

La propiedad dúo en anillos y anillos de grupo

Brayan Stiven Flórez Burbano

Trabajo de Grado para optar al título de Magister en Matemáticas

Director

Alexander Holguín Villa

Doctorado en Matemáticas

Co-director

John Hermes Castillo Gómez

Doctorado en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Matemáticas

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a mis padres Omaira Burbano Tandioy y Oscar Leonardo Flórez Burbano, por su importante e incondicional apoyo durante todo este tiempo.

Agradecimientos

En primer lugar, le agradezco a Dios por guiarme y permitirme finalizar con éxito este trabajo y por ende esta etapa tan bonita e importante de mi vida. También agradezco a todos aquellos profesionales que durante todo este tiempo me apoyaron y guiaron mi trayectoria en la Universidad Industrial de Santander. Especialmente agradezco a mi director Alexander Holguín Villa y a mi codirector John Hermes Castillo Gómez, quienes demostraron ser excelentes profesores y grandes seres humanos por la manera en que motivaron y trabajaron aún más de lo normal para poder conseguir este objetivo. A mi familia, por ser la principal motivación e inspiración, por siempre creer en mí, porque a pesar de los momentos difíciles, nunca dejaron de insistir en verme como un magíster. Por último, a mis compañeros y amigos de la Universidad Industrial de Santander, quienes me acogieron en sus vidas y se convirtieron en personas indispensables para mí, en todo este tiempo. Sin más que decir ¡Muchas gracias a todos!

Tabla de Contenido

Introducción	9
1. Objetivos	12
2. Preliminares	13
2.1. Grupos	13
2.2. Anillos y cuerpos	15
2.3. Módulos y álgebras	23
3. Anillos de grupo	29
3.1. Construcción y resultados importantes	29
3.2. Anillos de grupo semi-simples y álgebras de grupos abelianos	37
4. La propiedad dúo en anillos	42
4.1. Propiedades dúo, reversible, simétrico y SI	42
4.2. Diagrama de Marks modificado	50
4.3. Algunas caracterizaciones	53
5. Anillos de grupo dúo, reversibles y simétricos	57
5.1. Condición necesaria sobre RG y la estructura de G	57
5.2. Condición necesaria sobre RG y la característica de R	63

LA PROPIEDAD DÚO EN ANILLOS Y ANILLOS DE GRUPO	5
5.3. Algunas equivalencias	69
6. Resultados adicionales	75
7. Conclusiones	85
Referencias Bibliográficas	86

Lista de Figuras

Figura 1.	Relaciones entre propiedades reversible, simétrico y SI.	49
Figura 2.	Modificación del diagrama de Marks.	53
Figura 3.	Demostración esquemática de la Proposición 5.11.	59
Figura 4.	Condición necesaria sobre RG y la estructura de G .	62
Figura 5.	Condición necesaria sobre RG y la característica de R .	69

Resumen

Título: La propiedad dúo en anillos y anillos de grupo. *

Autor: Brayan Stiven Flórez Burbano. **

Palabras Clave: Anillos de grupo, anillos dúo, anillos reversibles, anillos simétricos.

Descripción: Existen diferentes propiedades anillo-teóricas que extienden resultados de anillos conmutativos a un caso más general. Por ejemplo, las propiedades dúo, reversible, simétrico y SI. En este trabajo se estudia la propiedad dúo y algunas de sus relaciones con las propiedades reversible, simétrico y SI, tanto en el contexto general de anillos como de los anillos de grupo. Se presentan pruebas de resultados afirmados sin prueba en la literatura y se diseñan diagramas que resumen algunas implicaciones válidas entre la propiedad dúo y las otras propiedades de interés. Específicamente para un anillo de grupo RG de un grupo de torsión G sobre un anillo conmutativo R con identidad, se diseñan diagramas en los cuales se establece que si el anillo de grupo RG tiene alguna de estas propiedades, entonces G es un grupo Hamiltoniano y la característica de R es 0 o 2. Además, se caracterizan las mismas propiedades en álgebras de grupo $\mathbb{F}G$ sobre cuerpos de característica cero y en anillos de grupo RG en los siguientes casos: (1) RG es un anillo de grupo semi-simple y (2) R es un anillo semi-simple y G cualquier grupo.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Alexander Holguín Villa, Doctorado en Matemáticas. Co-director: John Hermes Castillo Gómez, Doctorado en Matemáticas.

Abstract

Title: The duo property in rings and group rings. *

Author: Brayan Stiven Flórez Burbano. **

Keywords: Group rings, duo rings, reversible rings, symmetric rings.

Description: There are different ring-theoretic properties that extend results from commutative rings to a more general case. For example, the duo, reversible, symmetric, and SI properties. In this work, the duo property and some of its relations with the reversible, symmetric, and SI properties are studied, both in the general setting of rings and of group rings. Proofs of asserted results without proof in the literature are presented and diagrams are designed which summarize some valid implications between the duo property and the other properties of interest. Specifically for a group rings RG of a torsion group G over a commutative ring R with identity, diagrams are designed in which it is established that if the group ring RG has any of these properties, then G is a Hamiltonian group and the characteristic of R is either 0 or 2. Moreover, the same properties are characterized in group algebras $\mathbb{F}G$ over fields of characteristic zero and in group rings RG in the following cases: (1) RG is a semi-simple group ring, and (2) R is a semi-simple ring and G any group.

* Bachelor Thesis

** Science Faculty. School of Mathematics. Director: Adriana Alexander Holguín Villa, PhD in Mathematics. Co-director: John Hermes Castillo Gómez, PhD in Mathematics.

Introducción

Un anillo asociativo R es dúo izquierdo (derecho) si cada ideal izquierdo (derecho) de R es un ideal bilateral de R . Cuando R es dúo izquierdo y derecho se dice que R es un anillo dúo (o que R tiene la propiedad dúo). Claramente todo anillo conmutativo satisface de forma trivial la propiedad dúo. Por tal razón, el estudio de esta y otras propiedades anillo-teóricas tales como *reversible*, *simétrico* y *SI* tiene sentido en el contexto no conmutativo. De hecho, existen diferentes propiedades anillo-teóricas que se estudian con el fin de extender resultados válidos para anillos conmutativos. Por ejemplo, se sabe que en todo anillo conmutativo, el conjunto de elementos nilpotentes forma un ideal que coincide con la intersección de todos los ideales primos. Este resultado también es válido para un caso más general de anillos, llamado anillos 2-primales, los cuales no necesariamente son conmutativos. Marks (2002) presentó mediante una tabla (ver Figura 1), las implicaciones válidas entre las propiedades reducido, reversible, simétrico y SI, las cuales dan lugar a los anillos 2-primales.

Sean R un anillo conmutativo con identidad y G un grupo. No es difícil ver que si el grupo G es abeliano, entonces el anillo de grupo RG es conmutativo. Así, en este contexto el estudio de la propiedad dúo al igual que las propiedades reversible, simétrico y SI tiene sentido cuando G es un grupo no abeliano. Marks (2002) discutió las relaciones entre anillos simétricos y reversibles (con y sin la presencia de la propiedad dúo), demostrando que el álgebra de grupos \mathbb{F}_2Q_8 de los cuaternios Q_8 sobre el cuerpo \mathbb{F}_2 es reversible pero no simétrico. Gutan and Kisielewicz (2004) caracterizaron las álgebras de grupo reversibles $\mathbb{F}G$ de grupos de torsión G sobre cuerpos \mathbb{F} . En

particular, describieron todas las álgebras de grupo finitas reversibles que no son simétricas, extendiendo un resultado de Marks. Li and Parmenter (2007) investigaron anillos de grupo reversibles RG de grupos de torsión G sobre anillos conmutativos con identidad, lo que dio continuidad a los resultados de Gutan y Kisielewicz. Para álgebras de grupo $\mathbb{F}G$ de grupos de torsión G sobre un cuerpo \mathbb{F} , Bell and Li (2007) usaron los resultados de Gutan y Kisielewicz demostraron que las propiedades dúo y reversible son equivalentes sobre $\mathbb{F}G$. Finalmente, Gao and Li (2011) describieron cuando el anillo de grupo RG de un grupo de torsión G sobre un dominio entero R es dúo.

En este trabajo se estudia y analiza cuidadosamente algunos resultados de la propiedad dúo y las posibles conexiones con las propiedades reversible, simétrico y SI, tanto en el contexto general de anillos como en el de los anillos de grupo, siendo esta última estructura la de mayor interés en esta investigación. En el primer capítulo se presentan conceptos prelimnares sobre la teoría de grupos, anillos y módulos. Adicionalmente, se establece la notación que se empleará en todo el trabajo. Luego, en el Capítulo 2 se estudia el concepto de anillo de grupo, presentando algunas definiciones, ejemplos y resultados importantes sobre esta teoría, ya que son necesarios para estudiar las propiedad dúo en esta estructura. Los Capítulos 3 y 4 son los de mayor importancia en esta investigación, en ellos se estudia la propiedad dúo, en el contexto general de anillos y en el de los anillos de grupo. Específicamente en el Capítulo 3 se establece una modificación de la Figura 1 dada por Marks (2002), en la cual ahora se incluye la propiedad dúo. En el Capítulo 4, para anillos de grupo RG de un grupo de torsión no abeliano G sobre un anillo conmutativo R con identidad, se diseñaron diagramas similares a la Figura 1 (ver Figura 4 y Figura 5), en los cuales

además de determinar algunas relaciones válidas entre las propiedades dúo, reversible, simétrica y SI, también se establecen condiciones necesarias, en términos del grupo G y del anillo R , cuando RG tiene estas propiedades. Además, en estos capítulos se presentan pruebas de algunos resultados que se afirman (sin prueba) en la literatura.

Finalmente, con el objetivo de dar continuidad al estudio de la propiedad dúo y las posibles conexiones con las propiedades anillo-teóricas de interés, en el Capítulo 5 se presentan algunos resultados en esta dirección. Por ejemplo, el Teorema 6.16, el cual permite establecer que las propiedades dúo, reversible, simétrico y SI son equivalentes en anillos de grupo $\mathbb{F}G$, donde \mathbb{F} es un cuerpo de característica cero y G es un grupo de torsión. Además, el Teorema 6.18, Corolario 6.8, Teorema 6.19, Teorema 6.20 y Teorema 6.21, los cuales caracterizan las propiedades de interés en anillos de grupo semi-simples y anillos de grupo sobre anillos semi-simples. Estos últimos resultados surgieron después de intentar responder la Pregunta 6.1, planteada por Gao and Li (2011).

1. Objetivos

Objetivo general

Analizar y comparar la propiedad dúo en anillos que no necesariamente tienen identidad y en anillos de grupo RG donde R es un anillo con identidad y G un grupo, y sus posibles conexiones con las propiedades reversible, simétrico y SI.

Objetivos específicos

1. Explorar pruebas alternativas de la propiedad dúo en el contexto de los anillos de grupo, haciendo uso de sus propiedades estructurales.
2. Examinar la propiedad dúo en anillos y en anillos de grupo, siendo esta última estructura la de mayor interés en la investigación. Específicamente, identificar por qué las condiciones dadas sobre el anillo y sobre el grupo en los artículos Marks (2002), Bell and Li (2007) y Gao and Li (2011), son esenciales.

2. Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones, ejemplos y resultados importantes en teoría de grupos, anillos, módulos y álgebras, los cuales serán fundamentales para el desarrollo de este trabajo. Además, se establece la notación que se empleará en los siguientes capítulos. Si el lector no tiene claro algún concepto tratado en este capítulo, puede consultar las primeras secciones de las referencias Bhattacharya and Nagpaul (1994), Gallian (2021) y Polcino Milies and Sehgal (2002).

2.1. Grupos

De la teoría de grupos, se sabe que existe una gran variedad de estos, cada uno con naturaleza y características propias. Se empleará con frecuencia los siguientes grupos.

Definición 2.1. Un grupo G es un grupo de torsión, si cada elemento $a \in G$ tiene orden finito. Es decir, para todo $a \in G$ se tiene que $|a| = n$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.1. Claramente todo grupo finito es un grupo de torsión. Un ejemplo de un grupo infinito, que es un grupo de torsión, es el grupo cociente $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. En efecto, sea $x \in G$ diferente del neutro, es decir, $x = \frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$, luego $bx = b\left(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}\right) = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Así, $|x| = b$ y por lo tanto todo elemento de G tiene orden finito.

Definición 2.2. Sea p un número primo. Un grupo finito G es un p -grupo, si el orden de G es una potencia de p .

Por otro lado, un grupo abeliano G se denomina *abeliano elemental*, si existe un número primo p tal que todo elemento $a \in G$ diferente de la identidad, tiene orden finito p . El grupo

$E = \langle a : a^2 = 1 \rangle = \{1, a\}$, es un 2-grupo y además es abeliano elemental. Es decir, E es un ejemplo de lo que comúnmente se llama un *2-grupo abeliano elemental*.

Definición 2.3. Sean G un grupo y H un subgrupo de G , se dice que H es un subgrupo normal de G si, y sólo si, $ghg^{-1} \in H$ para todo $g \in G$ y $h \in H$. Usualmente se escribe $H \trianglelefteq G$ para denotar que H es un subgrupo normal de G .

Existen diferentes caracterizaciones para los subgrupos normales, una de ellas dice que H es un subgrupo normal de G si, y sólo si, $gH = Hg$ para todo $g \in G$. De lo anterior, es claro que para un grupo abeliano G , todos sus subgrupos son normales. Existen grupos no abelianos con esta propiedad y se llaman grupos Hamiltonianos.

Definición 2.4. Un grupo no abeliano G tal que todos sus subgrupos son normales se denomina grupo Hamiltoniano.

El grupo Q_8 , de los cuaternios de orden 8, será de uso frecuente en este trabajo. Este grupo tiene la siguiente presentación

$$Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, a^2 = b^2, a^b = a^{-1} \rangle, \text{ donde } a^b \text{ denota } bab^{-1},$$

sus elementos se pueden listar así, $Q_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. No es difícil ver que $ab \neq ba$, es decir, Q_8 no es abeliano. Adicionalmente, se puede mostrar que todos los subgrupos de Q_8 son normales y más exactamente son: $H_1 = Q_8$, $H_2 = \{1, a, a^2, a^3\}$, $H_3 = \{1\}$, $H_4 = \{1, a^2, b, a^2b\}$, $H_5 = \{1, a^2\}$ y $H_6 = \{1, ab, a^2, a^3b\}$. Por lo tanto, Q_8 es un grupo Hamiltoniano.

Según el siguiente resultado, para verificar que un grupo G es Hamiltoniano, basta probar que para todo $g \in G$, el subgrupo cíclico generado por $\langle g \rangle = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$ de G es normal. Más exactamente, se tiene el siguiente resultado, el cual se prueba por cuestión de completéz.

Proposición 2.1. *Sea G un grupo. Entonces, G es un grupo Hamiltoniano si, y sólo si, $\langle g \rangle \trianglelefteq G$ para todo $g \in G$.*

Demostración. Si G es Hamiltoniano, entonces todos sus subgrupos son normales, en particular los subgrupos $\langle g \rangle$ con $g \in G$. Recíprocamente, sean H un subgrupo de G y $g \in G$, se va a probar que $gH = Hg$. Considere $t \in gH$, entonces $t = gh$ para algún $h \in H$, note que $t \in g\langle h \rangle$ y por hipótesis $g\langle h \rangle = \langle h \rangle g$. Por lo tanto, $t = h^k g$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, luego es claro que $h^k \in H$ y así, $t \in Hg$, entonces $gH \subseteq Hg$. La otra inclusión es análoga. \square

El siguiente teorema establece una descripción completa de la estructura de los grupos Hamiltonianos.

Teorema 2.1 ((Polcino Milies and Sehgal, 2002, Theorem 1.8.5)). *Un grupo G es Hamiltoniano si, y sólo si, G es el producto directo del grupo cuaternio de orden 8, un 2-grupo abeliano elemental E y un grupo abeliano A donde todos sus elementos son de orden impar. Es decir, $G = Q_8 \times E \times A$.*

2.2. Anillos y cuerpos

En esta sección y en las siguientes R denota un anillo asociativo que no necesariamente tiene identidad y que tampoco es conmutativo, a menos que se especifique lo contrario.

Definición 2.5. Para un anillo R y $X \subseteq R$, se denota con $Ann_l(X)$ y $Ann_r(X)$ el anulador izquierdo y derecho de X respectivamente, donde

$$Ann_l(X) = \{r \in R : rx = 0, \forall x \in X\},$$

$$Ann_r(X) = \{r \in R : xr = 0, \forall x \in X\}.$$

Nota 2.1. De la definición anterior, cuando $X = \{a\}$ para algún $a \in R$, se denota con $Ann_l(a)$ y $Ann_r(a)$ el anulador izquierdo y derecho de a respectivamente. Además, no es difícil probar que para todo subconjunto X de R se tiene que $Ann_l(X)$ es un ideal izquierdo de R y $Ann_r(X)$ es un ideal derecho de R .

Definición 2.6. Sea R un anillo conmutativo con identidad.

1. El conjunto $\mathcal{U}(R) = \{r \in R : rs = 1, \exists s \in R\}$, denota el conjunto de unidades del anillo R .
2. El conjunto $\mathcal{ZD}(R) = \{r \in R \setminus \{0\} : rs = 0, \exists s \in R \setminus \{0\}\}$, denota el conjunto de divisores de cero del anillo R .

Sean R un anillo y $A, B \subseteq R$, se define AB como el conjunto de todas las sumas finitas de productos de elementos de A por elementos de B , $\sum_{i=1}^l a_i b_i$ para algún $l \in \mathbb{N}$. Análogamente se define $\mathbb{Z}A$, es decir, $\mathbb{Z}A = \{\sum_{i=1}^l n_i a_i : n_i \in \mathbb{Z}, a_i \in A, \exists l \in \mathbb{N}\}$.

Definición 2.7. Sean R un anillo y S un subconjunto no vacío de R , entonces se define el ideal generado de S como $\langle S \rangle = \mathbb{Z}S + RS + SR + RSR$.

