar	Pregunta	ID	Intervención sugerida
PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS	41,4%	Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.	28.6%	✓	560	• Aplicar el concepto de Derivada y sus propiedades en funciones reales.
				✗	562	
				✗	589	
		Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	37.5%	✓	587	• Comprender la derivada como la razón de cambio o como la pendiente de la recta tangente a una función continúa en un punto dado. • Usar los conceptos en contextos significativos.
				✓	566	
				✗	588	
				✗	586	
		Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.	42.9%	✗	563	• Aplicar el concepto de Derivada y sus propiedades en funciones reales. • Hallar correctamente la derivada de las diferentes funciones algebraicas y trigonométricas, aplicando la fórmula y/o la definición de Derivada
				✓	590	
				✗	564	
		Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.	57.1%	✓	583	• Explorar y comprender el concepto de límite de una sucesión y de una función logrando su aplicación en la solución de problemas.
				✓	584	
				✗	553	

Cerrar

DIRECCIÓN DE ADMISIONES Y REGISTRO ACADÉMICO
TELÉFONOS: (7) 6454938 o (7) 6344000, ext. 2825, 2925
Bucaramanga - Santander

www.uis.edu.co

© Copyright 2013 - Todos los derechos reservados a Investigar Lambda S.A.S.. Clic en este espacio para más información.

Fuente: Coordinación curso precálculo UIS

La CoP decidió que la evaluación final de la primera versión se aplicaría nuevamente sin modificaciones, pese a que la CoP no previó que la prueba diagnóstica inicial y final tenían una estructura diferente lo que dificultaría realizar un análisis de impacto del curso en los estudiantes (esto lo veremos más adelante).

Otro aspecto sobre el cual reflexionó la CoP fue la primera impresión de los estudiantes ante la metodología del curso. La profesora Lucero, quien se ha destacado en la CoP por ser activa e inquieta, señaló la necesidad de "adaptar el chip en la forma como los estudiantes creen que es dar la clase" ya que los estudiantes entran en conflicto al preguntarles *mucho* y al exigirles que produzcan.

De manera que el aporte de Lucero motivó la reflexión colectiva sobre este tema, y así lo expresa Dewey (1989) donde la reflexión surge del pensamiento individual al social. La acción emergente de esa reflexión fue la consideración de un tiempo de contextualización en la primera sesión del curso sobre el objetivo de la metodología del mismo.

Los significados negociados en la reflexión-para-la acción estuvieron permeados por la experiencia vivenciada por los profesores antiguos que participaron en la primera versión; de manera que en las reuniones nuevamente emergieron con fuerza negociaciones alrededor de lo didáctico y lo orquestal; discusiones sobre los objetos del Cálculo no tuvieron protagonismo, de tal suerte que esto nos permite decir, hipotéticamente, que la comunidad estaba muy preocupada por el *cómo* y con *qué* desarrollar los talleres.

4.1.2.2 Reflexión-*en*-la acción: implementando las actividades diseñadas

Al tener una mayor experticia los profesores sobre el uso de los talleres y las actividades en GeoGebra, les permitió estar más atentos a las dificultades que presentaban los estudiantes y a las dificultades que tenían algunos talleres en su diseño. En las reuniones de la CoP, los profesores reflexionamos sobre algunas dificultades presentadas por los estudiantes en el taller "Funciones Trigonométricas", dentro de las tareas matemáticas que proponía el taller, se solicitaba a los estudiantes llenar la tabla de la ilustración 10

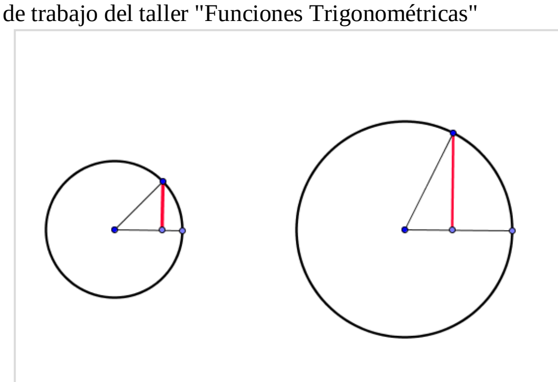
Ilustración 10. Tarea matemática del taller "Funciones Trigonométricas"

θ	y	$\frac{\Delta y}{\Delta \theta} = \frac{y_2 - y_1}{\theta_2 - \theta_1}$
0		
$\frac{\pi}{2}$		

Fuente: Coordinación curso precálculo UIS

En la actividad anteriormente enunciada (Ilustración 10) los estudiantes dibujaban a lápiz y papel una circunferencia. Sin embargo, durante la clase, los profesores manifestaron que los datos de las tablas daban diferentes lo cual retrasó el avance del desarrollo del taller pues los estudiantes, al no tener una indicación precisa del radio de la circunferencia obtenían diferentes valores para "y" (segmento rojo señalado en la Ilustración 11).

Ilustración 11. Circunferencias de trabajo del taller "Funciones Trigonométricas"



Fuente: Investigadores

En la CoP se analizó que el tamaño de las circunferencias no incidía pues los segmentos "y" e incluso el arco de circunferencia correspondiente son proporcionales. De manera tal que durante la reflexión sobre esto se concluyó que no había error conceptual ni procedimental en la actividad; el sesgo estaba en la manera como los profesores estaban orquestando los datos diferentes que emergían en la actividad. Precisamente, el moderador de la CoP insistió que esa era cuestión que se debía dar en la clase como producto del trabajo de los estudiantes y se debía discutir durante la socialización del taller para concluir lo invariante de la situación. Pero sí se llegó al acuerdo de que es importante para una próxima ocasión solicitar a los estudiantes instrumentos para realizar las mediciones de la forma más exacta.

Esto llevó a que los profesores hicieran unas modificaciones a la *guía del profesor* buscando dejar expuestas las inquietudes señaladas, obteniéndose una versión nueva y mejorada como cosificación de este proceso de reflexión.

La confianza que se daba con el paso del tiempo, daba la oportunidad de que los integrantes de la CoP compartieran aspectos un poco más personales: por ejemplo, Lucero compartió que, ante las dificultades que ella tenía con ciertas instrucciones en GeoGebra, eran que los estudiantes quienes en ocasiones la ayudaban y ella aprendía otras formas de hacer las tareas. Incluso, en su informe de la versión 2013-1, ella expresó que el apoyo del auxiliar fue muy importante pues él tenía mejores conocimientos sobre el uso de GeoGebra lo cual le permitió avanzar en el desarrollo de las situaciones problema de cada taller.

El Taller “Caja sin tapa” volvió a tomar protagonismo entre los profesores quienes señalaron que para darle la altura a la caja la indicación de doblar no fue fácil para los estudiantes. Una profesora compartió la decisión que tomó:

> Profesora: En la fase exploratoria que se propone el uso de material concreto, indicamos al estudiante construir dos cajas con dos papeles que les dimos, aspecto diferente al taller diseñado y propuesto inicialmente por el grupo de precálculo, debido a que construyendo dos cajas el estudiante consideramos que tendrían mayor tiempo de contacto con el problema y plantearían dos posibles soluciones buscando que la caja que construya tenga el mayor volumen. [10]-(Episodio 10).

Al respecto fueron evidentes los significados negociados entre los profesores expertos y los novatos: los primeros sentían la tranquilidad para realizar ajustes en lo didáctico para favorecer el objetivo del taller mientras que los novatos esforzaron a sus estudiantes a doblar el papel para obtener diferentes cajas; otros, según compartieron su experiencia, les dijeron a los estudiantes cómo realizar el dobles.

De manera que, al compartir experiencias, los profesores se dieron cuenta de que podían utilizar los recursos de los talleres adaptando las actividades a las habilidades de sus estudiantes y evaluando hasta dónde un cambio didáctico podría influir en la actividad matemática.

4.1.2.3 Reflexión-*sobre*-la acción. Evaluación del proceso

En esta etapa los profesores de la CoP encontraron dificultades para realizar el proceso de evaluación ya que

- La prueba diagnóstica inicial tenía una estructura diferente a la evaluación final.
- En la evaluación final los estudiantes empleaban GeoGebra en la primera no.
- Se tenía el reporte de la prueba diagnóstica inicial y el resultado de la evaluación final pero los indicadores de evaluación de ambas pruebas eran diferentes.

Ante estos aspectos, la CoP acordó que para la próxima versión la prueba diagnóstica inicial y la final se realizaría usando GeoGebra.

Los procesos de reflexión conllevan una evaluación objetiva y crítica de lo que se ha logrado con relación a lo que se ha planeado, con el fin de realizar ajustes y enriquecer el pensamiento reflexivo del profesor desde sus tres componentes: lo matemático, lo didáctico, y lo orquestal. En esta etapa del proceso de reflexión-y-acción el moderador consideró importante retroalimentar a los profesores de la CoP respecto a algunas inconsistencias observadas en las clases, (en esta versión los docentes del curso tenían diferentes experiencias docente). Por ello, cuando el moderador tuvo la oportunidad de dirigirse a ellos se expresó así:

> Moderador: Se dio el caso de dos profesores que cuando entré yo al salón, en ese momento estaban sentados mientras los estudiantes trabajaban. Entonces para precisar, la metodología del curso está marcada, pero si el profesor no entiende la importancia de cada una de esas fases de los talleres, será difícil que el curso supere el enfoque tradicional. Cada fase tiene una actividad y un propósito específico, y el acompañamiento del profesor es todo el tiempo; todo el tiempo debe cuestionar a los estudiantes; plantearle algunas dudas al estudiante, no resolverles los problemas; sino darles pistas. Entiendo que es difícil el cambio cuando estamos acostumbrados a hacerlo de otra manera. [11]- (Episodio 11)

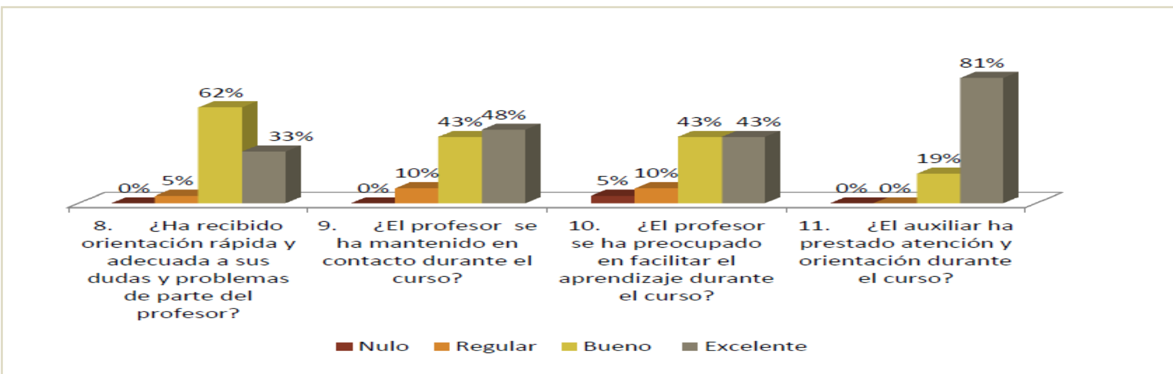
Para el moderador fue emergente la necesidad de ir a las aulas para contrastar la práctica con la teoría, esto porque se rompió su significado de formación de los profesores, a quienes creyó que había logrado "formar" en la metodología del curso.

Un aspecto importante que los profesores rescataron durante esta fase del proceso fue el protagonismo que los auxiliares han ganado dentro de las aulas:

> Profesor: En mi clase ha pasado algo muy importante, no sé si será porque yo soy tan antiguo en esto y el auxiliar es una cara joven: yo noté que a medida que el curso avanzaba los chicos preferían llamar al auxiliar para hacerle preguntas que a mí; incluso llegué a ver que con él interactuaban como con más tranquilidad. Creo que mi rol de “el profesor” no les daba tranquilidad para preguntar o solo para hablar de la forma en que hacían las cosas. [12]-(Episodio 12)

Esa precisión que el profesor (y otros que lo ratificaron) manifestó fue evidenciada al conocer una encuesta que se realizó al finalizar el curso a los estudiantes, en la que se les preguntó por su percepción del profesor y auxiliar; veamos la Ilustración 12 que sigue.

Ilustración 12. Apreciación de los estudiantes sobre el profesor y auxiliar



Consideramos que esta dinámica de considerar a un profesor y un auxiliar para cada grupo del curso de precálculo es una condición diferenciadora de otras aulas; el accionar del uno impacta al otro a medida que juntos gestionan la clase y construyen la actividad matemática.

La reflexión-sobre-la acción posibilitó que los profesores antiguos realizaran apreciaciones importantes referentes a GeoGebra y de cómo el uso de este recurso requiere también una reflexión constante para que éste contribuya en la construcción del conocimiento y al desarrollo del pensamiento variacional:

> Profesor: […] el uso del software permite generar una mayor y mejor interacción con la situación planteada, pero también pueden dispersar la visión del estudiante porque en ocasiones solo se limita a reproducir lo que el software le presenta. Se debe ser muy cuidadoso tanto en la

> manipulación del software y en cómo uno permite que los estudiantes lo usen; porque no es usar por usar el programa. [13]-(Episodio 13).

Es interesante ver cómo los profesores empezaron a reflexionar sobre la importancia de los recursos digitales en la clase de matemática previendo las posibles limitaciones en su puesta en escena al no orientar correctamente a los estudiantes sobre el aprovechamiento de los recursos a ser aprovechados para el aprendizaje (y la enseñanza).

Otro aspecto que observamos importante en esta etapa, es que algunos profesores recogían las actividades realizadas por los estudiantes durante la clase y otros no. Una profesora comentó que ella recogió las hojas de trabajo del Taller “Transformaciones de Funciones” (consta de tres actividades –en la Ilustración 13 se presenta la parte 1.1 de la Actividad 1– que busca estudiar las transformaciones que pueden sufrir las funciones en el plano como: traslación, expansión, compresión y reflexión. De los talleres propuestos es el único que se apoya en el uso de GeoGebra en todas las actividades).

La profesora compartió que analizando las hojas de trabajo, pudo observar que la mayoría de los estudiantes realizó un análisis interpretativo de la variación de las funciones pero difícilmente lograron establecer el valor de k para cada caso de transformación. Ella señaló que las transformaciones en las cuales los estudiantes presentaron menor dificultad fueron las traslaciones, contrario a las reflexiones; también señaló que pocos estudiantes hablaron sobre cómo se transforma la función al ser multiplicada la imagen o la preimagen por cero. Desafortunadamente, la profesora no presentó los trabajos; sin embargo, es relevante que ella se haya interesado en profundizar en los aprendizajes de sus estudiantes.

Ilustración 13. Actividad 1 de Taller "Transformación de Funciones"

Curso de Pre-Cálculo
Escuela de Matemáticas

TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Actividad 1

1.1 Abre el archivo **Transformaciones 1.ggb**, introduce la función $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$ y continúa con las siguientes indicaciones.

a) Da clic en la primera opción de ***representación a partir de*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***de*** $\boldsymbol{k * f(x)}$ de tal manera que:

   i. Selecciona $k > 1$, ¿qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando manipulas el deslizador?
   ii. Desmarca la selección anterior (para obtener un solo deslizador y una sola representación gráfica en la pantalla debes elegir *una opción solamente*), ahora marca $k < -1$. Describe lo que observas al manipular el deslizador.
   iii. Sigue con las otras opciones $k = -1$, $k = 0$, $-1 < k < 0$ y $0 < k < 1$, siempre desmarcando la selección anterior. Describe lo que le sucede a la representación gráfica de la función al manipular el deslizador en cada caso, respectivamente.
   iv. Elabora y escribe una conjetura de lo que le sucede a la representación de la función $kf(x)$ cuando $k \in \mathbb{R}$ a partir de la gráfica de $f(x)$.
   v. Comparte con tus compañeros y profesor.

4.1.2.4 Significados negociados de la Etapa 2

Notamos a través de la reconstrucción de esta etapa que las experiencias de la comunidad favorecieron la prácticas de los profesores permeando sus pensamientos didáctico y orquestal, en particular.

Un aspecto que hemos venido observando en el estudio que aquí reportamos es referido al pensamiento matemático-variacional: A través de este estudio hemos observado que la comunidad reflexiona en menor proporción sobre lo variacional, aspecto que podríamos interpretar como natural ya que el curso busca fortalecer sus elementos diferenciadores: la metodología de resolución de problemas y la incorporación de las tecnologías digitales para el desarrollo del pensamiento matemático-variacional; quizás por ello la comunidad ha negociado sus reflexiones alrededor de los aspectos relacionados con el pensamiento didáctico y orquestal, lo cual incidía en la actividad que ellos promovían en clase para sus estudiantes.

Dicha negociación sobre el *Pensamiento matemático-variacional* llama nuestra atención ya que cuando el profesor no comparte sus pensamientos *matemáticos*, por ejemplo, puede incluso estar convencido de que sus conocimientos matemáticos son correctos y planear estrategias para la clase con ambigüedades como las que veremos en el caso de estudio que nos permitirá profundizar en esta apreciación inicial.

Respecto al *pensamiento didáctico*, poco a poco los profesores de la comunidad se han visto en la situación de confrontar sus concepciones con la visión del curso de precálculo pues en muchas situaciones escolares suele ser visto como “normal” que el estudiante trabaje mientras el acompañamiento del profesor es nulo; al respecto, Calvo (2008) señala que el profesor debe actuar como guía en la resolución del problema, debe permitir que sea el estudiante quien proponga las soluciones y se dé cuenta de sus errores pero esto no quiere decir que el profesor se muestre como un simple espectador, sino que oriente el proceso. De manera que las exigencias metodológicas del curso llevan a los profesores a re-significar sus concepciones para interpretarlas y plantear opciones o alternativas de solución a los problemas motivados por una situación didáctica encontrada: no estar sentado sino circular en el salón para conocer lo que los estudiantes realizan; interactuar con ellos para aproximarse a sus razonamientos; los errores son fuente inagotable de conocimientos que podemos explotar para profundizar en el pensamiento matemático (Abrate, Pochulu, & Vargas, 2006), por ello hay que darle importancia para movilizar el razonamiento de los estudiantes en las puestas en común.

La reflexión-sobre-la acción ha posibilitado la negociación de la concepción instrumental de la tecnología digital; logramos observar que los profesores han mejorado sus nociones sobre la orquestación de este recurso para favorecer el proceso de construcción de la actividad matemática y el desarrollo de los procesos matemáticos.

4.1.3 Etapa 3: Tercera versión del curso

Se realizó en 2014-1. Dado el impacto que el curso venía teniendo, la Vicerrectoría Académica (desde el comité del Sistema de Excelencia Académica) solicitó extender el curso a todos los estudiantes de nuevo ingreso que tomarían Cálculo I; por tal razón en este período se amplió el número de grupos a 18: continuaron diez profesores de los antiguos e ingresaron ocho profesores a la CoP.

Al realizar el seguimiento a la comunidad, observamos que, este semestre, algunos de los auxiliares superaron exitosamente ese rol y se convirtieron en profesores del curso, valor agregado que a la fecha de este estudio se mantiene en el curso.

> Moderador: Yo creo que eso ha sido como lo más positivo pues son quienes más se han apoderado de la metodología, esto lo menciono por comentarios de los mismos profesores y de los mismos estudiantes. Hemos observado que muchas veces los estudiantes prefieren más bien recurrir al auxiliar que al profesor. Tal vez porque le tienen más confianza, tal vez porque lo ven más metido en la dinámica de la clase y en ese sentido yo creo que no haya habido queja de un auxiliar con el papel que ha desempeñado. El papel ha sido de acompañamiento, de no responderles a los estudiantes; y para mí eso es una ayuda fundamental al profesor, al curso. Hay auxiliares que se han compenetrado muy bien con el profesor, y en momentos que el profesor no ha podido estar, él ha asumido el papel del profesor lo ha hecho muy bien. [14]-(Episodio 14).

De manera que, para esta versión, la comunidad integró a nuevos profesores para quienes la metodología del curso era nueva, aspecto que inquietó a los investigadores de la comunidad por el impacto que esto podría tener en la actividad matemática que se llevaría a cabo en la aulas.

4.1.3.1 Reflexión-*para*-la acción: Diseño de las actividades

Para esta versión el trabajo de clase se distribuyó en dos horas de lápiz y papel y las otras dos con el uso del *software*, aunque la metodología siempre vinculaba la actividad matemática con ambos recursos, en esta ocasión por disponibilidad de aulas de informático se tuvieron que organizar en tiempos definidos para el trabajo con lápiz y papel y con el computador.

Un aspecto importante que emergió en la primera reunión de la CoP fue la reflexión sobre el papel de los auxiliares en la CoP pues se en la versión anterior del curso se presentaron dos situaciones que los profesores compartieron:

- ✓ Algunos auxiliares no tenían clara su función, por lo que algunos incurrían en estar sentados como espectadores durante la clase o sencillamente su aporte no iba más allá de organizar el salón, verificar y entregar materiales, tomar asistencia.
- ✓ Algunos profesores otorgaban más funciones de las que eran al auxiliar (1) al no asistir a las sesiones con frecuencia, por lo que el auxiliar era quien asumía un gran

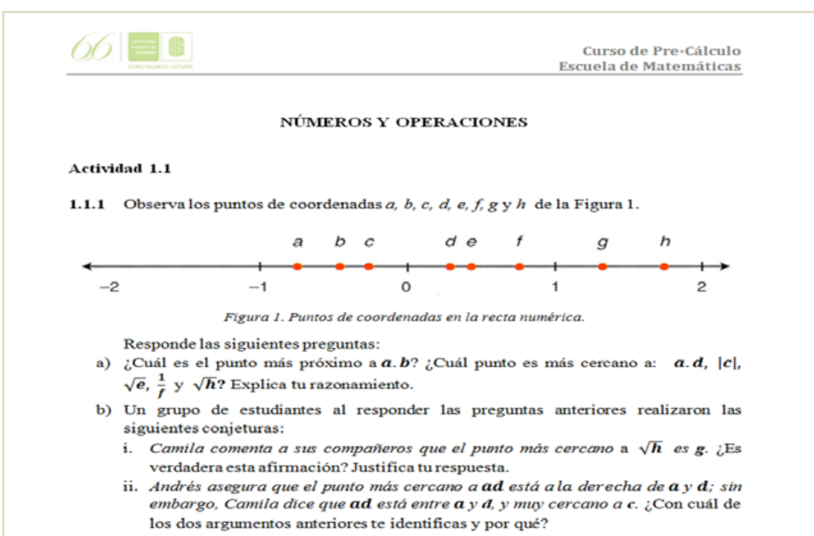
porcentaje de los procesos de enseñanza del curso; (2) al darle la responsabilidad de realizar los informes de evaluación.

Para subsanar esta problemática, la CoP propuso hacer un “manual de funciones” sobre el papel de los auxiliares en el aula de clase, ya que dependiendo del profesor titular se les asignaban funciones que quizás no le correspondían.

En la tercera versión del curso, participaron 18 profesores, de los cuales 8 participaron por primera vez, por esto en las primeras reuniones generales de la CoP, los participantes expertos aportaron sus experiencias de las versiones de los cursos anteriores sobre el pensamiento didáctico, el pensamiento orquestal del curso. Tres profesores habían participado en las versiones anteriores y sus aportes fueron tenidos en cuenta. De estos procesos de participación y reflexión ponemos evidencia en el siguiente dialogo:

> Profesor Novato 1: ¿No será muy poco tema para esas dos horas? [15]
> Profesor Experto: No, en el primer día, en ese momento sin computador, es bueno explicar la metodología del curso. Ahí se va parte del tiempo; y explicarles con ejemplos [la profesora hablaba de la actividad del primer taller del curso, el cual se muestra en la Ilustración 14]; el tiempo depende de lo que uno quiera profundizar. Si uno se queda únicamente con el taller, cuatro preguntica en diez minuticos sale. Pero, no, cada pregunta la profundizan sobre todo insistirle mucho en la justificación, porque ellos se quedan, por ejemplo, en la primera; ¿cuál punto está más cercano a*b?, dicen a, pero que ellos escriban porque ellos creen que eso es, que ellos escriban. [16]
> Profesor Novato 2: Por ejemplo en la primera actividad son cuatro puntos para dos horas. ¿No sé qué tanto puede llegar a ser eso? [17]
> Moderador: Sí, esa es una dificultad en esta versión del curso, porque esta es la primera vez que la vamos hacer durante dos horas. [18]- (Episodio 15).

Ilustración 14 Actividad 1.1 del Taller "Números y Operaciones"



Curso de Pre-Cálculo
Escuela de Matemáticas

NÚMEROS Y OPERACIONES

Actividad 1.1

1.1.1 Observa los puntos de coordenadas a, b, c, d, e, f, g y h de la Figura 1.

Figura 1. Puntos de coordenadas en la recta numérica.

Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el punto más próximo a $\boldsymbol{a.b}$? ¿Cuál punto es más cercano a: $\boldsymbol{a.d}$, $|\boldsymbol{c}|$, $\sqrt{\boldsymbol{e}}$, $\frac{1}{f}$ y $\sqrt{\boldsymbol{h}}$? Explica tu razonamiento.

b) Un grupo de estudiantes al responder las preguntas anteriores realizaron las siguientes conjeturas:

i. *Camila comenta a sus compañeros que el punto más cercano a* $\sqrt{\boldsymbol{h}}$ *es* $\boldsymbol{g}$. ¿Es verdadera esta afirmación? Justifica tu respuesta.

ii. *Andrés asegura que el punto más cercano a* $\boldsymbol{ad}$ *está a la derecha de* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{d}$*; sin embargo, Camila dice que* $\boldsymbol{ad}$ *está entre* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{d}$*, y muy cercano a* $\boldsymbol{c}$. ¿Con cuál de los dos argumentos anteriores te identificas y por qué?

Como se pudo deducir, los profesores de la CoP (tanto novatos como expertos) se enfrentan a experiencias nuevas en cada versión del curso de precálculo dado que algunas condiciones logísticas cambian ya que en esta versión los profesores no contaron con las salas de computadores durante las cuatro horas de clase, sino que trabajaron las primeras dos horas en aula regular y las otras dos en sala de cómputo (estas son las mismas condiciones en las cuales trabajó la profesora de nuestro estudio de caso). De la anterior intervención, es importante resaltar cómo lo profesores novatos reflexionaban-para-la acción ya que evaluaban cómo la extensión del taller podría afectar el desarrollo de la clase, e incluso orientan a los profesores novatos en lo didáctico al referir que las actividades del taller se hacen largas o cortas dependiendo de qué tanto se profundice.

Para los profesores novatos, la metodología les resultaba innovadora, en especial para los profesores que tenían bastante experiencia como profesor de la asignatura Cálculo I de la universidad. Pese a que ellos tienen una fundamentación matemática para acompañar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje del cálculo, no tenían experticia usando GeoGebra, aspecto que enfatizó su rol de novatos en la dinámica propia de la CoP de profesores de precálculo.

Respecto al taller de “Números y Operaciones” y a los recursos que los estudiantes emplean para desarrollarlo también surgieron inquietudes, las cuales fueron aprovechadas por el Moderador de la CoP para enfatizar en que el uso de la tecnología digital tiene lugar en cualquier momento de la clase resaltando con ello que lo importante es fortalecer los procesos de comunicación y de demostración en los estudiantes; veamos:

> Profesor Novato: Una pregunta, ¿ahí a los estudiantes se les puede dejar sacar calculadora cuando están en el tablero? [19]
>
> Moderador: Sí; nosotros hemos sido abiertos a que ellos, si tienen inclusive computador, si tienen tabletas que las saquen; algunos usan internet… lo que les decimos es ¡*Bueno! ¿Y eso por qué es cierto?* Jugamos mucho a que ellos justifiquen, escriban, que es una manera de cómo se llega al razonamiento y la demostración. [20]- (Episodio 16).

Pero el uso de la tecnología no solo surgía en las reuniones como inquietud orientada a los estudiantes; los profesores también se inquietaban ante este recurso pues para quienes no están familiarizados con él resultaba exigente fusionar el saber matemático involucrado en el taller con las características didácticas del archivo de GeoGebra diseñado para desarrollar la clase. No obstante, los profesores expertos siempre se disponen a formar a sus compañeros y ayudarlos a familiarizarse con GeoGebra como se deduce en la siguiente transcripción:

> Profesora 1: [Leyendo del taller] Nuevamente explora la figura arrastrando el punto x y responda las siguientes preguntas. ¿Para qué valores de x, se tiene que x $|x-1| = 2$? [21]
> Moderador: Esa pregunta es un poco más compleja, se necesita un poco más de visualización, entonces, el estudiante necesita coordinar lo que ve. [22]
> Profesora 2: Otra cosa que veo, qué relación tiene esa “a” [viendo la imagen de la pantalla del computador]. [23]
> Profesor 3: Tiene que ser para cambiar el valor de -1, -2, de pronto. [24]
> Profesora 4: Ah, cuando x-2, o x+2, ¿debe ser para eso verdad? [25]
> Profesora 3: Mueva el deslizador [le pide a quien está en el computador]. [26]
> Profesora 5: Ah sí, mira hay un valor es 3 y hay 2. [27]
> Profesor 3: si “a” es -1, si se mueve el deslizador de “a” cambia x-1. [28]
> Profesor 6: Ah, otra vez que no vi qué pasó. [29]
> Profesor 3: Sí, el “a” es variable. [30]-(Episodio 17).

El uso de los diferentes comandos que tiene GeoGebra también fue un reto para los profesores novatos por lo que expertos colaboraban explicitando a sus pares lo que cada taller iba exigiendo respecto a su uso; veamos:

> Profesor Novato: lo único que le iba a preguntar, por allá en el taller 2 habla que hacer una línea recta que una dos puntos [ver Ilustración 15 abajo]. ¿Lo hago con el comando que está arriba en unir dos puntos y hacer la recta o cuando se le dice que saque la segunda pantalla que la regresión quede en la imagen? [31]- (Episodio 18).

Ilustración 15. Actividad 1 del Taller "Análisis de Información"

Curso de Pre-Cálculo
Escuela de Matemáticas

ANÁLISIS DE INFORMACIÓN

Actividad 1

La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina en litros de un vehículo Toyota Corolla que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico.

Tabla 1: Rendimiento Toyota Corolla

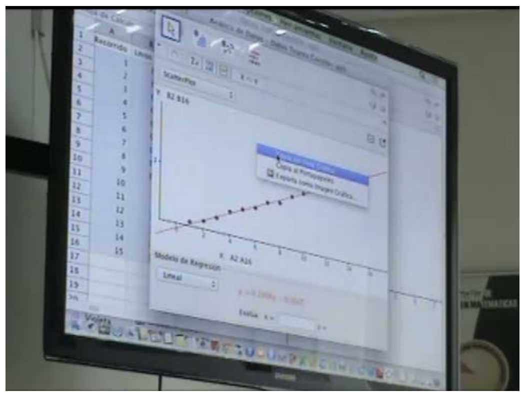
Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0.14	0.21	0.31	0.46	0.55	0.64	0.78	0.83	0.99	1.10	1.20	1.33	1.43	1.52	1.67

Contesta las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo. **Justifica** tus respuestas.

1. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico?
2. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 20 km en hora pico?
3. Realiza un gráfico con la información suministrada en la Tabla 1.
4. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer x km en hora pico?

> Moderador: **Venga y lo ponemos aquí [se proyecta el archivo para explicar] y vamos contestando con el archivo**. **En este taller hemos querido que se hable, esta partecita que yo voy a hacer [el moderador va haciendo en el programa lo que explica],** sería la que ustedes tendrían que hacer, ya que es la primera vez que los estudiantes van a usar GeoGebra para hacer análisis de regresión, *entonces la forma es señalar los datos, ir aquí donde dice Análisis de regresión de dos variables y aparece aquí esta pantalla, decimos Analiza; fíjese que el software es muy sencillo*… [32]
> Moderador: Ahí ya pues muestra los puntos, y al escoger la regresión, en este caso voy a escoger la lineal, vamos a tener por ejemplo esa ecuación. La forma de llevar esto a la pantalla gráfica, es dando clic derecho y decimos *Copia en vista gráfica* [Ilustración 16], cuando él ya copia esta gráfica pues podemos cerrar. Y explicarles a los muchachos qué es una regresión, por qué en últimas esta línea es la que más se aproxima y está más cerca de todos los datos, pero decirle a los estudiantes que si se me ocurre hacer cualquier otra regresión, es volver a repetir el procedimiento y que al computador lo que uno le diga, él lo hace […] [33]-(Episodio 19).

Ilustración 16. Manipulación de GeoGebra en la CoP



De las negociaciones este episodio se tiene que: i) Alrededor del pensamiento variacional (el texto subrayado en cursiva en la trascripción anterior), el Moderador intentó dar significado, desde la representación gráfica, a la regresión lineal: de todas las rectas posibles, la mejor recta para la regresión es aquella a la cual están más cerca la mayoría de los puntos de la nube, que en otras palabras y formalizando un poco con el conocimiento sobre el tema, será la recta que hace mínima la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre cada punto de la nube y la recta; ii) Sobre del pensamiento orquestal (el texto en negrilla, del texto anterior del moderador), se puede apreciar que el Moderador tiene incorporada la tecnología digital para orientar los procesos de formación al interior de la comunidad, ya que la pregunta realizada por el profesor fácilmente la pudo haber contestado diciendo “sí, se hace sacando la pantalla de Análisis de Regresión”; en lugar de esta acción él, de manera natural, emplea el archivo de GeoGebra para orientar sobre la pregunta. Este aspecto es muy importante ya que el Moderador ha expresado que este aspecto le ha costado trabajo a los profesores: emplear la tecnología más allá de la indicación que el taller da, el plantea:

> Moderador: La mayoría [de profesores] empieza ya a tener en cuenta el uso de las tecnologías, sin embargo me doy cuenta que algunos no han incorporado ese uso de las tecnologías a las prácticas docentes. O sea, van y hacen la actividad con la tecnología, pero pareciera que ellos no la usan después, inclusive para resolver otros problemas ni para resolver las mismas dudas que los estudiantes van generando en clase; la tendencia que he observado es que el tablero continúa siendo el recurso que más emplea el profesor para desarrollar la clase. No profundizan más en el aprendizaje de esa tecnología para la enseñanza. Algunos se quedan simplemente "que hay que mover aquí en el archivo" pero no exploran otras opciones; no miran qué otras oportunidades podría ofrecerle el software para favorecer la enseñanza. [34]-(Episodio 20).

La participación de los profesores dentro de la CoP permite que las actuaciones personales se doten de nuevos significados como resultado de compartir experiencias heterogéneas, de modo que las acciones de los profesores que participan en la CoP son permeadas por las experiencias de los profesores expertos.

Ante la necesidad de orientar a los profesores novatos en la metodología propia del curso de precálculo, surgieron los líderes o expertos, quienes acogieron de dos o tres profesores y les mostraban la metodología y orientaciones sobre el uso de los talleres diseñados por la CoP. Por lo que un aspecto importante a señalar en esta etapa de reflexión-para-la acción es que las reuniones de la CoP se desarrollan de dos formas: 1) El moderador dirige la sesión y los profesores participan; 2) Los profesores trabajan en equipos de forma que se integran profesores novatos y expertos (ver Ilustración 17).

Ilustración 17. Trabajo en equipo de los profesores de la CoP

Esta última forma resulta un espacio cómodo y de confianza entre pares para que los profesores discutan (sin la presencia del moderador) sobre aspectos del pensamiento variacional y orquestal simultáneamente, veamos:

> Profesora Experta (Lucero): ¿Qué más dirían ustedes de las propiedades del cono?, ¿qué características tiene la figura geométrica? Ellos [los estudiantes] lo deben decir así; a conciencia. [Lucero lee del computador la guía del profesor] *Se espera que los estudiantes respondan que es un cono, que es un cono recto*. [La profesora continúa hablando] Entonces ¿por qué? Porque el vértice coincide. ¿Qué se espera que identifiquen? Que la base es un círculo, ahí se espera que los chicos lo digan, si no hay que lograr que lo hagan. [Continua la profesora diciendo y señalando el taller impreso] Entonces acá ya con medidas ¿hablar de área y volumen? [35]
> Profesor 1: Sí. [36]
> Profesora 2: Sí; ¿pero acá está diciendo que el área? [37]
> Lucero: Sí, pero ellos van a decir que varían, calculemos el volumen. [38]
> Profesora 2: [Acepta haciendo un gesto con la cabeza]. [39]
> Lucero: Entonces empezar con área. [40]-(Episodio 21).

Como se observa, en las reuniones de la CoP la participación de los unos y los otros permite que los expertos orienten a los novatos, en este caso particularmente en cuestionar a los estudiantes para que ellos jueguen un papel activo durante la clase, aspecto que es determinante en la metodología de la resolución de problemas.

4.1.3.2 Reflexión-*en*-la acción: implementando las actividades diseñadas

Esta etapa, a medida que el curso avanzaba, los profesores reportaban la poca asistencia de los estudiantes a las sesiones (esto se debió a que (1) el curso, en esta etapa, no se realizó estrictamente antes de iniciar las clases de la universidad; (2) para atender a los 18 grupos, algunos de ellos quedaron en horario de 6:00 a 8:00 am, horario en el cual los estudiantes dejaron de asistir al transcurrir el tiempo).

En las reuniones que se realizaban durante el desarrollo del curso, uno de los profesores novatos, compartió con la comunidad su experiencia en el curso:

> Profesor Novato: La parte nueva para mí pues es el trabajo en la sala de computo, inicialmente pues empecé a ver qué estrategias utilizar porque, lo uno, el tiempo y si se les daba el espacio a ellos para que trabajaran todo el tiempo en el computador, quedaban muchas cosas en el aire que tocaba completar lo que se buscaba casi que haciendo milagros. Entonces lo que yo busqué, fue mirar cuando todos habían terminado la primera actividad, hacer un alto y vamos a socializar para poder nosotros sacar conclusiones y que no quedara en el aire. Y cuando se hacía eso se pasaba a la segunda y a veces no alcanzaba el tiempo para más. Sí es importante la socialización porque sin ese espacio se queda en el aire, se pierde prácticamente el trabajo. Esa es la parte nueva, le quiero agradecer a la profesora experta por toda la colaboración que me brindó y a otra profesora también, las dos me colaboraron bastante. [41]-(Episodio 22).

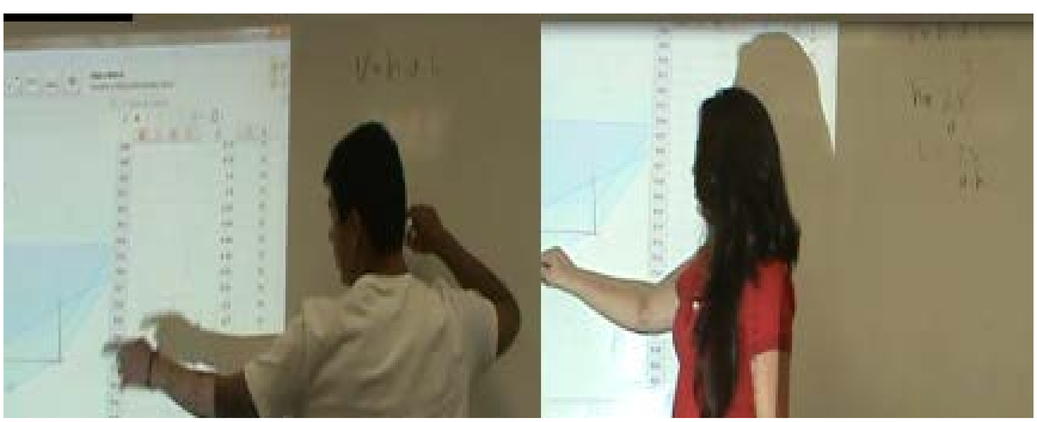
Es muy significativo poder palpar, a través del profesor, los procesos de reflexión constantes que realizaba de su práctica pedagógica y de lo que sucedía en el aula de clase; los diferentes dilemas a la cuales se enfrentó por la misma metodología que recién estaba incorporando no le impidieron poner en escena procesos de interpretación que le permitieran realizar ajustes desde el pensamiento didáctico para favorecer la gestión de la actividad matemática y aprovechar más acertadamente los espacios de socialización sobre los cuales él consideró trascendentales por permitir aterrizar el trabajo individual ya fuera con o sin el uso de la tecnología digital.

Como el profesor lo menciona, los novatos y expertos se apoyaban para sortear las situaciones que iban surgiendo compartiendo sus experiencias y comparando experiencias presentes con las pasadas, como lo podemos palpar a continuación:

> Profesora 1: Como no hay dos hijos iguales no hay experiencias iguales, lo digo por experiencia propia [risas]… Usted puede estar repitiendo el curso, pero no le va a ocurrir lo mismo; usted va a vivir una experiencia diferente. Empezando, los estudiantes que tengo este semestre son más abiertos para hablar, ya que en otros semestres los muchachos eran tímidos, no expresaban ideas, no preguntaban. Acá en este curso se trata de que los estudiantes argumenten; ellos sí preguntan mucho, pero ellos quieren que uno les responda, y como la metodología no nos permite en un principio institucionalizar todo el tema porque se pierde toda la estrategia que se está usando; ellos esperan mucho que el profesor les diga, como siempre ha ocurrido, entonces ya están en ese proceso de argumentar, porque ellos si preguntan pero a la hora de argumentar y convencer al otro prefieren guardarse sus ideas, eso me ha pasado en esta ocasión el grupo está más homogéneo. [42]-(Episodio 23).

