Desarrollo del pensamiento numérico-variacional en estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Básica Primaria: Una propuesta de acompañamiento extracurricular

Daniel Enrique Ramos Cabezas

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciado en Matemáticas

Directora:

Jenny Patricia Acevedo-Rincón

Doctora en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

Con todo mi corazón a mi madre Diana por siempre estar a mi lado, ser mi mayor soporte emocional y ayudarme en otros aspectos de mi vida. A mi padre Miguel, quien me apoyó en todas las decisiones tomadas a lo largo de mi etapa universitaria y no dejó de confiar en mis capacidades. A mi abuela Agniria por siempre estar pendiente de mi a pesar de la distancia y brindarme su amor incondicional. Ustedes tres son los pilares que sostienen mi vida. A mis hermanos, compañeros y demás personas que hicieron parte de este proceso. Este trabajo está dedicado a cada uno de ustedes.

Daniel Enrique Ramos Cabezas

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme la oportunidad de terminar este trabajo de grado a pesar de algunas dificultades.

A mis padres, mis hermanos y mi abuela quiénes siempre se han esforzado por brindarme lo mejor y ayudarme a salir adelante en los momentos complicados.

A la Universidad Industrial de Santander por ser mi alma mater, a mis profesores que me formaron en este proceso y a los compañeros que me apoyaron de una u otra manera en este trayecto.

A mi directora de proyecto, la profesora Jenny por su confianza y dedicación y por estar siempre al pendiente del desarrollo de este trabajo, orientándome por el camino correcto.

Por último, quiero agradecer a los estudiantes del curso de Pensamiento Matemático II de la Licenciatura en Educación Básica Primaria, quienes prestaron su apoyo para la implementación y toma de datos de esta investigación.

¡Muchas gracias!

Daniel Ramos.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Lista de Apéndices

Resumen

Título: Desarrollo del pensamiento numérico-variacional en estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Básica Primaria: Una propuesta de acompañamiento extracurricular[*]

Autor: Daniel Enrique Ramos Cabezas[**]

Palabras clave: Pensamiento matemático, numérico, variacional, MTSK, Acompañamiento extracurricular.

Descripción:

Los programas de acompañamiento académico para los estudiantes universitarios se han vuelto cruciales para evitar la deserción estudiantil, las bajas notas y la condición por fuera de la universidad. En la Universidad Industrial de Santander, la carrera de Licenciatura en Educación Básica Primaria carece de uno de estos programas para los cursos enfocados en el componente matemático (Pensamiento Matemático I, II y III). Por lo anterior, el presente documento plantea una propuesta de acompañamiento extracurricular realizando una investigación de tipo cualitativo a través de una serie de sesiones de tutorías. Estas sesiones se llevaron a cabo con un grupo de treinta estudiantes del curso Pensamiento Matemático II, en tres horas extra clase, un día a la semana. Para cada tutoría se planearon tareas formativas teniendo en cuenta el contenido programático del curso. Posteriormente a la implementación, el análisis de los resultados obtenidos en cada sesión se realizó utilizando el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) para identificar en los profesores en formación el uso de los subdominios del conocimiento matemático en la resolución de las tareas. Por último, se hace necesario promover la iniciativa de creación de un programa de acompañamiento extracurricular para el curso de Pensamiento Matemático II, con el fin de apoyar académicamente a los estudiantes en el desarrollo del pensamiento matemático (numérico – variacional).

[*] Trabajo de Grado
[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Directora: Dra. Jenny Patricia Acevedo-Rincón

Abstract

Title: Development of numerical-variational thinking in students of the third semester of the Bachelor's Degree in Basic Primary Education: A extracurricular accompaniment proposal[*]

Author: Daniel Enrique Ramos Cabezas[**]

Key Words: Mathematical Thinking, numerical, variational, MTSK, Extracurricular accompaniment.

Description:

Academic monitoring programs for university students have become crucial to avoid student dropouts, low grades and the condition outside the university. At the Industrial University of Santander, the Bachelor's degree in Basic Primary Education lacks one of these programs for the courses focused on the mathematical component (Mathematical Thinking I, II and III). Due to the above, this document proposes a proposal for an extracurricular accompaniment proposal, carrying out qualitative research through a series of tutorial sessions. These sessions were carried out with a group of thirty students from the Mathematical Thinking II course, in three extra class hours, one day a week. For each tutorial, training tasks were planned taking into account the programmatic content of the course. After the implementation, the analysis of the results obtained in each session was carried out using the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model to identify the use of the subdomains of mathematical knowledge in the resolution of the tasks in the teachers in training. Finally, it is necessary to promote the initiative to create an extracurricular accompaniment program for the Mathematical Thinking II course, in order to academically support students in the development of mathematical thinking (numerical - variational).

[*] Degree Work
[**] Science Faculty. Mathematics School. Bachelor's Degree in Mathematics. Director: Dra. Jenny Patricia Acevedo-Rincón

Introducción

Entrar en la etapa universitaria se vuelve un ciclo fundamental en la vida de los estudiantes luego de terminar los estudios de educación media. Sin embargo, en el transcurso de la educación básica secundaria, muchos no logran adquirir los conocimientos suficientes para enfrentarse a la educación superior, lo que puede generar bajas calificaciones, deserciones o en el peor de los casos quedar por fuera de la universidad por bajo rendimiento académico. Por lo anterior, muchos estudiantes, durante su vida universitaria, buscan diferentes actividades extracurriculares para así desarrollar sus habilidades y enriquecer los conocimientos que poseen, potenciarlos y adquirir nuevos que les brinden herramientas para afrontar sus compromisos académicos.

En respuesta a esta necesidad, las universidades, tanto internacional, nacional como localmente, han propuesto la creación de programas de acompañamiento con pares para los estudiantes que cursan el ciclo básico de carreras como son ingenierías y ciencias, además de tener cursos extracurriculares de apoyo en cursos propios de cada carrera. No obstante, la Universidad Industrial de Santander no cuenta con un programa para el acompañamiento de los estudiantes que entran a la carrera de Licenciatura en Educación Básica Primaria, que les ayude a potenciar sus conocimientos matemáticos y sus habilidades didácticas como futuros profesores. Por consiguiente, se vuelve esencial la creación de una propuesta de acompañamiento extracurricular que permita desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes de esta carrera.

El problema que se plantea anteriormente es el pilar principal que encamina esta investigación y da paso a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué estrategias de acompañamiento extracurricular permiten el desarrollo del pensamiento numérico y variacional en estudiantes del curso Pensamiento Matemático II de la Licenciatura en Educación Básica Primaria?

En virtud de eso, el objetivo principal de este trabajo es el de plantear una propuesta de acompañamiento extracurricular basada en el desarrollo del pensamiento matemático (componente numérico-variacional) en estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Básica Primaria. Identificando tareas formativas enfocadas en los tres subdominios: *Knowledge of Topics*, *Knowledge of Practice in Mathematics*, *Knowledge of the Structure of Mathematics*, del dominio *Mathematical Knowledge* que hace parte del modelo *Mathematichs Teacher's Specialised Knowledge* (Carrillo et al., 2018) para implementarlas en una serie de tutorías que permitan mejorar los conocimientos de los estudiantes. Así, poder dejar las bases necesarias para que esta propuesta pueda ser implementada en un futuro como un programa establecido en la Universidad Industrial de Santander.

Así, en el cuerpo de este trabajo, se plantean cinco capítulos que fundamentan teóricamente esta propuesta. Además, se detalla el desarrollo de las tutorías realizadas, qué tareas formativas se utilizaron y los subdominios, con sus categorías, que se pudieron evidenciar en cada sesión, utilizando un enfoque metodológico de investigación cualitativo para el respectivo análisis que permitió evaluar la efectividad o impacto de la implementación de la propuesta.

1. Planteamiento y formulación del Problema

El inicio de la vida universitaria suele ser complicado para muchos de los estudiantes que ingresan en ella. Pasar del contexto de la educación media al contexto universitario no es tarea sencilla para ellos. Lo anterior sucede por diferentes factores e implica consecuencias como la deserción estudiantil.

Uno de los desafíos principales a los que se enfrentan los estudiantes que ingresan a la universidad es el mantener un buen rendimiento académico en los cursos relacionados con los temas de matemáticas. Al respecto, Bravo (2019) afirma que:

> […] actualmente muchos jóvenes tienen recelo o aversión a la matemática porqué en algún momento durante sus estudios tuvieron alguna mala experiencia con la asignatura o el docente; y que, con el paso del tiempo (fue lo que los) llevó a desmotivarse y perder el interés en la materia (p. 2).

Además, muchas de las experiencias de aprendizaje de los estudiantes se limitan por las carencias en los conocimientos básicos en matemáticas que afectan su rendimiento académico en los primeros semestres. Es decir, las pocas bases en matemáticas con las que llegan a la universidad influyen en su rendimiento académico y afectan su continuidad en el programa universitario. Según Bravo et al. (2017) esto sucede dado que, en las instituciones educativas, los profesores deben cumplir con un currículo preestablecido para la realización de las actividades que se llevarán a cabo a lo largo del año, sin tener en cuenta el logro del aprendizaje de los estudiantes. Por lo anterior, las universidades se ven obligados a proponer programas de acompañamiento que apoyen a los jóvenes en sus primeros semestres en la universidad.

En el contexto internacional, nacional y local, se observa que los institutos de educación superior cuentan con diversos programas de apoyo académico en beneficio de los estudiantes de primer semestre, a nivel internacional y nacional se encuentran: 1) la Dirección de acompañamiento académico y socioemocional (DAAS), de la Universidad Católica de Temuco en Chile; 2) la Unidad de apoyo al aprendizaje de la matemática (UAAM), de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC); y a nivel local 3) el Seguimiento de Apoyo a la Excelencia Académica (SEA), de la Universidad Industrial de Santander en Colombia.

Algunos de estos programas promueven, por ejemplo, el fortalecimiento de los contenidos matemáticos de las materias del ciclo básico que ofrecen las instituciones educativas, tales como Cálculo I, II y III, Álgebra lineal, Ecuaciones diferenciales, Química I, II, III, entre otras; o también, especializadas según el programa académico, como análisis real y geometría euclidiana para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, en el caso de la Universidad Industrial de Santander (UIS).

No obstante, muchos de estos programas no son concebidos para estudiantes de todas las licenciaturas o ingenierías, por el nivel de profundidad de sus contenidos. Por ejemplo, la geometría euclidiana de los estudiantes de licenciatura en matemáticas no tiene los mismos alcances de las competencias que pretende desarrollar los cursos de Pensamiento Matemático I, II y III de la Licenciatura en educación básica primaria de la Universidad Industrial de Santander, dado que la didáctica con la que se enseñan estos cursos diverge en sus propósitos y también a la población a la que va dirigida. Lo anterior genera que los futuros profesores de la Licenciatura en Educación Básica Primaria (EBP) no logren un desempeño adecuado sobre el contenido matemático y su forma de enseñarlo.

1.1. Formulación del problema

De acuerdo con lo anterior, este proyecto de investigación pretende responder la siguiente pregunta de investigación: ¿qué estrategias de acompañamiento extracurricular permiten el desarrollo del pensamiento numérico y variacional en estudiantes del curso Pensamiento Matemático II de la Licenciatura en Educación Básica Primaria?

1.2. Justificación

La creación de programas de apoyo académico en los institutos de educación superior, han dado cuenta de la mejoría en los resultados académicos de los estudiantes. En 2019, Pellerano y Muñoz confirma en sus investigaciones los beneficios de estos programas, al realizar la comparación entre estudiantes que ingresan por primera vez en una universidad estatal de Chile que acuden regularmente a este apoyo, en contraste con el bajo rendimiento de quienes no. Por otro lado, en el contexto local, se identifica que los estudiantes que hacen parte de la carrera de Licenciatura en Educación Básica Primaria en la Universidad Industrial de Santander, quienes cursan Pensamiento Matemático (I, II, III), llegan con pocos conocimientos disciplinares, especialmente en el área de matemáticas se limitan a una matemática procedimental, es decir, solo se han enfrentado a la matemática tradicional, donde su interés se centra en aplicar algoritmos o resolver ejercicios. Esto último, genera un problema en el conocimiento matemático de los estudiantes, puesto que no reconocen las propiedades de los algoritmos realizados, sino que, por el contrario, se limitan a repetir o imitar lo que está escrito en el libro de texto o lo que el profesor explica.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), acerca de los pensamientos numérico y variacional[1], da a entender que, para dar un buen manejo del pensamiento numérico, es importante tener habilidades y conocimientos en procesos, conceptos, proposiciones, modelos y teorías en diferentes

[1] Componentes del curso Pensamiento matemático II, objeto de conocimiento de la presente propuesta.

situaciones. Esto permitirá construir una comprensión firme de los sistemas numéricos utilizados en la educación primaria y secundaria. A su vez, el pensamiento variacional tiene como objetivo desarrollar una variedad de enfoques y acercamientos significativos en la educación primaria para la comprensión y uso de nociones y procesos relacionados con los sistemas analíticos de las funciones (MEN, 2006). A pesar de que estos pensamientos son independientes, están fuertemente relacionados y son complementarios, ya que los dos son necesarios para poder aplicar las matemáticas en diferentes contextos y desarrollar una fuerte asimilación de los contenidos matemáticos.

Dicho lo anterior, es importante que los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Primaria desarrollen adecuadamente el componente numérico-variacional al cursar Pensamiento Matemático II, ya que estos son quienes van a llevar sus conocimientos a las aulas de Educación Primaria, por lo que deberán contar con un dominio importante de los ejes temáticos, de las estructuras y prácticas matemáticas necesarias para trascender de la simple enseñanza de una matemática algorítmica, y por el contrario promuevan otros procesos como resolución de problemas, razonamiento, comunicación y modelación (MEN, 2006). Así mismo, el dominio sobre el conocimiento de los ejes temáticos, prácticas y estructuras matemáticas, lo llevará a ser un docente *matemáticamente competente*. Es decir, saber utilizar el grupo de conocimientos disciplinares, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones en escenarios distintos de aquellos con los que aprendió en clase, o en contextos nuevos y retadores (Ibid.). Junto a esto, esto es, el amplio reconocimiento que tiene el profesor sobre el uso de ejemplos, estrategias, representaciones, conexiones y significados utilizados para cada situación propuesta a los alumnos; por lo cual se tendrá mejor experiencia al identificar posibles errores o razonamientos inconclusos de los alumnos, esto es, un amplio conocimiento sobre el espacio de soluciones que incorpora diversas estrategias y representaciones que le permiten dar sentido a respuestas similares (Jakobsen, Ribeiro y Mellone, 2014).

Por lo tanto, se hace necesario que, en la Escuela de Educación de la Universidad Industrial de Santander, se pueda promover un programa de acompañamiento extracurricular para los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Primaria, con el que puedan desarrollar su pensamiento numérico y variacional y que les aporte conocimiento disciplinar que puedan servir para el desarrollo de las clases que realizarán en un futuro como docentes.

2. Objetivos

En este apartado se presentarán los objetivos que se tuvieron en cuenta para la investigación expuesta en este informe y con los cuales se busca responder a la pregunta de investigación.

2.1. Objetivo General

Plantear una propuesta de acompañamiento extracurricular basada en el desarrollo del pensamiento matemático (componente numérico-variacional) en estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Básica Primaria.

2.2. Objetivos específicos

2.2.1 Identificar tareas formativas para estudiantes de licenciatura con base en las estructuras, prácticas y tópicos de la matemática propia de la enseñanza en educación básica primaria.

2.2.2 Proponer las bases para el diseño e implementación de una estrategia de acompañamiento extracurricular a estudiantes de Licenciatura en Educación básica primaria de la Universidad Industrial de Santander que permitan el desarrollo del componente numérico y variacional.

3. Aproximación teórica

El apoyo académico para los estudiantes universitarios se ha vuelto crucial para el mejoramiento del proceso educativo. Además, es fundamental tener en cuenta el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, para brindar una orientación que mejore este acompañamiento. Por lo anterior, en este capítulo, se dan a conocer programas de seguimiento académico, así como estudios en los que se trabaja con profesores en formación utilizando el modelo MTSK.

3.1. Antecedentes

En este apartado, en primer lugar, se destacarán algunos programas propuestos para el mejoramiento del desempeño académico de algunas instituciones de educación superior, a nivel internacional, nacional y local. En segundo lugar, se presentan algunas investigaciones enfocadas en los profesores en formación de Educación Básica Primaria en el campo de las matemáticas, realizadas a partir del modelo *Mathematichs Teacher Specialised Knowledge* (MTSK).

3.1.1. Programas de acompañamiento académico

En el ámbito internacional, se han identificado inicialmente dos programas de acompañamiento académico los cuales corresponden a: 1) El Centro de Apoyo y Rendimiento Académico (CARA) de La Pontificia Universidad Católica de Chile; y 2) el Programa de Acompañamiento y Seguimiento Académico (PASA) de la Universidad de ESAN en Perú con el fin de lograr el éxito académico de sus estudiantes y reducir los niveles de deserción, enfocan sus programas en ayudar a los estudiantes en los cursos de ciclo básico; como por ejemplo, cálculo diferencial, cálculo integral y álgebra lineal.

La Pontificia Universidad Católica de Chile con el fin de generar un espacio de apoyo para el mejoramiento académico de sus estudiantes, crea el Centro de Apoyo al Rendimiento

Académico (CARA) en el año 2002 (Hojas et al., 2012), el cual se enfoca en los alumnos que deseen impulsar su rendimiento y mejorar su proceso de aprendizaje. El programa ofrece diferentes servicios como son, una sesión diagnóstica, con el fin de conocer el rendimiento y otros factores que pueden afectar el proceso académico del estudiante. Por otro lado, ofrece talleres de habilidades académicas, para aprender a manejar el tiempo, tener mejores métodos de estudio, entre otras cosas. Además, un espacio de acompañamiento y fortalecimiento con tutorías académicas, quienes se valen de la experiencia académica y buen desempeño de estudiantes de niveles superiores que actúan como pares tutores, en las materias como Cálculo I y II, Álgebra y Álgebra Lineal y Geometría, entre otras.

La Coordinación de Permanencia Estudiantil de la Universidad de ESAN en Perú, diseña el Programa de Acompañamiento y Seguimiento Académico (PASA) en el año 2015 y puesto en ejecución el año 2016. El PASA es exclusivo para estudiantes de primer ingreso y se encarga de diferentes labores de acompañamiento, entre las cuales están las sesiones individuales a cada estudiante, donde ofrecen orientación específica para superar las dificultades que se han identificado (Montalvo, 2018), en las áreas de matemáticas y lenguaje. Además, talleres grupales para los padres de los nuevos estudiantes y talleres grupales a estudiantes con el objetivo de que los jóvenes se concienticen con el compromiso y responsabilidad de la universidad.

En el ámbito nacional, se identificaron dos programas de acompañamiento a estudiantes: 1) la Unidad de apoyo al aprendizaje de la matemática (UAAM) de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC); y 2) el Programa de acompañamiento académico en matemáticas (PAMA) de la Universidad Tecnológica de Pereira. A continuación, se da una breve explicación de los dos programas de acompañamiento académico identificados.

La UPTC desarrolla desde el año 2010 la Unidad de Apoyo al Aprendizaje de la Matemática (UAAM) (Resolución N° 77, 2010) que tiene como misión "el fortalecimiento y desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que presentan dificultades en esta área, mediante asesoría y acompañamiento personalizado" (p. 2), ayudando a la disminución de la deserción en los primeros semestres universitarios. Por otra parte, el propósito del programa es dar soporte individual a los estudiantes con inconvenientes en matemáticas, generando momentos de participación como tutores a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas para investigar y producir metodologías para desarrollarse como futuros profesionales.

La Universidad Tecnológica de Pereira, con el propósito de ayudar a la comunidad estudiantil, crea, en el año 2015, el Programa de Acompañamiento Académico que vincula los programas de acompañamiento en matemáticas (PAMA) y el programa de acompañamiento en lectura, escritura y oralidad (PALE) (Universidad Tecnológica de Pereira, 2021). El PAMA, actualmente, tiene incorporados 3 profesionales y 14 tutores con formación en las materias de matemáticas, estadística, física y temas acordes, que ayudan al asesoramiento individualizado de los estudiantes. Las tutorías se realizan enfocándose en la resolución de dudas y ejercitación de procedimientos y algoritmos, mediante ejercicios planteados por el tutor, en la sesión de asesoría o en talleres o actividades extra clase.

En el ámbito local se identificó el programa del Sistema de Apoyo a la Excelencia Académica liderado por la Vicerrectoría Académica de la UIS (Acuerdo N° 018, 2014), donde se busca acompañar a los estudiantes beneficiarios en su paso por la universidad y ayudarlos en su permanencia contribuyendo para disminuir los índices de deserción estudiantil. A través de los años, se han derivado diferentes programas integrándose a la estrategia del SEA, estos ayudan al fortalecimiento de las habilidades académicas en las materias de ciclo básico de las carreras de pregrado.

El Programa de Asesoría para el Mejoramiento del Rendimiento Académico (PAMRA), que inició como un proyecto de investigación en el año 1994 y asumido por Bienestar Universitario de la UIS, busca reconocer y promover la utilización de diferentes métodos para apoyar el proceso de educación y preparación de los estudiantes con bajo rendimiento académico y así evitar la condición de estudiante Por Fuera de la Universidad (PFU[2]). El programa Modelo de Intervención Integral para disminuir la Deserción y la retención Académica (MIDAS) se inició en el año 2006 con la intención de hacer acompañamiento en los cursos de cálculo I, algebra lineal y química básica, así como las materias de física I, II y III.

El programa de Atención, Seguimiento y Acompañamiento Estudiantil en la asignatura de cálculo I en la UIS (ASAE) se considera como una actividad académica extracurricular para apoyar los programas que ya existían en la universidad. ASAE nace en el año 2012, con la intención de apoyar a los estudiantes, inicialmente en el curso de cálculo I y actualmente, ofrece apoyo en diferentes cursos tanto del ciclo básico como en materias propias de las carreras de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas con la participación de estudiantes tutores, que acompañan a los estudiantes beneficiarios en el transcurso del semestre para superar las dificultades que estos puedan presentar.

El SEA ofrece otros programas como el programa SEA Lenguaje, que fomenta el interés por la lectura y escritura y es orientado por profesores. El SEA Biblioteca, que se encarga del

[2] PFU, está relacionado con la condición llamada “Por fuera de la Universidad”, de acuerdo con lo definido en el reglamento de la UIS, en donde se pierde la calidad de estudiante por bajo rendimiento académico.

acompañamiento académico en áreas como matemáticas, física, química, geometría descriptiva e inglés. Este cuenta con tutorías personalizadas, que se dan como acompañamiento en la biblioteca de la universidad, por estudiantes destacados en el área, atendiendo dudas en la preparación de los parciales.

El Programa de Seguimiento y Orientación Académica SEA Psoas, fue creado para el apoyo a los estudiantes de la Facultad de salud. El SEA Humanas, el cual realiza estrategias para acompañar a los estudiantes de la facultad de ciencias humanas en su excelencia académica. Por último, el Programa de Fortalecimiento Pedagógico Cognitivo SEA FPC el cual es dirigido por profesionales en psicopedagogía adscritos a Bienestar Universitario, con el objetivo de ofrecer distintos acompañamientos a los estudiantes en lo que respecta a hábitos de estudio, orientaciones pedagógicas y el manejo de los problemas que puede causar el interés vocacional y que pueden llegar a causar la deserción.

Los programas que aquí se presentan, se constituyen en una buena base para la presente investigación, ya que su propósito principal converge en evitar la deserción estudiantil y fortalecer el rendimiento académico de los estudiantes en sus primeras etapas de estudio en educación superior, potenciando solamente el conocimiento de los temas donde solamente uno de ellos presenta elementos de acompañamiento psicológico. Sin embargo, aunque estos programas pretenden un refuerzo para estudiantes, divergen con la presente propuesta de acompañamiento extracurricular que profundizará en el fortalecimiento del conocimiento *disciplinar, didáctico y pedagógico* de las matemáticas, empleado en el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés) propuesto por Carrillo et al. (2018), a partir de sus subdominios, abarcando las matemáticas que deben de vivenciar y aprender los estudiantes de Licenciatura en Educación Básica Primaria (EBP), para su formación como futuros docentes.

3.1.2. Investigaciones con el uso del modelo *Mathematichs Teacher Specialised Knowledge* (MTSK)

A continuación, son presentados algunos resultados de investigaciones donde se llevó a cabo el uso del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés), centrado en el acompañamiento a futuros profesores del área de matemáticas en Educación Primaria.

Algunos trabajos recientes se han enfocado en el profesor en continua formación, donde se proponen pautas para el conocimiento profesional con las que se logre estructurar dicha formación de los profesores (Carrillo et al., 2018). Es por lo anterior que el artículo "*Un experimento de enseñanza en formación continua estructurado por el modelo MTSK*" escrito por Miguel Montes et al. (2021) presenta una práctica educativa realizada a 39 profesores egresados, que tienen entre 0 a 20 años de experiencia en el ambiente escolar, en la Universidad de Huelva en España enfocados en los cursos de educación primaria. Como objetivo principal se crea un curso, en el que se proponen 8 tareas que están justificadas con los subdominios del modelo MTSK, donde busque que los profesores consideren qué diferentes aspectos se deben tener en cuenta entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas al momento de llevar problemas al aula de clase. El análisis de los resultados se realizó con un enfoque cualitativo utilizando tres niveles de caracterización, donde se observa, a través de una comparación entre la primera tarea propuesta y la última, una mejora en el conocimiento de los temas y en el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas de los profesores desde el inicio del curso hasta el final. Aunque esta investigación discrepa de la presente investigación dado que no se enfoca en profesores en formación sino en profesores egresados con algunos años de experiencia, aporta una buena base de cómo implementar tareas formativas para poder realizar un buen análisis a través de los subdominios del modelo MTSK en los participantes.