Nota 2.2. En la definición anterior, tenga en cuenta que si R tiene identidad, entonces $\mathbb{Z}S \subseteq RS$, $RS \subseteq RSR$ y $SR \subseteq RSR$. Así, $\mathbb{Z}S + RS + SR + RSR \subseteq RSR$ y por lo tanto $\langle S \rangle = RSR$.

Definición 2.8. Sea R un anillo (no necesariamente conmutativo).

1. Un ideal \mathfrak{p} de R es primo, si $\mathfrak{p} \neq R$ y para ideales $I, J \subseteq R$, se tiene que

$$IJ \subseteq \mathfrak{p} \text{ implica } I \subseteq \mathfrak{p} \text{ o } J \subseteq \mathfrak{p}.$$

2. Un ideal \mathfrak{p} de R es completamente primo, si $\mathfrak{p} \neq R$ y para elementos $a, b \in R$, se tiene que

$$ab \in \mathfrak{p} \text{ implica } a \in \mathfrak{p} \text{ o } b \in \mathfrak{p}.$$

Nota 2.3.

- Para anillos conmutativos, las condiciones primo y completamente primo son equivalentes.
- Si un ideal \mathfrak{p} de un anillo R es completamente primo, entonces \mathfrak{p} es primo. El recíproco no es cierto.

Ejemplo 2.2 (Primo no implica completamente primo). Se sabe que todo cuerpo \mathbb{F} únicamente tiene los ideales triviales, es decir, \mathbb{F} es simple.¹ Luego, para un entero $n \geq 1$, $R = M_n(\mathbb{F})$ el anillo de matrices de tamaño $n \times n$ sobre \mathbb{F} , también es simple, puesto que los ideales de R son de la forma $J = M_n(I)$ con I ideal de \mathbb{F} . Se va a mostrar que el ideal $\{0\}$ de R es un ideal primo pero no es completamente primo. En efecto, suponga que A, B son ideales de R tales que $AB \subseteq \{0\}$, entonces como R solo tiene los ideales triviales, se tiene las siguientes opciones

1. $A = B = 0$,

3. $A = R$ y $B = 0$

2. $A = 0$ y $B = R$,

4. $A = B = R$.

¹ Un anillo simple es un anillo distinto de cero que no tiene ideales bilaterales distintos del ideal cero y de sí mismo.

Los casos, 1, 2 y 3 muestran que $\{0\}$ es primo, el caso 4 no es válido puesto que $AB = R^2 \not\subseteq \{0\}$. Así, $\{0\}$ es un ideal primo. Ahora, denote con $E_{ij} \in R$ la matriz cuya entrada (i, j) es 1 y las demás entradas son 0. Entonces, $E_{11}E_{22} = 0$ y así, $E_{11}E_{22} \in \{0\}$ pero $E_{11}, E_{22} \notin \{0\}$, por lo tanto, $\{0\}$ no es completamente primo.

El siguiente resultado muestra algunas equivalencias para los ideales primos de un anillo. El lector interesado en la demostración de estas caracterizaciones las puede consultar en (Lam, 1991, (10.2) Proposition.).

Proposición 2.2. *Para un ideal propio \mathfrak{p} de un anillo R , las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. \mathfrak{p} es primo.
2. Para $a, b \in R$, $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq \mathfrak{p}$ implica $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$.
3. Para $a, b \in R$, $aRb \subseteq \mathfrak{p}$ implica $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$.
4. Para ideales izquierdos I, J en R , $IJ \subseteq \mathfrak{p}$ implica que $I \subseteq \mathfrak{p}$ o $J \subseteq \mathfrak{p}$.
5. Para ideales derechos I, J en R , $IJ \subseteq \mathfrak{p}$ implica que $I \subseteq \mathfrak{p}$ o $J \subseteq \mathfrak{p}$.

Definición 2.9. Sea R un anillo. Un subconjunto no vacío $S \subseteq R$ es llamado un m -sistema si para todos $a, b \in S$ existe $r \in R$ tal que $arb \in S$.

Proposición 2.3. *Un ideal \mathfrak{p} de un anillo R es primo si, y sólo si, $S = R \setminus \mathfrak{p}$ es un m -sistema.*

Demostración. Suponga que \mathfrak{p} es primo y $S = R \setminus \mathfrak{p}$ no es un m -sistema, entonces existen $s, s' \in S$ tales que para todo $r \in R$, se cumple $srs' \notin S$. Es decir, $srs' \subseteq \mathfrak{p}$ y como \mathfrak{p} es primo, se debe cumplir s o s' está en \mathfrak{p} , lo cual es una contradicción. Para el recíproco, suponga que $S = R \setminus \mathfrak{p}$ es un m -sistema y que \mathfrak{p} no es un ideal primo de R . Entonces, existen $x, y \in R$ tales que $xRy \subseteq \mathfrak{p}$ pero $x, y \notin \mathfrak{p}$, por lo tanto $x, y \in S$ y dado que S es un m -sistema, existe $r \in R$ tal que $xry \in S$, lo cual es una contradicción, puesto que $xRy \subseteq \mathfrak{p}$. □

Definición 2.10. Para un ideal I de un anillo R se define \sqrt{I} como

$$\sqrt{I} = \{s \in R : \text{cada } m\text{-sistema que contiene a } s \text{ intersecta a } I\}.$$

Nota 2.4. De la definición anterior.

- Si $s \in \sqrt{I}$ entonces el m -sistema $\{s, s^2, s^3, \dots\}$ intersecciona a I . Es decir, para algún $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $s^n \in I$, por lo tanto

$$\sqrt{I} \subseteq \{s \in R : s^n \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

- Para el caso conmutativo, la anterior contención es una igualdad. En efecto, sea $s \in R$ con $s^n \in I$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y considere un m -sistema S con $s \in S$. Entonces, existe $r \in R$ tal que $srs \in S$, luego $s^2r \in S$ y continuando de forma similar, existe $t \in R$ de tal forma que $s^n t \in S$. Dado que I es un ideal, también se tiene que $s^n t \in I$. Es decir, $s^n r \in S \cap I$, por lo tanto $s \in \sqrt{I}$.

Teorema 2.2. Sean R un anillo e I un ideal de R , entonces \sqrt{I} es igual a la intersección de todos los ideales primos que contienen a I . En particular, \sqrt{I} es un ideal de R .

Demostración. Sean $s \in \sqrt{I}$ y \mathfrak{p} un ideal primo de R tal que $I \subseteq \mathfrak{p}$. Entonces, el m -sistema $R \setminus \mathfrak{p}$ no puede contener a s , ya que de lo contrario se intersecciona con I y por lo tanto también con \mathfrak{p} , lo cual no es posible y así, $s \in \mathfrak{p}$. Para la otra inclusión, tome x en la intersección de todos los ideales primos que contienen a I y suponga que $x \notin \sqrt{I}$. Entonces, existe un m -sistema $S \ni x$ que es disjunto de I . Por el Lema de Zorn (ver (Polcino Milies and Sehgal, 2002, Lemma 2.4.2)), existe un ideal $\mathfrak{q} \supseteq I$ que es maximal con respecto a ser disjunto de S . Se va a probar que \mathfrak{q} es primo. Para ello, suponga lo contrario, existen $a, b \in R$ tales que $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq \mathfrak{q}$ pero $a, b \notin \mathfrak{q}$. Note que $a = 1a + 0a + a0 + 0a0 \in \langle a \rangle$ y por lo tanto, $\mathfrak{q} \subsetneq \langle a \rangle + \mathfrak{q}$ y de forma similar, $\mathfrak{q} \subsetneq \langle b \rangle + \mathfrak{q}$. Luego, por la maximalidad de \mathfrak{q} , existen $s, s' \in S$ tales que $s \in \langle a \rangle + \mathfrak{q}$ y $s' \in \langle b \rangle + \mathfrak{q}$. Ahora, dado que S es un m -sistema, existe $r \in R$ tal que $srs' \in S$, entonces

$$srs' \in (\langle a \rangle + \mathfrak{q})R(\langle b \rangle + \mathfrak{q}) \subseteq \langle a \rangle \langle b \rangle + \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}.$$

Así, \mathfrak{q} intersecta a S , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, \mathfrak{q} es un ideal primo. Finalmente, dado que $x \in S$ y \mathfrak{q} es disjunto de S , entonces $x \notin \mathfrak{q}$, lo cual es una contradicción. \square

Corolario 2.1. Si se denota con $Nil_*(R) = \sqrt{0}$ y con $\mathcal{N}(R)$ el conjunto de todos los elementos nilpotentes ² de R , se tiene que

$$Nil_*(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec(R)} \mathfrak{p} \subseteq \mathcal{N}(R),$$

donde $Spec(R)$ denota el conjunto de todos los ideales primos de R , también llamado espectro primo de R . El ideal $Nil_*(R)$ se llama nilradical inferior (de Baer).

Definición 2.11. Sea R un anillo.

1. R es 2-primal si $Nil_*(R) = \mathcal{N}(R)$.
2. R es reducido si $\mathcal{N}(R) = \{0\}$.

Ejemplo 2.3 (Anillo que no es 2-primal). Sea $R = M_2(\mathbb{R})$ y considere los elementos E_{12} y E_{21} , entonces $E_{12}^2 = E_{21}^2 = 0$ mientras que $(E_{12} + E_{21})^2 = I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de tamaño 2×2 . Entonces, E_{12} y E_{21} son nilpotentes pero $E_{12} + E_{21}$ no lo es y así, $\mathcal{N}(R)$ no tiene estructura de ideal. Por lo tanto, no se puede cumplir $\mathcal{N}(R) = Nil_*(R)$ puesto que $Nil_*(R)$ siempre es un ideal.

² Un elemento a de un anillo R es nilpotente si existe algún entero positivo n tal que $a^n = 0$.

Dado un dominio entero R considere el conjunto $S = \{(a, b) : a, b \in R, b \neq 0\}$ y defina la relación de equivalencia \sim dada por $(a, b) \sim (c, d)$ si, y sólo si, $ad = cb$. Sea $[a, b]$ la clase de equivalencia de $(a, b) \in S$.

Definición 2.12. El conjunto Q de todas clases de equivalencia $[a, b]$ junto con las operaciones, $[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd]$ y $[a, b][c, d] = [ac, bd]$, tiene estructura de cuerpo y se denomina el cuerpo de fracciones de R .

Ejemplo 2.4. El cuerpo de números racionales \mathbb{Q} , es el ejemplo más conocido de un cuerpo de fracciones. Es decir, \mathbb{Q} es el cuerpo de fracciones del conjunto de los enteros \mathbb{Z} .

Una extensión finita \mathbb{F} del cuerpo \mathbb{Q} , es decir; $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{Q}$ y la dimensión de \mathbb{F} como espacio vectorial sobre \mathbb{Q} es finita, se llama *cuerpo de números algebraicos*. Todo elemento $\alpha \in \mathbb{F}$ es algebraico sobre \mathbb{Q} , en otras palabras, satisface una ecuación de la forma

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \text{ con } a_i \in \mathbb{Q}.$$

Por otro lado, un elemento β de la extensión finita \mathbb{F} , se llama *entero algebraico* si satisface una ecuación mónica, de la forma

$$\beta^n + b_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + b_0 = 0, \text{ con } b_i \in \mathbb{Z}.$$

Definición 2.13. Sea \mathbb{F} un cuerpo de números algebraicos. El conjunto de enteros algebraicos de \mathbb{F} forman un anillo, llamado el anillo de números enteros algebraicos de \mathbb{F} y generalmente denotado por $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$.

Para un número natural $n > 1$ y un cuerpo \mathbb{F} , se dice que $\alpha \in \mathbb{F}$ es una raíz n -ésima de la unidad si $\alpha^n = 1$. Adicionalmente, $\alpha \in \mathbb{F}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad, si α no es raíz d -ésima de la unidad para todo número natural $d < n$. Por ejemplo, en el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos, se cumple que $i^4 = 1$ y para ningún $d < 4$ se satisface que $i^d = 1$, por lo tanto i es una raíz 4-ésima primitiva de la unidad.

Definición 2.14. Sea \mathbb{F} un cuerpo y ζ_n una raíz n -ésima de la unidad. La extensión $\mathbb{F}(\zeta_n)$ se denomina extensión ciclotómica de \mathbb{F} .

2.3. Módulos y álgebras

Los conceptos de módulo y álgebra sobre un anillo R también son una de las bases fundamental para el desarrollo de este trabajo. Por tal razón, a continuación, se presentan las definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de las siguientes secciones.

Definición 2.15. Sea R un anillo con identidad. Un grupo abeliano M (con notación aditiva) es un R -módulo (o módulo izquierdo sobre R), si para todo elemento $a \in R$ y $m \in M$ se tiene que $am \in M$ y para todos $a, b \in R$ y $m, m_1, m_2 \in M$, se cumplen las siguientes condiciones:

1. $(a + b)m = am + bm$,

2. $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$,

3. $a(bm) = (ab)m$,

4. $1m = m$.

Análogamente, dado un anillo R con identidad, se puede definir un módulo- R (o módulo derecho sobre R) considerando la multiplicación ma , donde $m \in M$ y $a \in R$.

Nota 2.5. Es inmediato de la definición anterior, que si \mathbb{F} es un cuerpo, entonces los conceptos de \mathbb{F} -módulo y \mathbb{F} -espacio vectorial coinciden.

Ejemplo 2.5.

1. Considere un grupo abeliano G escrito de forma aditiva. Para todo $g \in G$ y $m \in \mathbb{Z}$ defina $mg = g + g + \cdots + g$ (m -veces). No es difícil verificar que con esta operación G tiene estructura de \mathbb{Z} -módulo.
2. Sea R un anillo con identidad e I un ideal izquierdo arbitrario de R . Dado que el producto por izquierda de elementos de R por elementos de I está en I , se deduce que I puede considerarse como un R -módulo. De manera similar, los ideales derechos pueden considerarse como módulos- R .

Definición 2.16. Sea R un anillo conmutativo con identidad. Un R -módulo A es una R -álgebra, si existe una multiplicación en A , tal que con la adición dada en A y la multiplicación, A es un anillo y además se cumple la condición

$$r(ab) = (ra)b = a(rb),$$

para todo $r \in R$ y todos $a, b \in A$.

Nota 2.6. De la definición anterior,

$$ra = r(a1) = (ra)1 = a(r1) = ar, \text{ para todo } r \in R \text{ y todo } a \in A.$$

Así, el conjunto $R \cdot \{1\}$ (que es un anillo isomorfo a R) está contenido en $\mathcal{Z}(A)$, el centro de A , donde $\mathcal{Z}(A) = \{x \in A : xa = ax, \forall a \in A\}$.

Como ejemplos sencillos de R -álgebras, donde R es un anillo conmutativo con identidad, se puede mencionar el anillo de polinomios $R[x]$ en la indeterminada x con coeficientes en R y el anillo de matrices $M_n(R)$ de tamaño $n \times n$ sobre R .

Definición 2.17. Sea M un R -módulo. Un subconjunto no vacío $N \subseteq M$ es un R -submódulo de M si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Para todos $x, y \in N$ se tiene que $x + y \in N$.
2. Para todo $r \in R$ y todo $n \in N$, se tiene que $rn \in N$.

Con base en la definición anterior, si R es conmutativo y M es una R -álgebra, entonces N es una R -subálgebra de M si N es a la vez submódulo y subanillo de M .

Finalmente, se cierra esta sección presentando el Teorema 2.3 (Teorema de Wedderburn-Artin), el cual aplicado en el contexto de los anillos de grupo será muy útil sobre todo en los resultados establecidos en la última sección de este trabajo.

Definición 2.18. Un R -módulo M es llamado semi-simple, si todo submódulo de él es sumando directo. Esto es, para todo submódulo N de M existe un submódulo W de M tal que $M = N \oplus W$.

Ejemplo 2.6.

1. Se sabe que todo subespacio de un espacio vectorial es un sumando directo. Es decir, si \mathbb{F} es un cuerpo, todo \mathbb{F} -espacio vectorial es \mathbb{F} -módulo semi-simple.
2. El cuerpo de números racionales \mathbb{Q} visto como \mathbb{Z} -módulo no es semi-simple, puesto que el submódulo \mathbb{Z} de \mathbb{Q} no es sumando directo. En efecto, sea N un submódulo no trivial de \mathbb{Q} , entonces existe $\frac{a}{b} \in N \setminus \{0\}$. Luego, $b\left(\frac{a}{b}\right) = a \in N$. Así, $a \in \mathbb{Z} \cap N \neq \{0\}$, de donde \mathbb{Z} no puede ser un sumando directo.

Es claro que todo anillo R es un R -módulo sobre sí mismo, este módulo se denota como ${}_R R$. Entonces, un anillo R se dice que es *semi-simple* si ${}_R R$ es semi-simple. No es difícil ver que los R -submódulos de ${}_R R$ son justamente los ideales izquierdos de R . Así, de la definición de módulo semi-simple se tiene que un anillo R es semi-simple si, y sólo si, todo ideal izquierdo de R es un sumando directo. Más aún, es posible establecer el siguiente resultado.

Lema 2.1 ((Polcino Milies and Sehgal, 2002, Theorem 2.5.7)). *Sea R un anillo. Entonces, R es semi-simple si, y sólo si, R es una suma directa finita de ideales minimales izquierdos.*

Ejemplo 2.7. Sea n un número natural. Considere $M_n(D)$ el anillo de matrices de tamaño $n \times n$ sobre un anillo de división D ³. Defina los siguientes conjuntos

³ Un anillo con identidad D se llama anillo de división, si sus elementos distintos de cero forman un grupo bajo la multiplicación.

$$L_1 = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ D & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, L_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & D \\ 0 & 0 & \dots & D \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{bmatrix},$$

donde L_i , $1 \leq i \leq n$, denota el subconjunto de $M_n(D)$ cuyos elementos son matrices que tienen ceros en todas las columnas excepto en la i -ésima columna, la cual tiene entradas en el anillo de división D . Se puede probar que los L_i son ideales minimales izquierdos de $M_n(D)$ y además que $M_n(D) = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$. Entonces, se sigue del lema anterior que el anillo $M_n(D)$ es semi-simple.