Otra profesora experta compartió que en esta versión había logrado que los estudiantes participaran más en clase; para ello, mencionó, que sugirió a los estudiantes compartir su pantalla proyectándola ante el grupo (la Ilustración 18 nos ejemplifica esto). Así algunos estudiantes presentaron la manera como resolvieron con apoyo de GeoGebra cada una de las preguntas planteadas en la actividad, expusieron sus argumentos para convencer a sus compañeros de la veracidad de sus respuestas.

Ilustración 18. Estudiantes explicando su actividad matemática



Esta participación llamó la atención de los profesores quienes coincidieron en que los procesos de enseñanza y de aprendizaje del concepto de función mediado por GeoGebra permite vincular de forma dinámica las relaciones entre las magnitudes variables de las situaciones planteadas y facilitar al estudiante la visualización de las diferentes representaciones de la función (una imagen visual, una expresión analítica y tablas generadas en la hoja de cálculo del *software*).

Lo anterior es muy significativo ya que para superar algunas de las dificultades en la enseñanza del cálculo, Hitt (2005) plantea la visualización como un elemento clave en la comprensión del cálculo, visualización entendida como:

> La visualización matemática tiene que ver con procesos de transformaciones mentales y producciones en papel, en pizarrón o en computadora, generadas de una lectura de enunciados matemáticos o de gráficas, promoviendo una interacción entre representaciones para una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en juego (ibíd., p. 2).

En contraste, los profesores que eran estudiantes de la Maestría en Matemática esperaban un mayor rigor matemático durante las sesiones del curso, incluso abordar definiciones y conceptos formales del cálculo. Esto fue un fenómeno sobre el cual el moderador reflexionó y realizó unas precisiones que nos permiten conocer una posible explicación a la puesta en escena de concepciones de enseñanza de corte tradicional:

> Moderador: […] se nota que el profesor que ha estado trabajando, y especialmente aquí en la UIS, su pensamiento matemático, formal, lo tiene. Mientras que los recién egresados, tienen bastantes dudas sobre su pensamiento matemático. Los sorprende cierta estrategias, ciertas soluciones, ante el planteamiento de algunos problemas ellos más bien no participan, tal vez por temor de no hacer bien el problema, y pues porque también puede ser que no lo sepan. El hecho de ya ha haberse graduado no implica que ya tengan todos los conocimientos que van a impartir. Eso en cuanto a conocimiento matemático. También ve uno que tanto el novato como el veterano, hay algunos que ese pensamiento matemático solo lo ven desde lo formal. No lo piensan desde lo intuitivo, entonces, de hecho va muy arraigado tal vez en su concepción de lo que para ellos es la matemática y entonces algunos que hacen demasiado énfasis en rigor, y otros no consideran como factible que se pueda partir de lo intuitivo. [43]-(Episodio 24).

Veamos la intervención del profesor novato, en una de las reuniones de la CoP:

> Profesor: […] lo que pasa es que se les deja muchas preguntas sueltas y le toca a uno decirles "espero ahorita explicarles límites de funciones" [44]
> Moderador: ¿Para usted qué sería explicarles funciones? [45]
> Profesor: Esa idea de la convergencia, que se puede aproximar tanto como usted quiera; ahí uno puede hablar formalmente de la definición de límite, como en un curso de cálculo: el concepto más formal. [46]
> Moderador: ¿Y por qué hay que hacerlo formal? [47]

> Profesor: Ahorita no les puedo hablar de eso, como profesores de Cálculo. Pero ese proceso yo lo puedo hacer mejor de lo que está planteado para el taller. [48]-(Episodio 25).

Percibimos en el profesor la fuerte incidencia de su formación como "matemático técnico", esto nos evoca a De Guzmán (1995, en Gervasi, 2005, p. 19) quien da cuenta, de cuatro diferentes "tipos de matemáticos", a saber:

> - El matemático técnico es el matemático esencialmente "investigador". Es aquel que "profundiza, investiga y extiende los resultados matemáticos".
> - El matemático docente responsable de "la transmisión de los conocimientos matemáticos adecuados a cada nivel de enseñanza".
> - El matemático teórico de la educación es aquel cuyo "papel puede ser el estudiar, explorar, investigar los problemas que se derivan del proceso de transmisión de la matemática. Un problema nada sencillo será por ejemplo el determinar, entre las distintas vertientes de que se compone la matemática, cuáles son las adecuadas para la transmisión del conocimiento matemático.
> - El matemático divulgador para el que la construcción de la significación de un conocimiento, posee dos niveles: uno externo y otro interno. Si nos referimos al campo de utilización del conocimiento y a sus límites, estamos en el nivel externo. Hablamos de un nivel interno, si analizamos el cómo y el porqué de la herramienta elegida.

Otro estudiante de la Maestría en Matemáticas, quien fungió por primera vez como profesor del curso de precálculo evidenció, a diferencia de su compañero, ser "matemático docente" ya que ella

> Profesora Novata: A mí me gustó mucho la experiencia, porque me gusta como uno da herramientas y no da contenidos; me gusta ver que uno construye procesos, que uno construye nociones, que uno puede hacer preguntas que son lógicas pensarse. Es más interesante construir el conocimiento todos en grupo que uno solo con lápiz y papel. Me gusta bastante que, ellos [los estudiantes] al principio eran muy reacios a participar "quién quiere pasar al tablero, quién hizo esto", y no, ninguno pasaba […]. Me gustó lograr la participación, que ellos lograran hablar, que lograran equivocarse, pero corregirse al mismo tiempo, que lograran plantearse preguntas… [49]-(Episodio 26).

Observamos cómo la profesora logró para su formación un significado importante relacionado con el pensamiento didáctico ya que el contexto del curso de precálculo le permitió negociar que el rol docente, en relación con la matemática, pasa a tener una importancia significativa ya que "la tarea del docente consiste en todo caso, en buscar una situación apropiada, en proponer al alumno una situación de aprendizaje donde poder producir sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta o planteo del docente" (Gervasi, 2005, p. 22).

Precisamente la participación y los contrastes de las experiencias de los profesores novatos volcó la reflexión de la comunidad en la orquestación que los profesores estaban realizando en sus clases. El moderador de la CoP, vio importante reflexionar sobre las actividades del profesor durante el desarrollo de las clases ya que se percibió que los profesores estaban siendo expositores y pasivos en las clases y que el acompañamiento a los estudiantes no se daba siempre, por lo que la metodología de resolución de problemas se estaba afectando.

> Moderador: Sé, por algunos estudiantes que le comentan a uno, que algunos profesores, por ejemplo en la fase de interpretación, en lugar de dar oportunidad para que los estudiantes participen, son ellos [los profesores] quienes se ponían a formalizar el contenido: “Aquí había que hacer esto y venga les digo como es que se hacía”. Entonces ahí entra lo que hemos estado tratando en las reuniones: le estamos apuntando a la formación por procesos, no a llenar unos contenidos; conocer los errores y las concepciones de los estudiantes es importante porque se convierten en un recurso para construir la actividad matemática… [50]-Episodio 27).

Según la reconstrucción que hemos realizado, vemos reiteradamente que la CoP ha sido intensa en cuanto al seguimiento y a la reflexiones sobre la orquestación de los recursos en clase, resultado que nos llevaría a esperar que los profesores han comprendido significativamente la metodología de la resolución de problemas y las fases, hablando de los didáctico, inherentes al diseño de los talleres; nuestro caso de estudio nos permitirá ver con mayor precisión el impacto que los significados negociados por la comunidad sobre estos dos elementos del pensamiento reflexivo del profesores han tenido en la actividad matemática de sus estudiantes.

4.1.3.3 Reflexión-sobre-la acción. Evaluación del proceso

La evaluación como actividad sistemática y continua buscaba recoger información fidedigna sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del curso de precálculo de manera que se pudiera observar la calidad de la intervención didáctica y la evolución del desempeño de los estudiantes en actividades matemáticas de variación y cambio. Por tal razón, en cada versión del curso las reflexiones de la CoP sobre la evaluación eran permanentes pues tras cada versión quedaba la sensación de que era necesario mejorar la sistematización del desempeño de los estudiantes participantes de manera que fuera más eficiente realizar el análisis del impacto del curso de precálculo.

Los integrantes de la CoP, en concordancia con Martínez-Salanova (1980) en que la evaluación es una acción inherente y simultánea al quehacer educativo y que es “un proceso integral que permite valorar los resultados obtenidos en términos de los objetivos propuestos, acorde con los recursos utilizados y las condiciones existentes” Por lo que consideramos que:

- ✓ Los problemas que se propusiera para la prueba diagnóstica inicial se usaría también en la prueba diagnóstica final; ambas pruebas se realizarían en la plataforma para obtener los reportes digitales.
- ✓ Además de la prueba diagnóstica final en plataforma, se haría un taller-evaluación con la misma estructura de los talleres de la secuencia didáctica; los estudiantes realizarían esta actividad de manera individual y usando GeoGebra; tanto el taller-evaluación como la prueba diagnóstica final se harían en la última sesión del curso.
- ✓ Todas las sesiones del curso eran una oportunidad para «reunir evidencias» de la actuación de los estudiantes. Por tal razón, se consideró importante evaluar a los estudiantes en tres tiempos: al inicio del curso (prueba diagnóstica inicial), durante el desarrollo del curso, y al final (prueba diagnóstica final).

De modo tal que la CoP diseñó el *Formato de Evaluación DIPEVA* (Ilustración 19) que busca cuantificar las dificultades del pensamiento variacional (de aquí la abreviatura DIPEVA) de los estudiantes participantes. Como señalan Barajas & Parada (2014), el formato ofrece al profesor de precálculo medir cada indicador con una escala Likert entre 0 a 5, significando 0 "ausencia de dificultad", y 5 "el máximo nivel de dificultad" en 14 indicadores que responden a los cuatros estándares de competencias para el grado undécimo. El formato se concretó en un archivo de Excel que cuenta con la cantidad de hojas de cálculo que corresponden a la cantidad de estudiantes de cada grupo del curso, y una programación que sistematiza los datos, siendo este producto una cosificación de la CoP.

Para facilitar la comprensión en el uso del formato, la coordinación del curso dispuso de dos materiales de apoyo para los profesores que son hoy productos de la CoP:

- ✓ Un solucionario de los problemas de la prueba diagnóstica para que el profesor conociera, y analizara los problemas además de identificar el indicador que está asociada a cada problema.
- ✓ Un vídeo tutorial cuyo propósito era orientar sobre cómo usar el Formato DIPEVA (ver en https://www.youtube.com/watch?v=6LX6brNiEf0&feature=youtu.be).

Finalmente, la CoP decidió continuar con el informe cualitativo para cada estudiante en el cual el profesor relaciona otros aspectos de su desarrollo en el este pensamiento que podrían escapar de la medición cuantitativa que se realiza con el Formato de Evaluación DIPEVA.

Ilustración 19. Formato de Evaluación DIPEVA de la etapa 2014-1

Escuela de Matemáticas

FORMATO DE EVALUACIÓN DIPEVA

DATOS GENERALES

Nombre del Estudiante:	0
Carrera:	0
Código:	0

Ir a la LISTA

ID	INDICADORES	VALORACIÓN DEL NIVEL DE DIFICULTAD																	
		EN LA PRUEBA DIAGNÓSTICA INICIAL						DURANTE EL DESARROLLO DEL CURSO						EN LA PRUEBA DIAGNÓSTICA FINAL					
		0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
576-560	Relaciona correctamente los diferentes registros de representación de una función en una situación problema.																		
579-562	Modela con propiedad una situación de cambio a través de una función.																		
577-544-589	Reconoce las pendientes de funciones polinómicas o racionales, y las relaciona con el crecimiento o decrecimiento de las mismas.																		
572-557-586	Reconoce e interpreta situaciones que implican variación.																		
544-566	Interpreta la derivada como razón de cambio de cantidades variables y funciones en contextos matemáticos o no matemáticos.																		
575-565-588	Desarrolla o aplica métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos																		
573-587	Interpreta la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva.																		
581-564	Modela situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas.																		
582-567-590	Interpreta la derivada como razón de cambio de cantidades variables y funciones trigonométricas en contextos matemáticos o no matemáticos.																		
580-563	Comprende y aplica la definición de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo en la solución de problemas trigonométricos.																		
570-555-584	Reconoce características de los procesos infinitos utilizando diversas representaciones: gráficas, tablas o explicaciones verbales.																		
571-556-583	Utiliza aproximaciones numéricas o gráficas para deducir intuitivamente el límite de una función.																		
568-553	Aplica procedimientos aritméticos para resolver problemas que involucran procesos infinitos.																		

Fuente: Coordinación curso precálculo UIS

De esta manera, cada profesor del curso tenía la responsabilidad de evaluar a cada estudiante tanto cualitativa como cuantitavamente; se esperaba que con el apoyo de los auxiliares este ejercicio fuese enriquecedor ya que éstos podrían aportar elementos que hubiesen capturado durante el desarrollo del curso.

Tenemos, para concluir, que el interés fundamental de la mayoría de los integrantes de la comunidad de práctica en esta etapa de reflexión fue el de fortalecer los procesos de evaluación del curso para conocer de manera más clara el proceso de los estudiantes. Cuestión muy valiosa ya que esto evidencia el significado que la comunidad le ha dado a la evaluación en tanto que ha sido pensada y repensada para lograr estructurar una metodología que permita observar todo el proceso del estudiante involucrando las pruebas diagnósticas de ingreso y egreso y el desarrollo del curso.

4.1.3.4 Significados negociados de la Etapa 3

Esta etapa nos ha permitido observar que el significado más importante referido al pensamiento reflexivo que se negoció es que “aprender no consiste en incorporar informaciones ya constituidas y sí, en redescubrirlas y reinventarlas a través de la propia actividad del sujeto” (Castorina, 1988 en Gersavi, 2005, p. 20); esto fue característico en los profesores novatos quienes se mantuvieron en la periferia durante el curso, recibiendo la experiencia de los expertos. La comunicación entre los integrantes de la comunidad fortalece los procesos de formación (en los tres pensamientos, aunque con menor predominancia en el variacional) en los cuales se ven inmersos los profesores que ingresan al curso.

4.2 TALLER CAJA SIN TAPA: UNA MIRADA AL INTERIOR DE LA CoP.

Como mencionamos en el procedimiento metodológico, para realizar la caracterización de los procesos de interpretación y acción de profesores consideramos la elección de uno de los talleres de la secuencia didáctica, mismo que tuvo mayor preferencia por los estudiantes.

En las aplicaciones del Cálculo se necesita expresar una situación real en términos de una relación funcional para así lograr un modelo matemático de la situación. De modo tal que en este taller la actividad matemática es construir un modelo matemático que exprese el mayor volumen de una caja sin tapa, por lo que es una actividad de optimización. El taller “Caja sin Tapa” se ha empleado en el curso en todas sus etapas; la versión que se maneja en el curso es una adaptación de Leithold (1998, pp. 27) y suele aplicarse en la sesión 11 del curso.

Como se observó en los apartados de la sesión 4.1, dentro de la CoP, en las reuniones generales con los profesores, el moderador constantemente da orientaciones de tipo orquestal para seguir en el desarrollo de este taller:

> Moderador: La idea no es que el profesor le resuelva los problemas, cuando un estudiante se acerca y le pregunta que como se hace esto, entonces el profesor le diga "venga yo se lo hago" lo descalifique "no esto está bien, esto está mal" que el profesor siga preguntando "¿qué pasa si hace esto?" Sobre todo que no descalifique o califique excelente algo que ha hecho el estudiante hasta que no se ha discutido. Dentro de la metodología hay tiempos para que el estudiante trabaje solo, sin software, tiempos para que él trabaje con el software y tiempos para que él trabaje con los compañeros y el profesor. Entonces lo que se quiere finalmente es que el estudiante sea el que razone, el que piense, sea el que resuelva el problema con sus propios conocimientos, adquiera nuevos conocimientos a través de la actividad. Para eso también se tiene pensado una puesta en común, donde pues también hay que aclarar los conceptos. [51]-(Episodio 28).

Como mencionamos anteriormente, el curso de precálculo cuenta con una versión de cada taller para el estudiante y otra para el profesor; la guía del profesor se desarrolla a partir de la versión del taller del estudiante con el complemento adicional de que brinda apoyo en lo didáctico y conceptual al profesor en algunos puntos del taller. El objetivo de dicho material es:

> Moderador: […] Previendo que no todos los profesores, desde la primera actividad, no todos tienen la formación metodológica ni teórica, entonces una forma de llegar es que el profesor primero lea esas actividades, lo que llamamos guía para el profesor, para que se haga una idea sobre todo, porque es que planteamos la pregunta, o porque usamos determinado archivo, que inclusive debería hacer el profesor ante determinada respuesta, es como un análisis a priori […]. [52]-(Episodio 29).

De modo tal que dicho apoyo representa un recurso o cosificación que la CoP del curso tiene para gestionar el proceso de reflexión-*para*-la acción de cada taller. Es importante señalar que cada guía de profesor es concebida como un recurso que está en constante retroalimentación pues se está nutriendo de los aportes de los profesores respecto a las necesidades que emergen del aula de clase.

4.2.1 Guía del Profesor: Cosificación de la reflexión-para-la acción

A continuación presentamos la guía del profesor del taller objeto de estudio. El taller para los estudiantes planeado por la CoP está diseñado en seis partes, por tal razón la guía será presentada dividiéndolo explícitamente en esas partes. La Ilustración 20, corresponden a la guía del profesor sin el uso de Geogebra, donde se presentan unas sugerencias al profesor para que apoyen la actividad matemática de los estudiantes, y la ilustración 21, que siguen muestran el taller del estudiante.

Es de resaltar que las Actividades 1.1, 1.2 y 1.3 tienen por objeto que los estudiantes, empleando sus presaberes y elaborando estrategias, construyan una posible solución al problema, argumentando sus ideas. De ellas es importante conocer los conocimientos que traen los estudiantes, sus dificultades y sus concepciones.

a) Primera parte

Ilustración 20 Parte 1 del taller Caja sin Tapa de la guía del profesor

Curso de Pre-Cálculo
Escuela de Matemáticas

Guía Para el Profesor.

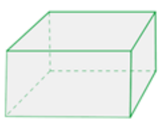
Objetivo:
Investigar y comprender contenidos matemáticos a través del uso de distintos enfoques para el tratamiento y resolución de problemas del mundo real aplicando modelos matemáticos e interpretar resultados a la luz de la situación inicial.

Objetivos Específicos

- Registro de los datos en una tabla y análisis de la información suministrada.
- Relación entre los registros (tabular y gráfico).
- Análisis de la función y de su relación con el fenómeno en estudio.

Paralelepípedo.
Un paralelepípedo es un poliedro de seis caras (por tanto, un hexaedro), en el que todas las caras son paralelogramos, paralelas e iguales dos a dos. Un paralelepípedo tiene 12 aristas, que son iguales y paralelas en grupos de cuatro, y 8 vértices.
Un paralelepípedo en el que todas sus bases son rectángulos, y por tanto todas sus caras son perpendiculares entre sí, es un ortoedro.

Ortoedro



$$A = 2(a.b + a.c + b.c)$$
$$V = a.b.c$$

En la clase anterior se le solicita al estudiante que para el día siguiente, traiga:

1. Dos hojas de 60 cm por 40 cm.
2. Unas tijeras.
3. Una escuadra.
4. Cinta y pegante.

Curso de Pre-Cálculo
Escuela de Matemáticas

1. Construcción de una caja sin tapa

Se quiere construir una caja sin tapa a partir de un material rectangular de 60 cm de largo por 40 cm de ancho, cortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas.

Actividad 1.1: Construcción de una caja sin tapa.

1. Tome una hoja de 60 cm de largo y 40 cm de ancho.
2. Recorte cuadrados en cada una de las esquinas, construye la caja.
3. Tome la medida del largo, ancho y altura de la caja construida.
4. ¿Cuál es su volumen?
5. Compare su caja con compañeros y escriba en la tabla:

Largo	Ancho	altura	Volumen

6. ¿Cuál es la caja construida que tiene mayor Volumen?
7. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja si se desea obtener el mayor volumen? Explique.

En esta parte se espera que los estudiantes trabajen en equipo y se den cuenta que a pesar de la hoja tener las mismas dimensiones el volumen cambia. El trabajo se hace en grupos de cuatro estudiantes y van apuntando los datos obtenidos

Ilustración 21. Parte 1 del taller Caja sin Tapa actividad para el estudiante

CAJA SIN TAPA

Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja rectangular de tamaño 60 cm por 40 cm, cortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas.

Actividad 1.1
Construcción de una caja sin tapa.

1. Halla la medida del largo, ancho y altura de la caja construida.
2. ¿Cuál es su volumen?
3. Observa la caja realizada por tus compañeros y escribe en la tabla los datos de las cajas de 5 de ellos y los de la tuya.

Largo	Ancho	Alto	Volumen

4. De las cajas que registraste sus datos ¿Cuál es la caja de mayor volumen? ¿Qué relaciones encuentras entre las dimensiones de la caja?
5. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja si se desea obtener el mayor volumen? Explica el procedimiento.

Para esta actividad es necesario llevar a clase la cartulina y otros materiales para realizar las cajas ya que los estudiantes suelen olvidarlos. En esta primera parte se espera que los estudiantes resuelvan las preguntas utilizando sus conocimientos previos, el profesor cuestiona el porqué de sus respuestas, buscando la argumentación de la actividad matemática.

El profesor no debe juzgar las actividades de los estudiantes en buenas o malas; tampoco dar pistas sobre hacer una cosa u otras ni pedir que piense una mejor estrategia porque la que usa está rara. Se debe hablar con los estudiantes tratando de indagar el porqué de sus decisiones y motivarlos a que escriban pues suelen evadir esta actividad. Se da un tiempo prudencial y luego se pasa a la segunda parte llamada Exploración.

La Ilustración 22, muestra la guía del profesor de la actividad matemática 1.2 y la ilustración 23, que siguen muestran el taller del estudiante, en esta actividad se busca que el estudiante argumente sus respuestas.

b) Segunda parte

Ilustración 22 Parte 2 del taller Caja sin Tapa de la guía del profesor

Actividad 1.2

Exploración

1. ¿Qué elementos varían?
   Se espera que el estudiante identifique como elementos que varían las tres medidas de la caja y que todo depende del recorte del cuadrado. De igual forma que varían el volumen de la caja

2. ¿Qué valores pueden tomar la medida del cuadrado a recortar? ¿Por qué?

Los estudiantes pueden decir:

i) El lado a recortar es de 1 a 40 cm.
ii) El lado a recortar es de 1 a 60 cm
iii) los valores de las variables pueden tomar los números positivos.
iv) la medida varia de cero a 20 cm.

3. ¿Qué sucede con el largo y el ancho, cuando cambia la medida del cuadrado una de las magnitudes? Explique.
   Se espera que los estudiantes, encuentren la relación entre el largo y el ancho con los valores que toma el cuadrado.

4. Expresa de manera algebraica el volumen de la caja en función del lado del cuadrado.

En ella se requiere tener el volumen de un paralelepípedo.

$$V = x * (4 - 2x) * (6 - 2x)$$

5. Hallar el volumen de la caja si el cuadrado recortado es de $x = 2\ dm$.
   Se espera que reemplace en la fórmula del volumen y se dé cuenta que no hay volumen.

Taller del estudiante

Ilustración 23 Parte 2 del taller Caja sin Tapa actividad para el estudiante

Actividad 1.2

Exploración

1. Observa la tabla de la Actividad 1.1 e identifica qué magnitudes variaron.
2. ¿Qué valores pueden tomar la medida del cuadrado a doblar? ¿Por qué?
3. ¿Qué sucede con el largo y el ancho, cuando cambia la longitud del cuadrado? Explica.
4. Expresa de manera algebraica el volumen de la caja en función del lado del cuadrado.
5. Halla el volumen de la caja si el lado del cuadrado recortado mide 2 dm.

Se proponen unas preguntas donde el estudiante decide y propone sus soluciones, y el profesor en la tercera parte llamada socialización, indagará los argumentos de los estudiantes del resultado de cada una de ellas; es allí donde se propone la discusión colectiva, aquí el trabajo es individual.

En la pregunta 1, se espera que el estudiante identifique como elementos que varían las tres medidas de la caja y que todo depende del recorte del cuadrado. De igual forma que varía el volumen de la caja. En la pregunta 2, los estudiantes pueden decir:

i) El lado a recortar es de 1 a 40 cm.

ii) El lado a recortar es de 1 a 60 cm.

iii) Los valores de las variables pueden tomar los números positivos.

iv) La medida varía de cero a 20 cm.

En la pregunta 3, se espera que los estudiantes, encuentren la relación entre el largo y el ancho con los valores que toma el cuadrado.

En la pregunta 4 tener el volumen de un paralelepípedo $V = x(4-2x)(6-2x)$ y en la pregunta 5 se espera que reemplace en la fórmula del volumen y se dé cuenta que no hay volumen.

c) Tercera parte

Esta parte es la misma para el estudiante y el profesor, tal como se muestra en la ilustración 24

Ilustración 24. Parte 3 del taller Caja sin Tapa actividad para el estudiante

Actividad 1.3
Socialización

Discute con tus compañeros y el profesor las soluciones de los anteriores problemas y escribe una conclusión al respecto.

Es en este momento donde el profesor buscará la mayor información sobre el conocimiento de sus estudiantes y, con su orquestación de la clase, propiciará el pensamiento analítico y crítico del estudiante, buscando que se cuestionen sobre los argumentos propuestos por los compañeros y por ellos mismos. Es muy importante que el profesor sea creativo para crear preguntas que movilicen la discusión, por ello debe poner en juego su conocimiento matemático sobre el tema para, incluso, detectar dificultades y errores para ponerlos en juego para construir la conclusión de la actividad.

Para las siguientes actividades, y según la logística de ese semestre, las Actividades 1.4 y 1.5 del taller se realizarían en Sala de Cómputo. Las Actividades 1.4 y 1.5 son de exploración dirigida, es decir trabajando en GeoGebra el profesor acompañará la actividad matemática con el recurso tecnológico. Además, según el diseño didáctico de los talleres, estas actividades comprenden la *fase de explicitación* de tal manera que se llegue a la institucionalización del conocimiento y a la solución del problema. La ilustración 25, no permite observar la guía del profesor sobre la exploración dirigida, con el uso del taller diseñado por la CoP en Geogebra.

d) Cuarta parte

Guía del profesor

Ilustración 25. Parte 4 del taller Caja sin Tapa de la guía del profesor

Actividad 1.4
Exploración Dirigida

1. Abrir el archivo en Geogebra "caja si tapa"
2. Anima el punto P. ¿Qué representa el punto P en el problema?
3. Explora el archivo y verifica las respuestas dadas los incisos 2 y 3 de la Actividad 1.1.

Al ver el movimiento, identifica como las medidas de la caja cambian y de igual forma su volumen.

4. ¿Cuáles son las medidas de la caja si la altura es de 5 cm? ¿cuál es su volumen?

Se requiere hacer la conversión de dm a cm.

5. Utilizando la hoja de cálculo, hallar el volumen de la caja si la altura 10 *cm*.
   Realizar el manejo del software y manejar la hoja de cálculo.
6. Usando la expresión algebraica del volumen de la caja, haga la gráfica.
   En esta parte se espera que los estudiantes identifiquen la expresión algebraica de la situación y que en la hoja de entrada la escriban.
7. De acuerdo a la gráfica, ¿Cuándo el volumen es cero? ¿Cuándo el volumen es 20 cm^3? ¿Cuándo el volumen es 90 cm^3? ¿Cuál es el volumen máximo?
   Se puede usar la gráfica o la hoja de cálculo, en la gráfica hay tres valores donde el volumen es cero, pero hay un valor que no es del dominio.
   Se puede hacer preguntas donde no exista el volumen.
8. Halla la medida del lado a recortar para que el volumen sea máximo.
   Con la gráfica podemos encontrar donde el valor es máximo y de esta forma hallar el lado a recortar para tener el volumen máximo.
9. Usando la herramienta "lugar Geométrico" señale el punto x y luego el punto P. ¿Qué representa esta figura?

Se elige la herramienta lugar geométrico, se señala el punto x y luego el punto P y aparecerá la gráfica.

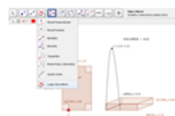


Ilustración 26. Parte 4 del taller Caja sin Tapa actividad para el estudiante

Actividad 1.4
Exploración Dirigida

1. Abrir el archivo en GeoGebra "caja sin tapa"
2. Anima el punto P. ¿Qué representa el punto P en el problema?
3. Explora el archivo y verifica las respuestas dadas los incisos 2 y 3 de la Actividad 1.1.
4. ¿Cuáles son las medidas de la caja si la altura es de 5 cm? ¿cuál es su volumen?
5. Utilizando la hoja de cálculo, hallar el volumen de la caja si la altura 10 *cm*.
6. Usando la expresión algebraica del volumen de la caja, realiza la gráfica.
7. De acuerdo a la gráfica, ¿cuándo el volumen es cero?, ¿cuándo el volumen es 20 cm^3?, ¿cuándo el volumen es 90 cm^3?... ¿Cuál es el volumen máximo?
8. Halla la medida del lado a recortar para que el volumen sea máximo.
9. Usando la herramienta "Lugar Geométrico" señala el punto *x* y luego el punto *P*. ¿Qué representa esta figura?

En la ilustración 26, dan las orientaciones al estudiante y en esta parte del taller se usa GeoGebra buscando que el estudiante afiance sus conocimientos y superé sus errores conceptuales por medio del software. El profesor dará indicaciones iniciales sobre el uso de algunas herramientas del programa que le serán de ayuda para que el estudiante pueda seguir las indicaciones y responder las preguntas en forma individual para comentar al grupo sus hallazgos en la siguiente parte. En la pregunta 7 se puede usar la gráfica o la hoja de cálculo, en la gráfica hay tres valores donde el volumen es cero, pero hay un valor que no es del dominio. Se pueden hacer preguntas donde no exista el volumen. En la pregunta 8 con la gráfica podemos encontrar donde el valor es máximo y de esta forma hallar el lado a recortar para tener el volumen máximo. En la pregunta 9 se elige la herramienta “Lugar geométrico”, se señala el punto x y luego el punto P y aparecerá la gráfica.

De acuerdo a la habilidad que tenga el estudiante sobre el uso de GeoGebra podrá responder las preguntas empleando diferentes representaciones: una tabla, por medio de un gráfico o según la expresión algebraica. Esta diversidad de estrategias de solución fomenta en los estudiantes el uso de los diversos sistemas de representación del pensamiento variacional. Cuando el profesor considere oportuno pasará a la quinta parte del taller.

d) Quinta parte

En la ilustración 27 no hay sugerencias para el profesor, por tanto las versiones con el estudiante son iguales

Ilustración 27. Parte 5 del taller Caja sin Tapa del estudiante

Actividad 1.5
Discutiendo y comunicando

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y soluciones de la Actividad 1.4.

En nuestra dinámica de clase el profesor buscará las argumentaciones y diversas estrategias de solución empleadas en el software propiciando el compartir de experiencias entre los estudiantes ya que es en esta parte de la clase donde los estudiantes van a responder las preguntas del taller y sacar conclusiones sobre sus aprendizajes y los posibles errores conceptuales que se tuvieran esto les permitirá afianzar sus conceptos o proponer nuevas estrategias de solución.

La Actividad 1.6 está propuesta para que el estudiante trabaje solo y ponga en juego las habilidades que adquirió en el taller.

e) Sexta parte

En la ilustración 28, se muestra la orientación libre que es la misma para el profesor y el estudiante

Ilustración 28. Parte 6 del taller Caja sin Tapa actividad para el estudiante

Actividad 1.6
Orientación Libre

1. Abre el archivo de Geogebra "cúbica"
2. Mueve el deslizador
3. ¿Qué ocurre en la gráfica si $a = 0$? ¿Si $a > 0$? ¿Si $a < 0$?
4. ¿Qué ocurre en la gráfica si $b = 0$? ¿Si $b > 0$? ¿Si $b < 0$?
5. ¿Qué ocurre en la gráfica si $c = 0$? ¿Si $c > 0$? ¿Si $c < 0$?
6. ¿Qué ocurre en la gráfica si $d = 0$? ¿Si $d > 0$? ¿Si $d < 0$?

¿Cuáles son las formas gráficas de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$? **EXPLICA EL PROCEDIMIENTO REALIZADO PARA LA OBTENCIÓN DE TU RESPUESTA. JUSTIFICA TU RESPUESTA.**

En la orientación libre, es una parte de la clase que le permitirá al estudiante afianzar los conocimientos adquiridos y avanzar en las estrategias de solución que haya aprendido en la realización del taller. El profesor, dependiendo del tiempo utilizado para hacer el taller por parte de los estudiantes, puede dejar la actividad para que ellos lo hagan en la casa entregándoles el archivo de GeoGebra.

Para concluir, cabe señalar que la guía docente es un producto que no está acabado pues la comunidad en cada versión del curso va alimentándola (ésta y la de los demás talleres). Así como pudimos apreciar la guía, se observa que la comunidad ha dado orientaciones en aspectos matemáticos del pensamiento variacional pero más orientados hacia lo procedimental y menos en la comprensión de las nociones de los objetos matemáticos subyacentes en el problema propuesta; también se pudieron detectar orientaciones sobre lo didáctico, muy en particular en el "no validar ni invalidar" las participaciones de los estudiantes; del mismo modo se hallaron orientaciones orquestales referidas al uso de GeoGebra y de la pregunta para movilizar procesos de comunicación y argumentación.

A modo de síntesis

Como hemos observado, a través de la reconstrucción de las tres etapas del curso de precálculo, han sido valiosos los procesos de interpretación y acción que los profesores han vivido al participar en el curso de precálculo porque éste representa un importante espacio para la formación continuada de los profesores que ejercen la profesión y para quienes recién inician sus prácticas docentes.

> Moderador: Al curso se desarrolla con una comunidad que hay que fortalecerla; a veces quizás somos demasiados optimistas al esperar que los profesores cambien sus concepciones con unas pocas reuniones que hemos tenido. Pienso que si hubiera una oportunidad de una mayor continuidad en con la comunidad, habría personas que podrían llegar a ser unos excelentes profesores […]. De hecho de la comunidad actual, algunas personas que comenzaron como auxiliares, ya en estos momentos están trabajando como profesores y lo están haciendo de una buena manera; esto es producto de la continuidad que han tenido en el curso desde que empezó. [53]-(Episodio 30).

Después de esta reconstrucción, resaltamos tres significados negociados:

- Respecto al pensamiento didáctico, la mayoría de los profesores de la comunidad han transitado con esfuerzo hacia una ruptura con las formas algebraicas del tratamiento de los objetos matemáticos del Cálculo, para dar lugar a las ideas dinámicas de cambio y variación.
- Respecto al pensamiento orquestal, no cabe duda que el aprendizaje más significativo ha sido el ver la tecnología digital como un recurso que favorece la construcción de la actividad matemática en tanto que le permite generar un espacio donde los estudiantes, en forma individual o grupal, pueden ensayar, experimentar, corroborar e incluso equivocarse y ser ayudados en la realización de actividades y tareas inherentes a la actividad matemática.
- Con menor fuerza, hemos observado evidencias de que, a través de los problemas de los talleres, los investigadores del curso intentan movilizar las concepciones de los profesores de la CoP para explicitar que, desde el enfoque del curso y del MEN (2006), el pensamiento variacional tiene que ver con el reconocimiento, percepción, identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos,

así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

También pudimos observar, a lo largo de las etapas, que no todos los profesores incorporaban la metodología de resolución de problemas, esto muestra que por interesante que sea una propuesta didáctica se requieren ciertos dominios del pensamiento reflexivo de los profesores para que sean viables como recursos de formación y de enseñanza. Bien señalan Moreno & Flores (2000, p. 211) al decir que la forma en que el profesor de matemática adquieren competencia para la enseñanza es compleja, "ya que la docencia es una actividad práctica, por lo que el profesor no puede surtirse exclusivamente de una preparación teórica, y a la vez, es ingenuo e irresponsable esperar adquirir la profesionalidad por medio del ejercicio empírico, dada la complejidad e importancia social de su tarea, en la que se trabaja con sujetos que no pueden someterse a experimentos de manera irreflexiva".

Para concluir la reconstrucción de las negociaciones realizada resaltamos un aspecto emergente que consideramos importante: El curso de precálculo y la comunidad de práctica están estrechamente relacionados ya que la comunidad representa un espacio de formación continuada para los profesores quienes, a su vez, requieren de un acompañamiento constante que promueva la reflexión sobre sus prácticas pedagógicas para impactar la acción orientada a favorecer el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes. Es decir, esto nos hace pensar que, si se contempla extender el curso de precálculo a otros espacios educativos, se deben favorecer las condiciones para que allí también exista una comunidad de práctica que lo soporte.

Veremos a continuación los procesos de interpretación y acción desde la experiencia de Lucero y cómo estos impactan la negociación de significados de la profesora. En el análisis veremos, además, los aspectos que Lucero negoció en la planeación del taller como resultado de la experiencia obtenida en las versiones 2013-1 y 2013-2 del curso.

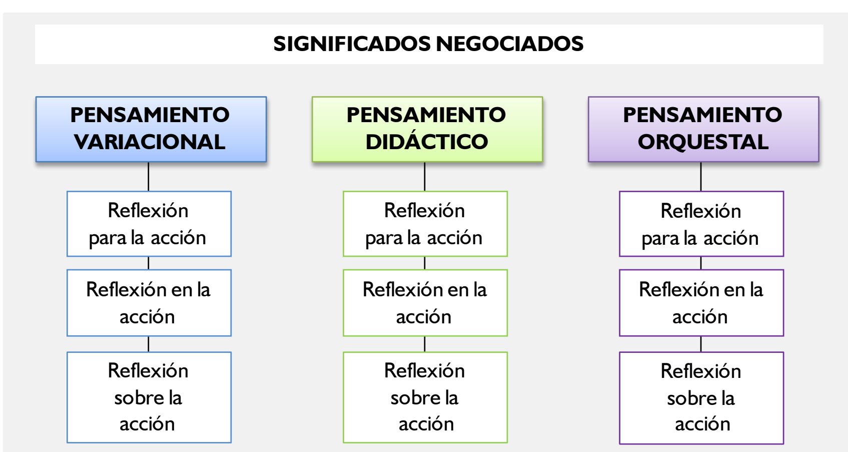
5.

EL CASO DE LUCERO: UNA APROXIMACIÓN A LOS PROCESOS DE INTERPRETACIÓN Y ACCIÓN DE LA CoP DEL CURSO DE PRECÁLCULO.

Antes de dar paso a la presentación de los resultados queremos expresar que reconocemos la complejidad de “ser profesor” por las múltiples variables que inciden en su caracterización las cuales en ocasiones llevan a la comunidad a distinguir entre “buenos” y “malos” profesores. Con este trabajo no pretendemos caer en esa distinción, por el contrario, con la caracterización que proponemos deseamos explicitar que los procesos que se desarrollan al interior de grupos como las comunidades de práctica son oportunidades de formación profesional; queremos evidenciar, que la producción del conocimiento respecto a lo que constituye una enseñanza adecuada, como lo afirman Anijovich, Cappelletti & Sabelli (2007, p. 231), “no es propiedad exclusiva de los centros universitarios y de investigación y desarrollo, sino también del análisis y la aceptación de la riqueza que encierran las buenas prácticas de enseñanza” lideradas por las CoP, para nuestro caso.

La estructura de la categorización que presentaremos puede visualizarse en la ilustración 29 Que sigue.

Ilustración 29. Estructura de la presentación de los significados de Lucero



Como se observa en la ilustración 29, encabezaremos la negociación de significados distinguiendo los tres elementos del pensamiento reflexivo según el modelo R-y-A (pensamiento matemático-variacional, didáctico y orquestal); para cada caso analizaremos lo que emergió a la luz de los tres tiempos de los procesos de reflexión (*para-la, en-la,* y *sobre-la* acción) en el caso de Lucero (el tiempo de reflexión-para-la acción se caracterizó a través de la Guía del Profesor en el capítulo anterior).

Lucero es Licenciada en Matemáticas, mientras se tomaron los datos de la investigación ella realizaba la Maestría en Educación Matemática. Ha sido docente de educación básica y media durante pocos años. Es una persona comprometida con su formación, activa y colaboradora. Lucero tiene poca experiencia como docente de cálculo y aunque conoce las tecnologías digitales no se considera experta en cómo usarlas en el aula de clase, pese a que realizó un diplomado sobre *"Formación y Acceso para la Apropiación Pedagógica de las Tic"*. Es una persona dinámica, comprometida en la CoP y desde el inicio de actividades de la CoP siempre participó de manera muy comprometida.

Lucero fue seleccionada como caso de estudio por la riqueza de sus participaciones en la CoP, siempre fue activa y comprometida con su formación profesional, mostrando un vivo interés en mejorar sus prácticas profesionales. Otro factor que nos motivó a tomarla como caso de estudio es que fue profesora en todas las etapas del proceso, lo que deja ver el proceso de negociación de significados logrados por la participación en la CoP. En el inciso siguiente mostraremos cómo ella comparte la experiencia vivida y cuáles fueron los aportes de sus compañeros.