Por otro lado, el artículo "*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge of prospective primary teachers: an explorative study*" escrito por Federica Ferretti en el año 2020 describe un estudio de exploración en profesores en formación. El objetivo principal del estudio fue examinar, a través del desarrollo de actividades sobre sistemas de numeración, cómo los cursos de educación matemática comprenden el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) de los futuros profesores de matemáticas. La autora realiza un estudio con enfoque cualitativo, a una población de 118 educadores en formación de la facultad de Educación de la Free University of Bozen-Bolzano de Italia, a partir de un análisis de contenido inductivo (Patton, 2022), es decir se generan conclusiones de los resultados a partir de premisas previas que tienen los profesores sobre los sistemas de numeración para así llegar a un resultado general, utilizando una clasificación de las respuestas a partir de la presencia del modelo MTSK y realizando una categorización de los resultados en los subdominios del modelo. El estudio se compuso de un curso en el que se planificaron actividades para el trabajo con niños y se crearon materiales para la actividad de laboratorio, el cual era el foco principal de la investigación dado que se basó en el curso de Fundamentación y Didáctica de las Matemáticas. Montes y otros (2015) señalan que los futuros profesores tienen demasiados vacíos y dificultades en lo que respecta a la aritmética y los sistemas de numeración. Por lo anterior, cuando se analizan los resultados, se observa que hubo una mejoría en el conocimiento de los sistemas de numeración en los participantes, evidenciando el saber matemático y el didáctico de los futuros profesores antes y después de aplicado el laboratorio. Se puede observar que esta investigación va de la mano con el presente trabajo, ya que, además de trabajar con profesores en formación, enfoca su estudio en la creación de actividades sobre sistemas de numeración, el cual es uno de los temas que deben de manejar los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Primaria para poder desarrollar su pensamiento numérico.

En la misma línea, el artículo "*Preservice Elementary Teachers' Mathematical Knowledge on Fractions as Operator in Word Problems*" realizado por María del Mar López-Martín, Carmen Gloria Aguayo-Arriagada y María del Mar García López en el año 2022, lleva a cabo una investigación sobre problemas verbales de fracciones a 194 futuros docentes de Educación Primaria de la Universidad de Almería en España. El objetivo fue el de reconocer los conocimientos previos de los futuros profesores sobre la fracción como un operador en problemas de fracciones. Para dar respuesta al objetivo se hizo uso del modelo MTSK para tener un punto de partida sobre lo que los participantes debían conocer y como aplicarlo. La investigación se dio con un enfoque metodológico cualitativo y cuantitativo, donde desde la perspectiva cualitativa se analizó que dificultades y errores se evidenciaron en las respuestas obtenidas y la perspectiva cuantitativa se utilizó para identificar las respuestas acertadas, con un uno (1), y las respuestas erróneas, con un cero (0). Como instrumento de recolección de datos se utilizaron diez tareas que se tomaron de diferentes libros de matemáticas de primaria. El principal objetivo de este instrumento fue el de valorar el conocimiento matemático de los participantes acerca de los contenidos de aritmética, estadística y probabilidad incluidos en el currículo de Educación Primaria de España (López-Martín et al., 2022). Los resultados arrojaron que los participantes tienen un nivel bajo en el conocimiento previo de las fracciones, teniendo como error principal el significado de fracción como operador. Esta investigación proporciona apoyo al presente trabajo con respecto a cómo poder identificar los obstáculos en el conocimiento matemático de los futuros profesores en lo que respecta a las fracciones, tema que es de interés para las tareas formativas que se propondrán en el diseño de actividades sobre el pensamiento numérico y variacional.

Otro trabajo interesante es el del artículo de investigación "*Conhecimento matemático de futuros professores: aprendizados realizados num estudo de aula*" (Vieira et al., 2022), donde los autores realizan un estudio de clase, con enfoque cualitativo, de acompañamiento a dos futuras profesoras del primer nivel de educación primaria, que comprende a niños de edades entre 6 a 10 años, en Portugal, para reconocer las bases en el conocimiento matemático en el tema objetivo del estudio, secuencias y regularidades. Vieira y otros (2022) afirman que, las diferentes investigaciones en este campo han demostrado que la solución a las dificultades en el conocimiento matemático del futuro docente no se generan por crear más asignaturas de matemáticas en los cursos de la formación universitaria, en lugar de esto, es ideal introducir contenidos que favorezcan la comprensión y la conexión de la teoría con la parte práctica de los problemas que se abordan en el aula. Este estudio se dividió en nueve sesiones de dos horas cada una, entre septiembre y noviembre del año 2019, donde se incluyó una clase de segundo grado conformada por estudiantes de 7 años. Se observó en los resultados obtenidos que surgieron varias disyunciones en el ámbito del conocimiento matemático, en cuanto a la comprensión de los conceptos como el orden de los términos o la generalización, que a lo largo de las sesiones se evidenció que fueron resueltas. El artículo de Vieira et al. (2022) presenta algunos cimientos para la presente investigación como el análisis utilizando el modelo MTSK sobre el objeto matemático de secuencias y regularidades, ya que este es uno de los temas principales que deben conocer los profesores en formación, así como las estructuras y las practicas que deben de utilizar para enseñarlo. Por lo anterior, este artículo proporciona una gran base para saber cómo desarrollar el pensamiento variacional en los profesores en formación a través de algunas actividades que requieran generalizaciones.

3.2. Marco teórico

El modelo MTSK está basado en las ideas de Shulman (1986) y del equipo de trabajo de Deborah L. Ball (Ball et al., 2008), que parten desde el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), los cuales se describen a continuación.

3.2.1. Estudio de Shulman y el modelo MKT

Los estudios de Shulman desde 1986 traen significativos aportes al perfilar el conocimiento del profesor de matemáticas, tal como manifiestan Carillo et al. (2018). Entre estos aportes se encuentran tres principales dominios que denominó: *Subject Matter Knowledge* (SMK), *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) y *Curricular Knowledge* (CK).

Muchos trabajos derivaron de lo propuesto por Shulman, entre ellos se destaca el modelo MKT, el cual tiene en cuenta dos dominios del estudio de Shulman (el SMK y el PCK) (Carrillo et al., 2018). Por su parte, el SMK se desglosa en tres subdominios que son: i) *Common Content Knowledge* (CCK), que da cuenta de todo el conocimiento que tienen los profesores o especialistas en la matemática y que es común al de otros especialistas en cuestión; ii) *Specialised Content Knowledge* (SCK), que refiere al conocimiento propio de un profesor de matemática, el cual es empleado para la enseñanza; y, iii) *Horizon Content Knowledge* (HCK), que muestra como el profesor entiende los contenidos de las matemáticas y los relaciona con otros. Por otro lado, el PCK está compuesto, igualmente, por tres subdominios: i) *Knowledge of Content and Students* (KCS), que combina el conocimiento sobre lo que aprenden los estudiantes y las matemáticas, esto hace que los maestros anticipen y expliquen cómo los estudiantes piensan y aprenden sobre las tareas y el contenido matemático.; ii) *Knowledge of Content and Teaching*

(KCT), es el conocimiento para comprender sobre la enseñanza que tiene el profesor para así poder dar un tópico matemático de manera clara; y, iii) *Knowledge of Content and Curriculum* (KCC), es el conjunto de conocimientos y contenidos matemáticos en el currículo que debe enseñar en cada nivel de escolaridad (Muñoz et al., 2015; Carrillo et al., 2018).

3.2.2. Modelo MTSK

A partir de las limitaciones encontradas en el modelo MTK se consolidaron los cimientos para la aparición del modelo *Mathematichs Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018). Este modelo se basa en la idea de que los profesores de matemáticas tienen un conocimiento especializado que es diferente al conocimiento matemático que poseen los estudiantes, o profesionales de otras áreas relacionadas con las matemáticas.

Este conocimiento especializado incluye no solo una comprensión sólida de los conceptos matemáticos, sino también la habilidad para enseñar de manera efectiva a los estudiantes y para resolver problemas de manera creativa. Según Muñoz et al. (2015) "del trabajo de Shulman (se) asumen dos de los dominios más importantes desde el punto de vista matemático: el conocimiento de las Matemáticas y el conocimiento didáctico del contenido matemático" (p. 1805). Por lo anterior, el modelo MTSK, hace un estudio de lo que el profesor de matemáticas debe de conocer a partir de dos dominios que son: *Mathematical Knowledge* (MK) y *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) (Carrillo et al., 2018).

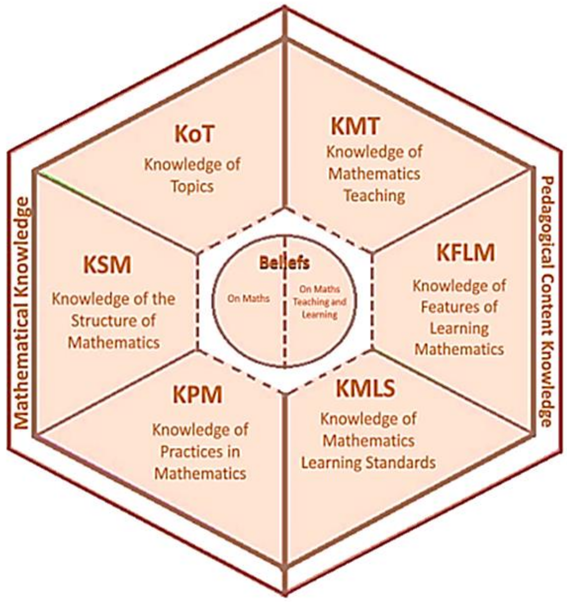
El MK, según Carrillo et al. (2018), es un conjunto de conceptos que se interrelacionan, con el fin de crear conocimiento matemático, donde el profesor puede enseñar las matemáticas de tal manera que siempre conecte los temas previos y posteriores (estructuras matemáticas), para así, verificar tanto las ideas matemáticas de los estudiantes como las propias del profesor, y, además enseñar las diferentes formas de hacer matemáticas, para lo cual debe tener conocimiento sobre las prácticas propias de las Matemáticas. Este conocimiento, en el profesor es mayor que el de los estudiantes, tanto en la cantidad de contenidos como en las aplicaciones y maneras de usar estos conocimientos en la vida cotidiana (Padilla-Escorcia, 2022). Este dominio está dividido en tres subdominios de conocimiento matemático que son: 1) *Knowledge of Topics* (KoT); 2) *Knowledge of Practice in Mathematics* (KPM); y 3) *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) (Carrillo et al., 2018).

Por otra parte, el PCK, para Carrillo et al. (2018), es el conocimiento pedagógico-didáctico que el profesor debe tener, en términos de enseñanza y aprendizaje, de los contenidos matemáticos, en otras palabras, la capacidad del profesor para enseñar los objetos matemáticos en el aula a sus estudiantes. Este dominio está dividido en tres subdominios que son: i) *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM); ii) *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT); y iii) *Knowledge of Mathematics Learnings Standards* (KMLS) (Flores-Medrano et al., 2014; Carrillo et al., 2018).

El MTSK también comprende las creencias que se tienen acerca de las matemáticas y la enseñanza y aprendizaje del área. Estas creencias se representan en la parte central de la Figura 1, con la finalidad de resaltar la relación entre las creencias y los dominios de conocimiento.

Figura 1

Esquema del Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)



Nota: El esquema muestra los dominios y los subdominios de estos del modelo MTSK. Adaptado de *The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model* (p, 241), Carrillo et al. (2018).

En el dominio MK se tiene el subdominio KoT el cual describe la forma en la que el profesor de matemáticas conoce los tópicos, las estructuras y las prácticas propias de las matemáticas, lo que conlleva a un conocimiento profundo de los contenidos matemáticos (Carrillo et al., 2018). Para describir este subdominio se presentan cinco categorías, las cuales son: La Fenomenología, los registros de representación, las Propiedades y sus Fundamentos, las definiciones y los procedimientos (Flores-Medrano et al., 2014).

El subdominio KSM, según Carrillo et al. (2018), representa las conexiones que debe de tener el profesor sobre los conocimientos de los temas matemáticos que va a enseñar, para así poder enlazar los contenidos nuevos del curso en el que está trabajando o con los de niveles menores. En este subdominio Flores-Medrano et al. (2014) proponen cuatro categorías de conexiones en temas matemáticos las cuales son: conexiones de complejización, de simplificación, de contenidos transversales, y las auxiliares.

En el subdominio KPM, el conocimiento del profesor de matemáticas está enfocado en como este es capaz de construir conocimiento matemático y de diferentes formas de que el profesor conozca como lograr resultados matemáticos, como son las diferencias entre demostración, prueba y comprobación, como plantear una conjetura, como poder definir en matemáticas y diferentes tipos de demostración y en donde aplicarlos (Flores-Medrano et al., 2014; Flores-Medrano et al., 2016). De acuerdo con Muñoz et al. (2015) “tiene en este subdominio un papel relevante el conocimiento de distintos heurísticos en resolución de problemas, que abarcan la estructura lógica en la que se desarrolla la resolución” (p. 1809).

Por otra parte, en el dominio PCK, se encuentra el subdominio KFLM donde “este subdominio refleja el conocimiento que el profesor posee y ha desarrollado acerca de cómo se aprenden y piensan los contenidos matemáticos, así como de las formas que tienen los alumnos de interactuar con cada contenido” (Muñoz et al., 2015, p. 1810). Además, este se divide en categorías donde se encuentra el conocimiento acerca de las teorías de aprendizaje en matemáticas, las fortalezas y las debilidades en el aprendizaje matemático, las formas en las que interactúan los estudiantes con los contenidos y los aspectos y las actitudes de los estudiantes la adquisición de conocimientos matemáticos (Flores-Medrano et al., 2014).

El subdominio KMT el cual trata del conocimiento que tiene el profesor de matemáticas ligado al contenido, es decir, que recursos y estrategias puede utilizar para poder enseñar matemáticas (Muñoz et al., 2015; Carrillo et al., 2018). Este subdominio se divide en tres categorías, estas son: i) Las teorías personales o institucionalizadas de enseñanza (teorías de la educación matemática); ii) los recursos materiales y digitales; y, iii) las estrategias, tareas, actividades y ejemplos. (Flores-Medrano et al., 2014).

Por último, el subdominio KMLS es el conocimiento que puede tener el profesor de matemáticas acerca del currículo institucional y cómo desarrolla este conocimiento a fondo para conocer qué grado de evolución conceptual alcanzan sus estudiantes. Además de conocer los resultados de aprendizaje con respecto a mediciones de pruebas nacionales e internacionales que se imparten en su territorio. (Muñoz et al., 2015; Carrillo et al., 2018).

3.3. Marco curricular

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) definen que el profesor debe ser competente en la materia, es decir, tener un buen manejo de los tópicos, estructuras y de las prácticas matemáticas, para reconocer si sus estudiantes logran el paso por los diferentes niveles de competencia.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) se plantean como conocimientos básicos, para todo profesor de matemáticas, los cinco pensamientos matemáticos como son “el numérico, que se relaciona con los sistemas numéricos; el variacional, con los sistemas algebraicos; el aleatorio, con los sistemas de datos; el espacial, con los sistemas geométricos; y el pensamiento métrico, con los sistemas de medidas” (Alarcón et al., 2019, p. 463).

Para los profesores en formación es importante tener un buen dominio de dichos pensamientos, ya que son ellos quienes van a impartir su conocimiento a los niños y jóvenes en las instituciones de educación básica y media. Por tal motivo, para el desarrollo de este trabajo se abordó el pensamiento numérico y el pensamiento variacional.

Además, el conocimiento que deben tener los profesores, relacionado con los pensamientos matemáticos, se reorganiza en diferentes grupos de componentes que estructuran los recursos que se deben conocer para utilizarlos en el aula, tanto en problemas planteados como para resolver. El Icfes (2020) menciona los componentes que deben tenerse en cuenta a la hora de evaluar a un estudiante, este nos dice lo siguiente:

> Específicamente, en el componente numérico-variacional se ha incluido lo referido al pensamiento numérico y al pensamiento variacional, mientras que en el componente espacial-métrico se ha compilado lo relativo al pensamiento espacial y al pensamiento métrico. En el componente aleatorio se ha capturado lo relativo al pensamiento aleatorio. (p. 17)

Esto da a entender que, es importante trabajar los pensamientos que acogen a este trabajo (numérico y variacional) como un conjunto. Aunque lo que se busca no es proponer en cada oportunidad actividades que incluyan ambos pensamientos, si se hace oportuno este agrupamiento ya que relacionar el pensamiento numérico con el variacional lleva al profesor y a los estudiantes a hacer tratamientos cuantitativos de las ideas que hay entre los números y las magnitudes variables (Icfes, 2020).

3.3.1. El Pensamiento numérico en el currículo colombiano

El pensamiento numérico es una de las habilidades fundamentales que debe alcanzar el ser humano, ya que es realmente importante en la vida cotidiana, puesto que se utiliza en diferentes ámbitos como comprar, hacer cuentas, medir, entre otras cosas. Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas enuncian lo siguiente:

> El desarrollo del pensamiento numérico exige dominar progresivamente un conjunto de procesos, conceptos, proposiciones, modelos y teorías en diversos contextos, los cuales

> permiten configurar las estructuras conceptuales de los diferentes sistemas numéricos necesarios para la Educación Básica y Media y su uso eficaz por medio de los distintos sistemas de numeración con los que se representan. (MEN, 2006, p. 60)

Por lo anterior, se puede ver que los estudiantes deben comprender los sistemas de numeración para lograr resolver problemas numéricos sencillos y, conforme se vaya avanzando en el dominio de las matemáticas, sean capaces de solucionar problemas de mayor complejidad, haciendo uso de diferentes estrategias para solucionar de problemas aplicados a contextos de la vida real.

Para el estudiante, lograr dominar todos los aspectos de los sistemas de numeración puede ser una tarea complicada. Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) expresan que “El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos” (p. 26), por esta razón la enseñanza de estos sistemas no puede limitarse a grados escolares específicos. Los profesores deben llevar este proceso a lo largo del ciclo escolar con un acompañamiento pedagógico con el que el estudiante pueda comprender de mejor manera el desarrollo de muchos años de historia en los doce años de formación del estudiante (MEN, 2006).

3.3.2. Pensamiento variacional en el currículo colombiano

El pensamiento variacional es uno de los conocimientos básicos que más se le dificulta asimilar a los estudiantes, dado que “este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos” (MEN, 2006, p. 66). Lo anterior da a entender que es necesario trabajar los distintos sistemas de representación que se asocian a la variación como lo expresan los

Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) “Entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas” (p. 50).

Regularmente se observa que el pensamiento variacional se trabaja mayoritariamente con un enfoque en los niveles de educación media y secundaria, sin embargo, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) muestran que

> El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. (p. 51)

Por lo anterior, uno de los objetivos es fomentar el pensamiento variacional desde la Educación Básica Primaria para desarrollar diferentes enfoques significativos con los cuales entender y aplicar diferentes conceptos y procedimientos que se relacionen con las funciones y sus sistemas analíticos, además de aprender cálculo numérico y algebraico (MEN, 2006).

En ese orden de ideas, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas dan una idea de lo que el profesor de primaria debe trabajar con sus estudiantes para poder desarrollar el pensamiento variacional, así:

> Para desarrollar este pensamiento desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria son muy apropiadas, entre otras, las siguientes actividades: analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes,

oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. (MEN, 2006, p. 67)

Por lo tanto, este tipo de actividades desarrollan en el estudiante maneras de entender cómo construir expresiones algebraicas a partir del uso verbal, con el que llegan a encontrar una regla recursiva para formar los siguientes términos teniendo en cuenta los anteriormente encontrados, así hallando un patrón con el que obtener una expresión analítica (MEN, 2006).

3.4. Relaciones entre KoT, KSM y KPM y el currículo de EBP

El modelo MTSK se articula perfectamente a la propuesta del programa de Pensamiento Matemático II. El *syllabus* (contenido programático[3]) describe los temas que se trabajarán dentro de los propósitos del curso. Como se observa en la Tabla 1, se realiza la clasificación general de los contenidos curriculares y subdominios del modelo MTSK que tienen que ver con el componente numérico-variacional del curso Pensamiento Matemático II para la Licenciatura en Educación Básica Primaria. Teniendo en cuenta que esta clasificación, para efectos de este trabajo, se profundiza en el Conocimiento Matemático (*Mathematical Knowledge),* dado que este es un curso teórico-disciplinar del programa de formación para el futuro profesor de matemáticas de primaria, sin embargo, dicho contenido y su didáctica serán retomados en el curso de Didáctica de la Matemática II cuyo propósito será el Conocimiento Pedagógico (PCK) del contenido matemático.

Tabla 1

[3] En educación, al *syllabus* se le designa como el esquema del programa que se va a llevar a lo largo del curso.

Caracterización de contenidos y subdominios del curso Pensamiento Matemático II

Componente	**Tema**	**KoT**	**KSM**	**KPM**
Numérico-Variacional	Corresponde a los ejes temáticos señalados en el contenido programático del curso Pensamiento Matemático II	Son aquellos procedimientos, definiciones y propiedades que debe de conocer el profesor para enseñar matemáticas a los estudiantes	Conexiones que están basadas en lo que son el aumento y la disminución de la complejidad de los temas	Trata de todas las formas en las que se puede producir matemática, tales como la resolución de problemas y la demostración

Nota: Descripción general de los temas y categorías asociadas a los subdominios del Conocimiento Matemático.

El contenido propuesto en la caracterización (Tabla 1) se ha distribuido en cuatro ejes temáticos en los cuales se subdividen los tópicos, estructuras y prácticas que se han de trabajar en el curso de Pensamiento Matemático II, y cubren diferentes aspectos de la matemática escolar.

A continuación, se presentan los cuatro ejes que orientan el contenido programático del curso Pensamiento Matemático II del programa de Licenciatura en Educación Básica Primaria a saber: (i) Eje problematizador 1: Sistemas de numeración (Tabla 2); (ii) eje problematizador 2: Números y conjuntos numéricos (Tabla 3); (iii) eje problematizador 3: Relaciones y regularidades de los números (Tabla 4); y (iv) eje problematizador 4: Situaciones de cambio (Tabla 5). Se resalta que los contenidos mostrados en estas tablas no están ligados a un orden específico, sino que, cada uno de ellos está relacionado con las estructuras y prácticas mostradas en cada eje problematizador y emergentes con cada situación propuesta en clase adaptadas a los elementos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Tabla 2

Eje problematizador 1: Sistemas de numeración

KoT	**KSM**	**KPM**
• Generalidades del número y los sistemas de representación • Representaciones concretas y pictóricas de los sistemas de numeración (Materiales didácticos ábaco, regletas, piedras…). • Historia del 0 en las culturas antiguas. • Representación polinómica del número en base 10 • Definición de Relaciones numéricas de equivalencia (=). • Comparación (>,<).	• Conversión de los números en diferentes bases (2, 3, 5, 8, 9, 13 y 16). • Historia de los sistemas de numeración. • Relación del valor posicional con el conteo de unidades (número, cantidad, símbolo, pictóricas, concretas). • Representación polinómica para números enteros y no enteros (decimales). • Ley de tricotomía (comparación de cantidades, con solo una < ó > ó =).	• Simbolización de los números en los sistemas de numeración. • Resolución de problemas con propiedades de los números naturales. • Representaciones diferentes para la modelación con material concreto (modelado con plata y equivalencias entre monedas).

Nota: Tópicos, estructuras y prácticas matemáticas del primer eje problematizador en la asignatura Pensamiento Matemático II.

Como se observa en la Tabla 2, el conocimiento frente a los sistemas de numeración que debe aprender el profesor en formación abarca varios campos conceptuales: i) base de los números; ii) valor posicional; iii) conversiones entre bases; y iv) representaciones polinómicas de los números en diferentes bases. Ya que como menciona Moreira (2002) citando a Vergnaud, un campo conceptual está compuesto de problemas, situaciones, relaciones, ideas, componentes y actividades mentales que se interrelacionan y pueden entrelazarse en el desarrollo de la asimilación de dichas estructuras, por lo que el profesor en formación necesita tener el dominio disciplinar tanto de las definiciones, como los conceptos y los temas que componen los sistemas de numeración (Olvera et al., 2021) con el fin de dar significado a los conocimientos, tanto en él mismo como en sus estudiantes.

Se puede observar que la fenomenología (KoT) desempeña un papel fundamental en el estudio de los conceptos que componen los sistemas de numeración, ya que se hace crucial comprender los fenómenos y hechos que han ocurrido a través de la historia en las diferentes culturas (maya, babilónica, egipcia y china), para llegar a un mayor entendimiento del sistema de numeración decimal (SND). En otras palabras, se hace necesario conocer de qué manera se establecieron dichos sistemas en la antigüedad, y reconocer las bases en las que se trabajaban hasta llegar al SND tal como lo conocemos; así, saber cómo trabajar con las representaciones del valor posicional en el conteo de unidades (representación polinómica de números enteros y decimales) y los algoritmos de conversión entre bases.

Por otro lado, se hace importante para el profesor en formación conocer diferentes bases de conversión para los números (Base 2, 3, 5, 8, 9, 13 y 16), y que conexiones (KSM, conexiones auxiliares) existen con las operaciones entre las bases, así como entender cómo realizar comparaciones entre estas para reconocer si una cantidad es mayor, menor o igual a otra. Por último, para los sistemas de numeración es de gran ayuda considerar la simbolización de cada sistema, entender como las culturas antiguas representaban los números y como escribían cantidades grandes con estos símbolos. Así mismo, tener en cuenta los registros de representación que se usan en cada sistema de numeración, como los concretos, pictóricos o simbólicos, los procedimientos para la resolución de problemas en la práctica y la modelación (KPM) que se puede efectuar en el SND, como por ejemplo con monedas.

