

INVARIANTES TOPOLÓGICOS EN MAGNETOHIDRODINÁMICA Y  
SUPERCONDUCTIVIDAD

JULIÁN ALBERTO ALZATE CÁRDENAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2022

INVARIANTES TOPOLÓGICOS EN MAGNETOHIDRODINÁMICA Y  
SUPERCONDUCTIVIDAD

JULIÁN ALBERTO ALZATE CÁRDENAS

Trabajo de Grado para optar al título de  
Físico

Director

Antonio Calixto Guitierrez Piñerez  
Doctorado en Ciencias (Física)

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2022

## **DEDICATORIA**

Dedico este fruto de mis esfuerzos a la memoria de mi tía Graciela. Siempre estuviste acompañándome en todas las etapas de mi vida, hasta que la Covid-19 te arrebató la vida. Nunca te voy a olvidar.

---

## **AGRADECIMIENTOS**

Este largo camino no hubiera sido posible sin el acompañamiento de personas maravillosas, que merecen mención. Quiero agradecer especialmente a mi madre y abuelos. Ellos me ayudaron a formarme en términos académicos y personales desde temprana edad. Sin ellos, nunca hubiera llegado hasta aquí.

Agradezco también a mis directores Antonio Calixto Guitérrez Piñeres y Eduardo Alberto Orozco Ospino, por acompañarme en este camino, y darme siempre la libertad de buscar mi pasión en la ciencia. Así mismo, doy gracias los profesores que me han visto crecer como persona y académicamente; gracias a sus conocimientos, sus orientaciones y paciencia.

Doy gracias igualmente a César por el apoyo académico recibido durante mi estancia en México, y las numerosas discusiones sobre ciencia y filosofía. Sin ellas, no hubiese podido llegar al resultado más importante de mi trabajo.

Quiero agradecer también a mis amigos, a cada uno de ellos. Jamás podría enlistarlos a todos, pero quiero hacer mención especial de los más cercanos: Geraldine, Nicolás, Edwin, Paola, Juan, Tefa y Migue. La vida es más fácil junto a ustedes.

Agradezco también a mi pareja y compañera: Valentina. Muchas gracias por ser un apoyo incondicional en la escritura de este trabajo. Gracias por tú paciencia y amor, te amo.

## CONTENIDO

	<b>pág.</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>15</b>
0.1. Sobre física y matemática	17
0.2. Organización de este trabajo	19
<b>1. OBJETIVOS</b>	<b>23</b>
<b>2. MARCO TEÓRICO</b>	<b>24</b>
2.1. Generalidades de fusión nuclear	24
2.2. Generalidades del plasma	25
2.2.1. Ecuaciones MHD	28
2.3. Topología algebraica	30
2.3.1. Complexes geométricos y poliedros	30
2.3.2. Grupos de homología y simplejos	35
2.3.3. Grupo fundamental	45
2.4. Geometría Riemanniana	49
2.4.1. Derivada de Lie	56
2.5. Grupos y álgebras de Lie	58
2.6. Integración en Variedades	60
2.6.1. Grupos de Cohomología	62
<b>3. UNA INCURSIÓN EN LOS INVARIANTES TOPOLÓGICOS DE MHD</b>	<b>66</b>
3.1. Conservación e invariantes en MHD	67
3.2. Arrastre de Lie y geometrización de las ecuaciones MHD	68
3.2.1. Invariantes integrales y topológicos	79

3.3. Helicidad	81
3.3.1. Extensión del número de linking como Helicidad	84
3.4. Invariantes topológicos y energía: parte 1	103
3.4.1. La helicidad como cota inferior de la energía magnética	104
3.4.2. ¿Por que los links deberían acotar la energía?	106
<b>4. SOBRE EL EQUILIBRIO MHD IDEAL, LAS ECUACIONES DE EULER Y LOS INVARIANTES TOPOLÓGICOS</b>	<b>110</b>
4.1. Geometría diferencial de superficies y equilibrio MHD	111
4.1.1. Teorema de Poincaré Hopf	119
4.1.2. La necesidad de toroidicidad en el equilibrio MHD	127
4.2. Grupos de Lie en las ecuaciones de Euler y MHD	132
4.2.1. Grupos de Lie en la magnetohidrodinámica ideal y las ecuaciones de Euler: Una consecuencia geométrica y topológica.	133
4.2.2. Invariantes topológicos y energía: parte 2	149
4.3. Helicidad: el invariante fundamental de $S\text{Diff}(M)$	159
<b>5. INVARIANTES TOPOLÓGICOS Y LA ESTRUCTURA DE CONTACTO DE LAS ECUACIONES DE LONDON</b>	<b>164</b>
5.1. Estructuras de Contacto	166
5.2. Ecuaciones de London y estructuras de contacto en electromagnetismo	169
5.2.1. Ecuaciones de Maxwell geometrizadas, y las ecuaciones de London	169
5.3. Ecuaciones de London como un extremo de la energía electromagnética	171
<b>6. OBSERVACIONES FINALES</b>	<b>177</b>
6.0.1. Perspectivas futuras	177
6.0.2. Conclusiones	178
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>180</b>



## LISTA DE FIGURAS

	<b>pág.</b>
Figura 1. Inestabilidad de salchicha. Tomado de <b>freidberg2014ideal</b> .	15
Figura 2. Complejo simplicial correspondiente a una pseudovariedad homeomorfa a un toro.	45
Figura 3. Diagrama que ilustra la construcción de invariantes a partir de otros conocidos, en la magnetohidrodinámica. Tomado de <b>tur1993invariants</b>	75
Figura 4. Coraza magnética. Tomado de <b>ricca2011gauss</b> .	86
Figura 5. Teorema de Ampère. Tomado de <b>ricca2011gauss</b> .	87
Figura 6. Corolario del teorema de Ampère. Tomado de <b>ricca2011gauss</b> .	87
Figura 7. La idea de Maxwell para calcular explícitamente el ángulo sólido. Tomado de <b>ricca2011gauss</b> .	89
Figura 8. Línea de campo magnético, junto con la trayectoria de una partícula cargada, en un reactor tipo Stellarator. Tomado de <a href="https://terpconnect.umd.edu/~mattland/">https://terpconnect.umd.edu/~mattland/</a>	93
Figura 9. Par de curvas cerradas construidas a partir de $\Delta(g^{t_k} x_k, x_k)$ y $\{g^{t_k} x_k\}_{t \in [0, T_k]}$ ( $k = 1, 2$ ). Tomado de <b>arnold1999topological</b> .	99

## LISTA DE TABLAS

	<b>pág.</b>
Tabla 1. Resumen de las diferentes descripciones del plasma tomado de <b>Lopez2018.</b>	27

## LISTA DE ANEXOS

	<b>pág.</b>
Anexo A. Derivada de Lie sobre variedades Lorentzianas	184

## GLOSARIO

**Topología** Rama de las matemáticas que estudia los espacios topológicos.

**Magnetohidrodinámica** (o también MHD) es el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que modelan un fluido cargado sin corrientes de desplazamiento.

**Ecuaciones de London** Sistema de ecuaciones diferenciales que modelan los aspectos electrodinámicos de la superconductividad a escala macroscópica.

**Plasma** Gas ionizado cuasi-neutro con comportamiento colectivo.

## RESUMEN

**TÍTULO:** Invariantes topológicos en magnetohidrodinámica y superconductividad \*

**AUTOR:** JULIÁN ALBERTO ALZATE CÁRDENAS \*\*

**PALABRAS CLAVE:** Topología, Magnetohidrodinámica, Ecuaciones de Euler, Equilibrio MHD, Helicidad, Invariantes topológicos, Ecuaciones de London.

### **DESCRIPCIÓN:**

En este proyecto de grado estudiamos los invariantes topológicos de la magnetohidrodinámica ideal, las ecuaciones de Euler; y encontramos una aplicación de éstos a las ecuaciones de London.

Para el estudio de los invariantes topológicos en mecánica de fluidos, nos basamos en los arrastres de Lie. Con éstos, construimos objetos geométricos conservados; prestando especial atención a aquellos con características topológicas. Con base a éstos, construimos un invariante integral llamado helicidad magnética para MHD, y helicidad cinética para las ecuaciones de Euler. Mostramos que la helicidad tiene un significado en términos de un número de linking asintótico, y que acota la energía. Adicionalmente argumentamos el porqué esto último es un resultado esperado en teorías de campos con características relativamente generales.

Además de esto, recreamos el resultado de Kruskal en el que se halla la característica de Euler de la superficie de un plasma en equilibrio. También, con base a los arrastres de Lie, construimos una geometrización de las ecuaciones de fluidos en 3-variedades, donde el grupo de difeomorfismos que conserva el volumen surge naturalmente. Esto, al imponer que la helicidad sea invariante a la escogencia de la métrica. Con ello, justificamos el uso de este grupo, de una manera alternativa a la de Arnold. Así mismo, mostramos que el equilibrio MHD es consecuencia de extremar la energía magnética bajo el grupo mencionado anteriormente.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Antonio Calixto Guitierrez Piñerez, Pregrado en física.

En lo que respecta a superconductividad, usamos este grupo de difeomorfismos que conserva la forma de volumen para demostrar que las ecuaciones de London 2-D corresponden a un extremo de la energía electromagnética; al variar sobre este grupo. Con ello, conectamos los métodos topológicos en hidrodinámica, con las ecuaciones de London.

## ABSTRACT

**TITLE:** Topological invariants in magnetohydrodynamics \*

**AUTHOR:** JULIÁN ALBERTO ALZATE CÁRDENAS \*\*

**KEYWORDS:** TOPOLOGY, MAGNETOHYDRODINAMIS, EULER EQUATIONS, MHD EQUILIBRIUM, TOPOLOGICAL INVARIANTS, LONDON EQUATIONS.

### DESCRIPTION:

In this work, the topological invariants in MHD is studied, and an applications of them in the London's equations is founded. In particular, the helicity is analyzed by employing the Lie dragging formalism and an analogy between the Gaussian linking number of closed curves in space, and the helicity of divergenceless vectorfields. Additionally, a review is made in the relationship among MHD equilibrium and the Euler charactertistic of the plasma boundary on a fusion reactor. Also, a new geometrization of the Euler and MHD equations is proposed using the Lie dragging formalism on a Riemannian manifold, leading to a comparison between this formalism, and the Arnold one. Futhermore, an analogy between the topological invariants in fluid dynamics and superconductivity is made and, as a result, is proved that the London equations extremes the electromagnetic energy under volume-preserving diffeomorphism.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Antonio Calixto Guitierrez Piñerez, Pregrado en física.

## INTRODUCCIÓN

La primera idea detrás de este trabajo nació hace 4 años cuando me encontraba en el semillero de física computacional del plasma. En aquel entonces nos centrábamos en estudiar un tema relacionado con la física del plasma, y la física computacional, cada semestre. Entre métodos numéricos y simulaciones, un día concentramos nuestra atención en la magnetohidrodinámica. Estas ecuaciones, nuevas para mi, presentaban una interesante amalgama entre mecánica de fluidos y electromagnetismo; que parecía tan compleja como interesante.

A lo largo de ese semestre recuerdo estar cautivado por sus implicaciones físicas, y lo natural que era, para mi, el pensar en el plasma como un fluido cargado. Si bien esto hacía que me interesara mucho el tema, fue el estudio de la estabilidad lo que realmente disparó mi curiosidad. Especialmente el fenómeno conocido como inestabilidad de salchicha (ver imagen 1).

Al ver la típica imagen que se muestra para ilustrar este fenómeno, no pude evitar pensar que esta inestabilidad era una consecuencia principalmente de la geometría

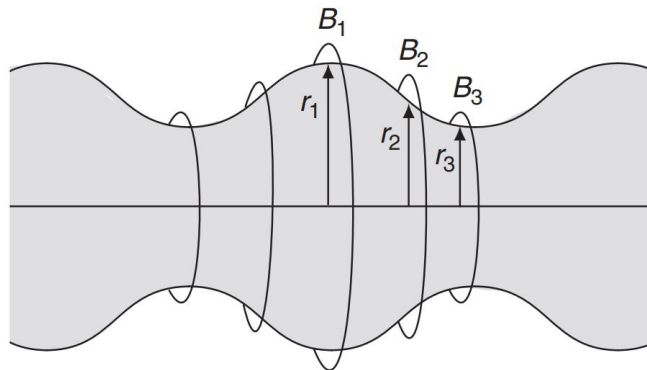


Figura 1. Inestabilidad de salchicha. Tomado de **freidberg2014ideal**.

del plasma. Esto me llevó a plantearme una pregunta que fue fundamental para la concepción de esta tesis: ¿Son las inestabilidades en los plasmas una consecuencia de la geometría del mismo?.

Si bien esta pregunta aún se mantiene abierta, lo cierto es que fue la semilla que germinó en las primeras discusiones que tuve con mis directores: el Dr Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres, y el Dr Eduardo Alberto Orozco Ospino; y como consecuencia, fue el origen de los objetivos de esta tesis. En estas discusiones mi interés viró hacia los aspectos topológicos de la magnetohidrodinámica. Esto último, debido a que a lo largo de mi carrera creció una fascinación por la topología, ya que presentaba un contexto más general que la geometría.

El estudio de los aspectos topológicos de la magnetohidrodinámica me llevo a encontrarme con diversos textos y artículos, que me ayudaron a entender más la física detrás de las ecuaciones. El resultado de esta investigación en MHD y mecánica de fluidos, está condensado en los capítulos 2 y 3 de este manuscrito.

Cercano a la etapa final de mi escrito, tuve una noticia inesperada: una beca de la que pude ser beneficiario en 2020, y creí perdida por la pandemia, apareció. Haciendo uso de estos recursos, tomé una pasantía en la Universidad Autónoma de México, sede Azcapotzalco, Ciudad de México; bajo la dirección del Dr César Simón Lopez Monsalvo.

En esta pasantía continué trabajando en mi tesis, y discutiendo sobre diversos proyectos que el Dr César estaba realizando. En uno de ellos, había descubierto recientemente que las ecuaciones de London 2-D correspondían a un tipo de métricas relacionadas con estructuras de contacto. De esta forma, se demostraba que

las ecuaciones de London eran una consecuencia de un tipo de métrica al dotarlas con una estructura de contacto.

Cuando me mostró sus resultados no pude evitar notar que las ecuaciones de London, en su versión geométrica, tenían la forma de los conocidos campos de Beltrami: un tipo de campo vectorial solenoidal, que corresponde a una solución de las ecuaciones MHD en equilibrio para el campo magnético, o una solución de las ecuaciones de Euler estacionarias para la velocidad del fluido. Debido a mi anterior estudio de los métodos topológicos en hidrodinámica, sabía que estas ecuaciones provenían de extremar la energía de los campos, bajo ciertas restricciones topológicas. Esto me hizo pensar que quizás sucedía algo similar para la superconductividad.

Explorar esta idea tuvo como consecuencia el teorema demostrado en el capítulo 4, el cual considero el resultado más importante de esta tesis. Con este teorema, se mostró como los métodos topológicos en hidrodinámica tienen también una aplicación en superconductividad. De esta forma, a partir de este resultado podemos entender las ecuaciones de London desde una nueva perspectiva topológica.

### **0.1. Sobre física y matemática**

A lo largo de esta introducción, y en el resto del texto, se encuentra implícita la idea de que las matemáticas responden a la realidad física. En esta sección me concentraré en justificar esta opinión, que siempre ha hecho parte de mi visión de la física y las matemáticas. A pesar de esto, basaré mis justificaciones principalmente en argumentos de diversos autores, para que mis prejuicios físicos no sean solo míos.

Históricamente, las matemáticas siempre han sido una rama del conocimiento hu-

mano que ha estado ligada a la física. Por una parte la física ha inspirado numerosos desarrollos matemáticos, mientras que las matemáticas han entregado a la física un lenguaje en el que puede ser escrita. En palabras de Eugene P. Wigner: “el milagro de lo apropiado del lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes de la física es un maravilloso regalo que nosotros ni entendemos ni merecemos” **wigner1990unreasonable**.

Lo apropiado que son las matemáticas, como lenguaje de la física, puede ilustrarse con el fenómeno electromagnético. En palabras de Arnold, “La forma correcta de pensar en una teoría electromagnética surge de las ecuaciones de Maxwell, y no de una precisa especificación de razas de gatos y tipos de ambar” **arnol1999mathematics**.

Así mismo, la afinidad entre física y matemáticas no solo hace que la física dependa de ella, sino que también hace que la matemática necesite de la física. Dirac decía que la forma correcta de pensar en una teoría matemática, y desarrollarla, es considerando al mismo tiempo aplicaciones a modelos importantes.

Incluso el mismo Hilbert declaraba explícitamente que la geometría era una rama de la física, ya que, tanto el geómetra como el físico, halla sus resultados de la misma forma. Otros matemáticos como Arnold han llegado a afirmar directamente que las matemáticas son una rama de la física. Incluso si no se comporte la idea de Arnold, lo cierto es que todo lo mencionado en esta sección nos permite pensar, al menos, que la física y las matemáticas son realmente inseparables.

## 0.2. Organización de este trabajo

En el capítulo 1 se explora de manera general los conceptos necesarios para comprender el resto del manuscrito. Este comienza con definiciones físicas relacionadas con la fusión nuclear, la física del plasma y las ecuaciones MHD. Posteriormente se hace énfasis en aspectos matemáticos como la topología algebraica, la geometría Riemanniana, los grupos y álgebras de Lie, y la integración en variedades mediante los grupos de cohomología. Este capítulo puede excluirse de la lectura siempre que se tenga un conocimiento considerable de los temas anteriormente mencionados.

En el segundo capítulo se hace un primer acercamiento a los invariantes, en mecánica de fluidos no disipativa, con un interés especial en los invariantes con características topológicas. Para ello, se construye la estructura matemática de las leyes de conservación: los arrastres de Lie de objetos geométricos (vectores, formas, tensores ...). Esto último basado en argumentos físicos relacionados con la evolución temporal del sistema. Con este formalismo se geometrizan las ecuaciones de fluidos en  $\mathbb{R}^3$  y se clasifican los invariantes locales en función del objeto geométrico conservado, haciendo especial énfasis en las formas diferenciales (debido su relación con la integración). A partir del estudio de formas localmente conservadas se demuestra que las 2-formas arrastradas tienen asociadas un campo vectorial congelado en el medio. Es decir, un campo en el que las curvas integrales se mueven con el mismo. Usando este campo congelado se construye un invariante integral llamado helicidad.

Posteriormente se introduce el número de linking de Gauss: un invariante topológico de curvas cerradas en el espacio. Este cuantifica el número de veces en las que una curva cerrada  $C_1$ , atraviesa el área delimitada por otra curva cerrada  $C_2$ . A partir de esto se muestra como la helicidad de un campo está relacionada con el número de linking asintótico de sus curvas integrales. Finalmente se muestra que

la helicidad acota la energía del campo congelado, y se realiza una discusión en la que se propone la siguiente afirmación: En general, los nudos o links de un campo deben acotar la energía siempre que sean invariantes a su evolución.

En el tercer capítulo se caracteriza topológicamente la frontera del plasma en equilibrio, y se estudian los grupos de Lie asociados al espacio de configuración de las ecuaciones MHD y de Euler. Para la caracterización de la frontera del plasma, se introduce la notación de la geometría diferencial de superficies encajadas en  $\mathbb{R}^3$ , y se muestra el teorema de índice de Poincaré Hopf. Este resultado se construye con base al teorema de Gauss-Bonnet, y otros conceptos expuestos allí y en el marco teórico.