> Investigador: ¿Qué le aportó a usted como profesora la comunidad de práctica? [1]
> Lucero: Uy muchísimo, porque en este campo de la docencia el compañero es indispensable en el sentido en que si entre nosotros nos corregimos, nos ayudamos, nos aportamos, nos damos ideas; […] bueno, los que estábamos en la mañana le hacíamos sugerencias a los de la tarde "no mire que esta pregunta así enreda a los muchachos, porqué mejor no la afronta de esta manera cuando la estén socializando" o respecto al software "mire que es más fácil por este lado, por el otro lado se enredan" y lo mismo hacían ellos cuando estábamos reunidos porque no nos podían ayudar con la actividad del otro día.. [...] Y cualquier duda que uno tenía buscaba al compañero y él le explicaba. Buscábamos al Moderador también en algunas ocasiones, nos explicaba las actividades, en el uso de GeoGebra un profesor el otro profesor nos explicaba bastante cómo utilizarlo para resolver las actividades. Entonces creo que sin ese aporte que hizo cada compañero para mi hubiera sido tremendamente difícil el abordar esos cursos. [2]-(Episodio 1).

De otra parte, como hemos mencionado, la sesión del taller "Caja sin Tapa" fue filmada; de allí se recuperan los episodios que nos permitirán dar cuenta de las negociaciones realizadas por Lucero en su pensamiento reflexivo. Lucero estuvo acompañada en clase por una Auxiliar (profesora en formación) de quien dejaremos ver su actuación en la medida que su accionar permee la clase.

Otro aspecto importante a mencionar es que en 2014-1, versión a la que corresponde la toma de datos de Lucero, el curso tuvo que ajustar sus condiciones logísticas para su desarrollo: una parte de la clase se dio en un salón sin computadores; la segunda, en los laboratorios de cómputo de la institución.

5.1 SIGNIFICADOS CONSTRUIDOS POR LUCERO EN EL PROCESO DE REFLEXIÓN-PARA-LA ACCIÓN

Como hemos mencionado, Lucero ha trabajado el Taller "Caja sin Tapa" en dos ocasiones. Para efectos de nuestro estudio, indagamos con la profesora las reflexiones y los procesos de interpretación que ha realizado en torno a él para diseñar la planeación de la actividad matemática propuesta en la versión 2014-1 del curso, esto con el propósito de identificar los aspectos que ella consideró debían mejorarse ya sea de lo variacional, lo didáctico o lo orquestal.

Las reflexiones de Lucero sobre las versiones anteriores son destacables respecto a la construcción de la caja; ella consideró cambiar la actividad de recortar el papel por doblarlo:

> Lucero: Pues, en la parte didáctica estaba propuesto que cada estudiante construyera la caja solito, sin embargo, noté que tenía más dificultad para armarla y estar cambiando la altura de la caja, eso fue en el primer curso. Para el segundo curso lo hacía con grupos de cuatro personas y colocaba a competir los grupos a ver cuál de los grupos que salían en el grupo hallaban el volumen máximo […] No les entregaba un solo retazo, les entregaba varios retazos de papel por si dañaban el primero intentando hacer los dobleces. ¡Ah, esa es la otra cosa! En la guía decía recortar y con otra profesora notamos que era más conveniente hacer dobleces, así también se reducía el gasto de papel. Entonces lo que hacían los chicos, era variar o cambiar la altura a partir del cuadrado que se usaba para determinar la altura. Bueno, primero no recortaron el papel, lo que hacían era doblarlo, ese fue un cambio que se hizo, porque en el primero fue fatal, no recortaban bien. Recortaban más en un lado que en el otro, entonces dañaban bastante papel. [3]-(Episodio 2).

La interpretación que la profesora hizo sobre las dificultades que los estudiantes tuvieron para construir la caja en las versiones anteriores la llevó a plantear acciones para controlar este conflicto (el cual hace parte de la planeación de la actividad por la comunidad): en primera instancia modificó el trabajo individual propuesto para la fase de exploración individual a un trabajo en equipos (aspecto didáctico); al negociar la acción de *recortar* por *doblar* evidencia su preocupación por el gasto de papel pasando a segundo lugar la intención didáctica de que los mismos estudiantes resolvieran esa dificultad al tener que pasar del plano a lo tridimensional. Es decir, consideramos que para Lucero no es clara la intención del papel como recurso para potenciar la actividad cognitiva del estudiante ni su impacto (referido a cómo usarlo) en la actividad matemática, esta es una dificultad asociada a su pensamiento orquestal, según el modelo R-y-A.

En relación al pensamiento matemático-variacional podríamos interpretar que Lucero tiene dificultades para diferenciar y relacionar el cambio y la variación al decir que "lo que hacían los chicos, era variar o cambiar la altura a partir del cuadrado que se usaba para determinar la altura". Cantoral (2013, p. 45) señala que "la expresión cambio se entiende como una modificación de estado, en tanto que el vocablo variación la entendemos como cuantificación de dicho cambio", complementando al autor, podemos decir que la variación simboliza el efecto que el cambio de una magnitud surte en otra al estar ambas en una relación de dependencia. De manera tal que "una función es una generalización de la interdependencia entre magnitudes variables; es una imagen abstracta de la dependencia de una magnitud respecto a otra" (Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev & otros, 1994, p. 66). Esta posible dificultad de Lucero podría tener un impacto importante precisamente al establecer la conexión entre la actividad de construir la caja y las nociones de cambio y variación: el cambiar la medida del lado del cuadro, afecta indiscutiblemente el volumen de la caja ya que varían el ancho, el alto y la profundidad del sólido.

Veremos en el análisis de la clase cómo esas decisiones didácticas impactaron la planeación realizada por la CoP de la actividad matemática que corresponde a la fase de exploración.

Dentro de la CoP se espera que el marco teórico que soporta el curso de precálculo brinde orientaciones sobre la metodología enfocada en la resolución de problemas de tal suerte que no solo se movilicen conceptos, los procesos matemáticos deben estar presentes en cada episodio de la clase. En las fases de socialización que tienen lugar en el taller, se espera que los estudiantes pongan en juego sus competencias comunicativas (interpretar, explicar, conjeturar, argumentar). Para alcanzar tal objetivo, las fases de socialización son de gran relevancia, veamos cómo Lucero las ha interpretado:

> Lucero: Después de que todos abordaban de manera individual el ejercicio seguía la socialización. Entonces siempre al principio, no era democráticamente, al principio no es el que quiere, al principio les da como miedito, entonces uno le pide a los chicos que pasen a participar. Entonces la idea era que los que quisieran pasaran y presentaran como resolver el ejercicio y explicaran la forma en que lo resolvieron a sus compañeros. Y los que estábamos así prestando atención decíamos si es así, no es así, porqué llegaban a respuestas diferentes, o a veces las respuestas eran la misma y se abordaba de manera diferente el ejercicio. Entonces es interesante como un mismo problema se puede interpretar desde diferentes puntos. En mis clases anteriores del curso no ha sido fácil realizar la socialización, por eso pido un representante del grupo pues por lo general trabajan en equipo para que hagan más; ellos solitos a veces no son capaces de proponer. [4]-(Episodio 3).

Observamos que Lucero tiene dificultad para analizar de qué manera sus interpretaciones modifican la misma estructura de la clase: ella propuso, según la primera intervención de este apartado, el trabajo en equipos para la construcción de la caja; sin embargo en esta intervención mencionó que "después de que todos abordaban de manera individual el ejercicio seguía la socialización", esto evidencia la dificultad de Lucero para ser coherente y ser consciente de cómo sus acciones modifican los momentos de la actividad matemática realizada por la CoP.

Una negociación importante que emerge alrededor del pensamiento didáctico es que Lucero, dada la resistencia de los estudiantes para participar voluntariamente, considera elegir un representante de los equipos, esperando que al momento de su participación los demás compañeros intervengan aportando preguntas u otro tipo de soluciones a las actividades del taller. Analizando un poco más afondo, podríamos decir que esta negociación responde a una estrategia de Lucero para movilizar a los estudiantes en la puesta en común.

Lo anterior nos permite observar que Lucero inició sus propios procesos de participación, reflexión y acción como producto de sus reflexiones sobre la acción las cuales inciden directamente en la planeación de la clase; esto resalta el movimiento en espiral del modelo R-y-A.

5.2 SIGNIFICADOS EMERGENTES DE LA REFLEXIÓN-EN-LA ACCIÓN

En el apartado anterior se mostraron algunos significados de Lucero con relación a su pensamiento matemático, didáctico y orquestal, mismos que se pusieron en escena en el proceso de reflexión en la acción. En el presente apartado rescatamos algunas interacciones de Lucero con sus estudiantes, con los objetos matemáticos de estudio y además con los recursos que ella implementó en el aula y cómo estas interacciones se consolida en nuevos significados para ella, pues aunque la actividad estaba orientada por la misma metodología del curso y por la guía de trabajo de la sesión, Lucero tomó decisiones que modificaron de alguna manera la actividad matemática esperada (tal como se describió en el apartado 5.1).

5.2.1 Significados asociados al Pensamiento matemático-variacional

Recordemos que el pensamiento matemático-variacional, es importante que los profesores de matemáticas tengan presente que éste trata la variación y el cambio, y que es interpretado como:

> un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. En esta forma se amplía la visión de la variación, por cuanto su estudio se inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes (MEN, 1998, p. 72).

Ilustración 30. Caja construida por un equipo

La primera etapa del taller era de exploración ya que los estudiantes debían construir cajas para encontrar aquella que tuviera más volumen (ver ilustración 30) usando el papel proporcionado por la profesora. De manera tal que la actividad matemática se desarrolló desde un contexto métrico para analizar la variación y el cambio inmersos en el proceso de construcción de la caja.

La primera pregunta que realizó un estudiante sobre el volumen de la caja nos permite observar cómo Lucero identificaba los atributos mensurables de la caja pues confundió el área con el volumen en una de las respuestas que dio a sus estudiantes:

> Estudiante: ¿y cuál es la fórmula del volumen? [4]
> Lucero: ¿Cuál es el volumen de un paralelepípedo? [5]
> Estudiante 1: Largo por altura por ancho [6]
> Estudiante 2: El área de la base por la altura [7]
> Lucero: También –la profesora se desplazó unos pasos por el salón y mirando al grupo y usando sus manos para hacerse entender dijo:– o dos veces el área de la de abajo, más dos veces el área de acá, falta la de allá. [8]- (Episodio 4).

Este episodio nos lleva a preguntarnos si Lucero desconoció en ese momento su error o quizás al emplear el lenguaje oral para expresar el volumen de la caja no se percató de que pensaba en una cosa y decía otra.

El MEN (2006) señala que la variación y el cambio se representan usualmente por medio de sistemas algebraicos y analíticos, por tal razón es importante la construcción conceptual que el profesor tenga de la variable. En la Actividad 1.3 de socialización, surgieron algunos episodios importantes alrededor de ésta, y ella no la uso para indagar en las participaciones de los estudiantes en las cuales la variable estaba inmersa. Veamos la siguiente participación del primer estudiante que pasó al tablero a socializar cómo obtuvo la expresión algebraica:

> Estudiante: Dijimos que teníamos un rectángulo [lo dibuja en el tablero]; aquí recortábamos esto [dibuja los cuadrados en las esquinas]. Entonces, decíamos que esto era x… los lados del cuadrado que recortábamos era x [ver Ilustración 31]… Y el volumen del paralelepípedo era [9] -(Episodio 5).

Ilustración 31. Representación de los cuadrados a recortar en el papel

De esa manera el estudiante concluyó su participación y Lucero dejó de aprovechar el espacio para explorar cómo estaba concibiendo el estudiante la equis pues “se ha demostrado que el concepto de variable es difícil para los estudiantes de distintas edades, y que en los diferentes niveles educativos, los estudiantes tienen dificultades para comprender los varios usos y aspectos que caracterizan a la variable” (Ursini & Trigueros, 2006, p. 5). El concepto de variable la tomamos como lo describe Kolmogorov (1994) “una variable es una imagen abstracta de una magnitud que varía”

Pese a que los documentos oficiales de Colombia no son claros respecto a la caracterización del pensamiento matemático-variacional, sí señalan que la variación y el cambio, aunque se representan usualmente por medio de sistemas algebraicos y analíticos,

> requieren de conceptos y procedimientos relacionados con distintos sistemas numéricos (en particular, del sistema de los números reales, fundamentales en la construcción de las funciones de variable real), geométricos, de medidas y de datos y porque todos estos sistemas, a su vez, pueden presentarse en forma estática o en forma dinámica y variacional (MEN, 2006, p. 46).

Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev (1994, p. 66) nos dicen que el concepto de número real es la imagen abstracta del valor real de una magnitud arbitraria y que la variable es una imagen abstracta de una magnitud que varía. Sin embargo, la profesora evidenció dificultades para explorar las concepciones de los estudiantes alrededor de estos objetos matemáticos en particular alrededor de los números reales y su expresión decimal:

> Estudiante: Bueno, en nuestra cajita la altura que alcanzaba mayor… esto… [Se le dificultaba expresarse]. [10]
> Lucero: *volumen* [11].
> Estudiante: mayor volumen era 7,7, con 25,6 [altura] y 45,6 [ancho]. [12]
> Lucero: Sí, ¿cuánto les daba ese volumen? [13]
> Estudiante: 8988 [escribe en el tablero sin unidades]. [14]
> Estudiante: Para nosotros era mayor volumen, tomando un solo decimal, no nos pusimos a tomar más. [15]
> Profesora: ¿Y si tomáramos más decimales? [16]
> Estudiante: hasta allá no llegamos [17]
> [Hay risas]. [18]-(Episodio 6).

Durante la socialización en varios oportunidades los estudiantes manifestaron que el uso de muchas cifras decimales generaba dificultades al hacer las medidas, que con bastantes cifras decimales se puede hacer en el mundo matemático, pero que en el mundo real no era posible. Esto llevó a que los estudiantes y a la profesora no encontraran el valor del lado a recortar que diera el máximo volumen de la caja, porque cuando un estudiante manifestaba un valor, otro le ponía otra cifra decimal y al finalizar la clase en las conclusiones no encontraron las medidas para obtener el mayor volumen.

En este episodio de la clase, los estudiantes consideraban que al poner más cifras decimales el volumen seguiría aumentando, cosa que no es siempre cierto, ya que el máximo volumen es único (concepto que quizás no lo conozcan los estudiantes, pero la profesora si lo comprende) así se siguieran tomando más cifras decimales el volumen tendrá un momento en que empieza a disminuir. Esta situación llevo que al concluir la clase los estudiantes tomaran que el máximo volumen, está comprendido en un intervalo, siendo un error del Pensamiento matemático-variacional.

Aquí no estamos resaltando el hecho de que sea más cifras decimales, sino que la función empieza a decrecer y no que entre más cifras decimales va aumentar. Esto lleva a los estudiantes a pensar que el máximo está en un intervalo. Y la profesora tenía que atender que el máximo es único. Cosa que no se concluyó.
Konic (2013) nos dice que la mayoría de los estudiantes considera que un número es decimal por su forma de expresión más que por las propiedades que lo caracterizan, es decir los estudiantes reconocen un número decimal por la necesaria presencia de una coma en su expresión, aspecto que Lucero podría haber aprovechado para cuestionar a los estudiantes, por ejemplo, si un número entero es un número decimal.

Son bien reconocidos, desde hace tiempo, aspectos relativos al número decimal que implican dificultades en su aprendizaje. En relación a ello, Konic, Godino & Rivas (2010) describen errores relacionados con:

- El concepto de número decimal (valor de posición, conflictos con el cero).
- La escritura y/o representación (distinción entre número y representación, equivalencias y transformaciones).
- Propiedades (orden, densidad de los decimales en Q).
- Las operaciones con números decimales.

Los autores señalan que las dificultades en la interpretación de la notación decimal son la causa de muchos problemas que surgen en las operaciones aritméticas con números decimales, en el redondeo, en el trabajo con cifras significativas y globalmente en cuestiones de sentido de las matemáticas, como emergió en la clase de Lucero.

El nivel de conocimiento matemático con el cual ingresan los estudiantes que participan en el curso de precálculo es diferente, pese a que los Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) señalan cuatro estándares de referencia a los cuales debe apuntar la formación matemática de los estudiantes al egresar del sistema académico de la media vocacional del país:

- ✓ Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
- ✓ Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.
- ✓ Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.
- ✓ Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.

Para la CoP se tiene identificado los objetivos generales y específicos de cada uno de los talleres, y para este que estamos presentando en la guía del profesor, se tienen los objetivos generales y específicos del taller llamado “Caja sin tapa” que son:

Objetivo:
Investigar y comprender contenidos matemáticos a través del uso de distintos enfoques para el tratamiento y resolución de problemas del mundo real aplicando modelos matemáticos e interpretar resultados a la luz de la situación inicial.

Objetivos Específicos

- Registro de los datos en una tabla y análisis de la información suministrada.
- Relación entre los registros (tabular y gráfico).
- Análisis de la función y de su relación con el fenómeno en estudio.

Ya teniendo identificado por parte de los profesores los objetivos del taller, hacia estos, los profesores buscamos que en la socialización se llegue a ellos y fue precisamente en el espacio de la socialización de la primera etapa del taller en donde emergió la derivada como procedimiento analítico para aportar a la construcción de la solución del problema:

> Estudiante: Yo tengo entendido que para yo sacar este, el máximo tengo que derivar, porque la derivada primero me saca los puntos críticos de la función, la segunda derivada me ha sacar la concavidad de la función, entonces derivo esta función. [19]
> Lucero: ¿Aquí todos saben derivar? [Unos estudiantes, manifiestan moviendo la cabeza, que no saben derivar]. [20]-(Episodio 7).

El estudiante, habló de sus conocimientos de la derivada y cómo encontrar el máximo pero los compañeros manifestaron que ellos no vieron derivadas en el colegio y por eso no entendían lo que explicaba el expositor. El estudiante expresó vagamente el procedimiento analítico para encontrar el máximo de la función: *"se tiene que derivar para que la derivada saque los puntos críticos de la función, la segunda derivada me da la concavidad de la función"*.

Sobre la forma como los estudiantes conciben la derivada se tiene varias investigaciones, entre estos autores como Artigue (1995, pág. 2) quien señala que

> aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para que los jóvenes de estas edades logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático. Por ejemplo, algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación; sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan manejar el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente.

El estudiante se esforzó para mostrar de forma mecánica cómo usar la derivada pero no evidenció el significado de este concepto, exhibiendo que se pueden aprender las reglas de derivación, pero no comprender la derivada; la actuación del estudiante es bien explicada por Ursini & Trigueros (1997 en Morales & Díaz, 2003):

> Las estrategias de los estudiantes están dominadas por procedimientos que no han sido interiorizados, lo cual los deja anclados a un nivel de acción que se manifiesta, por ejemplo, en la necesidad de hacer explícitos los pasos que siguen en el proceso mental de solución y usarlos como soporte para continuar, sin ser capaces de analizarlos, y detectar posibles errores (p. 109).

Para fortalecer su explicación, el estudiante que habló de la derivada, empleó una representación gráfica para explicar qué son los puntos críticos:

> Estudiante: Los puntos críticos son donde la función cambia de concavidad. O sea la derivada de una función [se dirige al tablero y dibuja]… O sea, yo tengo una parábola [dibuja el plano cartesiano y una parábola con vértice (0, 0)], la derivada de esta parábola en cero, va a ser cero [dibuja la recta $y = 0$], ¿sí?...[…] [21]
> Lucero: Pero esa derivada me parece una recta tangente [22]
> Estudiante: Sí, es que la derivada es una recta tangente… cuando toca el cero [el estudiante piensa cómo hacerse entender y decide dibujar otras *rectas*]… ¿sí?... O sea, aquí la derivada, la pendiente es negativa; incluso aquí la pendiente es positiva porque la derivada es positiva.

> Entonces la derivada tiene que ver con la pendiente, y el ángulo de inclinación de la función. [23]-(Episodio 8)

La intervención del estudiante y la orquestación que hizo la profesora de los conceptos que el estudiante presentaba sobre la derivada donde la profesora intervino para afirmar "pero esa derivada me parece una recta tangente" es interesante porque nos permite darle dos interpretaciones para ese momento de la clase:

1. Lucero tiene dificultades alrededor del concepto de derivada.
2. Lucero tiene dificultades en el uso del lenguaje al referirse a objetos matemáticos (quizás quiso decir "esa representación geométrica de la deriva parece una recta tangente").
3. Lucero formuló esa intervención con una intención didáctica (hacer emerger las concepciones del estudiante sobre el objeto matemático).

Al respecto, es importante señalar que Lucero expresó que su participación en la CoP ha impactado su pensamiento matemático:

> Lucero: […] por lo general yo como docente lo que hacía era aplicar el concepto, miraba un ejercicio, a la derivada, listo derivar rapidito. Pero no analizaba nada más de lo que significaba la derivada. Es muy diferente tener el uso de un computador y ver qué es la derivada, por ejemplo ver gráficamente la derivada de una función cuadrática me da una recta, cosas por el estilo […], y ya empieza uno a imaginarse las cosas […] dada una expresión algebraica y visualizar la forma geométrica (gráfica). [24]-(Episodio 9).

Podemos interpretar que Lucero incorporó a sus saberes sobre la derivada la representación geométrica de la misma de la derivada, significado que utilizó en clase para cuestionar al estudiante.

En el desarrollo de la actividad matemática, se presentó en la socialización la discusión sobre si podemos demostrar que el numero decimal 0,999… lo podemos igualar a 1.

La discusión en esta fase le permitió a Lucero observar que los estudiantes interiorizaron resultados sin haber tenido la oportunidad de comprobar que estos son ciertos (o no, incluso). La discusión sobre los números decimales dio lugar a reflexionar sobre la igual 0,99… = 1. Los estudiantes encontraron vía internet la demostración pero varios no la siguieron, y la aceptaron como válida. La profesora pudo aprovechar esta situación para indagar como comprenden la aproximación de los números reales, Ya que de acuerdo se escribió en la 2.3.2.1 del pensamiento variacional el cual recordamos "El pensamiento variacional, tiene que ver con patrones, las relaciones entre las magnitudes, reconocer la variación y las diferentes formas de representación como son; el numérico, tablas, graficas, algebraico y verbal. Para desarrollar el pensamiento variacional se requiere proponer problemas donde se pueda modelar situaciones de cambio, y representarlo de diferentes maneras y establecer sus interrelaciones." Así los estudiantes no tengan claro los conceptos de densidad de los números reales, la profesora si, requiere tenerlo dentro de su conocimiento profesional, ya que ellos forman parte del pensamiento variacional.

D'Amore, Bonilla, Fandiño, et al. (2006) nos explican que la confusión de los estudiantes es natural pues han encontrado que las personas asocian 0,9 con la sucesión 0.9, 0,99, 0,999, … por lo que argumentan que nunca será 1 pese a algunos sujetos declaran que matemáticamente esta igualdad pueda ser válida. Pero, en la realidad esto no es posible, manifestando la conocida "divergencia" entre matemática y realidad.

> «Si yo escribo 0,9, esto es casi 1, pero no es 1 porque le falta 0,1; pero si yo agrego 0,09 me encuentro a 0,99 que es siempre más cerca de 1, pero no es 1 porque le falta 0,01; pero si yo agrego 0,009 me encuentro ya a 0,999; siempre así, la suma crece y crece pero le falta siempre 0,0000001 también con infinitos ceros, siempre alguna cosa falta, a 1 no se llega nunca porque cada vez le falta un poco» (ibíd., p. 21).

Esas mismas concepciones tuvieron lugar en la clase de Lucero; sin embargo la discusión quedó en ello y al no lograr que fueran los estudiantes quienes "demostraran" la igualdad, la profesora dejó de tarea averiguar si 0,99 es igual a 1. Reconocemos en ese episodio un espacio importante para que Lucero precisara que la expresión "número decimal" indica, en sí mismo, un número escrito en base diez, del mismo modo que la expresión "número binario", indica un número escrito en base 2; "no hay que confundir el número con su representación escrita… sería imposible hablar de grandes números o de números decimales sin el recurso de su representación escrita" (Vergnaud, 2003 en Konic, 2011, p. 8). Sin embargo, no podemos afirmar si Lucero no concluyó la discusión por desconocimiento o porque su intención didáctica era atizar la curiosidad de los estudiantes dejándola como consulta. En los estándares de matemáticas (2003), se propone que el estudiante "Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos", es por ello que la profesora puede utilizar las actividades planeadas para aportar al desarrollo del pensamiento variacional.

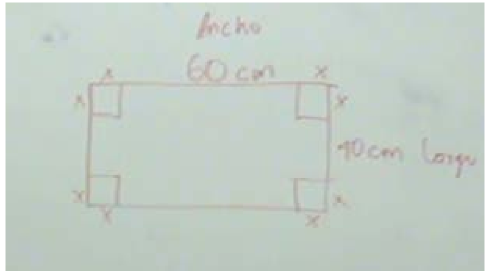
Sintetizaremos los episodios seleccionados de la fase de exploración de la clase de Lucero que serán retomados en la etapa de reflexión-sobre-la acción de esta categoría:

1. La profesora Lucero evidenció su concepción de la derivada como una recta tangente.
2. El concepto de densidad de los números reales, resultó ser un concepto abstracto tanto para los estudiantes como para la profesora. La dificultad sobre cuántas cifras decimales se pueden escribir en un número decimal llevó a que en este grupo no se concluyera, en esta fase del taller, que el máximo es único ya que para ellos el máximo está en un intervalo. Es necesario que la profesora reflexione sobre este episodio para aclarar su comprensión de que el volumen máximo de la caja es único. Para los estudiantes al adicionar una cifra decimal al número que diera un compañero el volumen de la caja aumentaba, lo cual no es cierto ya que el máximo es único y al poner más cifras decimales el volumen empezaría a disminuir.
3. La profesora no percibió la concepción de variable que evidenciaron los estudiantes; quizás por la enseñanza que se hace en los colegios, los estudiantes usan la “x” como un valor para hallar, no la identifican como variable, sino como un valor estático que por el momento se desconoce y que por medio de procedimientos aritméticos pueden conocer su valor.

A continuación, veremos los episodios que se tejieron en la sala de cómputo después de que los estudiantes cambiaron de lugar de trabajo: durante la Actividad 1.5 que corresponde a la socialización de la exploración dirigida, la profesora para comprender una discusión de los estudiantes sobre cuáles variables son dependientes y cuáles independientes recurrió a realizar una representación pictórica del papel en el tablero, sin embargo al explicitar el “ancho” y el “largo” sucedió una situación que nos inquieta:

> Lucero: [...] vamos a tomar esto como ancho y este como largo. Sí, ¿les parece? [Al terminar, la profesora ha dibujado lo que se aprecia en la ilustración 32 [25]

Ilustración 32. Representación de apoyo de la profesora



Estudiantes [responden en coro]: No. [26]
Estudiante 1: Largo y ancho al revés. [27]
Lucero: ¿Y por qué así [refiriéndose a lo que dijo el estudiante] y no así [señalando lo que ella tenía] [28]
Estudiante 1: *Así también se puede*. [29]
Lucero: [Borrando del tablero “ancho” y “largo” dice:] ¿Qué tiene de diferente si este es el largo? [30]
Estudiante 1: La vista. [31]
Lucero: Listo así [habiendo hecho la corrección en la representación del tablero; ella prosigue con la discusión:] Entonces él dice no si a mí me piden que el ancho sea 27 cm, el largo y el alto ¿dependen de quién? [32]-(Episodio 10).

El episodio nos hace preguntarnos si la profesora tiene dificultades para identificar las dimensiones en el paralelogramo o si, de manera intencional, buscó promover una reflexión sobre las mismas atribuyéndose el error movida por una intención didáctica. Lo mismo sucedió con el concepto de volumen: la profesora al indagar en los estudiantes sobre si el volumen puede ser negativo terminó diciendo que el volumen es la capacidad de un objeto:

Lucero: Pero es una unidad de qué; por ejemplo, las que son metros, es una unidad ¿de qué? [33]
Estudiantes: De longitud. [34]
Lucero: ¿Y cuándo es al cuadrado? [35]
Estudiantes: De área. [36]
Profesora: ¿Cuándo está al cubo? [37]
Estudiantes: Volumen. [38]
Lucero: No, pero el volumen qué es. [39]
Estudiante: U*na unidad de longitud,* [40]
Lucero: El volumen es capacidad, el volumen es la capacidad de algo. ¿Listo? [41]-(Episodio 11).

Lucero intentó ayudar a los estudiantes a evocar para calcular el volumen se requiere multiplicar tres longitudes. Tenemos por hipótesis que esto obedece a que en la enseñanza del “volumen” se suele enfatizar en las tres dimensiones que corresponden a los cuerpos, lo cual está asociado a la representación del volumen de un objeto tridimensional.

Godino, Batanero & Roa (2002) señalan que volumen y capacidad son términos usados para expresar la medida del "tamaño" de cuerpos o regiones tridimensionales. En este episodio la profesora evidenció dificultad para distinguir que

> Volumen "Es el lugar o espacio que ocupa un cuerpo". En este caso se puede mostrar un par de anteojos e interrogar cómo se calcularía el volumen de este objeto. Puede, ante esto, surgir la posibilidad de calcular su volumen con la cantidad de líquido desplazado al sumergirlos en un recipiente lleno, o sea una nueva técnica que significa el volumen desde otro lugar. Etchegaray, S. C., Etchegaray, M. C., Ferrocchio, M. E., & Bovio, A. C. (2014).

De manera que, dadas su dificultades conceptuales, Lucero negoció el "volumen es la capacidad de algo", significado que es erróneo y que fue sorteado con rapidez pues no se vuelve a tomar para discutir.

5.2.2 Significados asociados al pensamiento didáctico

Retomando la caracterización del pensamiento didáctico desde el modelo de Reflexión-y-Acción en éste se considera el lenguaje usado por el profesor en el aula de clase, el uso de los materiales, las indicaciones del profesor sobre la forma de trabajar en el aula de clase para proponer la actividad matemática por parte de los estudiantes, las preguntas orientadoras y el uso didáctico de las herramientas tecnológicas con los que se cuenta en el aula.

Llinares (2000), plantea que la forma como el profesor utiliza los instrumentos seleccionados influyen en el tipo de comprensión matemática y creencias de los estudiantes. Esto se puede hacer evidente ya que el profesor por lo general se considera el centro de la clase y en ocasiones resulta difícil para el profesor permitir que sea el mismo estudiante quien se apropie de las experiencias propuestas en los talleres diseñados por la CoP para acercar al estudiante en los conceptos del pensamiento variacional.

Como mencionamos en el Capítulo 4, el diseño didáctico del taller "Caja sin Tapa" consideró las Actividades 1.1 y 1.2 como espacios para la participación activa de los estudiantes ya que se proponía la construcción de la caja y explorar qué sucede con el volumen al cambiar las dimensiones de la caja de manera que, desde estas dos actividades, se esperaba que los estudiantes conjeturaran la terna de longitudes que daría el mayor volumen de la caja, además de una expresión algebraica que expresara su volumen teniendo en cuenta el tamaño de la hoja. Ya que se espera que el estudiante y desde luego la profesora se pueda representar de diferentes formas (grafica, Verbal, algebraica y tablas de valores). Para la profesora al tener conocimiento sobre los procesos matemáticos que se buscan por medio de la actividad matemática puede relacionar de diferentes formas el volumen de la caja.

Durante el desarrollo de estas actividades de la fase de exploración se propuso la observación, descripción y el análisis cualitativo del fenómeno de variación; a través de esto se pretende que los estudiantes hagan una descripción de la variación, formulen conjeturas, hagan predicciones y las verifiquen en el marco de la metodología de la resolución de problemas.

Al parecer Lucero interiorizó la idea de que la manera como ella organiza las actividades en la clase le ayudaba a involucrar a todos los estudiantes: distribuyó al grupo en equipos dando a cada uno un papel para construir la caja (dejando abierta la posibilidad de usar otros). La manera como la profesora condujo la actividad también les permitió a cada equipo plantear maneras diferentes de resolver el problema; aunque esto es relativo dada una decisión que la profesora tomó: al iniciar la construcción de la caja, la profesora orientó a los estudiantes para que no recortaran el papel sino que doblaran:

> Lucero: Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja rectangular de tamaño 60 cm por 40 cm, cortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas. Nosotros no vamos a cortar nada, ¿listo? … Porque vamos a tener que utilizar muchas hojas; con una sola hoja vamos haciendo dobleces. [42] (Episodio 12).

Para promover la actividad matemática de los estudiantes, Lucero dio orientaciones adicionales, conduciendo a los estudiantes al proceso que (según ella) debían realizar para obtener la caja de mayor volumen. Puede ser que la profesora haya considerado aportar herramientas para una mejor interpretación del problema, ya que como se ha mencionado en algunos estudios: muchas de las dificultades para resolver un problema en matemáticas es que éstos no se interpretan o comprenden correctamente.

> Lucero: Para eso [hallar la caja de mayor volumen] entonces ustedes van a empezar a… ¿a qué?... a ensayar, a construir cajitas y a tomar medidas, y a fabricar; es decir, a hallar el volumen de cada una. Y después ustedes van a decir “no, pues la de mayor volumen que yo construí es esta, y estas son sus dimensiones” [43]-(Episodio 13).

Al analizar esta orientación, reflexionamos sobre la indicación "la de mayor volumen que yo construí es esta" pues el hecho de que el estudiante elija tres ternas (largo, ancho, alto) diferentes para las medidas de las longitudes y elija la terna que da mayor volumen, no implica que esas dimensiones sean la de la caja de mayor volumen que se puede construir con el papel. De modo tal que Lucero, ante la necesidad de comunicar indicaciones orientadoras para la actividad incurrió en episodios que posiblemente desviaron el objetivo didáctico del papel en el taller. Nos preguntamos sobre la concepción que llevó a la profesora a negociar que es importante darle tanta información a los estudiantes para, según entendemos, facilitar la actividad matemática propuesta: les indicó el procedimiento para hacer los cuadrados en las esquinas de las hojas en lugar de permitir que ellos exploraran cómo hacerlos. Veamos el siguiente episodio donde se aprecia la indicación de la profesora:

Ilustración 33. Lucero doblando el papel para los estudiantes

> Lucero: […] ¿Cómo lo vamos a hacer? Entonces la idea es escoger cantidades iguales en las esquinas y la vamos a doblar para construir la caja por ejemplo esta va a ser [hizo silencio mientras doblaba la hoja; 3]. Entonces acá, como tomé [refiriéndose a la altura que había considerado], por ejemplo, supongamos 5 cm y vamos a hacer lo mismo en cada lado. Acá con esta que estoy doblando sirve, entonces que hago, unimos acá esto con estas esquinas y fijase que ya tengo una esquina de la caja. Entonces eso es lo que ustedes van a hacer, y no necesitamos recortar. ¿Bueno? Y así hacen las esquinas. Yo traje cinta. La deben compartir. Si necesitan más papel, para hacer más cajas, acá hay; pueden coger. [44]
> Estudiante 1: ¿Una regla? [45]
> Lucero: No tengo. [46]- (Episodio 14).

El anterior episodio evidencia la estrecha relación entre los pensamientos variacional-didáctico-orquestal ya que éste giró alrededor del papel como recurso pero la decisión que Lucero tomó sobre él impactó en lo didáctico por las siguientes razones:

- ✓ la explicación de la profesora predispuso a que la altura de la caja, en algunos equipos, fuera de altura 5 cm, como se aprecia en la Ilustración 34 que sigue.

Ilustración 34. Caja de los estudiantes similar a la de la profesora

- ✓ en aras de orientar a los estudiantes en el uso del recurso, fue Lucero quien solucionó el problema de transitar de lo bi a lo tridimensional, siendo esto un aspecto que debían enfrentar los estudiantes al manipular el papel para construir las cajas.
- ✓ Circular entre los grupos e interactuar con los estudiantes le permitió a Lucero notar que ellos estaban empleando una fórmula errada para calcular el volumen del paralelepípedo, quizás sin recordar que ella misma minutos antes había dicho que el volumen podría calcularse midiendo el área de las todas las caras del paralelepípedo y sumándolas.

> Lucero: ¿Cuál es el volumen de la caja? Uno de los estudiantes del grupo contestó señalando las caras opuestas de la caja y el fondo. [47]
> Estudiante 1: El área de esas dos –Lucero repite–, de estas dos –usa sus manos para simular dos lados de la caja–, más la del fondo. [48]
> Lucero En mi vida había visto yo esa fórmula. Los estudiantes permanecen en silencio; la profesora interviene. [49]
> Lucero: ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo? [50]
> Estudiante 2: ¿Todos son paralelepípedos? La profesora asiente con la cabeza. [51]
> Lucero: ¿Cuáles son las unidades de medida del volumen? [52]
> Estudiante 3: Al cubo. [53]
> Estudiante 1: El área es elevado al cuadrado [54]
> Estudiante 3: El área de la base, área de un rectángulo que da cuadrado, por la altura da el cubo que es el volumen. [55]-(Episodio 15).

Se observa que Lucero, en medio del silencio del grupo, reflexionó sobre la dificultad a la cual se enfrentaban los estudiantes y construyó una pregunta para permitir a los estudiantes reconstruir la fórmula, decisión que surtió efecto pues los estudiantes recordaron la fórmula para calcular el volumen.

Al rotar entre los grupos, Lucero observó que uno de los equipos realizó una sola caja y afirmó que esa era la caja de mayor volumen lo cual la inquietó:

> Lucero: Bueno, ¿será que puede existir otra caja que tenga mayor volumen que esta? ¿Será que no? Uno de los estudiantes dice que no moviendo la cabeza. Ante esta respuesta Lucero observó rápidamente las cajas de otro grupo y le dijo al estudiante:
> Lucero: Es decir, fíjese acá [señalando la caja del otro grupo]; mira, el volumen de esta caja es el mismo de esta [señalando la caja del grupo al cual cuestionaba].
> El estudiante continuaba diciendo que sí con su cabeza, y Lucero insistía:
> Lucero: ¿Será? –la profesora se aparta del estudiante. [56]-(Episodio 16).

En la dinámica de hablar con los estudiantes observamos que, quizás en aras de hacerse entender, Lucero usaba palabras coloquiales al hablar:

> Lucero: Póngale 15; ¿qué pasa si vale 15? –El estudiante balbuceó algo que no se entiende y la profesora prosiguió: – Ah, entonces van a encontrar es hasta donde va entonces no va mirar toda la curva, entonces solo van a mirar un **pedacito** ¿verdad? –la profesora hizo una muestra con el dedo señalando que sube y baja. [57]-(Episodio 17).

No obstante, el diseño didáctico del taller realizado por la CoP controlaba esas situaciones que podrían presentarse en la Actividad 1.1 que correspondía a construir la caja de mayor volumen. Se puede interpretar de la intervención de Lucero su intención de motivar al equipo para tomar más datos y analizar la variación del volumen al cambiar las medidas de las longitudes de la caja.

Precisamente la actividad matemática de identificar lo variante e invariante en la situación no fue fácil para los estudiantes, dificultad que se vio enriquecida por el trabajo en equipo que los estudiante realizaban. Un equipo en particular, llamó a la profesora auxiliar (ver Ilustración 35) para resolver algunos conflictos:

Ilustración 35. Profesora auxiliar trabajando con un equipo

> Estudiante 1: No entendemos lo de expresión algebraica. [58]
> Auxiliar: Primero cuando ustedes dan una expresión algebraica ustedes están generalizando para cualquier caja, y con esa expresión calculan el volumen. [59]
> Estudiante 2: Con esa expresión no se puede [el estudiante se refería a $V = a.b.h$ para el caso de la caja construida con el papel de 40 x 60 cm] [60]
> Auxiliar: ¿Qué no se puede con qué? ¿Cómo así? –la auxiliar reflexiona y después dice: – Ah bueno sí, en este caso tenemos dos constantes porque la hoja que nos dieron tiene unas medidas fijas […] Ustedes están es analizando es que de esta hoja van hacer cualquier infinidad de cajas […]; la expresión que están haciendo es para esta [hoja]. –La auxiliar revisa una de las hojas de trabajo del grupo y observa que tienen $V = (40 - x)(60 - x)x$, por lo que se apoya en ella para continuar su intervención:– Pero entonces (40 – x), ¿cuántas equis? [61]
> Estudiante 2: El doble. [62]
> Auxiliar: Aah [un estudiante interviene pero no se capta lo que dice; ella continúa] porque le estás quitando un pedacito de acá, y un pedacito de allá […]. ¿Y para qué sirve esa expresión? [63]
> Estudiante 3: Para encontrar el volumen. [64]
> Auxiliar: Para hallar cualquier volumen. [65]
> Estudiante 4: El volumen de esta caja. [66]
> Auxiliar: Sí, para esta caja, de estas medidas–ella enfatiza cogiendo la caja– [67]-(Episodio 18).

La intervención de la auxiliar es significativa en tanto que intentó construir preguntas que ayudaran al equipo a evaluar la actividad matemática realizada sobre el proceso de generalización. También es destacable el ejercicio que hizo la profesora en formación por motivar a los estudiantes a argumentar sus procedimientos, pese a que en algunos momentos fue ella quien elaboró los argumentos, como se aprecia a continuación:

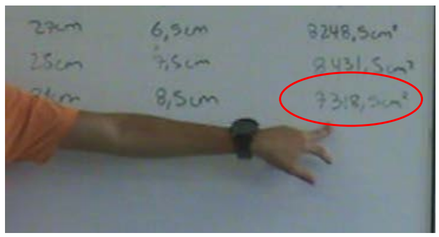
> Auxiliar: ¿Si yo desbarato esta caja, se va alterar? Si la variable cambia [refiriéndose a la equis; algo balbucea un estudiante pero no se entiende; la auxiliar continúa:] Sí, pero cambia el volumen, no cambian las medidas de la hoja; la hoja sigue siendo la misma hoja con los 40 cm y 60 cm; lo que va a variar es los lados de la caja que estás construyendo, pero esta hoja si la desbaratas sigue siendo la misma. [68]-(Episodio 19).