Tabla 3

Eje problematizador 2: Números y conjuntos numéricos

KoT	**KSM**	**KPM**
• Definiciones y propiedades de los números en los distintos conjuntos numéricos. • Operaciones (+,-,*, /, potenciación, radicación). • Estrategias de cálculo mental (Procedimientos). • Representaciones numéricas • Relaciones parte todo y representación en gráfica	• Relación entre los conjuntos numéricos • Operaciones inversas Suma-resta (0) Multiplicación-división (1) Potencia-radicación (1). Relación de la multiplicación como suma reiterada y de la división como resta reiterada • Fracciones y Relaciones parte/ todo (%, fraccionario, probabilidad)	• Condiciones necesarias/suficientes (Para comprobar propiedades en un conjunto numérico – minuendo y sustraendo, no conmutativo). • Condiciones para pertenecer a un conjunto numérico (5 es N, R, Q, Z). • Validación (comprobación de resultados, procedimientos).

circular, y visualizar en gráfica de barras. • Fracciones y operaciones (Homogéneas, heterogéneas). • Operaciones con números en diferentes representaciones (decimal, fraccionario y mixto).	Fracciones: propias e impropias; mixtas y equivalentes • Transformación de representaciones (Decimal-fraccionario y Fraccionario-decimal) • Comparación de fracciones (>, <, =) cuando tienen igual y diferente denominador e igual y diferente numerador • Comparación de decimales (>, <, =) • Comparación entre diferentes conjuntos numéricos.	(Proceso de razonamiento en la validación de los resultados).

Nota: Tópicos, estructuras y prácticas matemáticas del segundo eje problematizador en la asignatura Pensamiento Matemático II.

En la Tabla 3 se muestra la distribución de los temas del eje problematizador 2 acerca de los números y conjuntos numéricos. El estudio de los números y sus propiedades es fundamental en las matemáticas que debe aprender el profesor en formación para primaria. Para entender cómo utilizar los números en las diferentes operaciones aritméticas, se hace necesario que se comprendan las definiciones y propiedades (KoT) de estos en los conjuntos numéricos como son: Naturales ($\mathbb{N}$), Enteros ($\mathbb{Z}$), Racionales ($\mathbb{Q}$) y Reales ($\mathbb{R}$); y saber cómo comparar estos conjuntos (KSM, conexiones transversales) y reconocer de qué manera se compone cada uno de ellos y cuales son subconjuntos de los otros, como por ejemplo el conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Se hace crucial que se comprenda la relación que existen entre los diferentes conjuntos numéricos y cuáles condiciones son necesarias para demostrar (KSM) qué números pertenecen a cada conjunto y comprobar sus propiedades, como que la suma es una operación conmutativa en el conjunto de los números naturales, mientras que la resta no lo es en dicho conjunto. Por otro lado, es importante que el profesor en formación conozca las operaciones básicas cómo la suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación, además de que entienda cómo se comportan estas operaciones (KoT, definiciones y propiedades) siendo una la inversa de la otra (suma-resta, multiplicación-división, potenciación-radicación), para poder realizar cálculos precisos y resolver problemas matemáticos, así poder transponer[4] este conocimiento a sus estudiantes.

Considerar las estrategias de cálculo mental para realizar procedimientos, así como las diferentes representaciones numéricas, es útil para que se logre llevar a cabo cálculos rápidos sin el uso de instrumentos como la calculadora. Otro punto fundamental a conocer son las relaciones parte-todo de los números racionales y las representaciones gráficas de las mismas (gráfica de barras y circular), ya que como menciona Obando (2003) “los números racionales constituyen una base fundamental, no sólo para el estudio de la matemática, sino también para la formación

[4] En matemáticas, el verbo transponer se refiere a la acción de intercambiar o mover el orden de los elementos en una expresión matemática.

en otras disciplinas como la física, la química, la biología, etcétera" (p, 158), por lo que reconocer sus diferentes representaciones es conveniente para visualizar de una mejor manera cómo se divide un todo en distintas partes, sea continuo o discreto, y para la resolución de problemas (KPM) que estén relacionados con fracciones, porcentajes y probabilidad.

Para lo anterior, es fundamental que el profesor en formación conozca las diferentes maneras de representar los números fraccionario (fracciones propias, impropias y mixtas), así como saber de qué manera poder realizar operaciones entre ellas (KSM, conexiones basadas en el incremento de complejidad). Así mismo, tener en cuenta las transformaciones entre las representaciones como decimal a fraccionario y viceversa y la comparación de fracciones cuando tienen igual y diferente denominador o numerador para conocer cuál es mayor, menor o igual, de la misma manera con las representaciones decimales de estos fraccionarios. Por último, la validación (KPM) de resultados y el proceso que se utiliza para razonar su comprobación es necesario para poder asegurar una buena precisión en los cálculos y la resolución de problemas matemáticos.

Tabla 4

Eje problematizador 3: Relaciones y regularidades de los números

KoT	**KSM**	**KPM**
• Propiedades de las operaciones aditivas y multiplicativas (distributiva, asociativa, distributiva y conmutativa).	• Reconocimiento del conjunto de los números primos • Diferencias entre números primos y compuestos	• Resolución de problemas con situaciones aditivas y multiplicativas y Situaciones de composición.

• Orden de los números naturales y racionales. • Múltiplos, divisores, criterios de divisibilidad, etc. • Descomposición en factores primos de los números naturales. • Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor (m.c.m y M.C.D). • Relación de posición y figura/ Relación de posición y número • Representaciones concretas y pictóricas de patrones numéricos/geométricos • Representación tabular (Uso de reglas verbales) para patrones numéricos.	• Simplificación de fracciones • Conexión entre la descomposición en factores primos y el m.c.m y M.C.D • Término general-representación algebraica-Sucesiones numéricas/simbólicas/ geométricas • Comprensión de relaciones, patrones y funciones. • Relaciones de dependencia (variables que dependen de otras).	• Demostración y validación de las relaciones numéricas (ej: Algoritmo de Euclides) • Modelación de secuencias numéricas y geométricas (variación) • Validación del término general (secuencias numéricas-geométricas) • Uso de lenguaje formal en la generalización de patrones (Proceso de comunicación - Ej: Encontrar el valor que está ubicado en la posición n-ésima en una secuencia numérica o geométrica)

Nota: Tópicos, estructuras y prácticas matemáticas del tercer eje problematizador en la asignatura Pensamiento Matemático II.

La Tabla 4 muestra la caracterización de los temas asociados a las relaciones y regularidades de los números, teniendo en cuenta cuales son los tópicos, estructuras y prácticas que debe conocer el profesor en formación de matemáticas de primaria para enseñar a sus estudiantes y cómo se relacionan entre ellos. Considerando lo anterior, se observa que, entender las definiciones (KoT) acerca de las propiedades de las estructuras aditivas y multiplicativas con números reales, da cabida a la resolución de problemas (KPM) en situaciones que involucren estas dos operaciones, tanto separadas como compuestas.

Por otro lado, comprender los temas relacionados con la descomposición en factores primos y los criterios de divisibilidad, dan paso a la estructuración del conocimiento acerca de las conexiones (KSM) con el mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Además, el profesor en formación debe conocer las propiedades (KoT) de los números naturales y racionales, así como el procedimiento para encontrar el orden de dichos números, con el fin de desarrollar maneras de demostrar y validar (KPM) en secuencias numéricas y geométricas.

Otro de los temas significativos en esta sección que debe conocer el profesor en formación es la relación del componente numérico-variacional, con otros componentes del pensamiento matemático, de manera que garantice desde lo disciplinar el reconocimiento de la *coherencia horizontal* propuesta desde lineamientos Curriculares (1998) del área de matemáticas. Por otro lado, otro aspecto con el que profesor en formación debe familiarizarse, son las relaciones entre las posiciones y las figuras o los números en las secuencias (geométricas y numéricas), con el fin de poder generalizar el resultado para así encontrar un término general con el cual validar toda la secuencia (KPM).

De igual modo, tener en cuenta las diferentes representaciones (pictóricas y concretas) de los patrones numéricos y geométricos para llevar a cabo el desarrollo del uso del lenguaje formal en la generalización de estos patrones, sin la necesidad de “algebraizar[5]” simbólicamente los resultados. Por último, juega un papel esencial la noción del uso de representaciones tabulares para secuencias numéricas, ya que da paso a entender las relaciones de dependencia entre una variable y otra.

Tabla 5

Eje problematizador 4: Situaciones de cambio

KoT	**KSM**	**KPM**
• Definición y propiedades sobre razones y proporciones. • Definiciones acerca de Proporcionalidad directa e inversa, medida y magnitud. • Propiedades de los números naturales, racionales y de las figuras geométricas (relación lado y perímetro, lado y área en patrones geométricos).	• Relación entre las fracciones y las razones. • Homotecia (pantógrafo) y Semejanza (triángulos). • Relación entre las igualdades y desigualdades numéricas con las situaciones de cambio (relación lado y perímetro, lado y área en patrones geométricos, relación horizontal y vertical de las tablas).	• Lenguaje formal y simbólico de las razones (Diferentes representaciones como a/b, a *es a* b, a:b). • Resolución y formulación de problemas de proporcionalidad con incógnitas. • Resolución de problemas en situaciones de variación proporcional. • Demostración (pendiente en la recta).

[5] La palabra algebraizar tiene como significado escribir un problema dado en lenguaje formal, relacionado con las matemáticas, a una ecuación o expresión algebraica.

• Representación tabular y gráfica de situaciones de cambio y variación. • Definiciones acerca de igualdad, desigualdad y comparación (>, <).	• Conexión entre las situaciones de cambio y la proporcionalidad directa, inversa y compuesta. • Comparación entre números-> comparación de ecuaciones e inecuaciones (conexiones transversales).	• Modelación (plano cartesiano-funciones-dependencia, uso de software dinámicos). • Lenguaje formal/simbólico y procesos de razonamiento para generalizar situaciones de cambio.

Nota: Tópicos, estructuras y prácticas matemáticas del cuarto eje problematizador en la asignatura Pensamiento Matemático II.

En la Tabla 5 se puede observar la clasificación de los temas, relacionados con las situaciones de cambio, que se proponen para el eje problematizador 4 del curso. Se hace importante que el profesor en formación comprenda las definiciones y propiedades (KoT) acerca de las razones y proporciones, así como de la proporcionalidad directa e inversa, con el fin de que en su razonamiento logre llevar a la práctica el lenguaje formal y simbólico (KPM) de las diferentes formas de representación de las razones y las proporciones. Por otro lado, en este eje problematizador se retoman conocimientos anteriores (KSM, conexiones basadas en la simplificación) cómo las propiedades de los números para poder aplicarlos en relaciones entre lado y perímetro, o entre lado y área de formas geométricas propuestas en patrones que representan situaciones de cambio; enlazando estos temas con igualdades y desigualdades numéricas para aplicarlos en la resolución de problemas de escenarios de variación. Así mismo, “la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados" (Duval, 2006, p, 145), por lo que se hace necesario entender los registros de representación (algebraicas, tabulares y gráficas) en las situaciones de cambio (Duval, 1999), así como el tránsito entre ellas, para desarrollar dentro del conocimiento que debe aprender el profesor en su formación inicial. Teniendo en cuenta que las conexiones (KSM) entre estas situaciones de cambio sirven para reconocer conceptos (KoT) como: la proporcionalidad directa, inversa y compuesta, además de contribuir en prácticas propias como demostrar y conocer como modelar (KPM) este tipo de situaciones con el uso del plano cartesiano o de softwares dinámicos en la práctica matemática.

4. Aproximación metodológica

Para responder a la pregunta problema del presente trabajo, esta propuesta se desarrollará con un enfoque de investigación cualitativa, ya que "pueden desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis de los datos" (Hernández-Sampieri et al., 2014, p. 7), lo que permitirá, conforme se avance en la investigación y la práctica, establecer qué tipo de estrategias funcionarán de una mejor manera y cuales no en el acompañamiento extracurricular de los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Primaria.

La investigación cualitativa se centra en el entendimiento y la explicación de fenómenos mediante un análisis preciso de las diferentes experiencias, perspectivas y significados de los sujetos participantes (Hernández-Sampieri, 2014). Además de ser de gran utilidad para cuando el tema de la investigación no se ha estudiado a profundidad. En este tipo de investigación, utilizan diversas técnicas de recolección de datos como las entrevistas, la observación participante del grupo, diarios de campo, documentos, entre otros instrumentos que ayudan al investigador en el análisis del caso de estudio y así poder responder sus hipótesis o replantear nuevas.

Por lo anterior, esta propuesta se basa en el análisis del acompañamiento extracurricular en estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Básica Primaria. Esto con el fin de apoyarlos en el curso de Pensamiento Matemático II. Para lograr el análisis del acompañamiento extracurricular con los estudiantes de tercer semestre, se trabajará con un enfoque de corte interpretativo (Vain, 2012), puesto que, se busca hacer una recopilación de datos con las estrategias que se propondrán para el acompañamiento de los estudiantes. En un ambiente propio para los jóvenes, ya que este apoyo se realizará en la misma universidad, y así poder analizar y comprender la realidad de aprendizaje, y así estructurar de mejor manera esta estrategia dependiendo del análisis de los datos conseguidos.

4.1. Diseño Metodológico

Para trabajar en esta propuesta alrededor de la pregunta de investigación y los objetivos formulados, el caso de estudio será intrínseco, ya que permitirá un mejor estudio del fenómeno del acompañamiento extracurricular, dónde los participantes serán los estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Básica Primaria que cursarán la materia de Pensamiento Matemático II. El acompañamiento extracurricular será presencial en la Universidad Industrial de Santander, una vez por semana a un grupo, de aproximadamente 6 estudiantes, sin embargo, el espacio estará abierto para todos los participantes del curso, durante el semestre 2023-1.

4.2. Fases de la investigación

Esta investigación se dividió en cuatro etapas nombradas a continuación: i) Aproximación teórica, en la que se llevó a cabo la investigación correspondiente sobre el modelo MTSK y se profundizó en sus subdominios. Además, se recogió información necesaria para respaldar el trabajo realizado en este estudio; ii) Definición de las relaciones entre prácticas, estructuras y tópicos de matemáticas en Educación Básica Primaria, en la que se realizó la lectura correspondiente para conocer qué tópicos se enseñan y se trabajan en EBP. Por otro lado, se establecieron relaciones entre estos contenidos con los subdominios del modelo MTSK para hacer la clasificación correspondiente con los ejes temáticos; iii) La identificación de tareas formativas para el acompañamiento extracurricular, donde se tuvieron en cuenta actividades que ayuden a fortalecer el componente numérico-variacional en los estudiantes de la Licenciatura en educación básica primaria y serán parte del acompañamiento extracurricular; iv) El diseño de la estrategia, en el que se explica a manera detallada los pasos a seguir en la construcción de la estrategia de acompañamiento propuesta. Se utilizarán los tópicos vistos en clase para plantear las tutorías, que serán base del análisis realizado en este trabajo.

4.2.1. Fase 1. Aproximación teórica

Esta aproximación teórica se realiza en tres momentos que indicaron el inicio del proyecto de investigación. Estos momentos son:

a. Lectura del marco teórico referente al modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), que se utilizará en la propuesta para la creación de la estrategia de acompañamiento extracurricular.
b. Profundización en los subdominios que trabaja el modelo MTSK, haciendo énfasis en los subdominios del dominio MK, como son KoT, KSM y KPM; dado que, en esta propuesta se pretende manejar el conocimiento matemático de los estudiantes que serán futuros docentes en educación primaria.
c. Síntesis de la información recolectada en las lecturas realizadas, para poder elaborar el proyecto de investigación, planteando el problema, la pregunta de investigación y

los objetivos que se pretenden alcanzar durante los dos primeros cortes del semestre 2023-1.

4.2.2. Fase 2. Definición de relaciones entre prácticas, estructuras y tópicos de matemáticas en Educación Básica Primaria

Esta fase se desarrolla en tres momentos:

a. Lectura y apropiación acerca de los tópicos matemáticos que se enseñan en Educación Básica Primaria, con el fin de entender el fenómeno de estudio con el que se trabajará.
b. Clasificación de los contenidos, las estructuras y las prácticas que deben de tener en cuenta los profesores de primaria (Tabla 1) para así poder estructurar la propuesta en el semestre 2023-1 y perfilar el curso de Pensamiento Matemático II y en el acompañamiento extracurricular.
c. Establecimientos de las relaciones entre los tres subdominios (KoT, KSM, KPM) y clasificación de acuerdo con los ejes temáticos con los que se abordará la propuesta.

4.2.3. Fase 3. Identificación de tareas formativas para el acompañamiento extracurricular

Para efectuar la propuesta de acompañamiento, se debe tener en cuenta qué tareas formativas se emplearán en el transcurso del semestre 2023-1. Estas tareas deberán estar enfocadas en los tópicos matemáticos establecidos en la tabla, con el fin de relacionar las estructuras y las prácticas para desarrollar el pensamiento numérico y variacional en los estudiantes del curso de Pensamiento Matemático II. Estas tareas son base del estudio realizado por Acevedo-Rincón (2022-2023) en el marco del proyecto postdoctoral titulado “El desarrollo del pensamiento numérico-variacional en el futuro profesor de Educación Básica Primaria: Tareas formativas desde el modelo del conocimiento especializado”.

4.2.4. Fase 4. Diseño de la estrategia

Para el diseño de la estrategia, se tendrán en cuenta tres instrumentos que son:

a. El modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) y los ejes temáticos del curso que desarrollarán los estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en educación básica primaria.

b. Las tareas formativas presentadas en la herramienta Nearpod y seleccionadas cuidadosamente de la Fase 3, las cuales constituirán la base del acompañamiento extracurricular, a manera de tutorías (Tabla 6).

Tabla 6

Tutorías realizadas durante 2023-1

Número de tutoría	**Número de Actividades**	**Subdominios**			**Enlace Nearpod**
		KoT	**KSM**	**KPM**	
Tutoría 1- Corte 1	1.Cambio de registro de representación 2.Problema sobre cambio de bases 3.Cambio de base 4.Argumentación y razonamiento	•Definiciones y propiedades •Fenomenología	• Conexiones basadas en la simplificación • Conexiones transversales	•Formas de validación •Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal •Condiciones necesarias y	https://app.nearpod.com/?pin=0ADB453CB62E799595D3080955354316-1&&utm_

				suficientes para generar definiciones	source=link
Tutoría 2- Corte 1	1.Problema divisibilidad 2.Problema divisibilidad 3.Razonamiento sobre propiedades de los reales	•Propiedades y definiciones •Registros de representación	• Conexiones auxiliares • Conexiones basadas en la simplificación	• Formas de validación y demostración • Uso del lenguaje formal	https://app.nearpod.com/?pin=6670267F65BFA150195C41275290C1CD-1&&utm_source=link
Tutoría 3- Corte 2	1.Conjuntos 2.Representación de conjuntos 3.Validación de enunciados	• Definiciones, propiedades y significados • Registros de representación	• Conexiones auxiliares • Conexiones basadas en la simplificación	• Formas de validación y demostración • Procesos asociados a la resolución de problemas como forma	https://app.nearpod.com/?pin=6436EC974B57E03FD35C9D4D6A9A224D-

				de producir matemáticas • Uso del lenguaje formal	1&&utm_source=link
Tutoría 4- Corte 2	1.Divisibilidad 2.Resolución de problemas 3.Resolución de problemas	•Procedimientos •Definiciones y propiedades •Registros de representación	•Conexiones basadas en la simplificación •Conexiones auxiliares	•Formas de proceder en matemáticas •Formas de validación •Uso del lenguaje formal •Procesos asociados a la resolución de problemas	https://app.nearpod.com/?pin=5CA41256A6F4C5EE85F0318248DD95BD-1&&utm_source=link

Nota: Tutorías realizadas en el primer y segundo corte del semestre 2023-1 con las actividades y subdominios trabajados en cada una.

c. La recolección de los datos en cada sesión con los estudiantes para realizar el respectivo análisis, utilizando los instrumentos de recolección de datos que se describen en la siguiente sección.

Para finalizar, se redactó un documento que consolida el análisis de los resultados obtenidos en el acompañamiento extracurricular propuesto a lo largo de los dos primeros cortes del semestre 2023-1.

4.3. Instrumentos para la recolección de datos

Para la recopilación de los datos, los instrumentos que se utilizarán son: i) *entrevistas* a los participantes, con lo que se conocerá cuáles son las concepciones previas, acerca de los temas, con los que llegan los estudiantes al curso; ii) *observación participante*, donde se realizará un acompañamiento activo junto a los estudiantes, con el fin de identificar las estrategias que funcionen de una mejor manera, observando y registrando sus acciones y discursos; iii) *diario de campo*, con el que se tendrá en cuenta que se ha desarrollado en cada sesión de acompañamiento, identificando la hora y la fecha en la cual este se realiza, para poder tener una mejor inmersión en el fenómeno analizado (Hernández Sampieri, 2014).

Para finalizar, se redactará un documento, como síntesis para el Trabajo de Grado II, con los datos obtenidos y el análisis realizado para la estructuración de la propuesta de acompañamiento extracurricular a partir del modelo estructurado con base en el MTSK.

5. Análisis de resultados

En este apartado se presenta el análisis de las tutorías realizadas a partir de la implementación de las tareas formativas propuestas a los estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Básica Primaria que cursan la asignatura de Pensamiento Matemático II (componente numérico-variacional).

Se hace necesario precisar que en todo el semestre se hicieron diez tutorías para el acompañamiento extracurricular, sin embargo, para efectos del presente reporte de investigación, se tomaron en cuenta solamente las primeras cuatro tutorías seleccionadas entre el primer y segundo corte del semestre 2023-1.

Para el análisis de los resultados se tuvo en cuenta los aspectos relacionados con las categorías asociadas a los subdominios que hacen parte del Conocimiento Matemático (KoT, KSM y KPM) del modelo MTSK (prioridad en el desarrollo del curso Pensamiento Matemático II), con el fin de dar respuesta a la pregunta de investigación.

A continuación, se presenta el análisis de las respuestas obtenidas por los estudiantes del curso sobre las tareas implementadas durante las sesiones de tutorías, teniendo en cuenta que cada una de estas busca responder un objetivo que permita reforzar el componente numérico-variacional. Para el primer corte se realizaron dos sesiones de tutorías en las que se trabajaron problemas relacionados con cambio de base y divisibilidad. Para el segundo corte se realizaron, igualmente, dos tutorías en las que se llevaron a cabo problemas afines a los temas de conjuntos numéricos, divisibilidad y operaciones con números reales.

5.1. Tutoría 1-Corte1

Sub-Dominio	**KoT**	• Definiciones y propiedades • Fenomenología • Registros de representación
	KSM	• Conexiones basadas en la simplificación • Conexiones transversales
	KPM	• Formas de validación • Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal • Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones
Fecha		11 de abril de 2023

Objetivo	• Reconocer y representar los sistemas de numeración antiguos (maya y egipcio). • Realizar operaciones básicas con el sistema de numeración maya. • Entender cómo se constituye un sistema de numeración en cualquier base.

5.1.1. Actividad 1. Cambio de registro de representación

Se presenta a los estudiantes la siguiente situación:

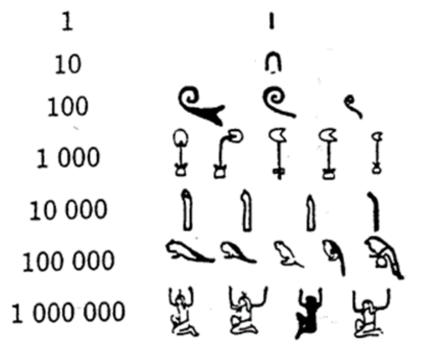
¿De qué manera representarías el número 1386 en el sistema de numeración egipcio y maya? ¿Qué otros sistemas de numeración antiguo conoces? Expresa el número dado en esos sistemas de numeración y escribe el procedimiento.

En un inicio se mostró la representación en el sistema de numeración maya y egipcio, previamente vistos en clases. Se pretendía que los estudiantes realizaran la representación del número "1386" en los dos sistemas de numeración y que registraran el procedimiento utilizado para encontrar dicha representación.

En general, todos de los estudiantes lograron relacionar las cantidades del número en el sistema de numeración egipcio (*registros de representación,* KoT*)*. Inicialmente, el número en este sistema de numeración no representó complicación en su registro, pues los estudiantes solo necesitan de *acumulación de cantidades,* donde se tiene en cuenta que este sistema de numeración es no posicional, sino, en base diez (Kline, 1994) y se representa con los símbolos que se observan en la Figura 2, hasta lograr completar el número 1386, es decir, lograr: $(1 \times 1000) + (3 \times 100) + (8 \times 10) + (6 \times 1)$, en su representación polinómica en el sistema de numeración decimal.

Figura 2

Representación simbólica del sistema de numeración egipcio

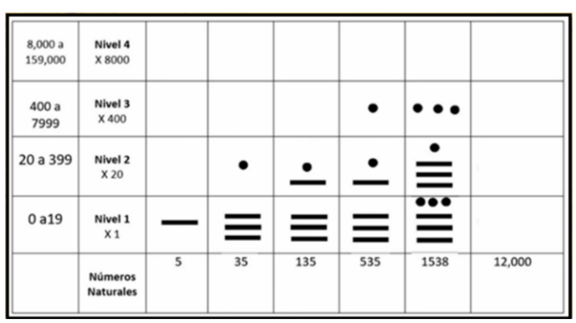


Nota: La figura muestra cada potencia de 10 y su representación en el sistema de numeración egipcio. Adaptado de *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros* (p, 184), Cid, E et al., (2003).

Sin embargo, cuando llegó el momento de realizar la representación en el sistema de numeración maya, cometieron algunos errores en el procedimiento (*procedimientos,* KoT) por el manejo de los niveles en la escritura (Figura 3) que tiene este sistema de numeración.