Del Lema 2.1, si R es un anillo semi-simple, entonces existe una descomposición de R como suma directa de ideales minimales izquierdos, reordenando si es necesario, se puede agrupar ideales izquierdos isomorfos, de la siguiente forma

$$R = \underbrace{L_{11} \oplus \dots \oplus L_{1r_1}}_{A_1} \oplus \underbrace{L_{21} \oplus \dots \oplus L_{2r_2}}_{A_2} \oplus \dots \oplus \underbrace{L_{s1} \oplus \dots \oplus L_{sr_s}}_{A_s},$$

donde $L_{ij} \cong L_{ik}$ y $L_{ij}L_{kh} = \{0\}$ para $i \neq k$. Además, es posible demostrar que los A_i , $1 \leq i \leq s$, son ideales bilaterales simples de R y así, $R = \bigoplus_{i=1}^s A_i$ como anillos.

Ahora, para cada índice i con $1 \leq i \leq s$, denote con $D_i = \text{Hom}_R(L_{i1}, L_{i1})$ el conjunto de R -homomorfismos de L_{i1} en L_{i1} y con $\text{Hom}_{D_i}(L_{i1}, L_{i1})$ el conjunto de D_i -homomorfismos de L_{i1} en L_{i1} . Entonces, se puede demostrar que

$$A_i \cong \text{Hom}_{D_i}(L_{i1}, L_{i1}) \cong M_{n_i}(D_i^{op}),$$

donde D_i^{op} denota el anillo opuesto de D_i ⁴ y n_i es la dimensión de L_{i1} visto como D_i -módulo.

Por último, como consecuencia del Lema de Schur (ver (Polcino Milies and Sehgal, 2002, Lemma 2.6.14 y Corollary 2.6.15)) se tiene que D_i es un anillo de división y por ende D_i^{op} también. Así, R es isomorfo a una suma directa de álgebras de matrices sobre anillos de división. Más exactamente, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.3 (Teorema de Wedderburn-Artin). *Un anillo R es semi-simple si, y sólo si, es isomorfo a una suma directa de álgebras de matrices sobre anillos de división, es decir*

$$R \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(D_i),$$

donde los D_i son anillos de división y los $n_i \in \mathbb{N}$ son las dimensiones descritas arriba.

Nota 2.7. Para una descripción más completa y detallada sobre seimisimplicidad y Teorema de Wedderburn-Artin, el lector interesado puede consultar las secciones 2.5 y 2.6 de Polcino Milies and Sehgal (2002).

⁴ Para un anillo R se denota con R^{op} el anillo opuesto de R . Es decir, el anillo definido en el mismo conjunto, usando la misma suma que en R y con la multiplicación dada por $x \cdot y = yx$, donde yx denota la multiplicación de y y x en R .

3. Anillos de grupo

Una de las estructuras algebraicas de mayor interés en esta investigación son los anillos de grupo. En este capítulo se presentan algunas definiciones, ejemplos y resultados alrededor de esta teoría, los cuales serán de gran importancia para el desarrollo de las siguientes secciones.

3.1. Construcción y resultados importantes

Sea R un anillo y G un grupo multiplicativo (no necesariamente finito). Se desea construir un R -módulo que tenga los elementos de G como base y usar las operaciones de G y de R para definir una estructura de anillo en dicho R -módulo. Para hacerlo, se denota con RG el conjunto de todas las combinaciones lineales de la forma

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g,$$

donde $a_g \in R$ y $a_g = 0$ para casi todo $g \in G$; es decir, solo un número finito de coeficientes son diferentes de 0 en cada una de estas sumas. De lo anterior, para $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ y $\beta = \sum_{g \in G} b_g g$ elementos arbitrarios en RG , se tiene $\alpha = \beta$ si, y sólo si, $a_g = b_g$ para todo elemento g de G .

Definición 3.19. Para un elemento $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ en RG se define el soporte de α como el subconjunto de elementos en G que aparecen en la expresión de α ; es decir,

$$\text{supp}(\alpha) = \{g \in G : a_g \neq 0\}.$$

Dados $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ y $\beta = \sum_{g \in G} b_g g$ elementos arbitrarios en RG , se define la suma $\alpha + \beta$

y el producto $\alpha\beta$, de la siguiente forma

$$\alpha + \beta = \sum_{g \in G} (a_g + b_g)g \quad \text{y} \quad \alpha\beta = \sum_{g,h \in G} a_g b_h gh.$$

Reordenando términos, se puede escribir el producto $\alpha\beta$ como

$$\alpha\beta = \sum_{u \in G} c_u u, \quad \text{donde} \quad c_u = \sum_{gh=u} a_g b_h.$$

Se puede verificar fácilmente que RG con estas operaciones tiene estructura de anillo. Además, si R tiene identidad 1_R , entonces el anillo RG también tiene identidad y viene dada por $1_{RG} = \sum_{g \in G} u_g g$, donde el coeficiente del elemento neutro de G es 1_R y $u_g = 0$ para cualquier otro elemento g de G . Adicionalmente, RG tiene estructura de R -módulo definiendo el producto entre $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g \in RG$ y $\lambda \in R$ de la siguiente forma

$$\lambda\alpha = \sum_{g \in G} (\lambda a_g)g.$$

Finalmente, si R es conmutativo, RG es una álgebra sobre R .

Definición 3.20. El conjunto RG , con las operaciones de suma y producto dadas anteriormente, se llama **anillo de grupo de G sobre R** . Cuando R es conmutativo, también se llama a RG la álgebra de grupo de G sobre R .

Si el anillo R tiene identidad es posible definir un encaje $i : G \rightarrow RG$ asignando a cada

elemento $x \in G$ el elemento $i(x) = \sum_{g \in G} a_g g$, donde $a_x = 1_R$ y $a_g = 0$ si $g \neq x$. Entonces, se puede ver a G como un subconjunto de RG . Adicionalmente, para un anillo arbitrario R se puede definir la aplicación $v : R \rightarrow RG$ dada por $v(r) = \sum_{g \in G} a_g g$, donde $a_{1_G} = r$ y $a_g = 0$ si $g \neq 1_G$, la cual no es difícil comprobar que es un monomorfismo de anillos. Por lo tanto, se puede considerar a R como un subanillo de RG .

Ejemplo 3.8.

1. Tomando $R = \mathbb{F}_2 = \{0, 1_R\}$ y $G = C_2 = \{1_G, x\} = \langle x : x^2 = 1_G \rangle$. El anillo de grupo $\mathbb{F}_2 C_2$ se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2 C_2 &= \left\{ \sum_{g \in C_2} a_g g : a_g \in \mathbb{F}_2 \right\} = \{0_{1_G} + 0x, 1_R 1_G + 0x, 0_{1_G} + 1_R x, 1_R 1_G + 1_R x\} \\ &= \{0_{RG}, 1_{RG}, x, 1_{RG} + x\} = \{0, 1, x, 1 + x\}, \end{aligned}$$

donde 0_{RG} es el elemento neutro para la suma en $RG = \mathbb{F}_2 C_2$ y 1_{RG} es la identidad de $RG = \mathbb{F}_2 C_2$.

2. Sea $Q_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2 b, a^3 b\}$ el grupo de cuaternios de orden 8 y R cualquier anillo.

Entonces, el anillo de grupo RQ_8 queda de la siguiente manera

$$RQ_8 = \left\{ \sum_{g \in Q_8} a_g g : a_g \in R \right\} = \left\{ \sum_{i=0}^3 a_i a^i + \left(\sum_{j=4}^7 a_j a^{j-4} \right) b : a_i, a_j \in R \right\}.$$

Nota 3.8. El álgebra de grupo $\mathbb{F}_2 C_2$ no es un grupo multiplicativo, dado que $0a = 0$ para todo

$a \in \mathbb{F}_2C_2$. Además, $\mathbb{F}_2C_2 \setminus \{0\}$ con la multiplicación tampoco es un grupo, puesto que $(1+x)^2 = 0 \notin \mathbb{F}_2C_2 \setminus \{0\}$. Así, $\mathcal{U}(\mathbb{F}_2C_2) = \{1, x\} = C_2$. Adicionalmente, en \mathbb{F}_2C_2 el elemento $1+x$ es un divisor de cero, dado que $1+x \neq 0$ y $(1+x)^2 = 0$. De hecho, $1+x$ es el único divisor de cero de \mathbb{F}_2C_2 , es decir, $\mathcal{ZD}(\mathbb{F}_2C_2) = \{1+x\}$. Entonces, $\mathbb{F}_2C_2 = \{0\} \cup \mathcal{U}(\mathbb{F}_2C_2) \cup \mathcal{ZD}(\mathbb{F}_2C_2)$.

Ejemplo 3.9. Para un grupo finito G y un anillo finito R , es posible conocer la cantidad de elementos del anillo RG sin necesidad de obtenerlos.

1. Considere el anillo $R = \mathbb{F}_3 = \{0, 1_R, 2\}$ y el grupo $G = C_2 = \{1_G, x\}$. Entonces,

$$\mathbb{F}_3C_2 = \left\{ \sum_{g \in C_2} a_g g : a_g \in \mathbb{F}_3 \right\} = \{a \cdot 1_G + b \cdot x : a, b \in \mathbb{F}_3\}.$$

Dado que \mathbb{F}_3 tiene 3 elementos, entonces a y b tienen tres posibilidades. Así, $|\mathbb{F}_3C_2| = 3 \cdot 3 = 9$.

2. Sea $R = \mathbb{F}_2 = \{0, 1_R\}$ y el grupo $G = C_3 = \{1_G, x, x^2\}$. Entonces,

$$\mathbb{F}_2C_3 = \left\{ \sum_{g \in C_3} a_g g : a_g \in \mathbb{F}_2 \right\} = \{a \cdot 1_G + b \cdot x + c \cdot x^2 : a, b, c \in \mathbb{F}_2\}.$$

Dado que \mathbb{F}_2 tiene 2 elementos, entonces a , b y c tienen dos posibilidades. Así, $|\mathbb{F}_2C_3| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Nota 3.9. Para el anillo de grupo \mathbb{F}_2C_3 , dado que $G = C_3$ es un subgrupo de $\mathcal{U}(\mathbb{F}_2C_3)$ y $|C_3| = 3$, entonces $3 \leq |\mathcal{U}(\mathbb{F}_2C_3)| \leq 8$. Más aún, note que el elemento neutro para la suma en \mathbb{F}_2C_3 no es una unidad y así, $3 \leq |\mathcal{U}(\mathbb{F}_2C_3)| < 8$. Además, por el Teorema de Lagrange (ver (Polcino Milies

and Sehgal, 2002, Theorem 1.1.16)) se tiene que $|C_3|$ divide a $|\mathcal{U}(\mathbb{F}_2C_3)|$. Así, $|\mathcal{U}(\mathbb{F}_2C_3)| = 3$ ó 6.

Siguiendo un proceso de conteo similar al empleado en el ejemplo anterior, para un anillo finito R y un grupo finito G es posible determinar la cantidad de elementos del anillo de grupo RG . Más exactamente, se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.2. Sean R un anillo de orden m y G un grupo de orden n . Entonces, RG es un anillo de orden $|R|^{|G|} = m^n$.

Demostración. Por la definición de anillo de grupo se tiene que

$$\begin{aligned} RG &= \left\{ \sum_{g \in G} a_g g : a_g \in R \right\} \\ &= \{ a_{1_G} \cdot 1_G + a_2 \cdot g_2 + \cdots + a_{g_{n-1}} \cdot g_{n-1} : a_{1_G}, a_2, \dots, a_{g_{n-1}} \in R \}. \end{aligned}$$

Dado que $|R| = m$, para cada $g \in G$ existen m posibilidades para a_g . Luego, como G tiene n elementos y para cada uno de ellos hay m posibilidades para a_g , entonces en total hay m^n elementos en RG . □

Ejemplo 3.10. Considere el anillo de grupo \mathbb{F}_2C_2 . Dado que $|\mathbb{F}_2| = 2$ y $|C_2| = 2$, del lema anterior se tiene que $|\mathbb{F}_2C_2| = |\mathbb{F}_2|^{|C_2|} = 2^2 = 4$ (en el Ejemplo 3.8 se exhiben estos elementos). Entonces, el grupo $(\mathbb{F}_2C_2, +)$ tiene 4 elementos. Luego, por la teoría de grupos se sabe que $(\mathbb{F}_2C_2, +)$ debe

ser isomorfo a C_4 ó $C_2 \times C_2$. Tome un elemento arbitrario $\alpha = \sum_{g \in C_2} a_g g \in \mathbb{F}_2 C_2$, entonces

$$2\alpha = \alpha + \alpha = \sum_{g \in C_2} (a_g + a_g)g = \sum_{g \in C_2} (0)g = 0_{\mathbb{F}_2 C_2}.$$

Por lo tanto, todo elemento en el grupo $(\mathbb{F}_2 C_2, +)$ tiene orden menor ó igual a 2 y así, $\mathbb{F}_2 C_2 \not\cong C_4$, ya que C_4 tiene elementos de orden 4. Entonces, $\mathbb{F}_2 C_2 \cong C_2 \times C_2$. De lo anterior, surge la pregunta ¿Es $\mathbb{F}_2 C_2 \cong \mathbb{Z}_4$ como anillos?, la respuesta es no, dado que $(\mathbb{Z}_4, +) \cong C_4 \not\cong \mathbb{F}_2 C_2$, es decir, los anillos \mathbb{Z}_4 y $\mathbb{F}_2 C_2$ tienen grupos no isomorfos. Así, no pueden ser isomorfos como anillos.

El siguiente resultado muestra que la característica de un anillo de grupo RG es justamente la misma característica del anillo R .

Lema 3.3. Sean R un anillo y G un grupo, entonces $\text{car}(R) = \text{car}(RG)$.

Demostración. Primero suponga que $\text{car}(R) = n \neq 0$. Entonces, para cualquier elemento $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ de RG se tiene que

$$n\alpha = \underbrace{\sum_{g \in G} a_g g + \cdots + \sum_{g \in G} na_g g}_{n\text{-veces}} = \sum_{g \in G} na_g g = 0.$$

Por lo tanto, $\text{car}(RG) \leq n$. Suponga que $\text{car}(RG) = m < n$, entonces $m\beta = 0$ para todo $\beta \in RG$. En particular, si $r \in R$, entonces $m(r1_G) = 0$ y así, $mr = 0$ para todo $r \in R$, lo cual es una contradicción. Entonces, $\text{car}(R) = \text{car}(RG) = n$. Ahora, suponga que $\text{car}(R) = 0$ y $\text{car}(RG) = t$ con $t \in \mathbb{N}$. Entonces, análogamente se puede mostrar que $tr = 0$ para todo $r \in R$, lo cual nuevamente es una contradicción y así, $\text{car}(R) = \text{car}(RG) = 0$. □

A continuación, se presentan algunas aplicaciones definidas del anillo de grupo RG en el anillo de coeficientes R y de RG en sí mismo. Estas aplicaciones serán útiles en algunas demostraciones que se presentan en las siguientes secciones.

Definición 3.21 (Aplicación de aumento). Considere R un anillo y G un grupo, el homomorfismo de anillos

$$\varepsilon : RG \rightarrow R$$

$$\sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in G} a_g,$$

es llamado la aplicación de aumento de RG y su núcleo, denotado por $\Delta(G)$, es llamado el ideal de aumento de RG .

Nota 3.10. De la definición anterior, claramente ε es un epimorfismo de anillos, puesto que si $r \in R$, entonces $x = r \cdot 1_G \in RG$ es la preimagen de r .

Definición 3.22 (Aplicación traza). Sean R un anillo y G un grupo. Dado el anillo de grupo RG , se define la traza como la aplicación

$$tr : RG \rightarrow R$$

$$\sum_{g \in G} a_g g \mapsto a_{1_G}.$$

Es decir, $tr(\sum_{g \in G} a_g g)$ es el coeficiente que acompaña al elemento neutro del grupo en la suma $\sum_{g \in G} a_g g$.

Proposición 3.4. Sean R un anillo conmutativo y G un grupo, entonces para todo $\alpha, \beta \in RG$ se cumple que $tr(\alpha\beta) = tr(\beta\alpha)$.

Demostración. Sean $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ y $\beta = \sum_{g \in G} b_g g$ elementos de RG arbitrarios, entonces

$$tr(\alpha\beta) = tr\left(\sum_{u \in G} c_u u\right) = c_1, \text{ donde } c_u = \sum_{u=gh} a_g b_h, \text{ por lo tanto}$$

$$tr(\alpha\beta) = \sum_{1=gh} a_g b_h = \sum_{g \in G} a_g b_{g^{-1}} = \sum_{g \in G} b_{g^{-1}} a_g$$

y por otra parte

$$tr(\beta\alpha) = tr\left(\sum_{w \in G} d_w w\right) = d_1, \text{ donde } d_w = \sum_{w=gh} b_g a_h, \text{ entonces}$$

$$tr(\beta\alpha) = \sum_{1=gh} b_g a_h = \sum_{h \in G} b_{h^{-1}} a_h.$$

Así, $tr(\alpha\beta) = tr(\beta\alpha)$ para todo α, β en RG . □

El siguiente resultado, el cual no es difícil de probar, muestra que los anillos de grupo sobre anillos conmutativos son anillos con involución.

Proposición 3.5 (Involución clásica). Sean R un anillo conmutativo y G un grupo. La aplicación,

$$\begin{aligned} * : RG &\rightarrow R \\ \sum_{g \in G} a_g g &\mapsto \left(\sum_{g \in G} a_g g\right)^* = \sum_{g \in G} a_g g^{-1} \end{aligned}$$

define una involución sobre RG (llamada la involución clásica). Es decir, para todo $\alpha, \beta \in RG$ se satisfacen las siguientes propiedades

$$1. (\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*, \quad 2. (\alpha\beta)^* = \beta^* \alpha^*, \quad 3. \alpha^{**} = \alpha.$$

3.2. Anillos de grupo semi-simples y álgebras de grupos abelianos

En muchas ocasiones, cuando un anillo de grupo es semi-simple, el Teorema 2.3 (Teorema de Wedderburn-Artin), es una herramienta muy útil para obtener mayor información de la estructura del anillo de grupo a partir de las componentes simples del anillo ⁵. Es posible determinar condiciones suficientes y necesarias sobre R y G para que el anillo de grupo RG sea semi-simple. Dichas condiciones se presentan en el siguiente teorema, cuya demostración puede ser consultada por el lector en (Polcino Milies and Sehgal, 2002, Theorem 3.4.7).