A partir de la socialización (Actividad 1.3), en particular en la manera cómo fue gestionada, la actividad matemática tomó otro rumbo ya que este espacio se convirtió en un tiempo de exposición para cada uno de los tres equipos. Lucero dejó de aprovechar la discusión entre pares para reconstruir el proceso que llevaba a tener una primera hipótesis de la caja con mayor volumen; es decir, la socialización se convirtió en una exposición de resultados y de procedimientos por parte de los estudiantes.

No obstante, los estudiantes, al compartir sus experiencias, dieron cuenta de razonamientos y conjeturas que formularon pero que también se validaron o invalidaron con la actividad matemática propuesta y con la interacción con la profesora:

Estudiante: (…) aquí pudimos más o menos observar un patrón: que si disminuíamos la altura del paralelepípedo, disminuía su volumen; si aumentaba su altura, aumentaba su volumen (…) pero entonces hallamos una excepción. [69]
Lucero: ¿Cuál? [70]
Estudiante: Un contraejemplo. [71]
Lucero: ¿De qué? [72]
Estudiante: De que no era cierto de que a medida que aumentaba la altura, el volumen aumentaba. Entonces [escribiendo en el tablero decía] en 8,5 cm tenemos que el ancho es de 21 cm y el largo era 41 cm y eso nos daba 7.318,5 centímetros [omite "cúbicos" y escribe "2" como exponente; ver Ilustración 36]. Entonces ahí cambia el patrón, pasa algo: ahí aumenta la altura pero disminuyó el volumen.

Ilustración 36. Error en la unidad de la magnitud



Estudiante: Entonces nosotros podemos decir que en un intervalo entre 7,5 y 8,5 tendríamos el valor del volumen máximo…¿Por qué? Porque si nos pasábamos de 8,5 el volumen disminuía, pero con 7,5 era el valor máximo que habíamos encontrado. Entonces ensayamos con 8 cm y nos dio 8.488 cm^3, y ese era el máximo. [73]- (Episodio 20).

En la CoP se ha insistido en que los profesores deben propiciar las oportunidades para que los estudiantes sean quienes construyan la ruta que lleve al objetivo del taller. De modo que Lucero, al favorecer la socialización del primer equipo, logró que un estudiante compartiera hallazgos importantes pero no dio participación a los demás, pese a que ella en la reflexión-para-la acción señaló que sí lo hacía.

Sobre el error cometido por el estudiante en la escritura de 7.318,5 cm^2 (óvalo rojo de la Ilustración 36 anterior), nadie en el salón lo mencionó. Esta situación no es de asombrar en situaciones de medición pues, como menciona Abrate, Pochulu, y Vargas (2006, p. 124), los estudiantes suelen proporcionar sólo resultados numéricos carentes de unidades, o cantidades relacionadas a longitudes o volúmenes, y no a una superficie, o viceversa. De manera tal que este episodio propició a la profesora hacer una reflexión sobre la apropiación de las unidades de volumen y su correcta escritura, reflexión que no se dio.

Lucero gestionó la socialización pasando al tablero al representante del equipo quien expuso todo el trabajo realizado en la Actividad 1.1 y 1.2 hasta llegar a la expresión general -$V_p = \big(6\ dm - 2\ (2\ dm)\big)\big(4\ dm - 2\ (2\ dm)\big)(2\ dm)$-. Pese a que ella, al pasar al estudiante al tablero, le dijo a los compañeros del equipo que les haría preguntas mientras el representante exponía, esto no sucedió. La decisión de cómo gestionar la socialización incidió en el resto de la clase pues al pasar al tablero a los siguientes representantes de equipo, ellos no encontraron mucho que aportar; incluso el tercero de ellos expresó respecto al trabajo de su compañero: "Todo lo que hizo está bien", aunque se animó a refutar la expresión algebraica que el representante del primer equipo escribió en el tablero:

> Lucero: Haber, cuéntenos. [74]
> Estudiante: Todo lo que hizo está bien. Yo no comparto la idea de que esta sea una expresión algebraica [$V_p = \big(6\ dm - 2\ (2dm)\big)\big(4\ dm - 2\ (2\ dm)\big)(2\ dm)$]; para mí esto es un conjunto de multiplicaciones; en una expresión algebraica por lo general se tiene que llegar a lo mínimo y esto está muy poco abreviado. Entonces, aplicando distributiva y multiplicando por 2…. [Trabajó en el tablero reescribiendo la expresión anterior a $f(x) = (60 - 2x)(40 - 2x)(x)$ y obtuvo al simplificar $f(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$]. [75]-(Episodio 21).

El estudiante realizó el procedimiento analítico correspondiente para simplificar la expresión algebraica del compañero, y al final dijo "esta es la expresión algebraica", refiriéndose a $f(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$. Vimos en este episodio una oportunidad para que Lucero promoviera la confrontación de concepciones en el salón de clases alrededor de los procesos algebraicos; sin embargo Lucero no diseñó preguntas ni para los expositores ni para los demás compañeros quienes estaban pasivos ante lo que sucedía en el tablero (por ejemplo; *¿qué representaba la notación V_p? ¿A caso la variación del volumen del papel? ¿Por qué el estudiante del primer equipo consideró necesario escribir las unidades de medida en la expresión algebraica?).*

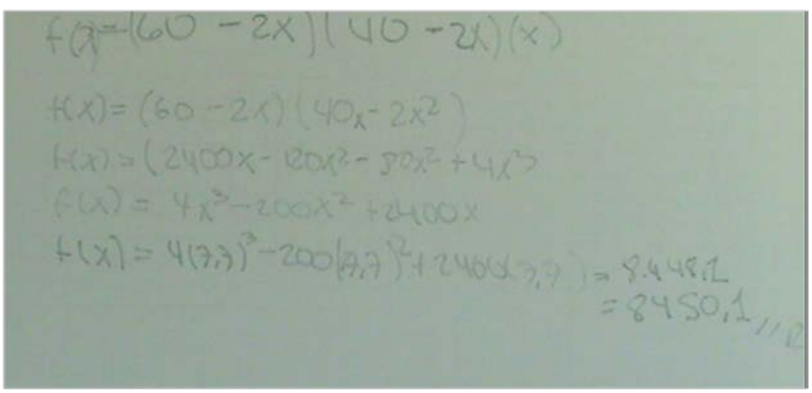
La Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia (2005, p. 53) nos explica que

> Pensar en los procesos algebraicos desde los contextos de variación y cambio "hacen referencia a la forma de emplear las expresiones algebraicas desde las diversas situaciones que posibilitan expresar la generalización. Esto implica reflexionar lo variante e invariante, pero fundamentalmente, comunicar lo que se observa y explicitar las relaciones estructurales de diferentes forma.

Durante la socialización la oportunidad de explicitar el papel del álgebra dentro de los procesos de generalización como una nueva forma de pensar la matemática pasó desapercibida: el diseño didáctico del taller contempla que la expresión de la generalidad, de la generalización, implica un proceso de analizar, explorar, sistematizar y expresar lo que se ve, habilidades que ayudan a poner en juego el proceso de modelación. Incluso, contrario a como lo intentó realizar la Auxiliar, Lucero no indagó a los estudiantes sobre cómo se había construido la expresión algebraica, qué representaba cada elemento simbolizado para verificar si distinguieron lo variante de lo invariante.

Como ya lo mencionamos, el tratamiento de la expresión decimal de los números reales causó ruido en el desarrollo de clase por la exigencia de cómo tratar los decimales: hallada la expresión algebraica los estudiantes calcularon el volumen para $x = 7{,}7$ (ver Ilustración 37) pues, como producto de la socialización de las Actividades 1.1 y 1.2, ellos tenían por hipótesis que ese era el valor de la altura para la caja con mayor volumen (8.448,1 cm^3). Al querer la profesora dar por terminada la intervención del estudiante, de manera interesante él expresó que encontró una excepción y allí la profesora encontró la oportunidad para agregar una cifra decimal más; veamos lo que sucedió ante esta práctica:

Ilustración 37. Evaluando la función en x=7,7



Lucero: Listo. [76]
Estudiante: Ahora, hay una excepción a la regla [irrumpió el estudiante]… que yo encontré ensayando. [77]
Estudiante: 7,8 [refiriéndose a la altura] que resolviendo todo esto [refiriéndose a la expresión algebraica] me va a dar 8.3450,1. [78]
Lucero: ¿Y 7,9? Otros estudiantes: No en 7,9 ya empieza a disminuir. [79]
Estudiante: 8.450,4 [80]
Lucero: Más grande, ¿cierto?… Y si queremos siete coma ochenta y seis, siete.

> El estudiante se encoge de hombros y llama la atención del grupo. [81]
> Estudiante: Pero, pero venga, si vamos a la parte física y cogemos 7,85943255 cómo vamos hacer una caja con 7,8594… mejor dejar así con un decimal […] [82]
> Estudiante 2: Tú no puedes usar un rango de 19,9 periódicos porque en la realidad no vas a poder hacer una caja así. [83]-(Episodio 22)

Las investigaciones sobre la cantidad de cifras significativas, muestran la importancia del uso de medidas exactas, al respecto Konic (2013, p 22) plantea:

> Cuando se operan cantidades con cifras significativas seguras y dudosas, es importante tener en cuenta que los errores se ven modificados, a estos errores no se les puede aplicar propiedades de la linealidad de números enteros y en consecuencia es preciso aplicar herramientas del cálculo más elaboradas.

Y es que precisamente fueron los decimales los que causaron conflicto entre “lo matemático” y “lo real” pues los estudiantes cuestionaron la construcción de una caja con una altura con muchos decimales; ellos mismos expusieron que por eso era mejor trabajar con un decimal pese a que con matemáticas se podría encontrar, usando las palabras de un estudiante, *“usando la función se puede encontrar lo más mínimo y en eso métale muchos decimales”*. La profesora en ese momento de la clase no intervino pues fue un estudiante quien ante la expresión *“lo más mínimo”* se apresuró a relacionar esto con “el máximo de una función” e introdujo la derivada, como ya lo mencionamos en la categoría del pensamiento variacional, como una estrategia para socializar. Cabe señalar que Lucero, en entrevista previa, señaló que en cada una de las versiones del curso la derivada ha emergido en las estrategias de los estudiantes:

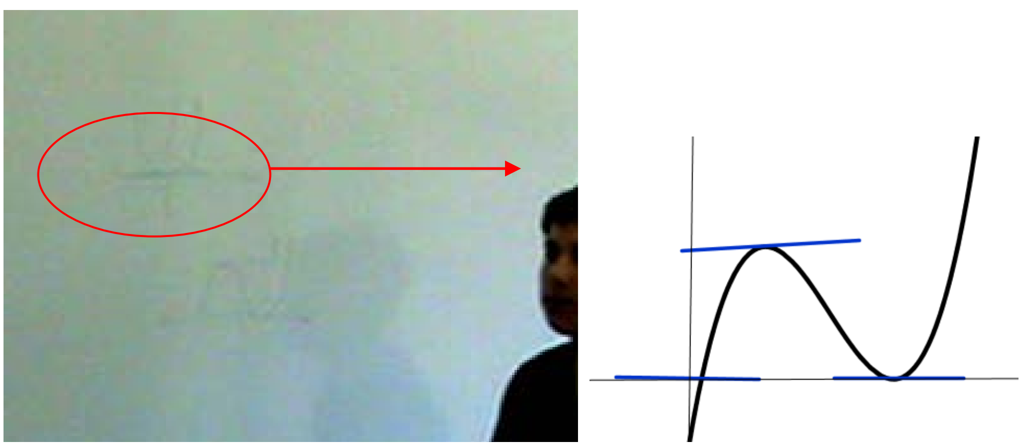
> Lucero: La primera, fue un grupo muy bueno, muy sobresaliente, tenía estudiantes muy buenos, prácticamente todos derivaban. Entonces muy pocos estudiantes tenía como 25 o 26 lo abordaban teniendo en cuenta conceptos básicos matemáticos. Los otros derivaban de una vez y resolvían el problema. Entonces ahí era “bueno ¿Y si no supiéramos derivar como lo abordábamos?” Y ahí profundizábamos un poco en la derivada. En los otros dos grupos había dos estudiantes que mencionaban el término “derivar”, pero no es que supieran derivar. Entonces es interesante que un problema que cuando se lo presentan a uno como docente, uno lo aborda inmediatamente desde la derivada, puede resolverse fácilmente utilizando conceptos básicos y de pronto hace que sea más didáctico para los estudiantes. Y fue algo muy interesante cuando se resolvió el problema utilizando conceptos básicos. Y un chico que sabían derivar muy bien, lo explico derivando. Entonces ellos ven como se ahorra uno procesos algebraicos para llegar a una misma respuesta. Entonces es interesante ver la utilidad de la derivada para resolver varios ejercicios. [84] (Episodio 23).

De este proceso de reflexión-para-la acción resaltamos que la profesora ha evidenciado valorar la experiencia que los estudiantes le aportan en cada nueva versión del curso; ella reconoce que cada grupo de estudiantes trae consigo diferentes nociones de los objetos matemáticos el Cálculo Diferencial y que esto incide en cómo se desarrolla la clase, significado negociado muy importante porque da cuenta de que la profesora interpreta cada clase como una experiencia nueva.

Para el caso de la clase de estudio, el estudiante derivó la función y Lucero y su auxiliar decidieron intervenir ante esta actuación; veamos:

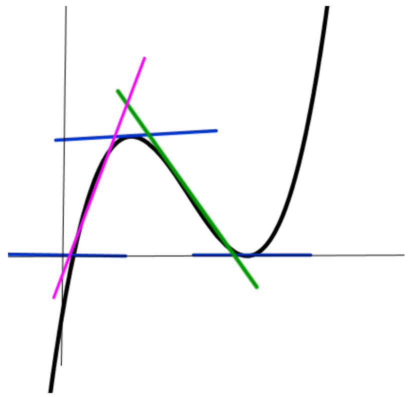
> Estudiante: Entonces derivo esta función: f(x) es igual (3x4) a $12x^2$ menos $(200x^2)$ 400x más 2400…. ¿Listo? Esta es la función [golpea con el marcador el tablero manifestando con ello su satisfacción por el procedimiento limpio que ejecutó]. Ah, ¿y qué hacemos con eso? [85]
> Profesor Auxiliar: ¿Y qué son los puntos críticos? [86]
> Estudiante: Los puntos críticos son donde la función cambia de concavidad. O sea la derivada de una función [se dirige al tablero y dibuja]… O sea, yo tengo una parábola [dibuja el plano cartesiano y una parábola con vértice (0, 0)], la derivada de esta parábola en cero, va a ser cero [dibuja la recta $y = 0$], ¿sí?... Entonces ahí va ser un punto crítico. Igual cuando tengo una función elevada a la cuatro [dibuja una curva] aquí su derivada es cero, aquí su derivadas es cero, y aquí su derivada es cero [trata de dibujar las rectas $y = 0$ correspondientes en los puntos críticos; ver Ilustración 38] y va cambiando la concavidad y sube. [87]

Ilustración 38. Representación gráfica del estudiante de la derivada



> Lucero: Pero esa derivada me parece una recta tangente. [88]
> Estudiante: Sí, es que la derivada es una recta tangente… cuando toca el cero [el estudiante piensa cómo hacerse entender y decide dibujar otras *rectas*]…¿sí?... O sea, aquí la derivada, la pendiente es negativa [dibujó el segmento verde de la Ilustración 39]; incluso aquí la pendiente es positiva porque la derivada es positiva [dibujó el segmento fucsia de la Ilustración 39]. Entonces la derivada tiene que ver con la pendiente, y el ángulo de inclinación de la función. [89]-(Episodio 24)

Ilustración 39. Representación de rectas tangentes a la curva asociadas a la derivada



Las preguntas formuladas por Lucero y la Auxiliar motivaron al estudiante a esgrimir sus presaberes sobre la derivada, sin embargo, en este momento de socialización, ninguna de las dos continuó formulando preguntas para hacer emerger que modelar no se reduce a usar procedimientos matemáticos, es comprender por qué se elaboran y seleccionan determinados procedimientos; qué significa cada procedimiento en el contexto del problema: *¿por qué la noción de derivada tiene lugar en este problema?*

Retomando, la expresión “pero esa derivada me parece una recta tangente” es significativamente importante en la intervención porque los estudiantes receptores están recibiendo una información sobre la cual no hay certeza de si es correcta o no, pues la profesora se concentró en su diálogo con el estudiante y no realizó ninguna acción didáctica que articulara el hecho de que la mayoría de los estudiantes no sabían de qué hablaba con aquel estudiante que parecía saber mucho (*¿aprenderían los estudiantes que la derivada es una recta tangente a la curva?*).

Este episodio es muy interesante y deja ver precisamente, la necesidad de tratar dentro de las reuniones de la CoP aspectos del Pensamiento matemático-variacional que posibiliten la construcción acertada de nociones de los objetos matemáticos del Cálculo en los profesores. No obstante, Lucero nos expresó que su participación en la CoP le ha aportado herramientas para mejorar su comprensión de los objetos matemáticos del Cálculo:

> Investigador: Durante las tres etapas del curso en que usted participó, ¿percibió algunos cambios en el componente matemático? Conceptos que usted no tuviera claro. O le permitieron mejorar la forma de trabajar el concepto matemático. [90]

> Lucero: Sí, el uso de GeoGebra facilitó asumir la derivada como la pendiente de la recta tangente. Entonces "Alfredo" nos enseñó a hacer la construcción para ver como la recta iba variando a medida que se iba corriendo por la curva. Entonces el uso de GeoGebra facilita visualizar conceptos matemáticos, y para mí fue muy importante. Porque me ayudó bastante y a los estudiantes también les aportaba. No queda solo el procedimiento sino que veían como se comportaba geométricamente. [91]-(Episodio 25).

Nos resulta muy interesante que la profesora resalte el aprendizaje que la CoP le aporta alrededor de su formación matemática de tal suerte que esto la ayuda a estar en constante formación. Algo importante que Lucero nos deja ver es que pese a que ella no percibe el obstáculo didáctico que dejó la socialización, considera importante a GeoGebra como recurso que favorece la construcción de las nociones del Cálculo en su práctica docente; no obstante resulta contradictorio que la enseñanza que ella recibió de un par se convirtió en un obstáculo didáctico en ella, mismo que reprodujo en los estudiantes. De manera que estamos ante un significado negociado en la CoP que merece ser revisado.

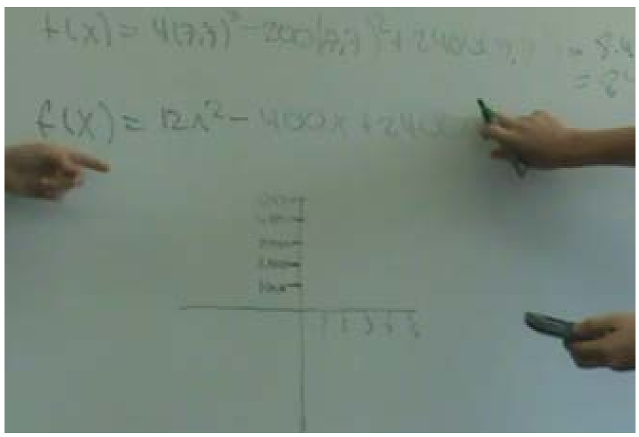
Volviendo al episodio de la clase objeto de estudio, observemos entonces la incidencia de las preguntas que se formulan para movilizar el pensamiento variacional del grupo pues al estudiante hacer la gráfica en el tablero y la profesora asumir que éste dibujaba rectas tangentes y expresarlo, llevó a que el estudiante lo afirmara y continuara con su exposición memorística y procedimental sobre la cual no hubo cuestionamientos (en el siguiente apartado profundizaremos sobre la pregunta como recurso).

Esta situación nos permitió observar que Lucero se hallaba inquieta pues a medida que el estudiante avanzaba en la exposición de procedimientos, los compañeros más confundidos se veían y el objetivo de la socialización se estaba desdibujando con una exposición y no había avance en la clase, según las actividades planteadas en el taller para los estudiantes. En este momento, la profesora tuvo que decidir cómo continuar su clase, es decir se enfrentó a un conflicto a la vez que evidenció una actitud de disposición para revisar su actuación (la reflexión de los profesores comienza cuando en la experiencia se encuentran dificultades y surgen problemas que no pueden resolverse de inmediato). Por lo que Lucero decidió que el estudiante continuará con la puesta en escena de sus presaberes.

Dentro de las competencias específicas del profesor de matemáticas, Rico (2004) señala que está el reconocer los tipos de razonamiento de los estudiantes para proponer tareas que los orienten, aspecto que es trascendental en el pensamiento didáctico ya que, según la lectura de la actividad del estudiante, el profesor propondrá actividades que le permitan a éste reflexionar sobre su conocimiento matemático. En el episodio del estudiante que exponía sobre la derivada, sucede un momento de graficación en el cual, aun cuando el estudiante no ha ubicado puntos en el plano cartesiano, Lucero decide intervenir adelantándose al estudiante:

> Lucero: Ah, es una parábola. ¿La gráfica de esa función es una parábola?... ¿Qué están graficando: esta cubica [refiriéndose a $f(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$] o esta [señala la cuadrática que es la derivada de $f(x)$; el estudiante le señala la cuadrática; ver Ilustración 40] ¿Por qué la de abajo? [92]-(Episodio 26).

Ilustración 40. Plano cartesiano para representar la función del volumen



Aquí podemos observar tres aspectos:

1. El estudiante intentaba graficar tomando unos valores para las abscisas y las ordenadas, sin tener claro si la gráfica es una parábola o una cúbica pero tenía conocimiento de que las imágenes de la función crecían rápidamente para incrementos pequeños del dominio; esto como efecto del acercamiento cuantitativo que había realizado con la función, de manera que el estudiante evidencia que reconoce que una gráfica presenta una relación entre dos variables.
2. La dificultad de Lucero para identificar hasta qué punto la participación del estudiante estaba yendo en contravía de la metodología del curso pues la socialización estaba siendo dominada por la exposición de procedimientos más no por el razonamiento (ni cualitativo, ni cuantitativo, ni algebraico) del fenómeno de

variación. De manera que Lucero tuvo dificultad para seleccionar y secuenciar actividades para el aprendizaje *(¿Lucero ordenó intencional a los equipos para las exposiciones del trabajo?*).

3. La socialización (el discurso matemático que se mueve en ella) "incluye el intercambio deliberado de ideas mediante el análisis grupal y a través de otras formas de comunicación verbal, visual y escrita" (NCTM, 2015, p.30).

Las reacciones de Lucero en clase la alejaron del propósito de la socialización, pues ella desarrolló su discurso alrededor de las respuestas del problema, más que en los procesos. Este aspecto no es sorprendente ya que, como mencionamos en el apartado 4.1.3.2, el moderador orientó a los profesores sobre este aspecto a la CoP en las versiones anteriores, recordando permanentemente la importancia de los procesos más que de los contenidos y no está siendo tenido en cuenta al momento de hacer la socialización.

Otro aspecto que permeó la socialización fue la dificultad de los estudiantes para comprender la importancia de la modelación del fenómeno, al respecto Lucero realizó una intervención que los ayudó a negociar sus concepciones sobre el papel de la matemática ante situaciones como ésta:

> Lucero: Fíjense lo que dice Kelly: por qué irnos hacia lo matemático [para construir la caja] y no como lo hicieron inicialmente [explorando]. [93]
> Estudiante: Sí [94]
> Lucero: Una pregunta […], miren, si a ustedes los contrata una empresa y les dice "no, yo tengo este material, necesito que con este material usted me construya la habitación con el mayor volumen… ¿usted qué va hacer: va a coger el material y lo va a coger para experimentar? ¿Y después va a pedir más material? [95]-(Episodio 27).

La situación que experimentó Lucero alrededor de los números decimales no es una novedad pues Brousseau (1989, p. 13) ya mencionaba:

> Los números decimales constituyen una estructura muy ingeniosa, apta para resolver problemas […]. Por esto plantean un problema original a la enseñanza. Por una parte se parecen tanto a los naturales que es muy fácil emplearlos y aprender muy pronto una cierta manera de usarlos: fueron inventados para eso. Pero, por otra parte, esta primera comprensión se convierte en un obstáculo para un uso más refinado y para una buena comprensión de cuestiones fundamentales para el estudio de las matemáticas.

Consideramos que Lucero logró devolver acertadamente la situación a los estudiantes pues así como ellos usaron la situación concreta de la caja para debatir la pertinencia de los decimales, la profesora usó otra situación real para mostrar que el proceso de modelar es una aproximación muy buena a la realidad. La idea de aproximación que señaló el Estudiante 3 la relacionamos con la estimación que "es una actividad matemática muy poderosa para usar tanto en la resolución de problemas como en la comprobación de lo razonable de los resultados" (MEN, 1998, p. 54).

Durante la socialización de las actividades realizadas con lápiz y papel, antes de usar los talleres de GeoGebra y ante el escaso diálogo que hubo entre equipos favoreció que los estudiantes representantes esgrimieran sus concepciones matemáticas sobre conceptos que ayudan en el desarrollo de la clase; Lucero las aprovechó para atizar la curiosidad de los jóvenes:

> Estudiante 1: Discúlpeme Bryan pero ya sabemos que 0,99999 es uno. Grupo: ¡Sí! [96]
> Estudiante 2: Sí, él lo tenía; lo iba a explicar [refiriéndose a una profesora que reemplazó a Lucero en una ausencia]. [97]
> Lucero: Eso es interesante, yo quiero ver esa demostración. [98]
> Estudiante 3: Ella tenía un cuaderno completo con la demostración. [99]
> Estudiante 4: Era como una aproximación de cifras significativas. [100]
> Estudiante 5: No, no era una aproximación. [101]
> Estudiante 6: Si no estoy mal era como hacer una división. [102]
> Estudiante 1: Sí, era algo curioso porque era como 0,999 esto son tres cifras decimales, señala el estudiante, entonces sería igual a 1 dividido entre 1000… [103]
> Lucero: Bueno, vamos hacer una cosa, va hacer una tarea más de curiosidad de ustedes en el sentido que van a consultar 0,99=1; estoy hablando matemáticamente. [104]
> Estudiante 7: No es que sea igual, es que se aproxima. [105]
> Estudiante 1: Sí era igual a uno, porque usaba el igual en la expresión.[106]
> Lucero: Es que… -piensa Lucero elaborando una nueva orientación-. Ubicándonos en la recta numérica: ¿el 1 lo puede ubicar donde está 0,99? […] Hagamos una cosa: revisemos eso en casa y el próximo sábado le sacamos un rato a ver si 0,99=1. Lucero envía a los estudiantes al receso de la jornada. [107]-(Episodio 28).

De manera que en ese episodio Lucero, ante la curiosidad de los estudiantes, logró poner en juego dos representaciones de un objeto matemático para confrontar, nuevamente, las concepciones de los estudiantes quienes, ante esa respuesta, se tomaron su tiempo para pensar y manifestar su confusión.

De los episodios analizados desde el pensamiento didáctico de Lucero hemos podido apreciar la incidencia del dominio de la estructura conceptual del pensamiento matemático-variacional en lo didáctico ya que en ocasiones ella se ha visto limitada para gestionar la clase movilizando los presaberes, las concepciones y las dificultades de los estudiantes en su pensamiento variacional. También observamos que Lucero buscó incentivar y motivar constantemente a los estudiantes, tal vez por eso evitó la confrontación entre grupos.

Las acciones y reacciones de Lucero con su grupo de estudiantes en la fase de exploración del taller nos dejan apreciar su esquema de trabajo en esta clase: (1) lectura de la hoja de trabajo, (2) indicaciones generales, (3) desarrollo de la hoja de trabajo por parte de los estudiantes y (4) proceso de comunicación de resultados. Precisamos en el "esquema de trabajo en esta clase" porque la profesora, al reflexionar sobre sus clases, señala que la forma de dar clase cambia constantemente:

> Investigador: ¿Y usted considera que en esos tres cursos que usted hizo, hubo cambios en usted como profesora en la forma de dar la clase? [108]
> Lucero: Todos los días cambiaba. Todos los días. [109]
> Investigador: ¿Pero qué cambiaba? [110]
> Lucero: La forma de dar el problema. Por ejemplo: "hoy es…" les leía el problema y les decía a los estudiantes *empiecen a trabajar*, entonces notaba que ellos quedaban como dispersos, entonces leíamos entre todos el enunciado. Después no, yo era la que lo leía, un compañero, ¿Quién va a leer el enunciado? Siempre trataba de cambiar ¿Qué palabra no entienden? ¿Quién la explica? Uno como que revisa la clase anterior y uno hace cambios. [111]-(Episodio 29).

A continuación sintetizamos los temas de reflexión emergentes de los episodios anteriores alrededor del pensamiento didáctico que nos servirán de orientación para la reflexión-sobre-la acción a realizar con Lucero:

1. Al empezar la clase la profesora indicó cómo hacer las cosas, no permitió a los estudiantes interpretar la lectura del problema para que, de acuerdo a esa interpretación, actuaran sobre el problema. Consideramos importante reflexionar con Lucero sobre este aspecto ya que la lectura es un aspecto importante en la comprensión de los estudiantes, por tanto era necesario que la profesora promoviera esta actividad y, además, diera el espacio para que los estudiantes encontraran la manera de hacer los dobleces en las cuatro esquinas para obtener la altura de la caja.
2. A través del análisis de la fase de exploración observamos que el discurso de Lucero se presentó de forma oral y gestual mayoritariamente, aunque se evidenció que usaba el silencio para llamar la atención del estudiante y darle espacio para reflexionar sobre sus afirmaciones matemáticas. También notamos que cuando intervenía su lenguaje matemático en ocasiones era bastante informal ("tope", "pedacito").

3. Otro aspecto importante sobre el cual consideramos pertinente indagar es sobre el papel del Auxiliar. Durante la clase de Lucero observamos que con el auxiliar no existen acuerdos definidos sobre el desarrollo de la clase, por lo general la profesora dirigía la clase pero no observamos una conexión entre ellas para complementar la clase en cuanto a estrategias y dificultades recolectadas durante el tiempo de trabajo de los equipos, por lo que percibimos que la auxiliar, como código del contracto didáctico, interactúa mayoritariamente con los estudiantes pero poco aporta a la construcción de la clase.
4. La manera en cómo se concluyó la socialización llamó nuestra atención pues el objeto matemático sobre el que quedó centrada la atención fueron los números decimales no la hipótesis del máximo volumen que se podría obtener con la caja de 40 x 60 cm.

Como se apreció, la profesora desarrolló las primeras actividades en el salón de clases y luego los estudiantes socializaron los procedimientos que utilizaron para resolver el problema.

A continuación, se rescatan algunos episodios que dan cuenta de la actividad matemática promovida por la profesora y realizada por los estudiantes en la sala de cómputo después de que los estudiantes cambiaron de lugar de trabajo. Lucero retomó la clase leyendo la hoja de trabajo, dando algunas observaciones sobre la ubicación del archivo de GeoGebra y dio espacio para el trabajo individual. En el punto 6 de la Actividad 1.4 se solicita a los estudiantes realizar la gráfica usando la expresión algebraica encontrada en la Actividad 1.2, observamos que Lucero empleaba lenguaje “popular” para llamar la atención de los estudiantes sobre la actividad matemática que realizaban:

> Lucero: […] Ah, pero es que usted tiene que ponerle un nombre… Claro, ¿lo va a llamar efe de equis, ge de equis, ele de equis, eme de equis -el estudiante inserta la función en GeoGebra y la profesora prosigue-: pero efe mayúscula o minúscula; ¿el nombre de las funciones es en mayúscula o minúscula? [112]-(Episodio 30).

Esta intervención de Lucero nos permite notar que su gestión de la clase estaba bastante permeada por la ejecución de procedimientos y que el uso de lenguaje matemático formal era escaso lo cual le dificultaba, incluso, realizar preguntas con mayor precisión matemática.

Otro aspecto importante emergente de la clase de Lucero, es el complemento entre profesor y auxiliar, en particular cuando aparecen errores o dificultades que podrían desviar la clase:

> Estudiante 1: Profesora, ¿cuál expresión algebraica? –el estudiante realizaba el punto 6 de la Actividad 1.4 que solicita la gráfica de la expresión. [113]
> Lucero: Esa que hicimos en el salón: $f(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$ [ni Lucero ni los estudiantes se percataron que la unidad de medida de la magnitud variable de esta función eran centímetros; la simulación de GeoGebra estaba en decímetros]. [114]
> Estudiante 1: No sale la gráfica. Se fue; se abre [refiriéndose a la gráfica de la función insertada]. [115]
> Lucero: Mmm, ¿y ahora? [116]
> Estudiante: Sale una línea así [hace en el aire una línea recta de pendiente negativa]. [117]
> Lucero: Vayamos a *Vista Algebraica* a ver qué fue lo que pasó –el estudiante explora GeoGebra. La clase transcurre y la Auxiliar interviene con una orientación importante. [118]
> Estudiante 2: Profe, ¿por qué la mía [refiriéndose a la gráfica] no sale completa en la pantalla? [119]
> Auxiliar: Porque tú hiciste… [La auxiliar reflexiona, y modifica su acción personalizada extendiéndola al grupo] Ustedes tienen en el archivo las medidas en decímetros, y ustedes están metiendo la función en centímetros. Pues claro, les va a dar una función inmensa. [120]
> Estudiante 3: Ay sí. [121]-(Episodio 31).

Este episodio muestra la conexión entre el pensamiento didáctico y el orquestal ya que la intervención de Lucero desvió la actividad matemática de los estudiantes. Observamos también que el lenguaje empleado tanto por Lucero como por la Auxiliar resulta descuidado: “Ustedes tienen en el archivo las medidas en decímetros” en lugar de “la unidad de medida del eje x es decímetros”; “va a dar una función inmensa”, nos preguntamos cuándo una *función es inmensa*.

Son muchos factores los que orquesta el profesor en la clase y el lenguaje es a veces uno de los recursos sobre los que menos se reflexiona en la acción. Pero a partir de esta y otras evidencias, nosotros afirmamos (desde el modelo R-y-A) que el lenguaje es un aspecto importante que debe atenderse, pues el discurso del profesor es fácilmente memorizado y reproducido vagamente por los estudiantes. De manera tal que se evidencia que las profesoras difícilmente reflexionan en la acción sobre este aspecto.

Para Chevallard, Bosch & Gascón (1997) la relación de la matemática con el lenguaje se traduce en la formalización que consiste en enunciar hechos matemáticos con la condición de utilizar un lenguaje preciso. Esto supone que se reflexione realmente sobre eso y probablemente que se tome tiempo para discutirlo con los estudiantes, partiendo de frases no matemáticas que posibiliten la construcción de un discurso matemático.

Al momento de socializar la exploración dirigida Lucero cambió la dinámica: esta vez ella, leyendo punto por punto la Actividad 1.4, propició el espacio para que diferentes estudiantes dieran su respuesta y, dependiendo de las éstas, entre ellos mismos se cuestionaran; en este espacio las intervenciones de Lucero fueron mínimas para permitir el flujo de la exposición de argumentos, concepciones y de la discusión misma:

> Lucero: Entonces, vamos hablar de la Actividad 1.4. Listo. […] ¿Qué elementos varían cuando empiezan a trabajar ustedes con GeoGebra? ¿Qué notaron que variaba? [122]
> Estudiante 1: La altura. [123]
> Estudiante 2: El ancho. [124]
> Estudiante 3: El ancho y el alto y el volumen. [125]
> Lucero: ¿Pero qué era lo que hacía que el largo y el ancho variara? [126]
> Estudiante 2: Pues la medida de las equis, [dijo tímidamente]. [127]
> Estudiante 4: Pues la altura, ¿no? –[Lucero lo mira y se mantiene en silencio]. [128]
> Estudiante 5: El valor que le dábamos la equis. [129]
> Lucero: ¿Entonces hay variables dependientes e independientes ahí? [130]
> Varios Estudiantes: La altura. La medida del papel. La anchura –no se distinguían las voces; Lucero llama la atención y pone orden a la participación–.
> Estudiante 3: el ancho y el alto, la independiente es el volumen. [131]
> Estudiante 2: La altura es la que cambia. [132]
> Lucero: ¿Quiénes dependen de quién?, reformula la pregunta. [133]
> Estudiante 1: El largo y el ancho dependen de la altura. [134]
> Lucero: "El largo y el ancho dependen de la altura", repite; ¿solamente esos dos? [135]
> Estudiante 5: El volumen también. [136]
> Lucero: Entonces ellas son variables qué… [137]
> Estudiante 1: Dependientes. [138]
> Estudiante 6: Todas dependen de todas porque siempre se van alterar. [139]
> Lucero: Mmm, ¿todas dependen de todas? –mira al grupo como devolviéndoles la pregunta. [140]
> Estudiante 3: La independiente es la altura, usted le puede dar cualquier valor a ella. Así como la equis es la variable independiente de cualquier función. [141]
> Estudiante 6: ¿Y si le da cualquier valor al ancho? [142]
> Estudiante 3: Pero es que estamos hablando es del problema en particular. Primero usted saca la altura, y eso le determina el largo y el ancho. [143]
> Estudiante 1: Pero si tiene el largo y el ancho va a tener la altura. [144]
> Estudiante 3: Pero… ¿cómo le dijera? –se enfrenta el estudiante a un conflicto al no lograr hacerse entender–. [145]-(Episodio 32).

No obstante, como lo expresamos en la categoría del pensamiento matemático-variacional, el episodio en el cual Lucero dibujó el rectángulo y asignó erróneamente el nombre de las dimensiones del polígono requería más intervención de parte de ella ante la respuesta "así también se puede" del estudiante que validó lo que ella inicialmente realizó.

De la metodología del curso, la discusión entre pares favorece la construcción del conocimiento y también teje la confianza entre los estudiantes para autoevaluar su trabajo y reconocer sus errores, como en el caso de algunos estudiantes cuya interpretación del problema se alejaba de la situación original:

> Lucero: Entonces solo hay una [refiriéndose a la situación de cuántas cajas se obtienen si el ancho es fijo de 40 cm y el alto y el largo son variables]…Los que decían que había más de una caja, ¿por qué lo decían? [146]
> Estudiante 1: Es que malentendíamos el problema. [147]
> Estudiante 2: Es que veíamos que variaba la hoja [148]
> Estudiante 3: O sea es que cuando la hoja puede tomar cualquier valor, pues hay infinitas cajas que tengan ese ancho de 40 cm, pero si te dan un valor exacto ya no se va poder. [149]-(Episodio 33).

Sin embargo, esa misma dinámica resulta desfavorable cuando todos, incluyendo la profesora, no notan los errores que afloran en el discurso matemático de los actores de la clase; veremos que reinciden las dificultades para el manejo de las unidades según la magnitud involucrada:

> Lucero: Entonces la altura 5 cm, entonces ¿cuánto mide el volumen, el ancho y el largo? (volumen=7.500 cm cúbicos) y ¿el ancho? (7.480 menos mal usted fue el que hizo las cuentas) ¿Están de acuerdo, todos? [150]
> Estudiante 1: Aquí en GeoGebra sale así. [151]
> Lucero: 7480 cm. Y si no tuviésemos GeoGebra. [152]
> Estudiante: Pues en la calculadora, trabajando en centímetros, nos va a dar 7500 cm; GeoGebra está trabajando con decímetros. [153]
> Estudiante 2: No pasa nada usted los cambia, hace conversión a centímetros. [154]
> Lucero: ¿Cuánto le da a GeoGebra? [155]
> Estudiante 1: 7.48 dm que es lo mismo que decir 7480 cm. [156]-(Episodio 34).