Figura 3

Niveles de representación del sistema de numeración maya

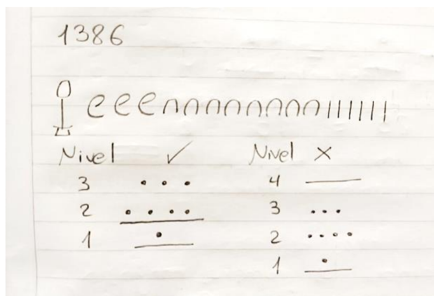


Nota: Se observa en el esquema la tabla de los niveles y cuál era la cantidad máxima para el número que permite cada nivel. Adaptado de *Pensamiento Matemático de los Mayas, una creación metafórica*, Sánchez (2010).

Los estudiantes resolvieron este problema observando que, en primer lugar, para poder obtener el número 1386 en representación maya, debían agotar inicialmente los números del primer nivel. Seguido de esto, agotar los del segundo nivel, así sucesivamente hasta que llegaran al nivel necesario en donde solo podrían colocar lo que faltase del número para completarlo.

Figura 4

Respuesta correcta e incorrecta de un estudiante en la actividad 1



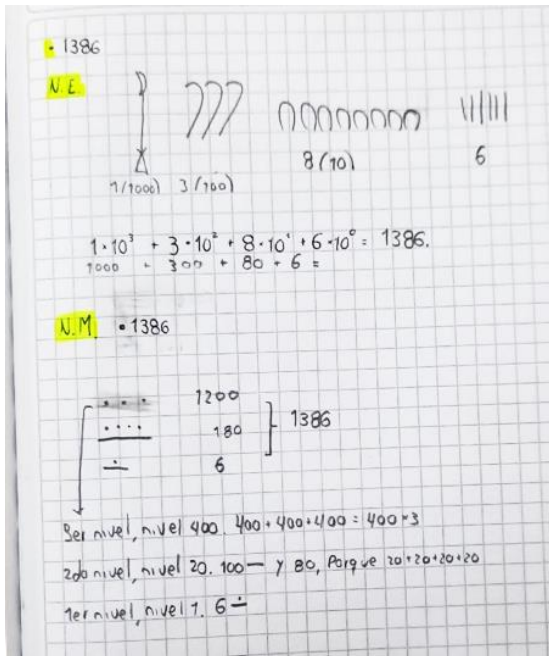
Nota: La figura muestra la representación del número 1386 en el sistema de numeración egipcio y maya, donde se observa el error de escritura del número.

Se puede ver en la Figura 4, cómo uno de los estudiantes plantea el número 1386 en el sistema de numeración maya de manera errónea, dado que no tuvo presente la cantidad de puntos que pueden utilizarse en cada nivel (KoT, *procedimientos y propiedades).* Sin embargo, luego *representó* el número correctamente, comprendiendo las propiedades de la tabla de numeración maya.

Por otro lado, tres de los estudiantes que *representaron* (KoT) de manera correcta el número, en ambos sistemas de numeración, también lo escribieron en su representación polinómica en el sistema de numeración en base diez (KSM, *conexiones transversales*), explicando de manera detallada lo que querían expresar en sus resultados (Figura 5), dando a entender que comprenden cómo conectar las representaciones de los sistemas de numeración antiguos con el sistema de numeración actual (SND).

Figura 5

Respuesta detallada de uno de los estudiantes en la actividad 1



Nota: En la figura se muestra la representación polinómica en base diez del número 1386 y la explicación de cómo se construyó el número en el sistema de numeración maya.

Por último, aunque no lo dejaron expresado en las evidencias presentadas, la respuesta a la pregunta: "¿qué otros sistemas de numeración conoces?" lo expresaron de manera oral, dando a entender que conocían los sistemas de numeración chino y babilónico, además del sistema de numeración en base 2 (KoT, *fenomenología*).

Para esta actividad se planteó para que los estudiantes lograran comprender como utilizar los símbolos (KPM, *papel de los símbolos*) y las *propiedades* (KoT) que debe cumplir el sistema de numeración egipcio en la representación de los números.

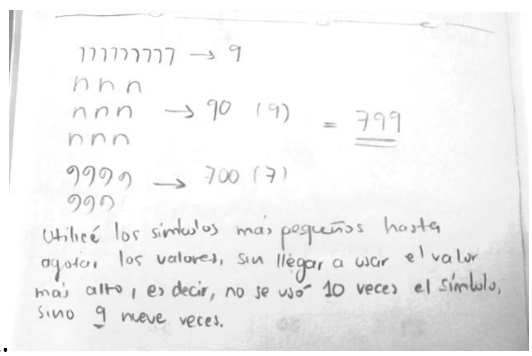
5.1.2. Actividad 2- Problema sobre cambio de bases

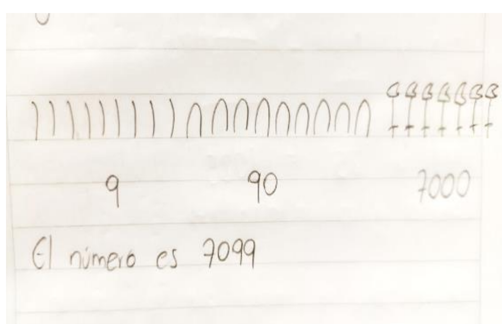
¿Cuál es el menor número que se puede representar con 25 símbolos en el sistema de numeración egipcio? ¿Qué procedimiento utilizaste para encontrar dicho número?

Revisando las evidencias presentadas por los estudiantes, se observó que la mayoría fueron capaces de encontrar el número que se buscaba en la actividad, además de lograrlo representar con la cantidad de símbolos que se buscaba, no obstante, al momento de explicar el método utilizado para llegar a la respuesta (KoT, *procedimientos*) se evidencia la falta del *uso del lenguaje formal* (KPM) por parte de los estudiantes (Figura 6.a).

Figura 6

Respuestas de los estudiantes en la actividad 2

a.


b.


Nota: Las figuras muestran las respuestas de los estudiantes frente al número solicitado.

Como se puede ver en la Figura 6.a, el estudiante describe el procedimiento (KoT, *Características del resultado*) que utiliza para encontrar el número que pide la actividad, sin embargo, hace uso de un lenguaje coloquial con el que muestra el paso a paso de su razonamiento. Presenta ambigüedades en la argumentación de su respuesta como cuando escribe que utiliza los *"símbolos más pequeños hasta agotar los valores",* dado que no da una explicación concreta de cuantos símbolos se pueden utilizar en el sistema de numeración egipcio por cada número. Dos estudiantes en particular describen que encontraron el número que se buscaba, utilizando la técnica de ensayo y error para validar su razonamiento (KPM). Sin embargo, como se muestra en la Figura 6.b, uno de los estudiantes que utilizó el método de ensayo y error, mostró dificultades al comienzo al intentar encontrar el número, ya que comete un error en su *procedimiento* (KoT) al obviar los símbolos del número cien y colocando los del número mil, no teniendo en cuenta el orden en la simbolización (KPM*, papel de los símbolos)* de este sistema de numeración.

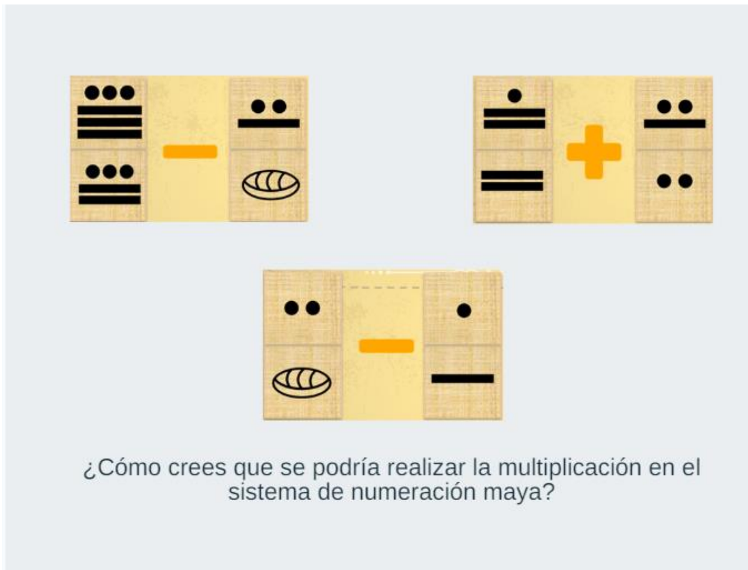
En la tercera actividad se pretende que los estudiantes logren comprender las maneras de proceder (*heurísticas*, KPM) en la resolución de las operaciones de suma y resta con los números mayas. Además, dejen en evidencia su conocimiento intuyendo de qué manera pueden realizar la multiplicación en este sistema (KoT, *procedimientos*).

5.1.3. Actividad 3-Cambio de base

Teniendo en cuenta la representación del sistema de numeración maya y la equivalencia por niveles para poder escribir números mayores de 20, 400 y 8000. ¿De qué manera podrías efectuar las siguientes operaciones? (Figura 8) Escribe el procedimiento que utilizaste para llegar a la respuesta.

Figura 7

Operaciones propuestas para la actividad 3 sobre el sistema de numeración maya

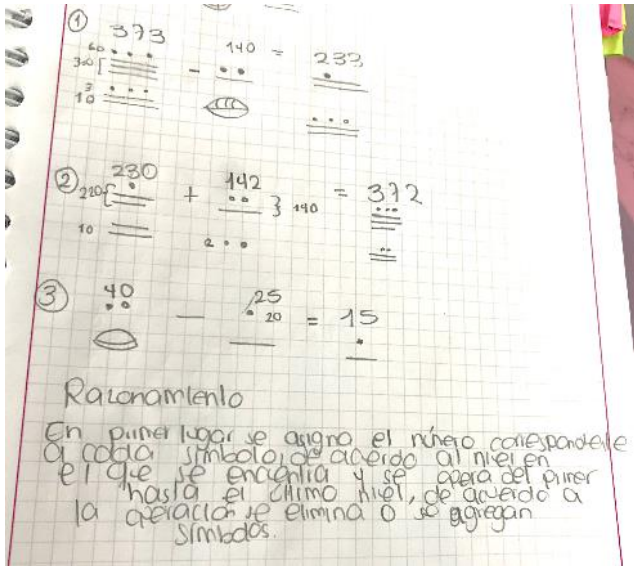


Nota: En la figura se muestran tres operaciones básicas en números mayas.

Todos los estudiantes lograron establecer las tres operaciones planteadas en la actividad, ya que tenían claras las *propiedades* (KoT) acerca de cómo operar en el sistema de numeración maya; sin embargo, solo uno de ellos dejó en claro qué procedimiento utilizó para validar (KPM, *formas de validación*) sus respuestas (Figura 8).

Figura 8

Razonamiento sobre realización de las operaciones

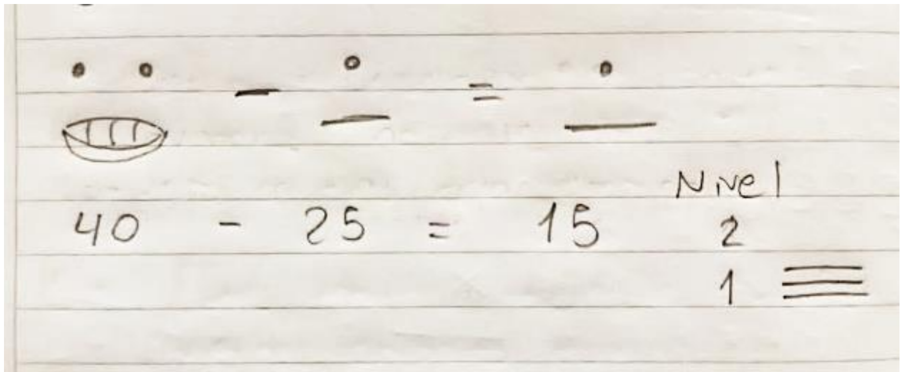


Nota: En la figura se muestra las operaciones realizadas por un estudiante y el razonamiento que siguió para llegar a su respuesta.

Como se puede observar en la Figura 8, el estudiante explica que asigna el número que corresponde a cada símbolo, esto con el fin de hacer conexiones entre el sistema de numeración maya y el sistema de numeración decimal que ya conoce (KSM, *conexiones basadas en la simplificación*) para así poder verificar que su solución fuera correcta (KPM, *formas de validación*). Por otro lado, expresa el procedimiento utilizado con el que soluciona el problema (KPM) y hace uso tanto de los *registros de representación* (KoT) maya como decimal para dar y verificar la respuesta obtenida.

Figura 9

Error realizado por un estudiante en la tercera operación

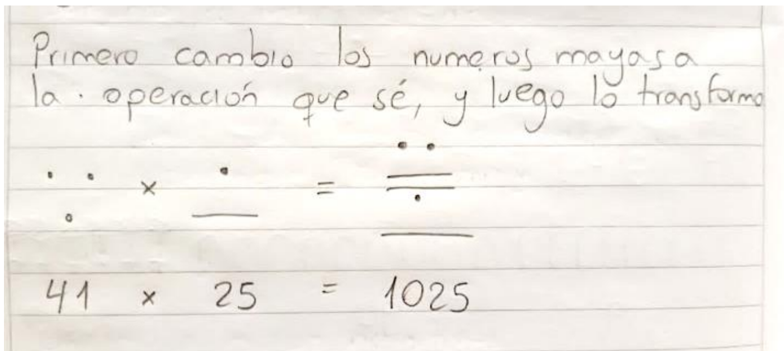


Nota: En la imagen se observa el error que comete el estudiante al momento de hacer la tercera operación porque esta tiene un cero.

Como se observa en la Figura 9, un estudiante tuvo dificultades al realizar la tercera operación, ya que esta tenía un "cero" en el primer nivel, lo que generó confusión al momento de intentar realizar la resta de las cantidades dadas. Sin embargo, utilizando sus conocimientos previos sobre cómo convertir un número en representación maya a decimal (KSM, *conexiones basadas en la simplificación*) sintetiza el problema primero representando los números en el SND luego restándolos y por último el resultado convirtiéndolo en su representación maya. Con respecto a la pregunta: "*¿cómo crees que se podría realizar la multiplicación en el sistema de numeración maya?*", no hubo muchos estudiantes que dieran una respuesta a la pregunta , a pesar de esto, se destaca la respuesta de un estudiante en particular que expresa que una manera de realizar la multiplicación en este sistema sería primero transformar los números mayas al SND, que es el sistema que conocen los estudiantes (KSM, *conexiones basadas en la simplificación*), luego operarlos y escribir la respuesta encontrada cambiando el registro de representación al del sistema de numeración maya (Figura 10).

Figura 10

Respuesta de un estudiante a la pregunta "¿Cómo crees que se podría realizar la multiplicación en el sistema de numeración maya?"



Nota: En la figura se observa la forma de proceder del estudiante para dar solución a la pregunta planteada.

Para la cuarta actividad se proponen cinco preguntas de respuesta abierta para que los estudiantes expresen su conocimiento sobre las *definiciones y propiedades* (KoT) que tienen acerca de la teoría de los sistemas de numeración.

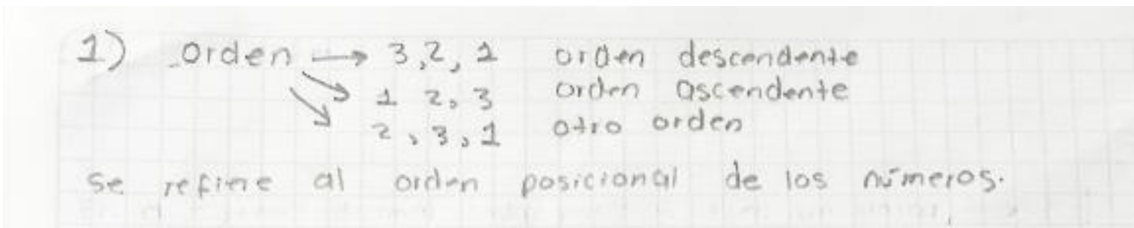
5.1.4. Actividad 4- Argumentación y razonamiento

1. *¿A qué hace referencia el orden de una cifra?*
2. *¿Cómo se da el incremento del orden de una cifra?*
3. *¿Existen diferencias entre el orden y el lugar de una cifra?*
4. *¿Puede construirse un sistema en base 1?*
5. *¿Qué indica la base de un sistema?*

En general, los estudiantes participantes dieron respuestas similares en las primeras cuatro preguntas, cada uno utilizando sus propias palabras, con las que identifican *condiciones necesarias y suficientes* para generar las definiciones (KPM). Se observó que los estudiantes participantes tienen confusiones sobre lo que es el orden y el lugar de una cifra (KoT, *definiciones*) puesto que no tienen en cuenta que el orden de las cifras se comienza a contar de derecha a izquierda (Figura 11), por lo que lo confunden con el lugar de una cifra que se comienza a contar de izquierda a derecha.

Figura 11

Respuesta a la pregunta 1 de la actividad 4

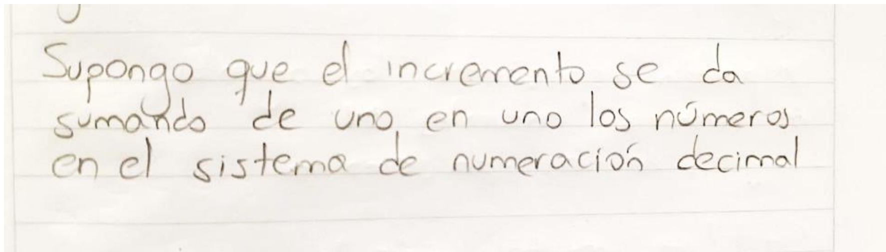


Nota: En la imagen se muestra la respuesta de uno de los estudiantes a la primera pregunta.

Por otro lado, hubo confusiones por parte de algunos estudiantes en la respuesta a la segunda pregunta; una estudiante responde que "*el incremento se da dependiendo del orden de la cifra, entre más a la izquierda esté esta, mayor será su valor*" teniendo en cuenta las *definiciones y significados* (KoT) del orden de las cifras en los sistemas de numeración. Sin embargo, otros estudiantes entendieron la pregunta de otra manera, indicando que para incrementar el orden de una cifra había que sumar (KSM, *conexiones auxiliares*) hasta llegar al valor máximo que se puede representar en ese orden y así cambiaría su lugar (Figura 12).

Figura 12

Respuesta a la pregunta 2 de la actividad 4

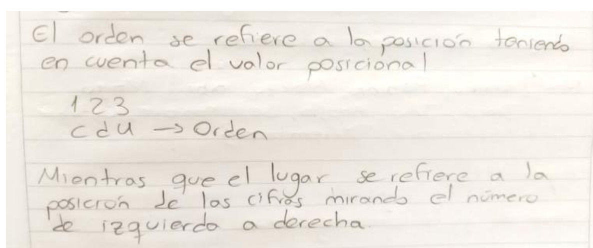


Nota: Se muestra en la imagen la respuesta de un estudiante que expresa como sumando se puede aumentar el orden de una cifra.

En coherencia con lo mencionado previamente, los estudiantes confunden el orden con el lugar de las cifras, por lo que se observa que no tienen muy claras las *definiciones* (KoT*)* de estos dos conceptos. Tres de los participantes responden que el orden y el lugar no tienen diferencias ya que ambos indican en donde están colocadas las cifras en el número.

Figura 13

Respuesta de la pregunta 3 en la actividad 4



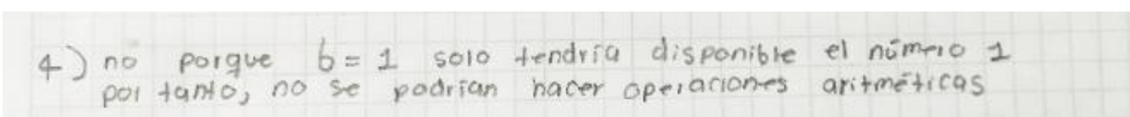
Nota: La imagen muestra la respuesta de un estudiante identificando las diferencias entre el orden y el lugar de una cifra.

Por otro lado, como se observa en la Figura 13 un estudiante deja claro el concepto (KoT, *definiciones*) de orden a través de su respuesta y establece que la diferencia entre el orden y el lugar de una cifra se da porque el orden está especificado por el valor al que se eleva la potencia de 10 de cada cifra dependiendo de su valor posicional como son: unidades, decenas, centenas, etc (KSM, *conexiones auxiliares*)*;* mientras que indica que el lugar está dado por la posición que ocupa la cifra contando de izquierda a derecha sin tener en cuenta ningún otro factor.

En respuesta a la pregunta cuatro, la mayor parte de los estudiantes conocen las *propiedades* y el *significado* (KoT) de la base en los sistemas de numeración, contestando que "*Si se puede crear un sistema de numeración en base 1, solo que este no sería eficiente ya que solo se utilizaría un símbolo para todos los números, lo que dificultaría su escritura*". Un estudiante en particular responde que no se puede crear un sistema de numeración con base 1 (Figura 14), porque no se podrían realizar operaciones en ese sistema al solo tener un símbolo, no teniendo en cuenta el *significado y las propiedades* de un sistema de numeración (KoT) ni las *conexiones* con las operaciones básicas en los sistemas de numeración (KSM, *conexiones auxiliares*), puesto que, si es posible realizar operaciones en un sistema de numeración con base 1, pero la representación sería ineficiente por la cantidad de símbolos que hay que colocar para los números muy grandes.

Figura 14

Respuestas de un estudiante a la pregunta 4 en la actividad 4

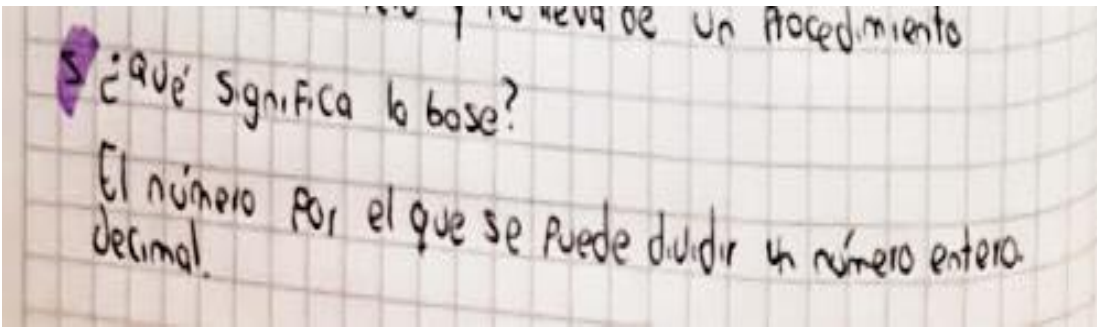


Nota: La figura muestra las respuestas de un estudiante a las cinco preguntas de la actividad 4.

Por último, hubo algunos estudiantes que no conocían lo que significaba la base de un sistema de numeración, esto debido a que en sus experiencias y conocimientos previos de trabajar con bases numéricas (KoT, *fenomenología*) no habían comprendido en realidad este concepto. Por lo anterior, estos estudiantes dieron como respuesta (Figura 15) que la base significa el número por el cual se puede dividir un número entero en base 10, por lo que se observa que tienen algunas dificultades en las *definiciones y propiedades* de los sistemas de numeración (KoT).

Figura 15

Respuesta de la pregunta 5 en la actividad 4



Nota: La figura muestra la interpretación de un estudiante sobre el significado de la base de un sistema de numeración.

Realizando una síntesis de la sesión, se observan que los estudiantes presentan aún dificultades para la comprensión total de los conceptos de los estudiantes, como, por ejemplo, en la utilización de los símbolos para representar los números en el sistema maya. También, se pudo observar que a los participantes se les dificulta el proceso de resolución de algunas operaciones aritméticas básicas (la resta) en un sistema de numeración diferente al decimal. Además, tienen algunos vacíos conceptuales al suponer transferencias a otros sistemas de numeración, por ejemplo, suponer que no es posible construir un sistema de numeración en base 1. Se destaca como acierto que la mayor parte de los estudiantes reconocen con facilidad cómo representar un número en el sistema de numeración egipcio. Por otro lado, comprenden las operaciones de la suma en ambos sistemas y algunos de los participantes tienen claros los conceptos sobre el orden de las cifras y la base de un sistema.

5.2. Tutoría 2-Corte 1

Sub-Dominio	**KoT**	• Propiedades y definiciones • Registros de representación
	KSM	• Conexiones auxiliares • Conexiones basadas en la simplificación
	KPM	• Formas de validación y demostración • Uso del lenguaje formal
Fecha		25 de abril de 2023
Objetivos		• Reconocer los conjuntos numéricos (naturales, enteros y reales). • Realizar operaciones básicas en cada conjunto numérico. • Utilizar la recta numérica para representar la posición de los números reales.

La tutoría inicia con una actividad que pretende que los estudiantes logren identificar el tipo de problema a resolver (KPM, *forma de proceder en la resolución de problemas*) y encontrar por lo menos una manera de solucionarlo y validarlo. Además de, distinguir en este problema qué tipos de conjuntos se pueden formar con los datos proporcionados.