Usando argumentos físicos y el concepto de adherencia; se propone una definición de frontera MHD. Posteriormente se usa el teorema de clasificación de superficies, y el teorema de índice de Poincaré Hopf, para demostrar que la frontera MHD debe ser homeomorfa a un toroide, bajo condiciones relativamente generales.

Más adelante se generaliza, para una 3-variedad riemanniana, la geometrización de las ecuaciones de fluidos propuestas en el segundo capítulo. A partir de las ecuaciones de Euler geometrizadas se demuestran nuevos teoremas relacionados con los arrastres de Lie, con los que se construye la helicidad. Con esta última se llega a los difeomorfismos que conservan el volumen al imponer que esta sea independiente de la métrica. De esta forma, se llega a este grupo de difeomorfismos de manera paralela a la de Arnold. Además de esto, se encuentra una relación entre el operador de inercia de Arnold y los arrastres de Lie de 2-formas y vectores.

Además de esto se presentan unos teoremas en donde se relaciona el equilibrio

MHD y la energía, con el grupo de difeomorfismos anteriormente mencionado. En el primer teorema se demuestra que las ecuaciones de equilibrio MHD corresponden a un extremo de la energía magnética, bajo difeomorfismos que conservan el volumen. De igual forma, se muestra que las ecuaciones de Euler estacionarias son producto de extremar la energía cinética del fluido, bajo los mismos difeomorfismos. Este teorema se presenta utilizando casi amente el lenguaje de formas diferenciales, por lo que la demostración está escrita de una forma nueva y alternativa a la original.

En el siguiente teorema se muestra que siempre que un campo con divergencia cero modele links no triviales, la energía de éste no puede reducirse a cero bajo difeomorfismos que conserven la forma de volumen. Con esto último se refuerza la idea propuesta al final del segundo capítulo. Para finalizar, se discute un reciente teorema relacionado con la helicidad y el grupo de difeomorfismos anteriormente mencionado. Este teorema demuestra que la helicidad es el único invariante integral de este grupo, bajo algunas condiciones técnicas. Con ello se propone una definición de invariante topológico, en fluidos no disipativos, con base al grupo de difeomorfismos que conserva la forma de volumen.

Finalmente en el cuarto capítulo obtenemos un nuevo y muy importante resultado en superconductividad: la demostración de que las ecuaciones de London 2-D extreman la energía electromagnética, bajo difeomorfismos que conservan la forma de volumen en una 3-variedad Lorentziana. Para esto se definen algunos conceptos de geometría de contacto y se muestra brevemente la geometrización del electromagnetismo. Posteriormente, se exhibe como las ecuaciones de London surgen naturalmente bajo una condición en la métrica llamada  $\varepsilon$ -contact, en base al trabajo **flores2021contact**.

Luego, se hace una primera variación de la energía electromagnética sobre difeomorfismos que conservan la forma de volumen, mostrando el resultado principal. Por último se demuestra que una primera variación sobre contactomorfismos no da como resultado a las ecuaciones de London, y se discute una posible interpretación física. En esta interpretación se propone que la helicidad sigue teniendo un rol similar al que posee en las variedades riemannianas, con lo que se plantea la siguiente hipótesis : LA SUPERCONDUCTIVIDAD EN SISTEMAS BIDIMENSIONALES ESTÁ CARACTERIZADA POR LA TOPOLOGÍA DE CAMPO, Y NO POR LA ESTRUCTURA DE CONTACTO DEL ELECTROMAGNETISMO.

## 1. OBJETIVOS

### Objetivo general

- Identificar invariantes topológicos presentes en las ecuaciones MHD, en el contexto de plasmas para fusión.

### Objetivos específicos

- Hallar invariantes topológicos presentes en la magnetohidrodinámica ideal.
- Caracterizar Topológicamente el equilibrio MHD del plasma confinado a una región toroidal.
- Relacionar las inestabilidades, desde el estado de equilibrio, con los invariantes topológicos del sistema.

## 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo presentamos los conceptos y definiciones básicas y necesarias, para entender los resultados contenidos a lo largo de este manuscrito. Empezaremos con algunas generalidades de física del plasma y las ecuaciones centrales en este trabajo: las ecuaciones de MHD ideal. Posteriormente se definirán conceptos básicos en geometría Riemanniana, topología algebraica e integración en variedades; para comprender el lenguaje en el que está escrito los resultados de este trabajo. Todas las definiciones y teoremas presentados aquí están escritas de manera concisa y sin muchos detalles; ya que corresponden a pre requisitos conceptuales a fin comprender el desarrollo central de este trabajo, el cual está contenido en los capítulos siguientes.

### 2.1. Generalidades de fusión nuclear

Se habla de fusión nuclear cuando dos núcleos atómicos superan la repulsión electrostática entre ellos y forman un nuevo elemento. En este proceso se libera energía si la masa del átomo resultante es menor a la de los átomos iniciales, de acuerdo con la relatividad especial:  $\Delta E = \Delta mc^2$ , donde  $\Delta m$  es la masa total inicial menos la masa final **Lopez2018**.

Los reactores de fusión termonuclear buscan emplear este fenómeno para transformar la energía liberada en eléctrica, y con ello aprovecharla en el uso doméstico e industrial. Para esto el reactor se hace valer de una temperatura lo suficientemente alta como para romper la repulsión electrostática y causar la fusión. Esta fusión puede darse con distintos elementos entre los cuales los isótopos de hidrógeno: Deuterio y Tritio; son comunes en reactores de primera especie **varela2011disrupciones**.

## 2.2. Generalidades del plasma

Un plasma es un gas ionizado cuasi neutro que exhibe comportamiento colectivo **bellan2008fundamentals**. Los parámetros más importantes a la hora de describirlo son la LONGITUD DE DEBYE ( $\lambda_D$ ), EL PARÁMETRO DEL PLASMA ( $N_D$ ) y FRECUENCIA PLÁSMICA ( $\omega_p$ ).

La longitud de Debye es

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_e e^2}}, \quad (1)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica,  $T$  es la temperatura del plasma,  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $n_e$  es la concentración electrónica y  $e$  es la carga del electrón. Esta es una medida de la distancia a la que el campo eléctrico producido por una partícula se atenúa debido a otras partículas alrededor.

El parámetro del plasma es

$$N_D = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2 n_e^{1/3}} \right)^{3/2} = \frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 n_e, \quad (2)$$

y da una medida del número total de electrones dentro de una esfera cuyo radio es la longitud de Debye. Por tanto este parámetro mide la razón entre la energía térmica y la energía potencial de interacción entre los electrones. Cuando se habla de un plasma fuertemente acoplado  $N_D < 1$  y los efectos cuánticos son notables, por otro lado si  $N_D \gg 1$  la energía térmica es más dominante en la dinámica y se dice que el plasma es débilmente acoplado.

Por último, la frecuencia plásmica se define como

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}, \quad (3)$$

donde  $m_e$  es la masa del electrón. Esta es la frecuencia natural de oscilación del plasma cuando hay una separación local de la carga iónica y electrónica.

Dada la característica de gas que tiene un plasma, su descripción se basa en un sistemas de partículas. Por tanto, su descripción exacta se da cuando se tiene la posición y momento de cada partícula (Modelo de Klimontovich). No obstante, debido a la complejidad que esto supone se suelen realizar diversas simplificaciones sobre el modelo.

Una primera simplificación es la de suponer que el sistema está totalmente descrito por una distribución estadística sobre el espacio de fase, para cada especie de partícula. Esta distribución sigue la ecuación de Vlasov-Maxwell

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_j \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_j \frac{\partial f}{\partial v_j} = \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col}, \quad (4)$$

donde  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico,  $f$  la función de distribución,  $v_j$  los componentes de la velocidad en el espacio de fase,  $x_j$  los componentes de la posición en el espacio de fase y  $\mathbf{B}$  el campo magnético. Por tanto, resolver la ecuación 4 permite la descripción total del plasma.

Ahora, al tomar los momentos centrales (con funciones de peso  $g = 1$ ,  $g = mv$  y

$g = mv^2/2$ ) de esta distribución, usar la velocidad promedio en lugar de la velocidad como componente del espacio de fase y considerar esfuerzos isótopos, se llega a una ecuación de fluido para cada especie (iones  $n_i$  y electrones  $n_e$ )

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{V}_e) = 0, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{V}_i) = 0 \quad (5)$$

$$n_e m_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = \nabla p_e - en_e (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}, \quad n_i m_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = \nabla p_i + Zen_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \mathbf{R}, \quad (6)$$

donde  $\mathbf{V}$  es la velocidad de deriva de cada especie,  $p$  es la presión creada por cada tipo de fluido y  $\mathbf{R}$  es una fuerza asociada a colisiones entre iones y electrones.

Finalmente al pensar en un solo fluido: tomando en cuenta que el transporte en este se debe principalmente a los electrones y suponer que los campos electromagnéticos están bajo la aproximación cuasi estática, se tienen las ecuaciones de Magnetohidrodinámica ideal. Un resumen de las diferentes descripciones del plasma se tiene en el cuadro 1.

	MHD ideal	Dos fluidos	Girocinética	Cinética	Partícula a partícula
Descripción	Plasma como fluido único. La masa se asocia a la componente iónica, pero la corriente se asocia a la componente electrónica.	Considera a la componente iónica y electrónica como dos fluidos separados.	Modelo cinético que considera el movimiento de superpartículas.	Las posiciones y velocidades de las partículas dependen de la función de distribución y realiza el seguimiento a superpartículas.	Seguimiento a cada partícula en cada instante.
Ventajas	Mirado macroscópica del plasma y relativamente fácil de resolver.	Incorpora algunos efectos que la MHD ideal no.	Captura algunas propiedades del modelo cinético. Es práctico y sencillo de resolver.	Es capaz de describir una gran variedad de fenómenos.	Modelo más preciso posible.
Desventajas	Se pierde la mirada microscópica del plasma. No predice inestabilidades cinéticas.	Perdida de la descripción cinética del plasma.	No es aplicable a sistemas o efectos que requiera largas escalas de tiempo.	Requiere el trabajo duro e impráctico para resolver sistemas muy grandes como reactores.	Usualmente, imposible de resolver.
Matemática	Acople de ecuaciones de Navier-Stokes, fuerza de Lorentz y ecuaciones de Maxwell.	Acople de ecuaciones de Navier-Stokes, fuerza de Lorentz y ecuaciones de Maxwell.	Expansión de la ecuación de Vlasov-Maxwell.	Ecuación de Vlasov-Maxwell.	Modelo de Kilimontovich.
	Plasma como fluido conductor.		Plasma como gas de partículas cargadas.		

Tabla 1. Resumen de las diferentes descripciones del plasma tomado de Lopez2018.

**2.2.1. Ecuaciones MHD** El modelo MHD es de los modelos más simples para estudiar un plasma altamente colisionar dado que no toma en cuenta varios fenómenos. No obstante, esto no significa que las ecuaciones MHD sean simples **freidberg2014ideal**.

**Descripción del modelo MHD** Las ecuaciones MHD describen un fluido cargado con comportamientos macroscópicos de plasma a baja frecuencia. Esto hace que MHD no describa correctamente:

- Radiación.
- Calentamiento por ondas Electromagnéticas de alta frecuencia.
- Efectos de partículas resonantes.
- Micro-inestabilidades.
- Transporte Clásico y anómalo.
- Inestabilidad resistiva.
- Comportamiento de partículas  $\alpha$ .

No obstante, lo que si describe bien MHD es la relación entre la geometría de campo magnético con inestabilidades macroscópicas<sup>1</sup>. Las ecuaciones de MHD ideal se dividen en:

---

<sup>1</sup> A pesar de la sencillez del modelo, resolver las ecuaciones para sistemas 3-D o 2-D es una ardua tarea, ya que, en la práctica corresponden a las ecuaciones de Euler acopladas con las de Maxwell.

- Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) = 0 \quad (7)$$

- Ecuación dinámica

$$\rho_m \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (8)$$

- Ecuación de evolución adiabática ( $\gamma = 5/3$ )

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho_m^\gamma} \right) = 0 \quad (9)$$

- Ley de Ohm

$$\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (10)$$

- Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (11)$$

Con estas ecuaciones se describe la evolución de la masa, momentum y energía, así como también los campos electromagnéticos a bajas frecuencias (sin la corrección que introdujo Maxwell a la ley de Ampère). Al confinar plasma en equilibrio estático se tiene que

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (12)$$

Por otro lado, la ley de ohm  $\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}$  implica que el plasma es un conductor perfecto (de aquí proviene el carácter ideal del nombre MHD ideal). Es importante

tomar en cuenta los fenómenos de transporte para que la estabilidad del plasma se mantenga al resolver las ecuaciones para escalas de tiempo largas.

### 2.3. Topología algebraica

A lo largo de este escrito se hace ilusión a muchos conceptos topológicos que, aunque intuitivos, corresponden a definiciones precisas de la topología algebraica. Por ello, esta sección esta dedicada a algunos conceptos básicos de topología algebraica.

La Topología algebraica fue creada con el fin de estudiar propiedades topológicas de espacios por medio de la teoría de grupos **croom2012basic**. Si bien es posible asignar diversos grupos a un espacio topológico, en esta sección nos centraremos en los grupos de homología y homotopía guiados de **munkres2000topology**, **gallier2013guide**, **croom2012basic** y **nakahara2003geometry**.

#### 2.3.1. Complexes geométricos y poliedros

**Definición 1** (Independencia geométrica). *Un conjunto de  $k+1$  puntos  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$  se dicen que tienen independencia geométrica si no existe un hiperplano de dimensión  $k - 1$  que los contenga a todos.*

**Definición 2** (Simplejo  $k$  dimensional). *Dado un conjunto de puntos  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$  geométricamente independientes, llamamos simplejo geométrico  $k$  dimensional generado por  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ , y denotamos  $\sigma^k$ , al conjunto de puntos  $x \in \mathbb{R}^n$  para los*

cuales  $\exists \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  reales positivos tales que

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i, \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1,$$

y denotamos  $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ .

**Definición 3** (Cara, cara propia). *Un simplejo  $\sigma^k$  es una cara de un simplejo  $\sigma^n$ ,  $k \leq n$ , si cada vértice de  $\sigma^k$  es un vértice de  $\sigma^n$ . Las caras de  $\sigma^n$  diferentes a el mismo son llamadas caras propias.*

Un ejemplo sencillo de simplejo en  $\mathbb{R}^2$  es  $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$ , donde los  $a_i$  son simplemente puntos no colineales en el plano. Es evidente entonces que este simplejo corresponde a los puntos dentro del triángulo de vértices  $a_0, a_1, a_2$ , y los valores de  $\lambda_i$  corresponden a sus coordenadas baricéntricas. Sus caras propias son sus aristas y vértices:  $\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_0, a_1 \rangle, \langle a_0, a_2 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle$ .

**Definición 4** (Unión correcta). *Dos simplejos  $\sigma^m$  y  $\sigma^n$  están unidos correctamente si sus únicas intersecciones son caras de ambos o vacío.*

**Definición 5** (Complejo simplicial). *Un complejo simplicial es una familia finita  $K$  de simplejos geométricos unidos correctamente con la propiedad de que cada cara de un miembro de  $K$  también pertenece a  $K$ . La dimensión de  $K$  es el mayor entero positivo  $r$  tal que  $K$  contiene un  $\sigma^r$ .*

**Definición 6** (Poliedro asociado). *Dado un complejo simplicial  $K$ , la unión de miembros de  $K$  con la Topología heredada por el espacio euclidiano forman el espacio topológico llamado poliedro asociado de  $K$  y denotado como  $|K|$ .*

**Definición 7** (Espacio triangulable). *Sea  $X$  un espacio topológico, si existe un complejo simplicial  $K$  tal que  $|K|$  es homeomorfo a  $X$ , se dice que  $X$  es un espacio*

triangulable.

Con estas definiciones podemos construir un procedimiento para formar el homeomorfismo con una superficie regular y un poliedro asociado.

**Teorema 1** (Convexidad y simplejos). *Cada simplejo es un conjunto convexo y es el conjunto convexo más pequeño que contiene a sus vértices.*

*Demostración.* Sean  $a, b \in \sigma^k = \langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle$

$$\Rightarrow a = \sum_{i=0}^k a_i \lambda_i, b = \sum_{i=0}^k a_i \alpha_i$$

donde  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^k \alpha_i$ . Entonces para cualquier punto en la recta que une ambos puntos

$$ta + (1-t)b = t \sum_{i=0}^k a_i \lambda_i + (1-t) \sum_{i=0}^k a_i \alpha_i = \sum_{i=0}^k (t\lambda_i + (1-t)\alpha_i) a_i \forall t \in (0, 1)$$

donde  $\sum_{i=0}^k (t\lambda_i + (1-t)\alpha_i) = t + 1 - t = 1$ , por lo que cualquier punto en la recta también es parte del simplejo.

Sea  $B_k$  el conjunto convexo más pequeño que contiene todos los vértices de  $\sigma^k$ , es claro que  $B_k \subset \sigma^k$ . Sea  $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i \in \sigma^k$ . Es claro que si  $k = 1$   $\sigma^1 = B_1$ . Ahora suponga que para  $k = n$ ,  $\sigma^n \subset B_n$ . Sea  $x = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i a_i \in \sigma^{n+1}$ . Es claro que por hipótesis de inducción  $\sigma^n \subset B_n \subset B_{n+1}$ .

Considere la recta que une a  $x$  con  $a_{n+1}$ . Para ver que  $\sigma^{n+1} \subset B_{n+1}$  bastara con ver que esta recta se intersecta con  $\sigma^n = B_n \subset B_{n+1}$  para, por convexidad, tener  $x \in B_{n+1}$ .

$$L = \{a_k + (1-t)x | t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \text{si } t = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - 1}, y = \left(1 + \frac{\lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}}\right) \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \quad (13)$$

$$\text{con } \sum_{i=0}^n \left(1 + \frac{\lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}}\right) \lambda_i = \left(1 + \frac{\lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}}\right) \sum_{i=0}^n \lambda_i = \left(1 + \frac{\lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}}\right) (1 - \lambda_{n+1}) = 1 \quad (14)$$

$$\Rightarrow y \in L \cap B_n \Rightarrow x \in B_{n+1}. \quad (15)$$

Por tanto, por inducción  $\sigma^n = B_n \forall n \in \mathbb{N}$ . □

Con este teorema anterior justificamos que, dada una superficie regular, podemos encontrar un poliedro asociado cuyos puntos (a excepción quizás de los vértices) estén contenidos en el volumen encerrado por la misma, lo que nos permite hacer un homeomorfismo proyectando los puntos del poliedro a la superficie<sup>2</sup>. Esto último no corresponde a una demostración formal, pero da una idea geométrica que valida la existencia de una triangulación para una superficie regular.

**Definición 8** (Clausura). *Dado un simplejo  $\sigma^k$ , llamamos Clausura, y denotamos  $Cl(\sigma^k)$ , al complejo simplicial formado por  $\sigma^k$  y sus caras.*

**Definición 9** ( $r$ -esqueleto). *Dado un complejo simplicial  $K$ , llamamos  $r$ -esqueleto al complejo simplicial formado por todos los simplejos de  $K$  con dimensión menor o igual a  $r$ .*

**Definición 10** ( $n$ -simplejo orientado). *Dado un  $n$ -simplejo  $\sigma^n = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ , se obtiene un  $n$ -simplejo orientado asignando un orden a los vértices. Las clases de equivalencia de permutaciones pares del orden escogido en los vértices determinan los*

---

<sup>2</sup> Esto es análogo a las homotopías de línea recta **munkres2000topology**

simplejos orientados positivamente, mientras que la clase de equivalencia de permutaciones impares determinan los simplejos ordenados negativamente.