Otro episodio que desvió la clase de la ruta planeada (y que ya abordamos en la categoría anterior en relación al volumen) se observó en la socialización de la Actividad 1.4, como producto de la representación gráfica realizada en GeoGebra de la expresión que modelaba el volumen de la caja:

> Estudiante 1: Has de cuenta que la gráfica baja [157]
> Estudiante 2: La gráfica es como una manera de representar todo el comportamiento que ha tenido la caja para no escribir todo lo que ya sabemos. [158]
> Estudiante 1: ¿Un volumen puede ser negativo? [159]
> Lucero: ¿Qué? [160]
> Estudiante 1: ¿Un volumen puede ser negativo? [161]
> Estudiante 2: Un volumen no puede ser negativo. [162]
> Lucero: ¿Por qué no puede ser negativo? [163]
> Estudiante 3: Porque es algo que simplemente no existe. Supongo que esta hoja tiene tanto volumen. [164]

> Lucero: ¿Esta hoja tiene volumen? [165]
> Estudiante 3: No. Supongamos este borrador, este sí tiene volumen. [166]
> Lucero: ¿Esta hoja tiene volumen? [167]
> Estudiante 3: No. Hablemos mejor del borrador [el grupo ríe] [168]
> Estudiante 4: Pero no se supone que las unidades de medida no son negativas porque según la física uno siempre va hacia adelante. [169]
> Estudiante 3: No necesariamente; en Física la aceleración puede ser negativa. Si usted está desacelerando… [170]-(Episodio 35)

Observamos entonces que este episodio emergió el concepto de volumen el cual fue pasado por alto para centrar la atención en conceptos propios de la Física; la reflexión en la acción de Lucero respecto a la desviación que tuvo la clase (no se concluyó si la aceleración, el desplazamiento, la distancia, o la rapidez eran *magnitudes negativas*) y la dificultad para unificar el concepto de volumen como una unidad de medida no negativa fue solucionada interrumpiendo abruptamente la discusión en aras de encausar la discusión así:

> Lucero: Vamos a retomar; es que fíjense que estábamos hablando de volumen y preguntábamos si yo podía decir que el volumen es negativo. [171]
> Estudiante 1: No. En eso estamos todos de acuerdo. [172]
> Lucero: ¿Por qué no? […] Si el volumen lo que me está representando es la capacidad –interrumpe un estudiante preguntando. [173]
> Estudiante 2: ¿Todo lo que ocupa un lugar en el espacio no puede ser negativo? [174]
> Lucero: ¿Todo lo que ocupa un lugar en el espacio tiene un volumen? [175]
> Estudiantes: Sí. [176]
> Lucero: ¿Tiene un área? [177]
> Estudiantes: Sí. [178]
> Estudiante 3: Tiene masa. [179]
> Lucero: Tiene masa. [180]
> Estudiante 3: Masa es la cantidad de… -el estudiante no fue capaz de continuar- Bueno, que tiene un cuerpo. [181]
> Lucero: ajá –el estudiante continúa hablando, [Lucero escucha] y tímidamente dice: – *No puede ser negativa* –después, subiendo el tono de voz, retoma el control de la clase:– Ahora, ¿y qué pasó con el 30? [182]-(Episodio 36).

En esta exposición del proceso de reflexión-en-la-acción de la profesora Lucero vemos como ella, al carecer de algunas recursos didácticos o poca experiencia para manejar los que disponía, usó su autoridad para suplir esas carencias interconectadas con las del pensamiento variacional y con otras áreas interdisciplinares. Hitt (2005) nos dice que "proponer ejemplos ligados "a la vida real" requiere de mucho cuidado por parte del profesor. Se recomienda que se utilicen ejemplos muy bien pensados que no deriven en incoherencias".

El uso de su autoridad para sortear los dilemas que se fueron presentando en la clase, llevó a concluir como modelo para el problema una función cuadrática, como lo veremos en la siguiente categoría ya que durante la Actividad 1.4 la profesora interactuó con un estudiante quien afirmó que la curva era una parábola, aporte que fue tomado como cierto por Lucero y que condujo a un cierre errático de la sesión.

Un aspecto importante sobre el cual nos preguntamos es la derivada: en la fase de socialización (Actividad 1.3) el tercer equipo, el representante que pasó al tablero mostró que a él le enseñaron que al sacar la derivada e igualar a cero podía obtener el máximo de la función, sin embargo durante el cierre de la clase (el cual no fue claro) no se conectó la actividad matemática de modelar la función para obtener el mayor volumen de la caja con la noción de derivada.

De manera que (según nos parece) quedó en el ambiente de clase que la derivada “es una recta tangente”, noción que resulta sesgada y que consideramos debió ser retomada por la profesora pues, como Cadenas (2007) afirma, el hallazgo de los errores de los estudiantes permite diseñar y retomar estrategias que coadyuvan a identificar e intentar superar sus dificultades y obstáculos para lograr nuevos aprendizajes, y realimentar los conocimientos existentes.

Consideramos que en este episodio de la clase, los procesos de acción como producto de reflexión-en-la acción se vieron truncados en Lucero por su poca comprensión de la derivada lo cual resulta importante que sea valorado dentro de la CoP pues aspectos como estos derivan en esquemas cognitivos equivocados en la mente de los estudiantes.

Para concluir, los significados negociados de Lucero nos han permitido observar a mayor escala los significados que la CoP ha realizado alrededor del pensamiento didáctico, resaltando negociaciones sobre el esquema tradicional de enseñanza ya que ella evidenció su disposición (como lo han hecho otros profesores de la comunidad) para incorporar la metodología de la resolución de problemas a su práctica docente, entre ellos:

- Favorecer la participación de los estudiantes durante el desarrollo de la clase, pese a las dificultades que la puesta en común ha traído a Lucero ya que, como se observó, en ocasiones ella perdía el hilo conductor de la actividad matemática; esas dificultades la llevaron a considerar el trabajo por equipos y la exposición de resultados a través de un representante como una estrategia para movilizar la socialización.

- Debemos destacar la intención de Lucero por motivar a los estudiantes durante el taller pese a que ella no reflexionaba sobre los posibles obstáculos de aprendizaje que podrían presentar sus estudiantes al, por ejemplo, emplear un lenguaje inadecuado para referirse a conceptos matemáticos o al no realizar acciones precisas cuando las intervenciones de los estudiantes podría dejar nociones erradas sobre la representación geométrica de la derivada, de los números decimales y del álgebra como proceso de generalidad que está estrechamente relacionado con la modelación de un fenómeno.

Es importante traer a mención que, pese a las limitaciones que observamos en Lucero, ella ha sido una de las profesoras de la CoP que más se ha preocupado por estar en sintonía con las exigencias del curso, interactuando constantemente con los integrantes de la CoP y compartiendo sus propias experiencias para fortalecer los procesos de formación de sus compañeros.

5.2.3 Significados asociados al pensamiento orquestal

Como lo explica el modelo teórico y metodológico de Parada (2011), el pensamiento orquestal se hace presente durante el proceso de reflexión-en-la acción, pues es allí donde el docente decide cómo y cuándo el estudiante va interactuar con los recursos didácticos que ha planeado implementar en la clase. Un recurso puede ayudar o no a detonar la actividad matemática en el aula.

Como señalamos en el pensamiento didáctico, Lucero inició la clase leyendo el problema e interpretándolo para los estudiantes; también les indicó el procedimiento para hacer los cuadrados en las esquinas del papel, para lo cual ella llevó un recurso que no estaba contemplado en la guía del profesor para esta actividad y le faltó uno que era necesario para la actividad matemática solicitada; veamos:

> Lucero: […] unimos acá esto con estas esquinas y fijase que ya tengo una esquina de la caja. Entonces eso es lo que ustedes van a hacer, y no necesitamos recortar. ¿Bueno? Y así hacen las esquinas. Yo traje **cinta**. La deben compartir. Si necesitan más papel, para hacer más cajas, acá hay; pueden coger. [183]
> Estudiante 1: ¿**Una regla**? [184]

> Lucero: No tengo –al terminar su intervención, Lucero salió a buscar reglas para el grupo–. [185]-(Episodio 37).

El haber presentado la cinta antes de que los estudiantes tuvieran la necesidad de usarla no favoreció (como pudimos notar al observar el vídeo de la clase) que la mayoría de los estudiantes propusieran diferentes alturas para observar y analizar la variación del volumen como efecto del cambio de las magnitudes de las dimensiones de la caja, esto antes de decidir cuál caja construir. Es decir, los estudiantes construyeron una única caja con el papel y después crearon una estrategia para encontrar la de mayor altura.

Pese a que la profesora no llevó inicialmente las reglas, algunos estudiantes emplearon la que llevaban (ver Ilustración 40), y después la profesora les facilitó el recurso a los demás, de manera que los estudiantes midieron empleando la regla.

Ilustración 40. Estudiante empleando la regla

La indicación metodológica de movilizarse entre los estudiantes es clara para Lucero quien constantemente, durante la primera etapa del taller, observaba el trabajo de los estudiantes y los cuestionaba como se aprecia en la Ilustración 41 que sigue.

Ilustración 41. Lucero interactuando con un equipo

Lucero: ¿Entonces cualquier caja que hagan con este papel tiene el mismo volumen? [186]
Estudiante 1: No. [187]
Lucero: ¿No? [188]
Estudiante 1: No. A partir de 7 y 8. [189]
Lucero: Y si toma 9, ¿qué pasa? [190]
Estudiante 1: Baja. [191]
Lucero: Muy interesante. Es muy interesante que lo tengan presente. [192]-(Episodio 38).

Observamos que Lucero intentó indagar no para aprobar ni reprobar sino para cuestionar sobre las respuestas que los estudiantes daban, interpretamos esto como la intención de aproximarse al razonamiento que sobre la variación hacían los estudiantes e incluso para conocer cómo conectaban la matemática con el fenómeno inmerso en la actividad. Leyendo la hoja de trabajo de uno de los estudiantes del mismo grupo, Lucero encontró que los estudiantes no analizaron cuidadosamente los valores que podría tomar el cuadrado que se recorta para armar la caja; veamos:

Lucero: ¿Qué valores pueden tomar la medida del cuadrado a recortar? Cualquier número real [esta es la respuesta del grupo en la hoja de trabajo]… ¿Es decir que yo puedo decir que vale [refiriéndose a la altura de la caja que corresponde al lado del cuadrado a recortar] menos cinco centímetros? [193]
Estudiante 2: No. Desde cero y pues hasta donde permita el papel. [194]
Lucero: ¿Hasta dónde? [195]
Estudiante 3: ¿Para que sea una caja? –La profesora afirma con la cabeza–. Hasta 19.9 [196]-(Episodio 39).

Lucero construyó una pregunta para llamar la atención del equipo sobre el cuidado en el uso del lenguaje matemático y el análisis que se debe realizar antes de dar una respuesta sin tomar en cuenta el contexto emergente.

En la Actividad 1.3 de socialización, después de que Lucero motivó al primer representante de equipo a pasar al tablero, el estudiante justificó por qué hicieron una única caja:

> Estudiante: Entonces, de alto 5,5 cm, de largo 49 cm, de ancho 29 cm; esto nos dio de volumen 7813,5 cm^3 [197]
> Lucero: Listo. Esa es la de mayor volumen que ustedes obtuvieron. [198]
> Estudiante: No. Esa fue la que construimos. [199]
> Lucero: Entonces, ¿qué hicieron? [200]
> Estudiante: Entonces nosotros lo que hicimos, para no hacer más cajas, era cambiarle la altura... Digamos teníamos una caja de referencia, entonces para no ponernos hacer más cajas y eso, a una le aumentamos el tamaño de la altura y a otras les disminuíamos. Entonces, dijimos una altura de 4,5 cm, entonces al disminuir el centímetro de altura aumentaba en dos el ancho [escribió 31 cm en el tablero] y también dos de alto [escribió 51 cm en el tablero], y aquí nos dio [el volumen] 7.114,5 cm^3. [201]-(Episodio 40).

Como se puede inferir, el papel no fue un recurso indispensable en la clase de Lucero para analizar la variación de la altura de la caja ni para explicitar, desde el diseño didáctico propuesto por el taller, los procesos inherentes a la generalización. Pero sí observamos que Lucero a través del planteamiento de preguntas no sólo intentó posibilitar la participación por parte de los estudiantes sino que coadyuvó en el desarrollo de sus habilidades comunicativas. Entendiendo por habilidad comunicativa la capacidad que tienen las personas de expresar sus ideas hablando y escribiendo, de comprender, de interpretar y de sustentar ideas; además formular preguntas, y producir argumentos persuasivos y convincentes (MEN, 1998). Según el NCTM (2015) la pregunta es un componente esencial del discurso matemático significativo es plantear peguntas que estimulen a los estudiantes a explicar y reflexionar sobre su propio pensamiento.

Otro recurso que tomó protagonismo durante la socialización fue la calculadora: los estudiantes la emplearon para hacer los cálculos para el caso de $x = 7{,}7$ empleando la función obtenida; sin embargo uno de los grupos fue más allá de la representación numérica con la calculadora al obtener (dada la versión de la calculadora que tenía y del conocimiento que sobre su manejo poseía) una tabla de valores después de ingresar la función y la restricción de la variable independiente; veamos el episodio:

> Estudiante 1: 8.988,672 [202]
> Estudiante 2: y esto [señalando la tabla que quedó escrita en el tablero por el grupo uno] da 8.488 y esto da nueve mil y pico [señalando el producto 45,6 *25,6*7,7] [203]
> Estudiante 3: Sí, usando esto [refiriéndose a la expresión $f(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$] con 7,7 sí da 8.488. [204]

> Profesora: ¿Pero cómo es eso de las tablas? [205]
> Estudiante 4: O sea, en la calculadora, nosotros tenemos una función; nosotros podemos escribir esta función y que la calculadora misma nos la dé. [206]
> Estudiante 5: Sí, pero hace falta que usted le ponga condiciones a la equis. [207]
> Estudiante 4: Sí, es que ellos están usando el modo Setup y le dan Tablet y así… [208]-(Episodio 41).

Se presenta una confusión en el grupo, ya que manifiestan que la fórmula encontrada por ellos debe estar mal, ya que los resultados tienen que dar el mismo valor de la tabla. Las dos representaciones tabular o numérica y la representación algebraica no les concordaba y esto llevó al grupo a buscar cual estaba mal, ya que estaban seguros que debía dar igual. Por tal razón, la dinámica de discusión del grupo, los llevó calcular $f(7{,}7)$. A nuestra interpretación, para la profesora Lucero esta oportunidad fue de aprendizaje pues ella intentó comprender a qué se referían los estudiantes con “la tabla” al tener la calculadora como recurso de apoyo.

De manera que el episodio descrito en el aula de clase muestra que al comparar los valores de la tabla escrita en el tablero (donde se multiplica el largo, ancho y alto de la caja y se calcula el volumen) y el que daba en la fórmula, los estudiantes tomaron al final los valores de la tabla generada por la calculadora como verdaderos y dieron como equivocado el resultado que produce la “fórmula”, como ellos la llamaron.

Consideramos, entonces, que tener emplear fórmula no garantiza que el estudiante comprende los valores que están resultando, pero la atención se llama sobre la orientación didáctica que allí se debió realizar para, además, enfatizar que las distintas representaciones de un objeto matemático deben ser coherentes.

No obstante, resalta de la etapa de socialización que el uso de la calculadora ayudó a que los estudiantes desarrollaran un punto de vista realista de la situación lo cual da información de sus concepciones referente a la aplicación de los números

> resolver problemas del mundo real que requieran razonar con números y aplicar operaciones implica tomar una serie de decisiones como: decidir qué tipo de respuesta es apropiada (exacta o aproximada), decidir qué herramienta de cálculo es eficiente y accesible (calculadora, cálculo mental, etc.), escoger una estrategia , aplicarla, revisar los datos y resultados para verificar lo razonables que son, y tal vez repetir el ciclo utilizando una estrategia alternativa (MEN, 1998, p. 54).

Precisamente la tecnología se presentó como recurso al cual recurrieron los estudiantes cuando se vieron presionados por Lucero para demostrar que 0,99…=1; veamos:

> Estudiante 1: Acá dice algo [el estudiante lee del celular] de $0.99\ x\ 1\ =\ 9$ en cada dígito así y 9 x 0.111 da 0.9999, y $9\ .\frac{1}{9}\ =\ 1$, lo que implica que 0.9999 es igual a 1.[209]
> Estudiante 2: Venga en el tablero. ¿Por dónde lo hago?, preguntó a su compañero. [210]
> Estudiante 1: Wikipedia, los compañeros ríen. *Empiezan a hablar de las páginas donde se pueden buscar tareas como taringa.* [211]-(Episodio 42).

De los episodios analizados desde el pensamiento orquestal en la fase de exploración que corresponde a las Actividades 1.1, 1.2 y 1.3 del taller, hemos podido notar la incidencia de la toma de decisiones sobre los recursos en el desarrollo de clase y en la misma actividad matemática de los estudiantes. A continuación, como en las subcategorías anteriores, sintetizamos los episodios que nos servirán de temas de reflexión para orientar la etapa de reflexión-sobre-la acción para Lucero:

1. Al iniciar la clase, el incorporar la cinta como un recurso para la clase sin que esto emergiera como necesidad de la actividad de los estudiantes con el material, incidió en que la ruta planeada por la CoP para el taller se desviará pues los estudiantes construyeron una caja sin haber explorado lo suficiente para construir aquella de mayor volumen.
2. El uso de los recursos con los que se cuenta en el aula por parte del profesor y de los estudiantes, promueven el tipo de aprendizaje que se obtenga, es decir, si el estudiante tiene una regla, el profesor puede “ver” cómo la usan para medir, ya que se conoce que a pesar de ser un instrumento de uso frecuente en el aula, algunos estudiante no tiene claro su uso, por ejemplo, ¿desde dónde se mide: desde cero o desde uno?; y si la medida no es un número natural, se complica usar el instrumento, medir 4,45 cm. Por ello era importante que Lucero hubiese considerado este recurso con anticipación, pese a que en la guía del profesor no se menciona.
3. El episodio que en el cual los estudiantes observaron que para una misma actividad matemática (reemplazar en la función del volumen un valor particular de la variable independiente) daban resultados diferentes al calcular a mano y empleando la calculadora, puso en juego las habilidades de Lucero al no comprender tácitamente de lo que hablaban los estudiantes al referirse a la “tabla de la calculadora” y cómo este procedimiento algorítmico se realizaba en el artefacto.

4. El episodio en el cual los estudiantes intentan aportar a la discusión de que 0,99…=1 empleando la internet fue interesante en tanto que Lucero observó que los estudiantes lo consideraron como una verdad pese a no tener claridad de por qué podría ser verdad. Consideramos enriquecedor para este análisis comprender por qué Lucero decidió dejar como tarea la solución de esa inquietud: *¿sería para que usando el mismo internet encontrarán la demostración y se aproximarán a su tratamiento formal, a la demostración?*
5. Durante el análisis hemos rastreado la *pregunta* como recurso para movilizar el razonamiento de los estudiantes y la discusión entre pares; consideramos importante reflexionar con Lucero respecto a su percepción sobre su capacidad para realizar preguntas pues éstas tienen que ver con las competencias del profesor para innovar, indagar y crear el proceso de enseñanza y aprendizaje y la capacidad para propiciar un ambiente favorable para el aprendizaje de la matemática (Rico, 2004).

A continuación, veremos los episodios que se tejieron en la sala de cómputo después de que los estudiantes cambiaron de lugar de trabajo. En la Actividad Dirigida (1.4) los estudiantes emplearon GeoGebra para realizar animar el punto P que permitía observar la variación y la interdependencia de las variables; también se solicitó graficar la expresión algebraica del volumen de la caja obtenida en la Actividad 1.2. Las orientaciones dadas por Lucero a sus estudiantes sobre el uso de GeoGebra nos permitieron observar que Lucero, tras su participación en las tres versiones del curso, ha transformado su pensamiento orquestal en relación con el uso de GeoGebra

> Estudiante: No sale la gráfica. Se fue; se abre [refiriéndose a la gráfica de la función insertada]. [212]
> Lucero: Mmm, ¿y ahora? [213]
> Estudiante: Sale una línea así [hace en el aire una línea recta de pendiente negativa]. [214]
> Lucero: Vayamos a Vista Algebraica a ver qué fue lo que pasó –el estudiante explora GeoGebra; [215]
> Lucero: No, eso no; todo eso que aparece ahí son las construcciones que están hechas. [216]-(Episodio 43).

De esta manera, pudimos observar que ella inició sus propios procesos de participación, reflexión y acción alrededor de este recurso pese haber expresado que “mi experiencia en el uso de GeoGebra es poco, se limita a lo usado para el curso de pre cálculo de la UIS y algunos trabajos para la maestría. Lo que sé de GeoGebra es muy básico".

Con la incorporación de la tecnología digital, la CoP pretende lograr como en la negociación de significados que cada profesor transforme sus prácticas docentes sujetas al discurso centrado en el uso del tablero como recurso principal. El aula donde la profesora realizó la segunda parte de la clase cuenta con computadores para cada estudiante; la sala tiene un programa que permite tanto compartir las imágenes desde un computador a todos como que un solo estudiante pueda presentar su trabajo al resto del grupo ya sea compartiendo su trabajo o empleando el videobeam.

A pesar de tener todos los elementos tecnológicos del aula, la profesora no los usó para fortalecer la visualización en la Actividad 1.5 de socialización.

> Lucero: Cuando ustedes abrieron el archivo, y animaron el punto P qué encontraron; ¿ese punto P a quién representa en el problema que estamos trabajando? [217]
> Estudiante 1: La altura. [218]
> Estudiante 2: No, no… [219]
> Estudiante 3: La medida del cuadrito. [220]
> Estudiante 4: Sí, de la está que se dobla –varios estudiantes dice "es la altura, es la altura" –. [221]
> Lucero: ¿Es la altura? ¿Están todos de acuerdo que es la altura?... Listo. [222]-(Episodio 44).

De esa manera Lucero concluyó el punto sin recurrir al *software* para verificar los razonamientos de los estudiantes.

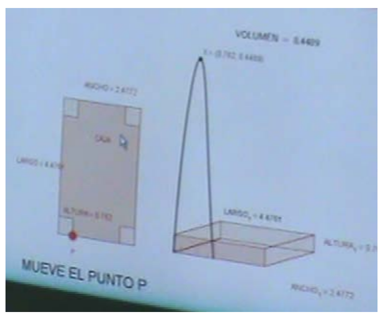
La profesora a pesar de tener la experiencia de la realización del curso de precálculo en las dos versiones no estaba usando los medios tecnológicos con los que disponía pues el uso de este recurso depende en gran parte en la habilidad que se tenga para usarlos en el momento adecuado. Salinas (1998, pág. 137) enfatiza en que "el rol del docente también cambia en un ambiente rico en TIC (…) el profesor pasa a actuar como gestor de la pléyade del recurso de aprendizaje y a acentuar su papel orientador".

La presencia de la Auxiliar nuevamente fortaleció a Lucero en su debilidad: el grupo debatía sobre el valor del volumen si la altura de la caja es 5 cm; quienes trabajaron con la calculadora obtuvieron un valor diferente a quienes lo hicieron con GeoGebra; Lucero en medio de los diferentes resultados no encontraba herramientas para explicar lo que sucedía, episodio en el cual la Auxiliar intervino para apoyarla:

> Auxiliar: Lo que pasa es que GeoGebra hace redondeo de cifras, y ustedes ahí no tiene la mayor cantidad de cifras que le sale; puede que ustedes al arrastrar en la tabla vean el 5 pero por la programación de GeoGebra realmente tengan 5,01 o 5,1 […] entonces van a opciones "Redondeo" y ajustan la cantidad de decimales. [223]
> Estudiante: Sí, sí lo que dice la otra profe es cierto…Toca mirar bien porque uno cree que tiene 5,0000 y está 5,0719… Entonces sí es 7.500 el volumen [224]-(Episodio 45).

El uso de la tecnología y la investigación relacionada a su uso en el aula, ha mostrado la existencia de problemas relativos a la lectura de gráficas. En el taller, al activar el rastro del punto P (ver Ilustración 42) en la simulación de GeoGebra se observa la función cúbica restringida que modela la situación, aspecto que tiene por objetivo "engañar" al estudiante y promover el razonamiento sobre lo que se visualiza en relación con la situación variacional subyacente.

Ilustración 42. Archivo de GeoGebra: representación del rastro del punto P



> Lucero: Pregunta, cuando ustedes utilizando la herramienta lugar geométrico, se lo aplicaron al punto X y al punto P les apareció una figura, ¿verdad? ¿Esa figura que representa? El comportamiento que tiene esa caja. [225]
> Estudiantes: Respecto al volumen, respecto a la altura, el vértice de la parábola. [226]
> Lucero: Hallando el vértice de la parábola, ¿cuál sería entonces? [227]
> Estudiante: -b/2a y ahí le da la respuesta de cuando es el máximo. [228]-(Episodio 46).

Como se aprecia, tanto estudiantes como Lucero confundieron la curva representada; la actividad matemática de los estudiantes concluyó que la gráfica era una parábola, conclusión que no fue explotada por Lucero para conectar las distintas representaciones de la función que modelaba el fenómeno de manera que pudiera:

- ✓ Orientar a los estudiantes a verificar, empleando la Hoja de Cálculo, que existían dos valores de x con el mismo volumen;
- ✓ Contrastar la ecuación (función cúbica) con el nombre que le habían asignado a la gráfica (parábola).

Durante la segunda parte del taller (sala de cómputo) corroboramos, como resultado más relevante de la reflexión-en-la acción del pensamiento reflexivo de Lucero, que la pregunta parece ser su recurso más usado y que tal vez ella aún sin ser consciente de ello es posibilitadora de una rica actividad matemática.

Al contrastar las reflexiones-para-la acción realizadas por Lucero con la práctica pedagógica realizada en relación con los recursos, encontramos que Lucero realizó una escasa reflexión para la acción, dado que ella sólo consideró como recurso de taller al papel para construir la caja. Un aspecto que nos parece importante es qué pasó con las cajas construidas: *¿su construcción solo fue pertinente para la Actividad 1.1? ¿No se podrían aprovechar para cerrar la clase indagando cuál de las construidas fue más acertada?*

Notamos que ella no concebía la pregunta como recurso para promover la actividad matemática ni los procesos inherentes a ella. Valdría la pena que ella (y los profesores de la CoP) se hiciera consciente de ello para que en futuros procesos de reflexión-para-la acción dedicara un espacio para el diseño de preguntas potentes, claras y precisas que enriquezcan mucho más la actividad en el aula. Las bondades destacadas del uso de la pregunta necesita cuidar aspectos como la claridad y la precisión; el nivel de dificultad; formular las preguntas a todo el grupo y después individualizarlas ya que, como menciona Menezes (2004), la calidad de las preguntas formuladas por el profesor es lo importante y no la cantidad de ellas lo que puede dinamizar las clases.

Un aspecto en el cual consideramos importante profundizar en la CoP es propiciar actividades de formación que les permita a los profesores incorporar nuevos aprendizajes alrededor de GeoGebra, de tal suerte que ellos lo implementen con mayor frecuencia y apropiación en el discurso matemático que elaboran para construir el conocimiento matemático.

5.3 SIGNIFICADOS EMERGENTES DE LA REFLEXIÓN-SOBRE-LA ACCIÓN

Este apartado se divide en dos partes: una presenta el resultado del análisis por parte del investigador sobre la actividad matemática planeada por la CoP y la lograda en la clase por la profesora" Lucero"; y la otra muestra el proceso de reflexión-sobre-la acción guiado a partir de las herramientas que lo movilizan en relación al pensamiento matemático-variacional, didáctico y al orquestal, como se indicó en el marco conceptual.

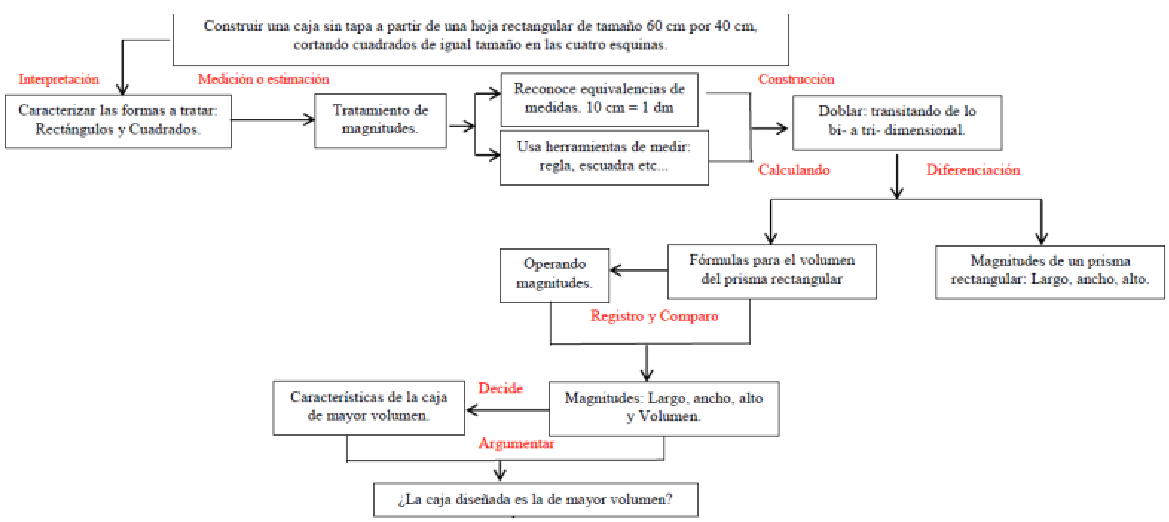
5.3.1 Contraste la actividad matemática planeada y la lograda por Lucero

Del análisis minucioso de la clase de Lucero a la luz del proceso de reflexión-en-la acción surge el comparativo de rutas cognitivas y la selección de episodios en los que Lucero actuó o reaccionó frente a las inquietudes de los estudiantes, reacciones que desencadenaron o no la actividad matemática esperada.

Presentaremos el análisis de la ruta cognitiva planeada y la ruta cognitiva lograda por la profesora Lucero, para ello usaremos cada una de las actividades propuestas en el Taller "Caja sin Tapa".

a) Actividad 1.1: Construcción de una caja sin tapa

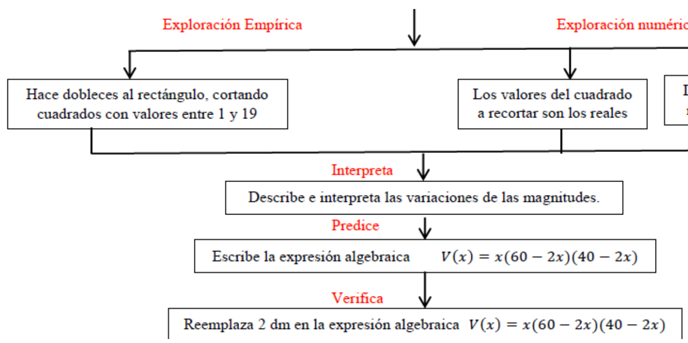
Ilustración 43. Ruta planeada por la CoP de la Actividad 1.1



En la ruta planeada (Ilustración 43) en la Actividades 1.1 el estudiante debía interpretar el problema para construir una caja y, de acuerdo a su criterio, estimar el lado del cuadrado a recortar haciendo el respectivo cambio de unidad de decímetro a centímetros; esto implicaba que los estudiantes construyeran la caja encontrando por sí mismos la manera de pasando de lo bidimensional a lo tridimensional y doblar el cuadrado para obtener la altura de la caja. Al tener la caja construida cada estudiante su caja, se esperaba que éste comparara su caja, distinguiendo las dimensiones del paralelepípedo en la tabla presentada en la hoja de trabajo, con la de los demás para decidir las dimensiones del paralelepípedo que por hipótesis tendría el mayor volumen y contrastar la conclusión emergente de la tabla con la caja diseñada.

b) Actividad 1.2: Exploración

Ilustración 44. Ruta Planeada por la CoP de la Actividad 1.2

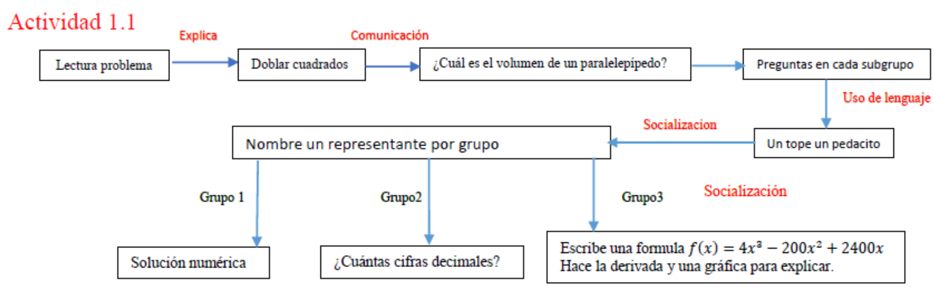


Como se muestra en la Ilustración 44, se esperaba que los estudiantes realizaran en su proceso una exploración empírica, es decir hicieran diversas cajas sin analizar como la altura iría a influir en el valor del volumen ya que, como se ha mostrado a través de la historia de la humanidad y de la matemática, el ser humano inicialmente realiza acciones que luego empieza a descubrir patrones, que ya sería su exploración numérica a través de la cual intuyeran los posibles valores que podría tomar la altura, con este proceso natural de aprendizaje se podía interpretar el comportamiento las variables involucradas en el fenómeno para, después, responder las preguntas indicadas en la guía de trabajo poniendo en juego sus procesos algebraicos y de generalización.

Posteriormente, la hoja de trabajo proponía la Actividad 1.3 de socialización en la cual, según la metodología del curso, se esperaba que el profesor movilizará a los estudiantes alrededor del trabajo correcto e incorrecto de sus pares, esto con la claridad de promover los procesos matemáticos como la comunicación, la elaboración y comparación de procedimientos (superando solo la ejecución), el razonamiento y la demostración.

En la clase de Lucero estas tres actividades surgieron con algunas modificaciones que llevan a una ruta cognitiva de la actividad matemática diferente; veamos la Ilustración 45 que sigue:

Ilustración 45. Ruta lograda por Lucero de las Actividades 1.1, 1.2 y 1.3

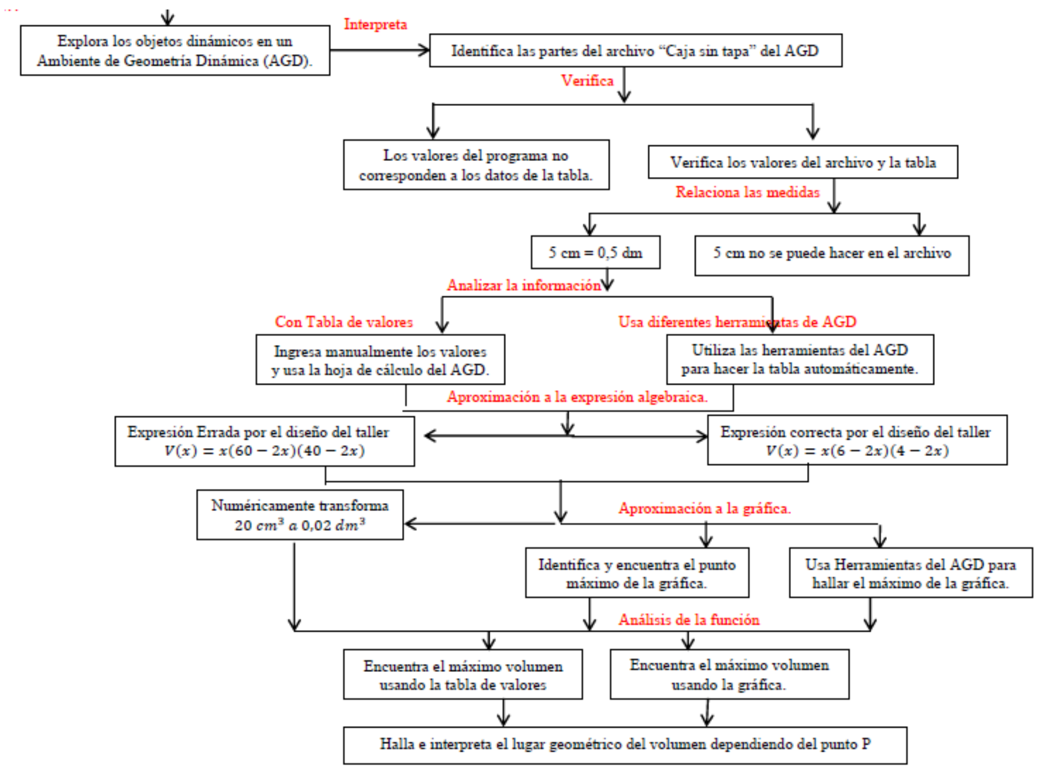


Como se observa en la ilustración 46, la profesora modificó la ruta planeada ya que no permitió a los estudiantes interpretar el problema; de hecho que ella (1) facilitara un papel por grupo modificó la actividad propuesta en 1.1; (2) indicara la forma de construir la caja con el uso de la cinta no permitió una amplia exploración respecto a cómo transitar de lo bi a lo tridimensional; (2) realizara una posible modelo de caja condicionó la construcción de cajas similares; (3) indicara "construir la caja con mayor volumen" cambió el orden de la actividad pues esto se analizaba después de comparar y recolectar datos entre diferentes compañeros. En el momento de las indicaciones de la caja, ella preguntó por el volumen de *un paralelepípedo*, percibimos que quizás los estudiantes no relacionaron la caja con el paralelepípedo.

Para la socialización la profesora nombró un representante de cada equipo quien realizó un trabajo expositivo en el tablero; la profesora no orientó al grupo para que comunicaran lo variante y lo invariante en la situación sino que centró la socialización en los procedimientos de los estudiantes y en pocas oportunidades aprovechó las dificultades o errores de los estudiantes para movilizar el razonamiento sobre la situación y las estrategias propuestas. La forma en cómo Lucero planteó la socialización sesgó el trabajo de los estudiantes quienes trabajaron sobre los "resultados correctos" de los expositores y estrategias fundamentadas por procedimientos de tipo algebraico y la noción de la derivada como objeto matemático para obtener el máximo de una función. La socialización se vio en el dilema de cómo hacer los cortes de la hoja cuando se tenía más de cuatro cifras decimales, es decir que es diferente el mundo matemático al mundo físico, y esta situación se vio reflejada en toda la clase y llevó a los estudiantes a concluir que el máximo está en un intervalo y que no era único.

c) Actividades 1.4 y 1.5: Exploración Dirigida y Discutiendo y comunicando

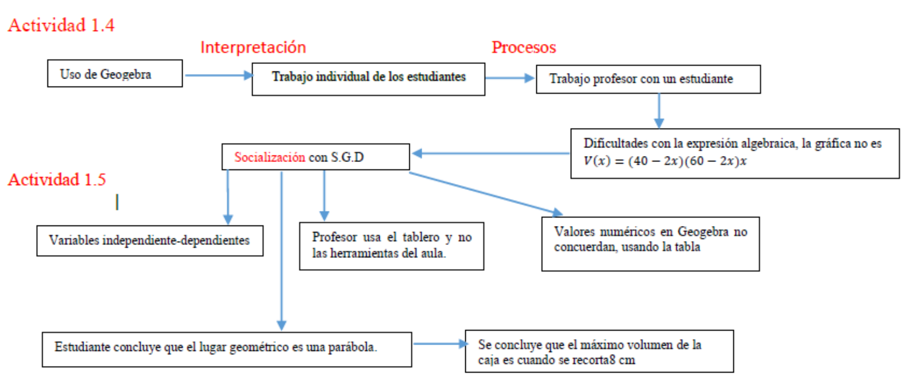
Ilustración 46. Ruta Planeada por la CoP de la Actividad 1.4



Como se aprecia en la Ilustración 46, en esta parte del taller, el estudiante usaría el Archivo de GeoGebra, recurso diseñado y construido por la CoP del curso de precálculo, con el que podría visualizar e identificar las magnitudes que varían, y responder las preguntas en la exploración dirigida. De esta forma el estudiante verificaría si las respuestas dadas en la fase de información y exploración libre eran correctas, y usando la representación tabular relacionar si las medidas dadas en la tabla son exactas. Al tener identificada la expresión algebraica (habiendo los estudiantes distinguido la función para cuando la variable independiente tenía por unidad de medida centímetros y decímetros), se esperaba que los estudiantes se aproximaran al valor del volumen máximo realizando la gráfica de la función y realizando su respectivo análisis; a través del lugar geométrico se espera que los estudiantes visualizaran la interdependencia de las variables desde otra representación de la función. La Actividad 1.5 correspondía a la socialización y cierre de la clase.

Veamos en la Ilustración 47 la ruta lograda de la actividad matemática de la clase de Lucero para estas dos actividades:

Ilustración 47. Ruta lograda por Lucero de las Actividades 1.4 y 1.5



En la ruta lograda, los estudiantes individualmente trabajaron en GeoGebra y con la orientación de la profesora siguieron las instrucciones de la guía de trabajo, como la construcción en GeoGebra estaba hecha en decímetros, para los estudiantes fue confuso ya que ellos escribían la expresión algebraica $V(x) = (40 - 2x)(60 - 2x)x$, esto llevó a preguntar por qué la gráfica no correspondía a la dada por el programa de GeoGebra a través del lugar geométrico, dilema que fue resuelto por la Auxiliar.

En la socialización con todo el grupo la profesora uso el tablero mostrando una representación estática y no usó los recursos con los que contaba en el salón. Como desde la primera parte, los estudiantes estaban confundidos con las representación numérica y algébrica, en esta segunda parte del trabajo en la sala de cómputo también ellos, al comparar los resultados que obtenían en la tabla, no concordaban con los obtenido usando su calculadora manual. Por ello no lograron identificar fácilmente si el volumen de 20 centímetros cúbicos a cual valor de la altura correspondían, después de varias discusiones identificaron el valor, pero continuaban manifestando que ese valor (0,08333) no se podría recortar en el mundo real. Al analizar la parte gráfica, para los estudiantes resulta ser una parábola y la profesora no corrigió esta situación. En la finalización de la clase para el grupo de estudiantes se llegó que el máximo volumen era *8* y que se podría hallar en un intervalo.

A continuación veremos la reflexión-sobre-la acción para cada categoría del pensamiento reflexivo en particular, tomando en cuenta los episodios más relevantes de la reflexión-en-la acción. El proceso de reflexión-sobre-la acción, fue realizado entre Lucero y el investigador, quienes revisaron posteriormente del desarrollo de la clase los logros alcanzados y las dificultades presentadas con relación al pensamiento matemático, al pensamiento didáctico y orquestal.