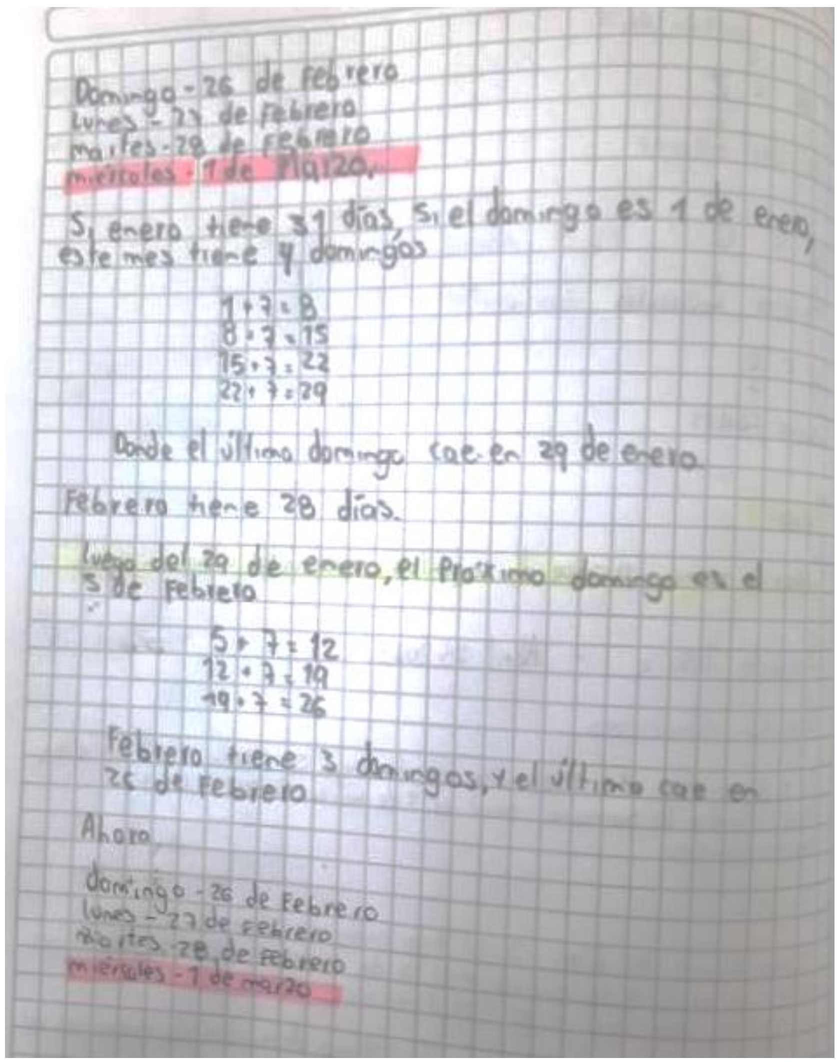
5.2.1. Actividad 1- Problema divisibilidad

El 1 de enero de 2023 es un domingo. Si febrero tiene 28 días, ¿qué día de la semana será el 1 de marzo de 2023?, da tus razonamientos. Identifica que conjuntos se pueden formar en este problema.

De los estudiantes que fueron participes de esta actividad, la mayoría resolvió el problema sin ningún inconveniente, se destaca los *procedimientos* (KoT) y las *formas de validación* (KPM) que utilizaron para llegar al resultado correcto.

Figura 16

Validación al problema de un estudiante en la actividad 1



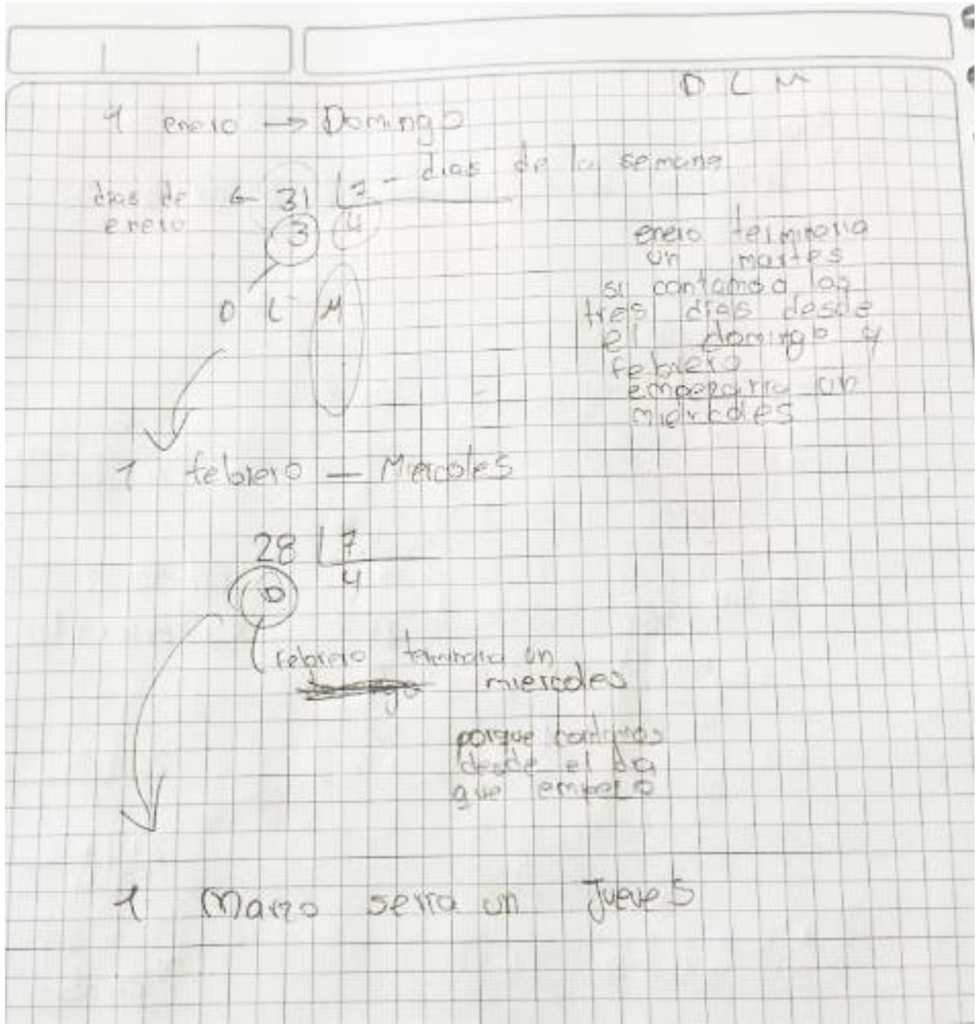
Nota: La figura muestra el razonamiento de un estudiante para resolver el problema de la actividad 1.

En la Figura 17 se observa la *forma de proceder* (KPM) de un estudiante, quién primero analiza cuantos días tiene el primer mes (en este caso Enero), como se observa empieza a sumar 7 días (KoT, *procedimientos*) desde el día 1 para encontrar cuál sería el último domingo del mes, luego cuenta cuando sería el próximo domingo para empezar a hacer las sumas reiterativas en el siguiente mes, llegando a la conclusión. Con lo anterior se verifica que el estudiante conoce y aplica las operaciones básicas (KoT, *propiedades*) en su resolución teniendo en cuenta las *conexiones auxiliares* con las que simplifica el problema (KSM).

Otros estudiantes utilizaron diversas maneras para el desarrollo de la resolución del problema, los *procedimientos* (KoT) más comunes fueron: i) Escribir todo el calendario y ver qué día cae el 1 de marzo de 2023; ii) Realizar sumas reiterativas de 7 en 7 para llegar al día buscado; iii) Multiplicar el número de días de la semana por la cantidad de semanas que tiene cada mes, teniendo en cuenta las *propiedades* de la multiplicación (KoT); y, iv) Dividir la cantidad de días de cada mes entre el número de días de una semana, aplicando algoritmo de la división (KSM, *conexiones transversales*). Se destaca que solo hubo un estudiante que aplicó el algoritmo de la división, sin embargo, a pesar de haber realizado la operación correctamente, dio la respuesta incorrecta debido a una interpretación errónea en la *validación* (KPM) de su resultado (Figura 17).

Figura 17

Resolución del problema de un estudiante utilizando algoritmo de la división

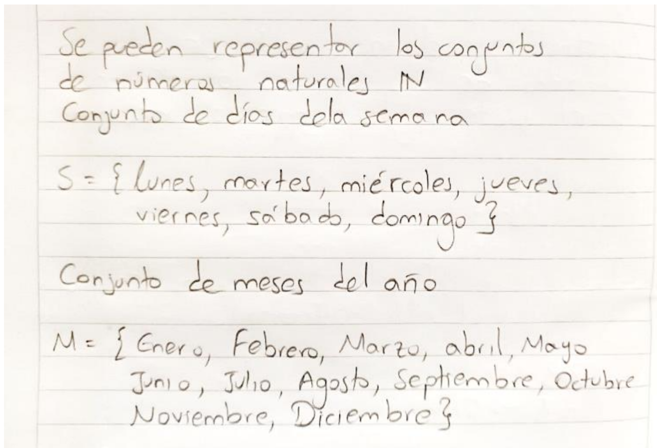


Nota: La figura muestra el proceso de un estudiante usando la división para encontrar la solución al problema propuesto.

Por último, los estudiantes lograron identificar diferentes conjuntos que se pueden formar en este problema, entre ellos están: i) Conjunto de los números naturales; ii) Conjunto de los meses del año; iii) Conjunto de los días de la semana; iv) Conjunto de los días del mes; representándolos gráficamente por extensión como se ve en la Figura 18. Vale la pena recordar que el tema de *conjuntos y sus propiedades* se habían tratado previamente en clase (KoT, *fenomenología*).

Figura 18

Representación de los conjuntos encontrados en la actividad 1



Nota: En la imagen se muestra la representación de los conjuntos que un estudiante logró identificar en el problema de la actividad 1.

Para la segunda actividad se propone el problema basado en las condiciones de un sorteo, el cual tiene como fin que los estudiantes identifiquen, en primer lugar, cómo repartir una unidad en partes iguales, es decir, interpretar la fracción como una relación parte-todo (KoT, *propiedades*). Además, reconocer el conjunto de los números racionales, cómo se escriben estos números y cómo estos se representan en la recta numérica.

5.2.2. Actividad 2-Problema divisibilidad

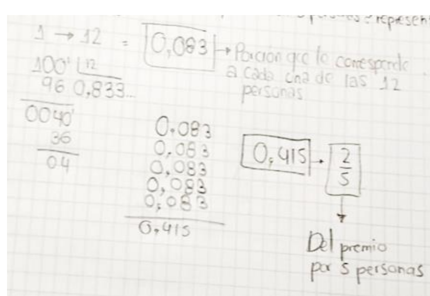
En una rifa el premio se reparte entre 12 individuos. ¿Qué trozo de la premiación debe recibir cada individuo? ¿Qué fracción pertenece a lo que les toca a 5 individuos? Simboliza los resultados en la recta numérica.

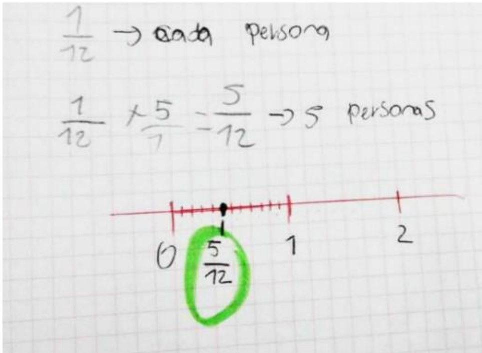
En un principio se observa, entre las evidencias presentadas, que los estudiantes que participaron en la sesión lograron responder a la primera pregunta de manera correcta (Figura 19.a). Muestran que para conocer cuál parte del premio le corresponde a cada una de las doce personas en el sorteo, dividen la unidad entre doce (KoT, *procedimientos*), obteniendo como resultado $\frac{1}{12} = 0{,}0833$, mostrando su conocimiento acerca de la relación parte-todo (KoT, *propiedades y definiciones*) dividiendo el premio en partes iguales y sobre cómo representar fracciones como números con decimales (KSM, *conexiones transversales*).

Por otro lado, en la respuesta a la segunda pregunta se observan diferentes *procedimientos* (KoT) en la resolución del problema. Como se observa en la Figura 19.a, el estudiante suma cinco veces el número 0,083 para así obtener que porción de la fracción les corresponde a las cinco personas, sin embargo, no tuvo en cuenta que al realizar la suma de los números en su expresión decimal se pierden decimales (KoT, *definiciones*), luego el resultado es un aproximado de la fracción completa. Otros estudiantes, tomaron la fracción $\frac{1}{12}$ y la multiplicaron por cinco, lo que les dio como resultado $\frac{5}{12}$, simplificando el problema a una sola operación (KSM, *conexiones basadas en la simplificación*) como se observa en la Figura 19.b.

Figura 19

Respuestas de dos estudiantes a las preguntas de la actividad 2

a. 

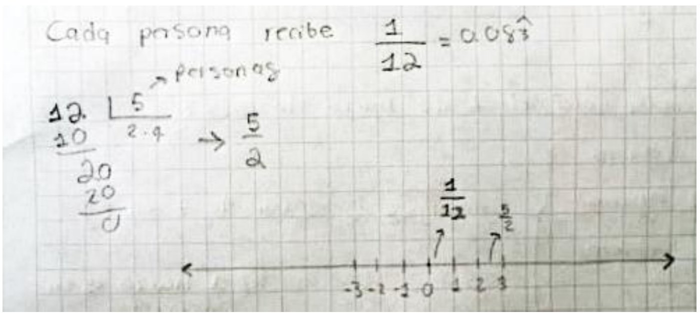
b. 

Nota: Las figuras muestran las respuestas establecidas por dos estudiantes utilizando diferentes procedimientos.

Por otro lado, dos de los estudiantes interpretaron la segunda pregunta de una forma diferente. Para este caso, los dos estudiantes tuvieron en cuenta que el premio se iba a repartir solamente entre cinco personas, por lo que dividieron la unidad entre cinco, obteniendo como respuesta $\frac{1}{5}$ y otros resultados que se observan como $\frac{5}{2}$ al ejecutar de manera equivocada el algoritmo de la división (KSM, *conexiones auxiliares*) realizando una interpretación errónea de la pregunta en cuestión (Figura 20).

Figura 20

Respuesta desacertada de un estudiante a la segunda pregunta de la actividad 2



Nota: La imagen muestra la división realizada por un estudiante para encontrar la respuesta.

Por último, los estudiantes comprenden las *propiedades* (KoT) de los números racionales y cómo estos se pueden ubicar en la recta numérica (Figura 19.b y Figura 20) independientemente del *registro de representación* (KoT) que estén utilizando para estos números, sea fraccionario o su expresión decimal.

La tercera actividad consiste en dos preposiciones (Actividad 3) donde se busca que los estudiantes logren el reconocimiento de las *propiedades* (KoT) de los números reales para así validar (KPM, *formas de validación y demostración*) una respuesta correcta justificándola ya sea con una demostración, si esta es verdadera, o con un contraejemplo, si esta es falsa.

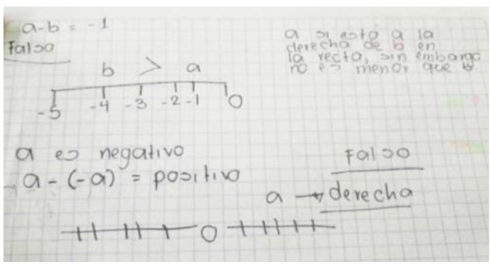
5.2.3. Actividad 3- Razonamiento sobre propiedades de los reales

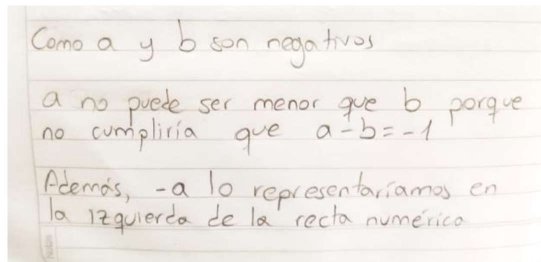
Si las siguientes preposiciones son verdaderas explica por qué, de lo contrario, escribe un contraejemplo *Si* $x, y \in \mathbb{R}$ *negativos y* $x - y = -1$*, entonces* $x < y$ *y* x *está en la parte de la derecha de* y *en la recta numérica.* *Si* $x \in \mathbb{R}$ *negativos,* $-x$ *lo representamos en la recta numérica al lado izquierdo de 0 (cero).*

Los estudiantes tuvieron diferentes dificultades para dar con las respuestas correctas para *demostrar* (KPM) si las dos preposiciones eran verdaderas o falsas. En primer lugar, se destacan las respuestas de dos de los participantes, quienes lograron ver que cómo los números a y b son reales negativos, esto quiere decir que, para que la operación a menos b sea igual a -1, el valor de a tiene que ser menor que b (Figura 21.a) teniendo en cuenta el orden de los números reales (KoT, *propiedades*). Así mismo, dieron cuenta de su razonamiento explicando que, para la segunda preposición, el valor $-a$ tenía que estar a la derecha del 0 en la recta numérica, puesto que como el valor de a ya es negativo si se le multiplica por -1 este quedaría positivo (KSM, *conexiones auxiliares*). Uno de los estudiantes demuestra que las preposiciones son falsas utilizando *lenguaje formal* (KPM) y el otro dando contraejemplos.

Figura 21

Soluciones de dos estudiantes a la actividad 3

a. 

b. 

Nota: Las imágenes muestran la respuesta correcta (a) y la respuesta incorrecta (b) de dos estudiantes participantes.

Descartando a los dos estudiantes que demostraron las preposiciones de manera correcta, en general los demás partícipes de la sesión tuvieron el mismo error al momento de entender que los números dados eran negativos, como se puede ver en la Figura 20b. Inicialmente tienen confusiones con lo que respecta al orden de los números reales (KSM, *conexiones auxiliares*) cuando se ubican en la recta numérica, esto queda evidenciado en la respuesta otorgada por uno de los estudiantes donde dice que "$-2 > -1$". Por otro lado, uno de los estudiantes no asimilaba el por qué si a era un número real negativo entonces $-a$ era positivo, mostrando conflictos en la comprensión del concepto (KoT, *definiciones*) de los números reales negativos no entendiendo que el negativo de un número negativo es positivo; esto puede darse porque el estudiante no está familiarizado con las *propiedades* (KoT) de los números reales.

Haciendo una recapitulación de la segunda sesión, se puede valorar la sesión desde diversas perspectivas, a lo largo del desarrollo de la tutoría. Inicialmente se pudo observar que los estudiantes conocen los conjuntos numéricos, ya que son capaces de identificarlos en un problema en donde no están explícitos.

También se puede ver que comprenden el conjunto de los números reales y las operaciones que se pueden realizar en este, además de entender la manera correcta de ubicar los números reales dependiendo de su orden. Cabe resaltar que también, las dificultades hicieron parte del desarrollo de la tutoría. Algunos estudiantes se les dificulta el trabajo con números reales negativos cuando se les dice que a puede ser cualquier número perteneciente a este conjunto. Por lo anterior, se buscó otra manera de explicar las propiedades de dichos números con ejemplos puntuales para poder llegar a generalizar para cualquier número del conjunto.

5.3. Tutoría 3- Corte 2

Sub-Dominio	**KoT**	• Definiciones, propiedades y significados • Registros de representación
	KSM	• Conexiones auxiliares • Conexiones basadas en la simplificación
	KPM	• Formas de validación y demostración • Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas • Uso del lenguaje formal
Fecha		09 de mayo de 2023
Objetivo		• Identifica los conjuntos numéricos. • Soluciona problemas sobre conjuntos. • Comprende las operaciones entre conjuntos como la unión, intersección y complemento. • Soluciona problemas de divisibilidad entendiendo que propiedades deben cumplir los números para que sean divisibles entre otros.

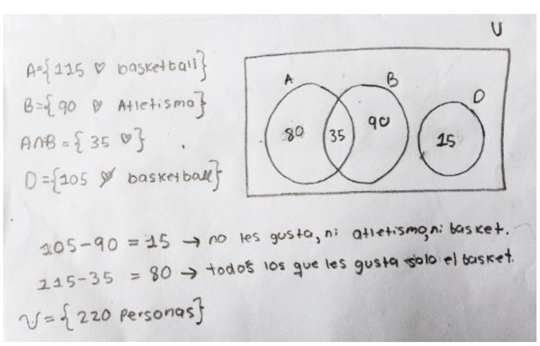
Para la primera actividad de la tercera sesión de tutorías, se propuso el siguiente problema. Con este se indaga en las concepciones de los estudiantes acerca de los conjuntos numéricos para dar cuenta de las operaciones que pueden realizar entre estos. Además, se quiere observar de qué manera los estudiantes proceden en la *resolución de problemas* y qué *formas de validación* (KPM) utilizan para dar sus respuestas.

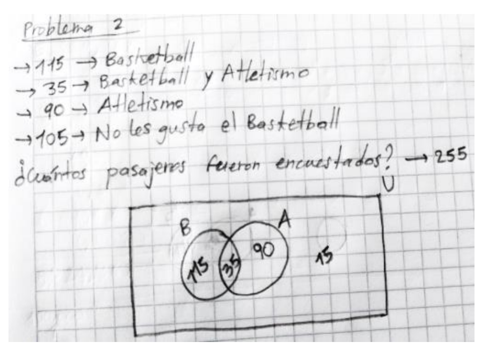
5.3.1. Actividad 1 - Conjuntos

Se realiza una encuesta a los pasajeros de un tren, sobre los deportes que prefieren. Las respuestas son las siguientes: *- Basquetbol le gusta A 115.* *- Basquetbol y Atletismo les gusta A 35.* *- Solamente Atletismo le gusta a 90* *- El total de personas son 105 las cuales no les gusta el Basquetbol* *Se pregunta lo siguiente: ¿A cuántos pasajeros se les hizo la encuesta en el tren?* *Identifica que conjuntos se forman en este problema y encuentra la intersección de los conjuntos y el complemento de cada conjunto.*

Figura 22

Respuestas de dos estudiantes al problema de la actividad 1

a. 

b. 

Nota: En la figura se muestra la respuesta de un estudiante donde identifica cada conjunto del problema.

Los estudiantes que participaron en esta sesión no tuvieron inconvenientes para establecer los conjuntos con los que iban a trabajar en este problema. Como se puede ver en la Figura 22a, se determinan los conjuntos de basquetbol y atletismo, teniendo en cuenta las *propiedades* y *definiciones* (KoT) escribiéndolos por comprensión y en su *representación* en diagrama de Venn, también establecen la intersección entre estos dos conjuntos, además del conjunto universal.

Se destaca la respuesta del estudiante en la Figura 22a dado que no tiene en cuenta que en el conjunto B (atletismo), toma simplemente las 90 personas que solo les gusta el atletismo, sin embargo, no presenta que en ese conjunto también están incluidas las personas que les gusta el atletismo y el basquetbol, obviando las *propiedades* (KoT) del conjunto intersección.

Por otro lado, representa el conjunto de las personas que no les gusta el basquetbol con la letra D, a pesar de esto, no tiene en cuenta que dicho conjunto es el complemento de A, sino que lo toma como un conjunto aparte, lo que da a pensar que las *definiciones* y *significados* (KoT) sobre el complemento de un conjunto aún no están claras en sus concepciones. A pesar de lo anterior, utiliza operaciones básicas (KSM, *conexiones auxiliares*) como la resta para determinar la cantidad de personas que no les gusta ningún deporte, para así poder responder a la pregunta del problema y dejar en claro que la cantidad de personas encuestadas en el tren fueron 220, *representando* este como el conjunto universal.

Por último, hubo varios estudiantes que hicieron una interpretación equivocada del problema (Figura 22b), puesto que tomaron que las 115 personas del conjunto que les gustaba el basquetbol no iban incluidas junto al conjunto de las personas que les gustaba el basquetbol y el atletismo. Por lo anterior, al intentar encontrar cuantos pasajeros había en el tren y *validar* (KPM) su respuesta, sumaron las cantidades tal cual las daba el problema lo que generó que en su respuesta encontraran un número diferente.

En la segunda actividad se busca que los estudiantes logren resolver las operaciones entre conjuntos presentadas. Para esto, es necesario que en primer lugar escriban cada conjunto por extensión, además, si les es conveniente para facilitar las operaciones (KSM, *conexiones basadas en la simplificación*), lo representen en un diagrama de Venn (KoT, *registros de representación*).

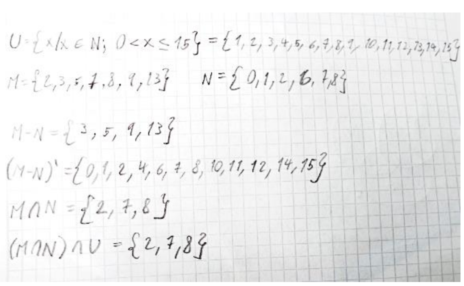
5.3.2. Actividad 2- Representación de conjuntos

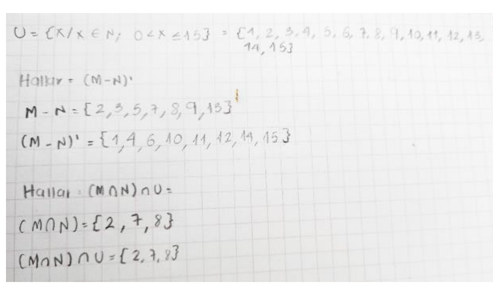
Dados los conjuntos
$U = \{x \mid x \in \mathbb{N}: 0 < x \leq 15\} = \{\ \}$ $M = \{2,3,5,7,9,13\}$ $N = \{0,1,2,6,7,8\}$
Hallar
$M - N; (M - N)'; M \cap N; (M \cap N) \cap U$

En general se observó que los estudiantes tienen muy claro el concepto de *representación* de un conjunto por extensión (KoT, *definiciones*) y como pasar de un registro a otro, debido a que todos consiguieron expresar el conjunto U de manera correcta. A pesar de esto, algunos de los participantes no realizaron la *representación* en diagrama de Venn, pues no lo consideraron necesario para realizar las operaciones entre los conjuntos.

Figura 23

Respuestas de dos estudiantes a la actividad 2 sobre conjuntos

a. 

b. 

Nota: Las figuras muestran la respuesta correcta (a) e incorrecta (b) de las operaciones entre los conjuntos.

Se puede observar en la Figura 23.a que el estudiante representa todos los conjuntos por extensión y, seguidamente, realiza las operaciones respectivas para cada conjunto. Se evidencia que comprende los *significados* y las *propiedades* (KoT) de los conjuntos y las operaciones de resta de conjuntos y las intersecciones ya que interpreta de manera correcta los pasos que debe ejecutar para llegar a la respuesta deseada. Por otro lado, de acuerdo con lo que se ve en la Figura 23.b, el estudiante no realiza correctamente la resta de los conjuntos M y N, lo que le lleva a un resultado errado. Lo anterior puede haber ocurrido debido a la falta de entendimiento de los conceptos (KoT, *definiciones*) relacionados a la resta de conjuntos o, tal vez, a un error en la identificación de los elementos que se localizan en ambos conjuntos, lo que lo lleva a omitir o incluir números que no hacen parte del resultado.