**Definición 11** (Complejo simplicial orientado). *Un complejo simplicial orientado es un complejo simplicial en donde cada uno de los simplejo poseen una orientación.*

**Definición 12** (Número de incidencia). *Sea  $K$  un complejo simplicial orientado con simplejos  $\sigma^p$  y  $\sigma^{p+1}$ , cuya dimensión difiera por 1. Asignamos a cada par  $(\sigma^p, \sigma^{p+1})$  un número de incidencia, denotado como  $[\sigma^p, \sigma^{p+1}]$ , de la siguiente forma:*

*Si  $\sigma^p$  no es una cara de  $\sigma^{p+1}$ , entonces  $[\sigma^p, \sigma^{p+1}] = 0$ .*

*Si  $\sigma^p$  es una cara de  $\sigma^{p+1}$ , etiquetamos los vértices  $a_0, \dots, a_p$  de  $\sigma^p$  tal que  $+\sigma^p = +\langle a_0, \dots, a_p \rangle$ . Sea  $v$  el vértice de  $\sigma^{p+1}$  que no esta en  $\sigma^p$ , entonces si  $+\sigma^{p+1} = +\langle v, a_0, \dots, a_p \rangle \Rightarrow [\sigma^p, \sigma^{p+1}] = 1$ , en caso contrario  $+\sigma^{p+1} = -\langle v, a_0, \dots, a_p \rangle \Rightarrow [\sigma^p, \sigma^{p+1}] = -1$ .*

**Teorema 2.** *Sea  $K$  un complejo simplicial orientado y  $\sigma^p$  un  $p$ -simplejo de  $K$ , sea  $\sigma^{p-2}$  una  $(p-2)$ -cara de  $\sigma^p$ , entonces*

$$\sum_{\sigma^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma^{p+1}][\sigma^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 0$$

*Demostración.* Sea  $v_0, \dots, v_{p-2}$  los vértices de  $\sigma^{p-2}$  de tal suerte que  $+\sigma^{p-2} = +\langle v_0, \dots, v_{p-2} \rangle$ . Dado que  $\sigma^p$  tiene dos vértices adicionales  $a$  y  $b$ , supongamos que  $\sigma^p = +\langle a, b, v_0, \dots, v_{p-2} \rangle$ . Por tanto solo hay cuatro casos en los que  $[\sigma^{p-1}, \sigma^{p-2}] \neq 0$ :  $\sigma^{p-1} = \pm\langle a, v_0, \dots, v_{p-2} \rangle$  y  $\sigma^{p-1} = \pm\langle b, v_0, \dots, v_{p-2} \rangle$ .

- Si  $\sigma_1^{p-1} = +\langle a, v_0, \dots, v_{p-2} \rangle$  y  $\sigma_2^{p-1} = +\langle b, v_0, \dots, v_{p-2} \rangle$ , entonces  $[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = -1$ ,  $[\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1$ ,  $[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = 1$ ,  $[\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1$ .

- Si  $\sigma_1^{p-1} = +\langle a, v_0, \dots, v_{p-2} \rangle$  y  $\sigma_2^{p-1} = -\langle b, v_0, \dots, v_{p-2} \rangle$ , entonces  $[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = -1$ ,  $[\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1$ ,  $[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = -1$ ,  $[\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$ .
- Si  $\sigma_1^{p-1} = -\langle a, v_0, \dots, v_{p-2} \rangle$  y  $\sigma_2^{p-1} = +\langle b, v_0, \dots, v_{p-2} \rangle$ , entonces  $[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = 1$ ,  $[\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$ ,  $[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = 1$ ,  $[\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1$ .
- Si  $\sigma_1^{p-1} = -\langle a, v_0, \dots, v_{p-2} \rangle$  y  $\sigma_2^{p-1} = -\langle b, v_0, \dots, v_{p-2} \rangle$ , entonces  $[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = 1$ ,  $[\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$ ,  $[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = -1$ ,  $[\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$ .

En cada caso

$$\sum_{\sigma^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma^{p+1}][\sigma^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1 + 1 = 0.$$

□

**Definición 13** (Matriz de incidencia). *Sea  $K$  un complejo simplicial orientado con  $\{\sigma_i^p\}$  y  $\{\sigma_i^{p+1}\}$   $p$ -simplejo y  $p+1$ -simplejo respectivamente. Entonces llamamos matriz de incidencia a la matriz  $\eta(p) = (\eta_{ij}(p))$  tal que  $\eta_{ij}(p) = [\sigma_i^{p+1}, \sigma_j^p]$ .*

### 2.3.2. Grupos de homología y simplejos

**Definición 14** ( $p$ -cadena, grupo de cadenas). *Dado un complejo simplicial  $K$  orientado, una cadena  $p$ -dimensional es una función  $c_p : K \rightarrow \mathbb{Z}$ . La familia de  $p$ -cadenas forman un grupo, con la suma, llamado grupo de cadenas  $p$ -dimensional de  $K$ , y denotado como  $C_p(K)$ . Para  $p \leq 0$  y  $p > \dim(K)$  estos grupos se definen como los triviales.*

**Definición 15** (*p*-cadena elemental). *Una p-cadena elemental es una p-cadena tal que  $c_p(\tau^p) = 0 \quad \forall \tau^p \neq \sigma^p$ .*

Esto permiten escribir cualquier cadena en términos de combinaciones lineales de cadenas elementales. Cada *p*-cadena  $c_p$  es denotada como  $g\sigma^p$ , donde  $g = c_p(+\sigma^p)$ , por lo que  $\forall d_p \in C_p(K)$ ,  $d_p = \sum g_i\sigma_i^p$ , donde los índices corren por todos los *p*-simplejos de *K*. De esta forma, es fácil ver como  $C_p(K)$  es un grupo con la suma, ya que si  $c_p = \sum f_i\sigma_i^p$  y  $d_p = \sum g_i\sigma_i^p$ , entonces  $c_p \pm d_p = \sum (g_i \pm f_i)\sigma_i^p$ . Otra propiedad inmediata es que

$$C_p(K) \cong \prod_{i=0}^m \otimes \mathbb{Z}, \quad (16)$$

donde *m* es el número de *p*-simplejos en *K*.

**Definición 16** (Frontera). *Sea  $g\sigma^p$  una p-cadena elemental con  $p \geq 1$ , entonces llamamos frontera de  $g\sigma^p$ , y denotamos  $\partial(g\sigma^p)$ , a*

$$\partial(g\sigma^p) = \sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}]g\sigma_i^{p-1}. \quad (17)$$

*Asumiendo que  $\partial$  es un homomorfismo<sup>3</sup>, se define análogamente la frontera de una p-cadena cualquiera:  $\partial d_p = \sum \partial(g_i\sigma_i^p)$ .*

**Teorema 3.** *Sea *K* un complejo simplicial orientado y  $p \geq 2$ , entonces a la composición  $\partial\partial : C_p(K) \rightarrow C_{p-2}(K)$ , en el diagrama  $C_p(K) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial} C_{p-2}(K)$ , es el*

---

<sup>3</sup> Es evidente que la aplicación frontera depende de *p* para sus dominio e imagen, por tanto lo adecuado sería denotarla como  $\partial_p$ . No obstante, se hará omisión de este índice cuando sea evidente la dimensión del grupo de cadenas en el dominio.

homomorfismo trivial.

*Demostración.* Note que

$$\partial\partial(g\sigma^p) = \partial \left( \sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] g \sigma_i^{p-1} \right) = \sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} \sum_{\sigma_j^{p-2} \in K} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] [\sigma_i^{p-1}, \sigma_j^{p-2}] g \sigma_j^{p-2} \quad (18)$$

$$= \sum_{\sigma_j^{p-2} \in K} \left( \sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] [\sigma_i^{p-1}, \sigma_j^{p-2}] g \sigma_j^{p-2} \right) = 0, \quad (19)$$

debido a un teorema anterior. □

**Definición 17** (*p*-ciclo, grupo de ciclos *p* dimensionales). *Sea K un complejo simplicial orientado, llamamos p-ciclo a la p-cadena  $z_p$  tal que  $\partial z_p = 0$ . La familia de p-ciclos corresponde al kernel del homomorfismo  $\partial : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  y por ende forma un subgrupo denotado por  $Z_p(K)$  y llamado grupo de ciclos *p* dimensionales.*

**Definición 18** (*p*-frontera, grupo de fronteras *p* dimensionales). *Sea K un complejo simplicial orientado, dado  $p \geq 0$ , una p-cadena  $b_p$  es una p-frontera en K si existe una  $(p+1)$ -cadena  $c_{p+1}$  tal que  $\partial c_{p+1} = b_p$ . El conjunto de p-fronteras corresponden a  $\partial(C_{p+1}(K))$  por lo que corresponde a un subgrupo de  $C_p$ . Este es llamado grupo de fronteras *p* dimensionales de K y se denota como  $B_p(K)$ .*

Con estas definiciones y el teorema anterior es claro ver que, en general,  $B_p(K)$  es un subgrupo de  $Z_p(K)$ .

**Definición 19** (Homólogo). *Decimos que dos p-ciclos  $z_p$  y  $w_p$ , en un complejo simplicial K, son homólogos, y escribimos  $w_p \sim z_p$ , si existe  $c_{p+1} \in C_{p+1}(K)$  tal que  $\partial c_{p+1} = w_p - z_p$ .*

Esta última definición crea clases de equivalencia que particionan a  $Z_p(K)$ :

$$[z_p] = \{w_p \in Z_p(K) | w_p \sim z_p\}. \quad (20)$$

Estas clases también corresponden a cosets de la forma  $z_p + B_p(K)$ .

**Definición 20** (Grupo de homología  $p$  dimensional). *Si  $K$  es un complejo simplicial orientado, y  $p \geq 0$ , llamamos grupo de homología  $p$  dimensional al grupo cociente*

$$H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K). \quad (21)$$

Para comprender mejor estos conceptos tomaremos un ejemplo. Considere el conjunto  $S^1$ , es claro que éste es homeomorfo a  $|K|$  donde  $K = \{\langle a_0, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_0, a_2 \rangle\}$ , con la orientación heredada del orden de los índices de los vértices.

Tenemos entonces que  $C_0(K) = \text{gen}\{\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle\} \cong \mathbb{Z}^3$ ,  
 $C_1(K) = \text{gen}\{\langle a_0, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_0, a_2 \rangle\} \cong \mathbb{Z}^3$ , y  $C_2(K) = \{0\}$ . Note que  $\partial\langle a, b \rangle = \langle b \rangle - \langle a \rangle$  para todo simplejo en  $K$ .

Ahora bien,  $B_0(K) = \partial C_1(K) = \text{gen}\{\langle a_1 \rangle - \langle a_0 \rangle, \langle a_2 \rangle - \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle - \langle a_0 \rangle\} = \text{gen}\{\langle a_1 \rangle - \langle a_0 \rangle, \langle a_2 \rangle - \langle a_1 \rangle\}$  por independencia lineal, luego  $B_0(K) \cong \mathbb{Z}^2$ . Por otro lado  $Z_0(K) = \ker \partial_0 \cong \mathbb{Z}^3$  ya que todo elemento de  $C_0(K)$  es mapeado con el operador frontera a cero. Por tanto,  $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^3/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}$ .

En el otro caso tenemos que  $B_1(K) = \partial C_2(K) = \{0\}$ . Para los 2-ciclos tenemos  $Z_1(K) = \ker \partial_1$ , por tanto dado que  $\dim \partial C_1(K) = 2$  y  $\dim C_0 = 3$ , se debe tener  $\dim \ker \partial_1 = 1$  por lo que  $Z_1(K) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow H_1(K) \cong \mathbb{Z}$ . Es claro que para otros valores de  $p$  los grupos de homología son triviales.

## Estructura de grupos de homología

**Teorema 4.** *Sea  $K$  un complejo simplicial con 2 orientaciones. Sea  $K_1, K_2$  los complejos geométricos orientados respectivamente, entonces  $H_p(K_1) \cong H_p(K_2)$*

*Demostración.*  $\forall \sigma^p \in K$  llamaremos  ${}^i\sigma^p$  a la versión orientada positivamente en  $C_p(K_i)$ . Sea  $\alpha(\sigma^p) = \pm 1$  tal que  ${}^1\sigma^p = \alpha(\sigma^p) {}^2\sigma^p$ . Definiremos ahora la secuencia de homeomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi : C_p(K) &\longrightarrow C_p(K) \\ \sum g_i {}^1\sigma_i^p &\longmapsto \sum g_i \alpha(\sigma^p) {}^2\sigma_i^p. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \varphi_{p-1}(\partial(g {}^1\sigma^p)) &= \varphi \left( \sum_{\sigma^{p-1} \in K} g [{}^1\sigma^p, {}^1\sigma^{p-1}] {}^1\sigma^{p-1} \right) = \sum_{\sigma^{p-1} \in K} \alpha(\sigma^{p-1}) g [{}^1\sigma^p, {}^1\sigma^{p-1}] {}^1\sigma^{p-1} \\ &= \sum_{\sigma^{p-1} \in K} \alpha(\sigma^{p-1}) \alpha(\sigma^{p-1}) \alpha(\sigma^p) g [{}^2\sigma^p, {}^2\sigma^{p-1}] {}^2\sigma^{p-1} = \alpha(\sigma^p) \sum_{\sigma^{p-1} \in K} g [{}^2\sigma^p, {}^2\sigma^{p-1}] {}^2\sigma^{p-1} \\ &= \partial(\varphi_p(g {}^2\sigma^p)), \end{aligned}$$

por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo de homeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} C_p(K_1) & \xrightarrow{\varphi_p} & C_p(K_2) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ C_{p-1}(K_1) & \xrightarrow{\varphi_{p-1}} & C_{p-1}(K_2). \end{array}$$

Con esto podemos definir el morfismo inducido:

$$\begin{aligned}\varphi^* : H_p(K_1) &\longrightarrow H_p(K_2) \\ [z_p] &\longmapsto [\varphi_p(z_p)].\end{aligned}$$

Es claro que  $\varphi^*$  está bien definida debido a la conmutación de  $\varphi$  con  $\partial$ . De manera análoga se define una función  $\psi_p : C_p(K_2) \longrightarrow C_p(K_1)$  tal que  $\psi_p = \varphi_p^{-1}$ . Con esto tenemos un isomorfismo entre los grupos de homología.

□

Con esto vemos que estos grupos no son características de la orientación del complejo, sino del propio complejo simplicial. No solo eso, sino que ahora veremos que  $H_0$  tiene un significado topológico claro en términos de conexidad.

**Definición 21** (Simplejos conectados). *Decimos que dos simplejos  $s_1$  y  $s_2$  en  $K$  están conectados si alguna de la siguientes condiciones se satisface:*

- $s_1 \cap s_2 \neq \emptyset$ .
- $\exists$  una secuencia de 1-simplejos  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$  en  $K$  de tal suerte que  $s_1 \cap \sigma_1$  es un vértice de  $s_1$ ,  $s_2 \cap \sigma_p$  es un vértice de  $s_2$  y  $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$  es un vértice común de  $\sigma_i$  y  $\sigma_{i+1}$ .

Con esto es posible definir clases de equivalencia que permiten una partición de  $K$  en componentes combinatorios.

**Teorema 5.** *Sea  $K$  un complejo simplicial con  $r$  componentes combinatorias, entonces  $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^r$ .*

*Demostración.* Sea  $K'$  un componente combinatorio de  $K$  y  $\langle a' \rangle \in K'$ . Dado  $\langle b \rangle \in K'$  existen  $\langle ba_0 \rangle, \langle a_0a_1 \rangle, \dots, \langle a_p a' \rangle$ .  $\forall n \in \mathbb{Z}$  considere  $c_1 = \pm n(\langle ba_0 \rangle + \langle a_0a_1 \rangle + \dots + \langle a_p a' \rangle)$ ,

entonces  $\partial c_1 = \pm n(\langle b \rangle - \langle a' \rangle)$ .

Debido a esto  $g\langle b \rangle$  es homólogo a  $g\langle a' \rangle$  o  $-g\langle a' \rangle$ , por lo que cualquier 0-cadena en  $K'$  es homóloga a  $n\langle a' \rangle$  para algún entero  $n$ . Análogamente, aplicando esto a cada componente combinatorio  $K_1, \dots, K_r$  tenemos que todo 0-ciclo  $c_0$  es de la forma  $\sum_{i=1}^r h_i \langle a^i \rangle$ . Con esto último es natural construir un isomorfismo entre  $H_0(K)$  y  $\mathbb{Z}^r$  siempre que los  $\langle a^i \rangle$  pertenezcan al  $K_i$  componente combinatorio respectivamente.

□

### Teorema de Euler-Poincaré

**Definición 22** (independencia lineal respecto a la homología, número de Betti). *Sea  $K$  un complejo simplicial. Una familia  $\{z_p, \dots, z_p^r\}$  de  $p$ -ciclos es linealmente independiente con respecto a la homología si no existen  $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{Z}$  todos no iguales a 0, tal que  $\sum g_i z_p^i$  no son análogos a 0.*

*El mayor entero  $r$  para el cual existen  $r$   $p$ -ciclos linealmente independientes respecto a la homología es llamado el  $r$ -ésimo número de Betti. Este es denotado como  $R_p(K)$ .*

**Teorema 6** (Teorema de Euler-Poincaré). *Sea  $K$  un complejo simplicial orientado de dimensión  $n$ , y para  $p = 0, 1, \dots, n$  sea  $\alpha_p$  el número de  $p$ -simplejos de  $K$ , entonces*

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p R_p(K).$$

*Demostración.* Considere que en general  $R_p(K) \in \mathbb{Q}$ , por lo que  $Z_p(K)$  y  $B_p(K)$  son espacios vectoriales sobre  $\mathbb{Q}$ . Sea  $\{d_p^i\}_{i \in \Lambda}$  el conjunto maximal de  $p$ -cadenas tal que ninguna combinación lineal sea un ciclo. Es decir,  $\sum \bar{g}_i d_p^i \not\sim 0 \forall \{\bar{g}_i\}$ .

Definiendo  $D_p(K) \equiv \text{gen}\{d_p^i\}$ , es claro ver que  $C_p(K) = D_p(K) \oplus Z_p(K)$ , por lo que  $\alpha_p = \dim C_p(K) = \dim D_p(K) + \dim Z_p(K) \forall 1 \leq p \leq n$ . Ahora bien, sea  $b_p^i \equiv \partial(d_{p+1}^i)$ , se tiene que  $\{b_p^i\}$  forma una base para  $B_p(K)$ , por otro lado, sean  $\{z_p^i\}_{i=1, \dots, R_p(K)}$  el conjunto de  $p$ -ciclos linealmente independientes con respecto a la homología; definimos  $G_p(K) = \text{gen}\{z_p^i\}$ .