5.3.2 Proceso de reflexión guiado a partir de las herramientas

Parada (2011) señala que los procesos de reflexión conllevan una evaluación objetiva y crítica de lo que se logrado con relación a lo que se ha planeado, con el fin de hacer nuevas adaptaciones curriculares y enriquecer el pensamiento reflexivo del profesor desde sus tres componentes: lo matemático escolar, lo pedagógico y didáctico; y lo orquestal. En esta etapa del proceso de reflexión-y-acción quisimos ayudarla a verse, a través de los videos, en sus acciones y reacciones en el aula.

Para hacer los procesos de reflexión con la profesora Lucero, al identificar en los videos de la clase, episodios donde la profesora tomo decisiones relacionadas con el pensamiento matemático-variacional, pensamiento didáctico y pensamiento orquestal. De estos episodios seleccionados se hizo una presentación y con unas preguntas (hechas por el investigador) se solicitó una entrevista para que ella al ver la situación, nos dijera las razones que había tomado esas decisiones. También se mostró la ruta cognitiva de la clase lograda.

Ante la actividad de deliberar sobre su propia clase, Lucero reconoció esta práctica como un recurso que le permite desarrollarse profesionalmente por medio de la reflexión sobre su práctica, lo cual resulta un significado negociado muy importante ya que la reflexión conducirá a un proceso de desarrollo propio a cada individuo y, en el contexto de la formación inicial docente, ésta evolucionaría durante un largo periodo de tiempo.

> Lucero: Si, eso fue muy bueno porque fue "¿Yo dije eso?" "¿Yo por qué dije eso?" empieza uno como a reflexionar sobre lo que dijo. "¿Por qué no dije o lo dije de esta manera?" Es bueno ver y caer en cuenta de las cosas que hay que mejorar y las cosas que hay que conservar. [229]-(Episodio 47).

5.3.2.1 Reflexión-sobre-la acción asociada al Pensamiento matemático-variacional

Lucero empezó su reflexión-sobre-la acción exteriorizando una reflexión muy profunda respecto a su formación matemática:

> Lucero: Que una cosa es estar preparado teóricamente y otra cosa es ir a la práctica. Sí, hay profesores que manejan muy bien los conceptos y en el momento de ir a enseñar es terrible. O al contrario didácticamente uno se puede esforzar pero carece de conceptos matemáticos, como es mi caso, a mí me falta muchísimo profundizar en muchos conceptos de cálculo, y tengo que estudiar y estudiar para ir mejorando en ese aspecto. [230]-(Episodio 48).

pudimos ver que, evidentemente, no todos los contenidos que enseñan son claros para los maestros; pero este tipo de experiencias les permitieron reflexionar al respecto y darse cuenta que el dominio conceptual incide en su práctica docente, que no es suficiente con el interés que a ella la ha caracterizado para hacer una buena clase. Aprendizaje que es poderoso ya que tomar conciencia de sus limitaciones le permitirá estar transformándose continuamente, además ella deja explícito que se trazó la meta de superar dificultades y se dio cuenta que participando, reflexionando y actuando es como puede ver sus propios progresos.

En el caso específico de los números decimales Konic (2013, p. 8) nos dice que

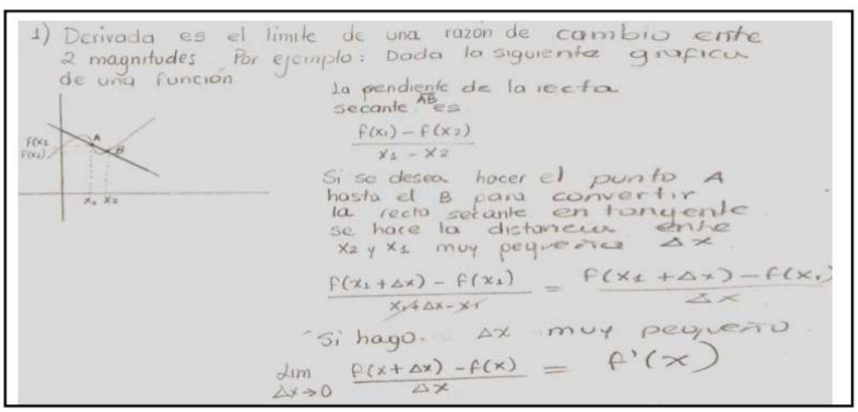
> los "números decimales", mirados desde la escritura decimal, es habitual distinguir los "números decimales finitos o limitados" de los "números decimales infinitos" y estos a su vez distinguiendo entre "números periódicos y no periódicos". Estas primeras cuestiones dan ya indicaciones de la complejidad existente en el estudio de los números y de la necesidad de tomar precauciones en la enseñanza para no generar problemas conceptuales derivados de la distinción entre representación y número.

Y fue precisamente esa situación la que Lucero vivió al abordar la igualdad $0{,}9999\ldots = 1$. Al reflexionar sobre esto, Lucero se mostró tímida al no tener claridad de si es o no verdadera la igual, pero resaltó que los números decimales son importantes porque permiten expresar información numérica que no es posible hacerlos usando solo naturales.

Respecto a la derivada, Rojas (2008) indagó en profesores en formación (en un programa de posgrado) las concepciones de los profesores respecto a qué es la derivada; veamos algunos hallazgos y cómo la autora los interpreta:

- ✓ Es un lugar geométrico de dimensión n perpendicular a un elemento de dimensión n+1. El profesor ve la derivada como la pendiente de una recta tangente en el plano, pero amplía esta misma idea al espacio (ibíd., p. 60).
- ✓ La derivada de una función es otra función teniendo en cuenta los incrementos y el límite si existe. Esta respuesta da a entender que el profesor no tiene una noción precisa de la derivada; la pretende expresar como otra función y no como la pendiente de una recta en un punto, es decir, el profesor lo que quiere decir es que la derivada de una función es otra función que es la familia de pendientes a los puntos de una curva (ibíd., p. 62).
- ✓ La derivada es el límite de una razón de cambio entre dos magnitudes. Veamos en la Ilustración 48 la consigna del profesor.

Ilustración 48. Concepción de derivada de un profesor en formación



Fuente: Rojas (2008, p. 63)

La autora señala que en ella se muestra que el profesor relaciona fuertemente la definición de la derivada con la pendiente de la recta tangente a una curva, planteando primero la pendiente de la recta secante a una curva y luego aplica la noción de límite. Su definición de derivada como "el límite de una razón de cambio" manifiesta tener dominio del concepto.

Para el caso de Lucero, reflexionar con ella sobre la derivada fue confrontarla con la limitación sobre su comprensión la cual, al igual que los anteriores profesores está permeada por "la recta tangente a una curva", veamos:

> Investigador: ¿la derivada es una recta tangente como lo dice él estudiante? [231]
> Lucero: No. La derivada es la recta tangente a un punto de…Espera que me confundí. La derivada no es una recta tangente, no necesariamente. [232]
> Investigador: Entonces ¿Qué es una derivada? [233]
> Lucero: La derivada. Si yo tengo esta curva la derivada en este punto es la pendiente de la recta tangente al punto de esa curva. [234]
> Investigador: ¿Y para hacer derivadas siempre debo de tener una curva? [235]
> Lucero: ¿Cómo así? [236]
> Investigador: O sea usted me está hablando de una derivada. [237]
> Lucero: Ah, porque me estoy imaginando la tangente, estamos hablando de la recta tangente. [238]
> Investigador: Pero entonces la derivada siempre es una recta tangente [239]
> Lucero: La derivada es la pendiente de la recta tangente. En un punto de la curva. Pero siempre es una tangente. En uno de los textos del profesor Luis Moreno Armella, él nos planteaba una función donde no necesariamente se llega a la recta tangente, pero si hay unas aproximaciones. Pero la verdad… -la profesora se queda pensando en su concepto de derivada-. [240]-(Episodio 49).

Lucero evidencia dificultades para reconocer la variación subyacente en la derivada, aspecto que no le permitió institucionalizar el saber. Según, Lozano (2011), el enfoque variacional del concepto de derivada

> propone remover el discurso matemático escolar desde el fondo, cambiando el papel principal que los cursos de cálculo confieren al concepto de límite y poniendo en su lugar a la variación física, de tal manera que no se sugiere tratar tan exhaustivamente las funciones, sino más bien las cantidades y las magnitudes. Al concretar estas ideas, se parte de las razones de cambio promedio obtenidas del estudio de fenómenos de la vida diaria y se arriba a la derivada como razón de cambio instantánea por medio de un manejo intuitivo del límite (p. 29).

Lucero expresa la derivada desde el enfoque geométrico, sin embargo "recta tangente a la curva en un punto" es un obstáculo didáctico que no le ha permitido comprender que desde el "enfoque geométrico desde este punto de vista la derivada es la tasa de cambio a la que está cambiando $f(x)$ comparada con respecto a x, es decir, es la pendiente de la tangente a la gráfica f de en el valor x" (ibíd., p. 28). Al reflexionar con Lucero sobre esto, ella relaciona este conocimiento con el problema de la caja diciendo

> Lucero: o sea que en el punto máximo del lugar geométrico que daba el punto P la recta tangente significa que [se toma su tiempo para decirlo]” [241]-(Episodio 50).

Con esta reflexión Lucero negocia, quizás, el significado más importante de su pensamiento matemático-variacional pues interiorizó, con gran dificultad, que una de las ventajas de comprender la derivada desde el enfoque geométrico radica en que prioriza el significado y la utilidad práctica que la derivada tiene en la resolución de problemas, lo cual establece una fuerte conexión con el enfoque variacional del objeto matemático. Parada (2011, p. 65) señala, al respecto, que “el pensamiento reflexivo del profesor se pone en evidencia durante los tres procesos de reflexión, y este pensamiento posibilita la movilización de sus propios saberes para movilizar, así también, los pre-saberes de sus estudiantes y la construcción de nuevos conocimientos”.

El pensamiento variacional, según el MEN (2006), está interconectado con los otros pensamientos matemáticos por lo que requiere a su vez de una madurez de los pensamientos métrico, numérico, geométrico e incluso aleatorio, ya que la actividad matemática alrededor de los objetos del cálculo entrelaza los objetos matemáticos propios de cada pensamiento (datos, números, medidas, espacios y formas), los cuales requieren engranarse para desarrollar los procesos matemáticos necesarios para la resolución de problemas. Engranaje, visto desde la posición de profesora de Lucero, entendido como el mecanismo utilizado para transmitir potencia y dinamismo a su pensamiento didáctico, mismo que promueve la actividad matemática de los estudiantes.

Las nociones del largo y el ancho en una figura plana, al igual que los conceptos de volumen y capacidad fueron elementos que pusieron en dilemas a Lucero.

> Investigador: Recuerda el episodio que usted puso el largo y el ancho y los muchachos dijeron que no, que así no. ¿Hay diferencia entre el largo y el ancho? […] [242]
> Lucero: Porque depende de la posición en donde este la caja. Ahí el hecho era, el mismo estudiante lo dijo, es la vista. Entonces ellos seguían, seguíamos con esta hoja, entonces si yo la pongo así puedo utilizar esto como la altura, puedo utilizar esto como lo ancho. Depende de la posición que la coloque [243]
> Investigador: Ósea que el largo y el ancho dependen de la posición. [244]j
> Lucero: Para los estudiantes [245]
> Investigador: ¿Para usted? [246]
> Lucero: El largo y el ancho dependen del objeto con el que esté trabajando. Porque en este caso para mí… -el investigador interrumpe-. [247]
> Investigador: En esta hoja, ¿cuál es el largo y el ancho? ¿O no importa? [248]
> Lucero: Si voy a hallar el área no importa. Porque es base por altura luego no importa si esta es la base o la altura porque da lo mismo. [249]

> Investigador: ¿Yo puedo entonces llamar a esto largo? [250]
> Lucero: Si, puede ser el largo, luego esta es la base, esta es la altura. De pronto eso era lo que estaban haciendo los estudiantes. Es esa mezcla de ideas y conceptos que uno tiene. Si yo lo veo esto como una hoja, entonces yo puedo decir "es que esta hoja tiene de largo tanto, tiene de ancho tanto, pero si la pongo así pues el largo es este" [ ] [251]
> Investigador: El volumen está representando la capacidad. ¿Hay diferencia entre volumen y capacidad? [252]
> Lucero: Si nos vamos a la definición formal de cada una sí. Si se busca en un diccionario sí, porque yo puedo hablar del volumen de mi cabello, pero no estoy hablando de la capacidad de mi cabello. Pero si yo tengo un objeto, por ejemplo, ese termo yo puedo medir un volumen, pero a la vez me da una capacidad de contener algo. Entonces no necesariamente. [253]-(Episodio 51).

Podemos observar cómo Lucero piensa detenidamente su respuesta, logrando evidenciar la concepción que la llevó a considerar que el "volumen es la capacidad de un objeto". También emergen sus esquemas de enseñanza influenciados por la enseñanza tradicional ya que al hablar del largo y el ancho en una figura plana se aprecia la fuerte incidencia de la clásicas prácticas de geometría en las cuales, según han reportado investigaciones, al cambiar de posición a una figura cambia sus cualidades o su nombre (por ejemplo, al girar un cuadrado determinado ángulo, éste se convierte en rombo).

5.3.2.2 Reflexión-sobre-la acción asociada al pensamiento didáctico

Lucero reconoció de esta experiencia, que dependiendo de la forma como se conducen las actividades en la clase detona una actividad matemática diferente.

> Lucero: Entonces no son solo ganas, también se necesita disciplina, prepararse y tener cuidado como se habla en clase; porque a veces en este afán de querer que el estudiante se sienta en confianza, tranquilo, uno empieza a utilizar términos que no son propios del cálculo y pues no ayuda uno a que el estudiante aumente su léxico en términos matemáticos. Y eso es algo, una desventaja, que tienen los estudiantes que trabajan conmigo, porque soy muy coloquial, utilizo términos muy allegados a ellos y veces muy alejados de los propios términos del cálculo. Y no el que vea lo que yo hice, no, espero que le sirva para mejorar su práctica de docente. [254]-(Episodio 52).

De su intervención es significativo que reconoce el hecho de que pertenece a una CoP evidenciando con ello que la negociación de significados, tal cual lo expresa Wenger (1998), surge de la interacción y el intercambio de saberes y experiencias que se cristalizan en acciones transformadoras.

Un aspecto que llamó nuestra atención fue observar que Lucero no retomó el concepto de derivada para el cierre de la clase en contraste con la participación significativa que tuvo un estudiante exponiendo sus presaberes sobre el concepto:

> Investigador: ¿Los estudiantes comprendieron el concepto de derivada del que habló el estudiante? [255]
> Lucero: No, por supuesto que no. De hecho muchos no lo conocían. Pero él [refiriéndose al estudiante] lo utilizó. [256]
> Investigador: Bueno, ahí en el video hay una alumna que hace señas con la cabeza que no deriva, cuando usted pregunta si todos saben derivar. ¿Usted ahí como docente qué hace en uno de esos casos? [257]
> Lucero: Pues depende, como le digo depende. No sé si lo hice ahí, pero entonces, si no me equivoco, cuando ellos dijeron que no, yo le pregunté al estudiante que estaba exponiendo sus ideas qué era la derivada. De tal manera que no soy yo la que pasa al tablero a explicar sino que, bueno, "usted que está utilizando el término ¿qué entiende por derivar?, ¿para qué me sirve?" Y pues ahí en ese momento la idea quedaba así como él la explicara, y la idea era que al final, si quedaba tiempo, institucionalizar el concepto. La idea no era enseñarles a los estudiantes a derivar con ese ejercicio; pero sin embargo no podía dejar pasar que alguien sí conocía el concepto, si él lo utilizó pues que nos cuente cómo hace. [258]-(Episodio 53).

Lucero deja explícito que tuvo claridad respecto a la decisión tomada y al impacto que generó la participación del estudiante al exponer el algoritmo para obtener la derivada de la función volumen:

> Lucero: De hecho yo me atrevo a decir que el ir a derivar una función polinómica no es comprender el concepto, es hacer. Porque puede ser también una mecanización, entonces comprender no. De hecho como profesor uno aprende cuando lo enseña. Yo fui estudiante, yo vi y pase mis cálculos, y cuando tuve que dictar cálculo tuve que reaprenderlo. Porque pues yo estudiaba pero era para un examen y eso, pero comprender los conceptos cuando los empecé a enseñar. Porque como voy a enseñar algo que yo todavía y esta es la altura y yo todavía sé que me faltan cosas por comprender. Así que si yo como individuo igual requiero de ciertos procesos para ir ganando, por supuesto que ellos con la mención no van a ganar claridad. [259]-(Episodio 54).

De manera tal que un significado negociado que evidencia Lucero es que, pese a que la clase favoreció los procedimientos algorítmicos, ella resalta que esto no implica la comprensión de los conceptos. Al preguntar a Lucero qué criterios empleó para gestionar la primera fase de socialización, esto contestó:

> Lucero: Diría que los criterios utilizados son los siguientes: Primero el estudiante expone la forma como interpretó y solucionó la situación propuesta. Segundo, los demás compañeros dan su opinión sobre lo expuesto por su compañero, si no estaba de acuerdo con la forma como fue abordado debía exponer el porqué de su desacuerdo. Siempre se insistió en argumentar por qué se estaba o no de acuerdo. Estos dos criterios daban lugar a que la mayoría, por no decir todos, los estudiantes participaban en la socialización y se daba lugar a recordar conceptos matemáticos vistos en el bachillerato. [260]-(Episodio 55).

En el documento del NCTM (2015) señala que al organizar una puesta en común sobre los enfoque de los estudiantes para resolver una tarea, el docente ha de decidir qué enfoque se compartirá, el orden en que los estudiante debe compartirlo y plantear las preguntas que los ayudarán a realizar la conexiones entre las diversas estrategias y la idea clave, para el caso del curso de precálculo, del taller.

Al profundizar sobre las prácticas que se podrían utilizar para aprovechar las respuestas de los estudiantes en la puesta en común, encontramos a Smith & Stein (2011, en NCTM, 2015, p. 31) quienes describen las siguientes:

4.1 *Anticipar* las respuestas de los estudiantes antes de la lección.
5.1 *Supervisar* el trabajo de los estudiantes e involucrarlos en las tareas.
6.1 *Seleccionar* a algunos estudiantes para que muestren su trabajo matemático.
7.1 *Dar una secuencia* con un orden específico a las respuestas de los estudiantes para analizarlas.
8.1 *Relacionar* las distintas respuestas de los estudiantes y vincularlas con ideas matemáticas clave.

La comunicación es un aspecto determinante de la práctica profesional del profesor pues es su responsabilidad ser mediador entre el contenido y el estudiante, lo cual le exige calidad en su discurso. En particular, como lo enfatiza Chevallard (1991) el desconocimiento del lenguaje matemático puede producir errores de construcción, interpretación, y de comunicación. Una de las manifestaciones frecuentes de los estudiantes, cuando se les solicita argumentar sus respuestas es: “profe, es que no sé cómo decirlo” y es porque existe una dificultad para enunciar un hecho matemático en un lenguaje preciso (Parada, 2005). Esa dificultad que manifiestan los estudiantes, también la viven los profesores porque intentan caracterizar los objetos matemáticos de estudio en un lenguaje común y cercano a los estudiantes.

> Lucero: […]. Sí, hay profesores que manejan muy bien los conceptos y en el momento de ir a enseñar es terrible. O al contrario didácticamente uno se puede esforzar pero carece de conceptos matemáticos, como es mi caso, a mí me falta muchísimo profundizar en muchos conceptos de cálculo, y tengo que estudiar y estudiar para ir mejorando en ese aspecto. Entonces es que vean eso, que no son solo ganas, también se necesita disciplina, prepararse y tener cuidado como se habla en clase; porque a veces en este afán de querer que el estudiante se sienta en confianza, tranquilo, uno empieza a utilizar términos que no son propios del cálculo y pues no ayuda uno a que el estudiante aumente su léxico en términos matemáticos. Y eso es algo, una desventaja, que tienen los estudiantes que trabajan conmigo, porque soy muy coloquial, utilizo términos muy allegados a ellos y veces muy alejados de los propios términos del cálculo. Y no el que vea lo que yo hice, no, espero que le sirva para mejorar su práctica de docente. [261]-(Episodio 56).

Fue así como palabras como “tope” en lugar de punto máximo y “pedacito de gráfica” en lugar de “gráfica a trozos o restringida” tuvieron lugar en la clase de Lucero. El uso del lenguaje cotidiano tiene beneficios si el profesor tiene claro el contenido matemático que desea explicar y si logra manipularlo para comunicarlo en palabras y ejemplos cercanos al estudiante, porque de lo contrario se terminan enunciando conceptos ambiguos (Parada, 2009). La autora señala que Chevallard, Bosch & Gascón (1997) mencionan que otros objetos más complejos son los sistemas conceptuales, teorías, etc. El trabajo matemático tiene una componente de actividad matemática mental y otras que son: la escritura, el discurso oral y el uso de todos los registros materiales a disposición. Nosotros consideramos que los profesores de la CoP precisan reflexionar sobre el lenguaje matemático que usan en la clase, pues éste determina la comprensión de la materia y la actividad matemática que espera promoverse por parte de los estudiantes.

5.3.2.3 Reflexión-sobre-la acción asociada al pensamiento orquestal

Llinares (2000) presenta que la forma como el profesor utiliza los recursos seleccionados influyen en el tipo de comprensión matemática y creencias de los estudiantes. Esto se puede hacer evidente ya que el profesor por lo general se considera el centro de la clase y en ocasiones resulta difícil para el profesor permitir que sea el mismo estudiante quien se apropie de las experiencias propuestas en los talleres diseñados por la CoP para acercar al estudiante en los conceptos del pensamiento variacional.

Recordemos que en la sesión del taller la profesora usó diferentes recursos para impactar cognitivamente a los estudiantes, siendo la pregunta el de mayor uso. No obstante, Lucero evidenció dificultades para generar preguntas de profundidad dado su dominio sobre los conceptos de números reales, funciones y derivada. Al reflexionar con ella sobre el episodio de la socialización en el cual se obtuvieron diferentes resultados al evaluar $x=7,7$ empleando la calculadora y haciendo los cálculos a mano esto nos dice:

> Lucero: Creo que debí haber creado preguntas en los estudiantes: ¿cómo así que acá dio un valor y por acá otro? Y se entraba a verificar si el otro estudiante había remplazado mal en la fórmula o usado mal la calculadora. […] En los otros dos grupos había estudiantes que tenían mejores bases en términos matemáticos, argumentaban muchísimo mejor; entonces hubiera sido también muy interesante fomentar la discusión. [262]-(Episodio 57).

El *Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias* (TIMSS, por sus siglas en inglés; MEN, 1998) explica que los *procedimientos de rutina* se consideran dos categorías: i. usar equipos (instrumentos como reglas, transportadores, calculadoras, entre otros); ii. Ejecutar procedimientos de rutina como calcular, graficar, transformar y medir. De modo que es muy interesante que la profesora haya identificado esta situación, pues contrastar resultados obtenidos de los procedimientos de rutina le hubiese permitido identificar dificultades de los estudiantes en la ejecución de los mismos.

Arancibia, Paz & Contreras (2010) afirman que existen indicios de que los profesores reconocen el vasto y potencial aporte de las TIC para transformar sus prácticas educativas y –aunque en menor medida– favorecer el aprendizaje de sus estudiantes. Con todo, estas tecnologías nos han obligado a repensar la enseñanza. Por su parte, Lucero explicó que aunque ella reconocía la importancia del uso de GeoGebra no pudo emplearlo en su clase (en particular en la socialización del trabajo realizado en la sala de cómputo):

> Lucero: El problema es saber cuándo utilizar el software, porque no se trata de utilizarlo sin tener una motivación, eh, debe ser útil para el estudiante el uso del software, porque si lo utilizo solo para que, por ejemplo, él derive, porque el software también lo hace, pero el estudiante no le ve la utilidad entonces estoy perdiendo es el espacio y rebajando el recurso. Fue un complique porque uno se está comprometiendo a hacer que la actividad con el software para que encaje con lo que yo estoy resolviendo en clase y que no quede en el aire, [..] que realmente sea de ayuda para los estudiantes. [263]-(Episodio 58).

Al parecer la profesora sí hizo una valoración de la tecnología digital como recurso para implementar en clase. Ella asiente un gran significado negociado: reconocer que se requiere una reflexión profunda sobre cómo emplear las tecnologías digitales para movilizar la actividad matemática desde el contenido matemático y desde lo didáctico para poder lograr una orquestación de todos los elementos en la clase. Un aporte interesante que emerge del accionar de Lucero es la evidente necesidad de que el profesor revise las potencialidades y beneficios de los recursos que implementan en el aula:

> Investigador: Si en el taller se contemplaba el uso de GeoGebra, ¿por qué razón no lo usó en la socialización? [264]
> Lucero: No sé. No sé. De pronto es esa costumbre como esa facilidad que uno tiene de coger un marcador, ósea en el momento no sé por qué no lo hice. No sé, de pronto para… o sea, si hubiera utilizado un computador como usted dice, mostrar mi pantalla en la pantalla del estudiante, también a ellos les hubiera llegado la idea de la pregunta que estaba haciendo el compañero. Pero ¿por qué no la use? No la verdad no lo sé. [265]-(Episodio 59).

La profesora es consciente que es la *"costumbre"* de usar el marcador, esta costumbre no le permite usar de mejor forma los recursos tecnológicos que se tenga en el aula, y como se señala Martínez (2004, pág. 4):

> el cambio no debe consistir únicamente en cambiar el papel y el lápiz por el ordenador y la impresora sino en la forma en la que se utilizan las nuevas herramientas. Si un profesor solo sigue el temario del libro de texto, las TIC apenas tiene impacto. Podrán ser clases más atractivas, pero el profesor seguirá diciéndole todo lo que tiene que aprender. Las TIC son una herramienta transformadora si el profesor utiliza Internet y las posibilidades de comunicación con otros alumnos y con el mismo profesor para recaba información y transfórmala en conocimiento.

No obstante, las interpretaciones que Lucero ha hecho de su participación en la CoP le han permitido darle sentido a este recurso dentro de su práctica docente:

> Lucero: GeoGebra facilita de cierta manera los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que es un apoyo para realizar las cosas que si yo realizo en el tablero no van a ser tan claras, como por ejemplo realizar una gráfica, abordar las transformaciones de funciones, etc. [266]-(Episodio 60).

Al mismo tiempo Lucero nos permite comprender que la clase no puede estar sujeta a los potenciales de los instrumentos pues el profesor es el encargado de orientar los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Nosotros rescatamos tres recursos muy potentes de la clase de Lucero, mismos que la CoP no había evidenciado explícitamente en los procesos negociados de las versiones anteriores: el problema, las preguntas y la tecnología. Por su parte, Lucero no identificó el problema como un recurso siendo éste el que posibilitó actividad matemática. Parada, Figueras & Pluvinage (2011) enfatizan en que la situación problema diseñada o elegida debe permitir la actividad matemática esperada en el aula, aún más cuando se usa la metodología de resolución de problemas, pues éste puede desviar los objetivos de aprendizaje previsto o puede permitir extraer su máximo provecho para detonar actividad matemática por parte del profesor y de los estudiantes.

El NCTM (2015, p. 37) señala que "una enseñanza eficaz de las matemáticas utiliza preguntas deliberadas para evaluar y mejorar el razonamiento del estudiante y para que le dé sentido a ideas y relaciones matemáticas importantes". Al reflexionar sobre la calidad de las preguntas que Lucero realizaba en clase, la profesora asiente que en ocasiones se siente "corta" para realizar preguntas y favorecer que los estudiantes avancen en su razonamiento pues ella reconoció su habilidad para diseñar preguntas para establecer lo que los estudiantes saben, es decir son preguntas de tipo recopilación de información (ibíd.).

A continuación presentaremos las conclusiones de este estudio, no sin antes decir que este caso de estudio nos dejó ver la viabilidad del modelo R-y-A, dándonos evidencias de negociación de significados y de cosificación de productos y conocimientos de la CoP de los educadores matemáticos que diseñan un curso de precálculo, y para otras que encuentren el trabajo en comunidades de práctica como una alternativa de desarrollo profesional.

6. CONCLUSIONES: SIGNIFICADOS NEGOCIADOS

Recordemos que este estudio pretende caracterizar los significados negociados (para concretar posibles aprendizajes) en una comunidad de práctica de educadores matemáticos que participan en un curso de precálculo, para estudiantes de nuevo ingreso a la universidad. Dicha caracterización se realizó con la CoP de educadores matemáticos de la UIS que realiza el diseño curricular de un curso de precálculo. De acuerdo a la teoría social de Wenger (1998) en una comunidad de práctica uno de sus principios orientadores es que cada uno de los participantes aporte sus conocimientos y experticias referente un significado para que los otros puedan negociar con sus propios significados; esto implica la participación y reflexión, que en el contexto de la investigación que aquí reportamos conllevó a revisar el pensamiento matemático-variacional, pensamiento didáctico y pensamiento orquestal.

En el transcurso de la investigación se pudo evidenciar como los significados negociados en la CoP influyeron en las prácticas profesionales, tanto de una profesora como de sus compañeros. A continuación exhibimos algunos significados negociados desde cada uno de los componentes del pensamiento reflexivo (antes, consideramos importante señalar, como se observó a través del estudio de caso de Lucero, que algunos de los significados que asociamos al pensamiento matemático-variacional están estrechamente ligados con el pensamiento didáctico; diríamos que son inseparables, pero requieren primero de una comprensión del tema por parte del profesor para que luego pueda plantear actividades de exploración con las tecnologías digitales de manera ad hoc para el estudio de los temas del Cálculo; pero esto también requiere el conocimiento del recurso tecnológico que se quiera incorporar).

La participación activa de los profesores, les permitió negociar significados al interactuar con sus colegas, se fomentó para unos la negociación de significados sobre el uso de las tecnologías digitales y para otros comprender aún más los conceptos de variación y cambio.

6.1 SIGNIFICADOS NEGOCIADOS ASOCIADOS CON EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO- VARIACIONAL

El diseño del curso de precálculo, éste asumido como la empresa conjunta de los profesores de la comunidad, mostró a todas luces la necesidad de contar con fundamentación clara sobre las nociones de variación y cambio. Los escasos hallazgos en esta categoría llaman la atención sobre la importancia de que en los procesos de formación de los profesores participantes de la comunidad se promueva el estudio y resolución de problemas que aporten en la comprensión de dichas nociones.

Desde esta perspectiva y trabajando mediante la resolución de problemas como estrategia de negociación de los aprendizajes de los profesores, se da espacio para el error y la duda, lo que posibilita eliminar el temor a equivocarse y a preguntar, posibilitando una significativa negociación de la propia actividad matemática de los profesores.

Los procesos de negociación de significados posibilitados por la lectura reflexiva y crítica de los documentos oficiales nacionales e internacionales aportan a la comprensión teórica de lo que implica la variación y el cambio, lo que implica el saber matemático del docente como recurso cognitivo fundamental para poder promover la actividad matemática del aula.

Particularmente en los procesos de reflexión de la profesora resaltamos los siguientes significados:

- La profesora expresó a lo largo del proceso que ella pensaba que con la formación lograda en el pregrado podía orientar este curso, sin embargo, en las reflexiones con la comunidad pudo notar que ella necesitaba más claridad conceptual para poder alcanzar los objetivos de las clase previstos. Esta interpretación, invita a la comunidad a reflexionar sobre la formación inicial de los profesores, con el fin de acercar las asignaturas teóricas de matemáticas con las de didáctica, esto para que durante su formación tenga experiencias docentes en la que pueda poner en escena sus conocimientos.
- Los significados negociados en las reuniones de la CoP permite a los profesores incorporar nuevos saberes que fortalecen su formación matemática. De esta forma

vimos como Lucero pudo fortalecer sus saberes sobre la derivada al darle un significado nuevo desde su representación geométrica, significado que utilizó en su clase para cuestionar la actividad matemática de un estudiante. Con éste Lucero pudo negociar otro significado desde el enfoque geométrico de la derivada, el cual prioriza su utilidad en la resolución de problemas, evidenciando con la noción de variación que le subyace.

- La actividad matemática que promueven los problemas propuestos en los talleres llevan a emerger diferentes dificultades conceptuales, entre ella también está el concepto de densidad de los números reales, en particular la dificultad sobre cuántas cifras decimales se pueden escribir en un número decimal para aceptar que es una buena estimación del número real.

6.2 SIGNIFICADOS NEGOCIADOS ASOCIADOS CON EL PENSAMIENTO DIDÁCTICO

Aunque el profesor tiene conocimiento de algunos enfoques teóricos sobre resolución de problemas que le dan un panorama más amplio de este campo de estudio y no sólo los referenciados a través de los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 1998, 2006), el desempeño en la práctica muestra que no hay una postura reflexiva y definida que relacione elementos teóricos y prácticos, por lo cual las prácticas docentes de los profesores terminan siendo permeadas por sus propias creencias y concepciones de ellos.

No obstante, de manera constante observamos que desde el inicio del diseño del curso los profesores le dieron importancia al reto de comprender la resolución de problemas desde la visión de la CoP del curso de precálculo. Fue muy interesante observar como después de los procesos de Reflexión-y-Acción los profesores intentaban incorporar los significados que los unos y los otros iban compartiendo como resultado de las acciones en el aula. Veamos los significados que a través de estudio se evidenciaron en la CoP:

- Para los profesores que llegan a la CoP, se presenta un choque inicial ya que la formación inicial prepara “para enseñar dando la clase” y esto permite “lucirse” delante de los estudiantes ya que se pueden exhibir todo lo que se sabe de Cálculo, lo cual además se les informa que ellos deben aprender idénticamente. El profesor al ser partícipe de la CoP puede transformar sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo, si se apropia de la metodología propuesta en el diseño curricular del curso.

- El proceso de comunicación articula la actividad matemática tanto del profesor como del estudiante, por ellos los profesores de la CoP han negociado su rol protagónico en la clase para darle participación al estudiante durante los espacios de socialización de las actividades. Sin embargo algunos excesos se cometen alrededor de este significado ya que, como lo evidenció Lucero, ante la necesidad de comunicar indicaciones orientadoras para la actividad se incurren en episodios que posiblemente desvían el objetivo didáctico del taller.
- El profesor experto puede orientar a los colegas novatos de la CoP, sobre el tiempo mínimo para lograr que la metodología propuesta para el curso se haga completamente y se logren los objetivos propuestos del taller. Comprender que el enfoque de resolución de problema lleva al estudiante a apropiarse de su propio aprendizaje, ya que es el quien puede reforzar sus conocimientos o refutar sus conceptos errados, bajo la asesoría del profesor.
- De lo anterior se derivan reflexiones como: ¿la habilidad para seleccionar y secuenciar actividades para el aprendizaje incluye el intercambio deliberado de ideas mediante el análisis grupal empleando las diversas formas de comunicación verbal, visual y escrita? Lo que implicaría también la habilidad para seleccionar las participaciones por parte de los estudiantes que ayudan a construir la actividad matemática iniciando con los posibles errores y llevando a que sean los estudiantes que los corrijan y por último aquellas alternativas de solución que muestran una mayor comprensión del pensamiento variacional, para que se identifique que los problemas planteados se pueden resolver desde diferentes puntos de vista.
- Los profesores de la CoP han negociado el esquema tradicional de enseñanza por las fases que soportan el diseño curricular de las actividades del curso, de manera que el significado más importante que ha tenido la comunidad se constituye en reconocer la puesta en común como una parte importante de la clase ya que es aquí en donde se da protagonismo a la actividad matemática del estudiante. Sin embargo,

a través de Lucero pudimos observar que la moderación de la puesta en escena común, hay dificultades para los profesores ya la gestión de la clase fue permeada por la ejecución de procedimientos; además de que el uso de lenguaje matemático requiere más dominio, incluso, para realizar preguntas con mayor precisión matemática.

- La práctica de Lucero nos resultó muy orientadora pues en ocasiones los profesores no tiene claridad de cómo se debe desarrollar una puesta en común. De manera que este significado emergente de las acciones de la profesora alrededor de la socialización se convierte en un elemento sobre el cual tejer reflexiones para futuras acciones pedagógicas en la CoP del curso.
- Los profesores en formación (auxiliares) al participar en las CoP van a verse influenciados por parte del profesor titular del curso, en cuanto a su pensamiento didáctico y las reflexiones emergentes en la acción, mismas que se van enriqueciendo a lo largo de la experiencia docente y de comprensión de la teoría y metodología del curso de precálculo.
- Otro significado negociado responde a la actividad del profesor de indagar no para aprobar ni reprobar sino para cuestionar sobre las estrategias que los estudiantes realizaban para resolver las actividades, aspecto que les permite aproximarse al razonamiento que sobre la variación hacían los estudiantes e incluso para conocer cómo conectaban la matemática con el fenómeno inmerso en la actividad.

6.3 SIGNIFICADOS NEGOCIADOS ASOCIADOS CON EL PENSAMIENTO ORQUESTAL

Los profesores participantes en la CoP mostraron interés, sobre el uso del software (GeoGebra), se compartió la experiencia de algunos profesores sobre el uso del mismo y los profesores novatos adquirieron un conocimiento necesario para las actividades diseñadas en los talleres, pero también para algunos profesores su poca experticia no les permitía durante la clase mostrar desde diferentes perspectivas responder las preguntas de los estudiantes.

Los diferentes significados negociados referentes al pensamiento orquestal son entre otros:

- Los procesos de reflexión-y-acción de la comunidad nos permitieron observar que para los profesores de la CoP los recursos se limitan al software, y el uso de las indicaciones del taller se modificaba según las creencias del profesor, aunque se cree que con estas reformas no se cambiaba la ruta cognitiva planeada por toda la CoP.
- Hemos observado la limitación de los profesores para estar en capacidad de desarrollar procesos didácticos utilizando la tecnología digital ya que, como lo observamos en Lucero, su uso aún se queda en emplear el Archivo de GeoGebra y con significativa dificultad lo emplean para apoyar el discurso matemático inherente a la construcción del conocimiento que se pretende.
- La CoP debe rescatar que el hacer preguntas es un medio que el profesor tiene para dirigir su clase y así mantener el control sobre el proceso de comunicación; evitando que el profesor o los estudiantes destacados sean los únicos en responder las preguntas.
- Las reflexiones de los profesores sobre la selección y orquestación de recursos en el aula fueron enriquecidas por Lucero quien interpretó que su selección y uso sugiere ser cuidadoso con los objetivos de estudio para que favorezcan los procesos de aprendizaje de los estudiantes; y no perder de vista la intención didáctica con la cual son incorporados en el diseño de la actividad matemática para que los estudiantes logren construir los objetos matemáticos que se pretende construir con su apoyo en la clase.

6.4 REFLEXIONES FINALES

- ✓ En la CoP del curso de precálculo promueve la ruptura entre los estatus de formación reconociéndose entre sí como pares y apoyos de la formación profesional.
- ✓ Los profesores participantes de la CoP, construyeron y desarrollaron significados teóricos y prácticos que han enriquecido el diseño curricular del curso.
- ✓ La CoP entre profesores en formación y profesores en ejercicio posibilita un aprendizaje significativo, como una amalgama perfecta entre teoría, innovación y experiencia.

- ✓ Los significados logrados por la CoP han permitido un apoyo administrativo institucional con el que se espera seguir contando.
- ✓ Para los profesores en formación (auxiliares) su participación en la CoP les abre nuevas y amplias perspectivas de desarrollo profesional.
- ✓ Los participantes de la CoP comprendieron que la problematización sobre el cambio y la variación es una gran posibilidad para desarrollar el Pensamiento matemático-variacional.
- ✓ Los profesores participantes de la CoP, necesitan analizar crítica y objetivamente sobre la actividad matemática lograda en clase y además documentar para compartir en grupo y que con esto se vaya mejorando el documento guía del profesor.
- ✓ Promover en las reuniones de la CoP, actividades para compartir con los profesores en formación (auxiliares) y así apoyar su formación inicial y los profesores retroalimenten su capacidad en el Pensamiento matemático-variacional, didáctico y orquestal.
- ✓ Promover en la CoP situaciones problema del cambio y la variación para que los profesores reflexiones sobre sus conocimientos matemáticos del Pensamiento matemático-variacional.
- ✓ Las comunidades de práctica tejen en su interior interesantes e importantes aprendizajes para los profesores. Tomando de referencia el proceso de "Carmen" (profesora en formación), quien ha participado en tres versiones del curso pasando de su rol de auxiliar a profesora, consideramos que es necesaria la participación de profesores en formación porque ellos son quienes más se impactan. Pensamos que aquí queda, precisamente, una puerta abierta para ahondar en los procesos de formación profesional complementarios que coadyuvan a la formación de los futuros profesores de matemáticas.
- ✓ Fue también muy evidente que la relación auxiliar y profesor es enriquecedora porque ambas partes se complementan. Aquí fueron reveladores los intercambios de significados durante el diseño de las unidades didácticas que pudieron cosificarse en un mismo diseño y en la orquestación que se dio en el aula.
- ✓ Fue también evidente que la relación moderador y profesor es enriquecedora; resulta importante que el moderador de cualquier comunidad de práctica provoque

la reflexión de manera que logre fortalecer a los profesores en su pensamiento matemático-variacional, didáctico y orquestal pues estos componentes influyen en la actividad que ellos promuevan en clase para sus estudiantes.

Finalmente, si los profesores exponen sus vivencias de enseñanza y en el aula, a investigadores y colegas con menor o mayor experiencia, es posible que desarrollen ideas, conocimientos y alternativas concretas para mejorar su práctica docente. Consideramos que la comunidad de práctica es importante ya que en ella se tejen acciones para favorecer que los profesores desarrollen conocimiento profesional, que lo lleguen a explicitar y puedan compartirlo.