Teorema 3.4 (Teorema de Maschke). *Sea G un grupo. Entonces el anillo de grupo RG es semi-simple si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones.*

1. R es semi-simple.
2. G es finito.
3. $|G|$ es invertible en R .

Nota 3.11. Del teorema anterior, una condición necesaria para que el anillo de grupo RG sea semi-simple es que el anillo de coeficientes R también lo sea. Lo anterior sucede con mucha frecuencia,

⁵ Los únicos ideales bilaterales minimales de un anillo semi-simple R se denominan componentes simples de R .

es decir, cuando el anillo de grupo RG tiene cierta propiedad, entonces necesariamente el anillo de coeficientes R también debe tenerla.

El caso donde $R = \mathbb{F}$ es un cuerpo es de particular interés, tanto por razones históricas como por sus implicaciones en teoría de representaciones. En este caso, claramente \mathbb{F} siempre es semi-simple y $|G|$ es invertible en \mathbb{F} si, y sólo si, $|G| \neq 0$ en \mathbb{F} , si, y sólo si, $\text{car}(\mathbb{F}) \nmid |G|$. Esta última caracterización permite establecer los siguientes corolarios.

Corolario 3.2. *Sean G un grupo finito y \mathbb{F} un cuerpo. Entonces, el álgebra de grupo $\mathbb{F}G$ es semi-simple si, y sólo si, $\text{car}(\mathbb{F}) \nmid |G|$.*

Corolario 3.3. *Sean G un grupo finito y \mathbb{F} un cuerpo algebraicamente cerrado tal que $\text{car}(\mathbb{F}) \nmid |G|$, entonces*

$$\mathbb{F}G \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{F}),$$

y además $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_k^2 = |G|$.

A continuación, se presentan algunos ejemplos que ilustran la potencialidad de los anteriores resultados al momento de determinar la estructura de algunos anillos de grupo semi-simples.

Ejemplo 3.11. Considere el anillo de grupo $\mathbb{C}S_n$. Dado que $|S_n| = n!$ y $\text{car}(\mathbb{C}) = 0$, se tiene que S_n es finito y $\text{car}(\mathbb{C}) \nmid |S_n|$, aplicando el Corolario 3.3 se tiene que

$$\mathbb{C}S_n \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

Adicionalmente, $|S_n| = n! = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_k^2$.

Ejemplo 3.12. Como un caso particular del ejemplo anterior, considere el anillo de grupo $\mathbb{C}S_3$, entonces

$$\mathbb{C}S_3 \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

Además, $6 = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_k^2$. Luego, las únicas posibilidades son $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$ o $6 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, entonces

$$\mathbb{C}S_3 \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}) \quad \text{o} \quad \mathbb{C}S_3 \cong \bigoplus_{i=1}^6 \mathbb{C}.$$

Note que S_3 no es abeliano, entonces el anillo de grupo $\mathbb{C}S_3$ no es conmutativo. Claramente, $\bigoplus_{i=1}^6 \mathbb{C}$ es conmutativo y así, $\mathbb{C}S_3 \not\cong \bigoplus_{i=1}^6 \mathbb{C}$. Por lo tanto,

$$\mathbb{C}S_3 \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}).$$

De lo anterior, las unidades de $\mathbb{C}S_3$ se pueden escribir como

$$\mathcal{U}(\mathbb{C}S_3) \cong \mathcal{U}(\mathbb{C}) \times \mathcal{U}(\mathbb{C}) \times \mathcal{U}(M_2(\mathbb{C})) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times GL_2(\mathbb{C}),$$

y el conjunto $\mathcal{ZD}(\mathbb{C}S_3)$, de los divisores de cero de $\mathbb{C}S_3$, esta dado por

$$\{(a, 0, A) : a \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{ZD}(M_2(\mathbb{C}))\} \cup \{(0, b, A) : b \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{ZD}(M_2(\mathbb{C}))\}.$$

Se finaliza esta sección presentando el siguiente resultado, que también permite obtener información de la estructura de las álgebras de grupo a partir de una suma directa, el lector interesado en conocer detalles de este resultado puede encontrar su demostración en (Polcino Milies and Sehgal, 2002, Theorem 3.5.4). Además, este resultado permite ilustrar un ejemplo de dos álgebras de grupo isomorfas, cuyos grupos base no son isomorfos.

Teorema 3.5 (Teorema de Perlis-Walker). *Sean G un grupo abeliano finito de orden n y \mathbb{F} un cuerpo tal que $\text{car}(\mathbb{F}) \nmid n$, entonces*

$$\mathbb{F}G \cong \bigoplus_{d|n} a_d \mathbb{F}(\zeta_d),$$

donde ζ_d es una raíz primitiva de la unidad de orden d y $a_d = \frac{n_d}{[\mathbb{F}(\zeta_d) : \mathbb{F}]}$, donde n_d denota el número de elementos de orden d en G y $[\mathbb{F}(\zeta_d) : \mathbb{F}]$ denota la dimensión de $\mathbb{F}(\zeta_d)$ como espacio vectorial sobre \mathbb{F} .

Corolario 3.4. *Sean G un grupo abeliano finito de orden n y \mathbb{F} un cuerpo tal que $\text{car}(\mathbb{F}) \nmid n$. Si \mathbb{F} contiene una raíz primitiva de la unidad de orden n , entonces*

$$\mathbb{F}G \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{F}.$$

Demostración. Si \mathbb{F} contiene una raíz primitiva de unidad de orden n , entonces se tiene que $\mathbb{F}(\zeta_d) \cong \mathbb{F}$, para todo $d|n$ y así, el resultado se sigue directamente del teorema anterior (para ver que deben aparecer exactamente n sumandos, basta con calcular las dimensiones sobre \mathbb{F} en ambos lados de la ecuación). \square

Note que si G y H son dos grupos isomorfos, es claro que las algebras $\mathbb{F}G$ y $\mathbb{F}H$ sobre un cuerpo \mathbb{F} son isomorfas. Sin embargo, el recíproco no es cierto. En efecto, del Corolario 3.4, si G y H son dos grupos abelianos no isomorfos del mismo orden n y \mathbb{F} es un cuerpo que contiene una raíz primitiva de la unidad de orden n , entonces

$$\mathbb{F}G \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{F} \cong \mathbb{F}H.$$

Ejemplo 3.13. Considere el grupo cíclico C_4 y el 4-grupo de Klein $C_2 \times C_2$. Entonces, C_4 y $C_2 \times C_2$ son grupos abelianos de orden 4 no isomorfos. Sin embargo, como \mathbb{C} es algebraicamente cerrado se tiene del Corolario 3.4 que

$$\mathbb{C}C_4 \cong \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{C} \cong \mathbb{C}(C_2 \times C_2).$$

4. La propiedad dúo en anillos

La propiedad dúo es el tema de mayor interés en esta investigación, por lo cual en este capítulo se estudia esta propiedad en el contexto general de anillos. Además, se establecen algunas implicaciones válidas entre esta propiedad y algunas propiedades anillo-teóricas de interés, tales como *reversible*, *simétrico* y *SI*.

4.1. Propiedades dúo, reversible, simétrico y SI

Definición 4.23. Sea R un anillo. El anillo R es dúo izquierdo (derecho) si cada ideal izquierdo (derecho) es un ideal bilateral. Se dice que R es dúo si es dúo izquierdo y dúo derecho.

Ejemplo 4.14.

1. Todo anillo conmutativo R tiene la propiedad dúo.
2. Sea $n \geq 2$ un número natural. Considere $R = M_n(D)$, el anillo de matrices de tamaño $n \times n$ sobre un anillo de división D . Defina el siguiente conjunto

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} : x_i \in D \right\},$$

se puede verificar que I es un ideal derecho de R pero no es un ideal izquierdo de R y así, el anillo R no es dúo derecho. Análogamente, si se define

$$J = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} : x_i \in D \right\},$$

entonces J es un ideal izquierdo de R que no es un ideal derecho de R , por lo tanto, R no es dúo izquierdo.

3. El siguiente ejemplo fue tomado de (Hirano and Park, 1995, Example. 3) y permite mostrar un anillo que es dúo derecho pero no es dúo izquierdo. Sea \mathbb{F} un cuerpo y considere

$$\mathbb{F}(x) = \left\{ \frac{g(x)}{h(x)} : g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x] \text{ y } h(x) \neq 0 \right\},$$

el cuerpo de funciones racionales sobre el cuerpo \mathbb{F} . Análogamente, se define el subanillo $\mathbb{F}(x^2)$ de $\mathbb{F}(x)$. Luego, no es difícil verificar que la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{F}(x) &\longrightarrow \mathbb{F}(x^2) \\ f(x) &\longmapsto \sigma(f(x)) = f(x^2), \end{aligned}$$

es un homomorfismo de anillos. Finalmente, considere el subanillo

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & \sigma(a) \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{F}(x) \right\} \text{ de } M_2(\mathbb{F}(x)).$$

Entonces, todos los ideales derechos de R son $\{0\}$, $I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{F}(x) \right\}$ y R , estos ideales también son izquierdos de R . Sin embargo, el ideal izquierdo $J = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{F}(x^2) \right\}$ de R , no es ideal derecho de R . Así, R es un anillo dúo derecho pero no es un anillo dúo izquierdo.

4. Sea R el anillo dado en el ejemplo anterior y considere el anillo opuesto R^{op} . Entonces, los ideales derecho e izquierdos de R^{op} son respectivamente los ideales izquierdos y derechos de R . Por lo tanto, R^{op} es un anillo dúo izquierdo que no es dúo derecho.

Dado que un anillo conmutativo R tiene de forma trivial la propiedad dúo, el estudio de esta propiedad tiene sentido en anillos no conmutativos. De hecho, esta y otras propiedades anillo-teóricas se estudian con el objetivo de extender algunos resultados conocidos para anillos conmutativos a un caso más general. En este trabajo se estudian las siguientes propiedades y la relación que tienen con la propiedad dúo.

Definición 4.24. Para un anillo R , se dice que:

1. R es **reversible**, si dados $\alpha, \beta \in R$ tales que $\alpha\beta = 0$ implica que $\beta\alpha = 0$,
2. R es **simétrico**, si dados $\alpha, \beta, \gamma \in R$ tales que $\alpha\beta\gamma = 0$ implica que $\alpha\gamma\beta = 0$,
3. R tiene la propiedad **SI**, si dados $\alpha, \beta \in R$ tales que $\alpha\beta = 0$ implica que $\alpha R\beta = \{0\}$.

Los siguientes resultados permiten establecer algunas implicaciones válidas entre las propiedades anillo-teóricas de interés.

Proposición 4.6. *Si el anillo R es reducido, entonces R es reversible y simétrico.*

Demostración. Primero se va a demostrar que R es reversible. Para ello, se debe mostrar que si $a, b \in R$ tales que $ab = 0$, entonces se debe cumplir que $ba = 0$. En efecto, dado que $ab = 0$, se tiene que $(ba)^2 = (ba)(ba) = b(ab)a = 0$. Entonces, ba es nilpotente y dado que R es reducido, $ba = 0$. Así, R es reversible.

Para probar que R es simétrico se usan argumentos similares. Sean $x, y, z \in R$ tales que $xyz = 0$, se va a mostrar que $xzy = 0$. Observe que al multiplicar dos veces zxy se obtiene $(zxy)^2 = (zxy)(zxy) = z(xyz)xy = 0$, entonces por hipótesis $zxy = 0$. De forma similar, $yzx = 0$ ya que $(yzx)^2 = (yzx)(yzx) = y(zxy)zx = 0$. Ahora, sean $r, s \in R$ arbitrario, entonces

$$(zxry)^2 = (zxry)(zxry) = zxr(yzx)ry = 0,$$

por lo tanto $zxry = 0$, luego $(xrysz)^2 = (xrysz)(xrysz) = xrzs(zxry)sz = 0$ y así, $xrysz = 0$. En particular, para $r = z$ y $s = x$, se tiene que $xzyxz = 0$. De donde,

$$(yxz)^2 = (yxz)(yxz) = y(xzyxz) = 0, \text{ entonces } yxz = 0.$$

Finalmente, $xzy = 0$ dado que $(xzy)^2 = (xzy)(xzy) = xz(yxz)y = 0$ y así, el anillo R también es simétrico. □

Proposición 4.7. *Sea R un anillo. Si R es reversible o simétrico, entonces R tiene la propiedad SI.*

Demostración. Suponga R es reversible y considere $a, b \in R$ tales que $ab = 0$, se va a probar que $aRb = \{0\}$. Sea $r \in R$ arbitrario, dado que $ab = 0$ y R es reversible, entonces $ba = 0$. Luego, $0 = 0r = (ba)r = b(ar)$ y como R es reversible, se tiene que $(ar)b = arb = 0$. Es decir, $aRb \subseteq \{0\}$ y claramente $\{0\} \subseteq aRb$, puesto que $0 = a0b$. Así, $aRb = \{0\}$ y R tiene la propiedad SI.

Por otro lado, asuma que R es simétrico y considere $x, y \in R$ tales que $xy = 0$. Sea $s \in R$ arbitrario, entonces $0 = 0s = (xy)s = xys$. Dado que R es simétrico, $xsy = 0$. Por lo tanto, $xRy \subseteq \{0\}$. La otra inclusión es claro, entonces $aRb = \{0\}$ y así, R tiene la propiedad SI. \square

Sea R un anillo con identidad y considere $a, b \in R$ tales que $ab = 0$. Entonces, si R es simétrico, de la igualdad $ab = 1ab = 0$, se tiene que $1ba = ba = 0$ y así, R es reversible. Es decir, para anillos con identidad se tiene que simétrico implica reversible. De lo anterior, el siguiente resultado es válido.

Proposición 4.8. *Sea R un anillo con identidad. Si el anillo R es simétrico, entonces R es reversible.*

En la proposición anterior, la hipótesis de tener identidad es indispensable, ya que para anillos que no tienen identidad el resultado no es necesariamente cierto. A continuación, se presenta un anillo, sin identidad, que es simétrico, pero no es reversible. Este ejemplo fue tomado de (Marks, 2002, Example 1.).

Ejemplo 4.15. Sea $S = \{a, b\}$ el semigrupo ⁶ multiplicativo, tal que satisface las igualdades $a^2 = ab = a$ y $b^2 = ba = b$. Análogamente a la definición de un anillo de grupo, se puede definir un

⁶ Un semigrupo S es un conjunto no vacío con una operación interna que satisface la propiedad asociativa.

anillo de semigrupo; es decir se puede construir la estructura de tal forma que \mathbb{F}_2S sea un anillo.

No es difícil verificar que el anillo \mathbb{F}_2S no tiene identidad. A continuación, se va a mostrar que \mathbb{F}_2S

es simétrico pero no reversible (lo que no puede suceder en un anillo con identidad). En efecto,

sean $\alpha = \alpha_1a + \beta_1b$, $\beta = \alpha_2a + \beta_2b$ y $\gamma = \alpha_3a + \beta_3b$ en \mathbb{F}_2S tal que $\alpha\beta\gamma = 0$, luego

$$\begin{aligned}
 0 &= (\alpha_1a + \beta_1b)(\alpha_2a + \beta_2b)(\alpha_3a + \beta_3b) \\
 &= (\alpha_1\alpha_2a + \alpha_1\beta_2a + \beta_1\alpha_2b + \beta_1\beta_2b)(\alpha_3a + \beta_3b) \\
 &= (\alpha_1(\alpha_2 + \beta_2)a + \beta_1(\alpha_2 + \beta_2)b)(\alpha_3a + \beta_3b) \\
 &= \alpha_1\alpha_3(\alpha_2 + \beta_2)a + \alpha_1\beta_3(\alpha_2 + \beta_2)a + \beta_1\alpha_3(\alpha_2 + \beta_2)b + \beta_1\beta_3(\alpha_2 + \beta_2)b \\
 &= (\alpha_2 + \beta_2)(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\beta_3)a + (\alpha_2 + \beta_2)(\beta_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3)b.
 \end{aligned}$$

Entonces, $\alpha_1(\alpha_2 + \beta_2)(\alpha_3 + \beta_3) = \beta_1(\alpha_2 + \beta_2)(\alpha_3 + \beta_3) = 0$ y así,

$$\begin{aligned}
 \alpha\gamma\beta &= (\alpha_1a + \beta_1b)(\alpha_3a + \beta_3b)(\alpha_2a + \beta_2b) \\
 &= (\alpha_1(\alpha_3 + \beta_3)a + \beta_1(\alpha_3 + \beta_3)b)(\alpha_2a + \beta_2b) \\
 &= \alpha_1\alpha_2(\alpha_3 + \beta_3)a + \alpha_1\beta_2(\alpha_3 + \beta_3)a + \beta_1\alpha_2(\alpha_3 + \beta_3)b + \beta_1\beta_2(\alpha_3 + \beta_3)b \\
 &= (\alpha_3 + \beta_3)(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)a + (\alpha_3 + \beta_3)(\beta_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)b \\
 &= \alpha_1(\alpha_3 + \beta_3)(\alpha_2 + \beta_2)a + \beta_1(\alpha_3 + \beta_3)(\alpha_2 + \beta_2)b \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, \mathbb{F}_2S es simétrico. Más aún, para mostrar un ejemplo específico, tome $\alpha = b$, $\beta = a + b$, $\gamma = a$, entonces $\alpha\beta\gamma = 2ba = 0$ y esto debe implicar que $\alpha\gamma\beta = 0$, lo cual en efecto es así, puesto que $\alpha\gamma\beta = 2ba = 0$.

Por otro lado, para ver que \mathbb{F}_2S no es reversible, tome $\alpha = a$ y $\beta = a + b$ en \mathbb{F}_2S , entonces $\alpha\beta = 2a = 0$ pero $\beta\alpha = a + b \neq 0$. Es decir, \mathbb{F}_2S no es reversible.