Para finalizar, se resaltan dos casos en particular que sucedieron en la resolución de esta actividad y manifestó dos aspectos importantes sobre las concepciones que tenían los estudiantes sobre las *propiedades* (KoT) de los conjuntos y sus operaciones: i) El primer caso, algunos de los partícipes pensaron que el conjunto U era el conjunto universal, solamente por el nombre que este lleva, lo que los llevó a una confusión al momento de representar el complemento de la resta entre M y N; ii) En el segundo caso, una parte de los asistentes en la sesión dieron a entender que no conocían la *representación* (KoT) del apostrofe (‘) para referirse al complemento de un conjunto, dando a entender que solo habían trabajado con la (c) para dar cuenta de este objeto matemático, lo que igualmente dificultó en un comienzo la resolución del problema.

5.3.3. Actividad 3- Validación de enunciados

La actividad tres consiste en una pregunta sobre divisibilidad, donde los estudiantes deben buscar una forma para *demostrar* y *validar* su respuesta (KPM) para así proceder en la resolución del problema planteado.

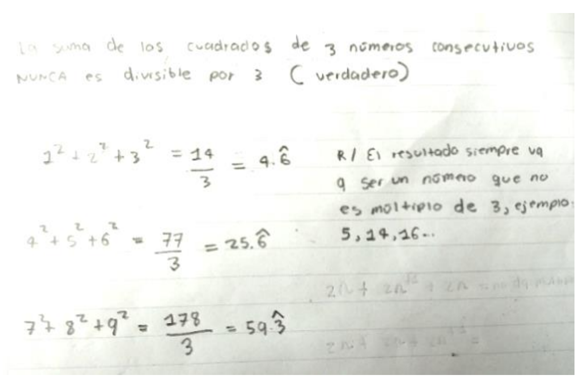
Sumar tres números enteros consecutivos, cada uno al cuadrado, nunca es divisible entre tres
Si es verdadero diga ¿por qué?
Si es falso de un contra ejemplo

Además, tienen que dejar en claro sus concepciones con una demostración si la respuesta es verdadera o con un contraejemplo si es falsa. En términos generales, todos los estudiantes que estuvieron involucrados en la sesión no validaron (KPM, *formas de validación*) el problema con una demostración para dejar evidenciado que la respuesta es verdadera. Por el contrario, lo que realizaron los estudiantes fueron diferentes ejemplos puntuales con los que notaron un patrón (KPM, *procesos asociados a la resolución de problemas*), el cual era que ninguna suma de tres números enteros consecutivos al cuadrado iba a ser divisible entre tres (Figura 24).

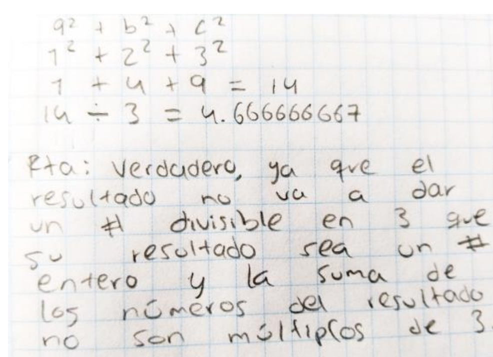
Figura 24

Respuesta de un estudiante en la actividad 3

a.



b.



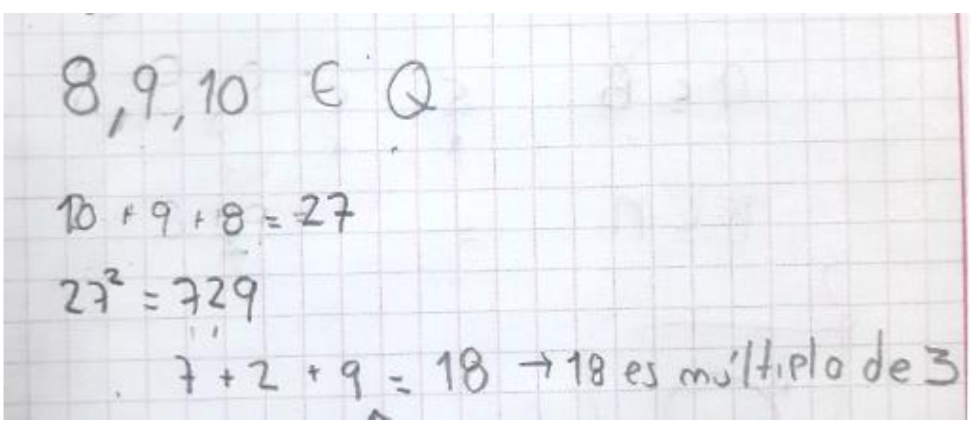
Nota: Las figuras muestran el procedimiento utilizado por dos estudiantes para validar su respuesta.

Como se observa en la Figura 24.a, el estudiante da tres ejemplos en los cuales proporciona tres números enteros consecutivos, los eleva al cuadrado y los suma, luego a las respuestas las divide y así se da cuenta que el número resultante no es divisible entre tres. Es importante tener en cuenta que en su razonamiento explica que el número final no es divisible entre tres porque no es múltiplo de este mismo, es decir si $a|b$, entonces $a = bk$, donde: $k \in \mathbb{Z}$ dejando claro su conocimiento acerca de la divisibilidad de los números con respecto a su multiplicidad (KSM, *conexiones auxiliares*).

Por otra parte, algunos estudiantes dan a entender que el número que se genera de sumar los tres números al cuadrado consecutivos no es divisible entre tres debido a su naturaleza no entera (Figura 24.b), dejando en claro su comprensión acerca de las *propiedades* (KoT) de la divisibilidad.

Figura 25

Interpretación de un estudiante sobre el problema



Nota: La figura muestra la interpretación de un estudiante al problema planteado.

Como se puede ver en la Figura 25, se hizo una interpretación equivocada del problema, ya que el participante entendió que primero era necesario sumar los tres números consecutivos que se daban y luego elevar al cuadrado el resultado obtenido para después dividirlo. Teniendo en cuenta este razonamiento la respuesta es falsa, puesto que la suma de tres números consecutivos siempre da como resultado un número que es múltiplo de tres. Por lo anterior, resultó necesario realizar una socialización de la pregunta en cuestión para que todos los estudiantes participantes de la sesión entendieran cómo interpretar correctamente el enunciado.

De manera general, se observaron puntos positivos y algunas dificultades en la sesión. Entre los aciertos más destacables se encuentran los conocimientos sobre las *propiedades* y *definiciones* (KoT) acerca de los conjuntos numéricos. Además, los participantes demostraron comprender las operaciones entre conjuntos y cómo relacionar sus resultados con conceptos previamente estudiados, como las representaciones decimales de los números racionales (KSM, *conexiones auxiliares*).

No obstante, se identificaron algunas áreas para mejorar. Por un lado, algunos estudiantes no estaban familiarizados con representaciones como las del complemento de un conjunto. Por otro lado, se cometieron errores al intentar interpretar los problemas y al trasladar información de las palabras al lenguaje matemático (KPM, *uso del lenguaje formal*).

5.4. Tutoría 4- Corte 2

Sub-Dominio	**KoT**	• Procedimientos • Definiciones y propiedades • Registros de representación
	KSM	• Conexiones basadas en la simplificación • Conexiones auxiliares

KPM	• Formas de proceder en matemáticas • Formas de validación • Uso del lenguaje formal • Procesos asociados a la resolución de problemas
Fecha	16 de mayo de 2023
Objetivo	• Resuelve problemas relacionados con divisibilidad. • Comprende como encontrar el mínimo común múltiplo de un grupo de números para operar con estos. • Realiza operaciones básicas con números racionales y hace comparaciones entre ellos (<, > o =).

La cuarta sesión de tutoría se planteó para revisar los temas sobre criterios de divisibilidad y operaciones con números reales. Para la primera actividad, se proponen dos problemas en los que el estudiante debe conocer las *propiedades* (KoT) de los criterios de divisibilidad del 12 y del 9 para poder dar respuesta a las preguntas.

5.4.1. Actividad 1- Divisibilidad

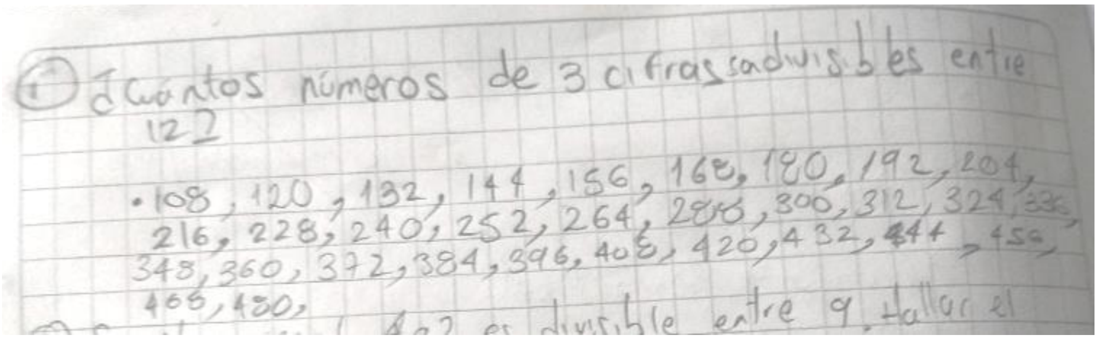
1. ¿Cuántos números de 3 cifras son divisibles entre 12?

2. Si el numeral 4a2 es divisible entre 9. Hallar el valor de a

En términos generales, gran parte de los estudiantes que estuvieron en la tutoría no lograron resolver el primer problema. Se observó que algunos tienen dificultades para solucionar problemas en los que se involucran muchos números, como es el caso del primer punto. Del mismo modo, se ve que proponen diferentes soluciones (KPM, *formas de proceder en matemáticas*) utilizando pensamientos inductivos sobre la situación que se está trabajando.

Figura 26

Respuesta de un estudiante al primer punto en la actividad 1

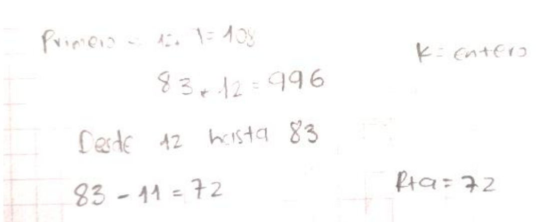


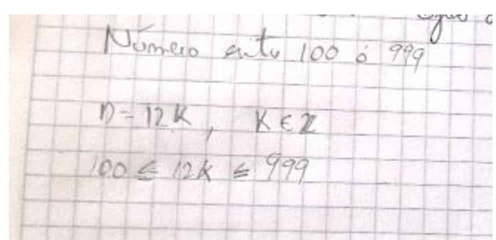
Nota: En la figura se observa el proceso inductivo que utiliza el estudiante para resolver el problema.

Al observar la Figura 26, se evidencia el procedimiento que utiliza uno de los estudiantes, que consiste en escribir todos los múltiplos de 12 que están comprendidos entre el 100 y el 999. No obstante, este procedimiento es ineficiente, ya que no logra llegar hasta el total de números que se querían encontrar. Por lo anterior se puede ver qué, el estudiante tiene un alto conocimiento sobre los múltiplos de un número (KoT, *propiedades y definiciones*), sin embargo, no maneja algún procedimiento o criterio el cual le permita simplificar el problema (KSM, *conexiones basadas en la simplificación*).

Figura 27

Respuestas de dos estudiantes al punto 1 de la actividad 1

a. 

b. 

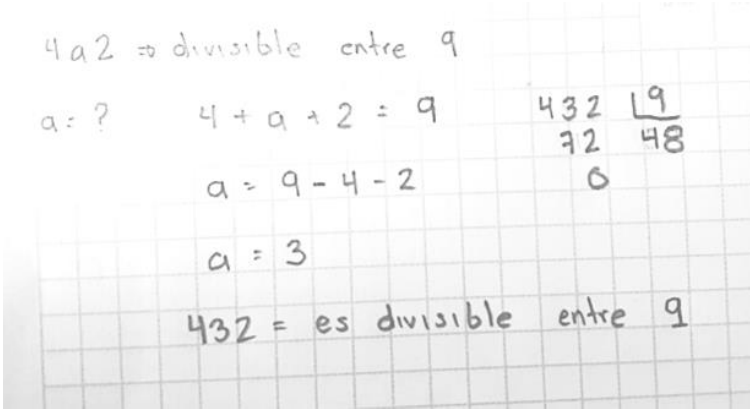
Nota: La figura muestra el análisis realizado por dos de los estudiantes.

Dos de los estudiantes que participaron en la tutoría utilizaron diferentes métodos para encontrar con la respuesta y validarla (KPM, *formas de validación*). Como se evidencia en la Figura 27.a, el estudiante encuentra cuál es el múltiplo de 12 más pequeño y más grande de tres cifras utilizando la multiplicación (KSM, *conexiones auxiliares*). Sin embargo, al momento de dar la respuesta, realiza la resta de 83 menos 11, obteniendo como resultado 72 números; esto pudo ser debido a una confusión en la toma de los números con los que iba a operar, dado que el procedimiento correcto debía de haber sido tomar 83 restarle 9 y sumarle 1 para obtener los 75 números de tres cifras que son divisibles entre 12.

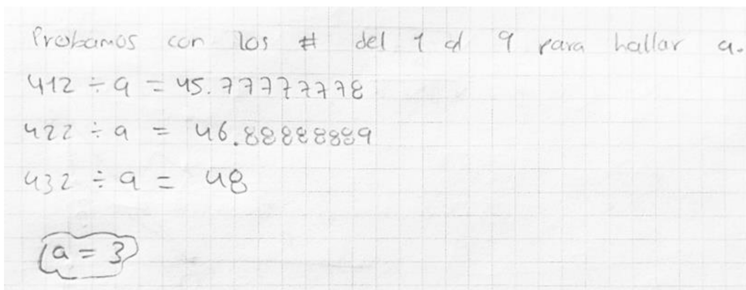
Por otro lado, como se ve en la Figura 27.b, el estudiante emplea un procedimiento deductivo para reconocer cuáles son los números múltiplos de 12 que se encuentran entre 100 y 999, planteando la siguiente desigualdad $100 \leq 12k \leq 999$, donde expone que $k \in \mathbb{Z}$ teniendo en cuenta el conjunto numérico donde se está trabajando (KSM, *conexiones auxiliares*). A pesar de los anterior, el estudiante no terminar de resolver el problema, por lo que no llega a una respuesta. Se destaca que los estudiantes conocen el criterio de divisibilidad para el número 12, debido a que explican que para conocer si un número es divisible entre 12 este tiene que ser divisible entre 3 y entre 4 (KoT, *propiedades y definiciones*); sin embargo, los participantes que escribieron esto en sus respuestas, no llegaron a ninguna conclusión.

Figura 28

Respuestas de dos estudiantes al punto 2 en la actividad 1 *a.*



b.



Nota: La figura muestra la resolución al punto 2 utilizando el criterio de divisibilidad del 9.

Para el segundo problema, los estudiantes no tuvieron dificultades para encontrar la solución, ya que conocían de antemano el criterio de divisibilidad del número 9 (KoT, *propiedades*) el cual indica que "un número es divisible entre nueve si la suma de sus cifras es múltiplo de 9". Por lo que, todos los estudiantes lograron solucionar este problema. En la Figura 28a se puede ver la respuesta de uno de los participantes en donde aplica los conceptos (KoT, *definiciones*) sobre los criterios de divisibilidad, más en específico el del nueve, sumando las cifras y encontrando una ecuación para obtener el valor de a (KSM, *conexiones auxiliares*). Además, se puede observar que para comprobar si su resultado es correcto, utiliza el algoritmo de la división (KSM, *conexiones auxiliares*) con el que *valida* su respuesta. Por último, se destaca la respuesta de uno de los estudiantes en particular que utiliza el método de ensayo y error (KPM, *proceso asociado a la resolución de problemas*), donde prueba números entre el 1 al 9 para encontrar el valor de a concluyendo en que este es 3 (Figura 28.b).

Para la segunda actividad, se presentan dos problemas de divisibilidad donde los estudiantes deben conocer cómo encontrar los divisores de un número y, además, cómo hallar el mínimo común múltiplo de un grupo de números. Con este problema se quiere explorar las concepciones que tienen los estudiantes y de qué manera interpretan y proceden en la *resolución de problemas* (KPM).

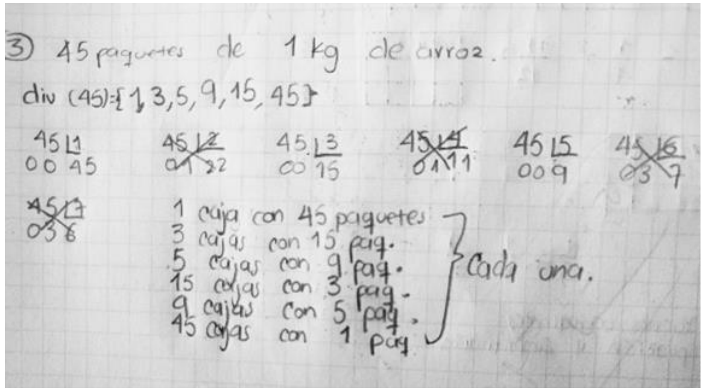
5.4.2. Actividad 2- Resolución de problemas

1. En un local se tienen 45 empaques de 1 kg de arroz. Se deben empacar en cajas, todas iguales, y que no falte ningún paquete. ¿Cuáles son todas las posibles soluciones? *2. Un poste de luz se prende cada 18 segundos, otro en intervalos de 36 segundos y un tercero se repite cada minuto. A las 6:30 de la tarde los tres postes de luz concuerdan. ¿Cuántas veces prenderán al mismo tiempo en los próximos cinco minutos?*

No se evidencian dificultades en el desarrollo de la segunda actividad. Los estudiantes comprenden los enunciados y buscan diferentes formas para la resolución de los problemas planteados (KPM, *procesos asociados a la resolución de problemas*). En la primera pregunta, se observa que todos los estudiantes comprendieron que había la necesidad de encontrar los divisores del número 45 (KSM, *conexiones auxiliares*) para hallar la respuesta correcta.

Figura 29

Respuesta a la pregunta 1 de la actividad 2



Nota: En la figura se puede ver el proceso de resolución del problema de un estudiante.

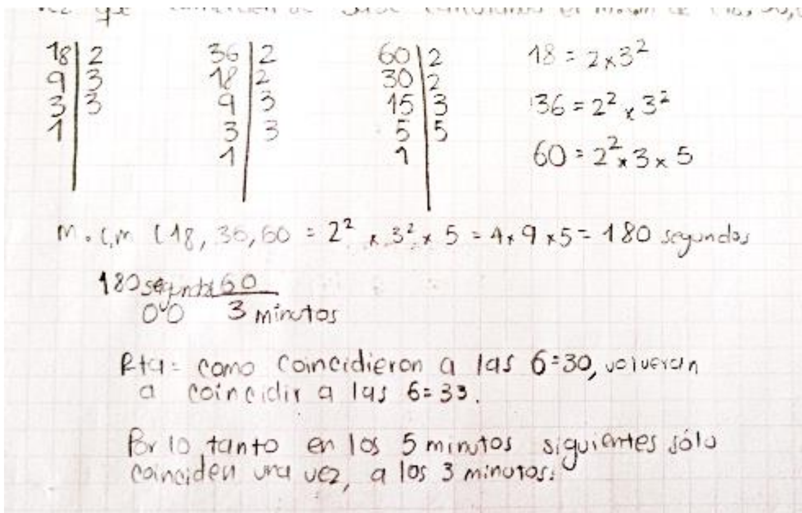
En las evidencias presentadas, no se logra determinar que procedimientos utilizaron la mayor parte de los estudiantes, simplemente colocaron las respuestas correctas, demostrando que debían encontrar los divisores de 45. Sin embargo, en la Figura 29 se puede ver cómo uno de los participantes comprueba utilizando el algoritmo de la división (KSM, *conexiones auxiliares*) cuáles números son adecuados para que las cajas tengan una cantidad exacta de paquetes de arroz en ellas sin que sobren, es decir, encontrar un número que divida 45 de tal manera que su residuo sea 0.

Por otro lado, los estudiantes en la segunda pregunta presentaron dos diferentes soluciones. Cómo se puede observar en la Figura 30.a, el estudiante, en un primer momento, hace conversiones para representar (KoT, *registros de representación*) los minutos en segundos y así trabajar el problema en las mismas unidades de medida (KSM, *conexiones auxiliares*). Seguido a esto, descompone los tres números (18, 36 y 60) en factores primos para hallar el mínimo común múltiplo entre ellos (KoT, *procedimientos*). Por último, para dar con la respuesta correcta, toma el mínimo común múltiplo encontrado, el cuál es 180, y lo divide entre 60 para convertir los segundos en minutos y así llegar a la conclusión de que los faros vuelven a coincidir luego de 3 minutos, dejando claro el uso de las conexiones entre las conversiones de unidades y la divisibilidad entre números (KSM, *conexiones auxiliares*).

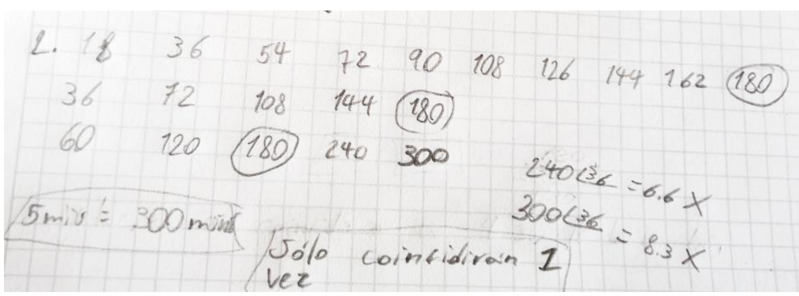
Figura 30

Respuestas de dos estudiantes a la pregunta 2 de la actividad 2

a.



b.



Nota: En las imágenes se muestran los dos procedimientos realizados para encontrar la solución al problema.

Por otro lado, en la Figura 30b se puede observar el procedimiento realizado por dos de los estudiantes. Tomando cada número otorgado en el problema, comienzan a escribir los múltiplos de cada uno hasta llegar a un número que sea igual entre los tres casos, es decir el 180 para este problema. Al analizar este procedimiento, se determina que los estudiantes poseen conocimientos sobre cómo encontrar los múltiplos de un número (KoT, *definiciones y propiedades*). Además, relacionan los números equivalentes que identifican entre los conjuntos de números, es decir, obtienen el mínimo común múltiplo, aunque no están familiarizados con su definición (KoT, *definiciones*).

Para la tercera actividad, se proponen dos problemas con números racionales en su representación en fraccionarios en donde se busca que los estudiantes logren realizar las operaciones básicas (suma) entre estos números. Además, también entiendan cómo comparar dos números racionales, ya sea cambiando la representación fraccionaria por la decimal (KoT, *registros de representación*) o encontrando el mínimo común múltiplo de los denominadores para escribir estas fracciones como equivalentes y así poder compararlas de manera sencilla (KSM, *conexiones basadas en la simplificación*). Teniendo en cuenta lo anterior, deben encontrar alguna *forma de proceder en la resolución del problema* (KPM).

5.4.3. Actividad 3- Resolución de problemas

1. Un ciclista maneja tres días diferentes. En el primero recorre 2/7 de la distancia, en el segundo recorre 1/8 y en el tercero recorre 3/14. ¿Qué fracción del trayecto ha recorrido?

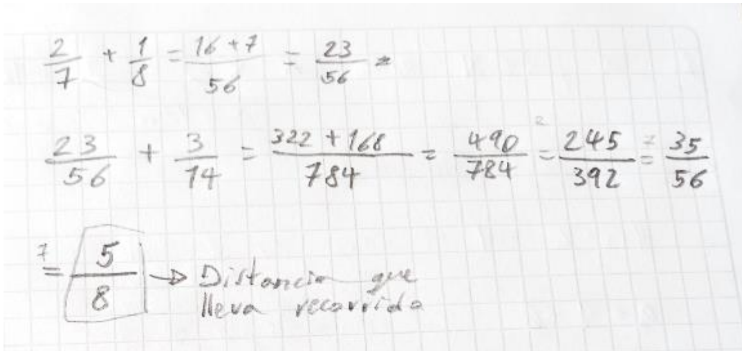
2. Luis utiliza 2/9 de su tiempo para estudiar, 1/8 para realizar deportes y 1/3 para dormir ¿En cuál de las tres actividades gasta menos tiempo?

En un comienzo, los estudiantes tuvieron dificultades al intentar comprender el contexto de la primera pregunta. Para trabajar esta problemática, se realizó el mismo ejemplo con números enteros, algo que ayudó a los estudiantes a vincular (KSM, *conexiones basadas en la simplificación*) sus concepciones sobre números enteros y racionales para entender el problema.

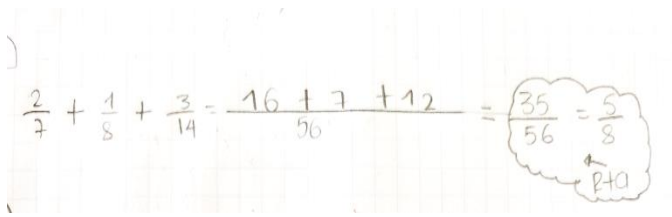
Figura 31

Suma de las fracciones relacionadas al problema 1 de la actividad 3

a.



b.



Nota: En las imágenes se muestran los procedimientos utilizados para sumar tres números fraccionarios.