BIBLIOGRÁFIA

ABRATE, R., Pochulu, M. & Vargas, J. (2006). *Errores y Dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María. Recuperado de http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf

AMADO, V. (2010). A connection between mentoring and participation in communities of practice. In Pinto, M.M.F. & Kawasaki, T.F. (Eds) Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol. 2, p. 3). Belo Horizonte, Brazil: PME.

ALEKSANDROV, A. D., Kolmogorov, A.N., Laurentiev, M.A., & otros. (1994). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza.

ANIJOVICH, R. (2005). *La reflexión como estrategia para el desarrollo profesional de los docentes*. En: *Reflexión Académica en Diseño y Comunicación*, 6(VI), pp. 22-23. Buenos Aires, Argentina. Recuperado de http://fido.palermo.edu/servicios_dyc/publicacionesdc/archivos/121_libro.pdf

ANIJOVICH, R., Cappelletti, G., Mora, S., & Sabelli, M. J. (2007). Formar docentes reflexivos Una experiencia en la Facultad de Derecho de la UBA. *Academia: revista sobre enseñanza del derecho de Buenos Aires, 5*(9), 235-249.

ARANCIBIA, M., Soto, C. & Contreras, P. (2010). Concepciones del profesor sobre el uso educativo de las tecnologías de la información y la comunicación (tic) asociadas a procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula escolar. *Estudio. pedagógico.*, 36(1), pp. 23-51.

ARTIGUE, M (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L & Gómez P (Eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática, pp.* 97-140. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

ARTIGUE, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. *Revista Latinoamericana en Matemáticas Educativa. 1* (1) 40-55.

ARTIGUE, M. (2003). "¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?". *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2 (2003). Recuperado de http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/artigue.pdf

BARAJAS, C. (2015). *Dificultades del pensamiento variacional: una mirada al proceso elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos*. (Tesis de maestría no publicada). México: CICATA-IPN.

BOTELLO, C. (2013). *Procesos de Seguimiento y Acompañamiento Académico a Estudiantes de Cálculo Diferencial: Un Aula Experimental para Profesores de Matemáticas en Formación*. (Tesis de maestría). Colombia: Universidad Industrial de Santander.

BROUSSEAU, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs. obstacles et conflits*.

CALVO, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas Educación. *Revista Educación*, *32*(1), pp. 123-138. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/440/44032109.pdf

CADENAS, R. (2007). Carencias, dificultades y errores en los conocimientos matemáticos en alumnos del primer semestre de la escuela de educación de la Universidad de los Andes. Revista Científica Ciencias Humanas (Orbis), 2(6), 68-84.

CANTORAL, R., Farfán, R. M. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Epsilon*. Sociedad Thales, España. Núm. 42, Vol. 14(3), 353 – 369.

CANTORAL, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. Secretaría de Educación Pública. México, Distrito Federal.

CHEVALLARD, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l’activité Mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l’Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.

CHEVALLARD, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, Barcelona: ICE/Horsori.

D’AMORE, B., Arrigo, G., Bonilla, M., Fandiño, M.I., Piatti A., Rodríguez, J., Rojas, P.J., Romero, J.H. y Sbaragli S. (2006). El “sentido del infinito”. *Revista Epsilon, 22*(65), 187-216.

DEWEY, J. (1989). Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo. Barcelona: Paidós.

ESCUDERO, D., Flores, E., & Carrillo, J. (2012). Formación de profesores de matemáticas y estudios sobre el profesor. En: MEMORIA DE LA XV ESCUELA DE INVIERNO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA. Pp. 35-42. Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/8266/El_conocimiento_especializado.pdf?sequence=2

ESCUDERO, Flores-Medrano, Climent, Carillo, Montes, Aguilar & Rojas (2013). Una perspectiva del conocimiento matemático para la enseñanza del profesor centrada en su especialización: el modelo MTSK. En: Actas del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

ETCHEGARAY, S. C., Etchegaray, M. C., Ferrocchio, M. E., & Bovio, A. C. (2014). Diferentes significados, funcionamientos y relaciones del "volumen" como objeto a enseñar.

FIALLO, J. & Algarin Danny (2013) caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hielle específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. Revista científica.

FLÓREZ, P. (1998). Formación de profesores de matemáticas como práctica docente y como campo de investigación. Revista de Educación de la Universidad de Granada. Vol. 11, 211-236. ISSN: 0214-0484. Recuperado de http://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Investigacion/RevEdUGR.pdf

FLÓREZ, P. & Peñas, M. (2003). Formación inicial de profesores de matemáticas reflexivos. Revista Educación y Pedagogía. XV (35), pp. 95 -116.

GALVIS, A. & Leal, D. (2007). Aprender en comunidad: más allá de aprender y trabajar en compañía. Revista de la Información Básica [Virtual]. 2 (2). Recuperado de https://www.dane.gov.co/revista_ib/html_r4/articulo13_r4.html

GERVASI, L. (2005). ¿Cuál es el papel del profesor de matemática frente a los problemas de la educación matemática? *Premisa*, 7 (25), 16-26. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/25%20Gervasi.pdf

GRAU, S., Gómez, C. & Perandones, T. M. 2009. *La formación del profesorado como factor decisivo de la excelencia educativa*. Recuperado de http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/13199/1/PROPUESTAS%20CAP.%201.pdf

GODINO, J. D., Batanero, C. & Roa, R. (2004). *Magnitudes*. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 287-315). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

GONZÁLEZ, D. (2012). Formación continuada de profesores de estadística.

HITT, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

HITT, F. (2005). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. En J. C. Cortés y F. Hitt (Eds), Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza. México.

JAWORSKI, B. (2008). Building and Sustaining Inquiry Communities in Mathematics Teaching Development. In K. Krainer, T. Woods (Eds.), *Participants in Mathematics Teachers Education* (pp. 309-330). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

KONIC, P. M. (2013). Factores condicionantes del conocimiento para enseñar: el caso de los números decimales. Recuperado de http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/20680004.pdf

Konic, P.M., Godino, J. D. & Rivas, M. A. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. Revista Números, (74), páginas 57–74.

LAVE, J, & Wenger, E. (1991). Aprendizaje situado. Participación legítima periférica.

LEITHOLD, L. (1998). El cálculo. México: Oxford University.

LOZANO, Y. (2011). *Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite* (Tesis de pregrado no publicada). Colombia: Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

LLINARES, S. (2000). *Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas*. En: Ponte, J.P. & Serrazina, L. (coord.). Educacao Matemática em Portugal, Espanha e Italia (pp. 109-132). Seccao de Educacao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciéncias de Educacao: Lisboa, Portugal.

LLINARES, S. (2008). *Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación*. III Encuentro de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/5302/1/llinares-bogota08.pdf

LLINARES, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (students) teachers and Teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.* 429-460.

MARTÍNEZ, F, & Prendes, M. P. (2004). Nuevas tecnologías y educación. Madrid España: Editorial.

MARTÍNEZ-Salanova, E. (1980): La evaluación de los aprendizajes. ICE de la UPM Madrid. Recuperado de http://www.uhu.es/cine.educacion/didactica/0091evaluacionaprendizaje.htm#La_evaluación_en_el_proceso_didáctico

MCDERMOTT, R. (2000). Why information technology inspired but cannot deliver knowledge management. *Knowledge and communities*, *41*(4), 21-35.

MEN. (2003). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Autor.

MEN. (2004).*Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Bogotá: Autor.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas* Bogotá: Autor.

MENEZES, L. (2004). *A importância da pergunta do professor na aula de Matemática*. Escola Superior de Educação de Viseu. Recuperado en: http://sites.google.com/site/luismenezes2009/ - 37k.

MORENO-Armella, L. (2004). Instrumentos matemáticos computacionales. En: MEN (Eds.) (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales* (pp. 81-98). Bogotá: Autor.

MORENO, A. J. & Flores, P. (2000*). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Un acercamiento a los números racionales*. En Gámez y otros (Eds.) IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas "THALES", pp. 211-214. Universidad Cádiz y SAEM THALES. Recuperado de http://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Investigacion/Moreno_Flores.pdf

NCTM. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción de M. Fernández (Traducción de la versión del 2000 del NCTM). SAEM Thales. Sevilla.

NCTM. (2015). *De los principios a la acción para garantizar el éxito matemático para todos*. México.

NICOL, C. & Crespo, S. (2003). Learning in and from practice: pre-service teachers investigate their mathematics Teaching. In N.A. Pateman, B.J. Dauguerty, & J.T. Zilliox(Eds.) *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference*, 3, 373-380.

PARADA, S. (2005). *La producción de textos: una alternativa para evaluar en matemáticas* (Tesis de especialización no publicada). Colombia: Universidad Industrial de Santander.

PARADA, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional.* (Tesis de doctorado). Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

PARADA, S.E. & Fiallo, J. (2014) Perspectivas para formar profesores de matemáticas: disminuyendo la brecha entre la teoría y la práctica. Revista Científica. Universidad Distrital. Bogotá, Colombia.

PARADA, S. & Sacristán, A. (2011). *Análisis Y Reflexión De La Actividad Matemática Que Se Promueve En Clase: Un Modelo Teórico De Orientación Para Maestros*. En: XI Congreso Nacional de Investigación Educativa.

PARADA, S. & Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *17*(1), pp. 83-113. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/335/33530083005.pdf

PARADA, S., Figueras, O. & Pluvinage, F. (2011). Un modelo para ayudar a los profesores a reflexionar sobre la actividad matemática que promueven en sus clases. *Revista de educación y pedagogía,* (59), 85-102. Colombia: Universidad de Antioquia.

PARADA, S. (2012). *Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander.* Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas. Bucaramanga, Colombia: UIS.

PARADA, S. & Tristancho, C. (2012). *Procesos de reflexión de profesores sobre los recursos que seleccionan, diseñan o usan para promover actividad*. En: Memorias del 12 ECME. Colombia.

PARADA, S. & Fiallo, J. (2014). Perspectivas para formar profesores de matemáticas: disminuyendo la brecha entre la teoría y la práctica. *Revista Científica.* Colombia: Universidad Distrital.

PARADA, S. (2013). *Aprendizajes que pueden emerger de la participación en una comunidad de práctica de educadores matemáticos*. Memorias del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Recuperado de https://www.google.com.co/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=cibem

PINO, L., Godino, J. D. & Font, V. (2014). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Revista Bolema*. Recuperado de http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/CDM_derivada_11%20junio%202014%20(2).pdf

PUIG L. (1996). Elementos de resolución de problemas. España: Comares.

RICO, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Revista de currículum y formación del profesorado, 8*(1) 1-15.

ROJAS, C. (2008). *La derivada en profesores en formación* (Tesis de especialización no publicada). Colombia: Universidad Industrial de Santander.

SALINAS, J. (1998). “Redes y desarrollo profesional del docente: entre el dato serendipity y el foro de trabajo colaborativo”. Profesorado [artículo en línea] 2(1). Universidad de Granada.

SALINAS, P. & Alanís, J.A. (2009). “Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa”. *Relime*, *12*(3). Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v12n3/v12n3a4.pdf

SANTOS, M. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. Avance y Perspectiva. (20), 247- 258.

SANTOS, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, (39)5, pp.523-536. Recuperado de http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-007-0057-9#page-1.

Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. (2005). *Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas.* Colombia: Gobernación de Antioquia.

SCHÓN, D. (1992). La formación de profesionales reflexivos. Buenos Aires: Paidós

SUÁREZ, S.R. & Rojas, S.J (2013) Experiencias didácticas con estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad. Trabajo de grado. Escuela de matemáticas. Bucaramanga. Colombia.

SHULMAN, L. (1986). Those who understand: Knowledge for growth in teaching. *Educational Researcher* 15(2), 4-14.

TALL, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. ZDM. Mathematics Education, 41(4), 481-492

TROUCHE, L. (2002). *Construction et conduite des instruments dan les apprentissages mathématiques: nécessite des orchestrations.* En; Guin, D. & Trouche, D. (Eds) *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique:un problème didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

TURNER, F. (2008). Growth in teacher knowledge: Individual reflection and community participation. En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and XXXth Annual Meeting of the North American Chapter of PME*, 4, pp. 353-360.

URSINI, S. & Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, *18*(3), 5-38.

WENGER, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

WENGER, E. (2001).*comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad*. Barcelona: Paidós.

ANEXOS

ANEXO A.
TRANSCRIPCIÓN REFLEXIONES CoP EN GENERAL.

En este anexo encontramos las transcripciones realizadas al moderador de la CoP, estas se obtuvieron por las filmaciones en video de las reuniones generales de la CoP y por entrevista personales.

Episodio 1. Orientaciones del moderador de la CoP

[1] Moderador: Esto ha sido pensado desde un principio como un curso diferente a los tradicionales, donde generalmente lo que se hace es un repaso de temas que el estudiante no aprendió durante la secundaria y el bachillerato. El objetivo primordial del curso pre cálculo es desarrollar habilidad del pensamiento variacional, con una metodología que requiere el uso de un software de matemática interactivo, en este caso Geogebra, que requiere pues un manejo de parte del profesor y una metodología de resolución de problemas donde se supone que el estudiante está en el aula, en un ambiente casi matemático, enfrentándose a un problema y tratando de resolver ese problema. Adicionalmente en cada una de las actividades, teniendo en cuenta los Lineamientos que se dan desde el ministerio de educación nacional, y a nivel internacional los Principios y Estándares para la Educación Matemática dado por los profesores de matemática de Estados Unidos, que comúnmente conocemos como el NCTM del 2003.

Episodio 2. Diferencia en la metodología.

[2] Moderador: La idea no es que el profesor le resuelva los problemas, cuando un estudiante se acerca y le pregunta que como se hace esto. Entonces el profesor le diga “venga yo se lo hago” lo descalifique “no esto está bien, esto está mal” que el profesor siga preguntando “¿qué pasa si hace esto?” un uso de otra representación, creo que es el software. Sobre todo que no descalifique o califique excelente algo que ha hecho el estudiante hasta que no se ha discutido. Dentro de la metodología hay tiempos para que el estudiante trabaje solo, sin software, tiempos para que él trabaje con el software y tiempos para que él trabaje con los compañeros y el profesor. Entonces lo que se quiere finalmente es que el estudiante sea el que razone el que piense, sea el que resuelva el problema con sus propios conocimientos, adquiera nuevos conocimientos a través de la actividad. Para eso también se tiene pensado una puesta en común, donde pues también hay que aclarar los conceptos y la idea. Esa es básicamente la razón de hacer la actividad del profesor.

Episodio 3. Impresiones del uso de GeoGebra.

[3] Profesor: Para mí ha sido buenísimo lo de GeoGebra. Poder ver en la pantalla lo que cambia y cómo eso afecta todo, me parece espectacular, y más para los chicos que con eso se les hace más fácil analizar la variación y el cambio cuando usan el programa. Uno sí ve ahora lo que significa la variación.

Episodio 4. Reuniones adicionales de los profesores de la CoP, para reflexionar la clase.

[4] Lucero: Nosotros nos reuníamos todos los días para resolver la siguiente actividad. Entonces nos sentábamos y tratábamos de resolver el problema desde diferentes maneras, y de pronto hacer preguntas que un estudiante les pueda realizar. Primero resolvíamos a mano, cada uno el taller. Lo resolvía solito. Después los discutíamos, porque a veces había problemas de redacción en el documento en la primera expresión. Cosas que generaban ambigüedad y ahí nos poníamos de acuerdo que preguntas hacer y ahí le quitábamos pedazos. Por ejemplo, recuerdo la del carro, la que hizo la profesora “una de las profesoras”, ahí habían unas preguntas que confundían o no se entendían las preguntas que “otro profesor”: Entonces nosotros todos acordábamos, esa pregunta no la vamos a trabajar y la abordamos de otra manera.

Episodio 5. Orientaciones del moderador del curso de precálculo.

[5] Moderador: A diferencia de un curso tradicional de Cálculo, donde predomina el carácter estático de las representaciones de los objetos matemáticos, en este proyecto introducimos representaciones dinámicas generadas por un software de geometría dinámica: Geogebra. Proveer a los estudiantes de representaciones dinámicas sobre ideas centrales del Cálculo como la variación y la acumulación, puede generar en ellos un pensamiento dinámico que contribuye a la construcción de significados de las ideas estudiadas.

Episodio 6. Uso del software para apoyar el pensamiento variacional

[6] Moderador: y eso [se está socializando la función $f(x) = \frac{1}{x}$] nos acerca a la noción de límite, jugando a averiguar qué pasa en el término enésimo, sin que hablemos directamente de los límites con esa definición, concepto que le costó varios años a los matemáticos para ponerse de acuerdo, y así, el estudiante va comprendiendo. La idea no es llegar al concepto formal del límite, que ocurre por la derecha, por la izquierda sino construir su noción.

Episodio 7. Relevancia del diseño de las actividades.

[7] Moderador: Entonces las actividades están diseñadas para también promover habilidades de los procesos. Esto pues no tiene que saber el profesor ‘perse’ que llega y vea las actividades pues si no conoce ese fundamento teórico y metodológico, posiblemente implemente esas actividades de manera errada y no funcionen como deberían ser. Entonces teniendo en cuenta esas ideas, cada pregunta que se plantea [en los talleres] tiene un objetivo, tiene una finalidad y obedece a ese marco teórico y a ese marco metodológico […]

Episodio 8. Asimilando la metodología del curso de precálculo

[8] Lucero: Pues fue difícil. Porque primero los estudiantes van a copiar lo que el profesor escriba en el tablero, entonces llegan preparados con su libreta y que el profesor llegue es a explicar, explicar. Entonces ellos como que se estrellaron contra el mundo porque ellos llegaron a empezar a utilizar lo que tenían para resolver o abordar problemas. Entonces siempre habían estudiantes que se trataban "no, explíqueme, explíqueme, primero explíqueme y después póngame el ejercicio" que es lo que generalmente se hace. Entonces fue un poco complicado.

Episodio 9. Primeras reflexiones que permiten reestructurar los talleres.

[9] Moderador: Chévere que sean ustedes los que planteen esas ideas, aquí no ha sido la idea hacer los talleres impuestos, algunas cosas logísticas sí, pero la idea es que todos hemos ido aportando a la construcción de los talleres que haremos del curso de precálculo. De hecho yo también aporto en el diseño de las actividades, […] lo hago con agrado.

Episodio 10. Uso del material en la clase.

[10] Profesora: En la fase exploratoria que se propone el uso de material concreto, indicamos al estudiante construir dos cajas con dos papeles que les dimos, aspecto diferente al taller diseñado y propuesto inicialmente por el grupo de precálculo, debido a que construyendo dos cajas el estudiante consideramos que tendrían mayor tiempo de contacto con el problema y plantearían dos posibles soluciones buscando que la caja que construya tenga el mayor volumen.

Episodio 11. Observaciones del moderador de la CoP.

[11] Moderador: Se dio el caso de dos profesores que cuando entré yo al salón, en ese momento estaban sentados mientras los estudiantes trabajaban. Entonces para precisar, la metodología del curso está marcada, pero si el profesor no entiende la importancia de cada una de esas fases de los talleres, será difícil que el curso supere el enfoque tradicional. Cada fase tiene una actividad y un propósito específico, y el acompañamiento del profesor es todo el tiempo; todo el tiempo debe cuestionar a los estudiantes; plantearle algunas dudas al estudiante, no resolverles los problemas; sino darles pistas. Entiendo que es difícil el cambio cuando estamos acostumbrados a hacerlo de otra manera.

Episodio 12. Aporte de los profesores en formación (auxiliares)

[12] Profesor: En mi clase ha pasado algo muy importante, no sé si será porque yo soy tan antiguo en esto y el auxiliar es una cara joven: yo noté que a medida que el curso avanzaba los chicos preferían llamar al auxiliar para hacerle preguntas que a mí; incluso llegué a ver que con él interactuaban como con más tranquilidad. Creo que

mi rol de "el profesor" no les daba tranquilidad para preguntar o solo para hablar de la forma en que hacían las cosas.

Episodio 13. Impresiones del uso de GeoGebra.

[13] Profesor: […] el uso del software permite generar una mayor y mejor interacción con la situación planteada, pero también pueden dispersar la visión del estudiante porque en ocasiones solo se limita a reproducir lo que el software le presenta. Se debe ser muy cuidadoso tanto en la manipulación del software y en cómo uno permite que los estudiantes lo usen; porque no es usar por usar el programa.

Episodio 14. Opinión del moderador, sobre los auxiliares.

[14] Moderador: Yo creo que eso ha sido como lo más positivo pues son quienes más se han apoderado de la metodología, esto lo menciono por comentarios de los mismos profesores y de los mismos estudiantes. Hemos observado que muchas veces los estudiantes prefieren más bien recurrir al auxiliar que al profesor. Tal vez porque le tienen más confianza, tal vez porque lo ven más metido en la dinámica de la clase y en ese sentido yo creo que no haya habido queja de un auxiliar con el papel que ha desempeñado. El papel ha sido de acompañamiento, de no responderles a los estudiantes; y para mí eso es una ayuda fundamental al profesor, al curso. Hay auxiliares que se han compenetrado muy bien con el profesor, y en momentos que el profesor no ha podido estar, él ha asumido el papel del profesor lo ha hecho muy bien. Eso pues muestra que los estudiantes si están un poco más nuevos, novatos, de pronto muchos estilos de enseñanza marcados, entonces son más dados a seguir las indicaciones.

Episodio 15. Reflexiones de los profesores expertos orientando a los profesores novatos

[15] Profesor Novato 1: ¿No será muy poco tema para esas dos horas?

[16] Profesor Experto: No, en el primer día, en ese momento de tablero sin computador, es bueno explicar la metodología del curso para que ellos tengan una idea clara del curso. Ahí se va parte del tiempo; y explicarles con ejemplos [la profesora hablaba de la actividad del primer taller del curso (Números y Operaciones)], ponga números para que él [el estudiante] generalice, haga varios ejemplos; el tiempo depende de lo que uno quiera profundizar; no va alcanzar. Si uno se queda únicamente con el taller, cuatro preguntica en diez minuticos sale. Pero, no, cada pregunta la profundizan sobre todo insistirle mucho en la justificación, porque ellos se quedan, por ejemplo, en la primera; *¿cuál punto está más cercano a*b?*, dicen *a*, pero que ellos escriban porque ellos creen que eso es, que ellos escriban.

[17] Profesor Novato 2: Por ejemplo en la primera actividad son cuatro puntos para dos horas. ¿No sé qué tanto puede llegar a ser eso?

[18] Moderador: Sí, esa es una dificultad nuestra, porque esta es la primera vez que la vamos hacer durante dos horas.

Episodio 16. Participación de los novatos

[19] Profesor Novato: Una pregunta, ¿ahí a los estudiantes se les puede dejar sacar calculadora cuando están en el tablero?
[20] Moderador: Sí; nosotros hemos sido abiertos a que ellos, si tienen inclusive computador, si tienen tabletas que las saquen; algunos usan internet… lo que les decimos es ¡*Bueno! ¿Y eso por qué es cierto?* Jugamos mucho a que ellos justifiquen, escriban, que es una manera de cómo se llega al razonamiento y la demostración.

Episodio 17. Socializando dudas del taller de valor absoluto.

[21] Profesora 1: [Leyendo del taller] Nuevamente explora la figura arrastrando el punto x y responda las siguientes preguntas. ¿Para qué valores de x, se tiene que x $|x-1|=2$?
[22] Moderador: Esa pregunta es un poco más compleja, se necesita un poco más de visualización, entonces, el estudiante necesita coordinar lo que ve.
[23] Profesora 2: Otra cosa que veo, qué relación tiene esa "a" [viendo la imagen de televisor].
[24] Profesor 3: Tiene que ser para cambiar el valor de -1, -2, de pronto.
[25] Profesora 4: Ah, cuando x-2, o x+2, ¿debe ser para eso verdad?
[26] Profesora 3: Mueva el deslizador [le pide a quien está en el computador].
[27] Profesora 5: Ah sí, mira hay un valor es 3 y hay 2.
[28] Profesor 3: si "a" es -1, si se mueve el deslizador de "a" cambia x-1.
[29] Profesor 6: Ah, otra vez que no vi qué pasó.
[30] Profesor 3: Sí, el "a" es variable.

Episodio 18. Profesor novato, saliendo de la periferia

[31] Profesor Novato: lo único que le iba a preguntar, por allá en el taller 2 habla que hacer una línea recta que una dos puntos ¿Lo hago con el comando que está arriba en *unir dos puntos y hacer la recta* o cuando se le dice que saque la segunda pantalla que la regresión quede en la imagen?

Episodio 19. Acerca de las orientaciones a los estudiantes

[32] Moderador: Venga y lo ponemos aquí [se proyecta el archivo para explicar] y vamos contestando con el archivo. En este taller hemos querido que se hable, esta partecita que yo voy hacer [el moderador va haciendo en el programa lo que explica], sería la que ustedes tendrían que hacer, ya que es la primera vez que los estudiantes van a usar GeoGebra para hacer análisis de regresión, entonces la forma es señalar los datos, ir aquí donde dice *Análisis de regresión de dos variables* y aparece aquí esta pantalla, decimos *Analiza*; fíjese que el software es muy sencillo…
[33] Moderador: Ahí ya pues muestra los puntos, y al escoger la regresión, en este caso voy a escoger la lineal, vamos a tener por ejemplo esa ecuación. La forma de llevar esto a la pantalla gráfica, es dando clic derecho y decimos *Copia en vista gráfica*,

cuando él ya copia esta gráfica pues podemos cerrar. Y explicarles a los muchachos qué es una regresión, por qué en últimas esta línea es la que más se aproxima y está más cerca de todos los datos, pero decirle a los estudiantes que si se me ocurre hacer cualquier otra regresión, es volver a repetir el procedimiento y que al computador lo que uno le diga, él lo hace […]

Episodio 20. Precisando el uso de las tecnologías, en el taller.

[34] Moderador: La mayoría [de profesores] empieza ya a tener en cuenta el uso de las tecnologías, sin embargo me doy cuenta que algunos no han incorporado ese uso de las tecnologías a las prácticas docentes. Ósea van y hacen la actividad con la tecnología, pero pareciera que ellos no la usan después, inclusive para resolver otros problemas ni para resolver las mismas dudas que los estudiantes van generando en clase; la tendencia que he observado es que el tablero continúa siendo el recurso que más emplea el profesor para desarrollar la clase. No profundizan más en el aprendizaje de esa tecnología para la enseñanza. Algunos se quedan simplemente “que hay que mover aquí en el archivo” pero no exploran otras opciones; no miran qué otras oportunidades podría ofrecerle el software para favorecer la enseñanza.

Episodio 21. Socializaciones de los expertos.

[35] Profesora Experta (Lucero): ¿Qué más dirían ustedes de las propiedades del cono?, ¿qué características tiene la figura geométrica? Ellos [los estudiantes] lo deben decir así; a conciencia. [Lucero lee del computador la guía del profesor] *Se espera que los estudiantes respondan que es un cono, que es un cono recto*. [La profesora continúa hablando] Entonces ¿por qué? Porque el vértice coincide. ¿Qué se espera que identifiquen? Que la base es un círculo, ahí se espera que los chicos lo digan, si no hay que lograr que lo hagan. [Continua la profesora diciendo y señalando el taller impreso] Entonces acá ya con medidas ¿hablar de área y volumen?

[36] Profesor 1: Sí.

[37] Profesora 2: Sí; ¿pero acá está diciendo que el área?

[38] Lucero: Sí, pero ellos van a decir que varían, calculemos el volumen.

[39] Profesora 2: [Acepta haciendo un gesto con la cabeza].

[40] Lucero: Entonces empezar con área.

Episodio 22. Reflexiones del profesor novato, sobre la tecnología.

[41] Profesor Novato: La parte nueva para mí pues es el trabajo en la sala de computo, inicialmente pues empecé a ver qué estrategias utilizar porque, lo uno, el tiempo y si se les daba el espacio a ellos para que trabajaran todo el tiempo en el computador, quedaban muchas cosas en el aire que tocaba completar lo que se buscaba casi que haciendo milagros. Entonces lo que yo busqué, fue mirar cuando todos habían terminado la primera actividad, hacer un alto y vamos a socializar para poder nosotros sacar conclusiones y que no quedara en el aire. Y cuando se hacía eso se pasaba a la segunda y a veces no alcanzaba el tiempo para más. Si es importante la socialización porque sin ese espacio se queda en el aire, se pierde prácticamente el trabajo. Esa es la parte nueva, le quiero agradecer a la profesora experta por toda la

colaboración que me brindo y a otra profesora también, las dos me colaboraron bastante.

Episodio 23. Aportes a la CoP de profesores expertos.

[42] Profesora 1: Como no hay dos hijos iguales no hay experiencias iguales, lo digo por experiencia propia [risas]… Usted puede estar repitiendo el curso, pero no le va a ocurrir lo mismo; usted va a vivir una experiencia diferente. Empezando, los estudiantes que tengo este semestre son más abiertos para hablar, ya que en otros semestres los muchachos eran tímidos, no expresaban ideas, no preguntaban. Acá en este curso se trata de que los estudiantes argumenten; ellos sí preguntan mucho, pero ellos quieren que uno les responda, y como la metodología no nos permite en un principio institucionalizar todo el tema porque se pierde toda la estrategia que se está usando; ellos esperan mucho que el profesor les diga, como siempre ha ocurrido, entonces ya están en ese proceso de argumentar, porque ellos si preguntan pero a la hora de argumentar y convencer al otro prefieren guardarse sus ideas, eso me ha pasado en esta ocasión el grupo está más homogéneo.

Episodio 24. El rigor matemático del profesor.

[43]. Moderador: […] se nota que el profesor que ha estado trabajando, y especialmente aquí en la UIS, su pensamiento matemático, formal, lo tiene. Mientras que los recién egresados, tienen bastantes dudas sobre su pensamiento matemático. Los sorprende cierta estrategias, ciertas soluciones, ante el planteamiento de algunos problemas ellos más bien no participan, tal vez por temor de no hacer bien el problema, y pues porque también puede ser que no lo sepan. El hecho de ya ha haberse graduado no implica que ya tengan todos los conocimientos que van a impartir. Eso en cuanto a conocimiento matemático. También ve uno que tanto el novato como el veterano, hay algunos que ese pensamiento matemático solo lo ven desde lo formal. No lo piensan desde lo intuitivo, entonces, de hecho va muy arraigado tal vez en su concepción de lo que para ellos es la matemática y entonces algunos que hacen demasiado énfasis en rigor, y otros no consideran como factible que se pueda partir de lo intuitivo.

Episodio 25. Mas aportes de los novatos, se animan.

[44] Profesor: […] lo que pasa es que se les deja muchas preguntas sueltas y le toca a uno decirles “espero ahorita explicarles límites de funciones”

[45] Moderador: ¿Para usted qué sería explicarles funciones?

[46] Profesor: Esa idea de la convergencia, que se puede aproximar tanto como usted quiera; ahí uno puede hablar formalmente de la definición de límite, como en un curso de cálculo: el concepto más formal.

[47] Moderador: ¿Y por qué hay que hacerlo formal?

[48] Profesor: Ahorita no les puedo hablar de eso, como profesores de Cálculo. Pero ese proceso yo lo puedo hacer mejor de lo que está planteado para el taller.

Episodio 26. Consideraciones de una profesora formada en matemática sobre el curso.

[49] Profesora Novata: A mí me gustó mucho la experiencia, porque me gusta como uno da herramientas y no da contenidos; me gusta ver que uno construye procesos, que uno construye nociones, que uno puede hacer preguntas que son lógicas pensarse. Es más interesante construir el conocimiento todos en grupo que uno solo con lápiz y papel. Me gusta bastante que, ellos [los estudiantes] al principio eran muy reacios a participar "quién quiere pasar al tablero, quién hizo esto", y no, ninguno pasaba […]. Me gustó lograr la participación, que ellos lograran hablar, que lograran equivocarse, pero corregirse al mismo tiempo, que lograran plantearse preguntas…

Episodio 27. Reafirmando la metodología propia del curso.

[50] Moderador: Sé, por algunos estudiantes que le comentan a uno, que algunos profesores, por ejemplo en la fase de interpretación, en lugar de dar oportunidad para que los estudiantes participen, son ellos [los profesores] quienes se ponían sino a formalizar el contenido: "Aquí había que hacer esto y venga les digo como es que se hacía". Entonces ahí entra lo que hemos estado tratando en las reuniones: le estamos apuntando a la formación por procesos, no a llenar unos contenidos; conocer los errores y las concepciones de los estudiantes es importante porque se convierten en un recurso para construir la actividad matemática…

Episodio 28. Insistiendo en la orquestación de la clase.

[51] Moderador: La idea no es que el profesor le resuelva los problemas, cuando un estudiante se acerca y le pregunta que como se hace esto, entonces el profesor le diga "venga yo se lo hago" lo descalifique "no esto está bien, esto está mal" que el profesor siga preguntando "¿qué pasa si hace esto?" Sobre todo que no descalifique o califique excelente algo que ha hecho el estudiante hasta que no se ha discutido. Dentro de la metodología hay tiempos para que el estudiante trabaje solo, sin software, tiempos para que él trabaje con el software y tiempos para que él trabaje con los compañeros y el profesor. Entonces lo que se quiere finalmente es que el estudiante sea el que razone, el que piense, sea el que resuelva el problema con sus propios conocimientos, adquiera nuevos conocimientos a través de la actividad. Para eso también se tiene pensado una puesta en común, donde pues también hay que aclarar los conceptos.

Episodio 29. La guía del profesor. Aporte de la CoP

[52] Moderador: […] Previendo que no todos los profesores, desde la primera actividad, no todos tienen la formación metodológica ni teórica, entonces una forma de llegar es que el profesor primero lea esas actividades, lo que llamamos guía para el profesor, para que se haga una idea sobre todo, porque es que planteamos la pregunta, o porque usamos determinado archivo, que inclusive debería hacer el profesor ante determinada respuesta, es como un análisis a priori […].

Episodio 30. Procesos de auxiliar a profesor del curso.

[53] Moderador: Al curso se desarrolla con una comunidad que hay que fortalecerla; a veces quizás somos demasiados optimistas al esperar que los profesores cambien sus concepciones con unas pocas reuniones que hemos tenido. Pienso que si hubiera una oportunidad de una mayor continuidad en con la comunidad, habría personas que podrían llegar a ser unos excelentes profesores […]. De hecho de la comunidad actual, algunas personas que comenzaron como auxiliares, ya en estos momentos están trabajando como profesores y lo están haciendo de una buena manera; esto es producto de la continuidad que han tenido en el curso desde que empezó.

ANEXO B
TRANSCRIPCIÓN REFLEXIONES PROFESORA LUCERO.

En este anexo encontramos las transcripciones realizadas a la profesora “Lucero”, estas se obtuvieron por las filmaciones en video de las reuniones generales de la CoP las filmaciones de 12 sesiones de clase y por entrevista personales donde se le mostraban el video sobre sus actuaciones en el aula de clase.

Episodio 1. Reflexiones de Lucero, al participar en la CoP.

[1] Investigador: ¿Qué le aportó a usted como profesora la comunidad de práctica?

[2] Lucero: Uy muchísimo, porque en este campo de la docencia el compañero es indispensable en el sentido en que si entre nosotros nos corregimos, nos ayudamos, nos aportamos, nos damos ideas; […] bueno, los que estábamos en la mañana le hacíamos sugerencias a los de la tarde “no mire que esta pregunta así enreda a los muchachos, porqué mejor no la afronta de esta manera cuando la estén socializando” o respecto l software “mire que es más fácil por este lado, por el otro lado se enredan” y lo mismo hacían ellos cuando estábamos reunidos porque no nos podían ayudar con la actividad del otro día.. [...] Y cualquier duda que uno tenía buscaba al compañero y él le explicaba. Buscábamos al Moderador también en algunas ocasiones, nos explicaba las actividades, en el uso de GeoGebra un profesor el otro profesor nos explicaba bastante cómo utilizarlo para resolver las actividades. Entonces creo que sin ese aporte que hizo cada compañero para mi hubiera sido tremendamente difícil el abordar esos cursos.

Episodio 2. Reformas a la ruta cognitiva.

[3] Lucero: Pues, en la parte didáctica estaba propuesto que cada estudiante construyera la caja solito, sin embargo, noté que tenía más dificultad para armarla y estar cambiando la altura de la caja, eso fue en el primer curso. Para el segundo curso lo hacía con grupos de cuatro personas y colocaba a competir los grupos a ver cuál de los grupos que salían en el grupo hallaban el volumen máximo. […] No les entregaba un solo retazo, les entregaba varios retazos de papel por si dañaban el primero intentando hacer los dobleces. ¡Ah, esa es la otra cosa! En la guía decía recortar y con otra profesora notamos que era más conveniente hacer dobleces, así también se reducía el gasto de papel. Entonces lo que hacían los chicos, era variar o cambiar la altura a partir del cuadrado que se usaba para determinar la altura. Bueno, primero no recortaron el papel, lo que hacían era doblarlo, ese fue un cambio que se hizo, porque en el primero fue fatal, no recortaban bien. Recortaban más en un lado que en el otro, entonces dañaban bastante papel.

Episodio 3. Concepciones del pensamiento orquestal.

[4] Lucero: Después de que todos abordaban de manera individual el ejercicio seguía la socialización. Entonces siempre al principio, no era democráticamente, al principio

no es el que quiere, al principio les da como miedito, entonces uno le pide a los chicos que pasen a participar. Entonces la idea era que los que quisieran pasaran y presentaran como resolver el ejercicio y explicaran la forma en que lo resolvieron a sus compañeros. Y los que estábamos así prestando atención decíamos si es así, no es así, porqué llegaban a respuestas diferentes, o a veces las respuestas eran la misma y se abordaba de manera diferente el ejercicio. Entonces es interesante como un mismo problema se puede interpretar desde diferentes puntos. En mis clases anteriores del curso no ha sido fácil realizar la socialización, por eso pido un representante del grupo pues por lo general trabajan en equipo para que hagan más; ellos solitos a veces no son capaces de proponer.

Episodio 4. Interacción en el aula.

[5] Lucero: ¿Cuál es el volumen de un paralelepípedo?
[6] Estudiante 1: Largo por altura por ancho
[7] Estudiante 2: El área de la base por la altura
[8] Lucero: También –la profesora se desplazó unos pasos por el salón y mirando al grupo y usando sus manos para hacerse entender dijo:– O dos veces el área de la de abajo, más dos veces el área de acá, falta la de allá.

Episodio 5. Representaciones de los estudiantes.

[9] Estudiante: Dijimos que teníamos un rectángulo [lo dibuja en el tablero]; aquí recortábamos esto [dibuja los cuadrados en las esquinas]. Entonces, decíamos que esto era x… los lados del cuadrado que recortábamos era x Y el volumen del paralelepípedo era…

Episodio 6. Significados de las cifras decimales.

[10] Estudiante: Bueno, en nuestra cajita la altura que alcanzaba mayor… esto… [Se le dificultaba expresarse].
[11] Lucero: *volumen.*
[12] Estudiante: mayor volumen era 7,7, con 25,6 [altura] y 45,6 [ancho].
[13] Lucero: Sí, ¿cuánto les daba ese volumen?
[14] Estudiante: 8988 [escribe en el tablero sin unidades].
[15] Estudiante: Para nosotros era mayor volumen, tomando un solo decimal, no nos pusimos a tomar más.
[16] Profesora: ¿Y si tomáramos más decimales?
[17] Estudiante: hasta allá no llegamos
[18] [hay risas].

Episodio 7. Aproximaciones a la derivada

[19] Estudiante: Yo tengo entendido que para yo sacar este, el máximo tengo que derivar, porque la derivada primero me saca los puntos críticos de la función, la segunda derivada me ha sacar la concavidad de la función, entonces derivo esta función.

[20] Lucero: ¿Aquí todos saben derivar? [Unos estudiantes, manifiestan moviendo la cabeza, que no saben derivar].

Episodio 8. Concepciones de la derivada.

[21] Estudiante: Los puntos críticos son donde la función cambia de concavidad. O sea la derivada de una función [se dirige al tablero y dibuja]… O sea, yo tengo una parábola [dibuja el plano cartesiano y una parábola con vértice (0,0)], la derivada de esta parábola en cero, va a ser cero [dibuja la recta $y = 0$], ¿sí?... […]

[22] Lucero: Pero esa derivada me parece una recta tangente.

[23] Estudiante: Sí, es que la derivada es una recta tangente… cuando toca el cero [el estudiante piensa cómo hacerse entender y decide dibujar otras *rectas*]… ¿sí?... O sea, aquí la derivada, la pendiente es negativa; incluso aquí la pendiente es positiva porque la derivada es positiva. Entonces la derivada tiene que ver con la pendiente, y el ángulo de inclinación de la función.

Episodio 9. Reflexiones del pensamiento variacional de Lucero

[24] Lucero: […] por lo general yo como docente lo que hacía era aplicar el concepto, miraba un ejercicio, a la derivada, listo derivar rapidito. Pero no analizaba nada más de lo que significaba la derivada. Es muy diferente tener el uso de un computador y ver qué es la derivada, por ejemplo ver gráficamente la derivada de una función cuadrática me da una recta, cosas por el estilo […], y ya empieza uno a imaginarse las cosas […] dada una expresión algebraica y visualizar la forma geométrica (gráfica).

Episodio 10. Interpretación del largo y el ancho.