Proposición 4.9. *Si el anillo R tiene la propiedad SI, entonces R es 2-primal.*

Demostración. Por el Corolario 2.1 se sabe que $Nil_*(R) \subseteq \mathcal{N}(R)$. Para mostrar la otra inclusión, considere $a \in \mathcal{N}(R)$, es decir; existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. Suponga que $a \notin Nil_*(R)$, entonces existe un ideal primo \mathfrak{p} de R tal que $a \notin \mathfrak{p}$. Por ser \mathfrak{p} un ideal primo de R , de la Proposición 2.3 se tiene que $R \setminus \mathfrak{p}$ es un m -sistema y claramente contiene al elemento a . Luego, por definición de m -sistema, existe $r_1 \in R$ tal que $ar_1a \in R \setminus \mathfrak{p}$. Nuevamente, dado que $ar_1a, a \in R \setminus \mathfrak{p}$, existe $r_2 \in R$ tal que $ar_1ar_2a \in R \setminus \mathfrak{p}$. Continuando el proceso de forma similar, existen $r_3, r_4, \dots, r_{n-1} \in R$ tales que $ar_1ar_2, \dots, r_{n-1}a \in R \setminus \mathfrak{p}$. Dado que $a^n = aa^{n-1} = 0$ y R tiene la propiedad SI, se tiene que $ar_1a^{n-1} = 0$ y usando un proceso análogo, $ar_1ar_2, \dots, r_{n-1}a = 0 \in \mathfrak{p}$. Entonces, $ar_1ar_2, \dots, r_{n-1}a \in (R \setminus \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{p}$, lo cual evidentemente es una contradicción. Por lo tanto, $a \in Nil_*(R)$ y se cumple que $\mathcal{N}(R) \subseteq Nil_*(R)$. Así, $Nil_*(R) = \mathcal{N}(R)$ y R es un anillo 2-primal. \square

Nota 4.12. En la demostración anterior, usando la hipótesis de que $a \in \mathcal{N}(R)$, se puede probar que RaR es un ideal nilpotente de R y así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(RaR)^m = \{0\}$. Luego, claramente $(RaR)^m \subseteq \mathfrak{q}$, para todo ideal primo \mathfrak{q} de R . Entonces, aplicando la definición de ideal primo, es posible deducir que $RaR \subseteq \mathfrak{q}$ y así, usando la Proposición 2.2 se obtiene que $a \in \mathfrak{q}$, con lo cual se

tiene el resultado.

Una condición necesaria y suficiente para que un anillo R sea 2-primal es que todo ideal primo mínimo \mathfrak{q} de R sea completamente primo, este resultado fue dado por (Shin, 1973, Proposición 1.11.). Entonces, para resumir los resultados mencionados hasta el momento en esta sección, se presenta el siguiente diagrama dado por Marks (2002), en el cual las implicaciones se cumple para anillos que no necesariamente tienen identidad.

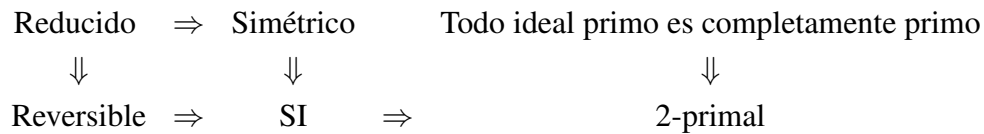


Figura 1. Relaciones entre propiedades reversible, simétrico y SI.

Adicionalmente, para anillos con identidad, de la Proposición 4.8 se tiene que simétrico implica reversible. Según Marks (2002), ninguna otra implicación es válida en la Figura 1, excepto aquellas que se obtienen por transitividad. Para una discusión completa y más detallada de las inclusiones adecuadas entre diversas clases de anillos, el lector interesado puede consulte la referencia Marks (2003).

Nota 4.13. De la Figura 1, si un anillo R (no necesariamente conmutativo) es reversible, simétrico o tiene la propiedad SI, entonces R es un anillo 2-primal. Así, $\text{Nil}_*(R) = \mathcal{N}(R)$ (lo cual en anillos conmutativos siempre se cumple). Lo anterior, permite visualizar el uso de las propiedades anillo-teóricas para extender resultados válidos para anillos conmutativos a un tipo de anillos más generales.

Ejemplo 4.16. Considere el anillo $R = \mathbb{Z}_4$, entonces R tiene identidad. Dado que R es conmutativo, entonces R tiene todas las propiedades de la Figura 1, excepto la propiedad de ser reducido, ya que $2 \in \mathcal{N}(R) \neq \{0\}$. Ahora, sea $S = \{0, 2\}$ el subanillo de R , claramente S no tiene identidad. Nuevamente, como S es un anillo conmutativo, satisface todas las propiedades de la Figura 1, excepto la propiedad de ser reducido, puesto que $2 \in \mathcal{N}(S) \neq \{0\}$. Este ejemplo muestra que en el contexto general de anillos (con o sin identidad), ninguna de las propiedades de la Figura 1 implica la propiedad de ser reducido.

Ejemplo 4.17. Para un número natural $n \geq 2$, el anillo $R = M_n(D)$ de matrices de tamaño $n \times n$ sobre un anillo de división D no tiene la propiedad SI. En efecto, $E_{22}E_{12} = 0$ pero $E_{22}E_{21}E_{12} = E_{22} \neq 0$. Por lo tanto, $E_{22}RE_{12} \neq \{0\}$ y así, R no tiene la propiedad SI. Observe que de la Figura 1, reducido, simétrico y rerversible implican tener la propiedad SI, entonces como $R = M_n(D)$ no tiene la propiedad SI tampoco puede tener estas propiedades.

4.2. Diagrama de Marks modificado

A cotinuación, se presentan algunos resultados que permiten modificar y por ende extender la Figura 1, de tal forma que se incluya la propiedad dúo.

Lema 4.4. *Sea R un anillo, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. R tiene la propiedad SI.
2. Para todo $a \in R$, $\text{Ann}_l(a)$ es un ideal bilateral.
3. Para todo $b \in R$, $\text{Ann}_r(b)$ es un ideal bilateral.

Demostración. Se va a probar la equivalencia entre 1 y 2, de forma análoga se puede probar la equivalencia entre 1 y 3 y así, se obtiene el resultado. Suponga que R tiene la propiedad SI y considere $Ann_l(a)$ para algún $a \in R$. Se sabe que $Ann_l(a)$ es un ideal izquierdo de R , entonces solo resta probar que también es un ideal derecho de R . Sean $s \in Ann_l(a)$ y $r \in R$, entonces $sa = 0$ y dado que R tiene la propiedad SI, se tiene que $sra = 0$ y así, $sr \in Ann_l(a)$. Por lo tanto, $Ann_l(a)$ es un ideal derecho de R . Recíprocamente, sean $a, b \in R$ tal que $ab = 0$, entonces $a \in Ann_l(b)$ y como $Ann_l(b)$ es un ideal bilateral de R , se cumple que $ax \in Ann_l(b)$ para todo $x \in R$. Es decir, $axb = 0$, lo que prueba que R tiene la propiedad SI. \square

Teorema 4.6. *Si el anillo R es dúo unilateral (derecho o dúo izquierdo). Entonces,*

1. R tiene la propiedad SI y
2. todo ideal primo de R es completamente primo.

Demostración. Únicamente se va a probar el caso cuando R es dúo izquierdo, las pruebas cuando R es dúo derecho son similares.

1. Suponga que el anillo R es dúo izquierdo. Entonces, todos los ideales izquierdos de R son ideales bilaterales. En particular, para todo $a \in R$, $Ann_l(a)$ es un ideal bilateral. Por lo tanto, del Lema 4.4 se concluye que R tiene la propiedad SI. Análogamente, se puede demostrar que si el anillo R es dúo derecho, entonces R tiene la propiedad SI.
2. Asuma que R es un anillo dúo izquierdo y considere \mathfrak{p} un ideal primo de R . Dados $a, b \in R$ tales que $ab \in \mathfrak{p}$, se va a mostrar que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$ y así, \mathfrak{p} es completamente primo. Defina el

conjunto $I = \{r \in R : rb \in \mathfrak{p}\}$. Note que $I \neq \emptyset$ ya que $0 \in I$. Además, por ser \mathfrak{p} un ideal de R , para $x, y \in I$ y $s \in R$ se cumple que $(x - y)b \in \mathfrak{p}$ y $sxb \in \mathfrak{p}$. Por lo tanto, I es un ideal izquierdo de R . Usando la hipótesis, I es un ideal derecho de R , luego como $a \in I$, se tiene que $aR \subseteq I$ y así, $aRb \subseteq \mathfrak{p}$. Entonces, de la Proposición 2.2, $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$, por lo tanto \mathfrak{p} es un ideal completamente primo. Si el anillo R es dúo derecho, el conjunto $J = \{r \in R : ar \in \mathfrak{p}\}$ es un ideal derecho de R y haciendo un proceso similar se prueba que \mathfrak{p} es un ideal completamente primo.

□

Del teorema anterior y la definición de anillo dúo, se sigue de forma natural el siguiente resultado.

Corolario 4.5. *Si el anillo R es dúo, entonces R tiene la propiedad SI y todo ideal primo de R es completamente primo.*

Usando las implicaciones dadas en el teorema anterior y con el fin de incluir la propiedad dúo en el diagrama de la Figura 1, se presenta a continuación una modificación de este diagrama, en el cual se muestran algunas implicaciones válidas entre las propiedades anillo-teóricas de interés en este trabajo, en anillos que no necesariamente tienen identidad.

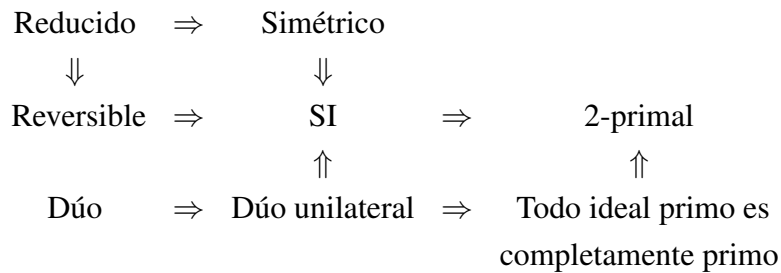


Figura 2. Modificación del diagrama de Marks.

Nota 4.14. De la figura anterior, si un anillo es dúo, entonces es 2-primal. La anterior implicación habitualmente se justifica en la literatura argumentando que en un anillo dúo (izquierdo o derecho) todo ideal primo es completamente primo, por ejemplo (Marks, 2002, Background). Sin embargo, la Figura 2 permite identificar otra alternativa por medio de la cual es posible demostrar este resultado, sin usar el hecho de que todo ideal primo es completamente primo.

4.3. Algunas caracterizaciones

Se finaliza este capítulo presentando algunos resultados que permiten caracterizar las propiedades anillo-teóricas de interés.

Teorema 4.7. *Sea R un anillo con identidad.*

1. *R es dúo izquierdo si, y sólo si, para todo $a \in R$, el ideal izquierdo Ra es bilateral.*
2. *R es dúo derecho si, y sólo si, para todo $a \in R$, el ideal derecho aR es bilateral.*

Demostración. Se va hacer la prueba de 1, la demostración de 2 es análoga. Suponga que R es dúo izquierdo, entonces todos sus ideales izquierdos son bilaterales. En particular, para todo $a \in R$, el

ideal izquierdo Ra es bilateral. Para el recíproco, suponga que para todo $b \in R$, el ideal izquierdo Rb es bilateral. Sean I un ideal izquierdo de R , $x \in I$ y $r \in R$, dado que R tiene identidad, entonces $x = 1x \in Rx$. Por hipótesis Rx es bilateral, entonces $xr \in Rx$, pero claramente $Rx \subseteq I$ puesto que I es un ideal izquierdo de R . Por lo tanto, $xr \in I$ y esto prueba que I es un ideal derecho. Así, R es dúo izquierdo. \square

Ejemplo 4.18. Sea D un anillo de división. Dado que D tiene identidad, según el teorema anterior, para probar que D es dúo izquierdo basta probar que para todo $a \in D$ el ideal izquierdo Da es un ideal derecho. Note que si $a = 0$, entonces $Da = \{0\}$ y claramente $\{0\}$ es un ideal derecho. Por otro lado, si $a \neq 0$, entonces $1 = a^{-1}a \in Da$ y así, $Da = D$, que claramente es un ideal derecho. Así, D es dúo izquierdo. De forma similar se puede mostrar que D también es dúo derecho. Por lo tanto, todo anillo de división D es dúo.

Nota 4.15. Dado que en un anillo de división D no existen divisores de cero, también se puede verificar que D es reversible, simétrico y tiene la propiedad SI.

Teorema 4.8. Sea R_1 un anillo dúo izquierdo (derecho), si $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ es un epimorfismo de anillos, entonces R_2 es un anillo dúo izquierdo (derecho). En particular, si R_1 es dúo, entonces R_2 también lo es.

Demostración. Se presenta la demostración de caso dúo izquierdo, la prueba para dúo derecho es similar. El caso dúo se sigue de forma natural de la definición de anillo dúo.

Suponga que R_1 es dúo izquierdo y sea I un ideal izquierdo de R_2 . Primero se va a probar que la imagen inversa de I dada por $\phi^{-1}(I) = \{t \in R_1 : \phi(t) \in I\}$, es un ideal izquierdo de R_1 . Sean

$x, y \in \phi^{-1}(I)$ y $r \in R_1$, entonces $\phi(x), \phi(y) \in I$, luego $\phi(x - y) = \phi(x) - \phi(y) \in I$ puesto que I es un ideal izquierdo de R_2 y de forma similar, $\phi(rx) = \phi(r)\phi(x) \in I$ ya que $\phi(x) \in I$ y $\phi(r) \in R_2$. Así, $\phi^{-1}(I)$ es un ideal izquierdo de R_1 . Dado que R_1 es un anillo dúo izquierdo, entonces $\phi^{-1}(I)$ es un ideal derecho de R_1 . Sean $a \in R_2$ y $b \in I \subseteq R_2$, por ser ϕ un epimorfismo, $a = \phi(c)$ y $b = \phi(d)$ con $c \in R_1$ y $d \in \phi^{-1}(I)$, entonces $dc \in \phi^{-1}(I)$. Es decir, $ba = \phi(d)\phi(c) = \phi(dc) \in I$. Por lo tanto, I es un ideal bilateral de R_2 y así, R_2 es dúo izquierdo. \square

No es difícil ver que si R_1, \dots, R_k son anillos, entonces un ideal izquierdo (derecho) I de $R = \bigoplus_{i=1}^k R_i$, es de la forma $I = \bigoplus_{i=1}^k I_i$, donde I_i es un ideal izquierdo (derecho) de R_i para todo $1 \leq i \leq k$. Entonces, R es dúo izquierdo (derecho) si, y sólo si, cada R_i es dúo izquierdo (derecho).

De lo anterior y junto con el Teorema 4.8 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.9. Sean R, R_1, \dots, R_k anillos tales que $R \cong \bigoplus_{i=1}^k R_i$.

1. R es dúo izquierdo (derecho) si, y sólo si, R_i es dúo izquierdo (derecho) para todo $1 \leq i \leq k$.

En particular, R es dúo si, y sólo si, todos los R_i son anillos dúo.

2. R es reversible (simétrico) si, y sólo si, R_i es reversibles (simétricos) para todo $1 \leq i \leq k$.

Demostración. Sea $\varphi : R \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k R_i$ un isomorfismo.

1. Aquí, al igual que en la demostración del Teorema 4.8, se presenta la prueba para el caso dúo izquierdo, ya que la demostración para dúo derecho es similar. Así, de lo anterior y de la definición de anillo dúo, se obtiene la equivalencia para este caso. Suponga que el anillo R es dúo izquierdo y para $1 \leq i \leq k$ considere las proyecciones canónicas $\pi_i : \bigoplus_{i=1}^k R_i \rightarrow R_i$,

las cuales son sobreyectivas. Por lo tanto, cada $\pi_i \circ \varphi : R \rightarrow R_i$ es un epimorfismo. Entonces, del Teorema 4.8 se tiene que R_i es dúo izquierdo para todo $1 \leq i \leq k$.

Recíprocamente, suponga que R_i es dúo izquierdo para todo $1 \leq i \leq k$. Esto implica que $S = \bigoplus_{i=1}^k R_i$ también es dúo izquierdo. Así, dado que φ es un isomorfismo, entonces $\varphi^{-1} : S \rightarrow R$ es un epimorfismo y el resultado se sigue del Teorema 4.8.

2. En esta prueba se hace el caso reversible, el proceso para demostrar el caso simétrico es análogo. Suponga que R es reversible y que existe algún $1 \leq j \leq k$ tal que R_j no es reversible. Entonces, existen $a, b \in R_j$ tales que $ab = 0$ pero $ba \neq 0$. Luego, por la sobreyectividad de ϕ existen $x, y \in R$, tales que

$$\varphi(x) = (0, \dots, a, \dots, 0) \quad \text{y} \quad \varphi(y) = (0, \dots, b, \dots, 0),$$

donde a y b están en la j -ésima posición. Entonces, $\varphi(xy) = (0, \dots, 0)$ mientras que $\varphi(yx) \neq (0, \dots, 0)$ y así, como φ es un isomorfismo, $xy = 0$ pero $yx \neq 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, R_i es reversible para todo $1 \leq i \leq k$.

Recíprocamente, suponga que todos los R_i son reversibles y que R no lo es. Por lo tanto, existen $r, s \in R$ con $rs = 0$ mientras que $sr \neq 0$, entonces $\varphi(r)\varphi(s) = (0, \dots, 0)$ pero $\varphi(s)\varphi(r) \neq (0, \dots, 0)$, esto significa que existen t, u en algún R_i tales que $tu = 0$ pero $ut \neq 0$, lo que es una contradicción. Así, R es reversible.

□

5. Anillos de grupo dúo, reversibles y simétricos

El objetivo central de este capítulo es estudiar las propiedades dúo, reversible, simétrico y SI en anillos de grupo RG sobre anillos conmutativos con identidad, y sus posibles conexiones. Además, para grupos de torsión no abelianos, se establecen condiciones necesarias en términos del grupo G y el anillo R cuando RG tiene estas propiedades (ver Figura 4 y Figura 5).

