

**REFLEXIONES DE PROFESORES SOBRE LA SELECCIÓN Y USO DE
RECURSOS QUE IMPLEMENTAN EN EL AULA PARA PROMOVER
ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN SUS ESTUDIANTES**

**CLAUDIA JOHANNA TRISTANCHO ARGUELLO
INGRID SUJEY VILLAMIZAR APONTE**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS – ESCUELA DE EDUCACIÓN
ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2012

**REFLEXIONES DE PROFESORES SOBRE LA SELECCIÓN Y USO DE
RECURSOS QUE IMPLEMENTAN EN EL AULA PARA PROMOVER
ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN SUS ESTUDIANTES**

**CLAUDIA JOHANNA TRISTANCHO ARGUELLO
INGRID SUJEY VILLAMIZAR APONTE**

Proyecto de Grado para optar al título de
Especialista en Educación Matemática

Directora:
Dra. Sandra Evely Parada Rico

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS – ESCUELA DE EDUCACIÓN
ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2012

DEDICATORIA

Dedicamos este logro a DIOS por darnos el don del entendimiento, la fortaleza y el coraje para elaborar y culminar este trabajo de grado.

A los miembros de nuestros hogares por su apoyo incondicional, por su comprensión, por su paciencia, por estar con nosotras en todos los momentos y por estar ahí para el cumplimiento de nuestras metas.

Con cariño

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a DIOS por permitirnos llevar a cabo el cumplimiento de otra meta en nuestras vidas, por iluminarnos, darnos sabiduría y salud para terminar esta especialización.

A mis padres Carmen y Hernando, a mis hermanos Luz Genny y Jorge y por supuesto a mi hija Zharick por creer en mí y brindarme su inmenso amor e incondicional apoyo en cada momento de mi vida, les obsequio este triunfo por ser los motores que me impulsan para salir adelante.

A mis padres Emma Graciela y Angel, hermanos y todos ellos por estar conmigo en cada etapa de mi crecimiento como persona y como profesional.

A la Doctora SANDRA EVELY PARADA RICO quien dirigió este trabajo, por su gran ayuda, asesoría y valiosos comentarios durante todo este tiempo y por confiar en nosotras para la elaboración de esta tesis.

A los docentes María y Humberto quienes nos permitieron con su valiosa ayuda desinteresada colaborar en el desarrollo de esta tesis, a Claudia Garavito Osorio y Claudia Barajas por tanta paciencia en el proceso de desarrollo del proyecto y todos aquellos que de una u otra forma hicieron posible la construcción de este trabajo.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	18
1.ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	21
1.1. ANTECEDENTES	21
1.1.1 Sobre los procesos de reflexión de docentes de matemáticas.	21
1.1.2 Sobre investigaciones que analizan los recursos implementados en el aula de clase.	23
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	26
1.2.1 Objetivos	28
2. LA REFLEXIÓN EN LOS PROCESOS DE FORMACIÓN DE DOCENTES: BASES TEÓRICAS Y CONCEPTUALES	29
2.1 ACTIVIDAD MATEMÁTICA	32
2.2 ASPECTOS DE REFLEXIÓN DEL MODELO	33
2.2.1 Pensamiento matemático escolar.	34
2.2.2 Pensamiento pedagógico y didáctico.	35
2.2.3 Pensamiento orquestal.	35
2.3 PROCESO DE REFLEXIÓN	38
2.3.1 Reflexión para la acción.	38
2.3.2 Reflexión en la acción.	38
2.3.3 Reflexión sobre la acción.	39

3. DISEÑO METODOLÓGICO	40
3.1 CASOS DE ESTUDIO	40
3.2 ETAPAS DELTRABAJO DE CAMPO	41
3.2.1 Procesos de reflexión sin intervención (Etapa Preliminar)	41
3.2.2.Análisis de la primera etapa y construcción de las herramientas para guiar la reflexión de los profesores	43
3.2.3 Reflexión sobre los recursos guiada por las herramientas de análisis.	45
3.2.4 Nueva experiencia de reflexión posterior a la intervención.	46
4. EL MODELO APLICADO EN EL CASO DEHUMBERTO	48
4.1 REFLEXIONES DE HUMBERTO EN LA ETAPA PRELIMINAR	48
4.1.1 Reflexión para la acción.	49
4.1.1.1 Consideraciones sobre la planeación de Humberto.	49
4.1.2 Reflexión en la acción:	54
4.1.2.1 Consideraciones del primer episodio	54
4.1.2.2 Consideraciones del segundo episodio.	57
4.1.2.3 Consideraciones del tercer episodio	59
4.1.3 Reflexiones sobre la acción: por parte del docente.	65
4.1.3.1 Consideraciones sobre la reflexión del docente	66
4.2 CONSTRUCCIÓN DE LAS HERRAMIENTAS PARA GUIAR LA REFLEXIÓN DE HUMBERTO	70
4.2.1 Rutas Cognitivas.	70
4.2.2 Estudio comparativo entre lo planeado y lo logrado	73
4.2.3 Análisis de la clase mediante la Guía de Momentos Seleccionados	73
4.3 REFLEXIÓN DE HUMBERTO CON EL APOYO DE LAS HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS (Fase de Intervención)	76
4.3.1 Reflexión sobre los recursos apoyados con las rutas cognitivas	77

4.3.2 Reflexión sobre los recursos apoyados con la tabla Guía de Momentos Seleccionados.	78
4.3.2.1 Reflexiones sobre la lectura como recurso	78
4.3.2.2 Reflexiones sobre la tabla de doble entrada como recurso	80
4.3.2.3 Reflexiones sobre el uso del lenguaje matemático	82
4.3.2.4 Reflexiones sobre el algoritmo como recurso	82
4.3.2.5 Reflexiones sobre las preguntas como recurso	84
4.3.2.6 Reflexiones sobre la evaluación de los objetivos alcanzados por los estudiantes	84
4.4 REFLEXIONES DE HUMBERTO EN LA NUEVA EXPERIENCIA	85
4.4.1 Reflexión para la acción: Planeación de clase	85
4.4.1.1 Consideraciones sobre la planeación del profesor Humberto	88
4.4.2 Reflexión en la acción: Puesta en escena de la clase planeada	89
4.4.2.1 Consideraciones de la puesta en escena del profesor Humberto.	91
4.4.3 Reflexión sobre la acción: Análisis de la clase planeada y lograda.	94
4.4.3.1 Consideraciones sobre las reflexiones del profesor Humberto.	97
4.5 CONSIDERACIONES GENERALES DEL PROCESO DE REFLEXIÓN DEL PROFESOR HUMBERTO	98
5. EL MODELO APLICADO EN EL CASO DE MARÍA	101
5.1 REFLEXIONES DE MARÍA EN LA ETAPA PRELIMINAR	101
5.1.1 Reflexión para la acción: Planeación de la clase	102
5.1.1.1 Consideraciones sobre la planeación de María	103
5.1.2 Reflexión en la acción: puesta en marcha de la clase planeada.	104
5.1.2.1 Consideraciones del primer episodio.	106
5.1.2.3 Consideraciones del tercer Episodio	115
5.1.3 Reflexiones sobre la acción por parte de la docente María	118

5.1.3.1 Consideraciones sobre la reflexión de la profesora María.	119
5.2 CONSTRUCCIÓN DE LAS HERRAMIENTAS PARA GUIAR LA REFLEXION DE MARÍA	122
5.2.1 Rutas Cognitivas.	122
5.2.2 Estudio comparativo entre lo planeado y lo logrado	126
5.2.3 Análisis de la clase mediante la Guía de Momentos Seleccionados	128
5.3 REFLEXIÓN DE MARÍA CON EL APOYO DE LAS HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS	129
5.3.1 Reflexiones sobre los recursos apoyados con las Rutas Cognitivas	130
5.3.2 Reflexiones orientadas por la Guía de Momentos Seleccionados	133
5.3.2.1 Reflexiones sobre el material concreto como recurso	133
5.3.2.2 Reflexiones sobre el uso de la pregunta como recurso	137
5.3.2.3 Reflexiones sobre el uso del libro como recurso	139
5.3.2.4 Reflexiones sobre el uso de la coevaluación como recurso.	142
5.4 REFLEXIONES DE LA PROFESORA MARÍA SOBRE LA NUEVA EXPERIENCIA	144
5.4.1 Reflexión para la acción: Planeación de la clase	145
5.4.1.1 Consideraciones sobre la planeación	146
5.4.2 Reflexión en la acción: Puesta en marcha	147
5.4.2.1 Consideraciones del Episodio 1.	148
5.4.2.2 Consideraciones del Episodio 2.	148
5.4.2.3 Consideraciones del Episodio 3	150
5.4.2.4 Consideraciones del Episodio 4.	151
5.4.2.5 Consideraciones del Episodio 5	152
5.4.3 Reflexión sobre la acción de la clase planeada y realizada	153
5.4.3.1 Consideraciones sobre la reflexión de la profesora María	153

5.5 CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL PROCESO DE REFLEXIÓN DE LA PROFESORA MARÍA	156
CONCLUSIONES	158
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	162

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Representación Grafica del Modelo R y A	31
Figura 2. Protocolo de la entrevista después de la clase	42
Figura 3. Esquema de una Ruta Cognitiva	44
Figura 4. Guia Observación de los Momentos Seleccionados	45
Figura 5. Planeación de la clase del profesor Humberto	50
Figura 6. Lectura de Ambientación “Continuidad de los parques”	52
Figura 7. El docente guía al estudiante	59
Figura 8. El Profesor Aradando Dudas	61
Figura 9. El Profesor en Acompañamiento	61
Figura 10. Tabla de doble Entrada	62
Figura 11. Humberto en Acompañamiento a un Grupo	64
Figura 12. Reflexión presentada por Humberto sobre la experiencia realizada	65
Figura 13. Ruta Cognitiva de la planeación	71
Figura 14. Ruta cognitiva de la clase desarrollada por el profesor Humberto	72
Figura 15. Comparativo de rutas cognitivas	74
Figura 16. Algoritmos presentados a los estudiantes	83
Figura 17. Primera hoja de la planeación de Humberto de la nueva experiencia	86
Figura 18. Segunda hoja de la planeación de Humberto de la nueva experiencia	87
Figura 19. Evidencias de las explicaciones a los estudiantes	92
Figura 20. Profesor y estudiante realizan la tabla de doble entrada	93
Figura 21. Reflexión de la nueva experiencia del profesor Humberto	95
Figura 22. Bosquejo de la Ruta cognitiva diseñada por Humberto	96

Figura 23. Primera planeación de la profesora María	102
Figura 24. La Docente Escribe la Secuencia de la Potencia de Dos	106
Figura 25. La docente resuelve las potencias de dos	107
Figura 26. Notación de una propiedad mal escrita de la potenciación	108
Figura 27. Opciones de respuesta para la propiedad	108
Figura 28. Presentación del cubo	111
Figura 29. Fórmula del volumen de un cubo	112
Figura 30. Ejemplificando la potenciación a través del volumen del cubo	113
Figura 31. Tarea en Blanco	114
Figura 32. Otro texto sin la actividad asignada como tarea+	115
Figura 33. Ejercicio del último punto de la tarea	116
Figura 34. Ejercicio usando las propiedades	117
Figura 35. Ruta Cognitiva de la primera planeación de clase de la profesora María	123
Figura 36. Ruta Cognitiva del texto guía "Navegantes 8"	124
Figura 37. Ruta Cognitiva de la clase desarrollada	125
Figura 38. Comparación entre las rutas de lo planeado y lo realizado	127
Figura 39. Análisis del doblado de una hoja de papel	135
Figura 40. Estructura del libro Navegantes 8º	139
Figura 41. El trabajo de los monitores en la clase de la profesora María	140
Figura 42. Actividad de cierre de la clase	142
Figura 43. Planeación de la nueva clase de la profesora María	145
Figura 44. Apuntes de un estudiante	149
Figura 45. Evidencia de la tarea de la nueva experiencia	154

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Guía de Momentos Seleccionados de la clase de Humberto	75
Tabla 2. Consideraciones acerca de las reflexiones en la acción de Humberto	90
Tabla 3. Comparativo entre los episodios y la ruta cognitiva	128
Tabla 4. Momentos Seleccionados De La Clase De La Profesora Maria	131
Tabla 5. Relación entre el número de dobleces y número de divisiones	136

RESUMEN

TITULO: REFLEXIONES DE PROFESORES SOBRE LA SELECCIÓN Y USO DE RECURSOS QUE IMPLEMENTAN EN EL AULA PARA PROMOVER ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN SUS ESTUDIANTES*

AUTORAS:CLAUDIA JOHANNA TRISTANCHO ARGUELLO, INGRID SUJEY VILLAMIZAR APONTE**

Palabras Claves: i) Procesos de reflexión, ii) Recursos didácticos, iii) Componentes de pensamiento y iv) Actividad Matemática

El ministerio de Educación Nacional propone que los docentes necesitan actualizarse permanentemente de manera que estén a la par con las necesidades sociales y los cambios tecnológicos, centrados en la reflexión de su propia quehacer pedagógico. De hecho existen innumerables recursos que se pueden utilizar en una clase, pero los docentes persisten en quedarse con los tradicionales aquellos que les generan mayor confianza y no se arriesgan a innovar. La cuestión central es promover procesos de reflexión en los profesores sobre los recursos que seleccionan, diseñan o usan para favorecer actividad matemática en sus estudiantes.

Para dar respuesta a lo anterior se realizó un estudio de casos a dos profesores empleando el Método R-y-A de Parada (2011), siendo la esencia del modelo la reflexión constituida por un proceso de diferentes etapas: reflexión para la acción, reflexión en la acción y reflexión sobre la acción; proceso que permitió –en mayor o menor grado– que los profesores fortalecieran sus prácticas pedagógicas, a través de la observación de su trabajo, del análisis objetivo de sus metodologías y de las orientaciones que resultaron de las herramientas construidas para propiciar la reflexiones sobre los recursos seleccionados y usados en sus clases.

Así, de dicho trabajo de campo se concluyó en los dos casos de estudios que los profesores tomaron una postura de indagar y manejar mejor los recursos que llevaron al aula de clase para lograr la coherencia entre lo planeado y lo logrado. Además, sintieron que los procesos de reflexión realizados los llevaron a enfrentarse con sus responsabilidades y asumir su trabajo de una manera crítica y renovada con el fin de favorecer su quehacer matemático y el aprendizaje de sus estudiantes.

* Proyecto de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, Especialización en Educación Matemática. Directora: SANDRA EVELY PARADA RICO, Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa.

SUMMARY

TITLE: TEACHERS' REFLECTIONS ON THE SELECTION AND USE OF RESOURCES IMPLEMENTED IN THE CLASSROOM TO PROMOTE MATHEMATICAL ACTIVITY IN THEIR STUDENTS*

AUTHORS: CLAUDIA JOHANNA TRISTANCHO ARGUELLO, INGRID SUJEY VILLAMIZAR APONTE**

KEY WORDS: i) Processes of reflection, ii) didactic Resources, iii) Components of thought and iv) Mathematical Activity

The department of National Education proposes that the teachers need to update permanently so that they are at par with the social needs and the technological changes centred on the reflection of his own pedagogic occupation. In fact there exist innumerable resources that can be in use in a class, but the teachers persist in remaining with the traditional ones those that they generate major confidence and do not risk innovating. The central question is to promote processes of reflection in the teachers on the resources that they select; they design or use to favor mathematical activity in their students.

To give response to the previous thing, it was realized study of cases with two teachers using the Method R-y-A of Stop (2011), being the essence of the model the reflection constituted by a process of different stages: reflection for the action, reflection in the action and reflection on the action; process that it was allowed - in major or minor degree - that the teachers should strengthen their pedagogic practices, across of the observation of their works, of the objective analysis of his methodologies and of the orientations that result from the tools constructed to propitiate the reflections about the resources selected and used in their classes.

This way, of the above mentioned fieldwork was concluded in both cases of studies that the teachers took a position of investigating and handling better the resources that led to the classroom of class to achieve the coherence between the planned and the successful thing. In addition, they felt that the processes of reflection realized led them to facing his responsibilities and to assume their work of a critical way and renewed in order to favor their mathematical occupation and the learning of their students.

*Project degree

** Faculty of Sciences. School of Mathematics, Specialization in Mathematical Education. Director SANDRA EVELY PARADA RICO, Specialty Doctor in Mathematics Education.

INTRODUCCIÓN

El mundo se encuentra en constante cambio debido a los avances tecnológicos, la irrupción vertiginosa de la tecnología en algunos contextos sociales tanto dentro como fuera de las aulas, la utilización creciente de las redes telemáticas y la aparición de entornos virtuales de aprendizaje que han generado la necesidad de diseñar y llevar a cabo procesos de aprendizaje coherentes con dicho avance, es decir, las nuevas demandas de la sociedad exigen de los profesores el acercamiento, la apropiación y la inclusión de las tecnologías en sus prácticas docentes teniendo en cuenta, además, que los niños y adolescentes (los estudiantes) de esta era se desarrollan de la mano con la tecnología digital, en particular.

Por tal razón, los profesores deben disponerse a asumir los cambios suscitados por el desarrollo tecnológico y social con el fin de propiciar procesos educativos que se tornen significativos para el aprendizaje de los estudiantes, lo que implica, a su vez, una búsqueda constante de estrategias a través de procesos reflexivos que favorezcan el mejoramiento continuo de sus prácticas profesionales, pues, según Dewey (1989), la reflexión es un proceso de resolución de conflictos, de dudas que requiere –como se mencionó– a la vez una actitud de disposición para revisar su actuación.

De este modo, el objetivo principal de la investigación que se comunica en este documento es promover procesos de reflexión en los profesores, en particular, sobre los recursos que seleccionan, diseñan o usan para favorecer la actividad matemática de sus estudiantes durante la clase, pues tal como lo afirma Llinares (2000), las personas pensamos y actuamos mediados por “instrumentos” (el lenguaje hablado, modos de representación simbólica, las tareas-problemas

instruccionales y los materiales didácticos) los cuales son considerados como los medios que permiten obtener un fin.

En las bases teóricas y conceptuales de la investigación se caracterizan términos como “actividad matemática” y “procesos matemáticos” definidos por Treffers (1987) y Chevillard, Bosch y Gascón (1997); se retoman algunos elementos del modelo teórico R-y-A propuesto por Parada (2011) con el cual se busca orientar los procesos de reflexión en los profesores *antes, durante y después* de la clase para favorecer el desarrollo de su pensamiento reflexivo que, a su vez, se descompone en: pensamiento matemático escolar, pensamiento pedagógico y didáctico del área, y pensamiento orquestal.

De otra parte, para el desarrollo de este trabajo se establecieron diferentes roles en los investigadores y se usaron herramientas de recolección de datos como: entrevistas, vídeos de clase, análisis de episodios entre los investigadores y los dos profesores sujetos del estudio de investigación (uno de ellos del Colegio Juan Rey del Distrito de Bogotá y el otro de la Institución Bicentenario de la Independencia de la República de Colombia de Bucaramanga quienes, respectivamente, desarrollaron sus actividades con estudiantes de los grados noveno y octavo); se planearon y ejecutaron actividades para favorecer sus procesos de reflexión.

A continuación se describe la estructura del presente reporte el cual se desarrolla en seis capítulos: En el *capítulo uno* se presenta una descripción general del problema de estudio y se dan a conocer algunos antecedentes de investigación relacionados con el problema planteado. El *capítulo dos* contiene las bases teóricas y conceptuales de la investigación. En el *capítulo tres* se expone el proceso metodológico que tiene por eje transversal el modelo R-y-A. Los *capítulos cuatro y cinco* exponen la caracterización de las reflexiones de los profesores en el

marco de los casos de Humberto y María¹; dichas reflexiones se organizaron en relación al uso, diseño y selección de los recursos. En el capítulo seis se expresan las conclusiones de la investigación. Finalmente en un CD se encuentran los anexos de las transcripciones de la primera clase y la nueva experiencia, y además las entrevistas a cada uno de los docentes a quienes se les aplicó el modelo de reflexión.

¹Personas naturales a los cuales se les asignó nombres ficticios acordados con los profesores sujetos de la investigación.

1. ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Teniendo en cuenta que esta investigación se nutre principalmente de las investigaciones de Parada (2009 y 2011), a continuación se presentan algunos de los referentes teóricos que cita la autora, específicamente los relacionados con nuestra investigación.

1.1. ANTECEDENTES

El proceso educativo en matemática concibe al profesor como un individuo llamado al cambio, que necesita generar una práctica regida por una actitud reflexiva. Esta reflexión contribuye al desarrollo de procesos matemáticos y pedagógicos de los profesores, pues les ayuda a cuestionarse sobre sus actitudes, conocimientos y creencias. A continuación se presentan algunas de las investigaciones más relevantes en los procesos de reflexión:

1.1.1 Sobre los procesos de reflexión de docentes de matemáticas. Tzur (2001) describe una reflexión sobre su desarrollo profesional como profesor y formador de profesores de matemáticas. Por su parte, Cooney (2001) expresa que la reflexión sobre una situación implica un distanciamiento de la realidad permitiendo poner en evidencia las propias creencias sobre la cuestión con el fin de poder confrontarlas con la evidencia empírica, en tanto que Climent (2002) analiza el desarrollo profesional de una profesora que participó y dirigió un grupo de innovación que la investigadora propuso utilizando la reflexión como una de las dimensiones para caracterizar su desarrollo.

Para Flores (2007), citado por Parada (2009), el papel del profesor hoy en día no es transmitir un conocimiento que va tener un tiempo vigente, sino propiciar en los

estudiantes momentos constructivos, en donde ellos sean autónomos de su propio aprendizaje. Es por ello que el autor concibe al profesor como agente de cambio que reflexiona sobre su práctica profesional. En otra investigación se enfatiza que la actual caracterización cognitiva de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas llevan a reconocer al profesor como un sujeto en continuo cambio producto de su práctica reflexiva. De otra parte, Llinares y Krainer (2006) cuestionan que los profesores enseñan tal como les enseñaron o como aprendieron.

Parada (2009) realizó una investigación cualitativa donde se trabajaron procesos de reflexión individual y en grupo, orientados hacia un modelo teórico y metodológico propio. En esa investigación realizó el estudio de casos de profesores de educación básica quienes al finalizar manifestaron la importancia que para ellos tuvo la reflexión colectiva porque a través de las sesiones de trabajo en grupo pudieron darse cuenta de ciertas situaciones de la clase que por sí solos difícilmente podrían detectar. Por lo tanto, sugiere a los profesores, ser reflexivos mediante la discusión crítica dentro de comunidades de práctica² en sus escuelas y en otros espacios más amplios.

Así, por la relevancia de los elementos tratados por Parada (2009), esta investigación retoma el proceso metodológico propuesto por la autora para realizar una réplica a menor escala con dos casos de estudio que corresponden a profesores de secundaria del país. Parada (2011), asimismo, propuso el modelo R-y-A el cual aporta herramientas teóricas y prácticas que ayudan al profesor a analizar su quehacer docente; y, consecuentemente, a mejorar e innovar su práctica pedagógica.

²Cabe resaltar que la autora habla de “comunidades” teniendo en cuenta que “se hace necesario apoyar al profesor en su proceso de reflexión ya que, como dice Dewey (1989), la reflexión no es un asunto individual, es social, se requiere de una comunidad que aporte sugerencias y evidencias que le ayuden a ver al maestro lo que él desde su propia acción e interacción con el contenido matemático, con los estudiantes y con los instrumentos no alcanza a vislumbrar” (op. cit., p. 1)².

Se tiene entonces, que la reflexión es un proceso que transforma a los docentes en seres capaces de enfrentar las situaciones problemas de la cotidianidad, aprendiendo a problematizar, buscando información y produciendo conocimiento; es un proceso introspectivo que les permite mejorar e innovar en sus prácticas pedagógicas, involucrando recursos que permitan a los estudiantes interactuar con el medio y lograr un mejor desarrollo del pensamiento matemático en el marco de la autoexigencia, ejercicio que les exige (a los profesores) cuestionarse para sacudirse de la rutina y de la comodidad de seguir haciendo lo mismo; someterse a críticas continuas de *qué y para qué* sirve lo que hacen y *cómo* se podría mejorar, es más significativo y tiene más impacto si se realiza de manera colectiva: en comunidad.

1.1.2 Sobre investigaciones que analizan los recursos implementados en el aula de clase. Paulatinamente en la educación matemática los recursos y materiales didácticos han ganado relevancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje ya que facilitan y contribuyen tanto en aspectos cognitivos como motivacionales de los estudiantes. Son muchos los posibles recursos didácticos que se pueden seleccionar o usar en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dentro de ellos están los propios libros de texto, cuadernos de ejercicios, lápiz, papel e instrumentos de dibujo o la calculadora. Recursos didácticos “más sofisticados” incluyen los documentales grabados en vídeo sobre aspectos concretos de las matemáticas, los programas didácticos de ordenador y recientemente los recursos en Internet todos estos enmarcados la “tecnología digital” (TD).

Según Godino, Batanero y Font (2003,p 123), “para comprender mejor la importancia de los recursos o materiales didácticos, se usan diferentes clasificaciones de los mismos. Una de ellas consiste en diferenciar dos tipos de recursos:

- *Ayudas al estudio*: recursos que asumen parte de la función del profesor (organizando los contenidos, presentando problemas, ejercicios o conceptos). Un ejemplo lo constituyen las pruebas de autoevaluación o los programas tutoriales de ordenador, etc. También se incluyen aquí los libros de texto, libros de ejercicios, etc.
- *Materiales manipulativos que apoyan y potencian el razonamiento matemático*: Objetos físicos tomados del entorno o específicamente preparados, así como gráficos, palabras específicas, sistemas de signos etc., que funcionan como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático”.

De manera semejante, Parada (2011) define recurso como todos los materiales que el profesor emplea para promover la actividad matemática en el aula; entre ellos: los problemas, preguntas, hojas de trabajo, materiales didácticos (manipulables y observables) y las tecnologías digitales (TD) –*software* y *hardware*–, y todas aquellas formas de comunicación que use el profesor para acercar los contenidos matemáticos a sus estudiantes.

Respecto a la pregunta como recurso, vale la pena señalar desde Menezes (1995), citado por Jiménez, Suárez y Galindo (2010), dos razones por las cuales se debe dar lugar a ellas en clase: La primera porque inhibe que el profesor hable por largo tiempo y, la segunda, porque dadas las potencialidades, la pregunta se puede aumentar y mejorar la participación de los estudiantes; además, permiten detectar dificultades de los estudiantes, ayudarlo a pensar y obtener información que no se tiene (op. cit., 2004 citado por Jiménez et al (2010)).

Las anteriores bondades se obtienen destacando que se debe tener cuidado en aspectos como la claridad y la precisión; el nivel de dificultad; formular las preguntas a todo el grupo y después individualizarlas; evitar que el profesor sea el único en responder las preguntas; luego de obtener las respuestas hacer

preguntas abiertas; es importante la calidad de las preguntas formuladas por el profesor y no la cantidad de ellas lo que puede dinamizar las clases; finalmente, el hacer preguntas es un medio que el profesor tiene para dirigir su clase y así mantener el control sobre el proceso de comunicación (ibídem).

Respecto a la implementación del texto escolar como recurso, Choppin (1980) considera que el libro de texto es “a la vez apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores”. Hay que destacar a Arrangóiz (1994), Peña y Grinberg (1997), quienes coinciden en que los textos no son el centro de gravedad del proceso de enseñanza, sino más bien un elemento organizador de las experiencias de aprendizaje y que además se deben tomar como guía para cumplir con el programa del grado respectivo.

Adicionalmente, el libro de texto tiene el compromiso de convertirse en gestor del cambio educativo, esto no solo es responsabilidad de su autor pues, para Linares (1997), el texto también está mediado por la editorial, el maestro y el lector ya que debe ser cada vez de mejor calidad y sobre todo, cuando este recurso va dirigido a los primeros niveles escolares por ser la base para una buena formación de los estudiantes.

Se tiene además que la lectura de un texto forma parte del proceso de enseñanza aprendizaje, es por esto que es un recurso para la clase permitiendo desarrollar en los estudiantes la capacidad para establecer relaciones entre los conceptos que se expresan y los conocimientos adquiridos. Referente a esto, Márquez y Prat (2005) definen la lectura como un proceso fundamental en el aprendizaje de las ciencias ya que no sólo es uno de los recursos más utilizados durante la vida escolar, sino que puede convertirse en el instrumento fundamental a partir del cual se puede seguir aprendiendo a lo largo de toda la vida.

Según Muniz y Borges(2008) consideran que para obtener habilidades de lectura en clase de matemática, el profesor tiene varios recursos, pero que generalmente no se usan, como los relatos históricos que traen los libros didácticos, las mismas definiciones y enunciados de los problemas, los artículos de periódicos y artículos científicos.

Al respecto, Jiménez *et al* (2010) enfatizan en hacer que los estudiantes lean definiciones o el enunciado de un problema y que expresen con sus palabras lo que entendieron, y confrontarlo con lo que entendieron los demás, es sin duda una buena estrategia, tanto para mejorar la comprensión lectora como para desarrollar la argumentación, ya que es una dificultad que se presenta en la resolución de los problemas.

Finalmente, es importante tener claridad sobre el objetivo y la intencionalidad con la cual se llevan los recursos al aula de clase pues estos se deben emplear, como lo afirma Parada (2011), para favorecer y potenciar las diferentes actividades de la labor matemática tales como la argumentación, comprobar hipótesis, resolver problemas. etc.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La humanidad da pasos agigantados constantemente buscando su desarrollo, éste se manifiesta en cambios a nivel social, cultural, tecnológico entre otros aspectos. Los procesos educativos están inmersos en dicho desarrollo, de manera directa o indirecta, y es por ello que los docentes necesitan actualizarse para ser partícipes de dichos cambios y poder hacer uso efectivo de las innovaciones tecnológicas más recientes en nuestras aulas de clase.

Diferentes organizaciones a nivel mundial, como por ejemplo la UNESCO a través de la Oficina Internacional de Educación (OIE), ha impulsado reuniones para promover la mejora de la calidad de la enseñanza incorporando las herramientas tecnológicas como apoyo didáctico. Al respecto, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia pretendió, desde los Lineamientos y los Estándares Curriculares, promover un proyecto cuya columna es la formación permanente, intensiva y continuada de los docentes, centrada en la reflexión sobre su propia práctica en el salón de clase y en las posibilidades del recurso tecnológico (Castiblanco, 2002).

Desde nuestra experiencia como profesoras agregamos a esto que las instituciones educativas, en muchas ocasiones, cuentan con dotación suficiente de recursos pero los docentes no las usan por diferentes circunstancias tal como el desconocimiento de su uso; por temor a la novedad que representa la tecnología, por falta de organización, entre otros factores; y, en mayor grado, porque cuando los docentes intentan vincular recursos “innovadores” al aula necesitan reaprender los contenidos que se aprendieron a través de una formación de carácter metodológico tradicional, en el cual los únicos recursos fueron el lápiz y papel, pero al verse ante esa primera reflexión –y lo que implica en el accionar– se desmotivan por el trabajo personal (o quizás individual) que esto encierra. Por esta razón, investigaciones como las de Papert (1993) y Kilpatrick y Cuban (1998), enfatizan en que los profesores no se encuentran suficientemente preparados para implementar recursos diferentes a los tradicionales, o diferentes a los que ellos usaron para aprender.

Así, tras las anteriores consideraciones, se pretende con el desarrollo de esta investigación responder a la pregunta: **¿cómo promover procesos de reflexión en los profesores sobre los recursos que seleccionan, diseñan o usan para favorecer actividad matemática en sus estudiantes durante la clase?** Pues partimos de la hipótesis de que una manera de atender esta problemática es

promoviendo procesos de reflexión en los profesores no solo *antes* sino **durante y después** de la clase para lograr alternativas pedagógicas y metodológicas que conduzcan a gestionar el desarrollo de la actividad matemática esperada en los estudiantes con los diferentes recursos con los que cuentan las instituciones. Esto se hará a través del modelo R-y-A propuesto por Parada (2011) el cual pretende aportar herramientas teóricas y prácticas que le ayuden al profesor analizar su quehacer docente, yendo permanentemente entre sus reflexiones y acciones. Por lo que, finalmente, se tienen los siguientes objetivos

1.2.1 Objetivos

- ✚ Promover procesos de reflexión en los profesores sobre los recursos que seleccionan, diseñan o usan para favorecer actividad matemática en sus estudiantes durante la clase.

- ✚ Caracterizar dichas reflexiones emergentes del proceso en torno a la actividad matemática planteada vs. La actividad matemática lograda.

- ✚ Identificar qué factores intervienen en la selección y uso de algunos recursos en clase de matemáticas, y cómo influyen éstos en la actividad matemática lograda por los estudiantes.

2. LA REFLEXIÓN EN LOS PROCESOS DE FORMACIÓN DE DOCENTES: BASES TEÓRICAS Y CONCEPTUALES

La reflexión profesional pedagógica implica la lectura e interpretación por parte del profesor de su práctica pedagógica y la (re)construcción de estrategias metodológicas en consonancia a los problemas reales que se presentan en las aulas de clase, esto para transformar los aprendizajes de los estudiantes a la mano de las exigencias de la sociedad actual.

“La reflexión en el campo profesional se ha mencionado en varios informes de investigación en la línea de formación de profesores de matemáticas, sin embargo en ellos no se muestran evidencias de las formas como se le ha acompañado al maestro en el proceso y tampoco las herramientas que se les han aportado para que sus reflexiones sean más profundas. Es por eso que con este trabajo de investigación se quiere contribuir en el desarrollo profesional del maestro reconociéndolo como ser humano cambiante y capaz de examinarse con fortalezas y debilidades, pero a la vez como una persona que reflexiona y que busca soluciones y alternativas de mejoramiento” Parada (2009, p. 1).

De lo anterior se tienen tres etapas importantes que debe tener la reflexión dentro del proceso pedagógico: antes, durante y después de la práctica pedagógica lo cual convierte a la reflexión en proceso dinámico que no se detiene.

“Los procesos de reflexión se han denominado en este trabajo como *reflexión para la acción* (análisis objetivo y crítico de los profesores sobre la actividad que van a llevar a cabo en el aula, específicamente la planeación y diseño de actividades), *reflexión*

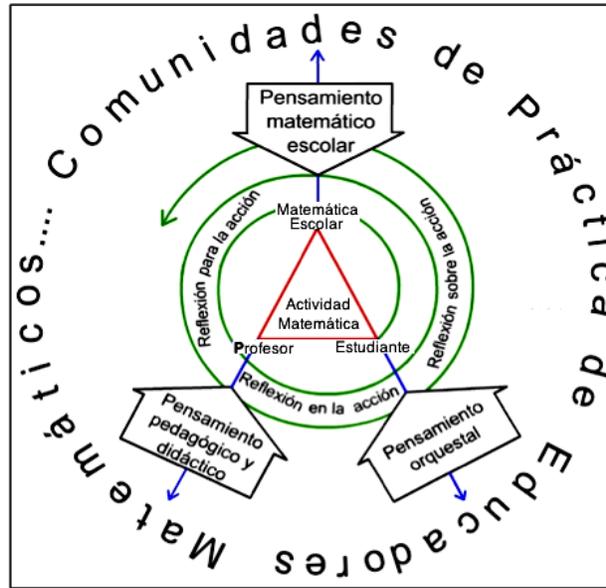
en la acción (definida por Schön (1992) como el proceso que está presente en las interacciones que se dan en el aula, la capacidad de responder y resolver las situaciones inesperadas de los procesos de enseñanza y aprendizaje) y *la reflexión sobre la acción* (función crítica de la que ya ha ocurrido en el aula)” ibídem (p. 2, 3)..

Es así como Parada (2009) construyó ¹¹ un modelo teórico y metodológico bajo la concepción de que la reflexión por parte de los profesores es un proceso que requiere guía y orientación con el fin de centrar su atención en *aspectos puntuales* de su acción pedagógica. Es decir, su modelo tiene dos componentes directrices: *la reflexión y la acción*; por ello se llama “**modelo R-y-A**”.

Éste, además, se fundamenta en los procesos que son posibles cuando los educadores matemáticos se proponen desarrollar un pensamiento reflexivo sobre el área para mejorar su práctica pedagógica.