Por tanto  $Z_p(K) = G_p(K) + B_p(K) \forall 1 \leq p \leq n \Rightarrow \dim Z_p(K) = R_p(K) + \dim B_p(K) \Rightarrow R_p(K) = \alpha_p - \dim D_p(K) - \dim B_p(K) \forall 1 \leq p \leq n$ . Note que  $\partial(\sigma_i^{p+1}) = \sum \eta_{ij}(p) \sigma_j^p \Rightarrow \dim B_p(K) = \eta(p) = \dim D_p(K)$  ya que el número de  $\{d_p^i\}$  es el mismo de  $\{b_p^i\}$ , por lo que  $R_p(K) = \alpha_p - \eta(p-1) - \eta(p)$ . Por último note que  $R_0(K) = \dim Z_0(K) - \dim B_0(K) = \alpha_0 - \eta(0)$ , y  $R_n(K) = \dim Z_n(K) = \alpha_n - \eta(n-1)$  lo que termina la demostración al hacer la sumatoria:

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p R_p(K).$$

□

Puede demostrarse que los números de Betti son invariantes topológicos. Es decir, si existen 2 espacios triangulables  $|L|$  y  $|K|$  homomorfos, sus números de Betti coinciden. Este resultado será clave en el capítulo 3 cuando se busque caracterizar topológicamente la superficie de un reactor en equilibrio, basándonos en la siguiente definición

**Definición 23** (Característica de Euler). *Si  $K$  es un complejo simplicial orientado de dimensión  $n$ , llamamos característica de Euler, y denotamos como  $\chi(K)$ , a*

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^n (-1)^p R_p(K)$$

**Definición 24** (*n*-pseudovariedad). Una *n*-pseudovariedad es un complejo simplicial *K* con las siguientes propiedades:

- Cada simplejo de *K* es una cara de algún *n*-simplejo de *K*.
- Cada (*n* − 1)-simplejo es cara de exactamente 2 *n*-simplejos de *K*.
- Dado un par de *n*-simplejos  $\sigma_1^n$  y  $\sigma_2^n$ , existe una secuencia de *n*-simplejos empezando con  $\sigma_1^n$  y terminando en  $\sigma_2^n$  tal que  $\forall$  simplejos sucesivos en la secuencia, se tenga una (*n* − 1)-cara común.

**Definición 25** (Orientación coherente, Orientable). Sea *K* una *n*-pseudovariedad. Dado un (*n* − 1)-simplejo  $\sigma^{n-1}$  de *K*, sean  $\sigma_1^n$  y  $\sigma_2^n$  2 simplejos para los cuales  $\sigma^{n-1}$  es una cara. Decimos que una orientación es coherente si se tiene la propiedad

$$[\sigma_1^n, \sigma^{n-1}] = [\sigma_2^n, \sigma^{n-1}].$$

Una *n*-pseudovariedad es orientable si existe una orientación coherente de ella.

**Teorema 7** (Homología y orientabilidad). Una *n*-pseudovariedad *K* es orientable si y solo si  $H_n(K) \neq \{0\}$

*Demostración.* Supongamos que *K* es orientable y por tanto, posee una orientación coherente. Luego, si un (*n* − 1)-simplejo es la cara de dos *n*-simplejos  $\sigma_1^n$  y  $\sigma_2^n$ , se tiene que  $[\sigma_1^n, \sigma^{n-1}] = -[\sigma_2^n, \sigma^{n-1}]$ .

Entonces, cualquier *n*-cadena de la forma  $C = g_0 \sum_{\sigma^n \in K} \sigma^n$ , para cualquier  $g_0 \in \mathbb{Z}$  fijo pero arbitrario, es un *n*-ciclo:

$$\partial \left( g_0 \sum_{\sigma^n \in K} \sigma^n \right) = g_0 \sum_{\sigma^n \in K} \sum_{\sigma^{n-1} \in K} [\sigma^n, \sigma^{n-1}] = 0.$$

Por tanto  $Z_n(K) \neq \{0\}$  ya que existe por lo menos un subgrupo  $H \cong \mathbb{Z}$  contenido en  $Z_n(K)$ . Por tanto, dado que  $B_n(K) = \{0\}$ ,  $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K) \neq \{0\}$ .

Ahora supongamos que existe un  $n$ -ciclo  $z = \sum_{\sigma_1^n \in K} g_i \sigma_i^n \neq 0$  y veremos que  $K$  debe ser orientable, lo que terminaría la demostración.

Dado que, por la definición de pseudovariedad, cada par de  $n$ -simplejos puede unirse con una secuencia de  $(n-1)$ -simplejos, se sigue que 2 coeficientes en  $z$  pueden diferir únicamente en signo, digamos  $g_i = \pm g_0$ .

Si  $\partial z = 0$ , reorientando  $\sigma^n$ , escogemos  $g_i = g_0$  y obtenemos  $\sum_{\sigma_1^n \in K} g_0 \sigma_i^n = g_0 \left( \sum_{\sigma_1^n \in K} \sigma_i^n \right)$ . Luego  $\sum_{\sigma_1^n \in K} \sigma_i^n$  es un  $n$ -ciclo. Esto significa que cada uno de los  $(n-1)$ -simplejo deben tener un número de incidencia positiva con uno de los  $n$ -simplejo del cual es cara, y positivo con el otro. En otras palabras,  $K$  es orientable.

□

Para entender mejor estos últimos conceptos considere el complejo simplicial  $T$  de la figura 2 con su respectiva orientación.

Este complejo es claramente homeomorfo a un toro ya que la identificación de sus aristas inducen un espacio cociente que corresponde a éste. Además de esto, podemos ver que  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 3$  y  $\alpha_2 = 2$ , por lo que su característica de euler es  $1 - 3 + 2 = 0$ .

Ahora analicemos sus grupos asociados:

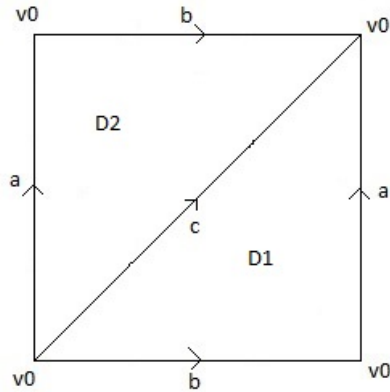


Figura 2. Complejo simplicial correspondiente a una pseudovariiedad homeomorfa a un toro.

$$C_2(T) = \text{gen}\{D1, D2\} \xrightarrow{\partial_2} C_1(T) = \text{gen}\{a, b, c\} \xrightarrow{\partial_1} C_0(T) = \text{gen}\{v_0\} \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Calculando las fronteras de los simplejo que generan estos grupos, obtendremos los grupos de homología.  $\partial D_2 = a + b - c$ ,  $\partial D_1 = a + b - c$  y  $\partial a = \partial b = \partial c = 0$ . Entonces

$$H_0(T) = \ker \partial_0 / \text{Im } \partial_1 = C_0(T) / \{0\} \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1(T) = \ker \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = C_1(T) / \text{gen}\{a + b - c\} \cong \frac{\text{gen}\{a\} \oplus \text{gen}\{b\} \oplus \text{gen}\{c\}}{\text{gen}\{a + b - c\}} \cong \mathbb{Z}^2$$

$$H_2(T) = \ker \partial_2 / \text{Im } \partial_3 = \text{gen}\{D1 - D2\} / \{0\} \cong \mathbb{Z}$$

### 2.3.3. Grupo fundamental

#### Homotopía de caminos

**Definición 26** (Homotópico, nulamente homotópico). Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas entre los espacios topológicos  $X$  e  $Y$ . Decimos que  $f$  y  $g$  son homotópicas si existe una función continua

$$F : X \times [0, 1] \mapsto Y$$

tal que  $F(x, 0) = f(x)$  y  $F(x, 1) = g(x)$ , y denotamos  $f \cong g$ . Si  $f$  es constante, entonces es llamada nulamente homotópica.

**Definición 27** (Camino). Dado un espacio topológico  $X$  y dos puntos  $x_0, x_1$ , llamamos camino, de  $x_0$  a  $x_1$ , a una función continua  $f : [0, 1] \mapsto X$ , tal que  $f(0) = x_0$  y  $f(1) = x_1$ .

**Definición 28** (Homotopía de caminos). Dados dos caminos  $f$  y  $g$  sobre el espacio topológico  $X$ , decimos que  $f$  y  $g$  son caminos homotópicos, y denotamos  $f \cong_p g$ , si existe un función continua

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto X \tag{22}$$

tal que  $F(s, 0) = f(s)$ ,  $F(s, 1) = g(s)$ ,  $F(0, t) = f(0) = g(0)$  y  $F(1, t) = f(1) = g(1)$ .

**Definición 29** (Operador  $*$ ). Sea  $f$  un camino del punto  $x_0$  a  $x_1$ , y  $g$  un camino de  $x_1$  a  $x_2$  definimos  $f * g$  como

$$f * g = \begin{cases} f(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ g(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} \tag{23}$$

Las relaciones de homotopía mencionadas anteriormente definen un clase de equivalencia ( $\cong_p$ ) en cada caso: para caminos y mapeos continuos. Denotando la clase del camino  $f$  como  $[f]$ , es inmediato ver que dado un camino  $g$ , si  $f * g$  esta bien definido, se tiene que  $[f * g] = [f] * [g]$ .

**Teorema 8.** *La operación  $*$  sobre las clases de equivalencia de caminos satisface las propiedades de un grupoide :*

- *Sean  $f, g$  y  $h$  caminos, si  $[f] * ([g] * [h])$  esta bien definido, entonces es igual a  $([f] * [g]) * [h]$ .*
- *Dado un punto  $x$  llamamos camino identidad al camino  $e_x \mapsto x$ . Si  $f$  es un camino en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$  entonces  $[f] * [e_{x_1}] = [f]$  y  $[e_{x_0}] * [f] = [f]$ .*
- *Dado un camino  $f$  en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$ , sea  $\bar{f}$  el camino  $\bar{f}(s) = f(1 - s)$ . Este camino es llamado inverso y se tiene que  $[e_{x_0}] = [f] * [\bar{f}]$  y  $[e_{x_1}] = [\bar{f}] * [f]$ .*

*Demostración.* Es claro que si  $Y$  es otro espacio topológico, y  $k$  es un mapeo continuo entre  $X$  e  $Y$  entonces:  $f \cong_p f' \Rightarrow k \circ f \cong_p k \circ f'$  y que  $k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$ .

Ahora bien, sea  $e_0$  el camino de  $I = [0, 1]$  a el mismo cuyo única imagen es 0, entonces  $e_0 * i \cong_p i$  (gracias a la convexidad de  $I$ ) donde  $i$  es el mapeo identidad de  $I$ . Dado que  $f = f \circ i$ , por la segunda propiedad enunciada al principio, se tiene que  $f \cong_p f \circ (e_0 * i) = (f \circ e_0) * (f \circ i) = e_{x_0} * f$ . Un argumento análogo, partiendo de que  $i \cong_p i * e_1$  muestra que  $f = f * e_{x_1}$  lo que demuestra la existencia de identidades por derecha e izquierda.

Para mostrar la existencia de inversas basta con definir un camino inverso en  $I$  del mapeo  $i$  como  $\bar{i}(s) \equiv i(1 - s)$ . De esto se obtiene que,  $i * \bar{i} \cong_p e_0$  por lo que (por la segunda propiedad enunciada al principio)  $f \circ (i * \bar{i}) = (f \circ i) * (f \circ \bar{i}) = f * \bar{f}$ , y dado que,  $f \circ e_0 = e_{x_0}$  se tiene que,  $[e_{x_0}] = [f] * [\bar{f}]$ . Una construcción análoga demuestra  $[e_{x_1}] = [\bar{f}] * [f]$ .

Para probar la primera propiedad usamos los conocidos como mapeos lineales positivos. Esto es, dados 2 intervalos cerrados  $[a, b]$   $[c, d]$ , la función lineal  $p_{ab}^{cd}(x)$  tal que  $p_{ab}^{cd}(a) = c$  y  $p_{ab}^{cd}(b) = d$ . Con esto, la definición de el operador  $*$  puede escribirse como

$$f * g = \begin{cases} f(p_{0\frac{1}{2}}^{01}(s)) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ g(p_{\frac{1}{2}1}^{01}(s)) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} \quad (24)$$

Ahora, con el uso del mapeo lineal positivo definimos el triple producto. Dado  $a, b \in [0, 1]$ , con  $a < b$ , el camino  $K_{ab}$  se define como

$$K_{ab} = \begin{cases} f(p_{0a}^{01}(x)) & x \in [0, a] \\ g(p_{ab}^{01}(x)) & x \in [a, b] \\ h(p_{b1}^{01}(x)) & x \in [b, 1] \end{cases} \quad (25)$$

Mostraremos que  $[K_{ab}]$  no depende de la escogencia de  $a, b$ . Con esto, seleccionando  $a = 1/2$  y  $b = 3/4$  se tendría  $f * (g * h)$ , mientras que con  $a = 1/4$  y  $b = 1/2$   $K_{ab} = (f * g) * h$ .

Considere un par de números  $c, d \in [0, 1]$  tal que  $c < d$ . Sea  $\bar{p} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

una función continua tal que al restringir la  $\bar{p}$  a los diferentes intervalos  $[0, a]$ ,  $[a, b]$  y  $[b, 1]$ , esta coincide con los mapeos lineales positivos definidos en los intervalos  $[0, c]$ ,  $[c, d]$  y  $[d, 1]$  respectivamente. Es decir,  $\bar{p}|_{[0,a]}(x) = p_{0a}^{0c}(x)$ ,  $\bar{p}|_{[a,b]}(x) = p_{ab}^{cd}(x)$  y  $\bar{p}|_{[b,1]}(x) = p_{b1}^{d1}(x)$ . Por tanto  $K_{cd} \circ \bar{p} = K_{ab}$ , y dado que  $\bar{p}$  es lineal a trozos  $\bar{p} \cong_p i$ , por lo que por la propiedad del principio  $K_{cd} \cong_p K_{ab}$ .  $\square$

**Corolario 8.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0$  un punto de  $X$ . La clase de equivalencia de caminos que empiezan y terminan en  $x_0$  forman un grupo con la operación  $*$ . A este grupo lo llamaremos el grupo fundamental relativo al punto base  $x_0$ , y denotaremos como  $\pi_1(X, x_0)$ .*

## 2.4. Geometría Riemanniana

Como veremos desde el comienzo del siguiente capítulo, la geometría diferencial es el lenguaje natural para hablar de magnetohidrodinámica. Por ello, introducimos los siguientes conceptos básicos.

**Definición 30** ( $n$ -variedad, carta coordenada). *Una  $n$ -variedad  $M$  es un espacio topológico compacto,  $T_2$ , conexo y en el cual cada punto posee una vecindad  $V_i$  homeomorfa a una bola abierta  $U_i$  en el espacio euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ . Este homeomorfismo  $\psi_i$  junto con el abierto  $U_i$  forma la carta coordenada.*

**Definición 31** (Vector, espacio tangente). *Dado  $p \in M$ , una función suave entre una variedad diferenciable y los reales  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , y un camino  $c(t)$  en  $M$  tal que  $c(0) = p$ . Llamamos vector al operador derivada direccional, en  $p$ , de  $f$  a lo largo de  $c(t)$ . En términos de las cartas coordenadas un vector  $Z$*

$$Z[f] \equiv \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \Rightarrow Z \equiv Z^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (26)$$

donde  $Z^\mu = \left. \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0}$ . El conjunto de estos vectores forman un espacio vectorial

$\forall p \in M$ . Llamamos a este espacio el espacio tangente a la variedad en  $p$ , y lo denotamos como  $T_p M$ .

De esta definición vemos que cualquier vector puede ser expresado como combinación lineal de  $\{\partial/\partial x^\mu\}$ . Por tanto, estos vectores  $\partial/\partial x^\mu$  corresponden a una base coordenada.

**Definición 32** (1-forma, espacio cotangente). *Dado un  $p \in M$ , llamamos 1-forma cualquier función lineal entre los espacios tangentes y los reales. Por ello, el conjunto de 1-formas en  $p$  corresponde al espacio vectorial dual del espacio tangente. Nos referimos a este espacio como el espacio cotangente y lo denotamos como  $T_p^* M$*

Estos covectores o 1-formas pueden expandirse también en una base coordenada, dada por la base dual a la base coordenada de los vectores. Esta base será denotada como  $\{dx^\mu\}$  y la condición de dualidad viene dada por  $\langle \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\sigma \rangle = \delta_\mu^\sigma$ . Por tanto, una 1-forma  $\omega$  en la base coordenada puede escribirse como  $\omega_\mu dx^\mu$ .

Las definiciones anteriores hacen que una variedad diferenciable siempre tenga estructuras de espacios vectoriales en cada punto  $p$ . Por ello, dada una función  $f$  entre dos variedades diferenciables, se inducen mapeos sobre estos espacios tangentes y cotangentes.

**Definición 33** (Mapeos inducidos (pushforward y pullback)). *Dada una función suave  $f : M \rightarrow N$  entre dos variedades diferenciables  $M$  y  $N$ . Llamamos mapeo diferencial (pushforward) a*

$$f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, \quad (27)$$

tal que, dada  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$  suave y  $V \in T_p M$

$$(f_* V)[g] \equiv V[g \circ f]. \quad (28)$$

Por otro lado, denotamos como  $f^*$  al mapeo transpuesto de  $f_*$  (pullback)

$$f^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M. \quad (29)$$

**Definición 34** (Tensor de tipo  $(q, r)$ ). Llamamos tensor de tipo  $(q, r)$  al objeto multilineal  $T$  que mapea  $q$  elementos del espacio tangente y  $r$  del cotangente a un número real, para cada  $p \in M$

$$T : (T_p^* M)^q \times (T_p M)^r \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (30)$$

Usando las bases coordenadas para vectores y formas que introducimos anteriormente, podemos escribir un tensor arbitrario de tipo  $(q, r)$  como

$$T = T_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_q}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\lambda_2}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\lambda_r}} \otimes dx^{\sigma_1} \otimes dx^{\sigma_2} \otimes \dots \otimes dx^{\sigma_q}, \quad (31)$$

donde  $\otimes$  corresponde al producto tensorial usual. De esta forma, es posible escribir la acción de mapeos inducidos para un tensor, haciéndolos actuar en cada componente. En otras palabras, los mapeos inducidos por difeomorfismos en un tensor tipo  $(q, r)$  actúan en cada base de  $(T_p^* M)^q$  y  $(T_p M)^r$  de manera independiente. Por tanto, dado un difeomorfismo  $\phi$  de  $M$  a  $M$

$$T = T_{\mu}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \otimes dx^{\mu} \Rightarrow \phi^* T = T_{\nu}^{\alpha} \frac{\partial y^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^{\sigma}} \otimes \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\theta}} dy^{\theta}. \quad (32)$$

Tal y como sucede para el espacio euclideo, una asignación suave de vectores en cada punto de  $M$  es llamado campo vectorial. Análogamente una asignación suave de formas y tensores en cada punto de  $M$  es llamado 1-forma diferencial y campo tensorial respectivamente.

Dentro de los campos tensoriales existe un tipo de campo particular, que es de gran relevancia: las  $r$ -formas diferenciales. Su importancia yace en a su relación con la integración en variedades (esto último lo veremos con más detalle en la siguiente sección).