5.1. Condición necesaria sobre RG y la estructura de G

Dado un anillo R y un grupo G , es natural pensar que si el anillo de grupo RG tiene una cierta propiedad anillo-teórica, entonces el anillo de coeficientes R también la posee. Por ejemplo, dado que $\varepsilon : RG \rightarrow R$ es un epimorfismo (ver Definición 3.21), si RG es un anillo dúo, sigue del Teorema 4.8 que R también lo es. Lo mismo sucede con las propiedades reversible y simétrico.

Proposición 5.10. *Sean R un anillo, G un grupo y RG su anillo de grupo asociado. Si RG es reversible (simétrico), entonces el anillo R es reversible (simétrico).*

Demostración. Suponga que RG es reversible y R no lo es. Entonces, existen $a, b \in R$ tales que $ab = 0$ y $ba \neq 0$. Por lo tanto, al considerar los elementos $x = a \cdot 1_G$ y $y = b \cdot 1_G$ en RG , se tiene que $xy = 0$ mientras que $yx \neq 0$, lo que es una contradicción. Así, R es reversible. De forma análoga se prueba que R es simétrico si RG lo es. □

Ejemplo 5.19. Considere $R = M_n(D)$ el anillo de matrices de tamaño $n \times n$ sobre un anillo de división D . Si $n \geq 2$, se sabe del Ejemplo 4.14 que R no es un anillo dúo y del Ejemplo 4.17, R

tampoco es reversible, simétrico y no tiene la propiedad SI. Entonces, de la proposición anterior se tiene que para cualquier grupo G el anillo de grupo RG no es dúo, reversible, simétrico y tampoco tiene la propiedad SI.

Es interesante observar que algunas de las propiedades anillo-teóricas que dan origen a los anillos 2-primales, son equivalentes cuando se restringen a ciertos anillos de grupo. A continuación, se presentan los siguientes resultados (Proposición 5.11 y Proposición 5.12), los cuales muestran la equivalencia entre algunas propiedades anillo-teóricas de interés en este trabajo, en el contexto de anillos de grupo sobre anillos conmutativos con identidad.

(Bell and Li, 2007, pág. 833) afirman, sin demostrar, que para anillos de grupo RG donde R es un anillo conmutativo con identidad y G es un grupo arbitrario, las propiedades dúo izquierdo y dúo derecho son equivalentes, algo que no ocurre en general (Ver Ejemplo 4.14). A continuación, se presenta una prueba de este resultado, argumento que usa la así llamada involución clásica sobre RG , es decir, la obtenida R -linealmente a partir de la involución clásica en G dada por $g \mapsto g^{-1}$.

Proposición 5.11. *Sean R un anillo conmutativo con identidad y G un grupo. El anillo de grupo RG es dúo izquierdo si, y sólo si, RG es dúo derecho.*

Demostración. proof Considere $*$: $RG \rightarrow RG$ la involución clásica sobre RG dada por $\sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in G} a_g g^{-1}$ y suponga que RG es dúo izquierdo. Sea I un ideal derecho de RG . Entonces, el conjunto $J = \{\alpha^* : \alpha \in I\} \subseteq RG$ es un ideal izquierdo de RG . En efecto, $0_{RG} \in I$ y así, $0_{RG} = 0_{RG}^* \in J$, de donde $J \neq \emptyset$. Sean $\gamma \in RG$ y $x, y \in J$ arbitrarios, entonces $x = \alpha^*$ y $y = \beta^*$ para algunos

$\alpha, \beta \in I$. Luego,

$$\begin{aligned} x - y &= \alpha^* - \beta^* = \alpha^* - 1^* \beta^* = \alpha^* + (-1^* \beta^*) = \alpha^* + (\beta(-1))^* = (\alpha + \beta(-1))^* \\ &= (\alpha - \beta)^* \in J, \text{ pues } \alpha \text{ y } \beta \text{ est\u00e1n en } I. \end{aligned}$$

Adem\u00e1s, $\gamma x = \gamma \alpha^* = (\alpha \gamma^*)^* \in J$ ya que $\alpha \gamma^* \in I$, lo que demuestra que J es ideal izquierdo de RG . Adicionalmente, $J^* = \{w^* : w \in J\} = \{(\alpha^*)^* : \alpha \in I\} = I$. Ahora, de la hip\u00f3tesis J es un ideal bilateral, entonces para $\gamma \in RG$ y $\rho \in I$ se tiene que $\gamma \rho = ((\gamma \rho)^*)^* = (\rho^* \gamma^*)^* \in J^*$ dado que $\rho^* \in J$, $\gamma^* \in RG$ y J es un ideal en RG . Luego, como $J^* = I$, sigue que $\gamma \rho \in I$ y as\u00ed, I es un ideal bilateral. Es decir, RG es un anillo d\u00fao derecho.

Usando argumentos similares, se puede probar que si RG es d\u00fao derecho, entonces RG tambi\u00e9n es d\u00fao izquierdo y as\u00ed, se tiene la equivalencia. □

Nota 5.16. La parte ‘‘S\u00f3lo si’’ en la demostraci\u00f3n anterior, se puede resumir mediante en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} * : RG & \longrightarrow & RG & \longrightarrow & RG \\ I \text{ (derecho)} & \longmapsto & I^* \text{ (izquierdo)} & & I^{**} = I \\ & & \Downarrow \text{(Hip\u00f3tesis)} & & \Uparrow \\ & & I^* \text{ (derecho)} & \longmapsto & (I^*)^* \text{ (izquierdo)} \end{array}$$

Figura 3. Demostraci\u00f3n esquem\u00e1tica de la Proposici\u00f3n 5.11.

Marks (2002) prob\u00f3 que si R es un anillo conmutativo con identidad y G es un grupo finito, entonces el anillo de grupo RG es reversible si, y s\u00f3lo si, RG tiene la propiedad SI. Posteriormente,

Bell and Li (2007) citan este resultado y afirman, sin demostrar, que es válido para un grupo arbitrario G . La siguiente proposición establece este resultado.

Proposición 5.12. *Sean R un anillo conmutativo con identidad y G cualquier grupo. Entonces, el anillo de grupo RG es reversible si, y sólo si, RG tiene la propiedad SI.*

Demostración. De la Proposición 4.7, si RG es reversible, entonces RG satisface la propiedad SI.

Recíprocamente, suponga que RG tiene la propiedad SI y considere $\alpha, \beta \in RG$ tales que $\alpha\beta = 0$.

Dado que RG tiene la propiedad SI, entonces $\alpha\gamma\beta = 0$, para todo $\gamma \in RG$. Luego, de la Proposición

3.4, $0 = tr(\alpha[\gamma\beta]) = tr([\gamma\beta]\alpha)$ y así, todo elemento del ideal izquierdo $(RG)\beta\alpha$ tiene traza cero.

Ahora, si $\beta\alpha$ tiene la siguiente representación

$$\beta\alpha = \sum_{i=1}^n a_i g_i, \quad a_i \in R, \quad g_i \in G \text{ y } g_i \neq g_j \text{ para } i \neq j,$$

entonces al considerar los elementos $\gamma_i = g_i^{-1} \in RG$, $1 \leq i \leq n$, sigue de $tr(\gamma_i \beta \alpha) = 0$ que $a_1 = 0$.

De forma análoga, de $tr(\gamma_2 \beta \alpha) = 0$, se obtiene que $a_2 = 0$ y continuando de esta manera $a_i = 0$,

$1 \leq i \leq n$. Así, $\beta\alpha = 0$ y RG es reversible. □

No es difícil verificar que para un anillo conmutativo R y un grupo G , el anillo de grupo RG es conmutativo si, y sólo si, G es abeliano. Por tal razón, en este contexto, el estudio de las propiedades dúo, reversible y simétrico tiene sentido sobre grupos no abelianos. (Gutan and Kisielewicz, 2004, Theorem 2.1) establecieron que si el anillo de grupo $\mathbb{F}G$ es reversible, con \mathbb{F} un cuerpo y G un grupo de torsión no abeliano, entonces G es un grupo Hamiltoniano. Posteriormente, (Li and

Parmenter, 2007, Introduction) afirman, sin demostrar, que este resultado es válido para $\mathbb{F} = R$ un anillo conmutativo con identidad. Usando las ideas de Gutan and Kisielewicz (2004) se establece que en efecto, la afirmación es verdadera.

Teorema 5.10. *Sean R un anillo conmutativo con identidad y G un grupo de torsión no abeliano. Si RG es reversible, entonces G es Hamiltoniano.*

Demostración. Se va a demostrar que para todo $x \in G$, $\langle x \rangle$ es un subgrupo normal de G y así, de la Proposición 2.1 se tiene que G es un grupo Hamiltoniano. Cuando $x = 1$ es el elemento neutro del grupo, claramente $\langle x \rangle \trianglelefteq G$. Sea $x \in G \setminus \{1\}$, dado que G es un grupo de torsión, entonces x tiene orden finito. Sea n el orden de x y considere $g \in G$, observe que en RG se tiene que

$$0 = g(1 - x^n) = g(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}),$$

y como RG es reversible, entonces

$$0 = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})g(1 - x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})(g - gx).$$

Luego, multiplicando por el inverso de g en RG , se obtiene que

$$0 = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})(1 - gxg^{-1}).$$

Dado que el orden de x es n , el conjunto $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ contiene n elementos de G distintos dos a dos y de la expresión $0 = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})(1 - gxg^{-1})$ que es equivalente a $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = gxg^{-1} + xgxg^{-1} + x^2gxg^{-1} + \cdots + x^{n-1}gxg^{-1}$, existen $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tales que $x^i = x^jgxg^{-1}$, es decir, $gxg^{-1} \in \langle x \rangle$. Por lo tanto, $\langle x \rangle \trianglelefteq G$. \square

Para anillos de grupo RG con R un anillo conmutativo con identidad y G cualquier grupo, se sabe de la Proposición 5.12 que RG es reversible si, y sólo si, RG tiene la propiedad SI. En este mismo contexto, de la Proposición 5.11, dúo izquierdo y dúo derecho son equivalentes. Por otro lado, del Teorema 4.6, la propiedad dúo unilateral implica tener la propiedad SI y para anillos con identidad, la Proposición 4.8 garantiza que simétrico implica reversible.

Así las cosas, en el contexto de los anillos de grupo y bajo las hipótesis del Teorema 5.10, se presenta el siguiente diagrama, el cual esquemáticamente muestra algunas implicaciones válidas entre las propiedades anillo-teóricas de interés.

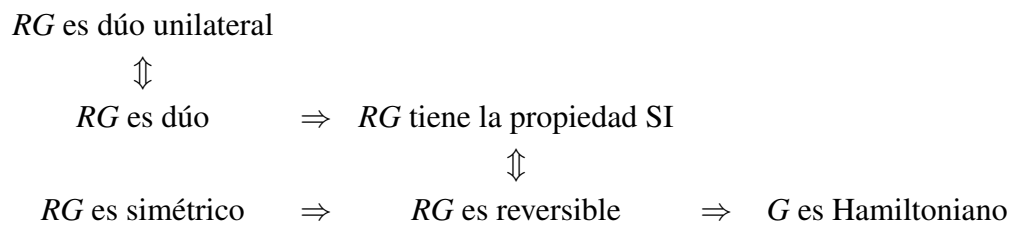


Figura 4. Condición necesaria sobre RG y la estructura de G .

Note que el diagrama anterior muestra que una condición necesaria para que RG sea dúo, reversible simétrico o tenga la propiedad SI, es que G debe ser Hamiltoniano. A continuación, se presenta el siguiente resultado que resume el diagrama anterior.

Teorema 5.11. *Sean R un anillo conmutativo con identidad y G un grupo de torsión no abeliano. Si RG es dúo, simétrico o tiene la propiedad SI, entonces G es un grupo Hamiltoniano.*

5.2. Condición necesaria sobre RG y la característica de R

Bajo las condiciones del Teorema 5.11, si RG es reversible, entonces G es un grupo Hamiltoniano y así, del Teorema 2.1, se tiene que

$$G = Q_8 \times E \times A,$$

donde Q_8 es el grupo cuaternio de orden 8, E es un 2-grupo abeliano elemental y A es un grupo abeliano donde todos sus elementos son de orden impar. Luego,

$$RG = R(Q_8 \times E \times A) \cong [R(E \times A)]Q_8.$$

Por lo tanto, dado que $R(E \times A)$ nuevamente es un anillo conmutativo con identidad, el estudio de la reversibilidad de RG se reduce esencialmente al caso cuando $G = Q_8$.

Gutan and Kisielewicz (2004) estudian la reversibilidad de $\mathbb{F}Q_8$, donde \mathbb{F} es un cuerpo y con base en esto, establecen que si $\mathbb{F}G$ es reversible, con \mathbb{F} un cuerpo y G un grupo de torsión no abeliano, entonces la característica de \mathbb{F} únicamente puede ser 0 o 2 y dan unas ciertas caracterizaciones para cada caso. A continuación, se presentan algunos de estos resultados.

Lema 5.5 ((Gutan and Kisielewicz, 2004, Theorem 3.1 y Theorem 4.1)). *Sea \mathbb{F} un cuerpo.*

1. Si $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$, entonces $\mathbb{F}Q_8$ es reversible si, y sólo si, la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no tiene solución en \mathbb{F} .
2. Si $\text{car}(\mathbb{F}) = 2$, entonces $\mathbb{F}Q_8$ es reversible si, y sólo si, la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene solución en \mathbb{F} .

La demostración de estos resultados puede ser consultada en Gutan and Kisielewicz (2004). Sin embargo, (Li and Parmenter, 2007, pág. 4098) dan una breve idea de una prueba alterna para la equivalencia presentada en I , utilizando la descomposición de Wedderburn-Artin de $\mathbb{F}Q_8$. A continuación, se presenta deatalladamente esta demostración.

Demostración. De (Polcino Milies and Sehgal, 2002, Lema 7.4.9), se sabe que $\mathbb{F}Q_8 \cong 4\mathbb{F} \oplus \mathcal{H}(\mathbb{F})$, donde $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ es el álgebra de cuaternios sobre \mathbb{F} , el cual por (Polcino Milies and Sehgal, 2002, Teorema 7.4.6) es un anillo de división D o es isomorfo a $M_2(\mathbb{F})$ el anillo de matrices de tamaño 2×2 sobre \mathbb{F} y la última posibilidad se cumple si, y sólo si, la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ tiene solución en \mathbb{F} .

Suponga que $\mathbb{F}Q_8$ es reversible, entonces del Teorema 4.9 se debe cumplir que $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ también debe serlo y no hay otra condición puesto que $4\mathbb{F}$ es reversible. Por lo tanto, $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ no puede ser isomorfo a $M_2(\mathbb{F})$ ya que del Ejemplo 4.17, $M_2(\mathbb{F})$ no es reversible y así, la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no tiene solución en \mathbb{F} . Recíprocamente, si la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no tiene solución en \mathbb{F} , entonces $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ es un anillo de división D y del Ejemplo 4.18 es reversible, lo que demuestra que $\mathbb{F}Q_8$ es reversible. \square

Se sabe que para $p > 2$ los cuerpos de Galois \mathbb{F}_p tienen elementos que satisfacen $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Se sigue, por el resultado anterior, que \mathbb{F}_pQ_8 no es reversible para $p > 2$. Ahora, si \mathbb{F} es un cuerpo con $\text{car}(\mathbb{F}) > 2$, entonces \mathbb{F}_pQ_8 es un subanillo de $\mathbb{F}Q_8$ y así, $\mathbb{F}Q_8$ no puede ser reversible. Por lo tanto, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 5.6. *Si \mathbb{F} es un cuerpo con $\text{car}(\mathbb{F}) > 2$, entonces $\mathbb{F}Q_8$ no es reversible.*

Del anterior corolario, es posible establecer una condición necesaria en términos de la característica del cuerpo \mathbb{F} cuando el anillo de grupo $\mathbb{F}G$ de un grupo de torsión no abeliano es reversible.

Teorema 5.12. *Sean \mathbb{F} un cuerpo y G un grupo de torsión no abeliano. Si $\mathbb{F}G$ es reversible, entonces $\text{car}(\mathbb{F}) = 0$ o $\text{car}(\mathbb{F}) = 2$*

Demostración. Dado que $\mathbb{F}G$ es reversible, del Teorema 5.10 se tiene que G es un grupo Hamiltoniano y así, $G = Q_8 \times E \times A$, donde Q_8 es el grupo cuaternio de orden 8, E es un 2-grupo abeliano elemental y A es un grupo abeliano donde todos sus elementos son de orden impar. Luego, $\mathbb{F}G = \mathbb{F}(Q_8 \times E \times A) \cong [\mathbb{F}(E \times A)]Q_8$ y dado que $\mathbb{F}G$ es reversible, entonces $[\mathbb{F}(E \times A)]Q_8$ también lo es y así, del corolario anterior $\text{car}(\mathbb{F}(E \times A)) = 0$ o $\text{car}(\mathbb{F}(E \times A)) = 2$. Por último, dado que $\text{car}(\mathbb{F}) = \text{car}(\mathbb{F}(E \times A))$, se tiene el resultado. \square

Bajo las condiciones del teorema anterior, Gutan and Kisielewicz (2004) muestran la siguiente caracterización de cuando $\mathbb{F}G$ es reversible para los dos únicos casos posibles $\text{car}(\mathbb{F}) = 0$ o $\text{car}(\mathbb{F}) = 2$.

Lema 5.6 ((Gutan and Kisielewicz, 2004, Theorem 5.1)). *Sea G un grupo de torsión no abeliano. Entonces, el anillo de grupo $\mathbb{F}G$ sobre un cuerpo \mathbb{F} es reversible si, y sólo si, G es Hamiltoniano y se cumple una de las siguientes condiciones.*

1. $\text{car}(\mathbb{F}) = 0$ y $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no tiene solución en ningún cuerpo ciclotómico $\mathbb{F}(\xi_d)$ para cualquier d impar que sea un orden de un elemento en G .
2. $\text{car}(\mathbb{F}) = 2$, G/Q_8 no tiene ningún elemento de orden par y $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene solución en ningún cuerpo ciclotómico $\mathbb{F}(\xi_d)$ para cualquier d impar que sea un orden de un elemento en G .