La autora sintetizó su modelo y los elementos que lo integran en la siguiente representación gráfica (ver Figura 1) –para facilitar su comprensión, seguido de este, una orientación sobre la manera como debe leerse (del exterior al centro):

Figura 1. Representación Gráfica del Modelo R y A



Fuente: (Parada, 2011)

- ✓ El *anillo exterior* describe los procesos que se realizan al interior de una comunidad de práctica los educadores matemáticos que la conforman (profesores, autoridades educativas, investigadores e investigadores en formación).
- ✓ Las *tres flechas de bloque* que están alrededor de la espiral dan cuenta de los tres aspectos sobre los cuales propone desarrollar el pensamiento reflexivo de los profesores de matemáticas: (i) pensamiento matemático escolar, (ii) Pensamiento pedagógico y didáctico; y, (iii) pensamiento orquestal.
- ✓ En el *recorrido de la espiral* están tres procesos de reflexión que se realizan *antes, durante y después* de la clase: (i) reflexión-para-la acción, (ii) reflexión-en-la acción; y, (iii) reflexión-sobre-la acción. Estos procesos se caracterizan retomando algunas ideas de Dewey (1989) y Schön (1992).

✓ En el centro del modelo se ubica la actividad matemática que surge del *triángulo pedagógico* descrito por Saint-Onge (1997 apud Ibáñez, 2007).

A continuación se describen con mayor detalle los conceptos básicos relacionados con el modelo, esta vez partiendo de los elementos del interior del modelo hacia los externos.

2.1 ACTIVIDAD MATEMÁTICA

Desde el trabajo de Chevallard, Bosch y Gascón (1997) se caracteriza la actividad matemática y se describen tres grandes tipos de actividades que podrían considerarse matemática: “ a) Utilizar matemáticas conocidas: el primer gran tipo de actividad matemática consiste en resolver problemas a partir de las herramientas matemáticas que uno ya conoce y sabe cómo utilizar. b) Aprender y enseñar matemáticas, frente a un problema que no se sabe resolver. c) Crear matemáticas nuevas: en principio, se podría decir que sólo los matemáticos producen matemáticas nuevas, pero en realidad, a nivel de los alumnos se puede afirmar que todo aquel que aprende matemáticas participa de alguna manera en un trabajo creador”.

La matemática como actividad de resolución de problemas introduce en muchos casos una componente fundamental: la matematización. Matematizar, según Treffers (1987), es organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificando los aspectos matemáticos relevantes, descubriendo regularidades, relaciones y estructuras. El autor distingue dos formas de matematización a saber:

- La **matematización horizontal** consiste en convertir un problema contextual, en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido

común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva. Los procesos propios de este tipo de actividad son: identificar las matemáticas en contextos generales, esquematizar, formular y visualizar un problema de varias maneras, descubrir relaciones y regularidades, reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas, transferir un problema real a uno matemático y transferir un problema real a un modelo matemático conocido.

- La **matematización vertical** es el proceso de reorganización dentro del sistema matemático mismo; conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, simbolización y vigorización con el objeto de lograr la formalización matemática. Son propios de esta actividad los procesos matemáticos de: representar una relación mediante una fórmula, utilizar diferentes maneras de representar un objeto matemático, probar regularidades, formular un concepto matemático nuevo y generalizar. Cabe destacar que este último modelo teórico se tomó como marco de referencia para la construcción de los aspectos metodológicos de nuestra investigación (objetivo 1.2.1-a), y para el análisis de los resultados emergentes de la aplicación de este modelo en el estudio de dos casos (objetivo 1.2.1-b).

2.2 ASPECTOS DE REFLEXIÓN DEL MODELO

El modelo tiene como principio que la formación de profesores no consiste en crear currículos para enseñarles todo lo que deben saber pues no lograríamos la construcción de tal currículo. Entonces, ¿cómo saber qué es lo que un profesor necesita dominar? Se habla mucho del desarrollo de competencias, pero cuando los profesores en ejercicio se desempeñan en el aula surgen múltiples inconvenientes, los cuales, aunque se tenga mucha preparación de los contenidos matemáticos y didácticos, posiblemente requieran de una reflexión-en-la acción que les ayude a resolver dichas circunstancias.

En el modelo R-y-A se rescata como idea esencial que la formación de profesores no debe apuntar a un cúmulo de conocimientos sino, más bien, al desarrollo de un pensamiento reflexivo en el que se rescaten los conocimientos adquiridos por cada profesor en el trayecto de su práctica y que les permitan superar dificultades de tipo conceptual y didáctico.

No obstante, reconocemos la complejidad de la labor y por ello, como ya se ha mencionado, descomponemos dicho pensamiento en tres partes, fundamentalmente por considerarlos detonadores de la actividad matemática que se desarrolla en el salón de clases, estas se desglosan a continuación:

2.2.1 Pensamiento matemático escolar. Es preciso aclarar que desde el modelo se establece una diferencia entre *pensamiento matemático* y *conocimiento matemático* para explicar que más allá de interesarnos de que el profesor sea un experto en el área, nos interesa que este pueda usar sus *conocimientos matemáticos* para conducir la actividad matemática de los estudiantes de acuerdo al currículo establecido por las instituciones educativas. Parada (2011) se refiere a estos últimos como los contenidos matemáticos que el profesor enseña en el grado en que desempeña su labor docente, según lo indican los programas curriculares. Para ello es conveniente que el profesor conozca el currículo y los objetivos de las matemáticas que se plantean para el grado a su cargo (además de que debe dominar los contenidos matemáticos que enseña), para poder utilizarlos como guía de enseñanza.

En tanto, Vega (1990) expone que el pensamiento es una actividad global del sistema cognitivo, que ocurre siempre que nos enfrentamos a una tarea o problema, con un objetivo y un cierto nivel de incertidumbre, sobre la forma de realizarla. A partir de esta definición decimos que el pensamiento matemático escolar del profesor resulta cuando éste necesita hacer uso de sus conocimientos del contenido matemático escolar –del que es responsable– para desarrollar sus

prácticas profesionales tales como: a) proponer tareas; b) seleccionar, usar y diseñar recursos; c) comunicarse en el aula; d) hacer adaptaciones curriculares; e) evaluar; f) colaborar; y g) profesionalizarse.

2.2.2 Pensamiento pedagógico y didáctico. El pensamiento pedagógico y didáctico del profesor de matemáticas se da cuando éste se cuestiona sobre las diferentes maneras de acercar los conocimientos matemáticos a los estudiantes, buscando las formas más útiles de representar los contenidos mediante analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, y demostraciones que permitan hacerla más comprensible a los alumnos. Para esto, el maestro necesita tener claridad en su pensamiento matemático escolar con el objeto de guiar a sus estudiantes hacia la actividad matemática esperada.

Parada op cit., afirma que este pensamiento ocurre en las prácticas profesionales del profesor de matemáticas y durante los tres procesos de reflexión: i) para la acción (cuando realiza las adaptaciones curriculares en la planeación de la clase); ii) en la acción (en la clase, durante la conducción de la actividad matemática prevista); iii) sobre la acción (cuando evalúa los aprendizajes de los estudiantes y nuevamente hace adaptaciones curriculares para lo que sigue).

2.2.3 Pensamiento orquestal. Uno de los aspectos que más se introducen en los programas de actualización y profesionalización de los profesores de matemáticas es el uso de materiales didácticos en la clase. En los últimos años, entre otros muchos recursos para la enseñanza de las matemáticas, han sido muchos los acercamientos a las tecnologías digitales lo que ha motivado la creación y el mejoramiento del software educativo pues, hoy por hoy, una parte de los educadores matemáticos conciben que el acercamiento o producción de recursos de este tipo facilitará y favorecerá el aprendizaje de las matemáticas. No obstante,

resurge la pregunta ¿están preparados los profesores para hacer dichas incorporaciones?

Al respecto Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche (2003 apud Parada, 2011) mencionan que cada vez hay herramientas más complejas a disposición permanente de los estudiantes, y que estas provocan el surgimiento de fenómenos didácticos desconocidos; es por ello que los profesores necesitan contar con acercamientos teóricos sobre las nuevas herramientas que les permitan afrontar sus nuevas dificultades.

Trouche (2002) resalta que la aparición de artefactos computacionales en la clase de matemáticas, supone un problema de carácter didáctico para transformar los artefactos en instrumentos benéficos para la actividad matemática y no como recursos que resuelven y solucionan problemas en el aprendizaje. Ante esta aseveración, el autor propone una lectura desde la perspectiva teórica de la aproximación instrumental, en la que reconoce que el aprendizaje de una noción matemática se encuentra mediada por instrumentos y que dicha mediación está influida por la organización particular de la clase: una *orquestración instrumental*.

Así, la orquestración instrumental consiste en la gestión didáctica de los artefactos puestos a disposición en relación con los objetivos didácticos, teniendo en cuenta tanto las características de los artefactos, como los aspectos matemáticos involucrados (Trouche, 2004 apud Parada, 2011). Se podría entender, entonces, la orquestración instrumental como un plan didáctico y de acompañamiento, por parte del profesor, en las acciones instrumentadas de sus estudiantes en un ambiente determinado en la clase.

Por último, el autor señala dos aspectos en los cuales incide en gran manera la introducción del concepto de orquestración instrumental (ibídem): 1) Lo que se refiere a los recursos y situaciones matemáticas, y la necesidad de escenarios

apropiados para el uso de dichas situaciones; y 2) La necesidad de apoyar a los profesores en el desarrollo y adaptación de los recursos, sus usos y la gestión de estos en la clase.

En el modelo R-y-A no se usan literalmente las ideas de la orquestación instrumental de Trouche; sencillamente en éste se reconoce que una de las dificultades que hoy tienen los profesores, es el bombardeo de información, e incluso –al ser blancos del mercantilismo de empresas y editoriales– de *software*, calculadoras, y demás materiales didácticos. En muchas ocasiones, muchos de estos recursos son aceptados por los docentes y por las autoridades educativas con el afán de no sentirse desplazados y obsoletos; de este modo, al incluirlos –muchas veces con desconocimiento– en las actividades de aula pueden generar múltiples inconvenientes de tipo conceptual y didáctico.

En el modelo R-y-A el pensamiento orquestal se hace presente cuando el profesor hace uso de los recursos que ha decidido incorporar en la clase, porque en ese momento necesita ser como un *director de una orquesta* para poder poner en escena, de la mejor manera, la diversidad de recursos con los que cuenta, o no, en la complejidad de situaciones de su práctica. Este pensamiento se ve reflejado, durante los procesos de reflexión en la acción, explícitamente en el pensamiento matemático escolar, y el pedagógico- didáctico en los cuales el pensamiento orquestal se convierte en un recurso más de la clase.

De este modo, desde el modelo, marco de referencia de nuestra investigación, se deja claro que una manera de contribuir con el desarrollo del pensamiento orquestal del profesor no es presentándole una diversidad de recursos sino apoyándolo para que discierna y piense sobre el cómo, el cuándo y el dónde usar tal o cual recurso, dependiendo de los propósitos de aprendizaje que deseen lograrse.

2.3 PROCESO DE REFLEXIÓN

Como se mencionó, en el modelo R-y-A el proceso de reflexión se considera en tres etapas y se representan en un recorrido en forma de espiral, como procesos de participación-reflexión-acción. Estas etapas se caracterizan retomando algunas ideas de Dewey (1989) y Schön (1992), y se describen así:

2.3.1 Reflexión para la acción. Según Dewey (1989), en la etapa de reflexión previa a la clase, se busca el análisis objetivo y crítico de los profesores sobre sus vivencias las cuales están vinculadas con la reflexión que los impulsa a la acción de la que se esperan efectos –individuales y grupales–. La actividad de reflexión se inicia con la observación de datos y lleva al individuo al esclarecimiento de los mismos en la búsqueda de soluciones imaginarias y reales. La reflexión para la acción se hace presente en la relación de la matemática escolar y el profesor, cuando el maestro planifica la actividad matemática esperada por parte de los estudiantes en la clase.

2.3.2 Reflexión en la acción. Esta etapa tiene el propósito de descubrir cómo el conocimiento en la acción puede haber generado un resultado inesperado. Esta etapa reflexiva está constituida, tanto por elementos intuitivos (emocionales, creativos, etc.), como por elementos racionales (selección y análisis de información) que se interrelacionan para modificar, durante la práctica, la intervención del profesor.

Para Schön (1983) y Parada (2009) las situaciones de reflexión en la acción son aquellas en las que se usan respuestas espontáneas y rutinarias o cuando hay una sorpresa y el evento no corresponde a lo que se cree saber, llama la atención del profesor, enfrentándolo a una situación que lo conduce a una reflexión.

2.3.3 Reflexión sobre la acción. Esta es la que se realiza sobre un hecho ya ocurrido. El valor principal de este tipo de reflexión es su función crítica y evaluativa ya que permite comprender las situaciones problemáticas y reestructurar las estrategias de acción; es decir, lo que la distingue de otros tipos de reflexión es su relevancia para la acción. Este tipo de reflexión le permite al profesor tomar conciencia explícita de sus conocimientos y de sus modelos pedagógicos utilizados en su actuación, y contrastar éstos con los propuestos en teorías didácticas.

Es en la reflexión que hace el profesor después de la clase, cuando analiza si los objetivos matemáticos planteados fueron alcanzados por los estudiantes. En este momento se concientiza de aquellas respuestas que dio espontáneamente a sus estudiantes y cómo éstas conllevaron o no a la actividad matemática que esperaba promover en la clase.

Se recalca aquí que cada experiencia vivida puede dejar saberes particulares que posibilitan procesos consecuentes más sólidos, y que se transforman en la optimización de la actividad matemática tanto de los profesores como de los estudiantes.

Finalmente, en el corazón de la espiral se encuentra el triángulo pedagógico profesor (P) - estudiante (E) matemática escolar (ME): en el centro de éste aparece la actividad matemática (AM), sobre la que se centran los esfuerzos de desarrollo profesional. Se considera que las interacciones que se desarrollan al interior del triángulo pedagógico posibilitan la actividad matemática del estudiante durante la clase y del profesor antes, durante y después de ella.

En el siguiente capítulo se describe el diseño metodológico que se realizó para alcanzar los objetivos expuestos para promover la reflexión de los profesores en torno al uso y selección de recursos en el aula.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

El diseño de la investigación se enmarca en una metodología de tipo cualitativa. El análisis de la información se hizo por medio de dos estudios de casos. Los docentes, sujetos de estudio, fueron acompañados durante el desarrollo de la investigación con el fin de ir evaluando los resultados y las reflexiones emergentes en cada una de las etapas. Igualmente, fueron entrevistados, antes y después de cada clase video-grabada.

3.1 CASOS DE ESTUDIO

El estudio de casos consiste en la observación detallada de un contexto, individuo, de una fuente de documento o de un acontecimiento específico para caracterizar los observables definidos dentro de los objetivos de investigación. Los sujetos de estudio son docentes nombrados por la Secretaría de Educación de las ciudades de Bogotá y Bucaramanga, respectivamente. Fueron seleccionados por las investigadoras ya que compartían el mismo espacio laboral en aquel momento. A continuación información específica de los docentes:

a. *Humberto*, docente en nivel Media Básica del Ciclo IV (grados octavos y novenos) en el Área de Matemáticas del colegio Juan Rey del Distrito de Bogotá; Licenciado en Psicología y Pedagogía con especialización en Educación Matemática y con 22 años de experiencia ininterrumpida como profesor de matemáticas. Los grados en los cuales se desarrolló su experiencia fueron octavos y novenos. El tema que planeó el docente para la clase fue a la División de Radicales de Igual Índice haciendo uso de una lectura y ejercicios de práctica.

b. *María*, docente de los grados octavo, décimo y undécimo en las Áreas de Matemáticas y Física en la Institución Bicentenario de la independencia de la República de Colombia en la ciudad de Bucaramanga. Es profesional en Física; en la fecha en que se desarrolló la experiencia la docente se encontraba estudiando para acreditar el curso de profesionalización docente exigido por el Ministerio de Educación Nacional a los profesionales que no cuentan con formación pedagógica. Planeó una clase para el grado octavo sobre el tema de la Potenciación en Números Reales. La docente usó materiales concretos para mostrarles algunas de las aplicaciones de la potenciación a los estudiantes.

3.2 ETAPAS DEL TRABAJO DE CAMPO

El trabajo de campo que se realizó en esta investigación tiene cuatro fases a saber: i) Los profesores realizan su primera clase (para la cual no hubo ninguna orientación; la clase es videograbada), se realiza de ella un proceso de reflexión que pasa por las tres etapas del mismo (reflexión para la acción, reflexión en la acción, reflexión sobre la acción). ii) El grupo investigador realiza la construcción de las herramientas de análisis para orientar la reflexión de los profesores; iii) Socialización de las herramientas diseñadas y entrevista para analizar momentos que fueron seleccionados para promover la reflexión en cada uno de los docentes sobre los recursos que se usan e implementan en el aula; y, iv) los sujetos de estudio planean y desarrollan una nueva clase, en esta etapa se observaron y analizaron los procesos de reflexión que los profesores integraron en su quehacer docente a partir de las etapas previas.

3.2.1 Procesos de reflexión sin intervención (Etapa Preliminar). En la primera etapa de este trabajo, proceso de reflexión sin intervención, se quiso observar las maneras como los profesores desarrollan su pensamiento reflexivo: es decir, cómo reflexionaban sobre las matemáticas que enseñaban, la metodología y los

recursos que incorporaban en el aula. Para ello se plantearon los siguientes procesos:

a. *Reflexión-para-la-acción*, aquí se solicitó a los profesores elaborar y presentar una planeación de clase del tema. Aquí no se intervino, con el fin de ver si los profesores tenían como práctica hacer la planeación y si eran así, saber cómo la hacían.

b. *Reflexión-en-la-acción*, se observó y video grabó la clase planeada por los docentes, esto con el propósito de detallar la metodología con la cual los profesores interactuaron en el desarrollo de la clase entorno a dudas o reacciones con respecto al tema. Además, para observar la “orquestación” de los recursos en la clase, para dar explicaciones o responder a las situaciones de la clase.

c. *Reflexión-sobre-la- acción*. Posterior a la clase se hizo una primera entrevista a cada profesor. Para ello se realizó un protocolo de entrevista (ver Figura 2) que nos permitió recoger las reflexiones del profesor sobre la selección y uso de recursos. Así como su expectativa respecto al impacto que estos generarían en la actividad matemática de los estudiantes.

Figura 2. Protocolo de la entrevista después de la clase

1. ¿Cumplió con los propósitos planeados?
2. ¿Se presentó algún cambio en la planeación?
3. ¿La estrategia que planeó le sirvió?
4. ¿Cuáles recursos incorporó en la actividad matemática?
5. ¿Cree que estos recursos le sirvieron para que los estudiantes entendieran el tema?
6. ¿Cómo trabajo dichos recursos?
7. ¿Los estudiantes entendieron el tema? ¿Cómo lo sabe?
8. ¿Los estudiantes estuvieron motivados durante la clase?
9. ¿Qué dificultades se le presentó durante la actividad matemática?
10. Ante la respuesta anterior, ¿usted qué hizo?
11. ¿qué hubiera cambiado de la actividad matemática planeada?
¿Por qué?

Fuente: Autoras del Proyecto

3.2.2. Análisis de la primera etapa y construcción de las herramientas para guiar la reflexión de los profesores

En esta etapa se tuvo en cuenta la construcción de las herramientas para orientar los procesos de reflexión de los docentes, se realizó una ruta cognitiva que permitió comparar la actividad matemática planeada por el profesor y la actividad matemática lograda por los estudiantes.

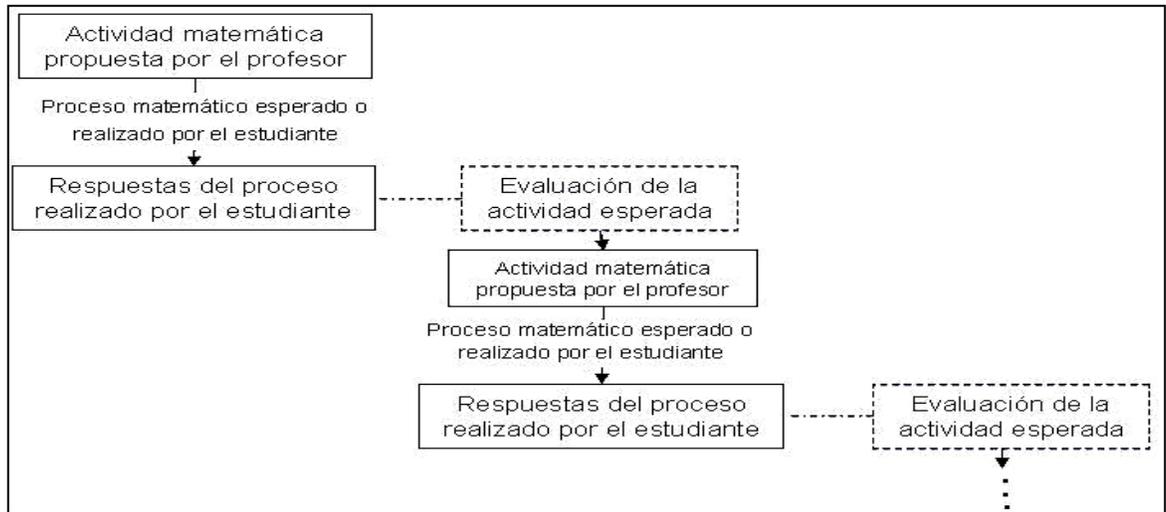
Una **ruta cognitiva**, según Robert y Rogalski (2005), es una estructura conceptual que se centra en el contenido matemático procesado durante la clase: conceptos matemáticos, tipos de herramientas usadas (para representar o calcular), tipos de tareas dadas a los estudiantes. Las rutas cognitivas que presentamos a los profesores fueron inspiradas por las ideas de Parada (2009) y se caracterizan de la manera siguiente:

- 1) Se basan en la actividad matemática que el profesor propone a los estudiantes.
- 2) Son un medio que esboza la estructura de los contenidos matemáticos que se proponen estudiar.
- 3) Se consideran los procesos matemáticos que podrían realizar los estudiantes para responder a la actividad matemática que propone el profesor y que dan paso a que el profesor proponga una nueva actividad para tratar los objetos matemáticos propuestos para la clase.

Las rutas cognitivas permiten organizar los objetivos y respectivos procesos matemáticos que se esperan alcanzar y promover en la clase. Para la gestión de las rutas cognitivas se preverán las respuestas y procesos realizados por los

estudiantes en cada actividad, para planear acciones que llevaron a los alumnos a la consecución de los objetivos de estudio (ver Figura 3).

Figura 3. Esquema de una Ruta Cognitiva



Fuente: Parada 2009

También se hizo un análisis detallado del vídeo de clase del profesor señalando los momentos de la clase que a criterio de las investigadoras ameritaban la reflexión de los profesores; para esto se retomó el protocolo de observación y análisis de los vídeos de clase (ver Figura 4) presentado por Parada (2009) con el cual se buscaba orientar la reflexión de los profesores casos de nuestro estudio.

Lo que propone el modelo es que se realicen dos rutas cognitivas: una de la clase planeada y la otra de la clase desarrollada, con el fin de que pueda hacerse un estudio comparativo entre la actividad matemática propuesta y la actividad matemática alcanzada en clase. La ruta cognitiva de la clase planeada se hizo sobre los datos recuperados del proceso de reflexión-para-la acción; y la de la

clase realizada en el espacio de reflexión-sobre-la acción, basada en la revisión de la videograbación de la clase realizada.

Figura 4. Guía Observación de los Momentos Seleccionados

Momento Seleccionado	Pregunta de reflexión	Aspectos de reflexión
Descripción del momento con su respectiva transcripción. Ubicación temporal en video con el fin de ubicarlo en el mismo, con minutos y segundos. Para el desarrollo de la actividad se sugiere hacer videoclip del momento seleccionado.	La pregunta debe orientar la reflexión que se espera de ese momento, evitando emitir juicios de valor, pues lo que se espera es que el maestro se exprese sobre lo que observa de su propio desempeño en el aula.	Identificación del tema sobre el cual se pretende promover la reflexión del maestro.

Fuente: Autoras del Proyecto

Se analizaron las grabaciones de la primera entrevista realizada a los docentes donde se les invitó a expresar sus sentimientos sobre el logro de los objetivos de la clase, según lo había planeado. Igualmente las investigadoras realizaron un análisis comparativo del material diseñado por los docentes como lo fueron las planeaciones, las guías de trabajo y los libros de texto sobre los que apoyan la planeación.

3.2.3 Reflexión sobre los recursos guiada por las herramientas de análisis.

En esta etapa se dieron a conocer a los profesores los resultados del análisis de la primera experiencia como herramientas para la reflexión. Se construyeron dos

espacios para la reflexión de los docentes: uno en un salón de clase de la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga) y otro en la Institución Juan Rey (en Bogotá). Estas sesiones se realizaron solo entre las investigadoras y los sujetos de estudio; se utilizó el *videobeam* para la presentación de las herramientas construidas las cuales se analizaron paulatinamente con intervenciones de ambas partes.

Inicialmente se presentaron a los docentes los momentos que fueron seleccionados para representar un episodio que a criterio del equipo investigador requería una revisión por parte del profesor. La observación y reflexión se hizo usando una **guía de preguntas** que inducían a los profesores a reflexionar objetivamente sobre aspectos puntuales de su práctica docente, ayudándolos a analizar las formas como reaccionaron frente a cada situación que se dio en la clase.

Un segundo momento de esta sesión consistió en darle a conocer a los profesores los resultados del estudio comparativo entre las rutas cognitivas de lo que planeó y lo que logró con el fin de que los docentes analizaran la forma cómo condujeron la actividad matemática en la clase.

3.2.4 Nueva experiencia de reflexión posterior a la intervención. En esta última etapa se observó cómo los docentes se apropiaron del proceso realizado y las herramientas utilizadas para reflexionar sobre su quehacer docente. Para hacer esta indagación se le propuso a cada profesor que planearan nuevamente otra clase correspondiente a sus planes y programas para llevarla a cabo y finalmente escribieran sus reflexiones personales con relación al logro de la actividad matemática que había previsto y al aprovechamiento de los recursos seleccionados.

En este capítulo se describieron las etapas con las que se quiere alcanzar el objetivo principal de promover la reflexión de los profesores en la actividad matemática.

En los siguientes capítulos se muestran los dos casos de estudio con la aplicación del modelo de reflexión, la cual se centrará en la categoría de uso y selección del recurso analizado desde los tres componentes del pensamiento matemático.

4. EL MODELO APLICADO EN EL CASO DE HUBERTO

Para su caso se utilizó un enfoque descriptivo y analítico aplicando el modelo R-y-A de Parada (2011), el cual se desarrolló en las cuatro etapas del proceso de reflexión explicada en el apartado 3.2. De igual forma, se presentan los resultados del análisis de las reflexiones del profesor Humberto en relación a la categoría *uso y selección del recurso para el desarrollo de la clase* teniendo en cuenta los tres componentes del pensamiento utilizados en este proceso (el matemático escolar, pedagógico- didáctico y el orquestal).

Los resultados del análisis de las reflexiones se presentan de la siguiente manera:

- a. Evidencias del proceso (fotos, fragmentos de las transcripciones de vídeos, figuras) del docente descritas por episodios y acompañadas de los comentarios de las investigadoras.
- b. La actividad de planeación y de reflexión, vienen con resultados del análisis de las reflexiones del profesor con respecto a la categoría uso y selección del recurso por parte del docente de acuerdo a los tres componentes de pensamiento.

Para favorecer la lectura y la comprensión de este documento en cuanto al trabajo de campo, se presentará para este caso un esquema por apartado que muestra de manera global lo que se desarrollará en las líneas que lo componen.

4.1 REFLEXIONES DE HUBERTO EN LA ETAPA PRELIMINAR

En este apartado se describen los procesos de reflexión del docente en cada una de las actividades realizadas en la primera etapa del modelo. Además, se

comunican las primeras reflexiones con relación a la categoría de análisis *uso y selección de recursos que se implementan para promover actividad matemática en sus estudiantes*.

4.1.1 Reflexión para la acción. Planeación de la clase. Para la elección del contenido matemático de la clase, el profesor siguió el programa de estudios de la básica secundaria propuesto por la institución, tomando como tema principal la división de radicales.

Como se puede observar en la Figura 5, el profesor propuso una clase que se desarrollaría en un bloque de dos horas; su estructura fue la siguiente: i) lectura de ambientación³, ii) recordar las propiedades de potenciación y explicación del tema, iii) realizar unos ejemplos y iv) desarrollo de tres ejercicios donde los estudiantes aplicarían el algoritmo, para comprobar o evaluar si los estudiantes comprendieron.

4.1.1.1 Consideraciones sobre la planeación de Humberto. La planeación no incluyó los tiempos en que se va a desarrollar la clase, planteó que la clase era para un bloque de dos horas, pero no se diferenció cuánto tiempo llevaría cada actividad. El segundo objetivo (ver Figura 5), propuesto por Humberto no se podía alcanzar sin antes definir los conceptos correspondientes pues en los elementos conceptuales descritos en la planeación no planteó el trabajo con todas las propiedades de la potenciación que intervienen en los ejercicios que quiere llevar a la clase para ese caso.

³ Cabe resaltar que para el docente es de gran importancia promover el hábito de lectura, fortalecer los valores en los estudiantes y construir el conocimiento a través de la participación en la clase y preguntas puntuales.

Figura 5. Planeación de la clase del profesor Humberto

TEMA: DIVISIÓN DE RADICALES.

OBJETIVO GENERAL: Al finalizar la clase los estudiantes estarán en capacidad de resolver divisiones de radicales del mismo índice aplicando correctamente las propiedades de la potenciación y la radicación, la simplificación de racionales.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1. Aplicar las propiedades de los radicales.
2. Integrar las propiedades de la potenciación en la resolución de la división de radicales.
3. Aplicar la simplificación de números enteros.

ELEMENTOS CONCEPTUALES.

1. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
2. $(x^m)(x^n) = x^{m+n}$
3. $\left(\frac{x^m}{x^n}\right) = x^{m-n}$

DESARROLLO:

1. **AMBIENTACIÓN:**
Lectura *la continuidad de los parques*. Julio Cortázar.
Sentido: La posibilidad que tiene el ser humano de jugar con la imaginación, solo que en la matemática se utilizan elementos lógicos y que respetan el principio de realidad.
2. **PRESENTACIÓN Y EXPLICACIÓN DEL TEMA.**
 - a. Elementos conceptuales.
 - b. Ejemplos.
$$\frac{12^3\sqrt[3]{81x^7}}{3^3\sqrt[3]{3x^3}}$$
3. **EJERCICIOS DE PRÁCTICA.**
 1. $\frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{3x}}$
 2. $\frac{\sqrt{9x}}{\sqrt{3x}}$
 3. $\frac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[3]{27a^2}}$
 1. $\frac{\sqrt[3]{81a^3bc}}{16x^5}$
 5. $\frac{(\sqrt[3]{2x^2})(\sqrt[3]{3x^5})(\sqrt[3]{20x^7})}{\sqrt[3]{5x^2}}$
4. **EJERCICIOS DE COMPROBACIÓN.**
 1. $\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}}$
 2. $\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{\frac{(256)^3}{16^2}} = \sqrt[6]{\frac{(2^8)^3}{(2^4)^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^{24}}{2^8}}$
 3. $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^4}}$

Fuente: Autoras del Proyecto

El profesor Humberto no realizó una retroalimentación de la clase anterior que permitiera seguir el hilo conductor de lo que se estaba enseñando; es recomendable hacer un enlace del tema anterior con el que se va a tratar, para que los estudiantes encuentren continuidad en los temas que se van a presentar.

Humberto incluyó como ambientación la lectura *La continuidad de los parques*, de Julio Cortázar (Figura 6). Con dicha lectura el profesor buscaba llevarle a los estudiantes el mensaje que el ser humano tiene la posibilidad de jugar con su imaginación solo que en la matemática se utilizan elementos lógicos que respetan el principio de realidad, por lo tanto el mensaje de la lectura no era coherente con la actividad matemática. Así, es necesario frente a la selección y uso de la lectura como recurso, tomarse el tiempo para revisar si el contenido corresponde a la temática y los objetivos de la clase. Según Flórez (2012), estimular la lectura es incitar a relacionarse con textos divulgativos y narrativos sobre matemáticas.

Por lo tanto, aunque el profesor Humberto reconoció la importancia de relacionar a los estudiantes con este tipo de lectura narrativa ésta no se relacionaba con los contenidos de la clase. Con respecto a lo anterior no se pueden inferir las razones de dicha selección. Sin embargo, el llevar la lectura al salón de clase es uno de los proyectos transversales⁴ del colegio, siendo ésta una directriz del Ministerio de Educación Nacional que busca fomentar el hábito de la lectura.

En la planeación el profesor Humberto no realizó el cierre de la clase para concluir la actividad matemática realizada con los estudiantes siendo esta estrategia necesaria para sintetizar la temática trabajada durante la clase. En la planeación tampoco se incluyeron ejercicios ni problemas que pudieran reforzar los

⁴En la institución se realizan proyectos transversales que consisten en hacer posible la integración de los diversos saberes para el desarrollo de competencias para la vida. Y el proyecto transversal LEO busca crear espacios para la lectura y promover su interés, mejorando los hábitos lectores, en los diferentes estamentos de la comunidad educativa, es decir, desde cada una de las asignaturas.

contenidos vistos en clase, que les permitiera a los estudiantes cuestionarse individualmente sobre lo aprendido y comprobar si realmente adquirieron el conocimiento compartido en la sesión de clase.

Figura 6. Lectura de Ambientación “Continuidad de los parques”

CONTINUIDAD DE LOS PARQUE

De Julio Cortázar

Había empezado a leer la novela unos días antes. La abandonó por negocios urgentes, volvió a abrirla cuando regresaba en tren a la finca; se dejaba interesar lentamente por la trama, por el dibujo de los personajes. Esa tarde, después de escribir una carta a su apoderado y discutir con el mayordomo una cuestión de aparcerías volvió al libro en la tranquilidad del estudio que miraba hacia el parque de los robles. Arrellanado en su sillón favorito de espaldas a la puerta que lo hubiera molestado como una irritante posibilidad de intrusiones, dejó que su mano izquierda acariciara una y otra vez el terciopelo verde y se puso a leer los últimos capítulos. Su memoria retenía sin esfuerzo los nombres y las imágenes de los protagonistas; la ilusión novelesca lo ganó casi en seguida. Gozaba del placer casi perverso de irse desgajando línea a línea de lo que lo rodeaba, y sentir a la vez que su cabeza descansaba cómodamente en el terciopelo del alto respaldo, que los cigarrillos seguían al alcance de la mano, que más allá de los ventanales danzaba el aire del atardecer bajo los robles. Palabra a palabra, absorbido por la sórdida disyuntiva de los héroes, dejándose ir hacia las imágenes que se concertaban y adquirían color y movimiento, fue testigo del último encuentro en la cabaña del monte. Primero entraba la mujer, recelosa; ahora llegaba el amante, lastimada la cara por el chicotazo de una rama. Admirablemente restallaba ella la sangre con sus besos, pero él rechazaba las caricias, no había venido para repetir las ceremonias de una pasión secreta, protegida por un mundo de hojas secas y senderos furtivos. El puñal se entibiaba contra su pecho, y debajo latía la libertad agazapada. Un diálogo anhelante corría por las páginas como un arroyo de serpientes, y se sentía que todo estaba decidido desde siempre. Hasta esas caricias que enredaban el cuerpo del amante como queriendo retenerlo y disuadirlo, dibujaban abominablemente la figura de otro cuerpo que era necesario destruir. Nada había sido olvidado: coartadas, azares, posibles errores. A partir de esa hora cada instante tenía su empleo minuciosamente atribuido. El doble repaso despiadado se interrumpía apenas para que una mano acariciara una mejilla. Empezaba a anochecer.

Sin mirarse ya, atados rígidamente a la tarea que los esperaba, se separaron en la puerta de la cabaña. Ella debía seguir por la senda que iba al norte. Desde la senda opuesta él se volvió un instante para verla correr con el pelo suelto. Corrió a su vez, parapetándose en los árboles y los setos, hasta distinguir en la bruma malva del crepúsculo la alameda que llevaba a la casa. Los perros no debían ladrar, y no ladraron. El mayordomo no estaría a esa hora, y no estaba. Subió los tres peldaños del porche y entró. Desde la sangre galopando en sus oídos le llegaban las palabras de la mujer: primero una sala azul, después una galería, una escalera alfombrada. En lo alto, dos puertas. Nadie en la primera habitación, nadie en la segunda. La puerta del salón, y entonces el puñal en la mano, la luz de los ventanales, el alto respaldo de un sillón de terciopelo verde, la cabeza del hombre en el sillón leyendo una novela.