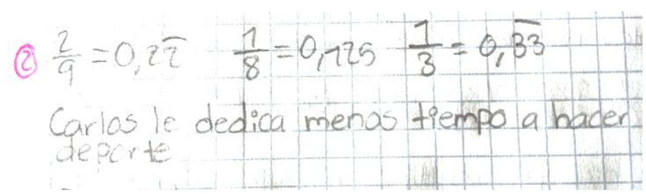
Luego de haber explicado el problema con el ejemplo realizado con números enteros, los estudiantes presentaron dos formas distintas de solución. Como se observa en la Figura 31a, una de las soluciones propuestas fue la de sumar las tres fracciones. El estudiante ejecuta la suma utilizando el llamado “método en cruz”, asociando en primer lugar dos fracciones y luego el resultado de estas operándolo con la última, dando a entender que conoce la propiedad asociativa para las operaciones en cualquier conjunto de números (KoT, *definiciones y propiedades*). Por último, se observa que el estudiante simplifica la fracción encontrada (KoT, procedimientos) para reducirla a la mínima expresión, con el fin de dar una respuesta que es equivalente al primer número fraccionario encontrado.

Por otro lado, en la Figura 31b se observa el segundo procedimiento realizado por los estudiantes. Para este caso, tomaron los denominadores de cada uno de los números fraccionarios que daba el problema y encontraron el mínimo común múltiplo de estos, con el fin de obtener un denominador común y convertir las funciones de heterogéneas a homogéneas (KSM, *conexiones auxiliares*) para simplificar la suma de estos números racionales (KSM, *conexiones basadas en la simplificación*). Al final reducen la fracción a su mínima expresión, al igual que con el procedimiento anterior, para llegar a la respuesta.

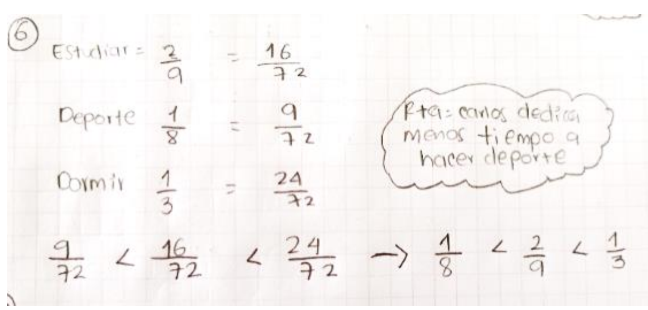
Figura 32

Soluciones al problema 2 de la actividad 3

a.



b.



Nota: Las imágenes muestran dos procedimientos utilizados para encontrar la respuesta del problema 2.

Para la segunda pregunta, los participantes utilizan dos procedimientos diferentes para encontrar la solución (KoT, *procedimientos*). Como se puede ver en la Figura 32a, una de las formas de proceder (KPM) para encontrar el orden de los números racionales y saber a qué actividad Carlos dedicaba menos tiempo, fue la de representar (KoT, *registros de* *representación*) la fracción como un número decimal. Al hacer esto, encuentran que dos de los números son decimales periódicos puros y uno es un decimal finito, así deducen cuál de los tres es menor y obtienen la solución buscada. Por el contrario, otro grupo de estudiantes utiliza la solución que se observa en la Figura 32b. En primer lugar, convierten las fracciones heterogéneas en homogéneas mediante el uso del mínimo común múltiplo entre los denominadores de cada una (KSM, *conexiones auxiliares*). Luego, comparan las fracciones y las ordenan de manera creciente para determinar cuál es el menor de los tres números. Para finalizar, transforman nuevamente las fracciones homogéneas a su forma original y encuentran cuál es la actividad a la que Carlos le dedica menos tiempo, que en este caso es el deporte.

Como conclusión de la tutoría llevada a cabo se pudo observar que los estudiantes tienen un sólido conocimiento con respecto a los números racionales (fracciones) y las operaciones entre ellos. Además, queda evidenciado que los participantes comprenden cómo convertir fracciones en números decimales y, a su vez, hacer las transformaciones de heterogéneas a homogéneas para facilitar los cálculos con las operaciones básicas (KSM, *conexiones basadas en la simplificación*). Por otro lado, se ve que algunos estudiantes tienen dificultades para dar sentido a los problemas escritos como enunciados, donde se utiliza el lenguaje natural y las expresiones algebraicas (KPM, *uso del lenguaje formal*), lo que genera confusiones al momento de intentar solucionar los problemas planteados. Por último, no se evidencia que los participantes dejen en claro algún procedimiento o planificación para proceder en la resolución de los problemas.

6. Discusión

Teniendo en cuenta la relación que existe entre el contenido programático del curso Pensamiento Matemático II y el modelo MTSK, al momento de implementar las tutorías para el mejoramiento académico de los estudiantes, es importante hacerse la siguiente pregunta ¿Cómo utilizar el modelo MTSK para analizar el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas en formación?

En primer lugar, según Carrillo et al. (2018) el modelo MTSK fue concebido con el fin de comprender y profundizar en cómo los profesores utilizan su conocimiento y estructuran lo que necesitan y lo que no para dar una clase de matemáticas. Es otras palabras, el modelo ayuda a conocer cuáles elementos componen el conocimiento especializado del profesor y cómo hace uso de estos, para evidenciarlos en dos dominios (MK y PCK). Es importante volver a resaltar que, si bien el modelo está estructurado en estos dos dominios, los análisis realizados en este trabajo se hicieron con base en los subdominios (KoT, KSM y KPM) pertenecientes al dominio MK (Carrillo et al., 2018). Además, se hizo hincapié en profundizar en el reconocimiento de las categorías asociadas a cada subdominio, con el fin de observar cuales de estas aparecieron en las sesiones y cuáles no. Por otro lado, las sesiones de tutoría que se llevaron a cabo fueron pensadas y planeadas con actividades que lograran contemplar los tres subdominios anteriormente mencionados, tomando en consideración los temas propuestos en el *syllabus* del curso para el primer y segundo corte del semestre 2023-1.

Con respecto a las actividades propuestas, se deja en evidencia que estas aportan positivamente al desarrollo del conocimiento matemático de los profesores en formación. En particular, con respecto al modelo MTSK, las tareas consideradas para esta investigación involucran a los tres subdominios (KoT, KSM y KPM) en las cuatro sesiones desarrolladas. Sin embargo, cabe destacar que solamente se lograron observar algunas categorías asociadas a estos subdominios, no todas en su totalidad.

Sobre el conocimiento de los temas (KoT), dado que este refiere al conocimiento que los profesores tienen sobre el área de matemáticas y cómo lo emplean, tanto para la resolución de problemas como para enseñar a sus estudiantes (Carrillo et al., 2018), es el subdominio que más veces se observó que apareció durante las sesiones. Siendo las *propiedades y definiciones* las categorías que se vieron mayormente empleadas por los estudiantes, esto por el hecho de que los estudiantes ya tenían algunas concepciones previas de los temas que se trataron en las sesiones por haberlas trabajado en clase con anterioridad. Otra de las categorías que apareció en todas las sesiones fueron los *registros de representación*. Un ejemplo claro de esto sucede en la Actividad 1 de la primera tutoría donde uno de los estudiantes muestra la manera de representar un número en el sistema egipcio y, a su vez, lo escribe en su representación polinómica en el SND. Así como dice Duval (2006) “los estudiantes también deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos” (p. 145), por lo que se verifica que algunos estudiantes son capaces de ver diferentes representaciones en un solo objeto matemático y utilizarlas con el fin de simplificar o entender mejor el problema planteado. Por otro lado, la *fenomenología* fue la categoría que menos apareció en las sesiones, esto se debió a que los estudiantes expresaban no tener demasiadas experiencias anteriores con los temas trabajados debido a que algunos solo habían trabajado los temas en clase, lo que dificultó, de cierto modo, el cómo abordaban los problemas para solucionarlos.

Por otra parte, el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) es uno de los subdominios más complejos de comprender, tanto de observar como de implementar en las tareas para que los estudiantes logren dejarlo en evidencia. Según Montes et al. (2021) “Los maestros suelen recurrir a establecer conexiones entre contenidos de un mismo ámbito matemático, con base en su conocimiento del currículo oficial" (p. 97), lo que da a entender que, al momento de enfrentarse a una situación problemática, los estudiantes (profesores en formación) solamente tienen en cuenta contenidos matemáticos previamente estudiados para poder abordar el problema. Lo anterior es fácilmente apreciable en las categorías asociadas al KSM que se observaron en mayor medida en las tutorías, las cuales fueron *conexiones basadas en la simplificación* y *conexiones auxiliares*. Vemos en la Actividad 3 de la cuarta tutoría, cómo algunos de los estudiantes interpretan que para realizar las operaciones básicas entre fracciones se hace más sencillo realizar la transformación de heterogéneas a homogéneas, utilizando el mínimo común múltiplo de los denominadores, así encontrando fracciones equivalentes que permitieron facilitar el procedimiento y llegar a la respuesta correcta. Además, algunos estudiantes expresaron que utilizando las fracciones homogéneas y luego simplificando el resultado, se hace más sencilla la tarea por lo que era importante hacer un repaso de esto en la tutoría. Como se puede ver, los estudiantes interconectan los temas para reducir la complejidad de las actividades y logran unificar concepciones sobre otros objetos matemáticos que ayudan a la resolución de los problemas (Carrillo et al., 2018). No obstante, las *conexiones basadas en el incremento de complejidad* no estuvieron presentes en ninguna de las cuatro sesiones realizadas, ya que, como concluye Montes et al. (2021) en su investigación:

> El subdominio KSM, por su parte, supone un desafío de cara a futuros diseños, dado que entendemos que deben reenfocarse las preguntas centradas en este subdominio para que la reflexión de los maestros supere un análisis superficial del currículo, y centrarla en argumentos matemáticos y sobre su enseñanza y aprendizaje. (p. 101)

Lo anterior indica que esta categoría del subdominio KSM no fue recurrente en las sesiones realizadas porque las preguntas planteadas para cada tutoría no estuvieron lo realmente centradas en crear alguna situación que forzara a los participantes a complejizar el problema. Es decir, todas las actividades que se llevaron a cabo fueron pensadas con el fin de que los estudiantes pudieran resolverlas de la manera más optima posible, esto dado a que la idea de las sesiones era ayudarlos a reforzar los temas que veían en clase.

De igual manera, el conocimiento de la práctica matemática (KPM) se pudo observar en todas las tutorías realizadas, sin embargo, no todos los estudiantes logran aplicar este subdominio puesto que implica tener buen entendimiento sobre cómo poder desarrollar matemáticas más allá de cualquier concepto en específico que se aborde (Carrillo et al., 2018). Lo anterior se entiende debido a que algunos estudiantes no están familiarizados con la práctica matemática pues sus elementos del conocimiento especializado en este campo no han sido desarrollados en plenitud (Muñoz et al., 2019), lo que daría a entender por qué en muchos de los participantes no se evidencia el subdominio KPM. Este subdominio es uno de los que más categorías asociadas tiene, donde las que más se lograron observar fueron las de *formas de validación* y *uso del lenguaje formal*. Lo anterior se debió a que la mayor parte de las preguntas planteadas para cada sesión se hicieron con el fin de que los estudiantes mostraran un procedimiento con el cual pudieran dejar en evidencia cómo llegaron a la respuesta requerida. Esto es fácilmente observable en la Actividad 3 de la primera tutoría, donde el estudiante realiza las operaciones propuestas en el sistema de numeración maya y para comprobar si su resultado era correcto, transforma los números al SND y los opera, validando así su respuesta. Otros estudiantes utilizaron procesos heurísticos, como el método de ensayo y error en la Actividad 1 de la primera tutoría, para dejar en evidencia cómo solucionaron el problema. Sin embargo, hubo categorías que aparecieron en una o dos tutorías, como es el caso del *papel de los símbolos*, puesto que la mayor parte de los estudiantes que hicieron parte de las sesiones, no tienen un buen dominio de la simbología para representar algunos objetos matemáticos. Lo descrito previamente se observa en la Actividad 2 de la tercera tutoría, donde algunos estudiantes no comprendían de qué manera poder representar por comprensión el conjunto U que aparece en este problema escrito en extensión, debido a que no notaban con claridad que el conjunto no incluía el elemento 0 ya que el valor de $x \in \mathbb{N}$ y se había dejado claro en las sesiones de clase que el elemento cero no se tomaría cuando se trabajara con números naturales.

Es importante implementar el uso del modelo MTSK en los primeros niveles de la educación universitaria, ya que este puede ser de gran utilidad para direccionar qué conocimientos matemáticos deben ser adquiridos por los profesores en formación. De esta manera, se garantice la construcción de una base sólida de información que les permita ser competentes en situaciones donde tenga que enseñar y aprender (Montes et al., 2019). Por este motivo, esta investigación muestra que se puede trabajar con el modelo MTSK e intentar promover el uso de todos los subdominios del conocimiento matemático (MK), sin embargo, no es una tarea sencilla y, cómo se observó en los análisis, a pesar de que el KoT, KSM y KPM surgen en las cuatro sesiones, no aparecen cada una de las categorías asociadas estos subdominios. Lo señalado anteriormente es debido a que las tareas que se proponen para las implementaciones deben generar que los estudiantes construyan conocimiento, utilizando concepciones anteriormente adquiridas, manejar las estructuras matemáticas y entender cómo utilizar esto en la práctica (Montes et al., 2019). Es decir, algunas de las actividades que se llevaron a cabo en esta investigación no garantizaban, en su totalidad, que se lograran trabajar los tres subdominios en conjunto. Además, algo para tener en cuenta en este tipo de exploraciones es que la interpretación por parte del investigador juega un papel muy importante (Escudero-Ávila et al., 2016), ya que, no siempre se podrá observar en todos los casos que es y que no es conocimiento especializado del profesor en lo que se está analizando, lo que puede generar que se pueda pasar por alto algunos aspectos que en otras investigaciones se podrían tener en cuenta.

Por último, teniendo en cuenta lo que dice Escudero-Ávila et al. (2016), el mayor reto en estas exploraciones es el de la creación o diseño de las actividades, por lo que tener en cuenta la estrategia de acompañamiento extracurricular es una opción viable y que beneficia a los estudiantes, siempre y cuando se tenga en claro los que tareas utilizar dependiendo de que es lo que se quiere trabajar. Por esto, los futuros tutores de este tipo de cursos, como lo es Pensamiento Matemático II, deben de tener una buena comunicación y realizar trabajo en conjunto con el profesor titular de la materia, con el fin de poder llevar a las sesiones situaciones que sean beneficiosas para los estudiantes y les ayude a mejorar su conocimiento.

7. Conclusiones

Tener un buen dominio del componente numérico – variacional ha sido uno de los principales problemas con los que se han enfrentado los estudiantes del curso de Pensamiento Matemático II. Es por este motivo que con este trabajo se creó una propuesta de acompañamiento extracurricular basada en estos dos componentes matemáticos, con el fin de que los estudiantes mejoraran su comprensión para ser competentes matemáticamente. Teniendo en cuenta el objetivo principal de la investigación, se logró evidenciar que llevar a cabo un programa de acompañamiento en donde se desarrolle el pensamiento numérico y el variacional es posible, sin embargo, se hace necesario que se pueda implementar durante transcurso de todo el semestre, con el fin de poder realizar este acompañamiento más puntualmente con los estudiantes. Con respecto a los objetivos específicos, la identificación de las tareas formativas para el desarrollo de las tutorías se debe trabajar con una mayor profundidad, ya que es importante que estas actividades engloben los tres subdominios (KoT, KSM y KPM) del conocimiento matemático (MK). Por lo anterior, esta investigación queda como base para analizar que tipos de tareas son o no realmente aplicables para este contexto y que sirvan en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Ahora, respondiendo a la pregunta de investigación ¿Qué estrategias de acompañamiento extracurricular permiten el desarrollo del pensamiento numérico y variacional en estudiantes del curso Pensamiento Matemático II de la Licenciatura en Educación Básica Primaria?, se pudo ver que existen diferentes estrategias para poder realizar este acompañamiento, la que se aplicó en esta investigación es una de ellas, llevando actividades a un grupo completo y respondiendo dudas, observando cómo cada individuo maneja la información y soluciona los problemas.

Sobre la organización de las tutorías, estas se llevaron a cabo con el curso completo en un espacio de tres horas semanales. Para cada sesión se planeaban diferentes actividades y se exponían en una presentación en la herramienta Nearpod, donde los estudiantes podían subir sus evidencias con fotos o escribiendo en el mismo programa. El trabajo en el aula se hizo individualmente, ya que se quería observar el conocimiento matemático de cada estudiante para profesor, sin embargo, se hace recomendable el trabajo en conjunto, ya que les ayuda a compartir ideas y así desarrollar mejor sus conocimientos. También, es recomendable llevar a cabo estas tutorías un día a la semana, no obstante, se recomienda un tiempo de 2 horas al transcurrir este se observó que los estudiantes se cansaban y no prestaban más atención.

El acompañamiento extracurricular necesita ser pensado desde el complemento a las sesiones de clase, y que permita que los estudiantes expresen sus ideas, sus dudas y propongan diferentes actividades o problemas que ellos mismos identifiquen como interesantes para su desarrollo. Por lo anterior, los acompañamientos deben ser planeados, y tener un horizonte epistemológico con cimientos en la formación de profesores, para el particular de este grupo. Se evidencia la necesidad de dar continuidad a la estrategia de tutoría, siempre que busque complementar el espacio de clase, y que sea también voluntario por parte del estudiante, aunque con los niveles que ingresan a la universidad, será necesario durante los cursos de los primeros semestres (Pensamiento matemático I, II y III), que garantice bases sólidas para que los estudiantes puedan planear una clase con seguridad de rehacerlo con conocimientos disciplinares consolidados.

Esta investigación deja la posibilidad abierta a profundizar en la consolidación de un espacio de tutorías, ya que los estudiantes que terminan este curso (Pensamiento Matemático II), luego se enfrentarán a nuevos retos en el siguiente curso de Pensamiento Matemático III y nuevos jóvenes llegarán a hacer parte del curso con el que se trabajó. Por último, se propone seguir con este tipo de acompañamientos en futuras investigaciones, dado que, como se pudo observar, no todos los elementos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas fueron posibles de implementar en las sesiones, lo que deja todavía un campo abierto para seguir explorando con una base ya establecida de que tipos de tareas utilizar, con cuál población trabajar y si esta responde a los objetivos planteados o no.

Referencias bibliográficas

ACUERDO No. 018 DE 2014. (2014, 13 de junio). Universidad Industrial de Santander. Consejo Superior. https://uis.edu.co/wp-content/uploads/2022/01/Acuerdo-018-Politica-de-Excelencia-Academica.pdf

Alarcón Bayona, A. L., García Miranda, C. Y., y Sepúlveda-Delgado, O. (2019). La evaluación formativa: una herramienta para el desarrollo del pensamiento variacional. Educación y Ciencia, 22, 457–473. https://doi.org/10.19053/0120-7105.eyc.2019.22.e10065

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bravo, F., Trelles, C., y Barrazueta, J. (2017). Reflexiones sobre la evolución de la clase de matemáticas en el bachillerato ecuatoriano. *INNOVA Research Journal*, 2(7), 1-12.

Bravo Guerrero, F. E. (2020). Dificultades que enfrentan los nuevos estudiantes universitarios en Matemática. *INNOVA Research Journal*, 5(1), 1–13. https://doi.org/10.33890/innova.v5.n1.2020.994

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. *Departamento de Didáctica de las Matemáticas*. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-4-6. http://www.ugr.es/local/jgodino/

Duval, R. (1999). Registros de representación comprensión y aprendizaje. En, Semiosis y pensamiento humano (pp. 25-80). *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.

Escudero-Ávila, D., Gomes, J., Muñoz-Catalán, M. C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N., y Aguilar, A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*, 60-68.

Ferretti, F. (2020). Mathematics teacher's specialised knowledge of prospective primary teachers: An explorative study. *PNA Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, 14(3), 226–240. https://doi.org/10.30827/pna.v14i3.10272

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. *Publisher Universidad de Huelva Publicaciones*, 57 -72

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L., Muñoz, M., y Liñan, M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemáticos. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 30(54), 204 -221. http://dx.doi.org/10.1590/1980- 4415v30n54a10.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a. ed). México D.F.: McGraw-Hill.

Hojas, A. M., Anais, M. J., Bustos, A., Letelier, C., y Zuzulich, S. (2012). Requerimientos académicos en estudiantes universitarios: El Camino recorrido Por El Centro DE apoyo Al rendimiento académico y DE exploración vocacional DE la uc. *Calidad En La Educación, 36*, 249–263. https://doi.org/10.4067/s0718-45652012000100009

Icfes, (2020). *Marco de referencia de la prueba de Matemáticas Saber 3°, 5°, 9°*. Bogotá: Dirección de Evaluación, Icfes.

Jakobsen, A.; Ribeiro, M; Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19 (3-4), 135–150.

Kline, M. (1994). El pensamiento matematico de la Antiguedad a nuestros dias, III/ *The Mathematical Thinking From Ancient Times to Our Days III* (1a ED. 3a IMP.). Alianza Editorial Sa.

López-Martín, M. del M., Aguayo-Arriagada, C. G., y García López, M. del M. (2022). Preservice elementary teachers' mathematical knowledge on fractions as operator in word problems. *Mathematics*, 10(3), 423. https://doi.org/10.3390/math10030423

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias Matemáticas. Bogotá: MEN.

MEN (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Colombia. Ministerio de Educación Nacional.

Montalvo, G. Z. (2018). Programa De Acompañamiento Y Seguimiento Académico – Pasa. *Congresos CLABES*. https://revistas.utp.ac.pa/index.php/clabes/article/view/2007

Montes, M. Á., Aguilar, Á., Carmona, E., Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero, D., Medrano, E. F., Flores, P., Huitrado, J. L., Catalán, C. M., Rojas, N., Sosa, L., Vasco, D., y Zakaryan, D. (2014). Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas. *Universidad de Huelva Publicaciones.* https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Montes, MA, Contreras, LC, Liñán, MM, Muñoz-Catalán, MC, Climent, N. y Carrillo, J. (2015). El conocimiento aritmético de los futuros profesores. *Fortalezas y debilidades.Revista de Educación*,367, 36-62.

Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157-176). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Montes, M., Universidad de Huelva, España, Pascual, M. I., Climent, N., Universidad de Huelva, España, y Universidad de Huelva, España. (2021). Un experimento de enseñanza en formación continua estructurado por el modelo MTSK. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 24(1), 83–104. https://doi.org/10.12802/relime.21.2414

Moreira, M. A. (2002). A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD, O ENSINO DE CIÊNCIAS E A PESQUISA NESTA ÁREA. *Investigações em ensino de ciências*, 7(1), 7–29. https://ienci.if.ufrgs.br/index.php/ienci/article/view/569

Muñoz Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 18 (3), 1801-1817.

Muñoz-Catalán, C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero, A.M., Aguilar, A. y Ribeiro, M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 63-84). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Revista Ema, 8(2), 157–182. http://funes.uniandes.edu.co/1521/

Olvera Sánchez, Claudia., García Torres, Erika., y Escudero Avila, Dinazar Isabel. (2021). Una propuesta de modelo de conocimiento especializado sobre el sistema de numeración decimal en primaria. *A proposal for a specialized knowledge model on the decimal numbering system in primary school*.

Padilla-Escorcia, I. A. (2022). Caracterización del conocimiento especializado del profesor en la modelación de las funciones trigonométricas en GeoGebra. *Universidad Autónoma del Caribe. Revista Encuentros*, vol. 20-02 de julio-dic. Doi:10.15665/encuen.v20i02-Julio-dic..2850

Parra Zapata, M. M., Lau Mego, C., Zapata Jaramillo, M. M., Alba Vásquez, J. A., Castrillón Yepes, A., Villa Ochoa, J. A., Correa Carmona, E. E., Mena Mena, L., Barrientos Tascón, P. A., Palacio Vásquez, J. E., Echeverri Echeverr, J. L., Salazar Piedrahita, J. A., Marín Sánchez, J. O., Marín Ramírez, L. F., y Sánchez Londoño, E. D. (2022). Hacia el desarrollo del pensamiento matemático con calculadora : propuestas y experiencias.

Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, 201-211. https://hdl.handle.net/10495/32857

Pellerano, B. D., y Muñoz, C. R. (2019). Acompañamiento académico mediante facilitación del aprendizaje entre pares: una estrategia efectiva para progresar desde el primer año y permanecer en la universidad. *Revista de Orientación Educacional*, *33*(64). http://200.14.213.175/roe/index.php/roe/article/view/94

Patton, M. (2002). Qualitative research and evaluation methods. London, United Kingdom: Sage.

RESOLUCIÓN N°. 77 DE 2010. (2010, 16 de noviembre). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. *Consejo Académico*. http://www.uptc.edu.co/export/sites/default/secretaria_general/consejo_academico/resoluciones_2010/res_77_2010.pdf

Sánchez, O. F. (2010). Pensamiento Matemático de los Mayas, una creación metafórica. *Entre Ciencia e Ingeniería*, 4(8), 174-188.