Li and Parmenter (2007) establecieron resultados que generalizan los de Gutan and Kisielewicz (2004). Específicamente estudian la reversibilidad de los anillos de grupo RG , donde R es un anillo conmutativo con identidad y G es un grupo de torsión. A continuación, se presentan algunos de estos resultados.

Lema 5.7. *Sea R un anillo con identidad. Si R contiene un elemento nilpotente r distinto de cero tal que $2r = 0$, entonces RQ_8 no es reversible.*

Demostración. Sea $r \in R$ un elemento nilpotente distinto de cero tal que $2r = 0$. Se puede suponer que $r^2 = 0$. Considere α y β en RQ_8 así: $\alpha = ra + [1 - (1+r)a + (1+r)a^2 - (1+r)a^3]b$ y $\beta = (1+r) + a + [(1+r) + (1+r)a]b$. Es posible comprobar que $\alpha\beta\gamma = 0$ pero $\alpha\gamma\beta = (1+2r)(1-a^2) \neq 0$ y así, RQ_8 no es reversible. \square

Teorema 5.13. *El anillo \mathbb{Z}_nQ_8 es reversible si, y sólo si, $n = 2$.*

Demostración. Suponga que \mathbb{Z}_nQ_8 es reversible. Sea p un divisor primo de n y escriba $n = p^k m$ donde $k \geq 1$ y el máximo común divisor de m y p es 1. Primero se va a demostrar que p debe ser 2, por lo que n es una potencia de 2. Suponga que $p > 2$. Note que $\mathbb{Z}_nQ_8 \cong \mathbb{Z}_{p^k}Q_8 \times \mathbb{Z}_mQ_8$ y como \mathbb{Z}_nQ_8 es reversible, $\mathbb{Z}_{p^k}Q_8$ también lo es. Del Corolario 5.6 se tiene que $k > 1$. Considere el epimorfismo natural de anillo

$$\phi : \mathbb{Z}_{p^k}Q_8 \rightarrow \left(\frac{\mathbb{Z}_{p^k}}{p^{k-1}\mathbb{Z}_{p^k}} \right) Q_8 \cong \mathbb{Z}_pQ_8,$$

donde $p^{k-1}\mathbb{Z}_{p^k}$ es el anulador de p en \mathbb{Z}_{p^k} . Por el Corolario 5.6, \mathbb{Z}_pQ_8 no es reversible, entonces

existen $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \left(\frac{\mathbb{Z}_{p^k}}{p^{k-1}\mathbb{Z}_{p^k}} \right) Q_8$ tales que $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{0}$, pero $\bar{\beta}\bar{\alpha} \neq \bar{0}$. Sean α y β las preimágenes de $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ en $\mathbb{Z}_{p^k}Q_8$, respectivamente. Dado que $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{0}$, entonces $\alpha\beta \in p^{k-1}\mathbb{Z}_{p^k}$ y por lo tanto $p\alpha\beta = 0$. Por otro lado, $p(\beta\alpha) \neq 0$ puesto que $\overline{\beta\alpha} \neq \bar{0}$, entonces $\mathbb{Z}_{p^k}Q_8$ no es reversible, lo cual es una contradicción. Entonces, $p = 2$ y así, $n = 2^s$. Si $s > 1$, el elemento $r = 2^{s-1}$ es un elemento nilpotente distinto de cero en \mathbb{Z}_n tal que $2r = 0$ y así, por el Lema 5.7, \mathbb{Z}_nQ_8 no es reversible, lo que contradice la suposición. Por lo tanto, se tiene que $n = 2$. Recíprocamente, si $n = 2$, del Ejemplo 7 en Marks (2002), se sabe que \mathbb{Z}_2Q_8 es reversible. \square

Si R es un anillo conmutativo con identidad, entonces del teorema anterior, si RQ_8 es reversible y $\text{car}(R) = n > 0$, el subanillo \mathbb{Z}_nQ_8 de RQ_8 también es reversible y así, $n = 2$. Por lo tanto, se puede concluir que si RQ_8 es reversible, entonces la característica de R es 0 o 2. Con base en esto y de forma similar a la prueba del Teorema 5.12 es posible extender este resultado para anillos de grupo RG sobre grupos de torsión no abelianos.

Teorema 5.14. *Sean R un anillo conmutativo con identidad y G un grupo de torsión no abeliano. Si RG es reversible, entonces $\text{car}(R) = 0$ o $\text{car}(R) = 2$.*

Con las hipótesis del teorema anterior y de forma análoga a la construcción de la Figura 4, el siguiente diagrama establece una condición necesaria en términos de la característica de R cuando el anillo de grupo RG tiene alguna propiedad anillo-teórica de interés en esta investigación

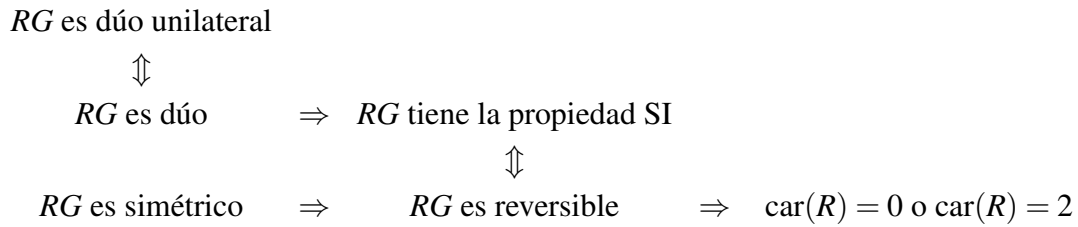


Figura 5. Condición necesaria sobre RG y la característica de R .

A continuación, se presentan los teoremas que establecen Li and Parmenter (2007) para los dos casos posibles, $\text{car}(R) = 0$ o $\text{car}(R) = 2$.

Lema 5.8 ((Li and Parmenter, 2007, Theorem 3.1.)). *Sea R un anillo conmutativo con identidad y de característica 2. Entonces, RQ_8 es reversible si, y sólo si, la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 0$ no tiene soluciones distintas de cero en R .*

Lema 5.9 ((Li and Parmenter, 2007, Theorem 4.2.)). *Sea R un anillo conmutativo con identidad y de característica 0. Suponga que $R_2 = \{x \in R : 2^k x = 0 \text{ para algún } k > 0\} = \{0\}$ y R no tiene elementos nilpotentes distintos de cero. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. RQ_8 es reversible.
2. La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ no tiene soluciones distintas de cero en R .
3. RQ_8 no tiene elementos nilpotentes distintos de cero.

5.3. Algunas equivalencias

Como ya se ha mencionado antes, si R un anillo conmutativo con identidad y G es un grupo abeliano, entonces RG es conmutativo y así, las propiedades dúo, reversible, simétrico y SI son

equivalentes en RG . Además, también se sabe que si G no es abeliano, tener la propiedad dúo implica ser reversible (ver Corolario 4.5 y Proposición 5.12). Sin embargo, el recíproco no es cierto. Bell and Li (2007) presentan el siguiente ejemplo de un anillo reversible que no es dúo y además establecen la equivalencia entre estas dos propiedad cuando $R = \mathbb{F}$ es un cuerpo.

Ejemplo 5.20. Sea $Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, a^2 = b^2, a^b = a^{-1} \rangle$ el grupo de cuaternios de orden 8. El anillo de grupo $\mathbb{Z}Q_8$ es un anillo reversible pero no un anillo dúo. Además, también se puede verificar que $\mathbb{Z}Q_8$ es un anillo simétrico. Por lo tanto, este ejemplo también muestra que simétrico no implica dúo.

En efecto, note que \mathbb{Q} es un cuerpo con $\text{car}(\mathbb{Q}) = 0$ y la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no tiene solución en \mathbb{Q} . Así, del Lema 5.5 se obtiene que $\mathbb{Q}Q_8$ es un anillo reversible. Luego, tomando a $\mathbb{Z}Q_8$ como un subanillo de $\mathbb{Q}Q_8$, el anillo de grupo $\mathbb{Z}Q_8$ también es reversible. Además, siguiendo la demostración dada en Lema 5.5, se tiene que $\mathbb{Q}Q_8 \cong 4\mathbb{Q} \oplus D$, donde D es un anillo de división y así, se sigue del Teorema 4.9 que $\mathbb{Q}Q_8$ es simétrico. Entonces, $\mathbb{Z}Q_8$ también es un anillo simétrico.

A continuación, se demuestra que $R = \mathbb{Z}Q_8$ no es un anillo dúo. Para ello, se va a mostrar que el ideal izquierdo $I = R(a + 2b)$ generado por $a + 2b$ no es un ideal derecho. Específicamente se demuestra que $(a + 2b)a$ no está en I . Suponga lo contrario, es decir que $(a + 2b)a = \beta(a + 2b)$, donde β es un elemento de $\mathbb{Z}Q_8$. Dado que $Q_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$, entonces β se puede escribir como

$$\beta = \sum_{i=0}^3 a_i a^i + \left(\sum_{j=4}^7 a_j a^{j-4} \right) b, \text{ donde } a_i, a_j \in \mathbb{Z} \text{ para } 0 \leq i \leq 3 \text{ y } 4 \leq j \leq 7.$$

Ahora, de las igualdades $bab^{-1} = a^{-1}$ y $a^4 = 1$ se obtiene que $ba = a^{-1}b$ y $a^3 = a^{-1}$ respectivamente. Entonces,

$$(a + 2b)a = \beta(a + 2b)$$

$$a^2 + 2ba = (a_01 + a_1a + a_2a^2 + a_3a^3 + a_4b + a_5ab + a_6a^2b + a_7a^3b)(a + 2b)$$

$$\begin{aligned} a^2 + 2a^3b &= a_0a + a_1a^2 + a_2a^3 + a_3a^4 + a_4ba + a_5aba + a_6a^2ba + a_7a^3ba \\ &+ 2a_0b + 2a_1ab + 2a_2a^2b + 2a_3a^3b + 2a_4b^2 + 2a_5ab^2 + 2a_6a^2b^2 + 2a_7a^3b^2 \\ &= a_0a + a_1a^2 + a_2a^3 + a_3 + a_4a^3b + a_5b + a_6a^2a^3b + a_7a^3a^3b \\ &+ 2a_0b + 2a_1ab + 2a_2a^2b + 2a_3a^3b + 2a_4a^2 + 2a_5aa^2 + 2a_6a^4 + 2a_7a^3a^2 \\ &= a_0a + a_1a^2 + a_2a^3 + a_3 + a_4a^3b + a_5b + a_6ab + a_7a^2b \\ &+ 2a_0b + 2a_1ab + 2a_2a^2b + 2a_3a^3b + 2a_4a^2 + 2a_5a^3 + 2a_6 + 2a_7a \\ &= (a_3 + 2a_6)1 + (a_0 + 2a_7)a + (a_1 + 2a_4)a^2 + (a_2 + 2a_5)a^3 \\ &+ (a_5 + 2a_0)b + (a_6 + 2a_1)ab + (a_7 + 2a_2)a^2b + (a_4 + 2a_3)a^3b. \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de 1 , a^2 , ab y a^3b en la ecuación anterior, se obtiene el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 + 2a_6 = 0 \quad E_1 \\ a_1 + 2a_4 = 1 \quad E_2 \\ a_6 + 2a_1 = 0 \quad E_3 \\ a_4 + 2a_3 = 2 \quad E_4 \end{array} \right.$$

Haciendo $E_4 - 2E_1$ se obtiene $a_4 - 4a_6 = 2$ y al hacer $2E_2 - E_3$ resulta la igualdad $4a_4 - a_6 =$

2. Entonces, de las dos ecuaciones obtenidas, eliminando a_4 se tiene que $a_6 = -\frac{6}{15} \notin \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $(a + 2b)a \notin I$ y así, se concluye que $\mathbb{Z}Q_8$ no es un anillo dúo izquierdo y por ende no es dúo.

Bell and Li (2007) presentan el siguiente teorema, el cual caracteriza la propiedad dúo en álgebras de grupo $\mathbb{F}G$, donde \mathbb{F} es un cuerpo y G es un grupo de torsión no abeliano.

Lema 5.10 ((Bell and Li, 2007, Theorem 4.2.)). *Sean \mathbb{F} un cuerpo y G un grupo de torsión. Entonces $\mathbb{F}G$ es un anillo dúo si, y sólo si, se cumple una de las siguientes condiciones.*

1. G es abeliano.
2. $G = Q_8 \times E \times A$ es Hamiltoniano, $\text{car}(\mathbb{F}) = 0$ y la ecuación $1 + x^2 + y^2 = 0$ no tiene soluciones en ningún cuerpo ciclotómico $\mathbb{F}(\xi_d)$ para cualquier d impar que sea el orden de un elemento de A .
3. $G = Q_8 \times A$, $\text{car}(\mathbb{F}) = 2$ y la ecuación $1 + x^2 + y^2 = 0$ no tiene soluciones en ningún cuerpo ciclotómico $\mathbb{F}(\xi_d)$ para cualquier d impar que sea el orden de un elemento de A .

Como consecuencia del resultado anterior y el Lema 5.6, es posible establecer una equivalencia entre las propiedades dúo y reversible para anillos de grupo $\mathbb{F}G$, donde \mathbb{F} es un cuerpo y G

es un grupo de torsión.

Lema 5.11 ((Bell and Li, 2007, Corollary 4.3.)). *Sean \mathbb{F} un cuerpo y G un grupo de torsión. Entonces $\mathbb{F}G$ es dúo si, y sólo si, $\mathbb{F}G$ es reversible.*

Se finaliza esta sección presentando los resultados de Gao and Li (2011), quienes dieron la siguiente descripción de cuando el anillo del grupo RG de un grupo de torsión no abeliano G sobre un dominio entero R es dúo.

Lema 5.12 ((Gao and Li, 2011, Theorem 2.8.)). *Si R es un dominio entero con $\text{car}(R) \neq 0$ y G es un grupo de torsión no abeliano, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. RG es dúo.
2. R es un cuerpo y RG es reversible.
3. $G = Q_8 \times A$, $R = \mathbb{F}$ es un cuerpo con $\text{car}(\mathbb{F}) = 2$ y la ecuación $1 + x^2 + y^2 = 0$ no tiene soluciones en ningún cuerpo ciclotómico $\mathbb{F}(\xi_d)$ para cualquier d impar que sea el orden de un elemento de A .

Lema 5.13 ((Gao and Li, 2011, Theorem 2.9.)). *Si R es un dominio entero con $\text{car}(R) = 0$ tal que $S \subseteq R \subseteq K_S$, donde S es un anillo de números enteros algebraicos, K_S es el cuerpo de fracciones de S y G es un grupo de torsión no abeliano, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. RG es dúo.
2. R es un cuerpo y RG es reversible.

3. $G = Q_8 \times E \times A$, $R = \mathbb{F}$ es un cuerpo de $\text{car}(\mathbb{F}) = 0$ y la ecuación $1 + x^2 + y^2 = 0$ no tiene soluciones en ningún cuerpo ciclotómico $\mathbb{F}(\xi_d)$ para cualquier d impar que sea el orden de un elemento de A .

6. Resultados adicionales

Para un anillo de grupo RG , donde R es un anillo conmutativo con identidad y G es un grupo de torsión no abeliano, se sabe de las Figuras 4 y 5 que si RG es simétrico, entonces $RG = R(Q_8 \times E \times A)$ y $\text{car}(R) = 0$ o $\text{car}(R) = 2$. Luego, si RG es simétrico y $\text{car}(R) = 2$, entonces el subanillo \mathbb{Z}_2Q_8 también debe serlo. Sin embargo, del Ejemplo 7 en Marks (2002), se sabe que \mathbb{Z}_2Q_8 no es simétrico. Por lo tanto, la única posibilidad es $\text{car}(R) = 0$.

Al estudiar el artículo de Gutan and Kisielewicz (2004), se puede notar que la demostración del Lema 5.5 y el Lema 5.6 puede hacerse de forma análoga para el caso simétrico. Ese es el contenido de los siguientes resultados.

Lema 6.14. *Sea \mathbb{F} un cuerpo de característica cero, entonces $\mathbb{F}Q_8$ es simétrico si, y sólo si, la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no tiene solución en \mathbb{F} .*

Demostración. Dado que los anillos de división también son simétricos (ver Nota 4.15), la demostración de este lema es análoga a la demostración presentada en el Lema 5.5. □

Teorema 6.15. *Sea G un grupo de torsión no abeliano. Entonces, el anillo de grupo $\mathbb{F}G$ sobre un cuerpo \mathbb{F} es simétrico si, y sólo si, G es Hamiltoniano, $\text{car}(\mathbb{F}) = 0$ y $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no tiene solución en ningún cuerpo ciclotómico $\mathbb{F}(\xi_d)$ para cualquier d impar que sea orden de un elemento en G .*

Demostración. Suponga $\mathbb{F}G$ es simétrico, entonces G es Hamiltoniano y $\text{car}(\mathbb{F}) = 0$. Luego, del Teorema 2.1 se sabe que $G = Q_8 \times E \times A$, donde E es un 2-grupo abeliano elemental y A es un

grupo abeliano donde todos sus elementos son de orden impar. En lo que sigue se desarrollaran las dos equivalencias de forma conjunta.