Fuente: Autoras del Proyecto

Retomando la lectura, desde el pensamiento pedagógico y didáctico, recordemos que este sucede cuando este se cuestiona sobre las diferentes maneras de

acercar el conocimiento matemático a los estudiantes buscando la manera más acertada de representar los contenidos para hacerlos comprensibles—, se observó que el nivel de la lectura implementada en la clase fue muy superior al nivel de los estudiantes ya que el estilo literario de esta transita entre lo real y lo fantástico; esta lectura rompe moldes clásicos mediante narraciones que escapan de la linealidad temporal. Las investigadoras consideran que los estudiantes no poseían las habilidades para realizar un análisis y razonamiento de la lectura presentada pues se quedaron solo con ideas sueltas de la misma.

Ahora, desde los dos componentes del pensamiento matemático escolar y pedagógico, lo que refleja la planeación del profesor, es que a él lo que le interesa es que sus estudiantes mecanicen un determinado procedimiento en la forma de resolver un tipo específico de ejercicios ya que Humberto no planteó situaciones problemas; solo propuso actividades de ejercitación olvidando que el trabajo con situaciones permiten desarrollar la habilidad de enfrentarse a una nueva situación.

Al respecto, Moreno y Waldegg (2002) afirma que la situación problema es el detonador de la actividad cognitiva y para que esto suceda debe tener las siguientes características: debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender; debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez debe ser accesible a él y debe permitirle utilizar conocimientos anteriores.

Ahora, si el profesor hubiera tomado en cuenta los objetivos que plantean los Estándares Básicos (MEN, 2006, p. 86) referente a este tema y lo que se busca con él: *“Identificar y utilizar la potenciación, la radicación y la logaritmicación, para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas; por lo tanto, se hace necesario que Humberto realice una revisión de lo que se pretende que el estudiante sea capaz de alcanzar”*.

4.1.2 Reflexión en la acción: Puesta en marcha de la clase planeada. La clase de Humberto y su grupo de noveno grado, se desarrolló en una hora con treinta y nueve minutos aproximadamente de acuerdo con la actividad matemática propuesta por el docente. Se dividió en cuatro episodios a seguir:

EPISODIO No. 1: LECTURA DE AMBIENTACIÓN

El profesor Humberto abrió la clase con la lectura de Julio Cortázar, durante su implementación la atención de los estudiantes estuvo dispersa, pues algunos de ellos están escribiendo, otros hablando, los estudiantes que tratan de escuchar denotan un esfuerzo debido al ruido dentro y fuera del salón.

Posterior a la lectura, el profesor realizó un análisis de la misma queriendo interactuar con los estudiantes mediante preguntas sin conseguir el resultado esperado de parte de ellos.

H⁵: ¿Quién sabe qué fue lo que pasó en el cuento?, ¿quién se imaginó lo que es?

E: Tenía dos amantes

H: Se quedó con la idea de los amantes; además de eso qué entendió; ¿qué pasó? –y ahí está lo interesante del cuento–

E: Profe, yo me imaginé que era como una novela de ficción

H: No, pero si tiene que ver con el pensamiento y eso es lo que él quiere, mostrar un mundo imaginario y un mundo real y luego los dos mundo los enlazas, entonces lo que estaba leyendo el señor en el libro le pasó a él: el amante salió del libro y lo mató, salió de la historia y lo asesinó, me entiende, la realidad de él... Y eso era lo que quería mostrar.

4.1.2.1 Consideraciones del primer episodio. El ambiente de aprendizaje al iniciar la lectura no fue el apropiado debido a la interferencia del ruido. Una vez perdido el hilo de la lectura ésta se hizo tediosa y los estudiantes no se involucraron en ella. Las respuestas dadas a las preguntas formuladas no

⁵Para este caso, y en adelante, en los fragmentos de las transcripciones las voces de los participantes son H: Humberto, E: estudiantes e I: investigadoras.

denotan comprensión por parte del auditorio sino ideas sueltas que algunos estudiantes lograron captar.

Desde el pensamiento matemático escolar, faltó relación directa con el tema a trabajar, no se puede inferir nada, dado que la lectura es narrativa y no tiene que ver con el contenido matemático de estudio de la clase, luego la lectura no sirve de apoyo para comenzar a enlazar los contenidos anteriores, con el nuevo tema, ni directamente con el tema de división de radicales. Según Gervasi (1995) citado por Guzmán (1995, 23) dice que una buena didáctica debe reformular los conocimientos previos de los estudiantes hacia los de la disciplina: que los estudiantes se aproximen a los conceptos y métodos de la disciplina. Los esquemas o ideas previas a la intervención didáctica, deben transferirse hacia el saber enseñado. Asimismo, el autor menciona que una lectura puede utilizar el lenguaje gráfico siendo este más atractivo para los estudiantes y tal vez generaría mayor interés hacia el tema por ver.

Desde el pensamiento pedagógico y didáctico, el enfoque que pudo haber utilizado sería llevar material del texto para que los estudiantes de manera individual siguieran la lectura aunque se hubieran presentado interferencias. Otra opción hubiese sido proyectar la lectura en el tablero y que ésta fuese realizada por los estudiantes, alternando las intervenciones, logrando una mayor atención del grupo y dando la oportunidad de generar dinámica durante la actividad. A nivel de comprensión a través del recurso de las preguntas, los estudiantes hubieran podido intervenir ya que tenían la posibilidad de volver a ojear la lectura.

Finalmente la lectura no genera interés ni la necesidad de apropiación hacia los nuevos contenidos de la clase, es decir no fue un recurso de motivación.

EPISODIO No. 2: EXPLICACIÓN DEL TEMA

Humberto inició la explicación del tema escribiendo el título: “División de radicales”. También escribió en el tablero las fórmulas que utilizaría haciendo énfasis en las propiedades vistas de potenciación y enuncia el concepto de división de radicales con igual índice. Luego dio la explicación por medio de ejemplos y preguntas.

Aquí se observó que el profesor Humberto utilizó también como recurso las preguntas con las cuales hiló el algoritmo a desarrollar. A continuación un fragmento del vídeo de la clase de Humberto sin intervención:

H: Bien, entonces aquí se va a sintetizar todo lo que hemos visto, todas las propiedades que hemos trabajado; vamos a hacerlo a un nivel sencillo. Recordemos algunos elementos conceptuales [refiriéndose a los elementos de la planeación].

Al tiempo que Humberto daba las indicaciones en clase, escribía en términos matemáticos lo que hablaba:

H: Repaso. Tenemos: raíz de “a” sobre raíz de “b”, se puede transformar en una sola raíz de “a” sobre “b”, ¿listo?, ¿qué es lo que vamos a trabajar hoy?

$$\longrightarrow \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \right)$$

E: División de radicales

H: Recordemos algunas propiedades de la potenciación que podamos aplicar: equis a la eme por equis a la ene es igual a equis a la eme más ene, la otra equis a la eme dividida en equis a la ene, restamos equis, eme menos ene; ¿la recuerdan o no la recuerdan?

$$\longrightarrow x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$\longrightarrow \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

E: ¡Sí! ¡No!

H: Veamos el siguiente ejemplo, resolvamos el siguiente ejercicio utilizando las propiedades vistas en clase:

$$\frac{12\sqrt[3]{81x^7}}{3\sqrt[3]{3x^3}}$$

A continuación Humberto desarrolló el ejercicio a través de preguntas a sus estudiantes sobre las propiedades planteadas en el tablero. Al terminar la explicación dio un tiempo prudente a los estudiantes para que tomaran sus apuntes de la clase. Seguidamente expuso otros ejemplos para tratar de generar mayor claridad.

4.1.2.2 Consideraciones del segundo episodio. Desde el pensamiento matemático, el objetivo principal del docente era que al finalizar la clase, los estudiantes estuvieran en capacidad de resolver divisiones de radicales de igual índice, aplicando correctamente las propiedades de la potenciación y la radicación, en los ejercicios de práctica y comprobación. El repaso que hizo el docente Humberto fue breve; mencionó dos propiedades de la potenciación. Sin embargo, a los estudiantes les solicitó recordar todas las propiedades de la potenciación.

El lenguaje que el profesor Humberto empleó no fue el más adecuado ya que al realizar la traducción escrita a una expresión algebraica no correspondía a lo que él estaba enunciando; luego es conveniente que identifique los términos de la radicación para que los estudiantes puedan comprender el lenguaje utilizado en este tema, y sus propiedades para desarrollar y sustentar los ejercicios propuestos por el profesor.

Desde el pensamiento pedagógico y didáctico, no hubo explicación del tema, simplemente enunció el algoritmo escrito que quiso utilizar. Humberto realizó la explicación del ejercicio y aunque preguntaba constantemente a sus estudiantes, se anticipaba a contestar y continuaba escribiendo. Posteriormente el docente dio tiempo para que sus estudiantes registraran los apuntes en sus cuadernos.

El título “división de radicales” no corresponde sino a una de las tres fórmulas que escribió y las otras fórmulas corresponden solo a dos de las cinco propiedades de la potenciación. Esto se traduce en falta claridad y organización en los apuntes de

los estudiantes porque en este contexto los estudiantes no poseen textos escolares para contrastar lo que van trabajando en clase; de este modo, los apuntes se vuelven en el único apoyo de su trabajo académico.

En el pensamiento orquestal el profesor Humberto tuvo dificultad para conducir la clase porque iba muy rápido en sus explicaciones. Además, introdujo el tema de manera tan resumida que perdió en parte el objetivo y el tema de la clase. Los estudiantes al parecer terminan con parte de la información pero no hubo evidencia de ello más allá de repetir el algoritmo que el profesor presentó al inicio. La clase no fluyó de lo básico hacia una generalización, como consecuencia, no llegó a conclusiones. Por lo tanto, los estudiantes se limitaron a repetir el proceso para la mecanización de estos ejercicios.

EPISODIO No. 3: PARTICIPACIÓN POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES (EJERCICIOS DE PRÁCTICA)

En este episodio, el profesor Humberto propuso ejercicios e invitó a los estudiantes a participar pasando al tablero a desarrollar los ejercicios. Pasaron 5 estudiantes y resolvieron uno a uno los ejercicios los cuales iban aumentando su grado de complejidad, estos se encontraban en la planeación (ver Figura 5). En el momento en que los estudiantes se encontraron al frente del tablero, Humberto usó como recurso las preguntas para ayudarlos en el desarrollo del algoritmo; así las preguntas fueron el hilo conductor para mecanizar el proceso de desarrollo de los ejercicios.

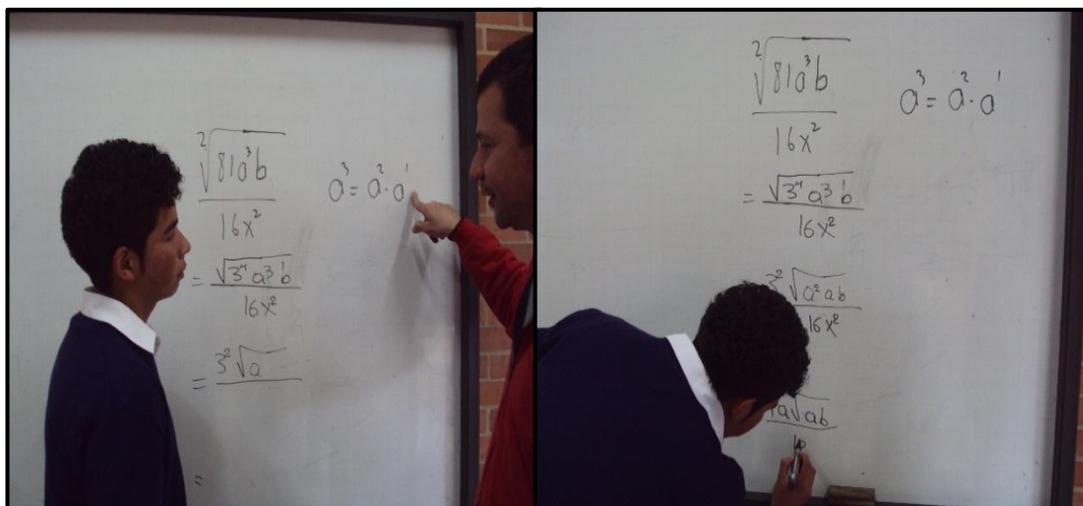
En el siguiente fragmento de la transcripción del video podemos ver la manera en que lo hizo:

- H: ¿Quién quedó en la raíz?
E: El "b"
H: ¿Quién más?
E: ¿Y una "a"?

H: Mire Fabián, esto, “a” a la tres es lo mismo que “a” a la dos por “a” a la uno; esta “a” fue la que salió acá, ¿quién quedó adentro?, raíz cuadrada de “a” y ¿quién más quedó?
E: “b”

Como se puede deducir de la Figura 7, un estudiante desarrollaba un paso del ejercicio, Humberto se acercó al tablero y le explicó personalmente tratando de que el estudiante entendiera, ya que a través de las preguntas que inicialmente le hizo para orientarlo no sirvieron de apoyo para solucionar el ejercicio.

Figura 7. El docente guía al estudiante



Fuente: Autoras del Proyecto

4.1.2.3 Consideraciones del tercer episodio. Desde el pensamiento matemático escolar, al parecer los estudiantes repitieron el proceso dado por profesor en la clase; hacían repeticiones de pasos y comparaban continuamente con el realizado por el profesor; esto implica que el nivel alcanzado por

el estudiante es de reconocimiento de algoritmos y solución mecánica del mismo.

El profesor Humberto usó el recurso de la pregunta pero no dio tiempo suficiente para que el estudiante reflexionara y diera una respuesta; además, sus preguntas eran muy puntuales y él terminaba –en la mayoría de los casos– dando la solución. Fueron pocos los estudiantes que respondieron inmediatamente a estas preguntas mientras que otros esperaron a que el profesor respondiera, respuesta en la cual confiaban ciegamente pues ninguno cuestionaba.

Gervasi (1995) enfatiza que la tarea del docente consiste en buscar una situación apropiada, proponer al estudiante una situación de aprendizaje donde produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta. Así, aunque en diferentes ejemplos el profesor Humberto generó la situación apropiada que plantea Gervasi, esta se vio truncada por ser –quizás– impaciente y apresurarse a dar la respuesta. Esto evidenció en la mayoría de los casos, cuando los estudiantes pasaron al tablero y él, queriendo favorecer el desarrollo de la clase y el aprendizaje de los estudiantes, realizó una enseñanza dirigida. A continuación se presenta un fragmento de la transcripción del video en donde se evidencia que el estudiante entendió el desarrollo del ejercicio:

H: Fabian, entendió el proceso del ejercicio

E: Sí, profesor

H: Ok, termine entonces el ejercicio

E: Profe, queda tres a la dos por "a" sobre dieciséis "x" todo por raíz cuadrada de "ab"

H: Muy bien Fabián, creo que entendió el ejercicio, hagamos otro.

Desde el pensamiento pedagógico y didáctico, Humberto generó un reto al solicitar que sus estudiantes participaran activamente en la resolución del ejercicio. Sin embargo, les quitó protagonismo cuando se anticipó a dar las respuestas que debían surgir de la reflexión de los mismos estudiantes. Según Lappan (citado en Menezes y Ponte, 2006), en cualquier clase de matemáticas se

deben incorporar “espacios” donde el estudiante analice y comunique sus propias ideas; es decir, es necesario mejorar las prácticas, brindando el tiempo necesario para que los alumnos exploren entre ellos mismos, argumenten, construyan sus propias conjeturas y las expongan en grupo. Un aspecto positivo que se percibió fue el compromiso del profesor Humberto con la formación escolar de los estudiantes pues revisaba los apuntes de cada estudiante y les pregunta si comprendieron lo visto cómo se puede apreciar en las Figuras 8 y 9.

Figura 8. El Profesor Aradando Dudas



Fuente: Autoras del proyecto

Figura 9. El Profesor en Acompañamiento



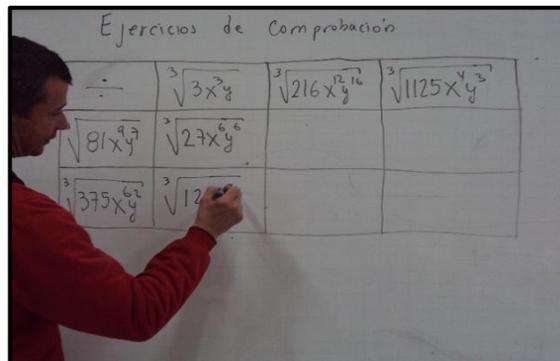
Fuente: Autoras del proyecto

Desde el pensamiento orquestal, se podría decir que Humberto logró fusionar tanto el pensamiento matemático como el pensamiento didáctico durante el transcurso de la dinámica participativa de los estudiantes con el acompañamiento permanente que ofreció (ver figuras 8 y 9). También se observó la participación de los estudiantes en el tablero (ver figura 7) y el interés de los estudiantes al acercarse a preguntarle al profesor si no entendían algún paso del ejercicio.

EPISODIO No. 4: TRABAJO EN GRUPO (EJERCICIOS DE COMPROBACIÓN)

Durante este episodio Humberto aplicó un planteamiento que no había incluido en la planeación. La intención al parecer fue reforzar el proceso de aprendizaje a través de un cuadro de doble entrada que consistía en tomar el primer elemento de la fila como numerador y el primer elemento de la primera columna como denominador, esto genera una expresión matemática de división de radicales con igual índice, y luego aplicar las respectivas propiedades. Para el siguiente ejercicio se dejaba fija la primera fila como numerador y se tomaba la segunda columna como denominador, generando un nuevo ejercicio de división de radicales y así sucesivamente. El profesor hizo la tabla que se puede apreciar en la Figura 10 en el tablero mientras susurraba para sí mismo lo que escribía.

Figura 10. Tabla de doble Entrada



Fuente: Autoras del Proyecto

H: Entonces, ¿qué tienen que hacer ustedes?

E: Encontrar la raíz.

H: Van a hacer la división; así, este lo dividen entre este (*señalando las columnas como numerador y las filas como denominador*)

E: Profe no, entiendo. ¿Cómo resolver la tabla?;

H: En una hoja; van a resolver esta tabla. Voy a escribirles cómo deberían escribir la expresión, tenemos, raíz cúbica de ochenta y uno equis a la nueve, ye a la siete sobre raíz cúbica de tres equis a la tres por ye.

$$\rightarrow \left(\frac{\sqrt[3]{81x^9y^7}}{\sqrt[3]{3x^3y}} \right)$$

Humberto solicitó formar grupos para trabajar estos ejercicios de comprobación del tema expuesto.

4.1.2.4 Consideraciones del cuarto episodio. Desde el pensamiento matemático, el profesor aquí planteó una nueva estrategia para los ejercicios de comprobación: la tabla de doble entrada, actividad desconocida por los estudiantes por lo cual el profesor Humberto se vio en la necesidad de resolver un ejercicio a manera de ejemplo para aclarar las dudas de los grupos. Sin embargo, a varios estudiantes aún les costaba entender el funcionamiento de la tabla pues el profesor no explicó el papel que jugaban las filas y las columnas; es decir el profesor no especificó cuál era el numerador ni el denominador lo que era conveniente especificar directamente sobre la tabla.

Ahora, si observan los ejercicios de la tabla en la Figura 10, se puede notar que estos aumentan el nivel de complejidad con lo cual probablemente Humberto buscaba generar en los estudiantes destreza, concentración y mayor atención para desarrollar este tipo de ejercicios. A la vez se realizó la comprobación del aprendizaje mediante un seguimiento casi personalizado.

Desde el pensamiento pedagógico y didáctico se observó que el profesor Humberto realizó un acompañamiento como guía permanentemente a los grupos de estudiantes (ver Figura 11) revisando continuamente su trabajo esto para aclarar dudas y volver a explicar donde encontraba dificultades.

Figura 11. Humberto en Acompañamiento a un Grupo



Fuente: Autoras del Proyecto

El recurso de la tabla de doble entrada, como se dijo, no se encontraba en la planeación aunque fue una estrategia didáctica útil que les permitió a los estudiantes aplicar las propiedades vistas en clase. Así, al ejecutar esta actividad el docente Humberto cambió la estructura de la planeación, omitió los ejercicios propuestos como comprobación para centrarse en el desarrollo de la tabla lo que se prolongó hasta el punto que no pudo ser terminado el ejercicio por la totalidad de los estudiantes. No obstante, el docente recogió las hojas de trabajo en donde los estudiantes realizaron la actividad grupal y evaluó, de esta manera, revisó si la actividad que incluyó alcanzó el objetivo de la clase.

Desde el pensamiento orquestal el recurso de la tabla funcionó; en parte el hecho de generar un cambio en el trabajo individual hacia el trabajo grupal, sin perder la actividad matemática. Esta estrategia del trabajo en grupo favoreció el proceso de enseñanza y aprendizaje ya que generó un apoyo entre los compañeros para aclarar dudas de la temática y a la vez le facilitó al profesor el ejercicio de retroalimentación pues, por lo general, en el salón de clase se encuentran

estudiantes que no se atreven a realizar preguntas cuando el trabajo es individual, en cambio en grupo se dan cuenta que nos son los únicos que tienen dudas y se atreven a preguntar en colectivo.

4.1.3 Reflexiones sobre la acción: por parte del docente. En esta última fase de la etapa preliminar al docente se le realizó una entrevista, después de la clase y posteriormente se le solicitó realizar por escrito una reflexión (véase la Figura 12).

Figura 12. Reflexión presentada por Humberto sobre la experiencia realizada

AUTOEVALUACIÓN
<p>La clase se dividió en cinco fases:</p> <ol style="list-style-type: none">1. Organización de la clase: se basa en la autorregulación, mientras voy llamando lista los estudiantes van organizándose en los puestos.2. Ambientación: En esta fase desarrollamos nuestro proyecto de la "MATEMÁTICA RECREATIVA Y LA LECTURA EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO", donde se leyó el cuento de Julio Cortázar "La continuidad de los parques", con el cual se quería mostrar otra forma de funcionamiento de la mente, diferente al pensamiento matemático y no por eso menos válido. Hacer el contraste ente el pensamiento lineal (matemático) y el pensamiento mágico literario.3. Fase de instrucción: momento en el cual se plantean los elementos teóricos para la división de radicales.4. Fase de asimilación: con la participación de los estudiantes se buscaba que ellos mismos fueran visualizando la aplicación y el desarrollo del algoritmo para resolver divisiones de radicales.5. Fase de generalización: desarrollo de la matriz de doble entrada, donde los estudiantes por cuenta propia deben aplicar los elementos teóricos y el algoritmo para resolver las divisiones de radicales. <p>Considero que fue una clase sencilla, que tuvo un desarrollo secuencial y sin muchos cortes, puedo decir que fluyó con naturalidad, se observó participación de los estudiantes. La fase de generalización fue bastante suelta, pues yo me dediqué en algunos casos a asesorar (prestar funciones) a algunos estudiantes que no tenían la capacidad de ver e interpretar lo que estaba escrito, es más, se les dificultaba realizar operaciones sencillas de suma y resta, por eso les contaba con los dedos para que ellos también utilicen su propio cuerpo como recurso de conteo.</p> <p>Fallas: creo que muchas, una falla es que acompañé demasiado a los estudiantes en el proceso de generalización. Otra, es que los dejé demasiado libres para que se desplacen dentro del salón y por eso pareciera que hay mucho desorden. Pero creo que este es mi estilo de dar clases, me involucro mucho con los estudiantes, no soy capaz de mantenerme distante de ellos, pues si no me aburro y me da sueño.</p>

Fuente: Autoras del Proyecto

4.1.3.1 Consideraciones sobre la reflexión del docente. Después de realizada la lectura de la Autoevaluación del profesor Humberto (observada en la Figura 12) se pudo percibir que el docente encontró que en su práctica docente habían tanto aspectos positivos como negativos que valían la pena analizar; daba especial importancia a la formación del estudiante por la situación de marginación en donde se ubica el colegio. El pensamiento matemático en el contexto se dio a un nivel básico lo que se evidencia en la afirmación sobre la dificultad de algunos estudiantes para realizar operaciones elementales como son las sumas y restas, en donde el profesor les cuenta con los dedos para enseñarles a utilizar su propio cuerpo como un recurso.

Además el profesor nombra en su autoevaluación cinco fases donde parece ser que desde su pedagogía ésta es su estructura de planeación, siendo la quinta la de generalización en la cual buscó, con el desarrollo de la tabla de doble entrada, lograr que los estudiantes aplicaran por sí mismos los elementos teóricos y el algoritmo para resolver las divisiones de radicales. Sin embargo, en nuestro concepto esta fase corresponde a una fase de ejercitación.

Otro aspecto a mencionar es que dentro de las fases de la clase, se omitió el cierre de la actividad matemática, dejando en el aire lo visto en la sesión, esto se puede evidenciar en la planeación.

Desde el pensamiento matemático, para el profesor Humberto el no realizar un cierre conlleva a la ausencia de conclusiones del trabajo realizado por los estudiantes, además a la falta de un hilo conductor hacia la siguiente clase, a la carencia de resumen de los conceptos vistos que permiten a los estudiantes expresar por sí mismos el aprendizaje adquirido.

Respecto a esto, en la entrevista formal efectuada después de grabada la primera clase, el profesor Humberto contestó –cuando se le indagó si realizó un enlace de

la clase vista con la siguiente –: “sí, lo vinculé porque para poder ver racionalización se debe tener los preconceptos de división de radicales; porque la racionalización lo que busca es eliminar el radical del denominador”.

Desde el pensamiento pedagógico-didáctico el docente en la reflexión escrita no expresó si con los recursos utilizados se lograron los objetivos planteados. Su reflexión fue más bien una descripción del desarrollo de la clase y no dio especial relevancia al éxito o fracaso de la utilización de los mismos sino a lo que se buscaba con cada recurso. Finalmente se realizó el análisis de la reflexión del profesor Humberto, apoyado por la entrevista; a continuación se muestra un fragmento de la entrevista donde se evidencian los componentes del pensamiento:

I: ¿Pudiste favorecer la actividad matemática por parte de los estudiantes?

H: Pude observar que los muchachos participaron, que quisieron pasar al realizar los ejercicios en el tablero, desarrollaron las actividades propuestas y siguieron un proceso. Que hayan asumido e integrado todo el procedimiento, está por ver, pero por lo menos sí fue una actividad que los enriqueció como personas.

Desde el pensamiento matemático escolar se percibe en la entrevista, que los estudiantes participaron del proceso, pasaron al tablero e intentaron desarrollar los ejercicios propuestos por el docente, siguiendo los procedimientos enseñados, y desde sus puestos los compañeros se involucraron en el proceso brindando apoyo al estudiante que estaba en el tablero. Empero, tal como se puede deducir en la última intervención, el profesor fue consciente que hizo falta seguir reforzando el tema trabajado en clase para que se interiorizara su aprendizaje.

En lo referente al alcance de los objetivos matemáticos planteados durante la planeación, el docente expresó dudas y reconoció que hay falencias conceptuales en los estudiantes lo cual impidió el avance hacia la construcción sólida de un pensamiento matemático; por ejemplo, confundían el concepto de simplificación con el de descomposición de factores.

REFLEXIONES DE PROFESORES SOBRE LOS RECURSOS QUE SELECCIONAN, DISEÑAN O USAN EN EL AULA
PARA PROMOVER LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA DE SUS ESTUDIANTES

I: ¿Consideras que alcanzaste los objetivos relacionados con los contenidos matemáticos que se propusieron en la planeación?

H: En la clase se pudo percibir que los muchachos confunden la descomposición de factores con simplificación, los estudiantes no sabían dónde utilizar una cosa u otra, le falta seguridad de lo que están realizando y me mostraban si está correcto o no; puedo ver que todavía no han interiorizado estos conceptos, que no manejan este saber. Ellos se guían por un ejercicio que se resuelva y tratan de resolverlo de la misma manera, pero si se le presenta algo diferente, ellos paran el proceso.

Desde el pensamiento pedagógico y didáctico, para el profesor Humberto lo importante fue la parte social, la armonía de la clase y la formación personal de los estudiantes. El profesor Humberto mostró preocupación porque los estudiantes participen activamente de las actividades propuestas; evidenció claridad sobre el hecho de tener estudiantes particulares dentro del aula de clase, aquellos que no comprendieron el lenguaje cotidiano que él utilizó para el desarrollo de sus clases. Además, consideró positivo el hecho de que los estudiantes permitieron dar la clase sin problemas disciplinarios.

Otro recurso que el profesor Humberto utilizó durante la clase fueron las preguntas concretas, al respecto el docente comentó en la entrevista:

I: ¿Qué estrategia utilizó para que los estudiantes estuvieran atentos en la clase?

H: Realizar constantemente preguntas, estas me sirven para evidenciar las dificultades de los estudiantes y además para irlos guiando en el proceso del desarrollo de los ejercicios. A veces les pregunto a los estudiantes que están distraídos para ver si logro conectarlos con el tema. Sin embargo, algunos muestran apatía ya que no les gusta que les pregunten en público porque saben que no manejan las operaciones básicas.

Para el profesor Humberto él realizó preguntas concretas para procurar que los estudiantes estuvieran atentos y participativos de la clase. Además, las preguntas le ayudaron a que el estudiante enlazara los pasos a seguir del algoritmo, pero el docente a su vez percibió que el estudiante cuando trabajaba individualmente se bloqueaba a la hora de desarrollar el ejercicio. Es decir, reconoció que les faltan

bases conceptuales y además no poseen un método de estudio adecuado que les permitiera realizar razonamientos lógicos por sí mismo.

El docente expresó el porqué realizó en la ejecución, un cambio de la planeación.

Al respecto comenta:

I: ¿Cree que siguió la planeación?

H: Sí, seguí la planeación, aunque al final hice un cambio.

I: ¿Qué cambio realizó y por qué?

H: Yo había propuesto hacer unos ejercicios muy planos, tres ejercicios en la fase de comprobación, pero el día anterior pensé que esto está muy simple, entonces les hice la matriz de doble entrada, pues, como para variar un poquito y en algunos textos dicen que esto es un recurso didáctico.

El profesor Humberto, halló respaldo y confianza en los textos al encontrar la tabla de doble entrada como recurso didáctico; pero, en la entrevista –en la revisión de lo que pasó– no se percató de las dificultades surgidas en la utilización de este recurso. Creemos además que el cambio fue por cuestión de tiempo ya que la nueva actividad duró más de una hora manteniendo el interés y ocupación del grupo en el trabajo teniendo en cuenta que aunque, según el profesor Humberto, la tabla de doble entrada era un recurso ya conocido por sus estudiantes, hubo estudiantes que no pudieron recordar el funcionamiento y requirieron de una explicación extra.

Otro aspecto importante a destacar en lo referente al pensamiento pedagógico es que durante la actividad en grupo el profesor se involucró directamente con los estudiantes, haciendo un acompañamiento prácticamente personalizado.

Para Navarro y Verdisco (2000) el uso del apoyo pedagógico con la supervisión tiene efectos positivos para el desarrollo de la clase. Durante la observación de la clase se notó que Humberto brindó el apoyo sin quitarle autonomía al estudiante y, al contrario, después de la explicación dada los retó a que por sí solos desarrollaran otro ejercicio. También se presentaron varios aspectos a mejorar que se evidencia en la entrevista:

I: ¿Y si tuviera que volver a planear de nuevo esta clase qué cambiaría?

H: No, creo no le cambiaría nada, yo estuve investigando y buscando y no hay nada nuevo, eso es lo único que hay.

I: ¿La dejaría tal cuál la desarrolló?

H: Sí, tal vez cambiaría algunos ejercicios, los pondría más complicados, pero la estructura como tal no la cambiaría.

Queda manifiesto que el profesor sentía la necesidad de encontrar material didáctico nuevo y apropiado para la temática y que investigó para apoyarse en recursos diferentes sin haber encontrado nada nuevo; ante esto es posible que el docente genere el material, pero siempre amerita tiempo, capacitación, y recursos que apoyen la parte logística del material.

4.2 CONSTRUCCIÓN DE LAS HERRAMIENTAS PARA GUIAR LA REFLEXIÓN DE HUMBERTO

En este apartado aparecen los resultados del análisis de la etapa preliminar “sin intervención” del profesor Humberto. Las herramientas que servirán para apoyar la fase de intervención personal con el docente, dos a saber: las Rutas Cognitivas y la Guía de Momentos Seleccionados de los vídeos de clase.

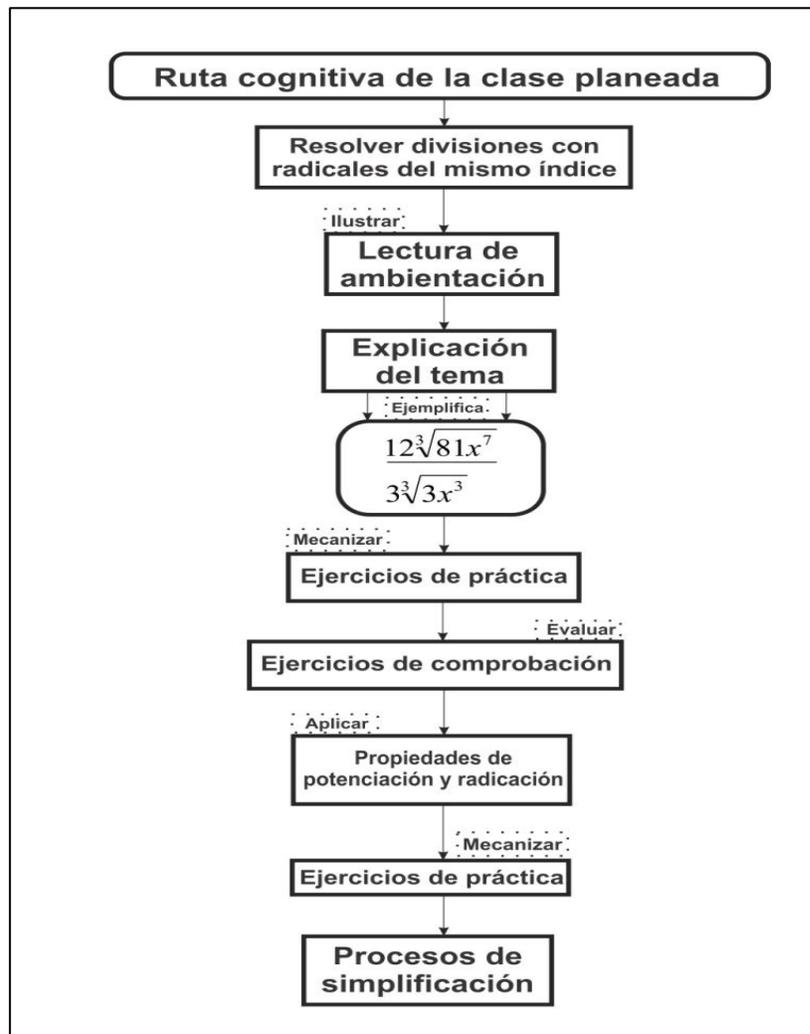
4.2.1 Rutas Cognitivas. Para construir la primera ruta cognitiva se utilizó la planeación propuesta para la clase y de ella se extrajo la estructura de la actividad matemática que inicialmente el profesor deseaba realizar. Para realizar la segunda ruta cognitiva se tuvo en cuenta lo que sucedió en el salón y los recursos que allí se desplegaron en el desarrollo de la clase. De esta manera se obtuvieron dos diagramas a saber: *la ruta cognitiva de la clase planeada* y *de la ruta cognitiva de la clase desarrollada* ((Figuras 13 y 14).

El propósito de las rutas es analizar, desde lo que ellas exponen, las variaciones entre cada clase enfocándose en la actividad matemática. Al comparar las dos

rutas se pueden observar diferencias en (i) los recursos utilizados, (ii) esquema y (iii) los cambios de la actividad matemática.

En la Figura 13 se observa que el esquema de la planeación inicia con la ambientación por medio de la lectura para desembocar en la explicación del tema. Sin embargo, en la clase desarrollada, la lectura aparece como un elemento aislado que no tiene una directa conexión con la actividad matemática.