**Definición 35** ( $r$ -forma diferencial, producto exterior). *Decimos que un tensor de tipo  $(0, r)$  es una  $r$ -forma diferencial si es totalmente antisimétrico. Llamamos producto exterior  $\wedge$  a la antisimetrización del producto tensorial.*

Con esto, el producto exterior entre dos o tres 1-formas  $\{dx^{\mu_i}\}$  puede escribirse como

$$dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} - dx^{\nu} \otimes dx^{\mu}, \quad (33)$$

$$dx^{\lambda} \wedge dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = dx^{\lambda} \otimes dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} + dx^{\nu} \otimes dx^{\lambda} \otimes dx^{\mu} \quad (34)$$

$$+ dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\lambda} - dx^{\lambda} \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\mu} \quad (35)$$

$$- dx^{\nu} \otimes dx^{\mu} \otimes dx^{\lambda} - dx^{\mu} \otimes dx^{\lambda} \otimes dx^{\nu}. \quad (36)$$

De esta manera, una  $r$ -forma  $\omega$  puede representarse en la base coordenada como

$\omega = \omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ . De ahora en adelante nos referiremos al conjunto de  $r$ -formas de  $M$  como  $\Omega^k(M)$ , y denotaremos su aplicación a un vector  $j$  como  $i_j$ . En otras palabras, sea  $\Gamma$  una  $p$ -forma (y por tanto un tensor totalmente antisimétrico de  $(TM)^p$ ) denotaremos  $i_j\Gamma \equiv \Gamma(j, \dots)$ .

**Definición 36** (derivada exterior). *La derivada exterior  $d_r$  es un mapeo entre el conjunto de  $r$ -formas y  $(r + 1)$ -formas, tal que*

$$\omega = \omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \mapsto_{d_r} d\omega = \partial_\lambda \omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r} dx^\lambda \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (37)$$

En algunas ocasiones es necesario que la variedad diferenciable tenga una estructura de producto punto para cada espacio tangente, ya que esto induce nociones de distancia en la variedad (como sucede en relatividad). En este trabajo será necesario introducir esta estructura que será definida a continuación.

**Definición 37** (Variedad Riemanniana/ pseudoriemanniana). *Una variedad riemanniana es un par  $(M, g)$  conformado por una variedad diferenciable  $M$  y un campo tensorial  $g$  de tipo  $(0, 2)$  que satisface la siguientes propiedades para todo punto  $p \in M$ .*

- $g(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = g(\mathbf{V}, \mathbf{U}) \forall \mathbf{V}, \mathbf{U} \in T_p(M)$ .
- $g(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \geq 0 \forall \mathbf{U} \in T_p(M)$ , y solo se tiene  $g(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0$  cuando  $\mathbf{U} = 0$ .

*Por otro lado, decimos que  $(M, g)$  es una variedad pseudoriemanniana si  $g$  satisface para todo  $p \in M$*

- $g(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = g(\mathbf{V}, \mathbf{U}) \forall \mathbf{V}, \mathbf{U} \in T_p(M)$ .

- Si  $g(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = 0 \forall \mathbf{U} \in T_p(M) \Rightarrow \mathbf{V} = 0$ .

Con la introducción de la estructura métrica en la variedad diferenciable es posible definir un isomorfismo entre formas y vectores dado por  $g(\cdot, \mathbf{B})$ . Cuando una 1-forma  $\omega_B = g(\cdot, \mathbf{B})$ , decimos que  $\mathbf{B}$  y  $\omega_B$  son duales métricos, y denotamos  $\mathbf{B} = g^\# \omega_B$  o  $g^\flat \mathbf{B} = \omega_B$ . Estos isomorfismos permiten definir los operadores de divergencia y rotacional, y producto cruz, en variedades riemanninas, mediante el operador de estrella de Hodge que definiremos a continuación.

**Definición 38** (Producto interno de  $k$ -formas). Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana, y  $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ ,  $\eta = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k$  unas  $k$ -formas, las cuales son un producto exterior consecutivo de 1-formas. Llamamos producto interior de Hodge al mapeo bilinear

$$(\cdot) : \Omega^k(M) \otimes \Omega^k(M) \rightarrow \Omega(M)^0 \quad (38)$$

$$(\alpha, \eta) \rightarrow \det(g(g^\# \alpha_i, g^\# \eta_j)), \quad (39)$$

donde  $\det(A_{ij})$  es el determinante del operador  $A$ . Dado un  $p \in M$  fijo,  $(\cdot)$  constituye un producto punto para  $\Omega^k(M)|_p$ .

**Definición 39** (Operador estrella de Hodge). Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana  $n$ -dimensional, con una forma de volumen  $\mu$ . El operador estrella de Hodge es el mapeo lineal

$$\star : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M), \quad (40)$$

de tal suerte que

$$\alpha \wedge \star \eta = (\alpha | \eta) \mu \quad \forall \alpha, \eta \in \Omega^k(M). \quad (41)$$

Con esto, es posible dotar a  $\Omega^k(M)$  de un producto punto siempre que  $M$  sea compacta

**Definición 40** (Producto interno de hodge). *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana compacta, llamamos producto interno de hodge al mapeo lineal*

$$\langle, \rangle : \Omega^k(M) \otimes \Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad (42)$$

$$(\alpha, \eta) \rightarrow \int_M (\alpha | \eta) \mu \quad (43)$$

$$\rightarrow \int_M \alpha \wedge \star \eta, \quad (44)$$

done  $\mu$  es la forma de volumen de  $M$ .

Finalmente, este operador permite definir naturalmente la divergencia, rotacional y producto cruz de manera geométrica.

**Definición 41** (Producto cruz). *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana, y  $A, B$  campos vectoriales en ella. Llamamos producto cruz entre  $A$  y  $B$  al campo vectorial*

$$g^\#(\star(g^\flat A \wedge g^\flat B)). \quad (45)$$

**Definición 42** (Divergencia, rotacional). *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana  $n$ -dimensional, y  $F$  un campo vectorial sobre ella. Llamamos divergencia a la 0-forma (función suave)*

$$\star d \star (g^b \mathbf{F}), \quad (46)$$

y denotamos como  $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ . Por otro lado, decimos que el rotacional de  $\mathbf{F}$  es el campo vectorial

$$g^\# \star d(g^b \mathbf{F}), \quad (47)$$

y denotamos como  $\operatorname{curl}(\mathbf{F})$ .

También es posible definir la divergencia sin el uso de la métrica, mediante  $\mu$ . Esto se hace con la ecuación

$$\mathcal{L}_V \mu = (\operatorname{div}(\mathbf{V}))\mu, \quad (48)$$

donde  $\mathcal{L}_V$  será definida en la siguiente subsección. Cuando  $\mu$  corresponde a la forma de volumen métrica, las definiciones coinciden.

**2.4.1. Derivada de Lie** La noción de derivada es de suma importancia en la física en general, y la mecánica de fluidos no es la excepción. Debido a esto definiremos la derivada que, como discutiremos en el siguiente capítulo, surge como necesidad física en la física de fluidos.

**Definición 43** (Curva integral). *sea  $X$  un campo vectorial en  $M$  una variedad diferenciable. Una curva integral  $x(t)$  de  $X$  es un camino en  $M$  en el que el vector tangente en  $x(t)$  es  $X|_x$ . Esto es, dada una carta coordenada*

$$\frac{dx^\mu}{dt} = X^\mu(x(t)) \quad (49)$$

**Definición 44** (Flujo de un campo vectorial). *Sea  $\sigma^\mu(t, x^\mu(0))$  un mapeo  $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ , tal que corresponde a una curva integral del campo vectorial  $X$ , que pasa por  $x_0 = x(0)$  en  $t = 0$ , es decir  $\sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu$ . Decimos que  $\sigma(t, x_0)$  es un flujo generado por  $X$ .*

Este flujo satisface

$$\frac{d}{dt}\sigma^\mu(t, \sigma^\mu(s, x_0)) = X^\mu(\sigma(t, \sigma^\mu(s, x_0))), \quad (50)$$

lo que permite definir un grupo uniparamétrico bajo la composición

$$\sigma_t(x) \equiv \sigma(t, x) \Rightarrow \sigma_t(\sigma_s(x)) = \sigma_{t+s}(x), \quad \sigma_0(x) = x, \quad \sigma_{-t}(x) = (\sigma_t(x))^{-1}. \quad (51)$$

Además de esto, este flujo permite definir una derivada a lo largo de las curvas integrales:

**Definición 45** (Derivada de Lie). *Sean  $\sigma(t, x)$  y  $\tau(t, x)$  flujos generados por los campos vectoriales  $X$  e  $Y$  respectivamente*

$$\frac{d\sigma^\mu(s, x)}{ds} = X^\mu(\sigma(s, x)) \quad (52)$$

$$\frac{d\tau^\mu(t, x)}{dt} = Y^\mu(\tau(t, x)). \quad (53)$$

*Llamamos derivada de Lie del vector  $Y$  a lo largo del flujo  $\sigma_t$  de  $X$  a límite*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ (\sigma_{-\varepsilon})_* Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} - Y|_x \right], \quad (54)$$

y denotamos como  $\mathcal{L}_X Y$  o  $[X, Y]$ .

En una base coordenada donde  $X = X^\mu \partial_\mu$  y  $Y = Y^\mu \partial_\mu$  se tiene que

$$\mathcal{L}_X Y = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) \partial_\nu. \quad (55)$$

Esta noción de derivada puede ser extendida a formas con el límite

$$\mathcal{L}_X \omega \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ (\sigma_\varepsilon)^* \omega|_{\sigma_\varepsilon(x)} - \omega|_x \right], \quad (56)$$

el cual puede escribirse en una base coordenada como

$$\mathcal{L}_X \omega = (X^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \partial_\mu X^\nu \omega_\nu) dx^\mu, \quad (57)$$

donde  $\omega = \omega_\nu dx^\nu$ . Así mismo, la derivada de Lie también puede ser extendida a campos tensoriales de tipo  $(q, r)$  usando en la definición  $\bigotimes_{i=1}^q (\sigma_\varepsilon)^* \otimes \bigotimes_{i=1}^r (\sigma_{-\varepsilon})_*$ , en lugar de  $(\sigma_{-\varepsilon})_*$ .

## 2.5. Grupos y álgebras de Lie

Los grupos de Lie son algo transversal en física teórica ya permiten el estudio de simetrías en la naturaleza. Debido a esto, es necesario introducir algunos conceptos de **arnold1999topological** para posteriormente hacer uso de ellos en el capítulo 3.

**Definición 46** (Grupo de Lie). *Sea  $G$  un conjunto de transformaciones suaves de una variedad  $M$  a si misma. Decimos que  $G$  es un grupo de Lie si tiene una estruc-*

tura diferenciable y si cumple las siguientes propiedades

- $\forall g, h \in G$   $g \circ h \in G$ , siendo  $\circ$  la composición usual que actúa de manera suave.
- $\forall g \in G$  existe  $g^{-1} \in G$  suave.

**Definición 47** (Álgebra de Lie). Llamamos álgebra de Lie del grupo  $G$ , y denotamos como  $\mathfrak{g}$ , al espacio tangente a la identidad de  $G$  ( $T_e G$ ).

**Definición 48** (Traslación a izquierda y derecha). Dado  $g \in G$  llamamos traslación a izquierda y derecha a los mapeos  $L_g : h \mapsto gh$  y  $R_g : h \mapsto hg$ , respectivamente.

**Definición 49** (Automorfismo interno). Llamamos automorfismo interno, y denotamos como  $A_g$ , al difeomorfismo en  $G$  dado por  $h \mapsto ghg^{-1}$ .

**Definición 50** (Operador adjunto del grupo). El diferencial de  $A_g$  restringido a la identidad  $e$  es llamado operador adjunto del grupo, y denotado como  $Ad_g$ . De esta forma

$$Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad Ad_g(a) = (A_{g*}|_e)a. \quad (58)$$

Dado que  $A_{gh} = A_g A_h$ , se tiene también que  $Ad_{gh} = Ad_g Ad_h$ . En consecuencia,  $Ad$  puede pensarse como un mapeo del álgebra al grupo.

**Definición 51** (Representación adjunta del álgebra de Lie). El diferencial de

$$Ad : G \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (59)$$

restringido a la identidad es llamado Representación adjunta del álgebra de Lie:

$$ad = Ad_{*e} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*, \quad ad_\xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Ad_{g(t)}, \quad (60)$$

donde  $g(t)$  es una curva en el grupo  $G$  de tal suerte que  $g(0) = e$  y  $\dot{g}(0) = \xi$ .

**Definición 52** (Representación coadjunta del álgebra de Lie). *La representación coadjunta de un grupo  $G$  en el espacio  $\mathfrak{g}^*$  corresponde a la asignación de cada  $g \in G$  con la transformación lineal*

$$Ad_g^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^* \quad (61)$$

dual (transpuesto) a la transformación  $Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ .

**Definición 53** (Conmutador). *El conmutador de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es la operación  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  definida por  $[a, b] \equiv Ad_a b$ .*

**Definición 54** (Grupo de órbita adjunta). *Dado un elemento  $\xi \in \mathfrak{g}$ , llamamos órbita al conjunto*

$$Orbit(\xi) = \{Ad_g \xi : g \in G\}. \quad (62)$$

## 2.6. Integración en Variedades

En esta sección usaremos los resultados en topología algebraica y geometría Riemanniana para definir la integración de formas en una variedad arbitraria  $M$ , basados en **nakahara2003geometry** y **flanders1963differential**. Esto es necesario porque la integración en variedades es fundamental a lo largo de los próximos capítulos, debido a que es mediante la integración que las leyes de conservación locales pasan a ser globales.

Sea  $M$  un variedad,  $\sigma_r$  un  $r$ -simplejo en  $\mathbb{R}^r$  y  $f : \sigma_r \rightarrow M$  un mapeo suave.

**Definición 55** (*r*-simplejo, *r*-cadena). Llamamos *r*-simplejo a la imagen de  $\sigma_r$  bajo  $f$ , y denotamos como  $s_r = f(\sigma_r)$ . Dado un conjunto de *r*-simplejos  $\{s_{r,i}\}$  con coeficientes reales  $\{a_i\}$ , llamamos *r*-cadena a

$$c = \sum_i a_i s_{r,i}. \quad (63)$$

**Definición 56** (Grupo de cadenas, frontera). Llamamos grupo de cadenas, y denotamos  $C_r(M)$ , al grupo formado por el conjunto de *r*-cadenas bajo la suma de coeficientes. Decimos que un  $(r - 1)$ -simplejo es frontera de  $s_r$  si es la imagen de  $\partial\sigma_r$  bajo  $f$ , es decir  $f(\partial\sigma_r)$ . Lo denotamos de la misma manera  $\partial s_r$ .

Es claro que, debido a los resultados para simplejos en el espacio euclidiano,  $\partial : C_r(M) \rightarrow C_{r-1}(M)$  es nilpotente. Por consecuencia, es posible definir en variedades los grupos de frontera, grupos de ciclos y grupos de homología.

**Definición 57** (*r*-ciclo, *r*-frontera, grupo de ciclos, grupo de fronteras, grupo de homología). Sea  $c_r$  una *r*-cadena. Si  $\partial c_r = 0$  decimos que  $c_r$  es un *r*-ciclo. El grupo de los *r*-ciclos bajo la suma es llamado grupo de ciclos y es denotado como  $Z_r(M)$ . Este corresponde a  $\ker(\partial_r)$ .

Sea  $c_r$  una *r*-cadena. si existe una  $(r + 1)$ -cadena  $c_{r+1}$  tal que  $c_r = \partial c_{r+1}$ , decimos que  $c_r$  es una *r*-frontera. El grupo de las *r*-fronteras es llamado grupo de fronteras y denotado como  $B_r(M)$ . Este corresponde a  $\partial_{r+1}(C_{r+1}(M))$ .

Llamamos grupo de homología, y denotamos como  $H_r(M)$ , al coset de  $B_r(M)$  en  $Z_r(M)$ , es decir

$$H_r(M) \equiv Z_r(M)/B_r(M). \quad (64)$$

Con esto ya es posible definir integración en variedades.

**Definición 58.** Sea  $\omega_p$  una  $p$ -forma y  $c = \sum_i a_i s_{p,i}$  una  $p$ -cadena en  $M$ . Definimos la integración de  $\omega_p$  en  $c$  como

$$\int_c \omega_p = \sum_i a_i \int_{s_{p,i}} \omega_p = \sum_i a_i \int_{\sigma_p} f^* \omega_p. \quad (65)$$

Con esta última definición también se generaliza el teorema de Stokes para variedades.

**Teorema 9** (Teorema de Stokes). Sea  $c \in C_r(M)$  y  $\omega$  una  $(r - 1)$ -forma ( $\omega \in \Omega^{r-1}(M)$ ), entonces

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \quad (66)$$

**2.6.1. Grupos de Cohomología** Es esta sección estudiaremos los grupos de cohomología de una variedad orientable. Con esto veremos una relación clara entre los grupos de simplejos en variedades, y las formas diferenciales.

Sea  $M$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y orientable.

**Definición 59** (Grupo de cociclos, grupo de cofronteras). El conjunto de las  $r$ -formas diferenciales  $\omega$  en  $M$  cerradas ( $d\omega = 0$ ) con la suma es llamado grupo de cociclos, y denotado como  $Z^r(M)$ . Este grupo corresponde al kernel del mapeo derivada exterior sobre el conjunto de  $r$ -formas.

El conjunto de las  $r$ -formas diferenciales  $\omega$  en  $M$  exactas (aquellas para las que existe una  $(r - 1)$ -forma  $\eta$  tal que  $d\eta = \omega$ ) con la operación de suma, es llamado el grupo de cofronteras y denotado como  $B^r(M)$ . Este grupo corresponde a la imagen del mapeo derivada exterior sobre el conjunto de las  $(r - 1)$ -formas.

Debido a la nilpotencia de la derivada exterior, es claro que  $B^r(M) \subset Z^r(M)$ . Por tanto, al igual que para los grupos de fronteras y de ciclos, existe el coset de  $B^r(M)$  en  $Z^r(M)$ .

**Definición 60** (Grupo de cohomología de Rham). *Dados los grupos anteriormente definidos, llamamos grupo de cohomología de Rham al coset de  $B^r(M)$  en  $Z^r(M)$ , y denotamos como*

$$H^r(M) \equiv Z^r(M)/B^r(M). \quad (67)$$

Los elementos de  $H^r(M, \mathbb{R})$  corresponden entonces a la clase de equivalencia de  $r$ -formas cerradas que difieren por una derivada exterior de una  $(r - 1)$ -forma. Es decir, cada elemento  $[\omega]$  es el conjunto  $[\omega] = \{\omega + d\varphi : \varphi \in \Omega^{r-1}(M)\}$ , con  $d\omega = 0$ .

**Dualidad de los grupos de cohomología y homología** Veremos ahora que los grupos de cohomología y homología son duales, y por tanto, deben ser isomorfos siempre que sean finito dimensionales.

Sea  $M$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional,  $C_r(M)$  el grupo de  $r$ -cadenas en  $M$  y  $\Omega^r(M)$  el conjunto de  $r$ -formas en  $M$ .

**Definición 61** (Producto interior). *Definimos el producto interior  $(,)$  entre formas y cadenas como*

$$(, ) : C_r(M) \times \Omega^r(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad (68)$$

$$(c, \omega) \mapsto \int_c \omega. \quad (69)$$

Con esta definición, el teorema de Stokes puede escribirse como  $(c, d\omega) = (\partial c, \omega)$ . Además de esto, debido a las características de los grupos ciclos, cociclos, de fronteras y cofronteras; este producto interno induce un producto interno entre elementos de  $H^r(M)$  y  $H_r(M)$ .