De la Proposición 2.3 de Gutan and Kisielewicz (2004), $\mathbb{F}G \cong [\mathbb{F}(E \times A)]Q_8$ es simétrico si, y sólo si, $[\mathbb{F}H]Q_8$ es simétrico para todo subgrupo finito H de $E \times A$. Es posible suponer que H es de la forma $H = E' \times A'$, donde $E' \subseteq E$ y $A' \subseteq A$, ya que H naturalmente está contenido en un subgrupo finito de esta forma. Dado que $\text{car}(\mathbb{F}) = 0$, se tiene que $\text{car}(\mathbb{F}) \nmid |H|$ y así, se puede utilizar el Teorema de Perlis-Walker (ver 3.5). Entonces,

$$\mathbb{F}H \cong \bigoplus_{d|n} a_d \mathbb{F}(\xi_d), \text{ donde } |H| = n.$$

Suponga que $a_d > 0$ para algún d con $d|n$, esto significa que existe un elemento $(e, a) \in H$, con $e \in E'$ y $a \in A'$, de orden d . Como en E todo elemento diferente de la identidad tiene orden 2, se puede probar que $d = 2m$ o $d = m$, donde m es el orden de a en A . En este último caso, el cuerpo $\mathbb{F}(\xi_d)$ aparece en la descomposición de $\mathbb{F}A'$, dada por el Teorema 3.5. En el primer caso, observe que $\mathbb{F}(\xi_{2m}) = \mathbb{F}(\xi_m)$ (ya que $(-\xi_m)^{2m} = 1$) y así, se tiene que el cuerpo $\mathbb{F}(\xi_d)$ aparece en la descomposición de $\mathbb{F}A'$. Nuevamente, de la Proposición 2.3 de Gutan and Kisielewicz (2004), $[\mathbb{F}H]Q_8$ es simétrico si, y sólo si, todo $[\mathbb{F}(\xi_d)]Q_8$ es simétrico para todo factor $\mathbb{F}(\xi_d)$ en la descomposición de $\mathbb{F}H$. Luego, en cualquier caso, decir que $[\mathbb{F}H]Q_8$ es simétrico es equivalente a que $[\mathbb{F}A']Q_8$ sea simétrico. Dado que A es abeliano, $[\mathbb{F}A']Q_8$ es simétrico si, y sólo si, $[\mathbb{F}(\xi_d)]Q_8$ es simétrico para todo d que divide el orden de A' . En consecuencia, $\mathbb{F}G$ es simétrico si, y sólo si, $[\mathbb{F}(\xi_d)]Q_8$ es simétrico para todo d impar que sea orden de un elemento en G y finalmente, de la

Teorema 6.14, esto es equivalente a que la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no tiene solución en ninguna extensión $\mathbb{F}(\xi_d)$ para todo d impar que sea orden de un elemento en G . \square

Usando el teorema anterior, es posible establecer que las propiedades dúo, reversible, simétrico y SI son equivalentes en $\mathbb{F}G$, donde \mathbb{F} es un cuerpo de característica cero y G es un grupo de torsión no abeliano. Note que lo anterior en general no se cumple, dado que el Ejemplo 5.20 muestra que el anillo de grupo $\mathbb{Z}Q_8$ es simétrico pero no es dúo.

Teorema 6.16. *Sean \mathbb{F} un cuerpo de característica cero y G un grupo de torsión no abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. $\mathbb{F}G$ es dúo.
2. $\mathbb{F}G$ es reversible.
3. $\mathbb{F}G$ es simétrico.
4. $\mathbb{F}G$ tiene la propiedad SI.
5. G es un grupo Hamiltoniano y la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no tiene solución en ningún cuerpo ciclotómico $\mathbb{F}(\xi_d)$ para cualquier d impar que sea un orden de un elemento en G .

Demostración. Del Lema 5.11, se tiene que 1 es equivalente con 2. Dado que se está asumiendo que $\text{car}(\mathbb{F}) = 0$, del Lema 5.6, se tiene la equivalencia entre 2 y 5. Por el Teorema 6.15, 3 y 5 son equivalentes. Finalmente, de la Proposición 5.12, se tiene 2 equivalente con 4. \square

Corolario 6.7. *Sea \mathbb{F} un cuerpo de característica cero y G un grupo de torsión. Entonces, las propiedades dúo, reversible, simétrico y SI son equivalentes en $\mathbb{F}G$.*

Demostración. Si G es abeliano, entonces $\mathbb{F}G$ es conmutativo y se tiene el resultado. Por otro lado, si G no es abeliano el resultado se sigue del teorema anterior. \square

Adicionalmente, usando el teorema anterior es posible incluir otras equivalencias en el Lema 5.13.

Teorema 6.17. *Si R es un dominio entero con $\text{car}(R) = 0$ tal que $S \subseteq R \subseteq K_S$, donde S es un anillo de números enteros algebraicos, K_S es el cuerpo de fracciones de S y G es un grupo de torsión no abeliano, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. RG es dúo.
2. R es un cuerpo y RG es reversible.
3. RG es simétrico.
4. RG tiene la propiedad SI.
5. $G = Q_8 \times E \times A$, $R = \mathbb{F}$ es un cuerpo de $\text{car}(\mathbb{F}) = 0$ y la ecuación $1 + x^2 + y^2 = 0$ no tiene soluciones en ningún cuerpo ciclotómico $\mathbb{F}(\xi_d)$ para cualquier d impar que sea el orden de un elemento de A .

Demostración. Las equivalencias entre 1, 2 y 5 son establecidas por Gao y Li (ver Lema 5.13). Por otro lado, del Teorema 6.16 las afirmaciones 2, 3 y 4 son equivalentes. \square

También es posible establecer que las propiedades dúo, reversible, simétrico y SI son equivalentes en el contexto de los anillos de grupo semi-simples, algo que no se ha mencionado en los artículos estudiados.

Teorema 6.18. *Sean R un anillo semi-simple y G un grupo finito, tal que $|G| \in \mathcal{U}(R)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. RG es dúo.
2. RG es simétrico.
3. RG es reversible.
4. RG tiene la propiedad SI.
5. $RG \cong \bigoplus_{i=1}^k D_i$, donde los D_i son anillos de división.

Demostración. Únicamente se va a demostrar la equivalencia entre 1 y 5, ya que los argumentos para probar que 2, 3 y 4 son equivalentes con 5 son similares.

Dado que R es semi-simple, G es finito y $|G| \in \mathcal{U}(R)$, se obtiene del Teorema de Maschke (ver Teorema 3.4) que el anillo de grup RG es semi-simple y así, del Teorema de Wedderburn-Artin (ver Teorema 2.3),

$$RG \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(D_i), \text{ donde } D_i \text{ es un anillo de división, } 1 \leq i \leq k.$$

Suponga que RG es dúo, entonces del Teorema 4.9 cada $M_{n_i}(D_i)$ también debe serlo y así, del Ejemplo 4.14 se debe cumplir que $n_i = 1$, $1 \leq i \leq k$. Luego,

$$RG \cong \bigoplus_{i=1}^k D_i, \text{ donde los } D_i \text{ son anillos de división.}$$

Recíprocamente, suponga que $RG \cong \bigoplus_{i=1}^k D_i$, donde los D_i son anillos de división. Entonces, del Ejemplo 4.18, para $1 \leq i \leq k$ los anillos de división D_i son dúo y así, se sigue del Teorema 4.9 que RG es un anillo dúo. □

(Gao and Li, 2011, Corollary 2.3.) demostraron que si R es un dominio entero de caracte-

rística cero, entonces una condición necesaria para que RQ_8 sea dúo es que $1 + x^2 + y^2 \in \mathcal{U}(R)$ para todo $x, y \in R$. Ellos no conocen ningún ejemplo de un dominio entero R con $\text{car}(R) = 0$ que satisfaga esta condición necesaria para el cual RQ_8 no sea dúo y por tal razón, cierran su artículo planteando la siguiente pregunta.

Pregunta 6.1. (Gao and Li, 2011, Question 2.10.) Asuma que R es un dominio entero de $\text{car}(R) = 0$, tal que $1 + x^2 + y^2 \in \mathcal{U}(R)$ para todo $x, y \in R$. ¿ RQ_8 es dúo?

La respuesta este interrogante aún no ha sido resuelta. Sin embargo, modificando algunas hipótesis y usando el teorema anterior, es posible obtener una caracterización de cuando RQ_8 es dúo.

Corolario 6.8. *Sea R un anillo semi-simple, tal que $1 + x^2 + y^2 \in \mathcal{U}(R)$ para todo $x, y \in R$. Entonces, RQ_8 es dúo si, y sólo si, RQ_8 es suma directa finita de anillos de división, es decir*

$$RQ_8 \cong \bigoplus_{i=1}^k D_i, \text{ donde los } D_i \text{ son anillos de división.}$$

Demostración. Dado que $2 = 1 + 1^2 + 0^2$, se tiene que $2 \in \mathcal{U}(R)$. Luego, $4 \in \mathcal{U}(R)$ puesto que $4(2^{-1}2^{-1}) = (2)(2)(2^{-1}2^{-1}) = (2)((2)2^{-1})(2^{-1}) = (2)2^{-1} = 1$ y de forma similar, $8 \in \mathcal{U}(R)$. Dado que R es semi-simple, Q_8 es finito y $|Q_8| = 8 \in \mathcal{U}(R)$, el resultado se sigue del Teorema 6.18. □

Ejemplo 6.21. Sea R el subanillo de $M_2(\mathbb{Q})$ dado por $R = \left\{ \begin{bmatrix} r & s \\ 0 & r \end{bmatrix} : r, s \in \mathbb{Q} \right\}$ y considere los

siguientes subconjuntos I e J de R ,

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Q} \right\} \quad \text{y} \quad J = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} : b, d \in \mathbb{Q} \right\}.$$

No es difícil verificar que I y J son ideales izquierdos minimales de R y que además, $R = I \oplus J$. Por lo tanto, de (Polcino Milies and Sehgal, 2002, Theorem 2.5.7) se tiene que R es semi-simple. Adicionalmente, se puede verificar que $\det(1 + x^2 + y^2) \neq 0$ para todo $x, y \in R$ y así, $1 + x^2 + y^2 \in \mathcal{U}(R)$. (Li and Parmenter, 2007, Example 4.3.) muestran que RQ_8 es reversible. Entonces, usando argumento similares en la prueba del Corolario 6.8 se tiene que $|Q_8| = 8 \in \mathcal{U}(R)$ y así, del Teorema 6.18 se concluye que

$$RQ_8 = \bigoplus_{i=1}^k D_i, \text{ donde los } D_i \text{ son anillos de división.}$$

Se sigue que RQ_8 también es dúo, simétrico y tiene la propiedad SI.

Continuando en esta dirección a continuación se presenta una caracterización de las propiedades anillo-teóricas de interés en anillos de grupo RG sobre anillos de grupo semi-simples.

Teorema 6.19. *Sean R un anillo semi-simple y G un grupo. Entonces, RG es dúo (reversible, simétrico, tiene la propiedad SI) si, y sólo si, $R = \bigoplus_{i=1}^k D_i$ es una suma directa finita de anillos de división y cada $D_i G$ es un anillo de grupo dúo (reversible, simétrico, tiene la propiedad SI).*

Demostración. Al igual que en anteriores demostraciones, se va a probar únicamente el caso dúo,

ya que la prueba para los otros casos siguen en forma análoga.

Suponga que RG es un anillo dúo. Dado que R es semi-simple, del Teorema de Wedderburn-Artin (ver Teorema 2.3) se tiene que $R \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(D_i)$, donde los D_i son anillos de división. Luego, por ser RG dúo, entonces R también lo es y así, del Teorema 4.9 cada $M_{n_i}(D_i)$ también debe ser dúo. Del Ejemplos 4.14, se sabe que $M_n(D_i)$ no es dúo si $n \geq 2$, entonces $n_i = 1$, $1 \leq i \leq k$. Por lo tanto,

$$RG \cong \left(\bigoplus_{i=1}^k D_i \right) G \cong \bigoplus_{i=1}^k D_i G.$$

De lo anterior, como RG es dúo nuevamente se sigue del Teorema 4.9 que cada anillo de grupo $D_i G$ es dúo. Recíprocamente, si $R \cong \bigoplus_{i=1}^k D_i$ y cada anillo de grupo $D_i G$ es dúo, se puede establecer que $RG \cong \bigoplus_{i=1}^k D_i G$ y el resultado se sigue del Teorema 4.9. \square

Finalmente, como consecuencia del teorema de Wedderburn-Artin, se tiene 1) Si R es un anillo semi-simple conmutativo, entonces R es isomorfo a una suma directa finita de cuerpos y 2) Si R es una álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbb{F} algebraicamente cerrado, la cual es semi-simple, entonces R es isomorfo a una suma directa de la forma $M_{n_1}(\mathbb{F}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{F})$ (ver (Polcino Milies and Sehgal, 2002, Exercises 3 y 8, pág. 1067)). Por lo tanto, usando argumentos similares a los que se emplearon en la demostración del Teorema 6.19, es posible demostrar que los siguientes resultados son válidos.

Teorema 6.20. Sean R un anillo semi-simple conmutativo y G un grupo. Entonces, RG es dúo (reversible, simétrico, tiene la propiedad SI) si, y sólo si, $R \cong \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{F}_i$ es una suma directo finita

de cuerpos y cada $\mathbb{F}_i G$ es un anillo de grupo dúo (reversible, simétrico, tiene la propiedad SI). En particular, si G es un grupo de torsión no abeliano, entonces G es Hamiltoniano y cada \mathbb{F}_i es de característica 0 o 2.

Teorema 6.21. *Sea R una álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbb{F} algebraicamente cerrado, la cual es semi-simple. Entonces, R tiene la propiedad dúo, reversible, simétrico o SI si, y sólo si, $R \cong \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{F}$ es suma finita del cuerpo \mathbb{F} .*

Se finaliza esta sección presentando los siguientes ejemplos, los cuales tienen como finalidad ilustrar la aplicabilidad de los dos teoremas anteriores.

Ejemplo 6.22. Sea $R = \mathbb{C}Q_8$, claramente R es una álgebra de dimensión finita sobre el cuerpo algebraicamente cerrado \mathbb{C} . Suponga que R es un anillo reversible, entonces por el Teorema 6.21 se tiene que $R \cong \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C}$ es una suma directa finita del cuerpo \mathbb{C} , lo cual es una contradicción ya que R no es conmutativo. Por lo tanto, R no es reversible y así, R tampoco tiene las propiedades dúo, simétrica y SI, ya que en este contexto estas propiedades implican la propiedad de ser reversible.

Nota 6.17. Dado que \mathbb{C} es un cuerpo con $\text{car}(\mathbb{C}) = 0$ y la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ si tiene solución en \mathbb{C} . El anterior ejemplo también se puede obtener del Lema 5.5.

Ejemplo 6.23. Sea $R = F_2 \oplus \mathbb{Q}$. Del Ejemplo 5.20 se sabe que el anillo de grupo $\mathbb{Q}Q_8$ es reversible y simétrico. Por otro lado, en (Marks, 2002, Example 7.) se prueba que $\mathbb{F}_2 Q_8$ también es un anillo de grupos reversible pero no simétrico. Por lo tanto, por el Teorema 6.20 se tiene que RQ_8 es un anillo de grupo reversible pero no simétrico.

Nota 6.18. El ejemplo anterior fue tomado de (Gutan and Kisielewicz, 2004, pág. 291), donde ellos muestran un anillo de grupo reversible que no es simétrico sobre un anillo de característica cero. Además, este ejemplo también muestra que para anillos de grupo RG , donde R es un anillo con identidad y G es un grupo de torsión, simétrico y reversible no son equivalentes. Sin embargo, sobre cuerpos si lo son y esto se ilustró en el Corolario 6.7.

7. Conclusiones

Al finalizar este trabajo se deja una recopilación muy amplia y detallada sobre el estudio de las propiedades dúo, reversible, simétrico y SI en anillos y anillos de grupo. Además, las personas interesadas en estos temas podrán encontrar en este trabajo demostraciones de varios resultados que no se encuentran en la literatura actual.

Para ilustrar mejor algunos resultados y conexiones de la propiedad dúo con las propiedades reversible, simétrico y SI, se logró diseñar diagramas que esquematizan algunas implicaciones válidas entre estas propiedades, tanto en el contexto general de anillos y anillos de grupo. Estos diagramas fueron expuestos en los Capítulos 3 y 4.

Tras el análisis realizado sobre la propiedad dúo, en el contexto de los anillos de grupo RG de un grupo de torsión sobre un anillo conmutativo R con identidad, se pudo evidenciar que las propiedades dúo, simétrico y SI implican la propiedad reversible. Por lo tanto, cualquier avance que se obtenga para la propiedad reversible será también un avance inmediato para las otras propiedades. De lo anterior, para trabajos futuro se podría estudiar propiedades que generalicen los anillos reversibles. Por ejemplo, lo que Roy and Subedi (2019) llaman *anillos reversibles generalizados*.

Finalmente, aunque no fue posible dar respuesta a la Pregunta 6.1 planteada por Gao and Li (2011), el estudio y análisis de esta pregunta permitió explorar las propiedades anillo-teóricas de interés en otros contexto y así, obtener algunos resultados propios. Los cuales quizás con algunas modificaciones pueden seguir dando continuidad al estudio de estas temáticas y así, poder finalmente dar respuesta a dicha pregunta.

Referencias Bibliográficas

- Bell, H. E. and Li, Y. (2007). Duo group rings. *J. Pure Appl. Algebra*, 209(3):833–838.
- Bhattacharya, P. B., J. S. K. and Nagpaul, S. (1994). *Basic abstract algebra*. Cambridge University Press.
- Gallian, J. A. (2021). *Contemporary abstract algebra*. Chapman and Hall/CRC.
- Gao, W. and Li, Y. (2011). On duo group rings. In *Algebra Colloquium*, volume 18, pages 163–170. World Scientific.
- Gutan, M. and Kisielewicz, A. (2004). Reversible group rings. *J. Algebra*, 279(1):280–291.
- Hirano, Y., H. C. Y. K. J. Y. and Park, J. K. (1995). On strongly bounded rings and duo rings. *Communications in Algebra*, 23(6):2199–2214.
- Lam, T. Y. (1991). *A first course in noncommutative rings*, volume 131. Springer.
- Li, Y. and Parmenter, M. M. (2007). Reversible group rings over commutative rings. *Comm. Algebra*, 35(12):4096–4104.
- Marks, G. (2002). Reversible and symmetric rings. *J. Pure Appl. Algebra*, 174(3):311–318.
- Marks, G. (2003). A taxonomy of 2-primal rings. *J. Algebra*, 266(2):494–520.
- Polcino Milies, C. and Sehgal, S. K. (2002). *An introduction to group rings*, volume 1 of *Algebras and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Roy, D. and Subedi, T. (2019). On a generalization of reversible rings. *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics*, 65(2).

Shin, G. (1973). Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 184:43–60.