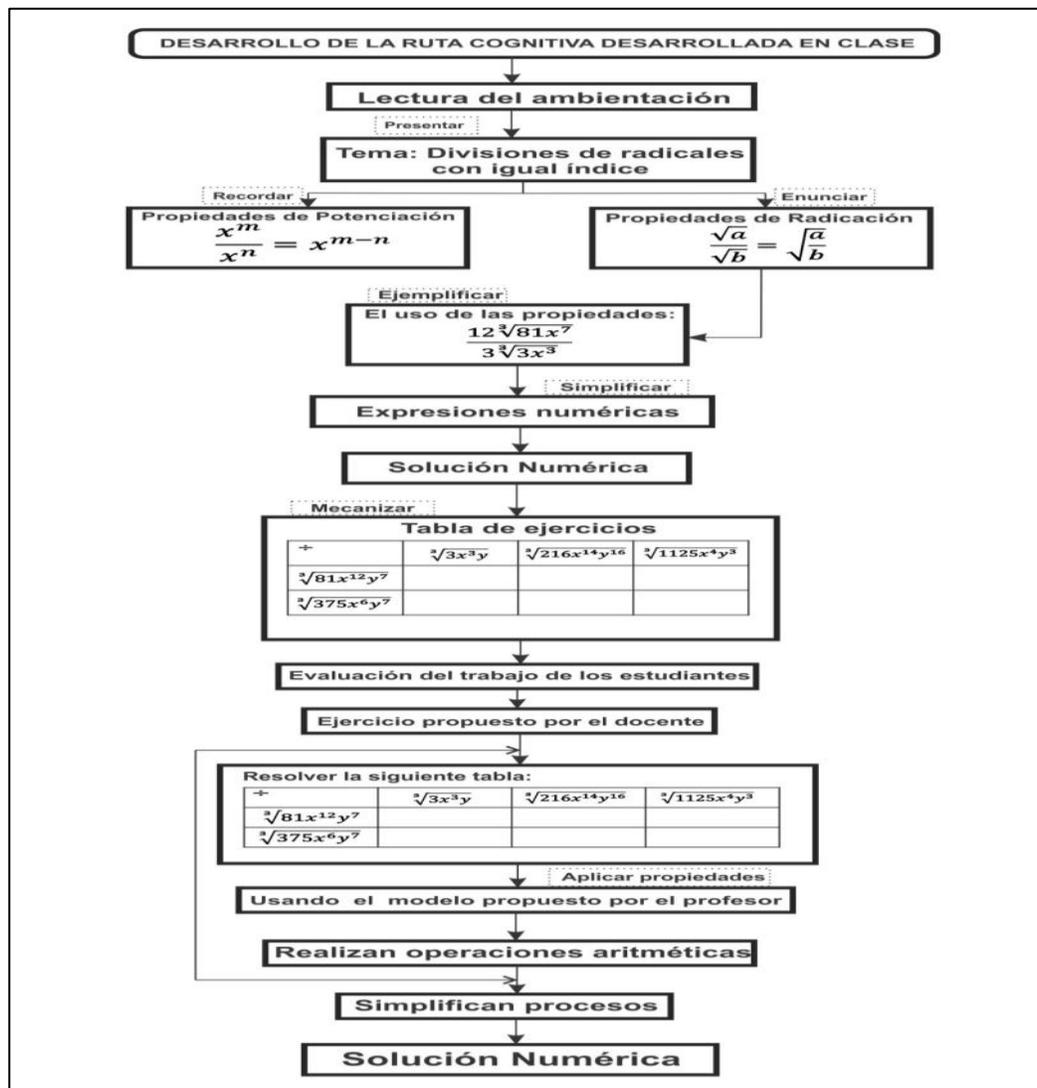
Figura 13. Ruta Cognitiva de la planeación



Fuente: Autoras del Proyecto

En cuanto a los recursos que planeó utilizar (Figura 13), el profesor Humberto presentó la lectura, los ejemplos y los ejercicios de práctica y comprobación, en cambio en la ruta de la actividad desarrollada en clase (ver Figura 14), aparecieron nuevos recursos como los algoritmos, las preguntas puntuales y el cuadro de doble entrada.

Figura 14. Ruta cognitiva de la clase desarrollada por el profesor Humberto



Fuente: Autoras del Proyecto

Finalmente, la diferencia entre las rutas fue la actividad de la tabla de doble entrada, que corresponde en sí a una manera de presentar los ejercicios de comprobación. Al introducir este recurso, se hizo necesaria una nueva explicación antes de poder seguir con el desarrollo del ejercicio propuesto.

Con lo anterior, se puede ver que las rutas sirven como herramientas de investigación y análisis de reflexión que facilita ver en su estructura los momentos exactos donde una acción o reacción del docente en el transcurso de la clase desvía los objetivos de aprendizaje propuestos.

4.2.2 Estudio comparativo entre lo planeado y lo logrado. A continuación se presentarán los resultados del estudio comparativo (Figura 15) realizado entre las rutas cuyo propósito era que Humberto observará con claridad las diferencias marcadas entre lo que planeó y lo que realizó en la clase⁶.

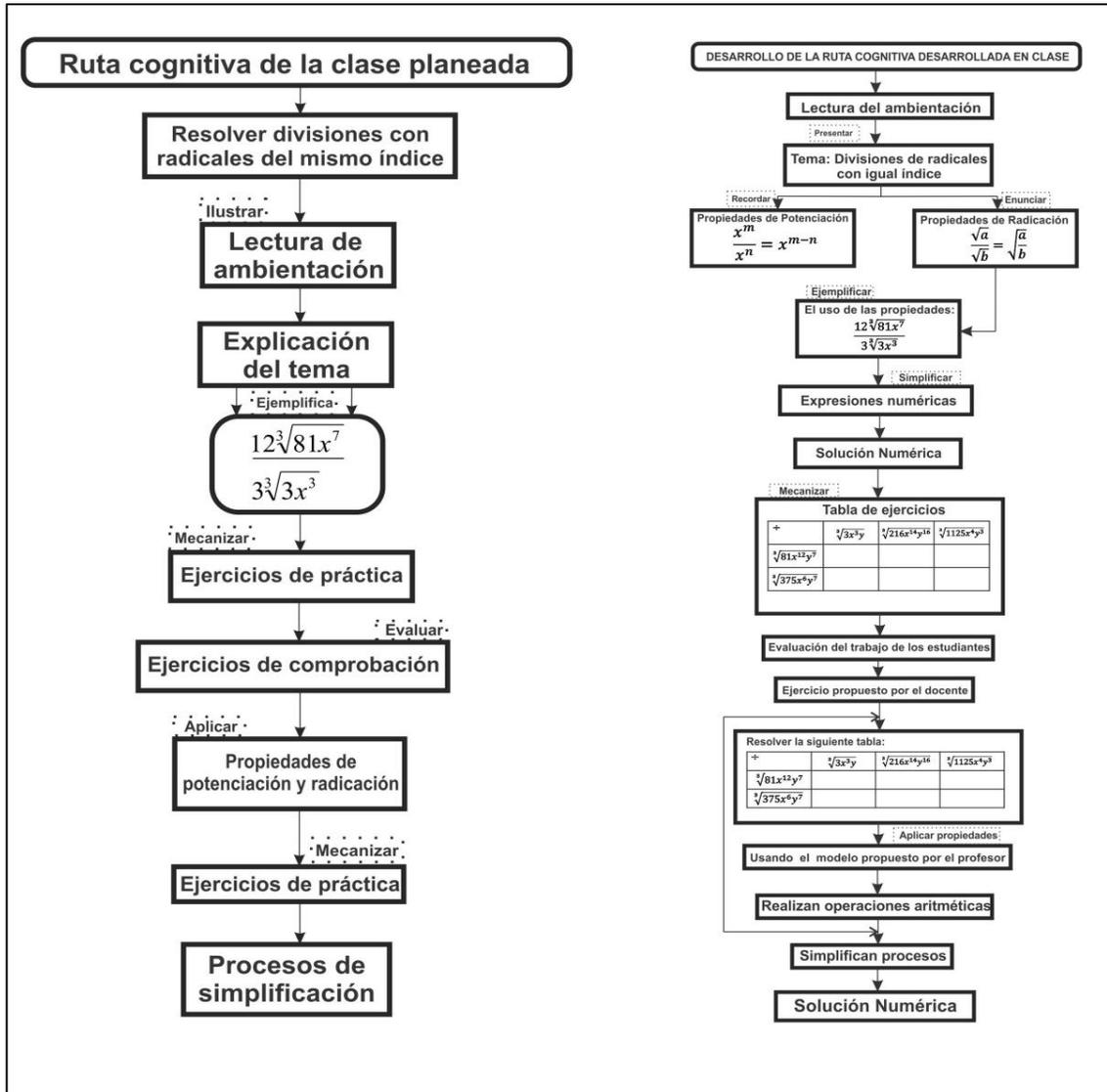
Las diferencias que se le darían a conocer al profesor Humberto serían las que se mencionaron en el apartado 4.2.1.

4.2.3 Análisis de la clase mediante la Guía de Momentos Seleccionados. En una segunda instancia, y para preparar la retroalimentación personal para la reflexión, se generó una Guía de Observación de Momentos enfocados hacia los recursos didácticos utilizados por el profesor.

Así, con el fin de ilustrar aspectos positivos o por mejorar, en esta guía se seleccionaron apartes de la planeación entregada por Humberto, fragmentos previamente escogidos del videoclip tomado durante la clase, afirmaciones de la reflexión entregada por el docente y de la entrevista.

⁶El estudio comparativo se le presentó en diapositivas para facilitar el hallazgo de las diferencias entre una ruta y otra.

Figura 15. Comparativo de rutas cognitivas



Fuente: Autoras del Proyecto

Dichos aspectos se denominaron *Momento Seleccionados* sobre los cuales se generaron preguntas de reflexión. Para el caso de Humberto se seleccionaron seis momentos que componen la Guía de Momentos Seleccionados (ver Tabla 1)⁷

⁷En la columna de la izquierda aparecen las líneas de transcripción y la ubicación del tiempo en el video porque esa fue la forma como que se utilizó para presentarle la información al profesor.

REFLEXIONES DE PROFESORES SOBRE LOS RECURSOS QUE SELECCIONAN, DISEÑAN O USAN EN EL AULA PARA PROMOVER LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA DE SUS ESTUDIANTES

Tabla 1. Guía de Momentos Seleccionados de la clase de Humberto

Momento Seleccionado	Preguntas de Reflexión	Tema de Reflexión
P: "... ya saben que de vez en cuando hacemos una lectura, hoy les traje una lectura de la continuidad de los parques..." (Minuto 3:38)	<ol style="list-style-type: none"> ¿Por qué selecciona la lectura como un recurso para la clase? Cuando seleccionó esa lectura, ¿qué relación encontró con el tema a trabajar? ¿Cree que esa lectura cumplió con los objetivos que tenía previstos? 	Lectura como recurso
P: Ayer pensé en este ejercicio para ustedes, es una tablita, es una tablita pensada; E: No, no; P: Eso ya lo habíamos copiado; E: No; P: Entonces son seis ejercicios a partir de esta tabla; E: Igualitos a estos, Profe?... (Minuto 52:38)	<ol style="list-style-type: none"> ¿Qué busca con el nuevo planteamiento de estos ejercicios? Visualizó que la tabla le es útil en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. 	Elección de un nuevo recurso
E: ¿Profe, por qué $1/5$?; P: Mire, numerador uno, entonces me queda un quinto afuera; aplicando esta propiedad que dice: ¿qué hago con los exponentes? (Minuto 20:24) P: ¿Qué le falta?; E: El tres; P: Le falta el índice, éste; E: Acá; P: no, ¿dónde va? (Minuto 26:24 –26:57)	<ol style="list-style-type: none"> ¿Cree que la explicación fue clara para el estudiante? ¿Sí le aclaro la duda de $1/5$? ¿Fue suficiente haberle señalado dónde va el índice? 	Uso del lenguaje matemático utilizado
Momentos donde los estudiantes repiten mecánicamente el proceso que realiza el docente	<ol style="list-style-type: none"> ¿Qué observa en las fotos presentadas con relación a los algoritmos que usted usa? ¿Usted espera que los alumnos apliquen el mismo algoritmo que usted usa para resolver ejercicios de ese tipo? si, no ¿por qué? ¿Usted usa el algoritmo como recurso para la que los estudiantes comprendan mejor un tema? 	Algoritmo como recurso
P: Quién quedó en la raíz?; E: el b; P: ¿quién más?; E: ¿y una a?; P: Mire Fabián, esto, a a la tres es lo mismo que a a la dos por a a la uno; está a fue la que salió acá, ¿quién quedó adentro? raíz cuadrada de a y ¿quién más quedó?; E: b (Minuto 50:24)	<ol style="list-style-type: none"> ¿Cómo suele corregir los procesos que realizan los estudiantes? ¿Por qué no realiza una comparación entre lo que hizo el estudiante y lo que usted le corrigió? ¿Qué peso le da usted a las preguntas que realiza en clase? 	Preguntas como recurso
P: Por favor entreguen las hojitas, por favor salgan; no se les olvide marcar las hojitas; acomodamos las sillas (Minuto 1:36:39)	<ol style="list-style-type: none"> ¿Cómo cree usted que llegó a la generalización o formalización de los contenidos vistos en la clase? ¿Cree que es importante hacer un cierre de las actividades en clase? ¿Qué actividad matemática cree que realizaron sus estudiantes en la clase? ¿Cómo evidencia que los estudiantes entendieron el tema? ¿Alcanzó el objetivo propuesto de la clase? 	Evaluación de los objetivos alcanzados por los estudiantes

Fuente: Autoras del Proyecto

Al respecto de los momentos seleccionados, estos estuvieron relacionados con aspectos que permitieron caracterizar sus reflexiones, entre ellos:

1. La forma como el profesor utilizó el recurso de la lectura como ambientación.
2. La forma como Humberto mostró la tabla de doble entrada a sus estudiantes.
3. La explicación que el profesor dio a los procesos realizados en clase “usando” el lenguaje matemático.
4. Los procesos o algoritmos realizados por los estudiantes.
5. El recurso de las preguntas que utilizó como guía para sus estudiantes.
6. Las dificultades que no había previsto el profesor en su planeación; el cierre de la clase.

4.3 REFLEXIÓN DE HUMBERTO CON EL APOYO DE LAS HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS (Fase de Intervención)

En esta fase se realizó la reflexión con el profesor Humberto haciendo uso de los resultados del análisis de la primera etapa como herramientas para la reflexión. La fase se realizó en dos momentos: i) mostrándole a Humberto las rutas cognitivas y ii) presentándole los videoclips con el apoyo de la Guía de Momentos Seleccionados (ver Tabla 1).

En los apartados que siguen se comunican las reflexiones que Humberto puso de manifiesto en cada sesión de trabajo, reflexiones que se organizan con relación al uso y selección de los recursos.

4.3.1 Reflexión sobre los recursos apoyados con las rutas cognitivas. En esta parte se apoyó la reflexión del docente Humberto sobre la primera etapa haciendo uso de las herramientas generadas previamente. Iniciamos mostrándole al profesor Humberto los dos diagramas de las rutas cognitivas y se le preguntó sobre las diferencias que veía. Al respecto el profesor comentó:

I: ¿Qué diferencia nota entre la ruta planeada y la ruta desarrollada en clase?

H: No veo ninguna diferencia

I: Obsérvelas bien, por favor

H: La única que veo es la matriz que utilicé, cambié tres ejercicios de la fase de comprobación que eran muy planos por la tabla, como por variar un poquito

La respuesta inicial obtenida por el profesor Humberto fue no se reconocer diferencias entre las rutas pero luego de una segunda observación afirmó solo reconocer la diferencia en el recurso de la tabla de doble entrada; al indagar sobre dicho recurso el profesor consideró que esta no fue recurso didáctico sino una variación para cambiar el esquema de su clase; paradar algo más de complejidad a los ejercicios al presentar de una manera diferente el ejercicio, que además aportó una nueva manera de organizar la información. Después se le preguntó al profesor si introducir dicho recurso condujo a la actividad matemática, Humberto responde afirmativamente, pero también reconoce que los estudiantes no tienen la habilidad para desarrollar la tabla de doble entrada y que no fue suficiente explicarles un solo ejercicio. A partir de ello se le recomendó que debería trabajarla antes con los estudiantes para que ellos adquieran las destrezas de éstas.

4.3.2 Reflexión sobre los recursos apoyados con la tabla Guía de Momentos Seleccionados. Adicional a la Guía (Tabla 1) se mostraron los fragmentos del vídeo que correspondían a los momentos seleccionados.

4.3.2.1 Reflexiones sobre la lectura como recurso. El momento seleccionado, como se pudo apreciar en la Tabla 1, fue el correspondiente al recurso de la lectura. El docente manifestó que el uso de este recurso obedeció al proyecto de aula transversal, para fomentar la lectura y la matemática recreativa⁸. Seleccionó el recurso según la experiencia personal y quiso compartir este gusto con sus estudiantes porque, además, considera que con la lectura se les enseña a escuchar. Lo relevante aquí fue cumplir con el proyecto transversal de lectura. Para promover la reflexión del profesor en este aspecto se le presentó el fragmento del vídeo en donde se quería mostrar el uso del material concreto como recurso de la actividad matemática.

En este caso de estudio encontramos un profesor con buena actitud y con mente abierta al cambio, no buscó justificarse, simplemente explicó por qué utilizó este tipo de lectura. Veamos el siguiente fragmento de la transcripción que corresponde a ese momento:

I: ¿Humberto, qué buscaba usted cuando trajo esta lectura a la clase?

H: Yo quería hacer un contraste, como yo la imagino, como se puede ver tal vez no; pasa con la lectura que muestra un manejo de pensamiento totalmente distinto al pensamiento matemático, éste es más abierto, más lúdico, rompe ciertos campos lógicos. ¿Cómo es posible que un tipo salga de un cuento y lo mate a uno?, mientras la matemática sí sigue patrones y es secuencial. Si usted omite una secuencia puede que altere lo siguiente; yo quería hacer ese contraste con los dos tipos de pensamiento entre los estudiantes, algo así muy por encima, a eso es lo que voy, el pensamiento matemático es más lineal y un ejemplo de

⁸Matemática recreativa es un proyecto de aula que implementa el colegio Juan Rey I.E.D donde se busca que el alumno a través del juego o de una situación aprenda a resolver problemas matemáticos

eso es qué para poder resolver ésta, este tipo de ejercicios hay que seguir pasito a pasito, y hay que aplicar ciertas reglas; mientras que en la literatura es otro tipo de pensamiento y no menos válido.

Durante el proceso de reflexión se buscó orientar al profesor con el apoyo de herramientas teóricas para después apoyar en cuanto a las lecturas acertadas para la actividad matemática como recurso de la clase. Por ejemplo, se le comentó que Guzmán (1985, 1987, 1989), manifiesta su interés sobre el uso de notas históricas y biografías de matemáticos en las clases de matemáticas, pues con éstas se pueden mostrar a los estudiantes las maneras cómo han evolucionado los conceptos matemáticos.

- *La enseñanza de las Ciencias y las matemáticas.*
- *El rincón de la pizarra.*
- *La experiencia de descubrir en geometría.*
- *La demostración en matemáticas.*
- *Para pensar mejor*, un libro dedicado a la resolución de problemas en el que se introducen aportaciones de la psicología y se expone la forma de realizar el protocolo de un problema. En él se exponen las dificultades y bloqueos que se experimentan mientras se está realizando el problema.
- *Cuentos con cuentas*, un libro muy querido por el autor en el que explica varios juegos, entre ellos el juego del Nim que sirve para trabajar con la numeración binaria (este libro puede consultarse en Internet).
- *Mirar y ver*, este es un libro de ensayos de geometría que se pueden leer independientemente unos de otros. Algunos de los ensayos son: *Los puentes de Königsberg*, *Cuatro desigualdades profundas*, *Triangulando el polígono*.

Y algunos textos de la literatura de Yves Chevallard como:

- *Estudiar Matemática.*
- *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.*

- *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado.*

También se le comentó al profesor que cuando se usa la lectura como recurso didáctico, también vale la pena pensarlo como recurso de evaluación por ello se le comentó el trabajo de Parada (2005) cuando se refiere a plantear y analizar la producción de textos como alternativa para evaluar en matemáticas.

Se enfatizó en que la lectura debe estar relacionada con la actividad matemática que se espera trabajar en la clase para reforzar la importancia de incorporar el plan lector en todos los niveles de enseñanza de la matemática. Para llegar a esto, el docente necesita reflexionar sobre cómo va a implementarla para favorecer la construcción de conocimientos matemáticos de sus estudiantes.

4.3.2.2 Reflexiones sobre la tabla de doble entrada como recurso.- El momento seleccionado, para reflexionar con Humberto, fue cuando él propuso el ejercicio de la tabla de doble entrada. En un principio Humberto no reconoció la tabla como un recurso; mencionó que ya la había utilizado antes, y que la utilizó para generar un poco más de complejidad en los ejercicios. Además, expresó su frustración reconociendo vacíos de sus estudiantes sobre temas que muchas veces ya se habían tratado como es el proceso aritmético en divisiones.

I: ¿Qué busca con el nuevo planteamiento de estos ejercicios?

H: Con relación al uso de la tabla, son muchas cosas a la vez: Primero, para cambiar el planteamiento de la información, que ellos busquen organizar la información. Segundo, ya de entrada uno va viendo que a ellos les faltan bases en el proceso aritmético en divisiones, pero el problema de la tabla, para ser honesto, aquí yo a veces siento que los muchachos realmente no aprenden, dos o tres, pero con los otros es estarles repasando constantemente las cosas. Entonces a veces yo trato de variarles para que no sea siempre lo mismo, con la presentación, y esto es diferente, es otro grado de dificultad, entonces es novedoso y entonces pueden mirar cómo se organiza la información.

De las expresiones del profesor, se percibió que él sentía que algo falla dentro de su práctica y que, como debe ser repetitivo en la explicación para llenar los vacíos

de sus estudiantes, necesita variar la presentación de los ejercicios para no aburrirlos. Ante ello se le preguntó al docente *¿cree que la situación es a nivel general?*, a lo que él respondió, inclusive, que en algunos estudiantes de bachillerato se limitan a copiar lo que se escribe en el tablero, pero no son capaces de desarrollar por sí mismos un ejercicio.

En el caso de haber dejado guías de trabajo los estudiantes se limitan solo a transcribir. En otros casos, Humberto ha comprobado que el nivel está por debajo de lo que se exige, cuando nos comentó que sus estudiantes todavía presentaban dificultades en las operaciones aritméticas y él debía sugerirles a los estudiantes que se ayudaran utilizando su cuerpo, sus manos, para realizar el conteo.

Al respecto Ponte *et al* (1997), citado por Jiménez (2010, p. 177), enfatizan en que “la forma de orientar la clase depende también, naturalmente, del propio profesor, de su conocimiento y competencia profesional, y muy especialmente del modo como introduce las diferentes tareas y apoya a los alumnos en su realización”.

El profesor Humberto, al parecer, no era consciente, hasta el momento en que se le muestra el videoclip de la clase, de que recursos como: las preguntas, la tabla de doble entrada y los algoritmos que él implementaba en clase son un medio para favorecer la actividad matemática de los estudiantes, Humberto al parecer los utilizó de manera intuitiva.

Al finalizar la entrevista se percibieron sentimientos encontrados por el profesor Humberto ya que él desconocía que estos recursos fortalecen y favorecen la actividad matemática. Además, se dio cuenta de las fortalezas y falencias que tenía como profesor desde su quehacer pedagógico. Sin embargo, mostró una actitud positiva hacia el cambio que debe presentar a la hora de impartir una clase y prever las posibles dificultades que se le puedan presentar en futuras planeaciones, en vez de tener que sortearlas en el aula.

4.3.2.3 Reflexiones sobre el uso del lenguaje matemático. Este momento, sobre el que se reflexionó con el profesor se enfatizó en la reflexión desde el pensamiento pedagógico y didáctico. Se presentaron algunos fragmentos del vídeo en donde el profesor Humberto realizó algunas explicaciones en respuesta a preguntas de los estudiantes. Sin embargo, el profesor las pasó por alto y continuó con la explicación del tema. A continuación se presenta un fragmento del vídeo:

E: ¿Profe, por qué un quinto?

H: Mire, (*señalando en el tablero*) numerador uno, entonces me queda un quinto afuera; aplicando esta propiedad (*señala de nuevo en el tablero*) que dice: ¿qué hago con los exponentes?

La razón que el profesor da cuando se le pregunta *¿cree que la explicación fue clara para el estudiante?*, a lo que Humberto respondió “*es que aquello que están preguntando ya ha sido aclarado muchísimas veces*”. El profesor asumió que cometió un error y le dio más importancia al ejercicio que estaba desarrollando que en aclararle la duda al estudiante. No obstante, Humberto recalca que esto se venía trabajando desde hace rato. La recomendación es que cuando el estudiante pide una explicación, se debe dar a cabalidad sin importar si el nivel de la pregunta es muy elemental o básico. En caso de no querer dar la explicación a todo el salón entonces, debe acercarse al estudiante y aclararle la duda de manera individual.

4.3.2.4 Reflexiones sobre el algoritmo como recurso. Otro momento, sobre el cual se reflexionó es aquel donde el docente explicó los algoritmos utilizados. Ante la pregunta *¿qué observa en las fotos (ver Figura 16) frente a los algoritmos utilizados?*, respondió que los estudiantes seguían el esquema.

Figura 16. Algoritmos presentados a los estudiantes

$$\frac{(\sqrt[3]{2x^2})(\sqrt[3]{3x^5})(\sqrt[3]{20x^3})}{\sqrt[3]{5x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2x^2 \cdot 3x^5 \cdot 20x^3}}{\sqrt[3]{5x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{120x^8}}{\sqrt[3]{5x^2}} \quad \begin{array}{r} 24 \overline{) 12} \\ 12 \\ \hline 0 \\ 6 \\ 6 \\ \hline 0 \\ 3 \\ 3 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}$$

$$= \sqrt[3]{24x^2}$$

$$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 3x^2}$$

$$= 2 \cdot x^2 \cdot \sqrt[3]{3}$$

$$\frac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[3]{27a^2}} = \frac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[3]{27a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2^3a^3b}}{\sqrt[3]{3^3a^2}}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{a^3b}{a^2}}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt[3]{a^1b}$$

Fuente: Autoras del Proyecto

Humberto afirmó que él sí esperaba que los estudiantes aplicaran el algoritmo que les enseñó porque las personas tienden a repetir lo que les han enseñado. El docente vio que la forma en que él lo explica es más práctica, que los pasos se pueden visualizar mejor. De este modo, se observa que el docente ve al algoritmo como el tema a trabajar y no como un recurso. Enseña el algoritmo porque es dar un instrumento para que se puedan desarrollar los ejercicios de división de radicales.

Si bien las matemáticas presentan varias alternativas para llegar a un mismo resultado, en el caso concreto del colegio no se presenta por el nivel matemático básico de los estudiantes. Allí los jóvenes a parte de estudiar en la mayoría de los casos deben ayudar a sus familias en el sustento del hogar o colaborar con sus hermanos menores, luego el tiempo que le dedican al estudio solo es la jornada escolar. Es casi imposible que ellos desarrollen una tarea o que retroalimenten el proceso en casa, por eso el nivel es básico y se trata de ser muy precisos cuando se les dan varias alternativas, pues en algunas ocasiones se confunden. Desde la

perspectiva del profesor, si se mecaniza una forma para hallar la solución eso, es una ganancia. Se expresó al docente la multiplicidad de posibilidades de las matemáticas y el riesgo de encasillar a los estudiantes, pero dadas las dificultades de aprendizaje y nivel matemático de la institución se comprendió la respuesta dada.

4.3.2.5 Reflexiones sobre las preguntas como recurso. El momento sobre el que se reflexionó con el profesor, correspondió a aquel donde él planteaba preguntas puntuales a los estudiantes que pasaban a resolver ejercicios en el tablero. Al parecer Humberto no se percata de que en dicho momento él usa las preguntas como un recurso útil para conducir y enlazar el tema, además, para que el estudiante interiorice los pasos que se necesitaba para desarrollar el algoritmo. Las preguntas favorecen al estudiante en su desarrollo matemático porque fomentan el razonamiento; para Menezes (2004), citado por Jiménez (2010), los beneficios que se obtienen al hacer preguntas son, entre otros, detectar dificultades de los estudiantes, ayudar al estudiante a pensar, obtener información que no se tiene, provocar indirectamente la realización de acciones, orientar a los estudiantes a organizar la información relativa a un saber, validar la cantidad y calidad de conocimiento de los estudiantes y motivar.

4.3.2.6 Reflexiones sobre la evaluación de los objetivos alcanzados por los estudiantes. El último momento considerado para reflexionar con Humberto fue el cierre de la clase pues él fue sorprendido por el timbre que anunciaba el cambio de clase. Humberto afirmó que, por cuestiones de tiempo, casi nunca alcanza a realizar el cierre de la clase; que cuando da la explicación y el planteamiento del tema, en ese momento ya ha abarcado todo el tema que debían ver los estudiantes, entonces no él no ve la necesidad de generalizar o formalizar al final de la clase.

Al respecto, la recomendación es que el cierre es importante porque en este momento se formalizan los contenidos visto durante la clase. Además, se puede dar apertura a los temas de la próxima clase. No es necesario que el cierre sea largo, ya que en ocasiones con una simple pregunta al final, se deja un proceso de reflexión abierto, para iniciar con el mismo la siguiente clase.

Para Martinec S. y Vergara C. (2007) algunos profesores preparan el cierre, anunciando tareas o temas a tratar en la próxima clase y en otros casos el cierre es más abrupto y no se alcanza a concluir; según la investigación de estos autores el cierre es la sesión con menos tiempo de actividad por parte de los profesores.

4.4 REFLEXIONES DE HUMBERTO EN LA NUEVA EXPERIENCIA

Esta etapa se propuso con el fin de observar la apropiación del modelo de reflexión por parte del profesor. Esta nueva experiencia inició cuando el profesor Humberto hizo la entrega de la segunda planeación de clase.⁹ después de la intervención. Después de grabada la clase ejecutada, se le entregó el videoclip para que él mismo realizara el análisis y reflexión de su clase. El nuevo análisis de reflexión fue entregado por escrito y, además, el docente realizó una ruta cognitiva.

4.4.1 Reflexión para la acción: Planeación de clase. El tema a trabajar en la clase fue adición de monomios. Para esta clase el profesor entregó una planeación que consta de dos hojas (véanse las Figuras 17 y 18). Como se pudo observar, el esquema de trabajo de Humberto fue: tema, objetivos (uno general, tres específicos).

⁹La nueva experiencia fue realizada con otro curso porque a nivel institucional la programación no permitía repetir la clase. De la misma manera se hizo acompañamiento durante la sesión para registrar en video la segunda clase.

Figura 17. Primera hoja de la planeación de Humberto de la nueva experiencia

ALGEBRA OCTAVO GRADO.	TEMA: ADICIÓN DE MONOMIOS.						
<i>OBJETIVO GENERAL: El estudiante resuelva y aplique la adición de monomios en situaciones problemáticas.</i>							
ESPECÍFICOS:							
<ol style="list-style-type: none"> 1. Que el estudiante identifique cuando dos términos son semejantes y los diferencie de los términos no semejantes. 2. Que el estudiante aplique correctamente las propiedades de los números reales para la adición y sustracción de monomios. 3. Que aplique la adición y la sustracción de monomios en la solución de situaciones problemáticas. 							
1. ELEMENTOS CONCEPTUALES DE CONTEXTUALIZACIÓN.							
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 0 auto; width: 80%;"> <p style="text-align: center;">EXPRESIONES ALGEBRAICAS.</p> <p style="text-align: center;"><i>Conjunto de letras y números ligados entre sí por los signos de las operaciones algebraicas.</i></p> <p style="text-align: center;">$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 20.000$; $5x^4 + 2bc$; $\sqrt[3]{x} - 6/7$</p> </div>							
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> <p>MONOMIO: Expresión algebraica que solamente contiene productos de números reales y de potencias de una o varias variables cuyos exponentes son positivos.</p> <p style="text-align: center;">$3x$; $-14m^4n^5$; $6a^3x^4y^7z^5$</p> </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> <p>POLINOMIO: Expresión algebraica es la suma algebraica de varios monomios, donde cada uno constituye un término del polinomio. $6x^2 + 4x^3$; $7a^2 + 5ab - 9b^2$; $3x^3 - 5x^2y^2 + 4x^2y^2 - 9x^3$</p> </div>						
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> OPERACIONES: ADICIÓN (+) SUSTRACCIÓN (-) MULTIPLICACIÓN (.) DIVISIÓN (÷) </div>							
<p>2. DEFINICIÓN DE ADICIÓN DE MONOMIOS:</p> <p><i>Solo podemos adicionar o sumar dos o más monomios siempre y cuando sus términos sean semejantes; es decir cuando tienen la misma parte literal y los mismos exponentes.</i></p> <p><i>Ejemplos de términos semejantes</i> <i>Ejemplos de términos no semejantes:</i></p> <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%;">$3x$; $4x$; $7x$</td> <td style="width: 50%;">$-5x^2y^2$; $-7x^2y^2$</td> </tr> <tr> <td>$5m^2n^2$; $-14m^2n^2$; $7m^2n^2$</td> <td>$-8m^3n^2$; $-8a^3b^2$</td> </tr> <tr> <td>$36a^2b^3$; $-154a^2b^3$; $15a^2b^3$</td> <td>$-54a^7b^3$; $-7m^2n$</td> </tr> </table> <p><i>¿Cómo sumamos términos semejantes?</i> <i>Sumamos los coeficientes de números enteros y la parte literal permanece igual.</i></p>		$3x$; $4x$; $7x$	$-5x^2y^2$; $-7x^2y^2$	$5m^2n^2$; $-14m^2n^2$; $7m^2n^2$	$-8m^3n^2$; $-8a^3b^2$	$36a^2b^3$; $-154a^2b^3$; $15a^2b^3$	$-54a^7b^3$; $-7m^2n$
$3x$; $4x$; $7x$	$-5x^2y^2$; $-7x^2y^2$						
$5m^2n^2$; $-14m^2n^2$; $7m^2n^2$	$-8m^3n^2$; $-8a^3b^2$						
$36a^2b^3$; $-154a^2b^3$; $15a^2b^3$	$-54a^7b^3$; $-7m^2n$						

Fuente: Autoras del Proyecto

Figura 18. Segunda hoja de la planeación de Humberto de la nueva experiencia

Ejemplos
 Revisar las siguientes adiciones.

a. $3a^2 + (-5a^2) = -2a^2$
 b. $(-37m^2n^{\square}) + (-54m^2n) = (-91m^2n^{\square})$
 c. $5x^3y^2 + 7a^3b^2 = 5x^3y^2 + 7a^3b^2$
 d. $8a^4b^3 + 8a^3b^4 = 8a^4b^3 + 8a^3b^4$

B. Completar el siguiente cuadro:

+	- 4xy	- 9mn
7mn		
8xy		

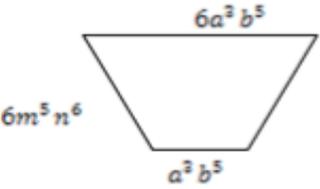
Ejercicios: Resolver las siguientes adiciones:

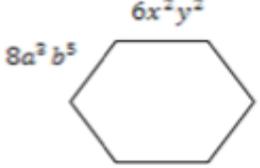
1) $7x^2 + (-25x^2)$ 2) $(-47a^5b^9) + (-63a^5b^9)$
 3) $(-30x^6y^9z^{12}) + (-30x^{12}y^9z^6)$
 4) $(-54m^8n^9) + 35m^8n^9$ 5) $93a^2b^2c^2 + 39m^2n^2z^2$

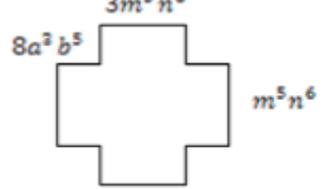
Completar la siguiente tabla:

+	$5x^3$	$- 75x^2y^{\square}$	$75x^{\square}y^2$	$- 125y^3$
$- 9x^3$				
$18x^2y^{\square}$				
$-27x^{\square}y^2$				
$81y^2$				

Tarea: Calcular el perímetro de las siguientes figuras geométricas.







A MODO DE CONCLUSIÓN: La adición de expresiones algebraicas es una operación que tiene por objeto reunir dos o más expresiones algebraicas (sumandos) en una sola expresión algebraica (suma), teniendo en cuenta la ley de los signos para la adición.

Bibliografía: Algebra del Baldor

Fuente: Autoras del Proyecto

4.4.1.1 Consideraciones sobre la planeación del profesor Humberto . Para el desarrollo del tema el profesor planeó al principio presentar los aspectos conceptuales por medio de un mapa. Posteriormente introdujo la definición de la temática a trabajar, con sus respectivos ejemplos, los cuales irían de un nivel de complejidad básico a uno superior.

A continuación planteó preguntas que al parecer pretendía formular a sus estudiantes. Presentó un ejercicio con una tabla de doble entrada que planeó desarrollar en conjunto con sus estudiantes. Luego propuso unos ejercicios para el desarrollo individual de los estudiantes incluyendo una tabla más grande. Para en seguida formular un trabajo para la casa donde conectan los pensamientos numérico y geométrico usando cálculo de perímetros con expresiones algebraicas.

Finalmente, propuso un cierre en su planeación en donde sintetizó en cinco renglones el tema visto en clase. Además incluyó la bibliografía que le sirvió de apoyo para realizar su planeación.