En efecto, sea  $[c] \in H_r(M)$  y  $[\omega] \in H^r(M)$ , con  $\omega + d\phi = \omega' \in [\omega]$  y  $c + \partial\bar{c} = c' \in [c]$

$$(c', \omega') = (c, \omega) + (c, d\phi) + (\partial\bar{c}, \omega) + (\partial\bar{c}, d\phi) \quad (70)$$

$$= (c, \omega) + (\partial c, \phi) + (\bar{c}, d\omega) + (\bar{c}, d^2\phi) = (c, \omega). \quad (71)$$

Por tanto solo habría que demostrar que este producto interno es no degenerado para ver que  $H_r(M)$  es dual a  $H^r(M)$ . Esto es consecuencia del teorema de Rham, que presentaremos a continuación. No habrá una demostración de este ya que su prueba no es para nada trivial **nakahara2003geometry**.

**Teorema 10** (Teorema de Rham). *Si  $M$  es una variedad compacta,  $H_r(M)$  y  $H^r(M)$  son finitodimensionales y el mapeo dado por*

$$\Lambda : H_r(M) \times H^r(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad (72)$$

$$([c], [\omega]) \mapsto (c, \omega), \quad (73)$$

*es bilinear y no degenerado.*

Note que con esto último se establece una relación entre orientabilidad de una variedad  $M$   $n$  dimensional, dada por una forma de volumen, y la noción de orientabilidad concebida en los grupos de homología discutidos anteriormente. Esto siempre y cuando el complejo simplicial corresponde a una  $n$ -pseudovariedad homeomorfa a  $M$ .

### 3. UNA INCURSIÓN EN LOS INVARIANTES TOPOLÓGICOS DE MHD

Los invariantes juegan un rol central y transversal en cualquier teoría física, ya que ellos revelan simetrías en la propia naturaleza. Esta revelación de simetrías puede ser de tal importancia como para describir por completo una teoría.

Por ejemplo, en la mecánica, la simetría de traslación espacial está caracterizada por la ley de conservación del momentum lineal. Incluso en los casos donde se rompe esta simetría, como lo es en presencia de fuerzas, el entendimiento de la ruptura de la simetría es clave para comprender y formular la física. En este caso concreto la formulación de la segunda ley de Newton, es consecuencia de la ruptura de la conservación del momentum lineal. En otras palabras, no hay concepto de fuerza sin ruptura de la simetría anteriormente mencionada.

En formulaciones de teorías de campos como el electromagnetismo, el grupo de simetrías de la acción caracteriza por completo la teoría, y por tanto a sus ecuaciones. En este caso el grupo de simetrías es  $U(1)$ , y las ecuaciones correspondientes son las de Maxwell.

Con esto en mente, conocer los invariantes en una teoría como la magnetohidrodinámica es fundamental para entender las simetrías correspondientes a un reactor de fusión. Si adicionalmente estos invariantes tienen un carácter topológico, esto nos permite entender las simetrías desde la topología. Por esta razón, en este capítulo nos centraremos en entender algunos de los invariantes topológicos en la magnetohidrodinámica, ver su significado físico, y como éste tiene efectivamente un carácter topológico.

### 3.1. Conservación e invariantes en MHD

Las teorías en física clásica suelen poseer leyes de conservación, y por su puesto, la magnetohidrodinámica no es la excepción. De hecho, basta con ver que la ecuación 7 corresponde a una ley fundamental de conservación: la de la masa. El estudio de estas leyes de conservación ha sido de gran interés para físicos y matemáticos, a lo largo de la historia.

Un ejemplo de esto en MHD es el conocido teorema de Alfvén **alfven1942existence**. Este teorema establece que en un fluido con cero resistividad (como sucede en MHD ideal), el campo magnético esta congelado en el fluido y se mueve a lo largo de el <sup>4</sup>. Como consecuencia de ello, el flujo magnético sobre una superficie que se mueve con el elemento de fluido es constante.

Si bien el caso del teorema de Alfvén es un ejemplo específico, tiene una característica que es fundamental en los invariantes en MHD, y de fluidos no disipativos: la necesidad de referirse al movimiento del fluido para expresar la conservación. Para entender mejor esta idea, haremos una analogía con la mecánica.

Considere un sistema mecánico con coordenadas generalizadas  $q^i$  y momentums generalizados  $p^i$ . Una función  $A(q^i, p^i)$  es un invariante del movimiento si  $A(q^i, p^i) = cte$  a lo largo de el. No obstante, el movimiento en la mecánica no es más que la evolución en el tiempo de las cantidades que caracterizan el sistema mecánico  $(q^i, p^i)$ , por lo que la condición de invariante se convierte en

---

<sup>4</sup> Físicamente esto se explica debido a que un movimiento perpendicular a las líneas de campo tiene como resultado corrientes de Foucault infinitas, y por tanto no es físicamente posible.

$$\frac{d}{dt}A(q^i(t), p^i(t)) = \frac{\partial}{\partial t}A + \{A, H\} = 0, \quad (74)$$

donde  $\{, \}$  corresponde al corchete de Poisson, y  $H$  es el hamiltoniano del sistema. En otras palabras, las cantidades conservadas en mecánica son constantes de movimiento porque no cambian en la dirección de los flujos de  $(q^i(t), p^i(t))$ .

De igual forma, en MHD e hidrodinámica, el valor de la velocidad del elemento de fluido  $\mathbf{V}$  da dirección a la evolución del mismo. Tanto es así que en la propia ecuación dinámica

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla). \quad (75)$$

Por consiguiente, cualquier ley de conservación local en MHD debe estar dada por un cambio total en el tiempo constituido por: una variación explícita en el tiempo  $\partial_t$  y un cambio temporal debido al flujo de  $\mathbf{V}$ . Esto último es la razón por la que es necesario definir el arrastre de Lie **invariants**.

### 3.2. Arrastre de Lie y geometrización de las ecuaciones MHD

Antes de definir el arrastre de Lie, es importante precisar la estructura matemática a la que haremos referencia, para las ecuaciones MHD. De ahora en adelante se supondrá que los campos vectoriales como la velocidad  $\mathbf{V}$  y campo magnético  $\mathbf{B}$  pertenecen al fibrado tangente  $TM$  de alguna 3-variedad Riemanniana  $M$  compacta y orientable. Para muchos casos, esta variedad no será más que una región contenida en el espacio euclidiano  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Sin embargo, cuando se refiera a una variedad en general se hará explícito.

La razón principal para enmarcar estas cantidades en el contexto de la geometría diferencial, es la necesidad de evolucionar temporalmente las cantidades físicas a través del flujo de  $\mathbf{V}$ , como discutimos anteriormente. Esta necesidad que parte de las propias ecuaciones MHD, y se convierte en una exigencia física para las leyes de conservación, hacen que de manera natural la derivada de Lie con respecto a la velocidad del fluido  $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}$  sea la artífice de este cambio temporal. En otras palabras, la geometría diferencial es lo más natural para en marcar las leyes de conservación en MHD porque la derivada de Lie es la derivada definida con respecto a flujos de fase de campos vectoriales.<sup>5</sup>

**Definición 62** (Arrastre de Lie). *Sea  $G$  un objeto geométrico (tensor, forma, vector etc..) construido con base a cantidades físicas en MHD ideal (o de hidrodinámica no disipativa), se dice que es un advected o arrastrado por el flujo **webb2018magnetohydrodynam** de  $\mathbf{V}$  si<sup>6</sup>*

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{G} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \right) \mathbf{G} = 0. \quad (76)$$

*Dada una solución de magnetohidrodinámica en  $M$  (bien sea una región de  $\mathbb{R}^3$  o una 3-variedad) El grupo de  $r$ -formas arrastradas, con la operación de suma, sera denotado como  $\Sigma^r(M)$ ; mientras que el de vectores como  $\Sigma_1(M)$ .*

Este formalismo, que ya hemos justificado desde la física, nos permite ahora cons-

---

<sup>5</sup> Note que debe ser la derivada de Lie y no una derivada covariante  $\nabla_{\mathbf{V}}$  ya que lo importante en este caso no es la noción de transporte paralelo, sino la de flujo de fase, o el grupo uniparametrico de las curvas integrales de un campo.

<sup>6</sup> Note que se consideran objetos geométricos cuyas componentes pueden depender explícitamente del tiempo, sin que las bases coordenadas lo hagan. De esta forma,  $\partial_t$  conmuta con productos tensoriales  $\partial_{x_i}$  y  $dx^i$ .

truir diversas leyes de conservación locales. Por ejemplo, considerando la 3-forma de masa  $\rho_m dV = \mathbf{m}$  y usando la definición anterior tenemos

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \right) \rho_m dV = (\partial_t \rho_m + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V})) dV = 0. \quad (77)$$

Geoméricamente la relación anterior nos dice que la 3-forma  $\mathbf{m}$  no cambian en el tiempo ya que, debido a la conservación de masa, los cambios explícitos respecto al tiempo ( $\partial_t$ ) se ven compensados con el arrastre de la forma por la velocidad del fluido. Esto hace que la ecuación de conservación de la masa pueda escribirse unicamente con objetos geoméricos (como se esperaría ya que la física no debe depender de las coordenadas **thorne2000gravitation**).

La conservación del flujo magnético, de una superficie arrastrada por el fluido, también puede escribirse de forma más compacta con este formalismo. Considere la 2-forma  $\alpha_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ , entonces

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \right) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = (\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{V}) + \mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{B})) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (78)$$

Note como este formalismo no solo da información clave de las leyes de conservación, sino que nos permite escribir las ecuaciones MHD ideal de manera geométrica. De hecho solo con las leyes de conservación de la masa, el flujo y la de evolución adiabática en forma geométrica, ya es posible escribir las ecuaciones 7, 10, 9, y parte de 11 como:

$$d\alpha_B = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \right) \alpha_B = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \right) \mathbf{m} = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \right) \frac{p}{\rho_m^\gamma} = 0, \quad (79)$$

donde la exactitud de la forma  $\alpha$  es consecuencia de la ley de Gauss para el campo magnético.

Por ello, si quisiéramos reescribir por completo las ecuaciones MHD ideal de manera geométrica; bastaría con definir  $\omega_V = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x}$ , y usar el dual de hodge junto con el producto exterior **landers1963differential**, para adicionar a 79 las siguientes ecuaciones

$$\omega_j = \star d \star \alpha_B, \rho_m \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) \omega_V = dp + \rho_m d \left( \frac{V^2}{2} \right) + \star(\omega_j \wedge \star \alpha_B) \quad (80)$$

$$= dp + \rho_m d \left( \frac{V^2}{2} \right) - i_j(\alpha_B), \quad (81)$$

donde  $p$  es la presión del fluido y  $\omega_j$  es una 1-forma cuyo dual métrico es el vector densidad de corriente. Con estas ecuaciones 81 se completaría 11 y se tendría 8, teniendo así todas las ecuaciones MHD ideal.

Análogamente, es posible hacer lo mismo para las ecuaciones de Euler incompresibles. Estas pueden escribirse como

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \times ((\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}), \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) = 0 \quad (82)$$

en  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto  $d\omega_V = \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$ , y las ecuaciones geometrizadas se reducirían a

$$\alpha_V \equiv d\omega_V = \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (83)$$

$$d\alpha_V = 0, \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) \alpha_V = 0, \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) \mathbf{m} = 0 \quad (84)$$

Con base a este formalismo y propiedades de la derivada de Lie, veremos algunos teoremas que permiten obtener leyes de conservación a partir de otras conocidas basados en los resultados presentados en **webb2018magnetohydrodynamics** y **tur1993invariants**.

**Teoremas relacionados con Arrastres de Lie** A continuación veremos algunos resultados que nos permiten construir invariantes locales en base a otros conocidos. En todos los teoremas siguientes hay un protagonismo claro de las formas diferenciales y los campos vectoriales, en lugar de los tensores. La razón de esto es que, aunque los tensores también son objetos geométricos, las formas presentan un camino natural para convertir los invariantes locales, a globales, por medio de la integración.

**Teorema 11.** *si  $\omega^p$  es una  $p$  forma invariante o arrastrada de Lie, entonces también lo es su derivada exterior  $d\omega^p = \omega^{p+1}$*

*Demostración.* Por definición

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V\right) \omega^p = 0, \quad (85)$$

y usando la formula de Cartán para la derivada de Lie  $(d(i_X) + i_X d) \omega = \mathcal{L}_X \omega$  es posible ver que la derivada de Lie conmuta con la derivada exterior. Dado que  $\partial_t$  también conmuta con esta, la ecuación anterior es valida para  $\omega^{p+1}$ .

□

**Teorema 12.** *si  $\omega_1^p$  es una  $p$  forma invariante o arrastrada de Lie, y  $\omega_2^l$  una  $l$ -forma invariante, entonces su producto exterior  $\omega_1^p \wedge \omega_2^l$  también lo es*

*Demostración.* De manera similar a la demostración anterior, esto es consecuencia directa de

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V\right)\omega = 0, \quad (86)$$

y la formula de Cartán para la derivada de Lie  $(d(i_X) + i_X d)\omega = \mathcal{L}_X\omega$ . Esto junto con las propiedades del propiedades asociativas y distributivas del producto exterior, la derivada exterior y el producto interior llevan a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_1^p \wedge \omega_2^l) = \frac{\partial \omega_1^p}{\partial t} \wedge \omega_2^l + \omega_1^p \wedge \frac{\partial \omega_2^l}{\partial t} \quad (87)$$

$$\mathcal{L}_V(\omega_1^p \wedge \omega_2^l) = \mathcal{L}_V(\omega_1^p) \wedge \omega_2^l + \omega_1^p \wedge \mathcal{L}_V(\omega_2^l) \Rightarrow \quad (88)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V\right)\omega_1^p \wedge \omega_2^l = \left(\frac{\partial}{\partial t}\omega_1^p + \mathcal{L}_V\omega_1^p\right) \wedge \omega_2^l \quad (89)$$

$$+ \omega_1^p \wedge \left(\frac{\partial}{\partial t}\omega_2^l + \mathcal{L}_V\omega_2^l\right) = 0 \quad (90)$$

$$(91)$$

□

**Teorema 13.** *si  $\omega^p$  es una  $p$  forma invariante o arrastrada de Lie, y  $J$  es un vector también invariante, entonces  $\omega^{p-1} = i_J\omega^p$  es una  $(p-1)$ -forma que se conserva*

*Demostración.* Para esta demostración usaremos las relaciones de conmutación de la derivada de Lie y el producto interno  $\mathcal{L}_V i_J - i_J \mathcal{L}_V = i_{[V, J]}$  ( $[V, J] = \mathcal{L}_V J$ ), la relación conmutación de  $\partial_t$  con el producto interno  $\partial_t i_J - i_J \partial_t = i_{\partial_t J}$  y la linealidad

del mismo  $i_J + i_{[V, J]} = i_{J+[V, J]}$ .

$$i_J (\partial_t + \mathcal{L}_V) \omega^p = 0 \Rightarrow \quad (92)$$

$$\partial_t i_J \omega^p - i_{\partial_t J} \omega^p - i_{[V, J]} \omega^p + \mathcal{L}_V i_J \omega^p = 0 \Rightarrow \quad (93)$$

$$(\partial_t + \mathcal{L}_V) i_J \omega^p - i_{J+[V, J]} \omega^p = 0 = (\partial_t + \mathcal{L}_V) i_J \omega^p \quad (94)$$

lo que termina la demostración. □

**Teorema 14.** *si  $\omega^p$  es una  $p$  forma invariante o arrastrada de Lie, y  $J$  es un vector también invariante, entonces  $\mathcal{L}_J \omega^p$  es una  $p$ -forma que se conserva*

*Demostración.* Usando la formula de Cartán se tiene

$$\mathcal{L}_J \omega^p = d(i_J \omega^p) + i_J d\omega^p. \quad (95)$$

Por teoremas anteriores sabemos que  $d\omega^p$  es un invariante, y como  $J$  lo es también,  $i_J d\omega^p$  es invariante. De la misma forma, por el teorema anterior sabemos que  $i_J \omega^p$  es invariante y su derivada exterior también. Por tanto, la suma de estos 2 invariantes da a su vez una cantidad invariante debido a la linealidad de la derivada. □

**Teorema 15.** *Sean  $J_1$  y  $J_2$  vectores invariantes, entonces  $[J_1, J_2]$  es invariante, si y solo si,  $\{J_1, J_2, V\}$  obedecen la identidad de Hamilton-Jacobi<sup>7</sup>.*

*Demostración.* partiendo de la definición de vectores invariante

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} + [J_1, V] = 0, \quad \frac{\partial J_2}{\partial t} + [J_2, V] = 0 \quad (96)$$

---

<sup>7</sup> Por consiguiente, el arrastre de Lie define un álgebra de Lie entre los campos vectoriales invariantes.

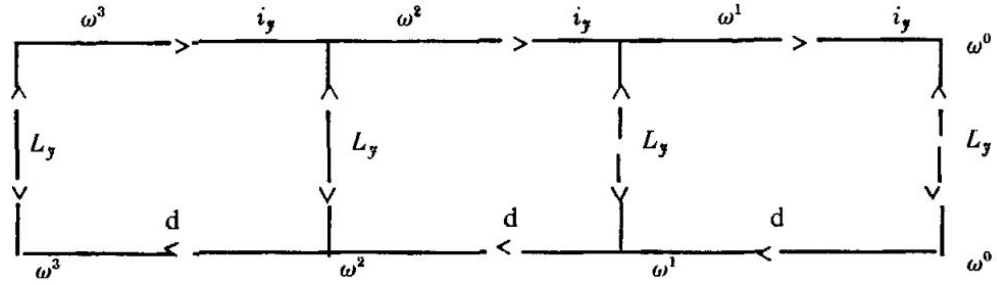


Figura 3. Diagrama que ilustra la construcción de invariantes a partir de otros conocidos, en la magnetohidrodinámica. Tomado de **tur1993invariants**

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) [\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] = \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] + \mathcal{L}_V [\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] \quad (97)$$

$$= [\mathbf{J}_{1,t}, \mathbf{J}_2] + [\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_{2,t}] + [\mathbf{V}, [\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2]] = 0 \quad (98)$$

$$= [-[\mathbf{V}, \mathbf{J}_1], \mathbf{J}_2] + [\mathbf{J}_1, -[\mathbf{V}, \mathbf{J}_2]] + [\mathbf{V}, [\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2]] \quad (99)$$

$$= [\mathbf{V}, [\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2]] + [\mathbf{J}_1, [\mathbf{J}_2, \mathbf{V}]] + [\mathbf{J}_2, [\mathbf{V}, \mathbf{J}_1]] = 0. \quad (100)$$

□

Con todos estos teoremas tenemos ahora una serie de resultados con los que es posible construir una gran cantidad de invariantes. Dado que el espacio (bien sea una variedad o una región de  $\mathbb{R}^3$ ) es tridimensional, existen 4 tipos de formas que pueden ser conservadas: 0-formas, 1-formas, 2-formas y 3-formas. Esto hace que la construcción de invariantes con los teoremas anteriores pueda ser ilustrada en un diagrama como el siguiente.

Además de esto, la limitación en la dimensión implica que existen 4 tipos distintos de cantidades invariantes localmente: funciones invariantes, 1-formas invariantes, 2-formas invariantes y 3-formas invariantes. En otras palabras, cualquier invariante en MHD ideal debe tener una de estas formas. Con esto en mente, veremos el significado de estas distintas formas conservadas cuando  $M$  es una región contenida en

$\mathbb{R}^3$ .