[25] Lucero: [...] vamos a tomar esto como ancho y este como largo. Sí, ¿les parece?

[26] Estudiantes [responden en coro]: No.

[27] Estudiante 1: Largo y ancho al revés.

[28] Lucero: ¿Y por qué así [refiriéndose a lo que dijo el estudiante] y no así [señalando lo que ella tenía]

[29] Estudiante 1: *Así también se puede*.

[30] Lucero: [Borrando del tablero “ancho” y “largo” dice:] ¿Qué tiene de diferente si este es el largo?

[31] Estudiante 1: La vista.

[32] Lucero: Listo así [habiendo hecho la corrección en la representación del tablero; ella prosigue con la discusión:] Entonces él dice no si a mí me piden que el ancho sea 27 cm, el largo y el alto ¿dependen de quién?

Episodio 11. Unidades de medida.

[33] Lucero: Pero es una unidad de qué; por ejemplo, las que son metros, es una unidad ¿de qué?

[34] Estudiantes: De longitud.

[35] Lucero: ¿Y cuándo es al cuadrado?

[36] Estudiantes: De área.
[37] Profesora: ¿Cuándo está al cubo?
[38] Estudiantes: Volumen.
[39] Lucero: No, pero el volumen qué es.
[40] Estudiante: U*na unidad de longitud*,
[41] Lucero: El volumen es capacidad, el volumen es la capacidad de algo. ¿Listo?

Episodio 12. Primeras orientaciones en la clase

[42] Lucero: Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja rectangular de tamaño 60 cm por 40 cm, cortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas. Nosotros no vamos a cortar nada, ¿listo? … Porque vamos a tener que utilizar muchas hojas; con una sola hoja vamos haciendo dobleces.

Episodio 13. Interpretaciones metodológicas.

[43] Lucero: Para eso [hallar la caja de mayor volumen] entonces ustedes van a empezar a… ¿a qué?... a ensayar, a construir cajitas y a tomar medidas, y a fabricar; es decir, a hallar el volumen de cada una. Y después ustedes van a decir “no, pues la de mayor volumen que yo construí es esta, y estas son sus dimensiones”

Episodio 14. Guiando el taller.

[44] Lucero: […] ¿Cómo lo vamos a hacer? Entonces la idea es escoger cantidades iguales en las esquinas y la vamos a doblar para construir la caja por ejemplo esta va a ser [hizo silencio mientras doblaba la hoja;]. Entonces acá, como tomé [refiriéndose a la altura que había considerado], por ejemplo, supongamos 5 cm y vamos a hacer lo mismo en cada lado. Acá con esta que estoy doblando sirve, entonces que hago, unimos acá esto con estas esquinas y fijase que ya tengo una esquina de la caja. Entonces eso es lo que ustedes van a hacer, y no necesitamos recortar. ¿Bueno? Y así hacen las esquinas. Yo traje cinta. La deben compartir. Si necesitan más papel, para hacer más cajas, acá hay; pueden coger.
[45] Estudiante 1: ¿Una regla?
[46] Lucero: No tengo.

Episodio 15. La pregunta como herramienta.

[47] Lucero: ¿Cuál es el volumen de la caja? Uno de los estudiantes del grupo contestó señalando las caras opuestas de la caja y el fondo:
[48] Estudiante 1: El área de esas dos –Lucero repite–, de estas dos –usa sus manos para simular dos lados de la caja–, más la del fondo.
[49] Lucero: En mi vida había visto yo esa fórmula. Los estudiantes permanecen en silencio; la profesora interviene.
[50] Lucero: ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo?
[51] Estudiante 2: ¿Todos son paralelepípedos? La profesora asiente con la cabeza.
[52] Lucero: ¿Cuáles son las unidades de medida del volumen?
[53] Estudiante 3: Al cubo.

[54] Estudiante 1: El área es elevado al cuadrado

[55] Estudiante 3: El área de la base, área de un rectángulo que da cuadrado, por la altura da el cubo que es el volumen.

Episodio 16. Comparando volumen de la caja.

[56] Lucero: Bueno, ¿será que puede existir otra caja que tenga mayor volumen que esta? ¿Será que no? Uno de los estudiantes dice que no moviendo la cabeza. Ante esta respuesta Lucero observó rápidamente las cajas de otro grupo y le dijo al estudiante:
Lucero: Es decir, fíjese acá [señalando la caja del otro grupo]; mira, el volumen de esta caja es el mismo de esta [señalando la caja del grupo al cual cuestionaba]. El estudiante continuaba diciendo que sí con su cabeza, y Lucero insistía:
Lucero: ¿Será? –la profesora se aparta del estudiante.

Episodio 17. Lenguaje de la profesora

[57] Lucero: Póngale 15; ¿qué pasa si vale 15? –El estudiante balbuceó algo que no se entiende y la profesora prosiguió: – Ah, entonces van a encontrar es hasta donde va entonces no va mirar toda la curva, entonces solo van a mirar un **pedacito** ¿verdad? –la profesora hizo una muestra con el dedo señalando que sube y baja.

Episodio 18. Participación del profesor en formación.

[58] Estudiante 1: No entendemos lo de expresión algebraica.

[59] Auxiliar: Primero cuando ustedes dan una expresión algebraica ustedes están generalizando para cualquier caja, y con esa expresión calculan el volumen.

[60] Estudiante 2: Con esa expresión no se puede [el estudiante se refería a $V = a.b.h$ para el caso de la caja construida con el papel de 40 x 60 cm]

[61] Auxiliar: ¿Qué no se puede con qué? ¿Cómo así? –la auxiliar reflexiona y después dice: – Ah bueno sí, en este caso tenemos dos constantes porque la hoja que nos dieron tiene unas medidas fijas […] Ustedes están es analizando es que de esta hoja van hacer cualquier infinidad de cajas […]; la expresión que están haciendo es para esta [hoja]. –La auxiliar revisa una de las hojas de trabajo del grupo y observa que tienen $V = (40 - x)(60 - x)x$, por lo que se apoya en ella para continuar su intervención:– Pero entonces (40 – x), ¿cuántas equis?

[62] Estudiante 2: El doble.

[63] Auxiliar: Aah [un estudiante interviene pero no se capta lo que dice; ella continúa] porque le estás quitando un pedacito de acá, y un pedacito de allá […]. ¿Y para qué sirve esa expresión?

[64] Estudiante 3: Para encontrar el volumen.

[65] Auxiliar: Para hallar cualquier volumen.

[66] Estudiante 4: El volumen de esta caja.

[67] Auxiliar: Sí, para esta caja, de estas medidas –ella enfatiza cogiendo la caja–.

Episodio 19. Aportes del auxiliar, al pensamiento variacional.

[68] Auxiliar: ¿Si yo desbarato esta caja, se va alterar? Si la variable cambia [refiriéndose a la equis; algo balbucea un estudiante pero no se entiende; la auxiliar continúa:] Sí, pero cambia el volumen, no cambian las medidas de la hoja; la hoja sigue siendo la misma hoja con los 40 cm y 60 cm; lo que va a variar es los lados de la caja que estás construyendo, pero esta hoja si la desbaratas sigue siendo la misma.

Episodio 20. Apropiación de las unidades de medida

[69] Estudiante: (…) aquí pudimos más o menos observar un patrón: que si disminuíamos la altura del paralelepípedo, disminuía su volumen; si aumentaba su altura, aumentaba su volumen (…) pero entonces hallamos una excepción.
[70] Lucero: ¿Cuál?
[71] Estudiante: Un contraejemplo.
[72] Lucero: ¿De qué?
[73] Estudiante: De que no era cierto de que a medida que aumentaba la altura, el volumen aumentaba. Entonces [escribiendo en el tablero decía] en 8,5 cm tenemos que el ancho es de 21 cm y el largo era 41 cm y eso nos daba 7.318,5 centímetros [omite “cúbicos” y escribe “2” como exponente]. Entonces ahí cambia el patrón, pasa algo: ahí aumenta la altura pero disminuyó el volumen. Entonces nosotros podemos decir que en un intervalo entre 7,5 y 8,5 tendríamos el valor del volumen máximo….¿Por qué? Porque si nos pasábamos de 8,5 el volumen disminuía, pero con 7,5 era el valor máximo que habíamos encontrado. Entonces ensayamos con 8 cm y nos dio 8.488 cm^3, y ese era el máximo.

Episodio 21. Manipulaciones algebraicas en los estudiantes

[74] Lucero: Haber, cuéntenos.
[75] Estudiante: Todo lo que hizo está bien. Yo no comparto la idea de que esta sea una expresión algebraica [$V_p = \left(6\ dm - 2\ (2dm)\right)\left(4\ dm - 2\ (2\ dm)\right)(2\ dm)$]; para mí esto es un conjunto de multiplicaciones; en una expresión algebraica por lo general se tiene que llegar a lo mínimo y esto está muy poco abreviado. Entonces, aplicando distributiva y multiplicando por 2…. [Trabajó en el tablero reescribiendo la expresión anterior a $f(x) = (60 - 2x)(40 - 2x)(x)$ y obtuvo al simplificar $f(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$].

Episodio 22. Comparación de valores

[76] Lucero: Listo.
[77] Estudiante: Ahora, hay una excepción a la regla [irrumpió el estudiante]… que yo encontré ensayando.
[78] Estudiante: 7,8 [refiriéndose a la altura] que resolviendo todo esto [refiriéndose a la expresión algebraica] me va a dar 8.3450,1.
[79] Lucero: ¿Y 7,9?
Otros estudiantes: No en 7,9 ya empieza a disminuir.
[80] Estudiante: 8.450,4

[81] Lucero: Más grande, ¿cierto?… Y si queremos siete coma ochenta y seis, siete. El estudiante se encoge de hombros y llama la atención del grupo.
[82] Estudiante: Pero, pero venga, si vamos a la parte física y cogemos 7,85943255 cómo vamos hacer una caja con 7,8594… mejor dejar así con un decimal […]
[83] Estudiante 2: Tú no puedes usar un rango de 19,9 periódicos porque en la realidad no vas a poder hacer una caja así.

Episodio 23. Aportes de los estudiantes al desarrollo de la clase

[84] Lucero: La primera, fue un grupo muy bueno, muy sobresaliente, tenía estudiantes muy buenos, prácticamente todos derivaban. Entonces muy pocos estudiantes tenía como 25 o 26 lo abordaban teniendo en cuenta conceptos básicos matemáticos. Los otros derivaban de una vez y resolvían el problema. Entonces ahí era "bueno ¿Y si no supiéramos derivar como lo abordábamos?" Y ahí profundizábamos un poco en la derivada. En los otros dos grupos había dos estudiantes que mencionaban el término "derivar", pero no es que supieran derivar. Entonces es interesante que un problema que cuando se lo presentan a uno como docente, uno lo aborda inmediatamente desde la derivada, puede resolverse fácilmente utilizando conceptos básicos y de pronto hace que sea más didáctico para los estudiantes. Y fue algo muy interesante cuando se resolvió el problema utilizando conceptos básicos. Y un chico que sabían derivar muy bien, lo explico derivando. Entonces ellos ven como se ahorra uno procesos algebraicos para llegar a una misma respuesta. Entonces es interesante ver la utilidad de la derivada para resolver varios ejercicios.

Episodio 24. Interactuando con los estudiantes

[85] Estudiante: Entonces derivo esta función: f(x) es igual (3x4) a $12x^2$ menos ($200x^2$) 400x más 2400…. ¿Listo? Esta es la función [golpea con el marcador el tablero manifestando con ello su satisfacción por el procedimiento limpio que ejecutó]. Ah, ¿y qué hacemos con eso?
[86] Profesor Auxiliar: ¿Y qué son los puntos críticos?
[87] Estudiante: Los puntos críticos son donde la función cambia de concavidad. O sea la derivada de una función [se dirige al tablero y dibuja]… O sea, yo tengo una parábola [dibuja el plano cartesiano y una parábola con vértice (0, 0)], la derivada de esta parábola en cero, va a ser cero [dibuja la recta $y = 0$], ¿sí?... Entonces ahí va ser un punto crítico. Igual cuando tengo una función elevada a la cuatro [dibuja una curva] aquí su derivada es cero, aquí su derivadas es cero, y aquí su derivada es cero [trata de dibujar las rectas $y = 0$ correspondientes en los puntos críticos; ver Ilustración 38imagen y va cambiando la concavidad y sube.
[88] Lucero: Pero esa derivada me parece una recta tangente.
[89] Estudiante: Sí, es que la derivada es una recta tangente… cuando toca el cero [el estudiante piensa cómo hacerse entender y decide dibujar otras *rectas*]…¿sí?... O sea, aquí la derivada, la pendiente es negativa [dibujó el segmento verde de la Ilustración 39imagen; incluso aquí la pendiente es positiva porque la derivada es positiva [dibujó el segmento]. Entonces la derivada tiene que ver con la pendiente, y el ángulo de inclinación de la función.

Episodio 25. Mediación de GeoGebra, En la interpretación de derivada

[90] Investigador: Durante las tres etapas del curso en que usted participó, ¿percibió algunos cambios en el componente matemático? Conceptos que usted no tuviera claro. O le permitieron mejorar la forma de trabajar el concepto matemático.
[91] Lucero: Sí, el uso de GeoGebra facilitó asumir la derivada como la pendiente de la recta tangente. Entonces “Alfredo” nos enseñó a hacer la construcción para ver como la recta iba variando a medida que se iba corriendo por la curva. Entonces el uso de GeoGebra facilita visualizar conceptos matemáticos, y para mí fue muy importante. Porque me ayudó bastante y a los estudiantes también les aportaba. No queda solo el procedimiento sino que veían como se comportaba geométricamente.

Episodio 26. Graficando funciones

[92] Lucero: Ah, es una parábola. ¿La gráfica de esa función es una parábola?... ¿Qué están graficando: esta cubica [refiriéndose a $f(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$] o esta [señala la cuadrática que es la derivada de $f(x)$; el estudiante le señala la cuadrática] ¿Por qué la de abajo?

Episodio 27. El símil como herramienta didáctica.

[93] Lucero: Fíjense lo que dice Kelly: por qué irnos hacia lo matemático [para construir la caja] y no como lo hicieron inicialmente [explorando].
[94] Estudiante: Sí
[95] Lucero: Una pregunta […], miren, si a ustedes los contrata una empresa y les dice “no, yo tengo este material, necesito que con este material usted me construya la habitación con el mayor volumen… ¿usted qué va hacer: va a coger el material y lo va a coger para experimentar? ¿Y después va a pedir más material?

Episodio 28. Concepto de aproximación de números reales.

[96] Estudiante 1: Discúlpeme Bryan pero ya sabemos que 0,99999 es uno. Grupo: ¡Sí!
[97] Estudiante 2: Sí, él lo tenía; lo iba a explicar [refiriéndose a una profesora que reemplazó a Lucero en una ausencia].
[98] Lucero: Eso es interesante, yo quiero ver esa demostración.
[99] Estudiante 3: Ella tenía un cuaderno completo con la demostración.
[100] Estudiante 4: Era como una aproximación de cifras significativas.
[101] Estudiante 5: No, no era una aproximación.
[102] Estudiante 6: Si no estoy mal era como hacer una división.
[103] Estudiante 1: Sí, era algo curioso porque era como 0,999 esto son tres cifras decimales, señala el estudiante, entonces sería igual a 1 dividido entre 1000…
[104] Lucero: Bueno, vamos hacer una cosa, va hacer una tarea más de curiosidad de ustedes en el sentido que van a consultar 0,99=1; estoy hablando matemáticamente.

[105] Estudiante 7: No es que sea igual, es que se aproxima.

[106] Estudiante 1: Sí era igual a uno, porque usaba el igual en la expresión.

[107] Lucero: Es que… -piensa Lucero elaborando una nueva orientación-. Ubicándonos en la recta numérica: ¿el 1 lo puede ubicar donde está 0,99? […] Hagamos una cosa: revisemos eso en casa y el próximo sábado le sacamos un rato a ver si 0,99=1. Lucero envía a los estudiantes al receso de la jornada.

Episodio 29. Reflexiones de Lucero en su didáctica.

[108] Investigador: ¿Y usted considera que en esos tres cursos que usted hizo, hubo cambios en usted como profesora en la forma de dar la clase?

[109] Lucero: Todos los días cambiaba. Todos los días.

[110] Investigador: ¿Pero qué cambiaba?

[111] Lucero: La forma de dar el problema. Por ejemplo: “hoy es…” les leía el problema y les decía a los estudiantes *empiecen a trabajar*, entonces notaba que ellos quedaban como dispersos, entonces leíamos entre todos el enunciado. Después no, yo era la que lo leía, un compañero, ¿Quién va a leer el enunciado? Siempre trataba de cambiar ¿Qué palabra no entienden? ¿Quién la explica? Uno como que revisa la clase anterior y uno hace cambios.

Episodio 30. Representaciones algebraicas en GeoGebra.

[112] Lucero: […] Ah, pero es que usted tiene que ponerle un nombre… Claro, ¿lo va a llamar efe de equis, ge de equis, ele de equis, eme de equis -el estudiante inserta la función en GeoGebra y la profesora prosigue-: pero efe mayúscula o minúscula; ¿el nombre de las funciones es en mayúscula o minúscula?

Episodio 31. Aporte del profesor auxiliar

[113] Estudiante 1: Profesora, ¿cuál expresión algebraica? –el estudiante realizaba el punto 6 de la Actividad 1.4 que solicita la gráfica de la expresión.

[114] Lucero: Esa que hicimos en el salón: $f(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$ [ni Lucero ni los estudiantes se percataron que la unidad de medida de la magnitud variable de esta función eran centímetros; la simulación de GeoGebra estaba en decímetros].

[115] Estudiante 1: No sale la gráfica. Se fue; se abre [refiriéndose a la gráfica de la función insertada].

[116] Lucero: Mmm, ¿y ahora?

[117] Estudiante: Sale una línea así [hace en el aire una línea recta de pendiente negativa].

[118] Lucero: Vayamos a *Vista Algebraica* a ver qué fue lo que pasó –el estudiante explora GeoGebra. La clase transcurre y la Auxiliar interviene con una orientación importante.

[119] Estudiante 2: Profe, ¿por qué la mía [refiriéndose a la gráfica] no sale completa en la pantalla?

[120] Auxiliar: Porque tú hiciste… [La auxiliar reflexiona, y modifica su acción personalizada extendiéndola al grupo] Ustedes tienen en el archivo las medidas en decímetros, y ustedes están metiendo la función en centímetros. Pues claro, les va a dar una función inmensa.

[121] Estudiante 3: Ay sí.

Episodio 32. Socializando las actividades

[122] Lucero: Entonces, vamos hablar de la Actividad 1.4. Listo. […] ¿Qué elementos varían cuando empiezan a trabajar ustedes con GeoGebra? ¿Qué notaron que variaba?
[123] Estudiante 1: La altura.
[124] Estudiante 2: El ancho.
[125] Estudiante 3: El ancho y el alto y el volumen.
[126] Lucero: ¿Pero qué era lo que hacía que el largo y el ancho variara?
[127] Estudiante 2: Pues la medida de las equis, [dijo tímidamente].
[128] Estudiante 4: Pues la altura, ¿no? –[Lucero lo mira y se mantiene en silencio].
[129] Estudiante 5: El valor que le dábamos la equis.
[130] Lucero: ¿Entonces hay variables dependientes e independientes ahí?
Varios Estudiantes: La altura. La medida del papel. La anchura –no se distinguían las voces; Lucero llama la atención y pone orden a la participación–.
[131] Estudiante 3: el ancho y el alto, la independiente es el volumen.
[132] Estudiante 2: La altura es la que cambia.
[133] Lucero: ¿Quiénes dependen de quién?, reformula la pregunta.
[134] Estudiante 1: El largo y el ancho dependen de la altura.
[135] Lucero: "El largo y el ancho dependen de la altura", repite; ¿solamente esos dos?
[136] Estudiante 5: El volumen también.
[137] Lucero: Entonces ellas son variables qué…
[138] Estudiante 1: Dependientes.
[139] Estudiante 6: Todas dependen de todas porque siempre se van alterar.
[140] Lucero: Mmm, ¿todas dependen de todas? –mira al grupo como devolviéndoles la pregunta.
[141] Estudiante 3: La independiente es la altura, usted le puede dar cualquier valor a ella. Así como la equis es la variable independiente de cualquier función.
[142] Estudiante 6: ¿Y si le da cualquier valor al ancho?
[143] Estudiante 3: Pero es que estamos hablando es del problema en particular. Primero usted saca la altura, y eso le determina el largo y el ancho.
[144] Estudiante 1: Pero si tiene el largo y el ancho va a tener la altura.
[145] Estudiante 3: Pero… ¿cómo le dijera? –se enfrenta el estudiante a un conflicto al no lograr hacerse entender–.

Episodio 33. Interpretaciones del problema

[146] Lucero: Entonces solo hay una [refiriéndose a la situación de cuántas cajas se obtienen si el ancho es fijo de 40 cm y el alto y el largo son variables]…Los que decían que había más de una caja, ¿por qué lo decían?
[147] Estudiante 1: Es que malentendíamos el problema.
[148] Estudiante 2: Es que veíamos que variaba la hoja

[149] Estudiante 3: O sea es que cuando la hoja puede tomar cualquier valor, pues hay infinitas cajas que tengan ese ancho de 40 cm, pero si te dan un valor exacto ya no se va poder.

Episodio 34. Herramientas tecnológicas y su uso.

[150] Lucero: Entonces la altura 5 cm, entonces ¿cuánto mide el volumen, el ancho y el largo? (volumen=7.500 cm cúbicos) y ¿el ancho? (7.480 menos mal usted fue el que hizo las cuentas) ¿Están de acuerdo, todos?
[151] Estudiante 1: Aquí en GeoGebra sale así.
[152] Lucero: 7480 cm. Y si no tuviésemos GeoGebra.
[153] Estudiante: Pues en la calculadora, trabajando en centímetros, nos va a dar 7500 cm; GeoGebra está trabajando con decímetros.
[154] Estudiante 2: No pasa nada usted los cambia, hace conversión a centímetros.
[155] Lucero: ¿Cuánto le da a GeoGebra?
[156] Estudiante 1: 7.48 dm que es lo mismo que decir 7480 cm.

Episodio 35. Interpretaciones de la gráfica.

[157] Estudiante 1: Has de cuenta que la gráfica baja
[158] Estudiante 2: La gráfica es como una manera de representar todo el comportamiento que ha tenido la caja para no escribir todo lo que ya sabemos.
[159] Estudiante 1: ¿Un volumen puede ser negativo?
[160] Lucero: ¿Qué?
[161] Estudiante 1: ¿Un volumen puede ser negativo?
[162] Estudiante 2: Un volumen no puede ser negativo.
[163] Lucero: ¿Por qué no puede ser negativo?
[164] Estudiante 3: Porque es algo que simplemente no existe. Supongo que esta hoja tiene tanto volumen.
[165] Lucero: ¿Esta hoja tiene volumen?
[166] Estudiante 3: No. Supongamos este borrador, este sí tiene volumen.
[167] Lucero: ¿Esta hoja tiene volumen?
[168] Estudiante 3: No. Hablemos mejor del borrador [el grupo ríe]
[169] Estudiante 4: Pero no se supone que las unidades de medida no son negativas porque según la física uno siempre va hacia adelante.
[170] Estudiante 3: No necesariamente; en Física la aceleración puede ser negativa. Si usted está desacelerando…

Episodio 36. Aproximaciones a la física

[171] Lucero: Vamos a retomar; es que fíjense que estábamos hablando de volumen y preguntábamos si yo podía decir que el volumen es negativo.
[172] Estudiante 1: No. En eso estamos todos de acuerdo.
[173] Lucero: ¿Por qué no? […] Si el volumen lo que me está representando es la capacidad –interrumpe un estudiante preguntando:
[174] Estudiante 2: ¿Todo lo que ocupa un lugar en el espacio no puede ser negativo?

[175] Lucero: ¿Todo lo que ocupa un lugar en el espacio tiene un volumen?
[176] Estudiantes: Sí.
[177] Lucero: ¿Tiene un área?
[178] Estudiantes: Sí.
[179] Estudiante 3: Tiene masa.
[180] Lucero: Tiene masa.
[181] Estudiante 3: Masa es la cantidad de… -el estudiante no fue capaz de continuar- Bueno, que tiene un cuerpo.
[182] Lucero: ajá –el estudiante continúa hablando, [Lucero escucha] y tímidamente dice: –*No puede ser negativa* –después, subiendo el tono de voz, retoma el control de la clase– Ahora, ¿y qué pasó con el 30?

Episodio 37. Cambios en la ruta cognitiva planeada.

[183] Lucero: […] unimos acá esto con estas esquinas y fijase que ya tengo una esquina de la caja. Entonces eso es lo que ustedes van a hacer, y no necesitamos recortar. ¿Bueno? Y así hacen las esquinas. Yo traje **cinta**. La deben compartir. Si necesitan más papel, para hacer más cajas, acá hay; pueden coger.
[184] Estudiante 1: ¿**Una regla**?
[185] Lucero: No tengo –al terminar su intervención, Lucero salió a buscar reglas para el grupo–.

Episodio 38. La pregunta e interacción con el grupo.

[186] Lucero: ¿Entonces cualquier caja que hagan con este papel tiene el mismo volumen?
[187] Estudiante 1: No.
[188] Lucero: ¿No?
[189] Estudiante 1: No. A partir de 7 y 8.
[190] Lucero: Y si toma 9, ¿qué pasa?
[191] Estudiante 1: Baja.
[192] Lucero: Muy interesante. Es muy interesante que lo tengan presente.

Episodio 39. El dominio del volumen

[193] Lucero: ¿Qué valores pueden tomar la medida del cuadrado a recortar? Cualquier número real [esta es la respuesta del grupo en la hoja de trabajo]… ¿Es decir que yo puedo decir que vale [refiriéndose a la altura de la caja que corresponde al lado del cuadrado a recortar] menos cinco centímetros?
[194] Estudiante 2: No. Desde cero y pues hasta donde permita el papel.
[195] Lucero: ¿Hasta dónde?
[196] Estudiante 3: ¿Para que sea una caja? –La profesora afirma con la cabeza–. Hasta 19.9

Episodio 40. Representaciones numéricas.

[197] Estudiante: Entonces, de alto 5,5 cm, de largo 49 cm, de ancho 29 cm; esto nos dio de volumen 7813,5 cm^3

[198] Lucero: Listo. Esa es la de mayor volumen que ustedes obtuvieron.
[199] Estudiante: No. Esa fue la que construimos.
[200] Lucero: Entonces, ¿qué hicieron?
[201] Estudiante: Entonces nosotros lo que hicimos, para no hacer más cajas, era cambiarle la altura... Digamos teníamos una caja de referencia, entonces para no ponernos hacer más cajas y eso, a una le aumentamos el tamaño de la altura y a otras les disminuíamos. Entonces, dijimos una altura de 4,5 cm, entonces al disminuir el centímetro de altura aumentaba en dos el ancho [escribió 31 cm en el tablero] y también dos de alto [escribió 51 cm en el tablero], y aquí nos dio [el volumen] 7.114,5 cm^3.

Episodio 41. La calculadora ¡si sabe!

[202] Estudiante 1: 8.988,672
[203] Estudiante 2: y esto [señalando la tabla que quedó escrita en el tablero por el grupo uno] da 8.488 y esto da nueve mil y pico [señalando el producto 45,6*25,6*7,7]
[204] Estudiante 3: Sí, usando esto [refiriéndose a la expresión $f(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$] con 7,7 sí da 8.488.
[205] Profesora: ¿Pero cómo es eso de las tablas?
[206] Estudiante 4: O sea, en la calculadora, nosotros tenemos una función; nosotros podemos escribir esta función y que la calculadora misma nos la dé.
[207] Estudiante 5: Sí, pero hace falta que usted le ponga condiciones a la equis.
[208] Estudiante 4: Sí, es que ellos están usando el modo Setup y le dan Tablet y así…

Episodio 42. La densidad de los números reales, o aproximación.

[209] Estudiante 1: Acá dice algo de $0.99\, x\, 1 = 9$ en cada dígito así y 9 x 0.111 da 0.9999, y $9 \cdot \frac{1}{9} = 1$, lo que implica que 0.9999 es igual a 1.
[210] Estudiante 2: Venga en el tablero. ¿Por dónde lo hago?, preguntó a su compañero.
[211] Estudiante 1: Wikipedia, los compañeros ríen. *Empiezan a hablar de las páginas donde se pueden buscar tareas como taringa.*

Episodio 43. Dudas en la representación gráfica con GeoGebra.

[212] Estudiante: No sale la gráfica. Se fue; se abre [refiriéndose a la gráfica de la función insertada].
[213] Lucero: Mmm, ¿y ahora?
[214] Estudiante: Sale una línea así [hace en el aire una línea recta de pendiente negativa].
[215] Lucero: Vayamos a Vista Algebraica a ver qué fue lo que pasó –el estudiante explora GeoGebra;
[216] Lucero: No, eso no; todo eso que aparece ahí son las construcciones que están hechas.

Episodio 44. Reconocimiento del software

[217] Lucero: Cuando ustedes abrieron el archivo, y animaron el punto P qué encontraron; ¿ese punto P a quién representa en el problema que estamos trabajando?

[218] Estudiante 1: La altura.
[219] Estudiante 2: No, no…
[220] Estudiante 3: La medida del cuadrito.
[221] Estudiante 4: Sí, de la está que se dobla –varios estudiantes dice “es la altura, es la altura” –
[222] Lucero: ¿Es la altura? ¿Están todos de acuerdo que es la altura?... Listo.

Episodio 45. Aportes del auxiliar en la orquestación de la clase.

[223] Auxiliar: Lo que pasa es que GeoGebra hace redondeo de cifras, y ustedes ahí no tiene la mayor cantidad de cifras que le sale; puede que ustedes al arrastrar en la tabla vean el 5 pero por la programación de GeoGebra realmente tengan 5,01 o 5,1 […] entonces van a opciones “Redondeo” y ajustan la cantidad de decimales.
[224] Estudiante: Sí, sí lo que dice la otra profe es cierto…Toca mirar bien porque uno cree que tiene 5,0000 y está 5,0719… Entonces sí es 7.500 el volumen

Episodio 46. Diferencias entre la expresión algebraica y la gráfica.

[225] Lucero: Pregunta, cuando ustedes utilizando la herramienta lugar geométrico, se lo aplicaron al punto X y al punto P les apareció una figura, ¿verdad? ¿Esa figura que representa? El comportamiento que tiene esa caja.
[226] Estudiantes: Respecto al volumen, respecto a la altura, el vértice de la parábola.
[227] Lucero: Hallando el vértice de la parábola, ¿cuál sería entonces?
[228] Estudiante: -b/2a y ahí le da la respuesta de cuando es el máximo.

Episodio 47. Reflexión de la profesora sobre su actuación en la clase.

[229] Lucero: Si, eso fue muy bueno porque fue “¿Yo dije eso?” “¿Yo por qué dije eso?” empieza uno como a reflexionar sobre lo que dijo. “¿Por qué no dije o lo dije de esta manera?” Es bueno ver y caer en cuenta de las cosas que hay que mejorar y las cosas que hay que conservar.

Episodio 48. Reaccionando sobre la formación matemática que se tiene.

[230] Lucero: Que una cosa es estar preparado teóricamente y otra cosa es ir a la práctica. Sí, hay profesores que manejan muy bien los conceptos y en el momento de ir a enseñar es terrible. O al contrario didácticamente uno se puede esforzar pero carece de conceptos matemáticos, como es mi caso, a mí me falta muchísimo profundizar en muchos conceptos de cálculo, y tengo que estudiar y estudiar para ir mejorando en ese aspecto.

Episodio 49. Concepción de la derivada de la profesora

[231] Investigador: ¿la derivada es una recta tangente como lo dice él estudiante?
[232] Lucero: No. La derivada es la recta tangente a un punto de…Espera que me confundí. La derivada no es una recta tangente, no necesariamente.
[233] Investigador: Entonces ¿Qué es una derivada?

[234] Lucero: La derivada. Si yo tengo esta curva la derivada en este punto es la pendiente de la recta tangente al punto de esa curva.

[235] Investigador: ¿Y para hacer derivadas siempre debo de tener una curva?

[236] Lucero: ¿Cómo así?

[237] Investigador: O sea usted me está hablando de una derivada.

[238] Lucero: Ah, porque me estoy imaginando la tangente, estamos hablando de la recta tangente.

[239] Investigador: Pero entonces la derivada siempre es una recta tangente

[240] Lucero: La derivada es la pendiente de la recta tangente. En un punto de la curva. Pero siempre es una tangente. En uno de los textos del profesor Luis Moreno Armella, él nos planteaba una función donde no necesariamente se llega a la recta tangente, pero si hay unas aproximaciones. Pero la verdad… -la profesora se queda pensando en su concepto de derivada-.

Episodio 50. Resignificación del lugar geométrico, con GeoGebra.

[241] Lucero: o sea que en el punto máximo del lugar geométrico que daba el punto P la recta tangente significa que [se toma su tiempo para decirlo]"

Episodio 51. Consideraciones del largo y el ancho.

[242] Investigador: Recuerda el episodio que usted puso el largo y el ancho y los muchachos dijeron que no, que así no. ¿Hay diferencia entre el largo y el ancho? […]

[243] Lucero: Porque depende de la posición en donde este la caja. Ahí el hecho era, el mismo estudiante lo dijo, es la vista. Entonces ellos seguían, seguíamos con esta hoja, entonces si yo la pongo así puedo utilizar esto como la altura, puedo utilizar esto como lo ancho. Depende de la posición que la coloque

[244] Investigador: Ósea que el largo y el ancho dependen de la posición.

[245] Lucero: Para los estudiantes

[246] Investigador: ¿Para usted?

[247] Lucero: El largo y el ancho dependen del objeto con el que esté trabajando. Porque en este caso para mí… -el investigador interrumpe-.

[248] Investigador: En esta hoja, ¿cuál es el largo y el ancho? ¿O no importa?

[249] Lucero: Si voy a hallar el área no importa. Porque es base por altura luego no importa si esta es la base o la altura porque da lo mismo.

[250] Investigador: ¿Yo puedo entonces llamar a esto largo?

[251] Lucero: Si, puede ser el largo, luego esta es la base, esta es la altura. De pronto eso era lo que estaban haciendo los estudiantes. Es esa mezcla de ideas y conceptos que uno tiene. Si yo lo veo esto como una hoja, entonces yo puedo decir "es que esta hoja tiene de largo tanto, tiene de ancho tanto, pero si la pongo así pues el largo es este" […]

[252] Investigador: El volumen está representando la capacidad. ¿Hay diferencia entre volumen y capacidad?

[253] Lucero: Si nos vamos a la definición formal de cada una sí. Si se busca en un diccionario sí, porque yo puedo hablar del volumen de mi cabello, pero no estoy hablando de la capacidad de mi cabello. Pero si yo tengo un objeto, por ejemplo, ese

termo yo puedo medir un volumen, pero a la vez me da una capacidad de contener algo. Entonces no necesariamente.

Episodio 52. Negociaciones del pensamiento didáctico.

[254] Lucero: Entonces no son solo ganas, también se necesita disciplina, prepararse y tener cuidado como se habla en clase; porque a veces en este afán de querer que el estudiante se sienta en confianza, tranquilo, uno empieza a utilizar términos que no son propios del cálculo y pues no ayuda uno a que el estudiante aumente su léxico en términos matemáticos. Y eso es algo, una desventaja, que tienen los estudiantes que trabajan conmigo, porque soy muy coloquial, utilizo términos muy allegados a ellos y veces muy alejados de los propios términos del cálculo. Y no el que vea lo que yo hice, no, espero que le sirva para mejorar su práctica de docente.

Episodio 53. Reflexión del concepto de derivada

[255] Investigador: ¿Los estudiantes comprendieron el concepto de derivada del que habló el estudiante?
[256] Lucero: No, por supuesto que no. De hecho muchos no lo conocían. Pero él [refiriéndose al estudiante] lo utilizó.
[257] Investigador: Bueno, ahí en el video hay una alumna que hace señas con la cabeza que no deriva, cuando usted pregunta si todos saben derivar. ¿Usted ahí como docente qué hace en uno de esos casos?
[258] Lucero: Pues depende, como le digo depende. No sé si lo hice ahí, pero entonces, si no me equivoco, cuando ellos dijeron que no, yo le pregunté al estudiante que estaba exponiendo sus ideas qué era la derivada. De tal manera que no soy yo la que pasa al tablero a explicar sino que, bueno, "usted que está utilizando el término ¿qué entiende por derivar?, ¿para qué me sirve?" Y pues ahí en ese momento la idea quedaba así como él la explicara, y la idea era que al final, si quedaba tiempo, institucionalizar el concepto. La idea no era enseñarles a los estudiantes a derivar con ese ejercicio; pero sin embargo no podía dejar pasar que alguien sí conocía el concepto, si él lo utilizó pues que nos cuente cómo hace.

Episodio 54. Los conceptos del estudiante en la derivada

[259] Lucero: De hecho yo me atrevo a decir que el ir a derivar una función polinómica no es comprender el concepto, es hacer. Porque puede ser también una mecanización, entonces comprender no. De hecho como profesor uno aprende cuando lo enseña. Yo fui estudiante, yo vi y pase mis cálculos, y cuando tuve que dictar cálculo tuve que reaprenderlo. Porque pues yo estudiaba pero era para un examen y eso, pero comprender los conceptos cuando los empecé a enseñar. Porque como voy a enseñar algo que yo todavía y esta es la altura y yo todavía sé que me faltan cosas por comprender. Así que si yo como individuo igual requiero de ciertos procesos para ir ganando, por supuesto que ellos con la mención no van a ganar claridad.

Episodio 55. Las decisiones de la profesora en la clase.

[260] Lucero: Diría que los criterios utilizados son los siguientes: Primero el estudiante expone la forma como interpretó y solucionó la situación propuesta. Segundo, los demás compañeros dan su opinión sobre lo expuesto por su compañero, si no estaba de acuerdo con la forma como fue abordado debía exponer el porqué de su desacuerdo. Siempre se insistió en argumentar por qué se estaba o no de acuerdo. Estos dos criterios daban lugar a que la mayoría, por no decir todos, los estudiantes participaban en la socialización y se daba lugar a recordar conceptos matemáticos vistos en el bachillerato.

Episodio 56. El lenguaje matemático da seguridad.

[261] Lucero: […]. Sí, hay profesores que manejan muy bien los conceptos y en el momento de ir a enseñar es terrible. O al contrario didácticamente uno se puede esforzar pero carece de conceptos matemáticos, como es mi caso, a mí me falta muchísimo profundizar en muchos conceptos de cálculo, y tengo que estudiar y estudiar para ir mejorando en ese aspecto. Entonces es que vean eso, que no son solo ganas, también se necesita disciplina, prepararse y tener cuidado como se habla en clase; porque a veces en este afán de querer que el estudiante se sienta en confianza, tranquilo, uno empieza a utilizar términos que no son propios del cálculo y pues no ayuda uno a que el estudiante aumente su léxico en términos matemáticos. Y eso es algo, una desventaja, que tienen los estudiantes que trabajan conmigo, porque soy muy coloquial, utilizo términos muy allegados a ellos y veces muy alejados de los propios términos del cálculo. Y no el que vea lo que yo hice, no, espero que le sirva para mejorar su práctica de docente.

Episodio 57. La discusión entre estudiantes para fomentar el aprendizaje.

[262] Lucero: Creo que debí haber creado preguntas en los estudiantes: ¿cómo así que acá dio un valor y por acá otro? Y se entraba a verificar si el otro estudiante había remplazado mal en la fórmula o usado mal la calculadora. […] En los otros dos grupos había estudiantes que tenían mejores bases en términos matemáticos, argumentaban muchísimo mejor; entonces hubiera sido también muy interesante fomentar la discusión.

Episodio 58. Reflexionado la orquestación en la clase.

[263] Lucero: El problema es saber cuándo utilizar el software, porque no se trata de utilizarlo sin tener una motivación, eh, debe ser útil para el estudiante el uso del software, porque si lo utilizo solo para que, por ejemplo, él derive, porque el software también lo hace, pero el estudiante no le ve la utilidad entonces estoy perdiendo es el espacio y rebajando el recurso. Fue un complique porque uno se está comprometiendo a hacer que la actividad con el software para que encaje con lo que yo estoy resolviendo en clase y que no quede en el aire, [..] que realmente sea de ayuda para los estudiantes.

Episodio 59. Romper paradigmas, ¡no es fácil!

[264] Investigador: Si en el taller se contemplaba el uso de GeoGebra, ¿por qué razón no lo usó en la socialización?

[265] Lucero: No sé. No sé. De pronto es esa costumbre como esa facilidad que uno tiene de coger un marcador, ósea en el momento no sé por qué no lo hice. No sé, de pronto para… o sea, si hubiera utilizado un computador como usted dice, mostrar mi pantalla en la pantalla del estudiante, también a ellos les hubiera llegado la idea de la pregunta que estaba haciendo el compañero. Pero ¿por qué no la use? No la verdad no lo sé.

Episodio 60. Reconoce ventajas para el aprendizaje usando GeoGebra.

[266] Lucero: GeoGebra facilita de cierta manera los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que es un apoyo para realizar las cosas que si yo realizo en el tablero no van a ser tan claras, como por ejemplo realizar una gráfica, abordar las transformaciones de funciones, etc.