El profesor presentó un cambio en la planeación pues ésta es más estructurada, ya que incorporó las sugerencias de introducción y cierre de la clase.

Respecto a la ejercitación los ejercicios planteados, concuerdan en su forma de presentación con ejemplos dados y trabajados durante la sesión. En la nueva planeación se refleja la inclusión de aspectos mencionados durante la intervención, como son el planteamiento de algunos de los objetivos acordes con el tema a trabajar, las etapas de introducción y cierre, los contenidos con el texto a suministrar a sus estudiantes, los ejemplos, los ejercicios, las tareas, en todos los contenidos dando prioridad a los procesos matemáticos. Humberto incorporó nuevos recursos a su clase como fueron: mapa conceptual, textos preparados para los apuntes de los estudiantes, combinaciones de ejercicios propuestos, introducción de figuras geométricas como aplicación del tema a trabajar.

Desde el pensamiento matemático escolar la planeación incluye más detalladamente los contenidos a suministrar y las actividades a desarrollar en donde se hace más evidente el conocimiento matemático.

Otro cambio que se percibió en la planeación de Humberto es que usó sus conocimientos para visualizar la tarea que va a asignar a sus estudiantes relacionando el pensamiento variacional con el pensamiento geométrico, además diseñó ejercicios no rutinarios.

4.4.2 Reflexión en la acción: Puesta en escena de la clase planeada. Humberto en esta ocasión realizó su clase en el tiempo previsto y siguió la planeación sin ningún inconveniente. En esta oportunidad se percibieron cambios sustanciales en su reflexión en la acción pues terminó en el tiempo justo la clase planeada y logró realizar el cierre.

También se observó al profesor más seguro y confiado del tema a trabajar, tomó en cuenta las sugerencias anteriores para mejorar su quehacer diario con los jóvenes pues el ambiente de aprendizaje fue favorable para él y para los estudiantes.

A continuación resumimos (Tabla 2) los nuevos recursos utilizados y la manera como se evidencian en cada uno los tres componentes del pensamiento que orientan a la reflexión.

Desde el pensamiento matemático escolar, Humberto se propuso que sus alumnos desarrollaran el pensamiento variacional aplicando la adición de monomios en la resolución de problemas; esto lo favoreció presentando un mapa conceptual del tema a trabajar y haciendo la respectiva explicación utilizando diferentes ejemplos todos relacionados con el tema.

Tabla 2. Consideraciones acerca de las reflexiones en la acción de Humberto

RECURSO	PENSAMIENTO MATEMÁTICO ESCOLAR	PENSAMIENTO PEDAGÓGICO Y DIDÁCTICO	PENSAMIENTO ORQUESTAL
Cartelera utilizando Mapa conceptual	La presentación del tema trabajado anteriormente ligado al tema a trabajar y el siguiente tema seguir Construcción –Continuidad	Organización de ideas claras y sencillas de los conceptos a presentar, centra la atención de los estudiantes, da oportunidad de acompañamiento mientras los estudiantes toman nota.	Éxito en el enlace del conocimiento matemático y el material didáctico.
Definición y edición de memorias	Conceptualizaron y dieron ejemplos de los contenidos matemáticos	El texto que acompaña la fórmula da oportunidad de repaso independiente por cada estudiante.	No pierde el hilo conductor y ubica a los estudiantes en donde van del tema y para donde quieren ir
Preguntas puntuales	Favoreció el razonamiento	Despejan dudas; son hilo conductor del tema, generan interés y atención por parte de los estudiantes	Son permanentes
Ejercicios tabla de doble entrada y ejercicios rutinarios	Permitieron diferenciar los términos semejantes y no semejantes, base para reducir términos semejantes	Variación en la presentación de ejercicios, evita la monotonía	Siguen una secuencia de acompañamiento hacia el trabajo autónomo.
Tarea utilizando figuras geométricas	Combinaron el pensamiento variacional y el geométrico; aplicación de problemas a la vida real	Recurso que permitió el repaso de la integración de temas vistos con anterioridad	Genera enlace para la siguiente clase y sirve de apoyo para la clase.

Fuente: Autoras del Proyecto

4.4.2.1 Consideraciones de la puesta en escena del profesor Humberto. Al parecer el profesor Humberto rescató de la primera experiencia la de proponer dos tipos de ejercicios; rutinarios y tabla de doble entrada pues primero dio ejemplos para desarrollar y luego presentó otros para que los estudiantes los desarrollaran en el tablero; ellos mostraron interés y participaron activamente del ejercicio, es decir, se propició la actividad matemática deseada lo cual se percibió en la actitud de Humberto y esto permitió que el valorara el ejercicio que sucedía y le dio más tiempo de participación a los estudiantes.

También se hicieron evidentes los conflictos de algunos jóvenes en identificar términos semejantes y reducirlos. Sin embargo, Humberto realizó el acompañamiento de estos alumnos y nuevamente les aclaró las dudas, de igual forma hizo la revisión del trabajo desarrollado por los estudiantes.

En esta experiencia Humberto dio muestras de que tuvo en cuenta las reflexiones realizadas en la primera etapa del modelo ya que se observó la continuidad del proceso matemático constructivo empezando desde la retroalimentación de la clase anterior, siguiendo con la explicación y aplicación del tema, ejercicios aumentando grados de complejidad pero teniendo previsto las dificultades de los estudiantes y finalizando con el cierre y la tarea como alternativa de refuerzo del conocimiento individual y probablemente en la revisión del trabajo de los estudiantes, se podría evidenciar la asimilación de los contenidos para, en caso dado, despejar y orientar nuevamente las inquietudes de los estudiantes.

Así, tal como lo expresa Guzmán (2007, p. 37), Humberto logró esta vez las ventajas del procedimiento bien llevado: “actividad contra pasividad, motivación contra aburrimiento, adquisición de procesos válidos contra rígidas rutinas inmotivadas que se pierden en el olvido”.

Desde el pensamiento pedagógico y didáctico Humberto dio muestras de una reflexión en la acción porque buscó a través de mapas conceptuales la forma más eficaz de presentar los contenidos para llevárselos a los alumnos de forma comprensible, también hizo uso de la herramienta de la tabla de doble entrada, pero en esta ocasión la apoyó con la explicación del tema y favoreció la ejercitación de la misma proponiendo otra para los jóvenes. Sin ningún inconveniente, se observó que los alumnos estaban comprometidos con la clase, tomaron apuntes, expusieron sus dudas, se interesaron en el aprendizaje y participaron de las actividades propuestas por el profesor Humberto.

Otro aspecto pedagógico a resaltar es el acompañamiento permanente de Humberto con los jóvenes: se acercaba al puesto de cada uno a despejar dudas y el lenguaje que utilizó fue sencillo; a su vez, los animaba a pasar al tablero y los compañeros se mostraron comprensibles y solidarios con quien estaba en el tablero o con quien tenía dudas (ver Figura 19).

Figura 19. Evidencias de las explicaciones a los estudiantes

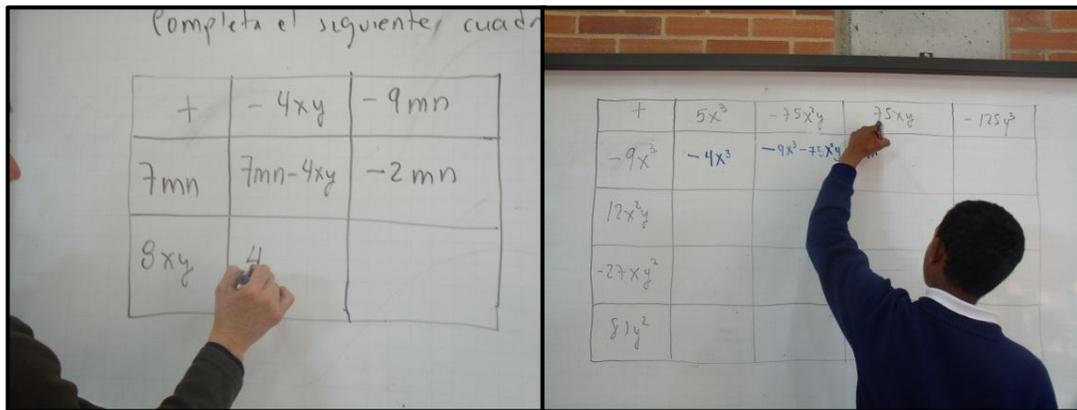


Fuente: Autoras del Proyecto

El profesor consideró que pasar un estudiante al tablero, quien estaba bastante perdido con el tema, era una oportunidad para aclarar sus dudas, pues consideró que las falencias de ese estudiante podría ser las de otros a la vez, por eso favoreció este ejercicio durante el desarrollo de clase tal como se apreció en la imágenes de la Figura anterior.

Desde el pensamiento orquestal, la clase fue bien llevada pues el profesor puso en escena de la mejor manera los recursos; un ejemplo de esto fue cuando primero él explica la tabla de doble entrada y con ayuda de sus estudiantes la fue completando y después aclaró las dudas para diseñar otra para que los estudiantes la desarrollen. (Ver Figura 20).

Figura 20. Profesor y estudiante realizan la tabla de doble entrada



Fuente: Autoras del Proyecto

De este modo, el docente organizó su clase haciendo uso de este recurso que decidió incorporar y motivó a los estudiantes a que participaran de la actividad de manera espontánea; se evidencia entonces el quehacer matemático y la gestión didáctica estrechamente vinculados.

4.4.3 Reflexión sobre la acción: Análisis de la clase planeada y lograda. Con el vídeo de la nueva experiencia Humberto realizó su reflexión por escrito (ver Figura 21), y una ruta cognitiva (ver Figura 22). La ruta la construyó sobre la planeación que él hizo. En ella se nota que Humberto quiso hacer su reflexión siguiendo el método de las rutas cognitivas que se le presentó en la intervención después de la primera experiencia pues, al parecer, le facilita entender la estructura y secuencia de su clase.

En una segunda fase se realizó una entrevista al profesor Humberto, centrada en cómo vivenció la nueva experiencia y los cambios que notó durante el proceso.

El profesor Humberto consideró muy útiles las herramientas de reflexión pues le ayudaron a ver situaciones que antes consideraban que estaban bien.

Figura 21. Reflexión de la nueva experiencia del profesor Humberto

REFLEXIÓN

TEMA: ADICIÓN DE MONOMIOS.

GRADO: 801 J.M.

La clase se dividió en cinco fases:

1. Organización de la clase: Al igual que con el grado 901 los estudiantes se van organizando mientras llamo lista.
2. Elementos conceptuales de contextualización: se elaboró una cartelera por dos razones: primero, para presentar los conceptos previos, que ya se habían trabajado en clase, de forma clara y relacionada; la segunda, para ganar tiempo, ya que si lo iba haciendo en el tablero al mismo tiempo, no me habría quedado tan clara, y esto me permitió ir haciendo énfasis en cada uno de los aspectos.
3. Fase de instrucción: Se hizo énfasis en tres aspectos: identificar los términos semejantes, diferenciar los términos no semejantes y aplicar las propiedades de los números reales, en especial, las leyes para la adición de números reales. Todo esto a través de los ejemplos que realizamos en clase luego de la definición de la adición de términos semejantes
4. Fase de asimilación: esta se realizó a través de los ejercicios que desarrollamos durante la clase.
5. Fase de generalización: lo que escribimos a modo de conclusión.

Considero que fue una clase bastante simple, no tuvo mayores elementos didácticos, pero si se enriqueció con el aporte de los estudiantes. La participación de ellos fue positiva, le dio dinamismo a la clase, algunos de ellos pudieron superar sus temores y aclarar sus dudas, como la estudiante Divi Hernández, Cristian Arero (uno de los estudiantes que pasó al final de la clase), Wilder Acevedo, quien no pudo aclarar sus inquietudes, pero se arriesgó a pasar al tablero. El aporte de Oscar Colorado fue valioso, con su alegría y su insistencia por pasar.

Se presentaron varios momentos incómodos, el primero las dos estudiantes que llegaron tarde y a las que luego les pedí que se salieran del salón pues no querían salir en el video. Sabía que tarde o temprano se generaría conflicto y por beneficio de la actividad decidí que salieran. El otro momento incómodo fue cuando empezaron a esconderse los cuadernos. Creo que ellos mismo buscaron como un instante de relajamiento, pues llevaban bastante tiempo concentrados.

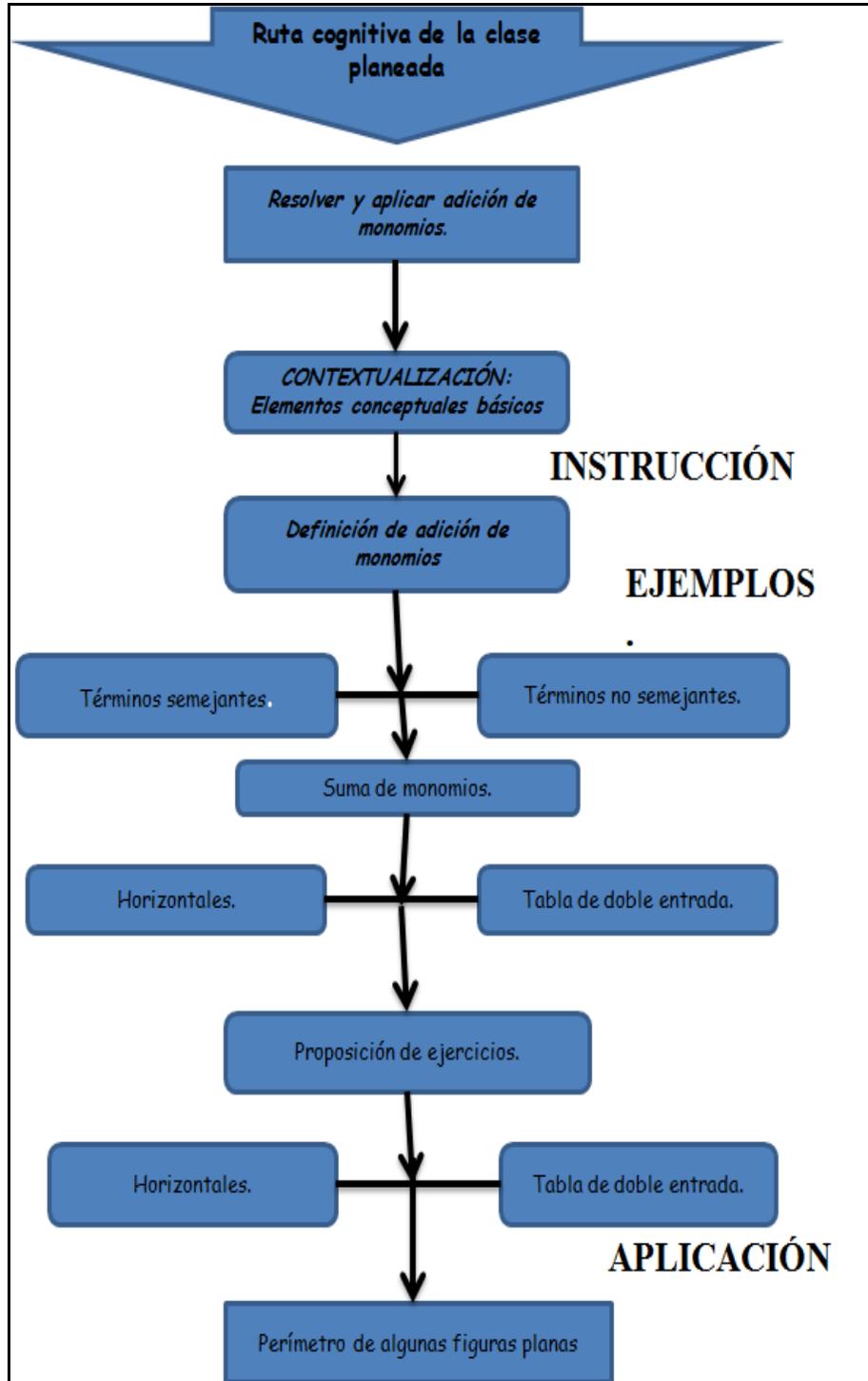
No pude realizar los ejercicios de aplicación ya que el tiempo no nos alcanzó, pero se asignaron como tareas y estos nos pueden servir para introducir la próxima clase y aclarar dudas a otros estudiantes, en especial a los que se quedan muy quietos.

En términos generales, me pareció una clase bonita, sencillita y muy animada. El grupo se prestó para ello.

HUMBERTO

Fuente: Autoras del Proyecto

Figura 22. Bosquejo de la Ruta cognitiva diseñada por Humberto



Fuente: Autoras del Proyecto

4.4.3.1 Consideraciones sobre las reflexiones del profesor Humberto. El profesor también comentó que usó el análisis de vídeos de forma objetiva y autocrítica, él lo expresó así: “la retroalimentación que se hace sobre la práctica realizada y el llevar a cuestionarse cosas tan aparentemente triviales que uno pasa por alto pero que en el fondo son de una importancia fundamental”. Aunque Humberto consideró que su clase no tenía demasiados elementos didácticos resaltó que la actividad de sus estudiantes la enriqueció.

En su reflexión, Humberto reconoció que siendo las clases un bloque de dos horas esto generó en los estudiantes cansancio y esto a su vez llevó a algunos estudiantes a fomentar indisciplina para generar descansos. También el profesor pudo darse cuenta que sus estudiantes estuvieron bastantes concentrados por un largo tiempo pero también que la estructura de la clase no fue muy variada y esto ocasionó el problema de indisciplina.

Finalmente, resaltó que las clases son más exitosas cuando todo está planeado; el proceso de cada fase de instrucción permite hacer una visualización mental de la dinámica a realizar y puede ayudar a prevenir el tipo de respuesta y comportamientos de los estudiantes que se pueda presentar durante la clase; al respecto Humberto: *“cuando uno está seguro en lo que ha planeado enseñar, los estudiantes ven eso y se vinculan al proceso, también les genera seguridad”*.

El docente en la última etapa del modelo hizo una selección cuidadosa de los recursos que utilizó e implementó en la clase, se apropió del método que guía la reflexión docente, esto se pudo evidenciar en el cambio positivo presentado desde la planeación y la ejecución de la clase. El profesor Humberto no hizo evaluación posterior desde el conocimiento matemático, ni de la actividad matemática desarrollada; en clase. Humberto hizo énfasis en lo que sintió en la clase y lo que percibió de sus estudiantes.

A través de la auto-observación en los videos reconoce una herramienta muy valiosa para su reflexión y autocrítica en la práctica docente y rescató los beneficios obtenidos de su participación en esta investigación a través de la nueva experiencia.

4.5 CONSIDERACIONES GENERALES DEL PROCESO DE REFLEXIÓN DEL PROFESOR HUMBERTO

El proceso de reflexión enriqueció al profesor Humberto en su forma de seleccionar los recursos que incorpora en el aula porque reflexionó sobre la manera de aprovechar al máximo su potencial y de vincularlos directamente con el tema a trabajar desde los componentes del pensamiento. Es importante, entonces, nombrar los cambios que implementó el profesor en su nueva experiencia, basados en la primera etapa de reflexión:

- Se observó el interés por mejorar aquellos aspectos donde se había hecho énfasis como el retomar la clase anterior para enlazarla con la nueva clase y la distribución del tiempo durante las sesiones.
- Humberto se motivó a buscar nuevos recursos que le ayudaron a generar el proceso de aprendizaje en los estudiantes; además el docente se dio cuenta que así como pudo diseñar estas dos clases, puede seguir diseñando las demás. El profesor intentó implementar cambios en su nueva experiencia basados en la primera etapa de reflexión, se notó el interés por atender los aspectos donde se había hecho énfasis.
- Implementó la contextualización de los conceptos transmitidos, inicio y el cierre de su clase. Humberto incorporó a sus clases estas fases que inicialmente no las valoraba como esenciales en su quehacer docente y en la nueva experiencia desde su planeación y desarrollo de la clase les dio la importancia que éstas tienen en el quehacer pedagógico.

- Humberto le apostó a su labor como docente y a sus fortalezas en su forma de enseñar; se hizo consciente del acompañamiento que realiza con los estudiantes, cómo se relaciona con ellos y en su interés por proponer actividades variadas pero a su vez significativas.

Se encontró que el docente percibió la experiencia de una manera positiva y gratificante porque nunca había tenido la oportunidad de observarse a sí mismo durante el desarrollo de su clase llamando la atención, el tono de su voz, su expresión corporal, la manera de dirigirse a los estudiantes. Reconoció los vídeos como una herramienta valiosa pues a través de ellos podía analizar con más cuidado su práctica docente.

Además el profesor mencionó que a través de las reflexiones y acciones realizadas con el apoyo del modelo, él logró analizar su quehacer pedagógico e iniciar algunos cambios, especialmente lo motivó a autoevaluarse, es decir a reflexionar después de cada sesión de clase.

Se pudo observar que para Humberto las rutas cognitivas le ayudaron a estructurar los procesos planeados ya que las incorporó para analizar su nueva experiencia.

En este caso de estudio no se utilizaron recursos tecnológicos por parte del docente, como lo son software, calculadoras, juegos en línea que podrían ser útiles. Suponemos que esto es porque el colegio no tiene recursos financieros suficientes para atender la necesidad de equipos y por el contexto socio-económico en el cual está inmerso el colegio.

A nivel general se deriva de este trabajo las siguientes reflexiones:

- El proceso si bien es positivo y genera mejoras, requiere a la vez de más tiempo en la planeación que el docente no siempre tiene disponible.
- El acompañamiento colegial es de fundamental importancia a la hora de la retroalimentación pues ayuda al docente a cuestionarse en aspectos aparentemente triviales que en ocasiones se pasan por alto, pero que en el fondo son de importancia fundamental.
- En el contexto actual colombiano falta la oportunidad de ser retroalimentado por un agente externo. Se percibe más bien al agente externo como una amenaza que viene a criticar, pero no aporta elementos claros para la implementación eficaz de cambios. El colegio no ofrece los espacios para que los docentes compartan sus experiencias.
- A través de esta investigación se evidencia que es necesario diseñar nuevos recursos de aprendizaje, como por ejemplo: en los docentes se debe dar el espacio para la creación, diseño y utilización de estos recursos. Sin embargo, los profesores no siempre cuentan con el tiempo necesario dentro de la institución para crear o ajustar nuevos materiales, ya que el horario que se establece no permite abrir un espacio para este tipo de actividades, además son pocos los docentes que trabajan en casa diseñando o ajustando el material, no es fácil adquirir soportes de formación y capacitación en esta dirección, los recursos no siempre son facilitados por las instituciones. Humberto comentó que hay temas que sería muy conveniente trabajar con los estudiantes utilizando material concreto y que el colegio no cuenta con estos recursos, luego sería bueno una capacitación para diseñar el material o si lo hay para aprender a utilizarlo de la manera más óptima.
- Finalmente, en el desarrollo de la clase se constató que el docente debe tener un dominio del recurso que pretende utilizar antes de poder impartirlo a otras personas. Hay materiales existentes en donde no siempre es fácil el dominio de la herramienta por la falta de experiencia en la forma más efectiva de aplicar los recursos al apoyo del proceso enseñanza y aprendizaje.

5. EL MODELO APLICADO EN EL CASO DE MARÍA

En este capítulo se describe la aplicación del modelo en el caso de la profesora María, docente en la Institución Bicentenario de la Independencia de Bucaramanga en la sección de secundaria, específicamente en el grado de octavo.

En cuanto a los resultados del análisis de las reflexiones, estos se presentan de la siguiente manera:

- a. Evidencias del proceso de la clase de la docente (fotos, fragmentos de las transcripciones de videos, figuras) descritas por episodios y acompañadas de los comentarios de las investigadoras.
- b. La actividad de planeación y de reflexión vienen con el análisis de la reflexiones dela profesora con respecto a la categoría uso y selección del recurso por parte del docente de acuerdo a los tres componentes del pensamiento.

5.1 REFLEXIONES DE MARÍA EN LA ETAPA PRELIMINAR

Antes de presentar el desarrollo de este ítem, cabe mencionar que para la docente era de gran importancia desarrollar habilidades para resolver problemas de manera práctica e ingeniosa basados en la observación y creatividad y además lograr respuestas lógicas y coherentes.

Igual que en el Caso de Humberto, se presentan los resultados del análisis de las reflexiones de la docente en relación a la categoría *uso y selección del recurso para caracterizar la actividad matemática* teniendo en cuenta los tres componentes

de pensamiento utilizados en este proceso (matemático escolar, pedagógico-didáctico y el orquestal).

5.1.1 Reflexión para la acción: Planeación de la clase. Al igual que el profesor Humberto, para la preparación de la clase, la profesora consideró un tema correspondiente al periodo académico que transcurría en la institución y en el texto guía de los estudiantes "Navegantes 8°". A continuación la planeación de la profesora:

Figura 23. Primera planeación de la profesora María

Asignatura Matemáticas Nivel Básica:
Grado : 8º Tema Potenciación:
Curso 8-2

Tiempo 60'

Propósitos

- Interpretar los símbolos (identifique).
- Osar las propiedades de la potenciación en resolver problemas.
- Promover las niñas que se comuniquen en el lenguaje matemático.

Estrategias - motivación con ejemplos de aplicación de potenciación en: plegado de papel, cálculo de volumen, cubo mágico, y en Biología división celular. q base de preguntas como que tiene que ver el plegado de papel y la potenciación.

Recursos.

Hoja papel	Inicio
Cubo mágico.	5' Saludo llamado lista
libro de Trabajo	5' Instrucciones
Tablero -	Introducción
Lapiz.	20 Desarrollo Tema
	20 Trabajar sobre el libro
	10' Asignar tema Resumir

Fuente: Autoras del Proyecto

5.1.1.1 Consideraciones sobre la planeación de María. Como se pudo observar en la Figura 23, la profesora planteó tres propósitos, los cuales se retoman a continuación:

- 1) La interpretación de los símbolos,
- 2) El uso de las propiedades de la potenciación para resolver problemas y
- 3) Promover en las niñas y niños la comunicación con el lenguaje matemático.

Además, ella propuso como estrategia de motivación la propuesta de ejemplos de aplicación de la potenciación la actividad de doblar una hoja de papel, el cálculo y volumen del cubo y la división celular, esto para cuestionar a los estudiantes en cuanto a la relación con el tema de la potenciación. Para realizar la actividad propuso como recursos una hoja de papel, el cubo mágico, el libro de trabajo de los estudiantes, el tablero y el lápiz.

Finalmente, María estableció tiempos para realizar las actividades cumpliendo con los sesenta minutos reglamentarios, y los distribuyó de la siguiente manera: 5 minutos para llamar a lista; 5 minutos para dar instrucciones; 20 minutos para el desarrollo del tema; 20 minutos para trabajar sobre el libro; y 10 minutos para asignar el tema de la clase siguiente.

Desde el pensamiento matemático escolar se percibió poca atención por parte de María sobre el contenido matemático que iba a trabajar en la clase, ella quiso llevar al aula, tres actividades matemáticas, pero al parecer no hace una reflexión cuidadosa sobre la selección del problema. María usó como estrategia de enseñanza, la proposición de ejercicios de aplicación en las que pudieran manipular el material real, buscando que posteriormente los estudiantes establecieran relaciones que le permitieron llegar a la definición de la potenciación.

En cuanto al pensamiento pedagógico y didáctico, en la planeación que entregó la docente deja ver que ella no sigue ningún formato de la institución, lo que nos permite evidenciar que tal vez ni ella, ni los profesores de la institución se ven exigidos a realizar una planeación.

En cuanto, a la actividad del doblado de papel nos lleva a pensar que la profesora necesitaba estudiar cómo usar este recurso con sus estudiantes de octavo grado y desde los Estándares Básicos identificar los propósitos que podría trabajar con este recurso con relación al tema. Esto porque al parecer la docente no tenía claro los temas que orientan este nivel, esto puede ser porque su formación profesional es en el Área de física y porque se ha desempeñado como profesora de los grados décimos y undécimos, por lo tanto no cuenta con estrategias pedagógicas básicas para el manejo de las matemáticas del grado octavo. Sin embargo, en este momento la profesora se encuentra estudiando en la universidad para acreditar su pedagogía, como se mencionó anteriormente.

María también eligió el texto guía como recurso al parecer porque le permite conducir la clase, pues no es claro para ella cómo direccionar los contenidos matemáticos de este grado. Podemos ver que no planteó otro tipo de ejercicios diferentes a los del libro que le permitieran ver la potenciación.

Del tercer propósito de la clase: “promover las niñas: que se comuniquen en el lenguaje matemático”, vale la pena mencionar que en la institución al inicio del año se distribuye los salones separando a las niñas de los niños, pero por la cantidad de estudiantes este salón en particular quedó conformado por niños y niñas, no obstante, ella presenta el propósito solo redactado para las niñas.

5.1.2 Reflexión en la acción: puesta en marcha de la clase planeada. La clase de María se desarrolló en 55 minutos aproximadamente ya que se presentaron

algunas interrupciones por otros profesores que alteraron el desarrollo de la clase. La clase se dio de acuerdo con la actividad matemática propuesta por la docente y realizada por los estudiantes. La clase se dividió en tres episodios de acuerdo a la actividad matemática planeada y además dentro de ellos se presentan momentos en donde se analizan los tres pensamientos matemáticos.

1. Actividad del doblado de una hoja de papel con la cual la profesora María quería que los estudiantes establecieran la relación entre las divisiones y los dobleces para llegar a la definición de la potenciación a través de su manipulación.
2. Presentación del Cubo de Rubik, la profesora quería con él deducir la definición de la potenciación a través de sus características y con ayuda de las formulas del área y el volumen del cubo.
3. Trabajo con el libro de los estudiantes “Navegante 8°”, la profesora pretendía realizar los ejercicios que presentaban mayor dificultad.

EPISODIO No. 1: DOBLADO DE UNA HOJA DE PAPEL.

La profesora inició la clase dando algunas indicaciones de las propuestas en su planeación (Figura 23); la profesora pidió a sus estudiantes que revisaran mentalmente la actividad del libro de la sección “Practica y Aprende” que consistía en resolver todos los ejercicios propuestos utilizando las propiedades enunciadas en el texto y, además, señaló que quienes no pudieran realizarlos, expusieran las dudas en la clase, esto mientras llamaba a lista y daba inicio a la clase.

Para el inicio de la actividad matemática utilizó una hoja de papel, realizando dobleces para obtener datos que fueron consignados en el tablero por una estudiante. La podemos evidenciar en la transcripción de la clase:

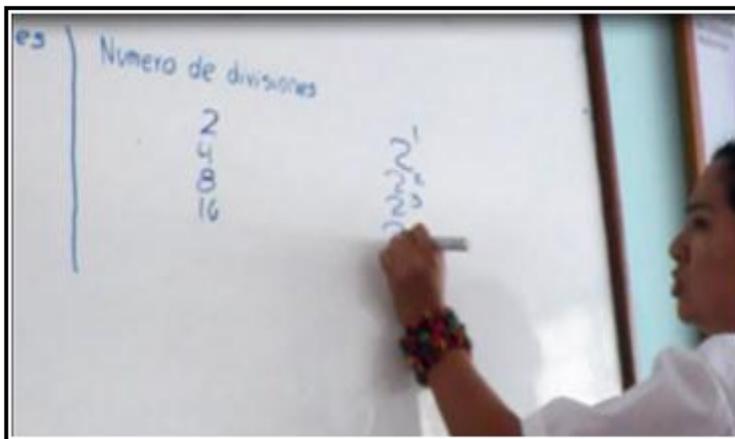
M¹⁰: Vamos a mirar, por ejemplo, ¿será que doblar una hoja tiene algo que ver algo con la potenciación?, ¿ustedes que creen?, ¿el hacer varios dobleces sobre una hoja tendrá que ver con la potenciación?.

E: No (*dicen unos estudiantes*); sí (*dicen otros estudiantes*)... ¿Y si doblamos la hoja hacia abajo? (*otros estudiantes*).

5.1.2.1 Consideraciones del primer episodio. En el vídeo de la clase, pudimos evidenciar las dificultades que se desataron durante la actividad puesta en escena. Una de ellas estuvo relacionada con la manipulación del material puesto que fue la docente quien realizó la actividad limitando al estudiante a la observación e imitación de procesos.

Desde el pensamiento matemático escolar otra de las dificultades que se presentaron fue que no se definió en que se centraría la atención, si es en el número de dobleces o en las divisiones marcadas en la hoja. Veamos la Figura 24 y la transcripción del momento:

Figura 24 La Docente Escribe la Secuencia de la Potencia de Dos



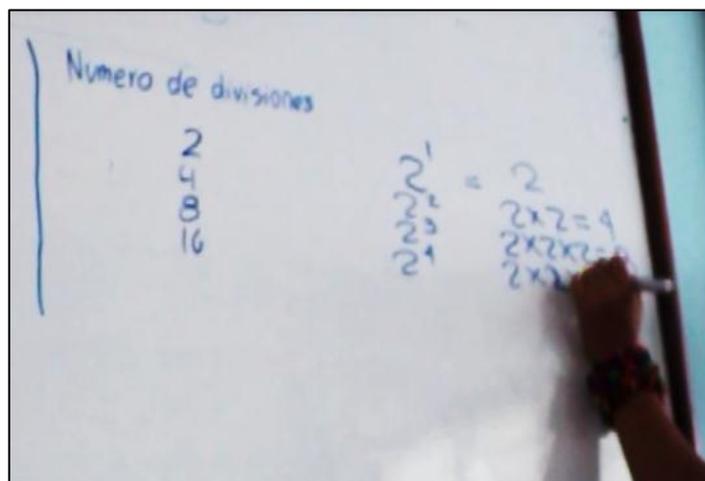
Fuente: Autoras del Proyecto

¹⁰M: Intervenciones de la profesora María, E: Intervenciones de los estudiantes e I: Intervenciones de las investigadoras.

M: Si yo escribo... Busquemos una secuencia acá, por ejemplo, sobre la potencias del dos. Si escribo, “dos a la uno”, “dos a la dos”, “dos a la tres”, “dos a la cuatro”... ¿Cuánto me da?

En la intervención de la profesora no se evidenció explicación alguna de la relación; cambió el orden y la forma de orientar la actividad (ver Figura 25) María escribe las potencias de dos, su descomposición en factores iguales y su resultado, sin establecer una relación entre lo anterior con el número de dobleces y con el número de divisiones; esto generó confusión entre los estudiantes quienes no entendieron la actividad del por qué la base es dos y no un medio por ejemplo, debido a esto, la docente tuvo que repetir el proceso.

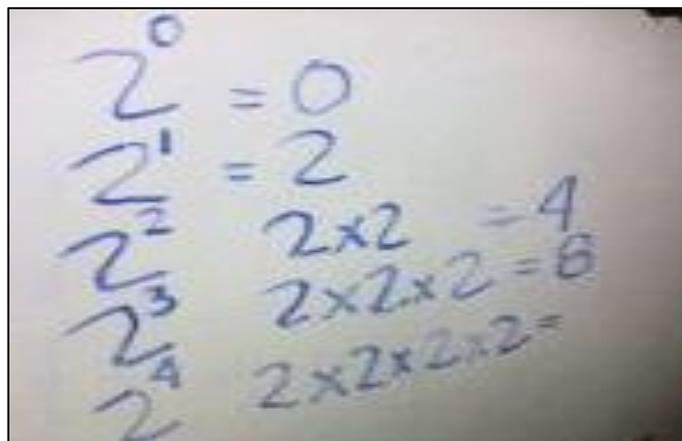
Figura 25. La docente resuelve las potencias de dos



Fuente: Autoras del Proyecto

Otra dificultad que se presentó en el desarrollo de la clase fue cuando la profesora enunció la propiedad que establece que “todo número real diferente de cero elevado a la cero da uno”; la profesora escribió $2^0 = 0$ en el tablero (ver Figura 26). Esto de manera visual generó impacto en el estudiante.

Figura 26. Notación de una propiedad mal escrita de la potenciación



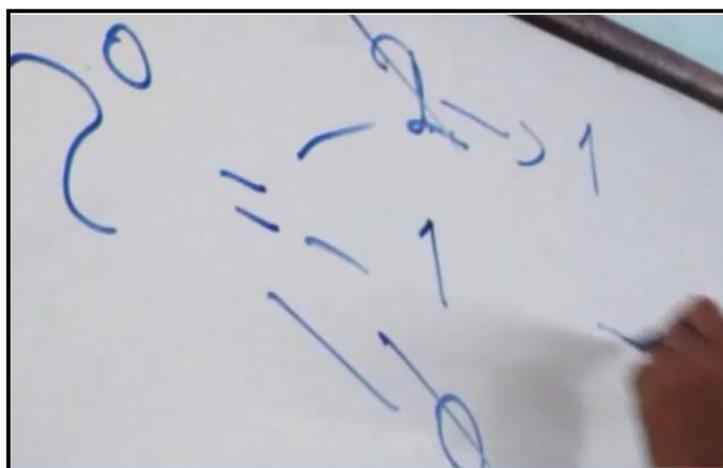
Handwritten mathematical notation on a whiteboard:

$$\begin{array}{l} 2^0 = 0 \\ 2^1 = 2 \\ 2^2 = 2 \times 2 = 4 \\ 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \\ 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \end{array}$$

Fuente: Autoras del Proyecto

La profesora María al percibir que a los estudiante no les quedaba clara la propiedad, decidió escribirla nuevamente pero adicionando dos opciones más, (ver Figura 27) y pidiéndoles a sus estudiantes que seleccionaran a su criterio la respuesta correcta, para ella escribirla en el tablero.