Las funciones invariantes corresponden a la típica noción de función conservada en la dinámica de un fluidos, ya que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\right)g = \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla g = 0, \quad (101)$$

lo que coincide con la derivada material en mecánica de medios continuos **bird2002transport.E** variables lagrangianas  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  se diría entonces que  $g(\mathbf{x}, t) = g_0(\mathbf{x}_0)$ .

De manera similar, las 3-formas conservadas también tienen una ecuación familiar ya que corresponde a una ecuación de continuidad, como vimos para la forma de masa. Por tanto, la interpretación de 3-formas  $\mathbf{n} = f dV$  conservadas es la misma que para la ecuación de continuidad con una densidad igual a la única componente de la 3 forma  $f$ . Siendo precisos, esto es que el cambio explícito en el tiempo ( $\partial_t$ ) de  $f$  es debido a flujos de densidades de corriente  $f\mathbf{V}$ . En términos de variables lagrangianas, esta ecuación de continuidad puede escribirse como  $f(\mathbf{x}_0, t) = f_0(\mathbf{x}_0)\det(\partial\mathbf{x}_0/\partial\mathbf{x})$

Por otro lado, dada una 1-forma invariante  $\omega = L_i dx^i = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x}$ , su conservación local implica claramente que esta no cambia en el tiempo y por tanto los planos normales en cada punto a  $\mathbf{L}$  son arrastrados por el flujo. Esto es consecuencia de que, en cada punto, el plano normal a  $\mathbf{L}$  está dado por  $\ker(\omega)$ , el cual es arrastrado por el flujo siempre que  $\omega$  lo esté. De esta forma, si  $\omega$  se conserva, es porque los planos normales a su dual métrico también se conservan.

Además si estos planos son integrables, es decir, existe una superficie cuyo plano

tangente coincide con ellos en cada punto; entonces esta superficie también sería arrastrada por el flujo. Este tipo de invariantes, si bien no es tan conocidos, ya han sido presentados en textos como **batchelor2000introduction**:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\right) \omega = \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{L}) + \nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{L})\right) \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad (102)$$

$$= \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{L} - \mathbf{L}(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\mathbf{L} \times \nabla) \times \mathbf{V}\right) \cdot d\mathbf{x} = 0, \quad (103)$$

por lo que para MHD incompresible ( $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ ) la conservación local puede escribirse como

$$\frac{D\mathbf{L}}{Dt} = (\mathbf{L} \times \nabla) \times \mathbf{V} \Rightarrow \frac{\partial L_i}{\partial t} + V^k \frac{\partial L_i}{\partial x^k} = L_m \frac{\partial V_m}{\partial x^i}, \quad (104)$$

lo que coincide con la ecuación presentada en **batchelor2000introduction**. En términos de variables lagrangianas las leyes de conservación para  $\omega = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x}$  son de la forma  $L_i(\mathbf{x}_0, t) = L_{0j}(\mathbf{x}_0) \partial x_0^j / \partial x^i$ .

Por otra parte, dada una 2-forma conservada  $\alpha = \mathbf{W} \cdot d\mathbf{S}$ , entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\right) \alpha = \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) + \mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{W})\right) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (105)$$

$$= \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{W} - \mathbf{W}(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\mathbf{W} \cdot \nabla)\mathbf{V}\right) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (106)$$

Esto tiene una interpretación topológica para fluidos incompresibles ( $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ ): El campo  $\mathbf{W}$ , o sus líneas, están encajadas en el medio. Para probar esto considere una línea de campo de  $\mathbf{W}$  parametrizada por  $s$  en el medio continuo. El vector

tangente a esta línea está definido como

$$\frac{d\mathbf{x}(s, t)}{ds} \equiv \mathbf{W}, \quad (107)$$

mientras que en cualquier punto

$$\frac{d\mathbf{x}(s, t)}{dt} = \mathbf{V}. \quad (108)$$

Por tanto, diferenciando 107 con respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{x}(s, t)}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{d\mathbf{x}(s, t)}{dt} = \frac{d}{ds} \mathbf{V} = (\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{d}{dt} \mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{W}. \quad (109)$$

Note que este hecho es indudablemente topológico ya que todo encajamiento  $h : X \rightarrow Y$  entre variedades  $X$  e  $Y$  es un homeomorfismo entre  $X$  y  $h(X)$ . Por tanto, esto será crucial a la hora de definir los invariantes topológicos en próximas secciones. Este tipo de invariantes también es conocido como invariante de campo congelado en el medio, ya que el encajamiento de las líneas de campo en el fluido genera este efecto. Observe que en términos de variables lagrangianas esta ley de conservación local para 2-formas puede escribirse como  $W^i(\mathbf{x}_0, t) = W_0^j(\mathbf{x}) \partial x^i / \partial x_0^j$ .

Todas estas leyes de conservación pueden unificarse en una estructura algebraica de super álgebras de Lie, como se muestra en **volkov1995hidden**. Esto muestra una estructura super simétrica en la hidrodinámica no disipativa. En este texto no se estudiará a fondo esta estructura, sin embargo, algunos resultados del siguiente capítulo muestran un puente entre esta estructura y los grupos de Lie estudiados en **arnold1999topological**.

**3.2.1. Invariantes integrales y topológicos** Como se mencionó anteriormente, el uso de formas diferenciales para las leyes de conservación local favorecen la extensión a invariantes más globales. Esto debido a que dada una  $p$ -forma  $\omega_p$ , y una región  $p$ -dimensional fija y arrastrada por el fluido  $D_p$ , el formalismo anterior permite, en términos de Feynman, diferenciar bajo el signo integral

$$I^p \equiv \int_{D_p} \omega_p \Rightarrow \frac{dI^p}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) \int_{D_p} \omega_p = \int_{D_p} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) \omega_p. \quad (110)$$

Esto es posible debido a que en coordenadas lagrangianas los elementos de volumen, área y línea; transforman de manera inversa a las formas invariantes. De aquí viene la importancia de centrar nuestra atención en las formas diferenciales desde un principio.

Tomando en cuenta esto, la interpretación de los invariantes integrales es entonces una consecuencia lógica de los locales. De esta forma, los invariantes integrales relacionados con 2-formas, para fluidos incompresibles, tendrán también un significado topológico; mientras que los invariantes integrales de otras  $p$ -formas (a menos de que sean construidos a partir de una 2-forma) probablemente tengan un carácter más dinámico o geométrico.

A pesar de esto, la idea de que los invariantes integrales relacionados con 2-formas exactas sean invariantes topológicos, aún es un poco vaga. ¿Cómo se sabría si un invariante integral de una  $p$ -forma diferente a 2 es topológico o no?, es decir, dada una forma invariante cualquiera  $\omega^p$ , ¿cómo saber si existe una 2-forma conservada la cual construye  $\omega^p$  usando los teoremas relacionados con el arrastre de Lie?. Estas preguntas permanecerán abiertas hasta que exploremos el grupo de simetrías de la magnetohidrodinámica ideal en el siguiente capítulo.

Sin embargo, e independientemente de su naturaleza, estos invariantes deben dar cuenta a simetrías en la teoría y por tanto es válido preguntar: ¿Existe una cantidad finita de invariantes que caracterice o integre las ecuaciones MHD como sucede en otros sistemas?. En otras palabras, ¿Una cantidad finita de simetrías integra mis ecuaciones?. La respuesta a estas preguntas es negativa, y su razón parte de la construcción de los invariantes y los grados de libertad en un fluido.

En primer lugar, existen un número infinito de invariantes integrales en MHD **kats2003variation**. Esto se debe a que dado un número finito de invariantes integrales de  $p$ -formas,

$$I_i^p = \int_{D_p} \omega_i^p, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (111)$$

y una función arbitraria de las componentes de estas formas  $f((\omega_i^p)_j)$ ;

$$J_i^p = \int_{D_p} f \omega_i^p, \quad (112)$$

también es un invariante integral para toda  $i$ . Además de esto, si existiese un número finito de integrales que resuelvan las ecuaciones MHD (a parte de resolver un problema del milenio) significaría que los fluidos tienen un número finito de grados de libertad y esto no es cierto. Esto último se verá reflejado cuando estudiemos su álgebra de Lie en el segundo capítulo.

### 3.3. Helicidad

En la sección anterior vimos como, a partir de una formulación geométrica inspirada en la física, se construyen una serie de invariantes locales que se clasifican en cuatro tipos. Dentro de estos tipos, vimos que las 2-formas arrastradas poseen una característica topológica. Con esto en mente, en esta sección vamos a explorar un invariante construido a partir de una 2-forma arrastrada, y veremos que su significado es realmente topológico. Para ello, mostramos a detalle como este invariante tiene una interpretación en términos de la topología de curvas en el espacio.

La razón para prestar especial atención a este tipo de invariante, además del interés del autor, parte de la geometrización de las ecuaciones MHD ideal incompresible, y las de Euler. Esto debido a que la ecuación 79 y 84 muestra como la conservación de la forma de flujo magnético  $\alpha_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  y de vorticidad  $\alpha_V = \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$  hace parte de las ecuaciones geometrizadas. Esto, como consecuencia de la Ley de Faraday y la de Ohm en MHD; y la ecuación dinámica del fluido en las ecuaciones de Euler.

Note que, en una región  $M$  simplemente conexa se tiene el primer grupo de homología trivial, y por tanto el de cohomología también como sabemos del marco teórico. Con esto, existe  $\gamma = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$ , dual al vector potencial magnético, de tal suerte que  $d\gamma = \alpha_B$ . Esto nos permite definir  $\gamma \wedge d\gamma$ , que en coordenadas sería  $d\gamma \wedge \alpha = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}dV$ . Con base a esto está inspirada la siguiente definición.

**Definición 63** (Helicidad o invariante de Hopf). *La Helicidad o invariante de Hopf*

**arnold1999topological** del campo solenoidal  $\xi$  en el dominio  $M \subset \mathbb{R}^3$  es

$$\mathcal{H}(\xi) = \langle \xi, \text{curl}^{-1} \xi \rangle = \int_M \xi \cdot \text{curl}^{-1} \xi dV, \quad (113)$$

donde  $\cdot$  es el producto punto usual de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto punto entre campos vectoriales heredado por  $\cdot$ , y  $\text{curl}^{-1}$  es calculado con la ley de Biot-Savart.

Esta definición es consistente siempre que  $\xi$  sea tangente a  $\partial M$ <sup>8</sup>, ya que  $\text{curl}^{-1}$  esta bien definido, con un gauge de un gradiente, debido al teorema de Helmholtz. En otras palabras si  $\text{curl}^{-1} \xi = \mathbf{A}$  también es posible  $\text{curl}^{-1} \xi = \mathbf{A} + \nabla f$  para alguna función  $f$ . Sin embargo, el valor de  $\mathcal{H}(\xi)$  no cambia

$$\mathcal{H}(\xi) \mapsto \int_M \xi \cdot (\text{curl}^{-1} \xi + \nabla f) dV = \mathcal{H}(\xi) + \int_M \nabla \cdot (f\xi) dV = \mathcal{H}(\xi) + \int_{\partial M} f\xi \cdot d\mathbf{S} = \mathcal{H}(\xi). \quad (114)$$

Como se mencionó anteriormente, esta cantidad se mantiene constante en la magnetohidrodinámica ideal cuando  $\xi = \mathbf{B}$  **webb2018magnetohydrodynamics**. En efecto, de la ley de Faraday y la definición de potencial magnético se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (115)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} + \nabla \phi = 0, \quad (116)$$

ahora, al sumar las ecuaciones 115 y 116 y multiplicar cada una  $\cdot$  con  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  res-

---

<sup>8</sup> Como veremos en el siguiente capítulo, asumir esto en el contexto de equilibrio MHD es razonable.

pectivamente se obtiene

$$\mathbf{A} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right) + \mathbf{B} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} + \nabla \phi \right) = 0. \quad (117)$$

Luego, usando las identidades

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{A}, \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \cdot (\phi \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \phi, \quad (118)$$

de 117 se llega a

$$\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (119)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{A} + \phi \mathbf{B}) = -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (120)$$

La ecuación 120 implica directamente la conservación de la helicidad, en el contexto ideal, debido a que por la ley de Ohm  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 0$  y dado que el campo magnético es tangente al volumen de integración, entonces

$$\int_M \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) dV = \int_M \nabla \cdot ((\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A} - \phi \mathbf{B}) dV \quad (121)$$

$$= \int_M \nabla \cdot ((\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - \phi \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{V}) dV \quad (122)$$

$$\int_M \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \nabla \cdot ((\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{V}) \right] dV = \frac{d\mathcal{H}(\mathbf{B})}{dt} = \int_{\partial M} ((\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}) - \phi) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (123)$$

Por otro lado, usando el lenguaje de formas diferenciales y el formalismo de arrastres

de Lie, la demostración de la invarianza en la helicidad es mucho más sencilla. Considere la forma diferencial  $\omega = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$ ,

$$\left( \mathcal{L}_{\mathbf{V}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}) \right) \cdot d\mathbf{x} \quad (124)$$

$$= \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \mathbf{B} + \nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}) \right) \cdot d\mathbf{x}, \quad (125)$$

por lo que con el gauge  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = \phi$  y la ley de Ohm se obtendría que  $\omega$  está arrastrado por el flujo. Dado que  $d\omega = \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$ , entonces  $\omega \wedge d\omega = \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dv$  también lo es, siguiendo uno de los teoremas de arrastres de Lie. Esta condición de gauge en  $\mathbf{A}$  puede ser presidida al integrar el invariante local con la condición de frontera:  $\mathbf{B}$  tangente a  $\partial M$ , como se mostró anteriormente <sup>9</sup>.

**3.3.1. Extensión del número de linking como Helicidad** Previamente demostramos que existe un invariante en MHD ideal al que llamamos Helicidad magnética. No obstante, aún hay una razón sólida por la cual llamarlo invariante topológico aparte de su construcción a partir de  $\alpha = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ . Es por esto que para ello veremos como este invariante tiene una interpretación directa desde la cantidad conocida como número de linking en la teoría de curvas **berger2009topological**.

**Definición 64** (Número de linking Gaussiano). *Dadas dos curvas cerradas en el espacio con parametrizaciones  $x(\tau)$  y  $y(\sigma)$  respectivamente, entonces el número de linking gauusiano de las curvas es*

---

<sup>9</sup> Note que este resultado mediante arrastres de Lie puede ser extendido para el campo de vorticidad debido a la forma de las ecuaciones 84.

$$L_{12} = \frac{1}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{dx}{d\tau} \cdot \left( \frac{x(\tau) - y(\sigma)}{|x(\tau) - y(\sigma)|^3} \times \frac{dy}{d\sigma} d\tau d\sigma \right) \quad (126)$$

**Teorema 16.** *El número de linking gaussiano provee el número de veces que la curva 1 atraviesa la región delimitada por la curva 2, tomando en cuenta su orientación.*

Para demostrar este resultado se seguirá el procedimiento de Ricca **ricca2011gauss** debido a que evidencia la conexión natural entre topología y física desde antes siquiera que se acuñara la propia palabra "topología". Por consiguiente, en la próxima subsección se "olvidara" el contexto MHD, para darle paso a la física que se presume fue inspiración para la demostración de este resultado: El geomagnetismo.

**Número de linking Gaussiano introducido desde la física** Con el fin de estudiar el campo magnético de la tierra, Gauss examinó las propiedades de las corazas magnéticas, es decir, superficies que producen un campo magnético debido a una magnetización normal a ellas. De esta forma, las corazas magnéticas funcionan como si existiera un dipolo magnético apuntando en dirección normal a la superficie en cada punto.

En este trabajo Gauss modelaba el campo magnético de la tierra como el generado por dos corazas magnéticas: una en el hemisferio norte y otra en el sur. Estudiando este modelo llegó al siguiente resultado.

**Teorema 17** (Gauss, 1839). *El potencial de una coraza magnética  $\Sigma$  en un punto fuera de ella es igual al ángulo sólido que subtiende a ese punto, multiplicado por su*

fuerza magnética<sup>10</sup>.

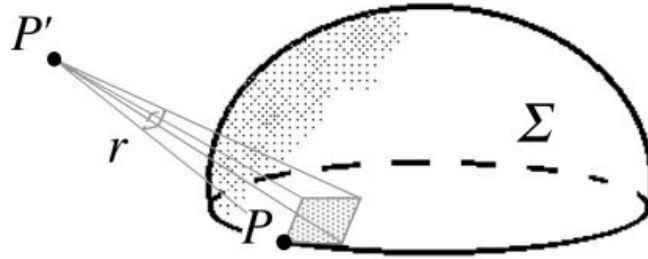


Figura 4. Coraza magnética. Tomado de **ricca2011gauss**.

*Demostración.* Dado un dipolo magnético  $m$  es posible definir  $\Psi = \frac{r \cdot m}{r^3}$  de tal suerte que  $-\nabla\Psi = \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ . Por tanto, extendiendo la definición a la coraza magnética

$$\Psi = \int \frac{\hat{r} \cdot \mathbf{M} dv}{r^2} = \int_{\Sigma} \frac{\hat{r} \cdot \hat{n} \sigma d\Sigma}{r^2} = \sigma \int_{\Sigma} d\Omega \quad (127)$$

□

Este resultado no solo facilita el calculo de los campos magnéticos mediante el potencial escalar, sino que también da un sentido a este ángulo sólido en términos de energía potencial. Esto debido a que este potencial escalar tiene un significado físico: el trabajo que hace la coraza magnética, por unidad de carga dipolar magnética, a un dipolo traído desde el infinito. En otras palabras, este resultado conecta el trabajo que se hace a un dipolo magnético, con el ángulo sólido que este subtende a la coraza magnética.

---

<sup>10</sup> En este contexto la fuerza magnética hace referencia a la densidad superficial de magnetización. Tomado de **ricca2011gauss**.



Figura 5. Teorema de Ampère. Tomado de **ricca2011gauss**.

**Teorema 18** (Ampère, 1831). *Un circuito galvánico  $C$  produce el mismo efecto que una coraza magnética  $\Sigma$  de cualquier forma, siempre que  $\partial\Sigma = C$ .*

*Demostración.* Este teorema se puede pensar como un corolario del teorema de Gauss ya que corazas magnéticas con la misma frontera subtienden el mismo ángulo sólido. Una demostración alternativa se obtiene considerando el teorema de Stokes y la magnetización en términos de la corriente superficial inducida  $\mathbf{K}$

$$\sigma d\Sigma = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{K} d\Sigma \Rightarrow \Psi = \int_{\Sigma} \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{K}) \cdot \mathbf{r} d\Sigma}{r^3} = \int_{\partial\Sigma} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{K}) \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}}{2r^3}. \quad (128)$$

□

**Corolario 18.1.** *Dos puntos infinitamente cerca uno del otro, pero a lados diferentes de la coraza magnética, tiene una diferencia en el potencial de  $4\pi$*



Figura 6. Corolario del teorema de Ampère. Tomado de **ricca2011gauss**.

De los últimos teoremas se obtiene este interesante corolario, cuya demostración es directa considerando que el ángulo sólido de  $P'$  tiende a  $2\pi$ , mientras que el de  $P''$

tiende a  $-2\pi$ .

Ahora con estos resultados calcularemos explícitamente el ángulo sólido para un sistema físico en el cual se acerca un dipolo a una coraza magnética. Con ello llegaremos directamente al resultado que buscamos.