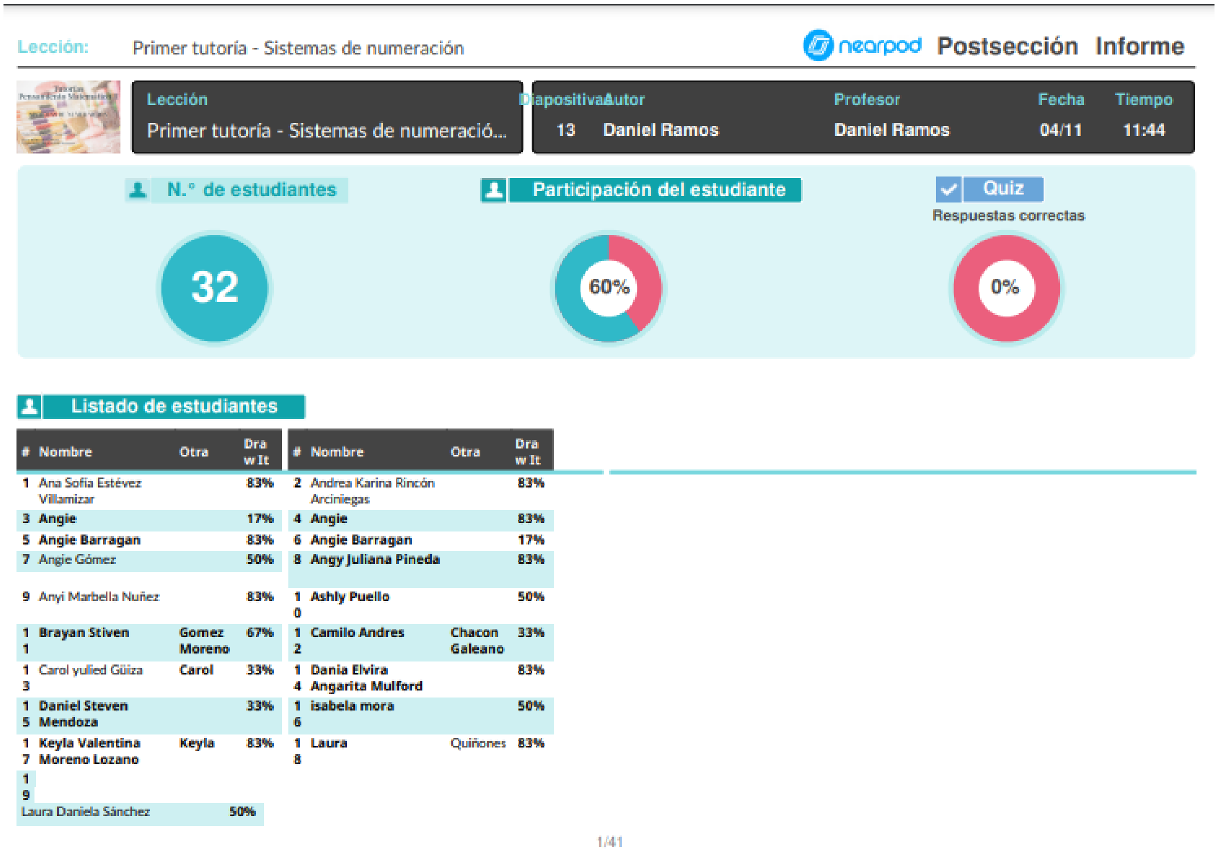
Universidad Tecnológica de Pereira [UTP]. (2021). *Programa de Acompañamiento Académico*. https://www2.utp.edu.co/vicerrectoria/academica/sistema-institucional-de-acompanamiento-academico

Vain, P. D. (2012). El enfoque interpretativo en investigación educativa: algunas consideraciones teórico-metodológicas. *Revista de Educación*, *4*(4), 37–45. http://fh.mdp.edu.ar/revistas/index.php/r_educ/article/view/83/146

Vieira, R., Ponte, J. P. da, y Mata-Pereira, J. (2022). Conhecimento matemático de futuros professores: aprendizados realizados num estudo de aula. *Bolema Boletim de Educação Matemática*, 36(73), 822–843. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10

Apéndices

Apéndice A. Informe y actividades de la sesión 1


Lección: Primer tutoría - Sistemas de numeración

nearpod Postsección Informe

Lección	Diapositiva	Autor	Profesor	Fecha	Tiempo
Primer tutoría - Sistemas de numeració...	13	Daniel Ramos	Daniel Ramos	04/11	11:44

N.° de estudiantes: 32

Participación del estudiante: 60%

Quiz — Respuestas correctas: 0%

Listado de estudiantes

#	Nombre	Otra	Draw It	#	Nombre	Otra	Draw It
1	Ana Sofía Estévez Villamizar		83%	2	Andrea Karina Rincón Arciniegas		83%
3	Angie		17%	4	Angie		83%
5	Angie Barragan		83%	6	Angie Barragan		17%
7	Angie Gómez		50%	8	Angy Juliana Pineda		83%
9	Anyi Marbella Nuñez		83%	10	Ashly Puello		50%
11	Brayan Stiven	Gomez Moreno	67%	12	Camilo Andres	Chacon Galeano	33%
13	Carol yulied Güiza	Carol	33%	14	Dania Elvira Angarita Mulford		83%
15	Daniel Steven Mendoza		33%	16	isabela mora		50%
17	Keyla Valentina Moreno Lozano	Keyla	83%	18	Laura	Quiñones	83%
19	Laura Daniela Sánchez		50%				

1/41

Actividad 1

Actividad 2

Piensa en los siguiente

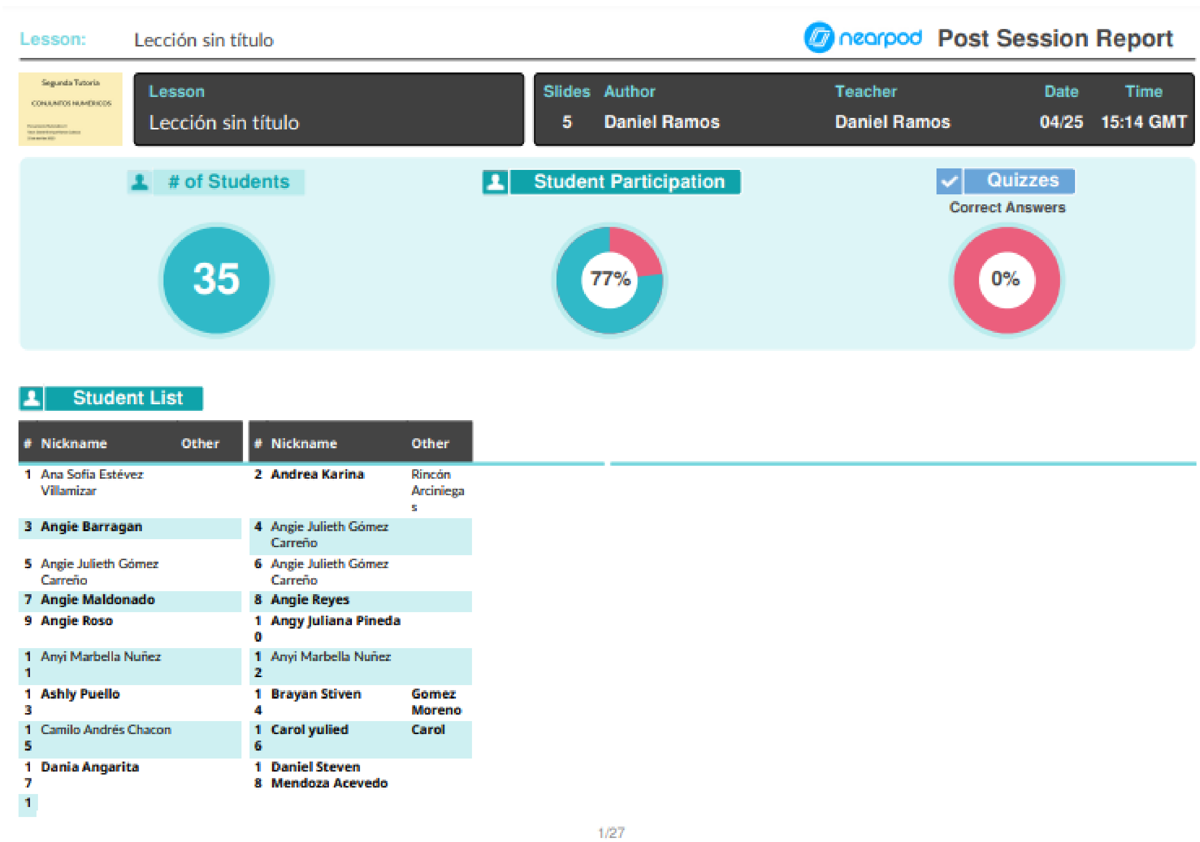
¿Cuál es el menor número que se puede representar con 25 símbolos en el sistema de numeración egipcio? ¿Qué procedimiento utilizaste para encontrar dicho número?

Ejercicio 3

Responde las siguientes preguntas sobre los sistemas de numeración

1. ¿A qué hace referencia el orden de una cifra?
2.¿Cómo se da el incremento del orden de una cifra?
3.¿Existen diferencias entre el orden y el lugar de una cifra?
4.¿Puede construirse un sistema en base 1?
5.¿Qué indica la base de un sistema?

Apéndice B. Informe y actividades de la sesión 2


Lesson: Lección sin título

nearpod Post Session Report

Lesson	Slides	Author	Teacher	Date	Time
Lección sin título	5	Daniel Ramos	Daniel Ramos	04/25	15:14 GMT

Student List

#	Nickname	Other	#	Nickname	Other
1	Ana Sofia Estévez Villamizar		2	Andrea Karina	Rincón Arciniegas
3	Angie Barragan		4	Angie Julieth Gómez Carreño	
5	Angie Julieth Gómez Carreño		6	Angie Julieth Gómez Carreño	
7	Angie Maldonado		8	Angie Reyes	
9	Angie Roso		10	Angy Juliana Pineda	
11	Anyi Marbella Nuñez		12	Anyi Marbella Nuñez	
13	Ashly Puello		14	Brayan Stiven	Gomez Moreno
15	Camilo Andrés Chacon		16	Carol yulied	Carol
17	Dania Angarita		18	Daniel Steven Mendoza Acevedo	
1					

1/27

Actividad 1

El 1 de enero de 2023 es un domingo. Si febrero tiene 28 días, ¿qué día de la semana será el 1 de marzo de 2023?, da tus razonamientos.

Actividad 2

El premio de un sorteo se reparte entre 12 personas. ¿Qué parte del premio recibirá cada uno de ellos? ¿Qué fracción corresponde a lo que reciben 5 personas? Representa el resultado en la recta real.

Actividad 3

Ejercicio

Si a y b son dos números reales negativos y $a - b = -1$, entonces $a < b$ y a esta a la derecha de b en la recta real.

a. V (Verdadero)

b. F (Falso)

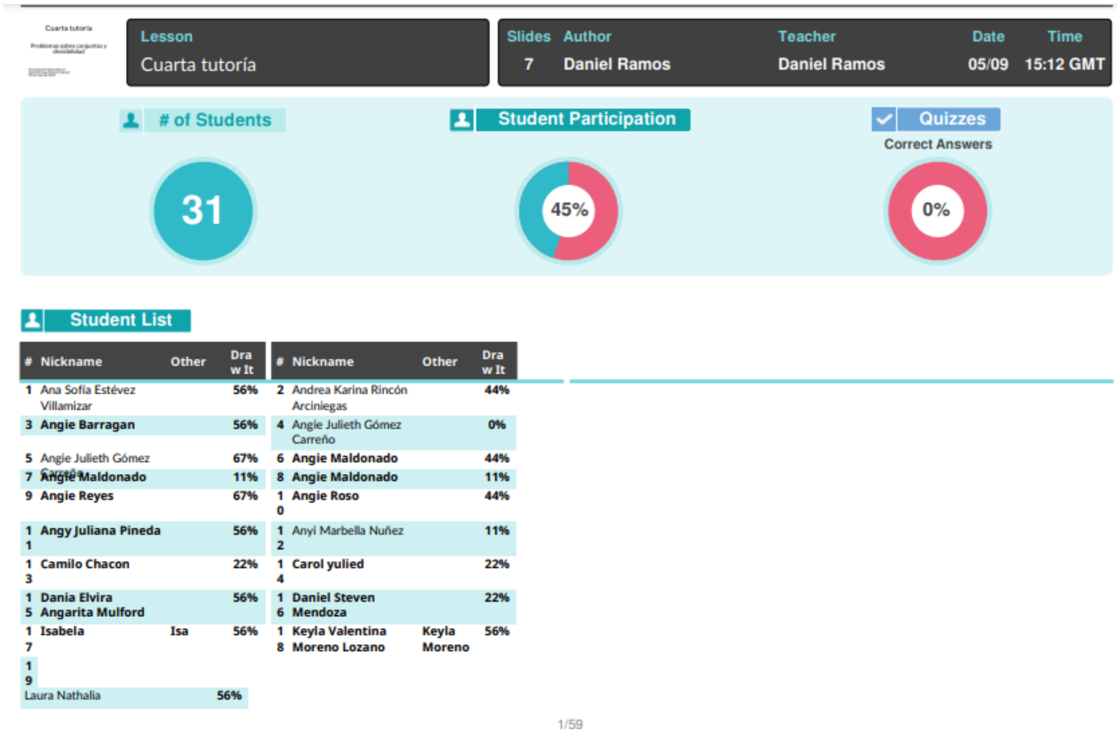
Ejercicio

Si a es un número real negativo, $-a$ lo representamos en la recta real a la izquierda de 0 (cero).

a. V (Verdadero)

b. F (Falso)

Apéndice C. Informe y actividades de la sesión 3



Lesson	Slides	Author	Teacher	Date	Time
Cuarta tutoría	7	Daniel Ramos	Daniel Ramos	05/09	15:12 GMT

# of Students: 31

Student Participation: 45%

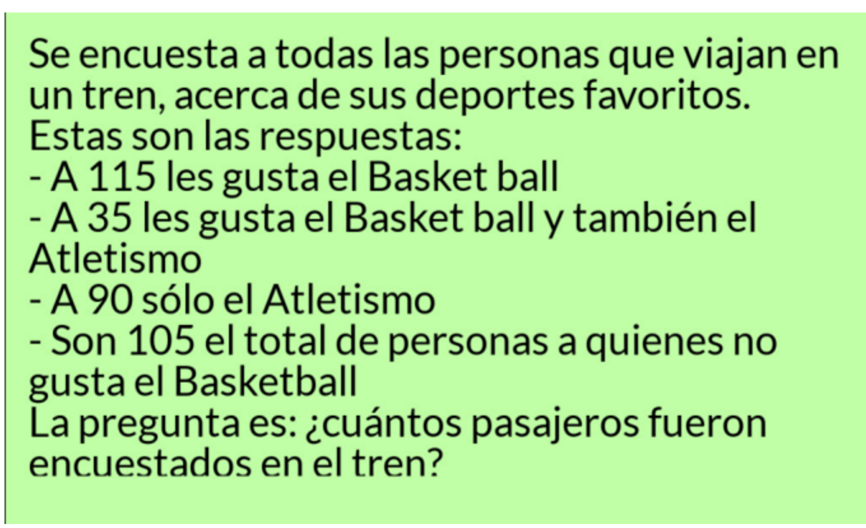
Quizzes – Correct Answers: 0%

Student List

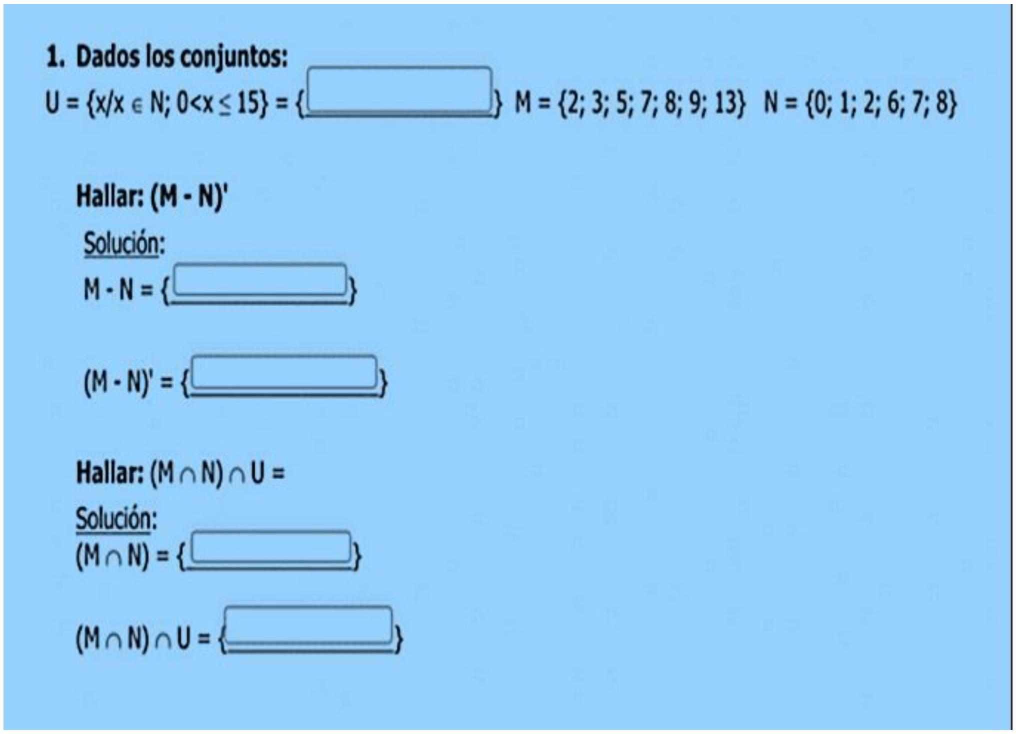
#	Nickname	Other	Draw It	#	Nickname	Other	Draw It
1	Ana Sofía Estévez Villamizar		56%	2	Andrea Karina Rincón Arciniegas		44%
3	Angie Barragan		56%	4	Angie Julieth Gómez Carreño		0%
5	Angie Julieth Gómez Carreño		67%	6	Angie Maldonado		44%
7	Angie Maldonado		11%	8	Angie Maldonado		11%
9	Angie Reyes		67%	10	Angie Roso		44%
11	Angy Juliana Pineda		56%	12	Anyi Marbella Nuñez		11%
13	Camilo Chacon		22%	14	Carol yulied		22%
15	Dania Elvira Angarita Mulford		56%	16	Daniel Steven Mendoza		22%
17	Isabela	Isa	56%	18	Keyla Valentina Moreno Lozano	Keyla Moreno	56%
19	Laura Nathalia		56%				

1/59

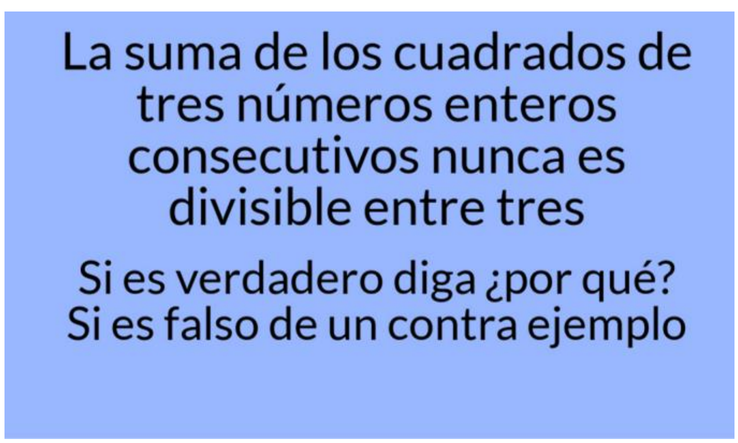
Ejercicio 1



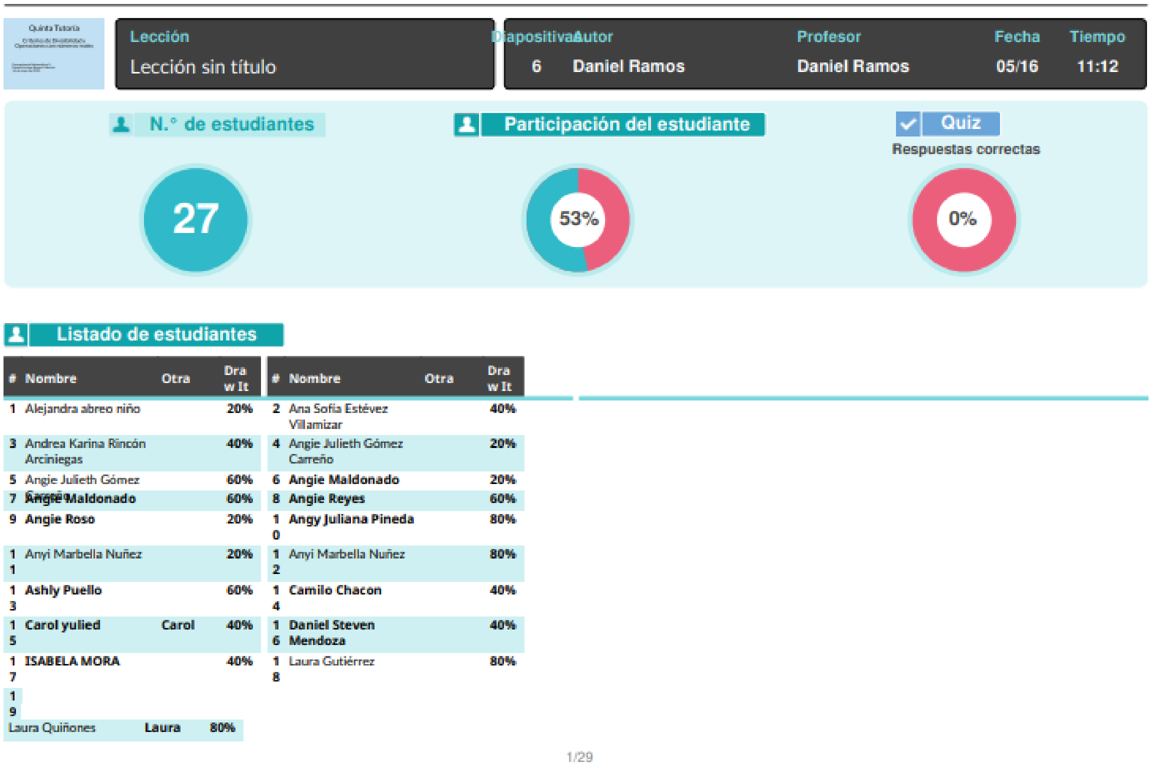
Ejercicio 2



Ejercicio 3



Apéndice D. Informe y actividades de la sesión 4



Lección	Diapositivas	Autor	Profesor	Fecha	Tiempo
Lección sin título	6	Daniel Ramos	Daniel Ramos	05/16	11:12

N.° de estudiantes: 27

Participación del estudiante: 53%

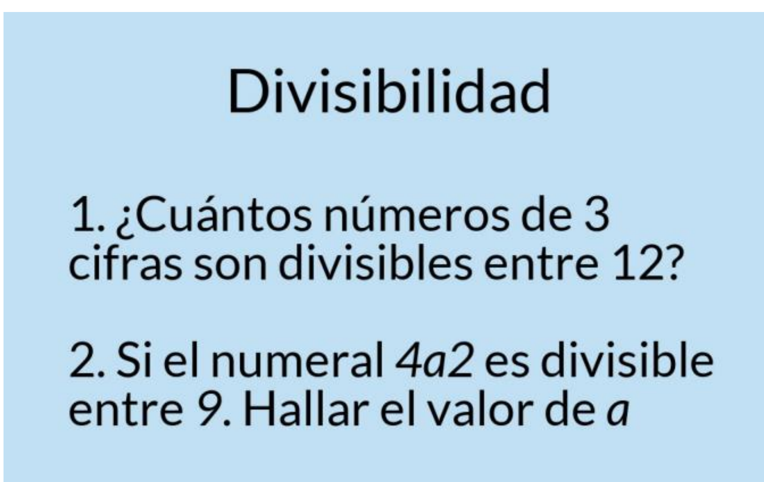
Quiz — Respuestas correctas: 0%

Listado de estudiantes

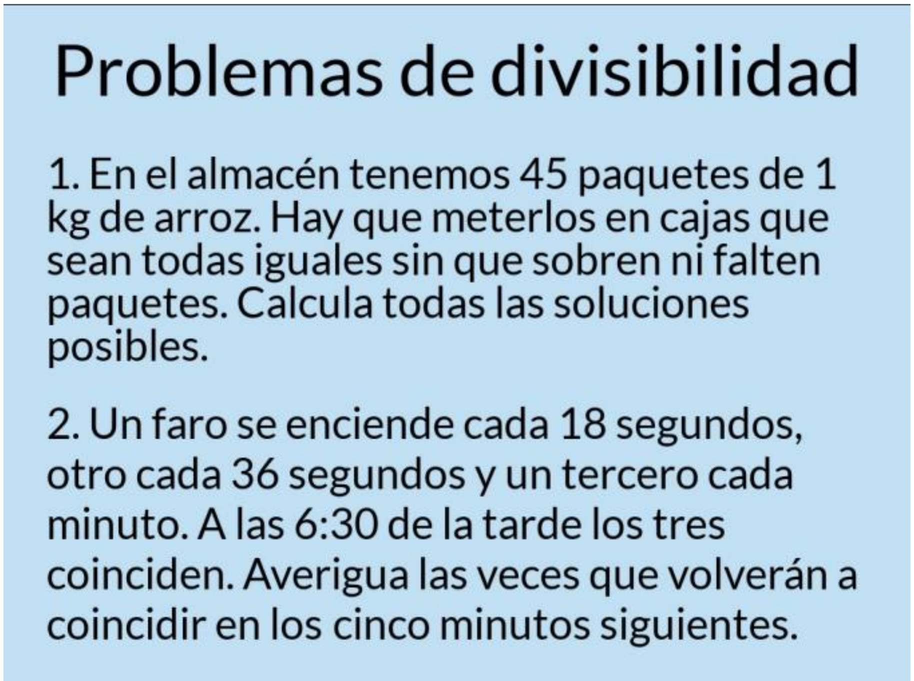
#	Nombre	Otra	Draw It	#	Nombre	Otra	Draw It
1	Alejandra abreo niño		20%	2	Ana Sofia Estévez Villamizar		40%
3	Andrea Karina Rincón Arciniegas		40%	4	Angie Julieth Gómez Carreño		20%
5	Angie Julieth Gómez Carreño		60%	6	Angie Maldonado		20%
7	Angie Maldonado		60%	8	Angie Reyes		60%
9	Angie Roso		20%	10	Angy Juliana Pineda		80%
11	Anyi Marbella Nuñez		20%	12	Anyi Marbella Nuñez		80%
13	Ashly Puello		60%	14	Camilo Chacon		40%
15	Carol yulied	Carol	40%	16	Daniel Steven Mendoza		40%
17	ISABELA MORA		40%	18	Laura Gutiérrez		80%
19	Laura Quiñones	Laura	80%				

1/29

Actividad 1



Actividad 2



Actividad 3