Figura 27. Opciones de respuesta para la propiedad



Fuente: Autoras del Proyecto

Finalmente, para llegar a la respuesta correcta María vio necesario repetir la actividad del doblado del papel y solo hasta este momento se vio claramente la relación que buscaba al inicio de la actividad entre el número de divisiones que quedaban en el papel y el número de dobleces; así, con este recurso pudo descartar las opciones.

M: Estas son las propuestas de solución a “dos a la cero”. Entonces les estoy diciendo... Vamos a tener un pensamiento lógico de cuáles fueron los pasos que hicimos: Si hago un doblar a la hoja, ¿cuántas partes?: ¡Dos partes!...Y un doblar lo puedo representar como dos a la uno. Cuando hago dos dobleces se dividen en cuatro partes y lo puedo representar como “dos a la dos” y así sucesivamente, si hago con tres... ¿cómo me queda?... Ocho partes, entonces se puede escribir como “dos al cubo”, ahora si no hago ningún doblar lo puedo representar como “dos a la cero”, si no hago ningún doblar me queda la unidad completa.

E: ¿Siempre da uno?

Para concluir la actividad, enunció la propiedad que “todo número elevado a la cero es igual a uno” y, de esta manera, corrigió –en parte– el error cometido que inicialmente había generado un impacto en los estudiantes que aprenden de manera auditiva. La profesora al enunciar la propiedad no se percató de que esta propiedad se enuncia para todo número real diferente de cero y ella continuó con su clase sin fijarse de tal error e incluso al citar el libro dijo “todo número real elevado a...” pero no realizó el énfasis necesario en ello; a continuación se evidencia la situación:

M: Si tengo tres a la cero, o si yo divido en cuatro partes, hago cuatro dobleces, cuatro a la cero (escribe en el tablero 3^0 y 4^0)

E: ¿Siempre nos va a dar uno; cada vez que elevemos a la cero nos va a dar uno?

M: Sí, nos va a dar uno. Entonces, esa es una de las propiedades que estaba ahí en el libro, que todo número real elevado a la cero nos va dar... ¿Cuánto?: uno.

Desde el pensamiento pedagógico y didáctico la docente utilizó la pregunta como recurso para conducir la clase de modo que los estudiantes escucharan, respondieran, comentaran e hicieran preguntas unos a otros. María buscaba que los estudiantes formularan nuevas preguntas y por ende nuevas situaciones.

Según Menezes (2004) citado por Jiménez et al (2010), los beneficios que se obtienen al hacer las preguntas son de detectar las dificultades de los estudiantes y ayudar al estudiante a pensar y obtener información que no suele pasarse por alto.

Otro momento para analizar desde lo pedagógico y didáctico se presentó cuando la profesora preguntó a los estudiantes *¿al hacer seis dobleces a la hoja, que nos queda?* Varios estudiantes dieron una respuesta, pero la profesora María escogió la correcta:

M: Vamos a escuchar primero a Óscar que fue el que nos habló acá de sesenta y cuatro, ¿por qué, de dónde sacó eso, Óscar?

E: Porque dieciséis por dos es treinta y dos, serían cinco dobleces y treinta y dos por dos serían sesenta y cuatro, sesenta y cuatro son seis dobleces.

M: Listo, muy bien, Oscar; entonces si yo coloco acá cinco me daba... ¿Cuánto?

Una manera pedagógica que utilizó la docente María durante el desarrollo de la clase fue permitirle a los estudiantes exponer su propio método de análisis, pues esto ayuda a los compañeros a recibir de manera diferente los procesos de razonamiento del mismo problema expuestos por la profesora. Por lo tanto, la profesora utilizó la respuesta del estudiante Óscar como un medio para que sus compañeros confrontaran sus soluciones y comprendieran en qué fallaron aunque la posibilidad de análisis fue limitada, por tanto solo le permitió a un estudiante explicar su respuesta.

Es, entonces, importante permitirles a diferentes estudiantes exponer sus ideas o dudas ya que se puede presentar que la mayoría tengan la misma inquietud, esto permitiría despejar las dudas que no dejan que los estudiantes avancen.

EPISODIO No. 2. PRESENTACIÓN DEL CUBO, CÁLCULO DEL ÁREA Y EL VOLUMEN.

Otro episodio interesante para nuestra investigación es cuando la maestra usó el cálculo del área y el volumen del cubo para establecer la relación entre ellas y llegar a deducir la expresión matemática de la potenciación. Ella empezó pidiendo las características del cubo como se puede apreciar en la Figura 28 y en la transcripción que la apoya:

Figura 28. Presentación del cubo



M: vamos a mirar el cubo:

¿Por qué se caracteriza el cubo?...

¿Quién me dice?

E: Porque tiene los lados congruentes (*dicen unos estudiantes*); Todos los lados iguales (*dicen otros estudiantes*).

M: Todos los lados iguales, ¿podemos decir lados cuando hablo de un cubo?.

E: No.

M: Porque estamos en tres dimensiones, tiene seis caras... ¿Pero qué tienen en común?: que todas las caras son... ¿qué?

E: iguales.

M: Y que son... ¿además?

E: Cuadradas

Fuente: Autoras del Proyecto

5.1.2.2 Consideraciones del segundo episodio. El pensamiento matemático escolar se presentó cuando la docente utilizó las fórmulas del área del cuadrado y el volumen del cubo para llegar a la definición de la potenciación y así identificar

los términos. Cuando María presentó a los estudiantes el cubo, trató de mostrarles otra aplicación de la potenciación; recordó las características del cubo, y al preguntar *¿qué figura es la cara de un cubo?*, en este momento se desencadenó una serie de preguntas sobre aspectos que para la profesora era importante recordar, pero no se percató que desviaba la atención de sus estudiantes teniendo en cuenta que con la actividad del doblado del papel había llegado a la notación de la potenciación que era lo que buscaba con la aplicación de la misma. Luego, dejó a un lado las dimensiones de la figura que eran las que le permitirían establecer de manera correcta la definición matemática. Sin embargo, después de las preguntas, la profesora continuó pidiendo a sus estudiantes las fórmulas del área del cuadrado y el volumen del cubo, y llama el lado del cubo “l” así como se muestra en la Figura 29:

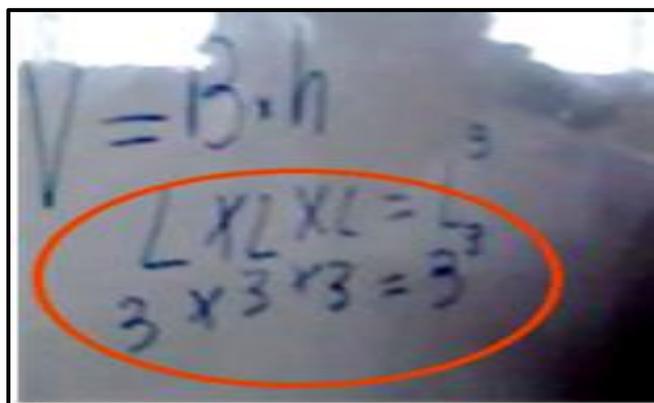
Figura 29. Fórmula del volumen de un cubo



Fuente: Autoras del Proyecto

Finalmente, si observamos la Figura 30 que sigue, cuando la profesora trató de concretar la actividad asignó tres (3) como valor numérico y escribió la expresión 3^3 , pero con el ejemplo los estudiantes no identificaron lo que representaba la base ni el exponente.

Figura 30. Ejemplificando la potenciación a través del volumen del cubo


$$V = l \cdot l \cdot l$$
$$3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

Fuente: Autoras del Proyecto

Es interesante rescatar de la transcripción que acompaña la Figura 30 que mientras un estudiante habló de caras congruentes la profesora habló de caras iguales lo cual es particular, pues es el estudiante el que maneja el lenguaje matemático apropiado y no la profesora.

Como se mencionó, el uso del recurso de la pregunta para la docente María fue importante para introducir los contenidos del tema a partir de la formulación de preguntas a los estudiantes, formular la pregunta adecuada en el momento adecuado y para el estudiante adecuado. Desde el pensamiento pedagógico y didáctico es importante tener claro los objetivos que se pretenden lograr con la pregunta, relacionarla con los intereses del estudiante, así con el contenido que se está tratando.

Desde la vivencia de la profesora y la de las investigadoras, podemos afirmar que estamos poco preparados para un amplio y adecuado uso de estrategias interrogativas en el contexto de clase, pues el estudiante utiliza solo la pregunta como un medio natural de indagación. Para Rajadell(2001), la estrategia de

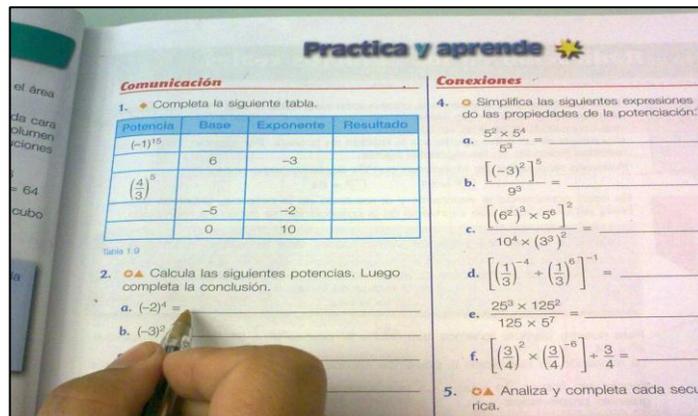
formular preguntas goza de numerosas ventajas como: i) captar la atención, despertar el interés y motivar al auditorio, ii) estimular la reflexión, la imaginación y la creatividad, iii) es de carácter diagnóstico, de búsqueda de información y de evaluación, iv) debe ser rápida y sencilla, v) su uso necesita de pocos recursos prácticamente la voz y en algunas ocasiones el tablero.

EPISODIO No. 3: TRABAJO CON EL LIBRO

Otro recurso que utilizó María fue el texto guía *Navegantes 8º* para estudiantes de donde ella inicialmente asignó una tarea de lectura y realización de los ejercicios. La siguiente transcripción cuenta lo que dice la docente:

M: Cómo ustedes repasaron y miraron la tarea que tenían, que era leer la página 22 y tratar de resolver la página 23, vamos a explicar qué es la potenciación. Pero, primero ustedes me van a recordar ¿cómo se escribe la potenciación?. ¿Cuáles son los símbolos?... ¿Quién recuerda?, levanten la mano.

Figura 31. Tarea en Blanco



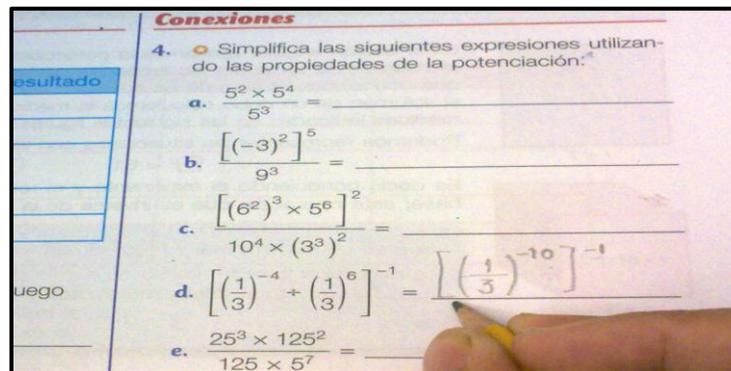
Fuente: Autoras del Proyecto

En un momento de una entrevista informal, se le preguntó a María cómo trabajaba el texto en la clase, y a esto contestó:

M: "con el libro se viene trabajando, de que ellos deben preparar el tema de la clase que se va a ver y que resuelven los ejercicios que puedan y lleven a la clase las dudas que se le presenten, a veces se inician primero explicando y otras veces, como ya se ha avanzado, se explica, y se resuelven son las dudas".

5.1.2.3 Consideraciones del tercer Episodio. En su metodología, la profesora María busca que el estudiante adquiera el hábito de consultar antes de llegar a la clase, para responder cualquier pregunta que se pueda presentar. Al respecto, Choppin (1998), considera que el libro es un apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de estudiantes como de profesores. Sin embargo, al revisar los textos en clase se observó que la mayoría de los estudiantes no realizaron los ejercicios, habían textos en blanco (ver Figura 31 y 32), y muy pocos con la tarea completa, lo que quiere decir que el trabajo con el texto no es el más apropiado.

Figura 32. Otro texto sin la actividad asignada como tarea+

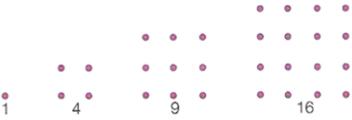


Fuente: Autoras del Proyecto

Además, desde el pensamiento matemático escolar se presentó en este episodio un momento sobre un ejercicio (ver figura 33) de mayor dificultad para aquellos estudiantes interesados en completar la tarea, ya que era el último ejercicio del texto. Su enunciado a continuación:

Figura 33. Ejercicio del último punto de la tarea

Analiza la siguiente secuencia y escribe el número de puntos que hay en cada figura.



Escribe una expresión que represente el número de puntos que tendrá la n -ésima figura: _____

Fuente: Autoras del Proyecto

Seguidamente la transcripción de la indicación dada por la profesora María respecto a la actividad de establecer relación entre los números y las letras:

E: Profe hagamos el último ejercicio que no lo entendí.

M: ¿Qué es n -ésimo?... Entonces por ejemplo, yo estoy contando números, entonces tenemos acá (escribe uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis y hace puntos suspensivos), digamos aquí tenía el término a, b, c, d, e y f, entonces, el siguiente término como sé cómo se llama, le voy a colocar un nombre; voy a decir el n -ésimo término, uno que esté por allá lejos. El término n por ejemplo, era la k . Cuando no sé exactamente, en forma general digo el n -ésimo término.

La profesora María no tuvo en cuenta que este término (n -ésimo) era nuevo para sus estudiantes de grado octavo, pues era la primera vez que lo escuchaban; anteriormente se había mencionado que la profesora orienta en los grados superiores olvidando el nivel académico de sus estudiantes; luego debe ofrecer

más orientación matemática y retomar la gráfica que representa los números cuadrados en el libro; después invitar a los estudiantes a que descubrieran el patrón de la secuencia y luego escribirlos en forma de potencia para inducirlos a escribir la expresión del *n*-ésimo término.

Desde el pensamiento pedagógico y didáctico como parte de la pedagogía la profesora María usó el recurso de la pregunta en la explicación de un ejercicio propuesto por los estudiantes (ver Figura 34). A continuación el ejercicio con mayor dificultad y la transcripción de un fragmento del video en donde la profesora guía la estudiante a través de preguntas:

Figura 34 Ejercicio usando las propiedades

Simplifica la siguiente expresión utilizando las propiedades de la potenciación:

$$\frac{[(-3)^2]^5}{9^3}$$

Fuente: Autoras del Proyecto

Al respecto, se presenta un fragmento transcrito del vídeo:

M: María Fernanda mire al tablero, ¿qué operación hay acá? (señala el ejercicio).

E: Una división.

M: la división de potencias de igual base, ¿Qué se hace?

(La estudiante observa el libro)

E: El cociente de potencias de igual base, es igual a la misma base y se restan los exponentes.

M: La misma base. ¿Cuál era la base?

E: El nueve.

M: Hacemos la diferencia entre los exponentes, cinco menos tres, me da dos, luego queda nueve con exponente dos. ¿Cuántas propiedades aplicó?

En este momento, la docente guió al estudiante a la solución del ejercicio, haciendo que llevara un proceso paso a paso e identificara la propiedad de la potenciación que necesitaba utilizar para el desarrollo del ejercicio y además utilizó el texto como herramienta de apoyo para la explicación mostrándole, con ello, a la estudiante cómo realizar el ejercicio y, a su vez, usar el texto simultáneamente. Para Menezes (2004) citado por Jiménez et al (2010), destaca que “al momento de hacer las preguntas se debe tener cuidado en aspectos como la claridad y la precisión, ya que no es importante la cantidad de ellas sino la calidad que dinamiza la clase.”. Esta metodología fue acertada, pues le permitió al estudiante recibir la información del profesor y lograr el objetivo del ejercicio.

Desde el pensamiento orquestal se presentaron tres momentos: *la actividad del doblado de una hoja de papel*, aquí la profesora María no pudo orquestar correctamente, pues se presentaron varias dificultades cuando enunció y escribió la propiedad de la potenciación $\forall a \in R \wedge a \neq 0, a^0 = 1$, tampoco pudo lograr que los estudiantes establecieran la relación entre el número de dobleces y el número de divisiones. Otro momento fue *la presentación física del cubo* en el cual tampoco logró orquestar porque se desvió del tema de la potenciación explicando las características del cubo. Por último, *el trabajo con el texto* tampoco tiene buena orquestación, pues el manejo del texto no es el más adecuado; no tiene en cuenta las competencias ni el logro que plantea el libro al inicio. Por tanto la profesora María no pudo orquestar con ninguna actividad matemática que había planeado para sus estudiantes, luego no alcanzó los objetivos que se había propuesto en su planeación.

5.1.3 Reflexiones sobre la acción por parte de la docente María. En este apartado se exponen las reflexiones que María hizo con relación a la clase

planeada y la puesta en acción de la misma. Se realizó una entrevista informal después de la clase. Estas reflexiones están organizadas, recordamos, de acuerdo a la categoría uso, selección del recurso desde los tres pensamientos.

La docente en su reflexión expresó haber cumplido parte de su planeación, también fue consciente de lo realizado en ejercicio pedagógico en la clase y además se percibió una actitud positiva en su proceso de reflexión.

5.1.3.1 Consideraciones sobre la reflexión de la profesora María. Desde el pensamiento matemático escolar la profesora María en sus reflexiones comentó que cumplió con los contenidos matemáticos propuestos en su planeación aunque reconoció que quedaron algunos vacíos en cuanto a la propiedad $\forall a \in R \wedge a \neq 0, a^0 = 1$ y además consideró importante retomarla en la clase siguiente. Al respecto, se le preguntó cómo se observó:

I: ¿Cree que las actividades matemáticas que propuso en la planeación alcanzaron los propósitos?

M: En lo cognitivo, cuando se evaluó la actividad los chicos manifestaron si haber entendido. Sin embargo, creo que la propiedad de todo número elevado a la cero es igual a uno, no quedó clara, a mí me parecía obvio con el plegado de la hoja, y no fue tan evidente para ellos, creo que es bueno reforzarlo de entrada en la siguiente clase y programar una evaluación para medir que tanto aplican el concepto de potenciación y sus propiedades.

Para la profesora María fue claro que la actividad que seleccionó para explicar la propiedad anterior no fue la adecuada. Consideramos, entonces, es importante tener claro que las actividades que se planean se deben establecer con acciones concretas con el fin de detectar las necesidades y los intereses de los estudiantes y además para que se cumplan en un tiempo determinado, con el ánimo de llegar a una finalidad previamente establecida. Así, consideramos que el profesor cuando planea una actividad debe prever el tipo de preguntas que se puedan presentar durante la explicación; esta actividad debió realizarse antes de llevarla a

la clase y haberles permitido a los mismos estudiantes participar manipulando el material y siendo ellos quienes aportaran a la clase y llegaran al concepto que se quiso presentar.

En cuanto al componente pedagógico y didáctico, le preguntamos sobre el cumplimiento de los propósitos planeados, la profesora María evadió la pregunta y se refirió a la participación de los estudiantes cuyo propósito, según sus palabras, era promover en las niñas la comunicación con el lenguaje matemático.

M: En cuanto a promover que las niñas pasen al tablero a comunicarse en lenguaje matemático se cumplió, pasaron tres niñas que fueron María Fernanda, Jency y Laura, igualmente pasó Santiago cumpliendo la proporción entre niñas y niños planeados.

Ahora, en el tema del desarrollo de la clase se le preguntó a la docente si observó alguna dificultad en las actividades que había propuesto en la planeación, contestó lo siguiente refiriéndose al trabajo del libro:

M: Sí, donde se presentó dificultad fue en la aplicación combinada de propiedades de la potenciación, pues al pasar por los puestos mirando los textos de los estudiantes me di cuenta que la mayoría estaban en blanco y otros lo tenían incompleto, así que esos ejercicios fueron los que se desarrollaron en el tablero.

Ante el comentario de la profesora María se observó la dificultad con el trabajo del texto debido a dos razones: la forma como la profesora orienta el trabajo del libro, porque no les enseña a identificar a los estudiantes el propósito de las competencias en cada numeral, y la falta de comprensión de lectura de los estudiantes. Godino, Batanero y Font (2003), expresan que los profesores deberían tener un acercamiento a los errores y dificultades que la investigación didáctica ha documentado sobre cada tema. Es decir, los contenidos de cada unidad didáctica se deberían adaptar, ampliar o variar para tratar la diversidad de errores y dificultades que pueden presentar los estudiantes.

Teniendo en cuenta la reflexión anterior se le preguntó a la docente cómo fue el manejo del recurso del libro en la clase a lo que contestó:

M: En la clase anterior se asigna la lección siguiente, como consulta para solucionar solo dudas de la tarea asignada en aquellos ejercicios que se les dificultaron, para luego solucionarlos entre todos en la clase. Además para verificar si hicieron la tarea asigno un monitor que me dé un reporte de quienes hicieron la tarea y quiénes no. Del libro hacemos un ejercicio de cada numeral y los que no se hicieron, que en las casas lo resuelvan con lo que se explicó.

Para la profesora María es importante promover la consulta en sus estudiantes, esto les permite por sí mismos leer la información del libro y entender lo que busca en cada uno de ellos aunque es necesario que la profesora revise lo que sus estudiantes consultaron acerca del tema para seleccionar lo que necesitan saber exactamente en el desarrollo de los ejercicios; además porque es una manera de verificar la comprensión de la lectura de conceptos realizados. También es prudente fortalecer a los estudiantes en la consulta de diferentes fuentes para complementar la información e incluso aclarar las dudas que se hayan presentado en la primera fuente (libro guía del grado).

Posteriormente, como se puede verificar en la siguiente transcripción, la profesora María desde su estrategia pedagógica se apoyó en el análisis que realizaron algunos estudiantes de los ejercicios planteados y, posteriormente, el análisis es expuesto a los compañeros para que confrontaran sus respuestas.

I: ¿Qué estrategia utilizó para el desarrollo de la clase?

M: Me gusta que entre ellos se expliquen los ejercicios ya que de pronto a uno no le entiende, y ellos vean otra persona con otro método. En este caso Laura le explicó muy bien el ejercicio a sus compañeros. Esta estrategia me gusta y me funciona ya que es bueno involucrar al estudiante en la actividad, y además como es la revisión de la tarea es ir de una vez controlando si la hicieron o no.

Finalmente, se comprueba entonces que para María es importante dentro de su esquema pedagógico, permitirles a los estudiantes con éxito en sus respuestas que expongan su aprendizaje para favorecer a quienes presentan dificultades. Así, se observa un trabajo colaborativo en el aula ya que la profesora se apoyó en los monitores, quienes son estudiantes que se destacan por su desempeño en el área, tanto en la revisión de la tarea como en las explicaciones entre pares las cuales los favorece pues con ello vigorizan sus habilidades sociales y comunicativas.

Según Ponte *et al.* (1997, p. 180) la comunicación se refiere a la interacción entre los diversos sujetos que hay en una clase, empleando un lenguaje propio, que es una mezcla del lenguaje cotidiano y del matemático. Cuando hay interacción comunicativa se refiere al modo en que los estudiantes y el profesor exponen unos a otros su forma de entender los conceptos y los procesos matemáticos, los perfeccionan y los ajustan al conocimiento matemático.

5.2 CONSTRUCCIÓN DE LAS HERRAMIENTAS PARA GUIAR LA REFLEXION DE MARÍA

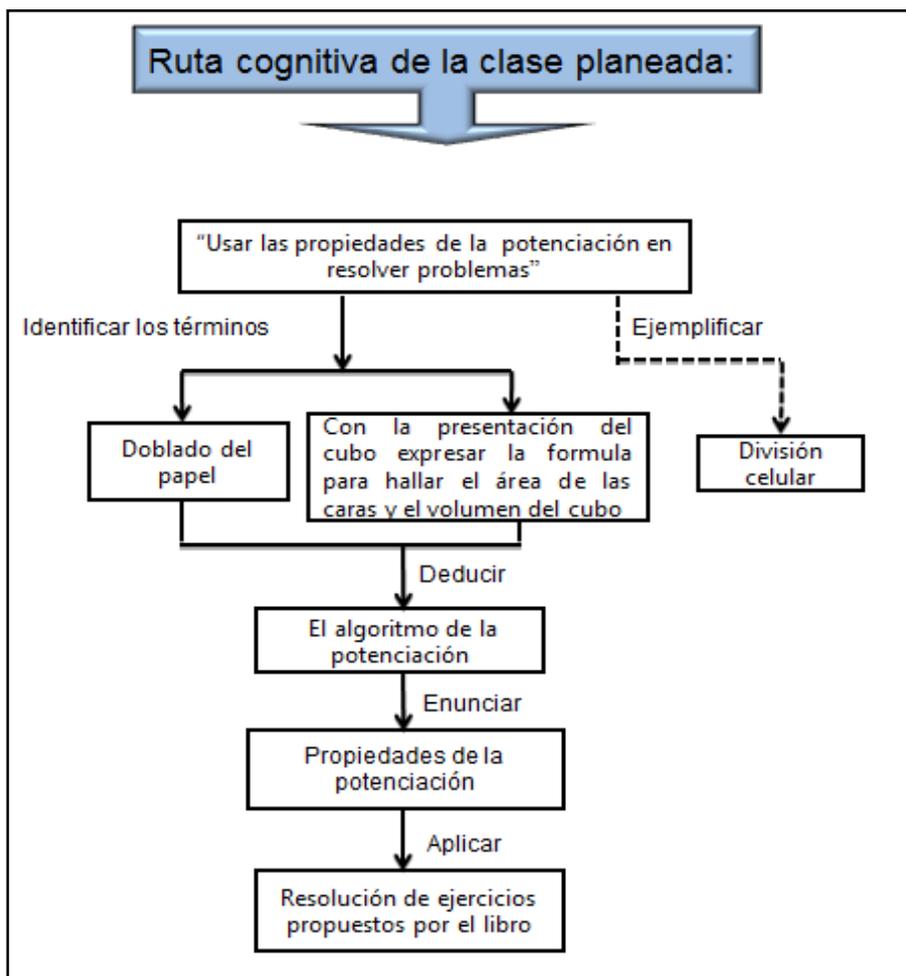
En este apartado aparecen los resultados del análisis de la etapa preliminar de María. Al igual que en el caso de Humberto, los resultados se presentan usando rutas cognitivas con los cuales se orientó la reflexión de la profesora María para que ella, posteriormente, se evaluara a través del estudio comparativo de algunos momentos seleccionados en la actividad matemática planeada vs. la actividad matemática lograda en la clase.

5.2.1 Rutas Cognitivas. Estas son las tres rutas cognitivas que reflejan los procesos llevados a cabo por la profesora María:

1. Ruta cognitiva de la clase planeada (Figura 35);
2. Ruta cognitiva del texto del estudiante (Figura 36);
3. Ruta cognitiva de la clase lograda (Figura 37).

En la primera ruta se esboza la propuesta de trabajo que presentó María (Figura 35) y se pueden observar los procesos matemáticos previstos para la clase.

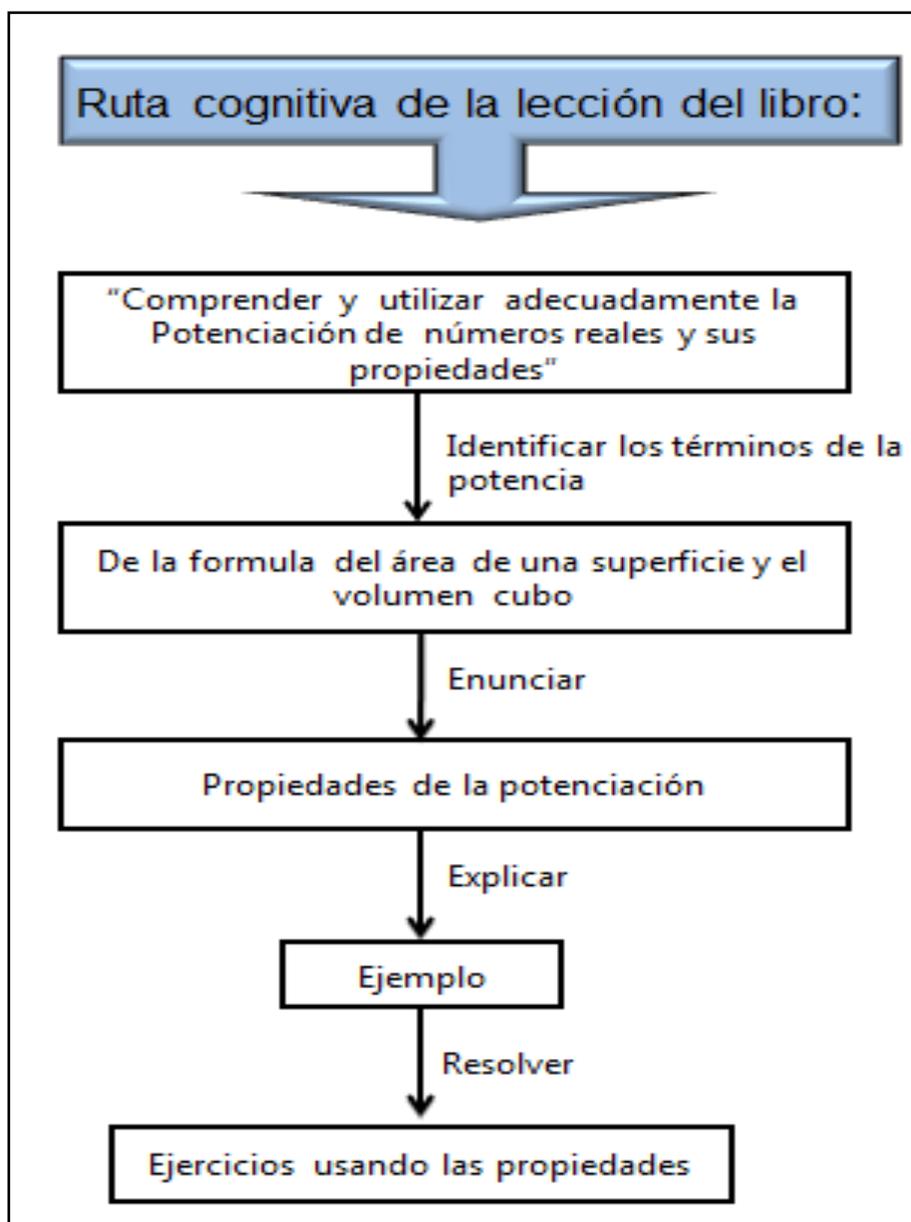
Figura 35. Ruta Cognitiva de la primera planeación de clase de la profesora María



Fuente: Autoras del Proyecto

La siguiente ruta cognitiva de la (Figura 36) presenta la estructura que plantea el texto planteado del tema de la potenciación y la aplicación de sus propiedades.

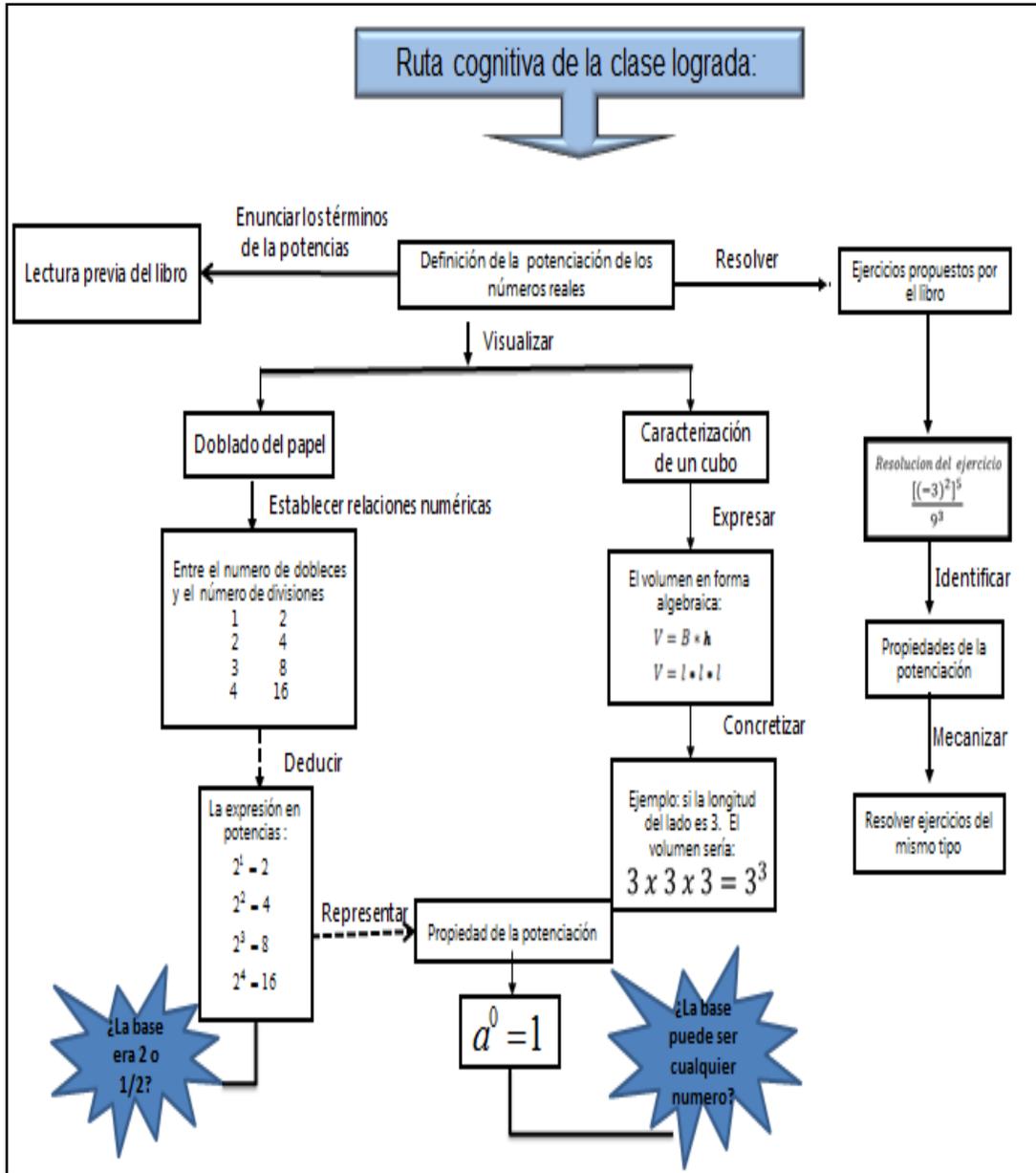
Figura 36. Ruta Cognitiva del texto guía “Navegantes 8”



Fuente: Autoras del Proyecto

En la siguiente ruta cognitiva (Figura 37) se presenta la actividad realizada en clase con los estudiantes.

Figura 37. Ruta Cognitiva de la clase desarrollada



Fuente: Autoras del Proyecto

Si comparamos la ruta cognitiva de la clase planeada (Figura 35) y la ruta cognitiva de la lección del libro (Figura 36), siendo el libro el recurso de la docente para dirigir la clase, observamos que el logro de la ruta cognitiva de la clase planeada es la continuación del último proceso matemático de la ruta cognitiva de la lección del libro; es decir, después de comprender y utilizar adecuadamente la potenciación de números reales y sus propiedades, el estudiante –según la ruta cognitiva del libro– estará en capacidad de resolver cualquier situación problemática usando las propiedades.

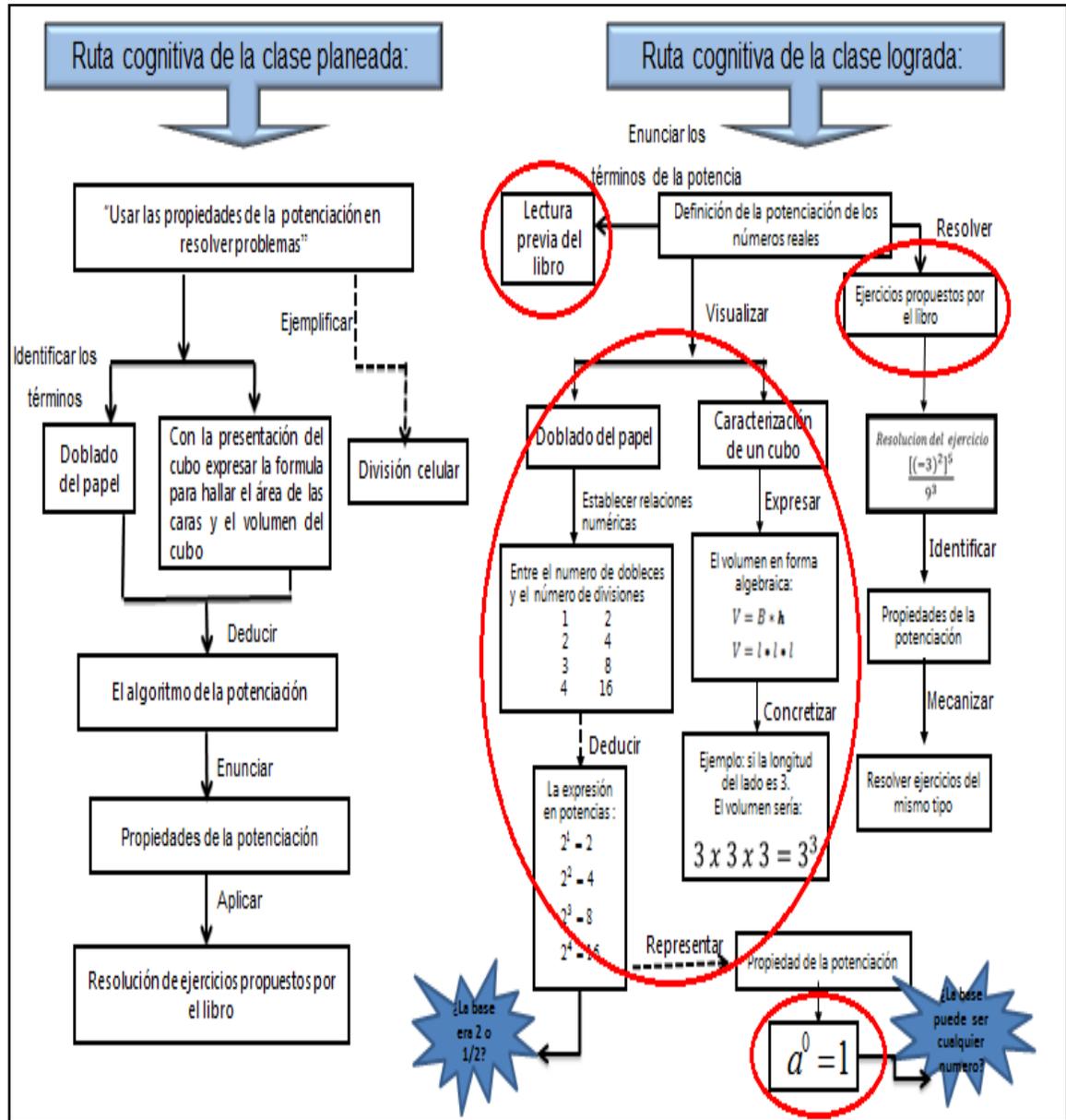
Sin embargo, esta no es una diferencia entre las rutas, lo que pasa es que –según nuestra interpretación– la profesora María, como lo dijo, establece la lectura de consulta antes de la clase siguiente para que los estudiantes lleven dudas a la clase y trabajar sobre ellas, por lo que se tiene que la ruta cognitiva de la clase planeada es una continuación de la ruta cognitiva de la lección del libro.

Finalmente, una diferencia que resaltamos es la inclusión que realizó la profesora de las actividades del doblado de una hoja de papel y la división celular y su intención de deducir el algoritmo de la potenciación a partir de ella para luego enunciar sus propiedades y aplicarlas en la resolución de los ejercicios propuestos por el libro.

5.2.2 Estudio comparativo entre lo planeado y lo logrado. Este estudio comparativo permite observar las diferencias que se presentaron en el momento de planear y de desarrollar la clase con los estudiantes a partir del contraste entre las rutas de lo planeado siendo estas, al igual que en el caso de Humberto, herramientas de reflexión que permitieron ver los momentos en donde se presentaron reacciones de la profesora para ser revisadas por las investigadoras. Así, al comparar las rutas se pueden esbozar tres episodios particulares (ver Figura 38): 1. La lectura previa del libro. 2. Visualizar los ejemplos de aplicación y

su desarrollo con las propiedad $a^0=1$; y, 3. Resolver ejercicios propuestos por el libro.

Figura 38. Comparación entre las rutas de lo planeado y lo realizado



Fuente: Autoras del Proyecto

La siguiente Tabla 3 nos permite relacionar el episodio con la ruta cognitiva donde se desarrolla la actividad.

Tabla 3. Comparativo entre los episodios y la ruta cognitiva

EPISODIOS	RUTAS COGNITIVAS
<p>La lectura previa del libro: es momento para explorar lo que el alumno conoce respecto al tema.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • María cuando realizó su planeación (Figura 35) ubicó esta actividad de lectura al terminar los ejemplos de aplicación. • En el desarrollo esta actividad (Figura 37) se presenta al inicio de la clase, porque les pide a sus estudiantes que revisen mentalmente la tarea que correspondía al trabajo con el texto.
<p>Visualizar los ejemplos de aplicación</p>	<ul style="list-style-type: none"> • En la Figura 35 al planear la docente pretendía llegar a que los estudiantes dedujeran el algoritmo de la potenciación y además incluyó la división celular. • En la Figura 37 con la aplicación de la actividad del doblado de una hoja quería representar una de las propiedades de la potenciación, $a^0=1$.
<p>Resolver ejercicios propuestos por el libro</p>	<ul style="list-style-type: none"> • En la Figura 35 María buscaba que sus estudiantes ejercitaran los ejercicios de la potenciación. • En la Figura 37 María se centró en los ejercicios de aplicación de propiedades.

Fuente: Autoras del Proyecto

5.2.3 Análisis de la clase mediante la Guía de Momentos Seleccionados. La selección de estos momentos constituye un recurso para guiar la reflexión sobre la actividad matemática que la profesora orquesta durante la clase mediante el lenguaje que utilizó, las justificaciones que les dio a sus estudiantes cuando le hicieron preguntas, y los recursos que llevó a la clase como apoyo de la actividad matemática.

Se seleccionaron 6 momentos de la clase. Para el análisis de estos momentos se diseñó la respectiva Guía de Preguntas (ver Tabla 4), en donde se asignaron preguntas que nos permitieran indagar el por qué utilizó el recurso seleccionado y además como lo utilizó.

Así, en la primera columna la Tabla 4 están los momentos seleccionados que se extrajeron de las transcripciones de la clase que son aspectos valiosos, según nuestro criterio, para revisar con la docente. En la segunda columna están las preguntas de reflexión que permitieron ir indagando sobre del recurso que utilizó; y en la tercera columna se describe el tema de reflexión que para el caso de María son cuatro temas. Los momentos seleccionados estuvieron relacionados con aspectos que permitieran caracterizar sus reflexiones sobre el uso y selección de los recursos entre ellos:

1. El uso del material concreto que quiso llevar a la clase (hoja y cubo)
2. La pregunta como recurso.
3. El libro como recurso.
4. La evaluación como recurso.

5.3 REFLEXIÓN DE MARÍA CON EL APOYO DE LAS HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS

En esta etapa se realizó la reflexión con la profesora María haciendo uso de los resultados del análisis de la primera etapa como herramienta para la reflexión. La etapa se realizó en dos momentos: i) Mostrarle a María las rutas cognitivas, ii) presentando los videoclips con el apoyo de los momentos seleccionados. En los apartados que siguen se comunican las reflexiones que María manifestó en cada

sesión de trabajo, reflexiones que se organizan con relación al uso y selección de los recursos.

5.3.1 Reflexiones sobre los recursos apoyados con las Rutas Cognitivas. En este espacio se apoya la reflexión de la docente María sobre la primera etapa haciendo uso de las herramientas diseñadas previamente. Se inicia mostrando a la docente las tres rutas cognitivas: ruta cognitiva de la planeación, la ruta cognitiva del texto de los estudiantes, y la ruta cognitiva de la clase realizada con los estudiantes respectivamente. Seguidamente se le pidió que realizara una comparación entre la planeación que propuso y la ruta cognitiva de la planeación.

REFLEXIONES DE PROFESORES SOBRE LOS RECURSOS QUE SELECCIONAN, DISEÑAN O USAN EN EL AULA
PARA PROMOVER LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA DE SUS ESTUDIANTES

Tabla 4. Momentos Seleccionados De La Clase De La Profesora Maria

MOMENTO SELECCIONADO	PREGUNTA DE REFLEXIÓN	TEMA DE REFLEXIÓN
<p>P: Ahora si yo no le hago ningún dobles a la hoja E: ¡Pues cero!; ¡Uno! P: ¿Cómo lo puedo escribir en forma matemática? E: ¡Dos elevado a la uno!; ¡Uno elevado a la uno! ¡Uno elevado a la uno! P: ¡Pero si el uno era el número de dobles!, ¿por qué uno? E: ¡Un medio! ¡Uno elevado a la cero! ¡Uno elevado a la uno! P: Era que el número de dobles, si yo no hago dobles, ¿la hoja cómo queda?... ¿El exponente cuánto vale? E: ¡La hoja!.. ¡Cero! P: Empezamos con el número dos, se tendría dos a la cero, cero dobles ¿cuánto me da?</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. ¿Por qué seleccionó el doblado del papel para hacer la deducción de la definición de potenciación? 2. ¿Realizó la actividad antes de presentarla a los estudiantes? 3. ¿Cree que si el doblado del papel lo hubiera hecho cada estudiante, le hubiera dado más claridad? 4. ¿Previo la dificultad de la concretización de la propiedad, de que toda base (diferente de cero) a la cero es uno con el uso del doblado del papel? 	Uso del material concreto
<p>2. P: ¡Ahora, independientemente cuando yo no la doblo!, ¿qué tengo? E: una hoja; la unidad. P: ¡Si yo tengo tres a la cero! O si yo divido en cuatro partes, ¡hago cuatro dobles!, cuatro a la cero. E: Profesora, siempre nos va a dar cero; ¡uno!; siempre que elevemos a la cero nos va a dar uno. P: ¡Nos va a dar uno!; entonces, esa es una de las propiedades que estaba ahí en el libro, que todo número real elevado a la cero nos va a dar uno.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. ¿Qué escuchamos aquí, escuchamos algo diferente? 2. ¿Es lo mismo “partes” que “dobles”? 3. ¿Revisamos lo que escribimos en el tablero? 4. ¿Será que todo número real elevado a la cero es igual a uno? 	
<p>2 P: Ahora, vamos a mirar el cubo, ¿por qué se caracteriza el cubo? E: Porque tiene los lados congruentes; todos los lados iguales. P: Todos los lados iguales, ¿podemos decir lados cuando hablo de un cubo? (minuto 18:11)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. ¿Qué buscaba al presentarle a los estudiantes el cubo de manera concreta? 	
<p>3 P: Si yo hiciera acá, seis dobles, ¿qué número iba a tener acá?, E: ¡Treinta y cuatro! ¡Treinta y seis! ¡Sesenta y cuatro! P: Escuchamos de a uno. Óscar dijo... ¿cuánto?... O ¡sesenta y cuatro! P: ¿Quién más dice diferente? E: ¡Veinte y cuatro! ¡Treinta y dos! P: ¿Alguien piensa diferente? E: ¡Treinta y seis! P: Primero va Óscar que fue el que nos habló acá de sesenta y cuatro, ¿por qué, de dónde sacó eso? O: Porque dieciséis por dos es treinta y dos, serían cinco dobles y treinta y dos por dos serían sesenta y cuatro, sesenta y cuatro son seis dobles.(minuto 9:50)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. ¿Qué tipo de dificultades esperaba? 2. ¿Cree que con la explicación del estudiante quedó claro para los otros compañeros? 3. ¿le pareció suficiente esta respuesta? 4. ¿Qué peso le da a las preguntas que realiza en clase? 	Pregunta como recurso
<p>4 P: Cómo ustedes repasaron y miraron la tarea que tenían, que era leer la página 22 y tratar de resolver la pagina 23, ¡vamos a explicar qué es la potenciación! Pero, primero ustedes me van a recordar ¿cómo se escribe la potenciación? ¿Cuáles son los símbolos?, quién recuerda. E: El exponente; la base y el exponente; el resultado de la potenciación. P: Si yo escribo esto (pi a la dos), ¿quién es la base? E: pi P: ¿quién es el exponente? E: ¡el dos! P: Si hacemos el cálculo generaría el valor, ahora, ¿qué me indica el exponente? E: Las veces se van a multiplicar la base.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. ¿Cómo trabaja el texto guía? 2. ¿Previo las dificultades que los estudiantes pudieran presentar al resolver lección del libro? 3. ¿Realiza los ejercicios antes de presentarlos? 4. ¿Tiene en cuenta las competencias que trabaja el libro en cada ejercicio? 5. ¿Le da prioridad algunos ejercicios de la lección? 6. ¿Usted al evaluar el libro de texto como recurso en ocasiones hace modificaciones a enunciados de ejercicios, ejemplos o definiciones que puedan ser ambiguos o incorrectos? 	Libro como recurso

Fuente:Autoras del Proyecto

En este fragmento de la entrevista la docente responde lo siguiente ante el cuestionamiento sobre la planeación y la ruta cognitiva que resultó:

I: ¿Qué observa entre planeación y la ruta cognitiva de la planeación? ¿en dónde vio usted el cambio?

M: Una diferencia, que los tres propósitos no aparecen en la ruta cognitiva planeada solo uno de ellos, el segundo. En la segunda línea de la ruta planeada se refiere a la estrategia que planteé, en la tercera no se ven los recursos que nombré, y además el tiempo que le estimé a cada actividad.

María observó los cambios presentados en la ruta pero no logró interiorizar sus respuestas ya que los enunció muy superficialmente. Es importante que la docente no pierda de vista que las acciones están conectadas con los procesos matemáticos para el desarrollo de la clase, por consiguiente, su planeación deberá contar con procesos organizacionales de ejecución, coordinación y evaluación para que pueda dar resultados.

Seguidamente, se le presentó a la docente la ruta del libro de los estudiantes con sus respectivas páginas para que observara los cambios.

I: ¿Qué observa entre la ruta cognitiva del libro y las páginas del tema en el texto?

M: Interesante. Ellos enuncian, después explican, luego pasan a resolver, yo empecé como deduciendo, después enuncié y luego la aplicación que es cómo resolver, falta más la parte donde se explica; el libro no explica sólo muestra el ejemplo.

Referente a la pregunta que se le hizo, como se puede notar, la profesora orientó hacia la comparación entre el libro y su clase. De esto, nos parece que para la profesora no es clara la estructura del libro. Al revisarlo, nosotras observamos que en el libro *Navegantes 8°*, los contenidos se presentan a través de temas que parten de ejemplos sencillos y claros; aparece un recuadro de conceptualización que destaca el concepto o proceso más relevante en el desarrollo.

Veamos otra parte de la entrevista en la cual se cuestiona sobre la ruta de la clase desarrollada:

I: Ahora, le presento la ruta cognitiva de la clase desarrollada, ¿qué observa?

M: Por ejemplo, en la clase, allá se hicieron tres ejercicios, no solo uno, (*señala la ruta cognitiva de la clase desarrollada*) se escogió porque como ellos tienen que haber previamente leído y en la casa haber hecho los ejercicios que ellos son capaces, sin ayuda del profesor, entonces una niña tenía dudas ahí, porque por ejemplo, potencia de una potencia no la alcanzamos a explicar en las propiedades, sino que ella ya tenía unos preconceptos, había tenido dificultad. Esa fue la que explicó Laura que María Fernanda no entendió, entonces nosotras colocamos ese ejercicio porque los demás son muy parecidos. Además, hasta acá llegamos (*señala el cuadro donde se estableció la relación*), Se mostró esta propiedad (*señala $a^0 = 1$*), pero esta propiedad toca aclarar, esto no se logró, la propiedad de un número elevado a la cero en los reales.

Para la docente enfrentarse con la estructura del desarrollo de la clase fue un momento de gran reflexión porque no había notado que había distancia entre lo planeado y lo que se dio en el salón por lo cual revisó minuciosamente la información que le presentamos para recordar y contestar a la guía de preguntas aunque ella manifestó haber cumplido con la mayoría de lo planeado. Se pudo percibir, entonces, asombro en la profesora al observar explícitamente el cambio en la estructura de la ruta.

5.3.2 Reflexiones orientadas por la Guía de Momentos Seleccionados.

Recordemos que de la Guía en mención (Tabla 4) se desprenden los cuatro momentos seleccionados para revisar a través de la reflexión¹¹, con estos momentos directrices de la reflexión, se presentó a la profesora el videoclip para indagar sobre los recursos que usó para el desarrollo de la clase y cómo los usó en la misma. Como eje transversal de la reflexión se toman, al igual que en el caso de Humberto, los tres componentes del pensamiento.

5.3.2.1 Reflexiones sobre el material concreto como recurso. En cuanto al primer momento, para promover la reflexión en la profesora María se seleccionó el

¹¹ (1) El uso del material concreto que quiso llevar a la clase (hoja y cubo). (2) La pregunta como recurso. (3) El libro como recurso. (4) La evaluación como recurso.

momento del uso del material concreto que se dio en dos actividades: la actividad del doblado de una hoja y la presentación del cubo.

Respecto al uso del material concreto, la primera actividad cuyo objetivo era relacionar la experiencia del doblado del papel con la potenciación, la profesora María contesta lo siguiente a la pregunta *¿por qué seleccionó la actividad del doblado del papel?*:

M: Por qué me pareció más visible, cada vez se iba anotando el número de partes en que queda dividida la hoja, y porque es una herramienta que no es costosa, que no tienen que llevar materiales sino cualquiera tiene una hoja en su aula.

I: ¿Realizó esta actividad antes de presentársela a los estudiantes en su casita allá cuando fue a planear?

M: Yo, pues, lo leí, lo miré y dije “esto está muy fácil”, me pareció obvio, pero igual ellos apenas se están iniciando y si toca hacerlo más despacio. Viendo el videoclip, que ellos mismos lo hubieran hecho así nos hubiéramos demorado un poquito más de tiempo pero hubiera quedado en la mente de ellos.

En cualquier clase de matemáticas se deben incorporar espacios donde el estudiante manipule materiales, los analice y comunique sus ideas; es decir, es necesario seleccionar los recursos que le permitan a los estudiantes estar activos y trabajando en pro de su propio aprendizaje; también es importante que el profesor domine los recursos seleccionados y que, en clase, brinde el tiempo necesario para que los estudiantes exploren y realicen sus propias conjeturas, que vivan el aprendizaje como un proceso dinámico en el cual ellos son protagonistas.

El segundo momento de este mismo tema de reflexión es cuando María explicó a sus estudiantes la propiedad de que todo número diferente de cero elevado a la cero da uno; respecto a esto se le preguntó *¿qué observó en este video clip?* Y respondió:

M: cometí un gran error matemático con los estudiantes, al decirles que todo número elevado a la cero da uno. Pues, veo necesario en la próxima clase hacer una corrección de este error.

De manera acertada la profesora María admitió, al reflexionar sobre ese momento, el error y además vio la necesidad de programar un espacio en la próxima clase para dar explicación de lo ocurrido para enunciar la propiedad correctamente.

También se le mostró a la docente una posible manera en la que pudo haber explicado a sus estudiantes del porque la base es dos y no un medio, por ejemplo, al respecto la docente comenta:

I: ¿por qué escogió la base dos?

M: las divisiones, como dividí en dos partes, porque la hoja la doble en dos.

I: ¿O sea que la base suya fueron las divisiones?

M: no, las divisiones me da el exponente, me da dos, después el otro me da cuatro, yo escogí el dos, porque sí.

I: ¿usted la escogió mas no lo dedujo de dónde salió?

M: yo lo escogí.

I: ¿por qué después dijo tres a la cero?

M: si, podría haber escogido cualquier número si no es el de la hoja, realmente se debió escoger uno que es la unidad que es lo que estaba dividiendo.

Aquí observamos varias respuestas de la docente María quien no tiene claro del porque escogió la base como dos, esto nos permite decir que la actividad no fue revisada cuidadosamente en la planeación. Sin embargo, en ese momento se le presentó mediante diapositivas a la profesora María del por qué escogió el dos como base (ver Figura 39).

Figura 39. Analisis del doblado de una hoja de papel



Fuente: Autores del Proyecto

A continuación un fragmento de la transcripción del video:

I: Yo le quiero mostrar por aquí algo (*presenta las diapositivas*). El análisis del doblado del papel, doblar la hoja de papel por la mitad, y luego al desdoblar queda dividido en dos partes. Al volver a doblar la hoja se obtienen 4 partes. Si se vuelve a doblar la hoja de papel 3 veces tendríamos una tabla (ver Tabla 5) como esta:

Tabla 5. Relación entre el número de dobleces y número de divisiones

Numero de dobleces	Numero de divisiones
1	2
2	4
3	8
4	16

Fuente: Autores del Proyecto

M: Cada vez se va doblando por la mitad.

I: Observemos, que cada número de la segunda columna es el doble del número anterior o también se puede realizar una descomposición de cada número, es decir, se puede escribir los números de esta columna de esta manera:

2	2
4	2x2
8	2x2x2
16	2x2x2x2
32	2x2x2x2x2

M: De pronto uno lo hizo mentalmente, entonces dije el dos.

I: Aquí tenemos varias multiplicaciones donde el factor es siempre el mismo “**en este caso el 2**”. Para abreviar este tipo de multiplicaciones, se utiliza la notación en forma de potencia. Como ejemplo 2x2x2 se escribe 2^3 y esta expresión equivale a 8. Con este ejercicio lo que se busca es orientar al estudiante para que el concepto de potencia lo relacione con multiplicaciones repetidas.

Finalmente, respecto al uso de material concreto para llegar a la definición de potenciación con el Cubo de Rubik, a la profesora María le preguntamos *¿qué buscaba al presentarle a los estudiantes el cubo?*, de manera concreta la docente respondió:

M: Buscaba mirar la aplicación de la potenciación en el volumen de un prisma, en este caso del cubo, entonces me interesaba que ellos vieran que el lado elevado a la tres me daba el volumen. Esta figura la vienen manejando en primaria y hasta en bachillerato, la han manejado en su casa, entonces como es la característica de que todas sus caras son iguales, luego podemos decir, es la misma base o lado por lado, pero quería saber ellos que conceptos tenían en la cabeza o sea qué presaberes tenían.

Luego, de revisar el videoclip la docente resaltó lo importante de que el estudiante utilice sus conocimientos básicos de áreas y volúmenes para escribir la expresión algebraica y además definir la potenciación como una multiplicación de factores iguales, para después aprovechar las características del cubo sin sacarlos del tema.

Como reflexión final de estos momentos, la profesora María aportó:

M: Me quedó claro que lo mejor que hubiera sido era que cada estudiante manipulara el material, darles más espacio, más tiempo para que ellos pudieran reflexionar porque uno tiene la tendencia de que como uno así aprendió y ya lo sabe cree que para ellos es igual de fácil. Ellos tienen diferentes formas de aprender unos más rápidos que otros, otros más visuales, otros más auditivos, entonces tener en cuenta todas esas condiciones, eso es importante.

5.3.2.2 Reflexiones sobre el uso de la pregunta como recurso. Tomamos el recurso de la pregunta para reflexionar porqué en la práctica pedagógica de la profesora María observamos que a través de preguntas guiaba a los estudiantes en la solución de ejercicios. Veamos en la transcripción de la clase que se refiere a esto:

M: ¿si yo hiciera acá seis dobleces?, que números iba a tener acá.

E: Treinta y cuatro (*dicen unos estudiantes*); treinta y seis (*dicen otros estudiantes*); sesenta y cuatro (*respuesta correcta de Óscar*)

M: Escuchamos a Oscar que fue el que nos habló de sesenta y cuatro, ¿por qué y de dónde sacó eso?

E: Porque dieciséis por dos es treinta y dos, serían cinco dobleces y treinta y dos por dos serían sesenta y cuatro, sesenta y cuatro son seis dobleces.

M: Listo; muy bien, Oscar. Entonces si yo coloco acá cinco me daba...
¿Cuánto?

E: Treinta y dos.

M: Treinta dos, que era dos a la cinco; si yo sigo acá con el seis, me daría...
¿Cuánto? Dos a la seis, daría sesenta y cuatro; ahora los que dijeron veinte y
cuatro... Camilo, ¿por qué dijo veinte y cuatro?

Vemos entonces, que la profesora tomó la respuesta correcta y le pidió al estudiante que la explicara a sus compañeros. Precisamente cuando los estudiantes realizan aportes al temaes –entre otras razones– porque encuentran un clima de confianza en el aula de clase el cual ha sido favorecido por el profesor y los compañeros de clase; este espacio es valioso pues los estudiantes en medio del discurso que comparten como explicación dan a conocer los preconceptos que tienen, la claridad con la cual están aprendiendo el nuevo tema; muestran la forma como reciben la información y la transforman. Es por esto que la profesora María argumentaba que por medio de las preguntas evaluaba las estructuras del pensamiento de cada estudiante. Al respecto comentó:

M: Lo que hice con las preguntas, era buscar saber, cómo es la ruta de pensamiento de los estudiantes; por qué dan ese tipo de respuestas. Pero ahí busqué el que me diera la respuesta correcta, para que los otros dijeran “ah, este era el camino”.

A la pregunta *¿qué peso le da a las preguntas que realiza en clase?*, la profesora contestó:

M: Para mí es muy importante porque me gusta saber cómo piensan ellos. Ellos generalmente dicen respuestas al azar, esa es la intencionalidad de las preguntas: mirar cómo es que ellos en su mente van armando la estructura lógica.

Finalmente, la pregunta es empleada como recurso en la metodología de la profesora María porque cumple con el propósito de facilitar el proceso de comunicación pues en forma inmediata retroalimenta lo que le permite desleír planteamientos incorrectos adicionales a que fortalecen la autoestima y la seguridad de los estudiantes.

5.3.2.3 Reflexiones sobre el uso del libro como recurso. Referente al libro, le preguntamos a la profesora María si manejaba las competencias que trae el libro guía de los estudiantes, y respondió al respecto:

P: Para mí eso, creo que es lo más importante, y es lo que me parece es lo positivo en el nuevo sistema educativo, que ahora es por competencias, y no como antes que era más tradicional sino que realmente una busca qué habilidades adquirió el estudiante, cómo aprende él; si aprendió esas habilidades que son básicas para el razonamiento lógico y para poderse desenvolver en la vida.

En el texto el manejo de las competencias se identifica por colores de acuerdo a lo que se va a desarrollar y encierra en círculos el proceso al que corresponda el ejercicio, esto le permite al estudiante saber lo que se pretende desarrollar con la actividad propuesta (ver Figura 40).

Figura 40. Estructura del libro Navegantes 8º

Practica y aprende 

Comunicación

1.  Completa la siguiente tabla.

Potencia	Base	Exponente	Resultado
$(-1)^{10}$		-3	
$\left(\frac{4}{3}\right)^5$	6		
	-5	-2	
	0	10	

2.   Calcula las siguientes potencias. Luego completa la conclusión.

a. $(-2)^4 =$ _____

b. $(-3)^2 =$ _____

c. $(-1)^{10} =$ _____

d. $\left(-\frac{1}{2}\right)^6 =$ _____

La potencia de un número real negativo cuyo exponente es par siempre es _____.

3.   Calcula las siguientes potencias. Luego completa la conclusión.

a. $(-2)^3 =$ _____

b. $(-3)^5 =$ _____

c. $(-1)^{11} =$ _____

d. $\left(-\frac{1}{2}\right)^7 =$ _____

e. $(-5)^3 =$ _____

La potencia de un número negativo cuyo exponente es impar siempre es _____.

 Competencia interpretativa: identifica los términos de la potenciación.
 Competencia argumentativa: calcula potencias y simplifica expresiones aplicando las propiedades de la potenciación.
 Competencia procedimental: resuelve y resuelve problemas aplicando la potenciación en los números reales.

Conexiones

4.  Simplifica las siguientes expresiones utilizando las propiedades de la potenciación:

a. $\frac{5^2 \times 5^4}{5^3} =$ _____

b. $\frac{(-3)^6}{9^3} =$ _____

c. $\frac{(6^2)^3 \times 6^0}{10^4 \times (3^3)^2} =$ _____

5.   Analiza y completa cada secuencia numérica.

a. 1, -2, 4, -8, 16, _____, _____

b. 1, 5, 25, _____, 3125, _____

c. 1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{27}$, _____, _____

d. 1; 0,5; 0,25; _____; _____; _____

6.   Analiza la siguiente secuencia y escribe el número de puntos que hay en cada figura.



a. ¿Cuántos puntos tendrá la quinta figura?

b. ¿Cuántos puntos tendrá la sexta figura?

c. Escribe una expresión que represente el número de puntos que tendrá la n -ésima figura.

Más práctica,
página 196

23

Fuente : Autoras del Proyecto

Por su parte, aunque la profesora rescata la estructura del libro en competencias, en la práctica no identificó el tipo de competencia de cada numeral y por eso la orientación dada fue escasa y no se alcanzó el objetivo subyacente en cada ejercicio. Por lo tanto, se hace necesario que la profesora María revise cómo el libro trabaja las competencias y sus respectivos procesos.

Ahora, teniendo en cuenta que el trabajo con el libro es la plataforma de la clase, se le preguntó a la profesora *¿cómo trabaja el texto guía?*, a lo cual contestó:

I: ¿Cómo trabaja con el texto de los estudiantes?

M: Como el texto trae los espacios para que los estudiantes completen, yo manejo seis monitores que son los mejores del salón de matemáticas (ver Figura 41) entonces ellos revisan al inicio de la clase la tarea, no revisan en el sentido de que ellos califiquen, evalúen, simplemente confirman “se hizo, no se hizo”, mirar si están siendo responsables practicando, después pasamos a confrontar en los ejercicios en qué hubo problemas, porque el tiempo tampoco es tan extenso no podemos hacer uno por uno, los cincuenta ejercicios que hay en la página, entonces cogemos modelos prototipos y despejamos las dudas, y así manejamos el libro.

Figura 41. El trabajo de los monitores en la clase de la profesora María



Fuente: Autores del Proyecto

Spelling (2005) afirma que las tareas escolares son importantes porque pueden mejorar el razonamiento y la memoria de los niños. Pueden ayudar a desarrollar

destrezas de estudio y hábitos intelectuales que les servirán el resto de la vida. Para María revisar la tarea es una manera de poder controlar al estudiante en sus procesos de aprendizaje dentro de la institución y en sus hogares. Se hace necesario que siga fomentando este hábito, así los estudiantes exploran más a fondo los temas vistos en clase.

Recordemos que el texto usado por María es “Navegantes 8” luego, sugerimos de manera general, tener varias referencias de libros para retroalimentar las diferentes propuestas metodológicas de enseñanza. Al respecto, la profesora María comentó:

P: generalmente yo tengo tres libros y comparo a ver cuáles tienen mejores estrategias, entonces una escoge como la que le parece más adecuada para ellos.

Los autores Romberg y Carpenter(1986) enfatizan que *el libro de texto es visto como la autoridad del conocimiento y guía del aprendizaje. La propiedad de las matemáticas descansa en los autores del libro texto y no en el maestro.* Por lo tanto, es importante que el profesor sea cuidadoso en la selección del libro de texto pues más allá de que la presentación sea agradable, constatar que los ejercicios y problemas sean interesantes y que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático y que realmente sea una brújula para el estudiante no solo para el profesor.

Referente al tipo de ejercicios que la profesora María selecciona para que sus estudiantes realicen, se le preguntó *¿cuáles son los procesos matemáticos importantes al momento de proponerlos para el desarrollo de la clase?*, y ella respondió:

P: Generalmente hacemos uno de acá(*señala los ejercicios de comunicación*), otro de acá(*señala los ejercicios de conexiones*), pero generalmente sí busco

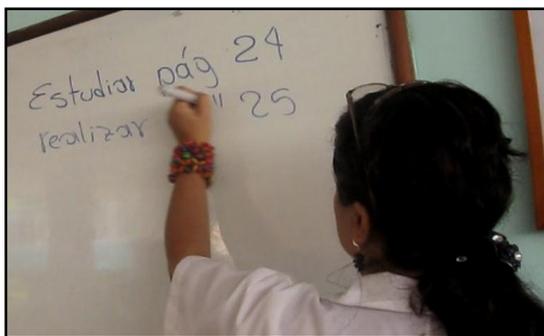
los que tengan problemas, los que no sean solo hacer el algoritmo, sino que estén como aplicados; ejemplo: a veces llevo otros ejercicios que no son del libro y que hablan de problemas en situaciones matemáticas.

Por último, resaltamos la claridad que la profesora muestra en cuando a la resolución de problemas como plataforma para potenciar las habilidades de los estudiantes y sus capacidades básicas como leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo, revisarlo y adaptarlo.

5.3.2.4 Reflexiones sobre el uso de la coevaluación como recurso. Dentro de la metodología de clase es importante realizar un cierre de cualquier actividad matemática que diseñe o proponga pues esto permite formalizar los contenidos vistos en ella. La profesora María, no alcanzó a realizar el cierre de la clase de Álgebra por lo que lo realizó en la clase de Geometría (ver Figura 42) aunque en la entrevista reconoció la importancia de la actividad de cierre, veamos:

M: Es importante hacer un cierre en cualquier actividad que se lleve a la clase, en geometría cerramos la explicación enunciando las propiedades y resaltando que en esa página 24 estaban las propiedades en un recuadrado que tenían que repasar para hacer los ejercicios que iban a quedar de tarea. Además hay que preguntarles a los estudiantes qué aprendieron hoy de nuevo, qué les quedó claro, cuáles cosas hay que reforzar, eso es necesario para hacer el seguimiento de la clase.

Figura 42. Actividad de cierre de la clase



Fuente: Autoras Proyecto

Es importante realizar una coevaluación durante o al finalizar la actividad matemática, entre los estudiantes y el docente para que se puedan evaluar ciertos aspectos que resulten interesantes destacar. Teniendo en cuenta lo que María manifestó en la entrevista, se le preguntó *¿qué actividad matemática logró desarrollar en los estudiantes y de qué se apropiaron?*, a lo que contestó:

M: Yo creo que en la parte de la comunicación tienen lo básico que es manejar el lenguaje, qué es exponente, qué es la base; en cuanto a los ejercicios de propiedades, algunos, no todos saben resolverlas, identificarlas y aplicarlas.

Al igual que para todos los profesores, según la profesora María es esencial que los estudiantes entiendan las actividades que se llevan a la clase y dejen ver si para ellos estas actividades fueron sencillas y comprensibles. De hecho, cuando la profesora ejecutaba las actividades matemáticas, finalizaba preguntando a sus estudiantes si entendieron. En el caso particular de la clase, las aplicaciones en la potenciación. Respecto a las dudas que quedaron en el planteamiento de estas actividades, la profesora María comentó:

M: Después de haber visto los vídeos y reflexionado más sobre la clase, me parece que es clave detenerse a reflexionar sobre lo que hizo y mirar los errores; por ejemplo, ahí se cometieron errores en los cuales se dieron conceptos erróneos como el de elevado a la cero y eso implica que van a quedar con una base errónea y se hace necesario, en la siguiente clase, retomar y explicarles especialmente esa parte para que no quede así y me parece antes excelente porque así el estudiante dice ¡ah!, bueno, el profesor también se equivoca o yo tengo que estar atento y decirle mire ahí no puso eso, debía ser uno, entonces también uno puede evaluar qué tan concentrados están y pueden también mejorar.

La coevaluación permite que todos los alumnos de un grupo participen evaluando el trabajo de los demás, esto sirve para que todos aprendan de todos y puedan corregir sus propios errores y no cometer los errores de los demás. Este tipo de evaluación se considera como un recurso, pues evalúa el desempeño de cada estudiante a través de sus propios compañeros.

Otro aspecto a resaltar se presentó cuando la profesora pasaba por los puestos de sus estudiantes revisando si habían realizado la tarea asignada en la clase anterior, de esta manera identificaba quienes la realizaron o no, además detectaba a los estudiantes que no entendían y por temor no expusieron sus dificultades.

I: ¿Cómo evalúa a sus estudiantes durante la clase?

M: Yo paso por los puestos, por ejemplo: cuando iniciamos la parte de los ejercicios en el tablero, que ellos mismos resolvieran y comunicaran lo que habían hecho, ahí pasé por los puestos y vi que en el taller de los ejercicios en el punto cuatro, creo que es donde ya tenían una mezcla de varias propiedades en donde se dificultaba. Entonces esos fueron los ejercicios de ese numeral. que pasamos a resolver,

Así, como lo afirma Clarke (2004, p. 12), desde su investigación, los paseos entre escritorios promueven “instrucción-entre-escritorios” mientras los estudiantes trabajan individual o colectivamente, el profesor se pasea observando su trabajo, hablándoles o no, y/o interactuando con ellos y permitiéndoles responder sus inquietudes.

Finalmente, la coevaluación es importante realizarla en el transcurso de la clase, es una manera diferente de evaluar el desempeño de los estudiantes, propone que sean los mismos alumnos los que tienen la misión de aprender, que se coloquen por un momento en los zapatos del docente y evalúen los conocimientos adquiridos por un compañero.

5.4 REFLEXIONES DE LA PROFESORA MARÍA SOBRE LA NUEVA EXPERIENCIA

Al igual que al profesor Humberto, en esta etapa se le pidió a la profesora María diseñar una nueva planeación (ver Figura 43) de acuerdo al tema que estuviera trabajando en el momento y que la pusiera en marcha para luego realizar la

reflexión de la clase llevada a sus estudiantes. También se le realizó una entrevista después de la clase dirigida.

5.4.1 Reflexión para la acción: Planeación de la clase. La nueva experiencia fue realizada con el mismo curso de octavo grado y en el segundo periodo académico. De la misma manera se hizo acompañamiento a la docente durante la sesión para registrar el video de esta clase. El tema de la nueva planeación fue ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios. A continuación la nueva planeación entregada por la profesora María:

Figura 43. Planeación de la nueva clase de la profesora María

Plan diario de Clase				
Maestro	Asignatura	Duración	fecha	
Olga P. Plata	Algebra	60 min	27 abril 2012	

TEMA: Ecuaciones lineales con Coeficiente Fraccionario.

OBJETIVOS

COGNITIVO:

Que el estudiante sea competente en identificar y desarrollar estrategias para solucionar ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios.

PROCEDIMENTAL

Reforzar el hábito de preparar el tema de la clase.

ACTITUDINAL

EL estudiante desarrolle la disciplina de aprovechar el tiempo.

Material	Descripción
Libro, lápiz, tablero	Inicia con un recuento de la clase anterior ecuaciones lineales con coeficientes enteros, que es lo nuevo hoy, que son los fraccionarios, como se halla el mínimo común múltiplo. Hay dos estrategias para resolver este tipo de ecuaciones, siguiendo el ejemplo del libro. Resolver 3 ejercicios uno de comunicación, otro de lógica y un último de conexiones.
calculadora	Cierre :Que aprendimos hoy. Y tarea próxima encuentro.

Fuente:Autoras del Proyecto

5.4.1.1 Consideraciones sobre la planeación. En cuanto a la planeación la profesora María tuvo en cuenta las reflexiones que se hicieron en la etapa anterior; interiorizó el valor de reflexionar sobre los objetivos que va a planear y definirlos en términos precisos, esto, para establecer qué se espera que los estudiantes sepan o sean capaces de hacer como resultado del proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto se evidencia en el objetivo cognitivo que planteó (Figura 42) en su planeación.

Un aspecto que llama la atención en primer plano es el formato de la planeación pues lo presentó de una manera más organizada, y planteó los objetivos desde las tres dimensiones que define la institución en la cual labora: cognitiva, procedimental y actitudinal¹². En cuanto al desarrollo de la clase, planteó la metodología que utilizaría; planeó iniciar retomando el tema de la clase anterior para mostrar la continuidad con el nuevo tema.

Otro aspecto que se resalta es que en los objetivos seleccionó los contenidos y los conocimientos previos de los estudiantes, en este caso, para resolver este tipo de ecuaciones con coeficiente fraccionario necesitan hallar el mínimo común múltiplo de los coeficientes. Además, María planteó resolver ejercicios; en su planeación integró los procesos matemáticos que quería utilizar como resolver un ejercicio de comunicaciones, uno de razonamiento lógico y uno de conexiones. Para realizar el

¹²Para la Institución Bicentenario es importante evaluar al estudiante desde las tres dimensiones que están definidas de la siguiente manera:

- a) *Dimensión cognitiva:* debe apuntar a registrar, las fortalezas, aciertos y debilidades del estudiante o en el correcto al manejo de conocimientos, categoría que permitan desarrollar competencias como comprensión, la argumentación y la proposición en cada una de las etapas del aprendizaje.
- b) *Dimensión procedimental:* se relaciona con las formas o modos de actuar correctamente en las diferentes actividades programadas para desarrollar habilidades y destrezas psicomotrices, destrezas manuales y/o intelectuales. Las habilidades han de construirse en el fundamento principal para el desarrollo de los diferentes procesos y que deben ser logrados a través de diversos medios y actividades.
- c) *Dimensión actitudinal:* estará enmarcada en las actuaciones del estudiante frente a su entorno social, natural y así mismo como ser responsable de sus actuaciones. Los valores, las actitudes y las expresiones se consideran como manifestaciones del comportamiento.

cierre de la actividad, la profesora María preguntará o motivará a los estudiantes para que cuestionen sobre su aprendizaje y asignar la tarea de la próxima clase. Como materiales propuso el libro, lápiz y esta vez propone la calculadora como herramienta de trabajo.

De lo anterior, resulta significativo para el proceso que se ha desarrollado con la profesora observar los cambios significativos que realizó, lo que permite concluir que para ella fue valiosa la etapa de apoyo con las herramientas ya que le permitieron reflexionar sobre cómo seleccionar y usar los recursos de manera más productiva y significativa.

Finalmente, un aspecto a resaltar aquí es que pese a la reflexión, la profesora no desarrolla los problemas o ejercicios de la clase.

5.4.2 Reflexión en la acción: Puesta en marcha. De lo anterior se tiene que para la profesora María el apoyo recibido de las herramientas de reflexión le permitió tener un cambio esencial en su reflexión para la acción. No obstante, su presentación tiene el mismo esquema de la clase anterior, parece ser que éste es su esquema general de enseñanza. La clase se desarrollaría en cinco episodios que sumarían sesenta minutos aproximadamente.

EPISODIO No. 1: REPASO DE LA CLASE

La profesora María inició la clase saludando a sus estudiantes, les exigió de manera cordial el aseo del salón. Luego realizó el recuento de la clase anterior tal cual se puede apreciar en la transcripción de la clase:

P: En la primera parte vamos a hacer un recuento de lo que vimos la clase pasada de ecuaciones lineales con una incógnita. Para que encuentren una relación con lo que vamos a ver hoy.

5.4.2.1 Consideraciones del Episodio 1. Acertadamente la profesora María incluyó, como resultado del primer ejercicio de reflexión, la revisión de los conceptos anteriores para verificar las falencias y fortalezas del tema anterior, lo cual permitió tener éxito en la adquisición de un nuevo contenido matemático para que los estudiantes encontraran una conexión con el nuevo tema. Igualmente, fue válido que, ante este ejercicio, ubicara a los estudiantes en el tema que iba a iniciar, pues esto permitió llevar un hilo conductor y enlazar los dos temas.

EPISODIO No. 2: REVISIÓN DE LA TAREA

Para la revisión de la tarea, la profesora les pidió a los estudiantes que socializaran, de la consulta de investigación, los términos del nuevo tema tal cual se puede apreciar a continuación:

E: ¿Qué es coeficiente y cuáles son los números fraccionarios?

M: Muy bien; cuál es la respuesta, ¿quién nos aporta con la consulta?

E: Es un factor constante que multiplica la variable.

M: ¿Y qué es eso de *factor*?... En matemáticas, ¿qué quiere decir?

E: Un número (*responden unos estudiantes*); la parte numérica (*responden otros estudiantes*)

M: Como dice Aníbal, es un factor que multiplica a nuestra incógnita, cuando en matemáticas me hablan de factor es el producto, la multiplicación, es el número que me está multiplicando a la variable, ¿Quién habíamos dicho que era la variable?, la x , y los otros eran números fijos, constantes, por eso me dicen que es un factor constante, por ejemplo si teníamos acá (*escribe en el tablero $2x + 3 = 15$*), aquí el coeficiente es el factor dos que está multiplicando a mi variable.

Como se pudo apreciar, el sentido de la realización de una tarea es permitirles a los estudiantes explicar en sus propias palabras lo comprendido de la consulta realizada con ello se favorece la interpretación y la apropiación de conceptos.

5.4.2.2 Consideraciones del Episodio 2. Al revisar la tarea la profesora María está corroborando la interpretación de las definiciones o conceptos que del libro

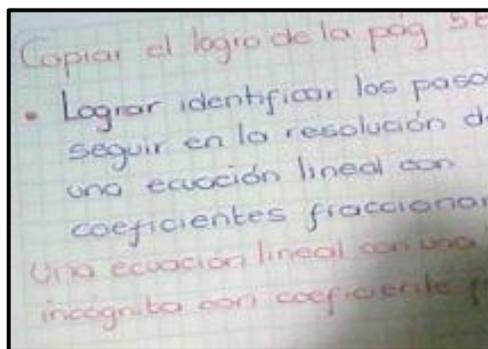
hicieron los estudiantes, actividad que es esencial teniendo en cuenta que cada estudiante interpreta de manera diferente por lo cual es importante unificar conceptos. Resaltamos la disposición constante de la profesora María para involucrar a los estudiantes a través de la participación pues los estudiantes estaban atentos a las consultas de sus otros compañeros.

En esta oportunidad no se limitó a la participación de los estudiantes destacados de la clase, permitió que varios compartieran su tarea y, a su vez, que todos reflexionaran sobre el ejercicio individual que hicieron en casa y que en clase se estaba validando de manera colectiva, este ejercicio se logró como resultado de la reflexión que la profesora realizó sobre este recurso anteriormente.

EPISODIO No. 3: EL TRABAJO CON EL TEXTO ESCOLAR

En este episodio fue visible el cambio con el trabajo del texto escolar. La docente María pidió a sus estudiantes que leyeran el logro y las competencias que el libro plantea para este tema lo cual es pertinente en términos de que los estudiantes conozcan qué es lo que se quiere lograr con las actividades en las cuales se pretenden involucrar. En la Figura 44 se puede observar que algunos estudiantes transcribieron la indicación de la profesora respecto al logro. Veamos, además, un fragmento de este momento en clase:

Figura 44. Apuntes de un estudiante



Fuente: Autoras del Proyecto

P: ¿Laura qué sigue?

E: Copiar el logro de la página treinta y ocho. Identificar los pasos a seguir en la resolución de una ecuación lineal con coeficientes fraccionarios.

P: ¿Qué piensan cuando dicen *identificar*?

E: Reconocer a simple vista, en este caso, cuáles son las ecuaciones lineales.

Se tiene, entonces, que para el buen desarrollo de la clase es importante identificar la terminología del tema, para tener bases teóricas que le permita a los estudiantes sustentar los contenidos que va adquirir.

Por último, y en cuanto al desarrollo del tema, el texto plantea dos formas de resolver las ecuaciones con coeficientes fraccionarios. La profesora María le pidió a los estudiantes que leyeran cuidadosamente los pasos para la solución de este tipo de ecuaciones. Posteriormente, ella y los estudiantes desarrollaron de manera colaborativa los pasos que trae el texto para ampliar lo propuesto por libro ya que la explicación ofrecida sintetiza en gran manera las operaciones lo que resulta “muy resumido” para los estudiantes.

5.4.2.3 Consideraciones del Episodio 3. La revisión de los logros y ejercicios por procesos y competencias fue una de las sugerencias que resultó de la reflexión con la profesora. María validó esta recomendación implementándola en la nueva clase pues les pidió a los estudiantes que leyeran el logro y las competencias que trabaja cada ejercicio para así comprender su objetivo.

EPISODIO No. 4: MANEJO DE LOS CONOCIMIENTOS QUE ENSEÑA

Un momento que consideramos valioso para revisar en este episodio fue cuando la docente intentó dar una definición del conjunto de los números enteros y, al escribir en el tablero la notación correspondiente le faltó incluir el cero y además lo presentó como un conjunto de dos elementos. Veamos cómo la profesora María no fue consciente de esto, al momento de responder a sus estudiantes:

E: ¿Profe qué es la zeta?

P: Los números enteros. ¿Cuáles son los enteros?... Los representábamos con la letra Z y están conformados por los enteros positivos y los enteros negativos (*escribió en el tablero* $Z = \{Z^+, Z^-\}$).

Aquí podemos observar que la profesora en su notación no tiene claro la definición de los números enteros, pues la manera correcta de escribir su definición es la siguiente: $Z = Z^+ \cup \{0\} \cup Z^-$. De este modo, la profesora recae nuevamente en un error en el discurso que emplea para explicar, lo cual nos lleva a cuestionarnos sobre el control que realiza sobre su propio recurso en la medida que lo va exponiendo a los estudiantes y el nivel de apropiación que tiene del conocimiento matemático que enseña teniendo en cuenta que para ella es una tarea más exigente, pues no era su área de dominio (recordemos que la profesora era física).

5.4.2.4 Consideraciones del Episodio 4. Según lo anterior, es esencial que al momento de enseñar matemáticas –u otra área– quien lidere ese proceso pedagógico domine lo que enseña pues, de lo contrario, se abre un gran margen de error entre lo que correcto y lo que no lo es en el sentido de la conceptualización. Así, con este segundo acontecimiento errático de tipo conceptual, concluimos que la formación profesional de la profesora María no es suficiente para enseñar matemáticas ya que según Buchmann (1984, p. 37) "conocer algo nos permite enseñarlo; y conocer un contenido con profundidad significa estar mentalmente organizado y bien preparado para enseñarlo de una forma general".

De este modo, se puede concluir que en el proceso de reflexión, la profesora no contó con su propio conocimiento matemático como recurso para promover la actividad matemática de sus estudiantes, por lo cual no se percibió inquietud sobre sus errores de manera introspectiva.

EPISODIO No. 5: CIERRE DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

En la planeación de la clase la profesora María proyectó el momento del cierre, sin embargo, en la ejecución de la clase el tiempo estipulado para el desarrollo de la misma se le agotó y, en aras de propiciar el cierre, pidió a sus estudiantes realizar un ejercicio de cada competencia y de cada proceso, pero los estudiantes se mostraron cansados y ya estaban dispersos por lo que la profesora no pudo concretar el momento del cierre. Veamos la transcripción de la indicación de la profesora:

M: Vamos hacer lo siguiente jóvenes, para cerrar la clase hacemos un ejercicio de cada uno, si alguien se ofrece al tablero y lo va haciendo y podemos iniciar con geometría, del libro de la página treinta y nueve vamos a mirar un ejercicio de la tabla donde vamos hacer el adel primer punto, todos están mirando el libro en la página treinta y nueve que es Comunicación, terminamos y dejamos de tarea lo demás. Entonces vamos a mirar cómo se resolvía el primero. Todos en el libro.

Recordemos que el cierre de la clase se caracteriza porque es un momento donde el profesor sintetiza los contenidos, abriendo nuevos desafíos o tareas para revisar en la próxima clase lo cual implica un tiempo prudencial para realizarlo.

5.4.2.5 Consideraciones del Episodio 5. Teniendo en cuenta la importancia que la profesora manifestó alrededor del cierre de la clase anteriormente, fue lamentable que no pudiera realizarlo pues lo tenía planeado aunque no planeó (distribuyó) el tiempo adecuadamente para concretarlo. Así, los profesores deben manejar diferentes variables en el momento de planificar sus clases para poder desarrollar en su totalidad, así cuestiones como el cansancio, las dudas de los estudiantes, las misma interrupciones o lo que muchos profesores llamamos *indisciplina* llevan a que las clases no se cierren como se planifican.

Respecto al pensamiento orquestal, la profesora orquestó de manera significativa el desarrollo de la actividad matemática propuesta en el texto guía siendo este su recurso en esta nueva experiencia, esto lo logró pues al tomar

consciencia después de la reflexión alrededor de este recurso— de los aspectos por mejorar y de las cosas que estaba pasando por alto logró implementar mejor el recurso en la enseñanza y así aprovechar al máximo el contenido del mismo. Y, nuevamente vimos a la profesora emplear eficientemente el recurso de la pregunta para mantener integrados a los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

5.4.3 Reflexión sobre la acción de la clase planeada y realizada. Con el vídeo de la nueva experiencia los investigadores recogieron la información necesaria para observar los cambios realizados por la profesora en el análisis y las reflexiones realizadas en la etapa de intervención.

Así, para esta etapa se realizó una entrevista a la profesora María centrada en los hallazgos del vídeo de la segunda clase para indagar las nuevas apreciaciones que surgieron sobre los recursos empleados y las situaciones didácticas que se tejieron en el desarrollo de la clase.

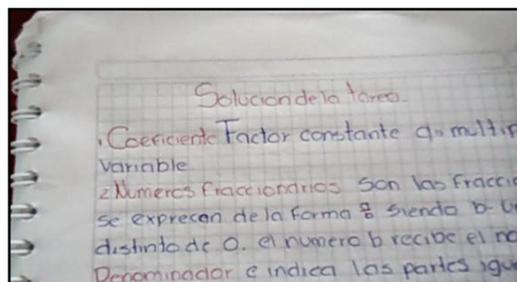
5.4.3.1 Consideraciones sobre la reflexión de la profesora María. En la entrevista que se realizó a la profesora María, ella manifestó que los videoclips y las herramientas que se le ofrecieron en la socialización para ayudarla a reflexionar en la fase de intervención fueron esenciales para la nueva experiencia; en palabras de la profesora:

P: Me aportaron varios aspectos, como enriquecer mi labor con los estudiantes, en cuanto a la planeación investigar más sobre los recursos que lleve a la clase y además hacerme una introspección de mi quehacer pedagógico.

Como se refleja en la participación, la profesora se reconoció como protagonista de un proceso que empieza por la observación y pasa por varias etapas de reflexión que le permitirán, a la postre, introducir mejoras en la práctica educativa.

En cuanto al pensamiento matemático la docente asume una actitud más reflexiva respecto al contenido matemático, revisa los conceptos que va a manejar para prever alguna inquietud de los estudiantes (ver Figura 45), los términos desconocidos los explicaba de una manera que el estudiante asimilara la terminología y pudieran entender el tema que planeó. En esta ocasión la docente utiliza un lenguaje más claro para exigirles a los estudiantes que sus argumentaciones sean más lógicas y coherentes. Para Chevallard (1991) citada por Parada (2011) la matemática tiene, como la mayoría de las ciencias un lenguaje propio el cual da claridad a los objetos matemáticos para comunicarlos de manera clara y precisa. Sin embargo, queda la inquietud sobre la reflexión que debería hacer de la apropiación que tiene del conocimiento matemático que le enseña a los estudiantes, pues los dos errores conceptuales cometidos ameritaban de parte de ella una reflexión profunda que le permitieran crear estrategias a nivel personal y que le ayudarán a evitar estas situaciones que en términos de formación matemática traen consecuencias en la formación de conceptos y, posteriormente, en la resolución de problemas por parte de los estudiantes. Shulman (1987) afirma que el profesor debe tener un nivel mínimo de dominio del contenido que se propone enseñar, el profesor necesita no sólo conocer o comprender qué, sino además saber también por qué esto es así, sobre qué supuestos pueden ser ciertas estas justificaciones y bajo qué circunstancias nuestras creencias en estas justificaciones pueden ser débiles y aún denegadas.

Figura 45. Evidencia de la tarea de la nueva experiencia



Fuente: Autoras del Proyecto

Respecto a la pregunta *¿cree que en esta nueva experiencia cumplió con los objetivos que planeó?*, la profesora contestó:

M: Sí se cumplió con los objetivos propuestos. Durante la clase los estudiantes desarrollaron las actividades que tenía planeadas y se apropiaron de los dos métodos de solución de ecuaciones.

Este cambio ayudó a que la docente reflexionara sobre los objetivos que plantea para la clase, además le permitió con su forma de dirigir la clase que el estudiante le diera importancia al trabajo con el texto ya que es su herramienta de apoyo.

En cuanto al pensamiento pedagógico y didáctico se observaron cambios en el desarrollo de la clase pues en esta nueva experiencia la profesora María modificó su esquema de trabajo porque realizó un enlace de los temas a trabajar para que los estudiantes le encontraran sentido a la construcción del conocimiento matemático.

I: ¿Cómo enlazó la clase anterior con el nuevo tema?

P: Lo primero que se hizo fue revisar la tarea que estaba relacionada con la clase anterior, luego hice un *recorderis* de la temática trabajada. Allí les hablé de las ecuaciones lineales con coeficientes enteros porque el tema a estudiar cambiaba los coeficientes a fraccionarios.

El uso del recurso del texto mejoró ya que lo utilizó de una mejor manera tomando en cuenta las indicaciones que traía para el desarrollo del tema y orientó a los estudiantes a reconocer los logros que se esperan alcancen con la realización de las actividades del libro, siendo esta una de las sugerencias que se le realizó con el apoyo de las herramientas de análisis en la fase de intervención. También mejoró la implementación de la pregunta como recurso de la clase ya que las formuló de manera más concreta tratando de conducir al estudiante a la respuesta esperada y dándole mayor tiempo para pensar. .

Desde el pensamiento orquestal, se percibió un cambio con relación al uso del libro como recurso, en esta ocasión la docente le dio importancia a la manera como presenta el libro los temas, las competencias que busca con el desarrollo de los ejercicios. Finalmente, esta observación se hace parcialmente porque este es un proceso de autorregulación largo que requiere tiempo, constancia y seguimiento para lograr las clases perfectas en términos de lo que se debe lograr en la enseñanza matemática de un tema específico y del proceso de formación matemática en general...

5.5 CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL PROCESO DE REFLEXIÓN DE LA PROFESORA MARÍA

Desde su experiencia, la profesora María nos compartió lo enriquecedor que fue para ella esta experiencia ya que durante su formación no encontró estos espacios de reflexión, además le permitió hacer una introspección de su quehacer como docente.

Para María fue valiosa la etapa de la intervención con las herramientas de análisis ya que le permitió ver la importancia de la planeación y la organización que esta estructura muestra para el desarrollo de la clase

Así, como recordaremos, el primer cambio que se evidenció en su segunda clase en la profesora fue su actitud, pues mostró más interés en la planeación lo cual se vio reflejado en la presentación que hizo de la misma, pues recurrió al computador para digitarla superando la hoja suelta y escrita a la ligera que entregó en su primera planeación. Sin embargo, no planeó la clase.

En el desarrollo de la segunda clase, la profesora estuvo más pausada, dándoles a los estudiantes más tiempo para pensar sobre las preguntas que ella realizaba

para dinamizar la clase. Mejoró su tono de voz y sus expresiones gestuales para favorecer el entendimiento por parte de los estudiantes. Es decir, se vio a sí misma como recurso humano esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Además, en la segunda clase la profesora María, cambió la percepción sobre el uso del recurso, en el sentido en que no era la cantidad o variedad de materiales los que darían riqueza a la clase sino la seguridad y coherencia con los contenidos que se pretenden estudiar con el apoyo de éstos. Se observó que en esta última experiencia ella siguió enfatizando en las preguntas y el trabajo con el texto dando mejores orientaciones lo cual fue esencial en términos de que los estudiantes fueron participes de lo que se pretendía lograr con la actividad.

Finalmente, al igual que el profesor Humberto, la profesora se hizo consciente del acompañamiento que realiza a sus estudiantes, cómo se relaciona con ellos y en la incidencia que las actividades que propone y los recursos que selecciona tienen la motivación de los estudiantes y en los logros que se proponga alcanzar en el desarrollo de la actividad matemática.

CONCLUSIONES

1) En esta investigación se trabajó con el Modelo R-y-A de Parada (2009 y 2011) como directriz del marco teórico y del diseño metodológico de la misma, siendo la esencia del modelo la reflexión constituida por un proceso de diferentes etapas: reflexión para la acción, reflexión en la acción y reflexión sobre la acción; proceso que permitió –en mayor o menor grado– que los profesores casos de nuestro estudio fortalecieran sus prácticas pedagógicas a través de la observación de su trabajo, del análisis objetivo de sus metodologías y de las orientaciones que resultaron de las herramientas construidas para propiciar la reflexiones sobre los recursos seleccionados y usados en sus clases.

2) *Promover procesos de reflexión* en los profesores Humberto y María; implicó que ellos nos dieran la oportunidad de observar y evaluar su quehacer pedagógico; además, que los profesores se vieran así mismos dando clase y que ellos asumieran positiva y constructivamente el hecho de ver sus fortalezas y debilidades, específicamente, en cuanto a la selección y el uso de los recursos llevados al aula y sobre cómo éstos les ayudan a promover actividad matemática en sus estudiantes. Todo lo anterior, también les permitió asumir este ejercicio de reflexión no como un señalamiento o enjuiciamiento sino como una oportunidad para mejorar su práctica profesional.

3) En los dos docentes se observó un interés por obtener la atención de los estudiantes mediante la realización de actividades variadas, no obstante en la primera experiencia ninguno de los dos profesores pudo orquestar con los recursos que llevó a la clase porque no hicieron una adecuada revisión de la actividad, pero luego, con el apoyo de las herramientas les permitió generar pequeños cambios con los que se pudo evidenciar ciertas mejoras en su quehacer diario.

4) La comparación entre las rutas cognitivas de lo que se planeó y lo que se desarrolló les permitió valorar si los recursos seleccionados tuvieron el impacto que planearon en el aprendizaje del tema que enseñaban, si lograron emplearlos de tal manera que fueran facilitadores del proceso de enseñanza-aprendizaje o no. Recursos que, como sucedió en ambos casos, no impactaron en lo didáctico porque los profesores no los dominaban o porque supusieron que los estudiantes dominaban, el caso de la tabla de doble entrada del profesor Humberto.

5) El proceso de reflexión les permitió a los dos profesores valorar la planeación a través de una organización de contenidos y recursos que condujeran gradualmente a los estudiantes a los objetivos trazados para cada clase.

6) Las reflexiones que se realizaron durante la aplicación del modelo posibilitaron que los dos profesores ser conscientes de las dificultades que se pueden enfrentar entorno a los recursos que usan en clase:

- Humberto no se dio cuenta en la primera clase de la dificultad que tenían sus estudiantes con la tabla de doble entrada.
- María, al momento de usar el libro para dejar un tarea de fortalecimiento del tema, no se percató que en los ejercicios que dejó de tarea habían términos que los estudiantes no conocían, al mismo tiempo que esa tarea (la de la secuencia gráfica de los números cuadrados) demandaba de los estudiantes un nivel algebraico que no poseían para trabajarla en casa aun cuando la estrategia con el texto es valiosa pues fortalece el trabajo autónomo, la apropiación del lenguaje matemático y enfrenta a los estudiantes a la tarea de generalización.

Estos dos momentos de los respectivos episodios de clase de los profesores muestran las dificultades que la puesta en marcha de un recurso puede generar no solo en el aula sino en los hogares de los estudiantes cuando están realizando

tareas, dificultades que requieren de reflexión para evitarlas o tener control sobre ellas.

7) En los profesores casos de estudio se pudo observar el impacto que la aplicación del método tuvo en el desarrollo de sus clases y en la manera que se desarrollaron con los recursos seleccionados pues en la implementación de ellos mantuvieron presente el objetivo de los mismos dentro de la dinámica de enseñanza por lo que fueron más pausados, pacientes y orientadores sobre el uso de los recursos con los estudiantes.

8) En los profesores caso de estudio se pudo observar el impacto que las reflexiones efectuadas tuvieron en sus estructuras de enseñanza, ellos se mostraron de acuerdo con que sus planeaciones podían ajustarse para atender de la mejor manera las situaciones de aprendizaje.

9) Basados en la primera etapa de reflexión, los docentes se motivaron a mejorar el manejo de los recursos para ayudar a generar un ambiente enriquecedor y dinámico para el proceso de aprendizaje en los estudiantes; además los profesores se dieron cuenta que así como diseñaron sus dos últimas clases, pueden seguir trabajando en las demás.

10) Es significativo destacar que las reflexiones provenientes de la aplicación del modelo con los casos de estudio fueron un punto de partida para que ellos iniciaran un cambio positivo en sus salones de clase. El proceso si bien es positivo y genera mejoras, requiere a la vez de más tiempo en la planeación que el profesor no siempre tiene disponible.

11) En los dos casos de estudios, los profesores tomaron una postura de indagar y manejar mejor los recursos que llevaron al aula de clase para lograr la coherencia entre lo planeado y lo logrado, los profesores no asumieron el ejercicio

de reflexión como un proceso fustigante o de evaluación. Ellos sintieron que los procesos de reflexión realizados los llevaron a enfrentarse con sus responsabilidades y a asumir su trabajo de una manera crítica y renovada con el fin de favorecer su quehacer matemático y el aprendizaje de sus estudiantes.

12) Es importante enfatizar que los caminos a la reflexión en la formación de profesores (la cual va más allá de la recibida en las universidades) se constituyen en un proceso dinámico y continuo y que no se pueden esperar cambios de la noche a la mañana por parte de los profesores. El acompañamiento institucional es de fundamental importancia a la hora de generar procesos de reflexión pues ayuda al profesor a cuestionarse en aspectos aparentemente triviales que en ocasiones se pasan por alto, pero que en el fondo son de vital importancia.

En el contexto actual colombiano falta la oportunidad de ser retroalimentado por un par externo incluso esto se percibe más bien al agente externo como una amenaza que viene a criticar, pero no aporta elementos claros para la implementación eficaz de cambios.

Para finalizar proponemos expandir el modelo R-y-A y la formación en práctica reflexiva, en la cual de manera subyacente participaron los profesores Humberto y María, a los profesores de los diferentes colegios en forma de semilleros de reflexión o de comunidades de práctica. Así, esta investigación, las investigadoras y los profesores María y Humberto se constituyen como voceros de un proceso que vale la pena que se socialice, de un modelo que vale la pena aplicar para continuar favoreciendo las prácticas docentes en educación matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrangòiz, C., (1994). El valor de los libros de texto. Educación. *Revista del consejo nacional técnico de la educación*. 48. Noviembre. España.

Castiblanco, A.M, (2002). Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. *En el Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. Recuperado en http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articulos-92732_archivo.pdf el 5 de marzo de 2012.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Choppin, A. (1980). L'histoire des manuels scolaires. Un bilan bibliométrique de la recherche François. *Histoire del'Education* 58, pp. 165-185.

Clarke, D., (2004). Patterns of Participation inthe Mathematics Classroom. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education*.

Climent, N., (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto a la enseñanza de las matemáticas. Un estudio de caso*. Tesis doctoral. (Publicada en 2005. Michigan: Proquest Michigan University.www.proquest.co.co.uk).

Cooney, T.J., (2001). Considering the paradoxes, perils, and purpose of conceptualizing teacher development. En F. L. Lin y J.J. Cooney (Eds), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 9-31). *The Netherlands: Kluwer Academic*.

Cortázar, J., (1956). La continuidad de los parques. Recuperado en <http://www.literatura.org/cortazar/continuidad.html>

Dewey, J., (1989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Barcelona: Paidós.

Flores, P., (2007). Profesores de Matemáticas Reflexivos: Formación y Cuestiones de Investigación. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemáticas*. 1 (4), pp. 139-159.

Gervasi, L., (1995). *¿Cuál es el papel del profesor de matemáticas frente a los problemas de la educación matemáticas?* Unión Matemática. Argentina.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V., (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros*. Matemáticas y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. URL: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>

González, T & Sierra, M., (2004). Metodología de análisis de libros de textos de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Revista Enseñanza de las ciencias*. 22, pp. 389-408.

Guzmán, M., (1985). Enfoque heurístico de la enseñanza de la matemática. Aspectos didácticos de las matemáticas I. *Publicaciones del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza*, pp. 31-416.

Guzmán, M. (1987). Enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas. Esquema de un curso inicial de preparación. Aspectos didácticos de matemáticas II. *Publicaciones del Instituto de Ciencias de la Universidad de Zaragoza* pp. 52-75.

Guzmán, M (1989). Tendencias actuales de la enseñanza de las matemáticas. *Estudios pedagógicos. Revista de Ciencias de la educación* 21. pp 19-26.

Guzmán, M., (1995). Tendencias e innovaciones en educación matemática. *Conferencia en el Seminario de Educación Matemática*. (Documento inédito disponible en La OEI). OEI.: Bogotá.

Guzmán, M., (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*. 43, pp. 19-58.

Jiménez, A., Suárez, N & Galindo, S., (2010). La comunicación: Eje en la clase de matemáticas. *Revista Praxis y Saber*. 1, pp. 173-202.

Jiménez E., A. (2010). La naturaleza de la matemática, las concepciones y su influencia en el salón de clase. *Revista Praxis y Saber*, 2. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Ibáñez, C., (2007). Un análisis crítico del triángulo pedagógico. Una propuesta alternativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 2(32), pp. 435-456.

Kirpatrick, H. y Cuban, L. (1998). Computers Make Kids Smarter Right? *Technos Quarterly*. 7 (2). Recuperado en http://www.technos.net/tq_07/2cuban.htm

Lagrange, J., Artigue, M., Laborde, C. & Trouche, L., (2005) Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. *EnMemorias Primer Seminario Internacional de Tecnologías en Educación Matemática*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Linares, M., (1997). *El libro escolar: un caso particular "El Nene"*. Recuperado en [Documento en línea, consultado en Abril 1999], <http://www.unq.edu.ar>

Llinares, S., (2000), "Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas", en: Ponte y Serrazina, coords., *Educação matemática em Portugal, Espanha e Italia*, Lisboa, Portugal, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, pp. 109-132.

Llinares, S. & Krainer, K., (2006). Mathematics (students) teacher and teacher educator as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429-459). Rotherdam/ Taipéi: Sense Publisher.

Márquez, C. & Prat, A., (2005). Leer en clase de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(3), pp. 431-440.

Menezes, L. (2004). *A importância da pergunta do professor na aula de Matemática*. Escola Superior de Educação de Viseu. Recuperado en: <http://sites.google.com/site/luismenezes2009/> - 37k.

Ministerio de Educación Nacional, (2006). *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas*. Bogotá D.C.

Navarro, J. C., & Verdisco, A., (2000). La capacitación docente: Qué funciona y qué no. *Innovaciones y tendencias en América Latina*. Recuperado en septiembre de 2010 en: <http://www.educarchile.cl/>

Ortega, J. F. & Ortega, J. A., (2002). *Lenguaje Matemático: Una experiencia en los estudios de Economía de la UCLM*. Documento de trabajo de la facultad de ciencias económicas y empresariales de Albacete. Universidad de Castilla-La Mancha [Recuperado el 21 de febrero de 2009 de <http://www.uclm.es/ab/fcee/trabajos/2-2002-5.pdf>].

Papert, S., (1993). *La máquina de los niños. Replantearse la educación en la era de los ordenadores*. España: Paidós.

Parada, S., (2009). *Reflexión sobre la práctica profesional: Actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clases*. Tesis de maestría del Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico nacional, México.

Parada, S., (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional*. Tesis doctoral del Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico nacional, México.

Peña, B., (1997). El libro de texto como problema de calidad educativa. *Revista Ronda de Libros. Año 1. No. 2. Caracas.*

Ponte, J. P., (1997). *Didáctica da matemática. Capítulo 4*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário. Recuperado en: <http://www.ugr.es/local/jgodino/>.

Rajadell, N., (2001). Los Procesos Formativos en el aula: Estrategias de enseñanza-aprendizaje. Madrid: UNED, p12.

Reisner, R.A.,(2001). Una Historia del Diseño y la tecnología. Parte I. Una historia de los medios de enseñanza. 49(1), pp. 53-64.

Robert, A. & Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics* 59:269–298.

Romberg, T.&Carpenter, T. (1986). Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 850-869). New York: McMillan (p. 867).

Schön, D., (1992). *La formación de profesionales reflexivos*, Buenos Aires: Paidós

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching. Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Trouche, L., (2002). Les calculatrices dans l'enseignement des mathématiques: une évolution rapide des matériels, des effets différenciés. En: Guin & Trouche (Eds.) *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

Treffers, A., (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 351.

Tzur, R. (2001). Becoming a mathematics teacher-educator: conceptualizing the terrain through self-reflective analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4(4), 259-283.

Vega, M., (1990). *Introducción a la psicología cognitiva*. Madrid: Alianza.