**Lemma 1** (Maxwell). *Dada una coraza magnética con una frontera parametrizada con  $(x(s), y(s), z(s))$  la longitud de arco, y un camino  $(x'(\sigma), y'(\sigma), z'(\sigma))$ , también parametrizado con la longitud de arco. Entonces el diferencial de ángulo sólido que subtiende cada punto del camino viene dado por*

$$d\Omega = \frac{dsd\sigma}{r^2} \begin{vmatrix} L & M & N \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = \frac{dsd\sigma}{r^2} \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{dx'}{d\sigma} & \frac{dy'}{d\sigma} & \frac{dz'}{d\sigma} \\ \frac{x'-x}{r} & \frac{y'-y}{r} & \frac{z'-z}{r} \end{vmatrix} = \frac{dsd\sigma}{r^2} \Pi, \quad (129)$$

donde  $r = |\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}'(\sigma)|$

*Demostración.* Considere una coraza magnética arbitraria. Por el teorema de Ampère, la influencia magnética de la misma solo depende su frontera. Ahora bien, esta influencia esta caracterizada por el ángulo sólido que se subtiende desde cada punto del camino  $r'$ .

Esta influencia magnética corresponde exactamente el trabajo, por unidad de carga dipolar, ejercido por la coraza a un dipolo que proviene del infinito. Es por ello que el potencial de la coraza, y por tanto su ángulo sólido, debe corresponder a una integral de línea doble

$$d\Omega = \Pi dsd\sigma.$$

Considere un desplazamiento  $d\sigma$  hacia  $C$  como se ve en la figura 7. Visto desde  $P$ ,  $C$  tiene un movimiento aparente a  $C'$  de  $d\sigma$  en dirección contraria. Con esto es

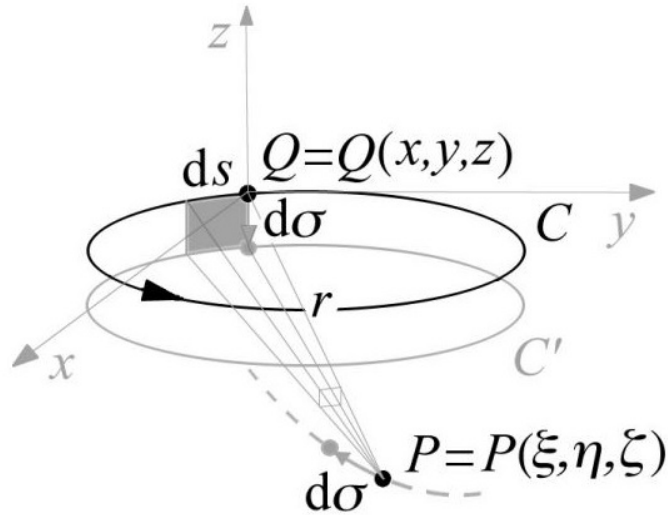


Figura 7. La idea de Maxwell para calcular explícitamente el ángulo sólido. Tomado de **ricca2011gauss**.

posible hallar el ángulo sólido usando la geometría de la pirámide que se forma en la figura 7, obteniendo 129. □

Ahora bien, considere una coraza magnética fija y un dipolo magnético moviéndose con posición  $l'$ . Por teoremas anteriores, el potencial magnético de la coraza depende solo de la frontera de esta. Suponga que la parametrización de la frontera de la coraza es de la forma  $r$ , por el lemma de Maxwell podemos escribir

$$\frac{1}{3}r^3 d\Omega = \frac{1}{3}r^3 \Pi ds d\sigma,$$

donde

$$r = \left[ (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \right]^{1/2}$$

Por tanto  $V = \int d\Omega = \int_{C_2} \int_{C_2} \Pi ds d\sigma$

$$\oint_{C_1} \oint_{C_2} [(x' - x)(dydz' - dzdy') + (y' - y)(dzdx' - dxdz') + (z' - z)(dxdy' - dydx')] / [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}.$$

Por tanto, si  $C_2$  trayectoria del dipolo, es una curva cerrada, la integral anterior coincide con la definición de número de linking  $/4\pi$ . Además de esto, por el corolario del teorema de Ampère, cada vez que  $C_2$  atraviesa la superficie que tiene como frontera a  $C_1$  la integral cambia en un factor de  $\pm 4\pi$ . Esto termina la demostración ya que cuando  $C_2$  no atraviesa la superficie que tiene como frontera a  $C_1$ , la integral tiene un valor nulo, justificado en su interpretación en términos de trabajo.

Con este teorema se muestra que el número de linking gaussiano es un invariante topológico de las curvas. Esto debido a que si se deforma una de las curvas sin alterar los cruces entre estas, es decir, sin cortarla; el número de linking se mantiene invariante. Como esta transformación no corta a la curva, la transformación debe ser continua y por ende un homeomorfismo si es además biyectiva.

Sin embargo, dado que en la Magnetohidrodinámica ideal se trata más con campos vectoriales que con curvas, es necesario generalizar el concepto de número de linking a una cantidad que describa apropiadamente la topología de los campos vectoriales. Veremos pues, que la helicidad juega un papel importante a la hora de generalizar estas ideas.

**Introducción intuitiva** Quizás la idea más natural para generalizar el número de linking gaussiano sea el pensar un campo vectorial como un conjunto de curvas en el espacio. En otras palabras, imaginar al campo vectorial como un número infinito de curvas que tejen trayectorias en  $\mathbb{R}^3$ <sup>11</sup>. En ese orden de ideas, el análogo a una curva cerrada sería un campo vectorial en el cual las líneas de campo no divergen o convergen a un punto, sino que simplemente siguen trayectorias que se cierran en sí mismas o nunca convergen. Con esto en mente, es natural pensar que si un campo  $\mathbf{F}$  tiene estas características, se debe tener divergencia nula  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ .

Por otro lado, siguiendo con la idea de las curvas tejiendo el espacio, la ecuación 126 debería tomar en cuenta no solo una línea de campo si no todas las posibles para cada campo vectorial. Si además de esto tomamos en cuenta que el análogo al vector tangente, en este caso, es el propio campo vectorial evaluado en cada punto; nuestra generalización de número de linking para dos campos vectoriales  $\mathbf{F}(\mathbf{r}), \mathbf{G}(\mathbf{r})$  sobre  $\mathbb{R}^3$  sería **berger2009topological**

$$L_{12} = \frac{1}{4\pi} \int_V \int_{V'} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{G}(\mathbf{r}') dV dV' \right). \quad (130)$$

Note que la idea de cambiar los vectores tangentes, en la definición de número de linking, por el campo vectorial evaluado en cada punto surge de pensar naturalmente en un encajamiento de un campo en el espacio, tal y como se mencionó en el análisis de las leyes de conservación de 2-formas.

---

<sup>11</sup> Esto claramente apela a la idea intuitiva de foliación del rango del campo vectorial, por parte de las curvas integrales del mismo. Si bien no hay razón para pensar que esto siempre es posible, asumiremos que es cierto con fines de comprender el concepto.

Ahora bien, usando el teorema de Helmholtz **arfen1967mathematical**, y tomando  $V, V' \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es posible escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{curl} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times (\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')) dV', \end{aligned}$$

o en términos de  $\operatorname{curl}^{-1} \mathbf{W} = \mathbf{F}$

$$\operatorname{curl}^{-1}(\mathbf{F}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{W}(\mathbf{r}') dV'. \quad (131)$$

Con esto, la ecuación 130 podría escribirse como

$$L_{12} = \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl}^{-1}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{W} dV. \quad (132)$$

Esta última ecuación coincide con la definición de helicidad magnética que demostramos invariante anteriormente cuando  $\mathbf{F} = \mathbf{G} = \mathbf{B}$ , y por ello le da un significado topológico a la misma. Además de esto, abre la posibilidad de pensar en este invariante para campos cruzados  $\mathbf{F} \neq \mathbf{G}$ .

**Helicidad como número de linking asintótico** El resultado anterior nos muestra de manera casi instintiva como la helicidad magnética debe corresponder de alguna forma a un número de linking, o a su generalización más natural para el caso de campos vectoriales. Sin embargo, este procedimiento falla rotundamente en ignorar el carácter estructural del dominio de los campos considerados. Por ejemplo, aunque un campo tenga divergencia cero, no se sigue necesariamente que sus

líneas de campo se cierran en sí mismas. De hecho, existen reactores como el Stellarator **spitzer1958stellarator**, en el que las líneas de campo no se cierran en sí mismas debido a una torsión propia del instrumento (ver figura 8).

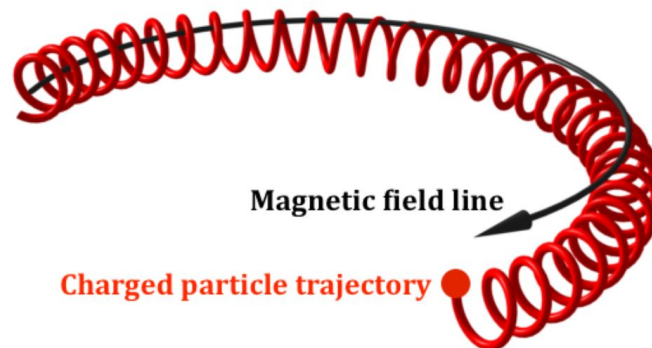


Figura 8. Línea de campo magnético, junto con la trayectoria de una partícula cargada, en un reactor tipo Stellarator. Tomado de <https://terpconnect.umd.edu/~mattland/>

De esta forma, el pensar en líneas que se cierran en si mismas no es correcto para cualquier configuración de campo y por tanto es necesario formular la relación entre helicidad y número de linking de manera más rigurosa. Para ello nos basaremos en el trabajo **arnold1974asymptotic**.

Primero extenderemos la noción de número de linking entre una curva y un campo vectorial solenoidal. Para ello haremos un limite entre el número de linking de la curva, con líneas de campo “cada vez más largas”. En otras palabras un número de linking asintótico. Con esto se construirá también un número de linking asintótico entre 2 curvas integrales cualesquiera. El promedio espacial de este último coincidirá con la helicidad del campo.

Considere una 3-variedad  $M$  simplemente conexa y orientada con elemento de volumen  $\mu$  normalizado ( $\int_M \mu = 1$ ), sea  $\gamma$  un encajamiento suave de una curva orientable

en  $M$ . Definiremos el número de linking asintótico de las líneas de campo de  $B$ , partiendo de un punto  $x$ , con la curva  $\gamma$ . Para esto usaremos el grupo uniparamétrico  $\{g^t : M \rightarrow M\}$ , generado por  $B$ . Sea  $\sigma$  una 2-cadena de tal suerte que  $\partial\sigma = \gamma$ <sup>12</sup>.

**Definición 65** (Curva corta). *Dados 2 puntos  $x, y$  en  $M$ , llamamos curva corta  $\Delta(x, y)$  a una curva que une estos dos puntos con las siguientes propiedades*

- *si  $x \notin \gamma$ , entonces  $\Delta(x, y)$  no interseca a  $\gamma$ .*
- *El número de intersecciones de  $\Delta(x, y)$  con  $\gamma$  esta acotado por una constante independiente de  $x$  e  $y$ .*

Puede demostrarse que siempre es posible construir un sistema de curvas cortas, dados  $x$  e  $y$ <sup>13</sup>. Por tanto, fijando un sistema de curvas  $\Delta$  y considerando una sección de órbita  $\{g^t x\}_{t \in [0, T]}$ , de tal suerte que  $g^T = y$ , es posible construir curvas cerradas  $\Gamma_T(x)$  como el camino formado al pegar  $\{g^t x\}_{t \in [0, T]}$  con  $\Delta(x, y)$ . Asumiremos que  $\Gamma_T(x)$  no interseca a  $\gamma$ .

Sea  $N_T(x)$  en número de linking entre  $\Gamma_T(x)$  y  $\gamma$  entonces

**Teorema 19.** *Para casi cualquier  $x \in M$ <sup>14</sup>, el límite*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} N_T(x) = \lambda(x), \quad (133)$$

---

<sup>12</sup> En este contexto, la 2-cadena esta formada por simplexes suaves. Sin embargo, su definición en términos de estos es análoga a la discutida en el marco teórico.

<sup>13</sup> de hecho la dependencia de  $\Delta$  con  $x$  e  $y$  puede ser medible (en el contexto de teoría de la medida) y suave a tramos.

<sup>14</sup> Decir que casi para cualquier  $x \in M$  este límite existe, hace referencia a que el conjunto para el cual el límite no existe tiene medida 0.

existe (donde  $T$  toma valores en los cuales  $\Gamma_T(x)$  no intersecta a  $\gamma$ ) y es independiente del sistema de curvas  $\Delta$ .  $\lambda(x)$  es llamado número de linking asintótico de la orbita  $g^t x$  con  $\gamma$ .

Para demostrar este teorema introduciremos una definición de número de linking asintótico equivalente. Sin embargo, antes de ello ya es clara la interpretación del anterior resultado: cerrando las líneas del campo  $B$  con curvas cortas  $\Delta$ ,  $\lambda(x)$  es al número de linking sobre el  $T$  al que se tiende para parámetros de las curvas integrales largos.

Ahora considere la variedad  $M - \gamma$ . En esta podemos construir una 1-forma  $\eta$  con las siguientes propiedades

- El número de linking de  $\gamma$  con toda curva cerrada en  $\delta$  en  $M - \gamma$  es igual a la integral de  $\eta$  sobre  $\delta$ .
- Existe un encajamiento diferenciable  $u : S^1 \times D^2 \rightarrow M$ , donde  $D^2$  es un disco, de tal suerte que  $u(S^1 \times \{0\}) = \gamma$  y el pullback de  $u$  induzca en  $\eta$ , sobre el complemento de  $S^1 \times \{0\}$ , el mapeo  $u^*\eta = (1/2\pi) \arctan(y/x)$  (donde  $x, y$  son coordenadas en  $D^2$ ).

Siempre es posible encontrar una 1-forma con estas características debido a que hay libertad en  $u$ . Sin embargo, si bien la primera condición claramente restringe a  $\eta$  con el fin de calcular el número de linking; la segunda no parece tener tanta relación con nuestro protagonista: número de linking.

Esta segunda condición nos dice que existe una forma de encajar un toro sólido en  $M$  de tal suerte que la imagen del eje toroidal bajo  $u$  sea  $\gamma$ , y el mapeo diferencial inducido a  $\eta$  de una medida angular en cada punto de  $D^2$ . Esto se construye de

esta manera para que  $\eta$  sea medible, en el sentido de teoría de la medida, y poder aplicar el teorema ergódico de Birkhoff **birkhoff1931proof**.

**Teorema 20.** *Dada una forma  $\eta$  que cumple con las condiciones anteriormente mencionadas, el límite*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta \left( \frac{d}{dt} g^t x \right) dt = \hat{\lambda}(x), \quad (134)$$

existe independientemente de la 1-forma seleccionada.

*Demostración.* Considere la función  $f(x) = \eta(\mathbf{B}(x))$ , donde  $dg^t x/dt|_{t=0} = \mathbf{B}(x)$ , debido a que  $g^t$  es un flujo de fase de  $B$  **nakahara2003geometry**. La existencia del límite es consecuencia de la segunda propiedad y el teorema ergódico de Birkhoff, como se discutió anteriormente. Por tanto, solo queda probar la independencia del mismo respecto a la escogencia de la forma.

Note que por la primera propiedad diferentes  $\eta$  difieren en una 1-forma exacta, ya que dada una función suave  $f$

$$\int_{\delta} (\eta + df) = \int_{\delta} \eta + \int_{\delta} df = \int_{\delta} \eta. \quad (135)$$

Ahora, tomando  $\varphi$  suave de  $M - \gamma$  a  $\mathbb{R}$ , se tiene que

$$\int_0^T d\varphi \left( \frac{d}{dt} g^t x \right) dt = \varphi(g^T x) - \varphi(x). \quad (136)$$

Si  $g^t x$  no se aproxima asintóticamente a  $\gamma$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , es posible escoger una sucesión  $T_i \rightarrow \infty$  tal que la distancia entre  $g^{T_i} x$  y  $\gamma$  se mantenga acotada por debajo.

No obstante,  $\varphi$  esta acotada por arriba por una constante  $C(\epsilon)$ , fuera de una  $\epsilon$ -vecindad  $V_\epsilon$  de  $\gamma$ , ya que  $M - V_\epsilon$  es un conjunto compacto en  $M$ . En consecuencia, para todos los puntos  $x \in M$  tal que  $g^t x$  no tiende asintóticamente a  $\gamma$ , existe una sucesión  $T_i \rightarrow \infty$  tal que  $g^{T_i} x$  esta acotada por arriba. Por tanto el limite no depende de la forma escogida ya que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\varphi \left( \frac{d}{dt} g^t x \right) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\varphi(g^T x) - \varphi(x)) = 0, \quad (137)$$

siempre que  $g^t x$  no tienda a algún punto de  $\gamma$ . A pesar de esta restricción el conjunto de puntos  $x$  que tienden a  $\gamma$  tiene medida cero porque  $B$  es solenoidal.

□

Con esto, el probar la equivalencia entre las dos definiciones de números asintóticos de Linking demostraría el teorema 19. Es decir, se demostraría que  $\lambda(x)$  existe y no depende del sistema de curvas cortas  $\Delta$ .

**Teorema 21.** *Para casi cualquier  $x \in M$ , el límite  $\lambda(x)$  existe y es igual a  $\hat{\lambda}(x)$ .*

*Demostración.* La primer propiedad de  $\eta$  permite escribir  $\lambda(x)$  como

$$\lambda(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left( \int_0^T \eta(\mathbf{B}(x)) dt + \int_{\Delta(g^T x, x)} \eta(\mathbf{B}(x)) dt \right), \quad (138)$$

por lo que basta con demostrar que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\Delta(g^T x, x)} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{B}(x)) dt = 0. \quad (139)$$

Dado que el número de intersecciones entre  $\Delta$  y  $\sigma$  está acotado (por la segunda propiedad de los sistemas de curvas cortas  $\Delta$ ), se sigue que las integrales de  $\boldsymbol{\eta}$  a lo largo de  $\Delta$  está acotada

$$\left| \int_{\Delta(g^T x, x)} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{B}(x)) dt \right| < C_0 \Rightarrow \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\Delta(g^T x, x)} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{B}(x)) dt \right| \leq \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} C_0 \right| = 0. \quad (140)$$

□

Con estas ideas ahora construiremos un número de linking asintótico para un par de curvas integrales arbitrarias de  $\mathbf{B}$ . Sea  $x_1, x_2$  un par de puntos en  $M$ , tomaremos dos números grandes  $T_1, T_2$ , y cerraremos las trayectorias de los segmentos  $\{g^{t_k} x_k\}_{t \in [0, T_k]}$ , con una familia de curvas cortas  $\Delta(g^{t_k} x_k, x_k)$  ( $k = 1, 2$ ). Con esto, tal y como hicimos para el procedimiento anterior, obtenemos las curvas cerradas  $\Gamma_k = \Gamma_{T_k} x_k$  como se ven en la figura 9.

Asumiendo que estas curvas no se intersectan (lo cual sucede para casi cualquier  $x_1$  y  $x_2$ , ya que el conjunto para el cual se intersectan tiene medida cero **arnold1974asymptotic**) llamamos  $N_{T_1, T_2}(x_1, x_2)$  al número de linking de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ .

**Definición 66** (número asintótico de linking de un par de trayectorias). *El número asintótico de linking de un par de trayectorias  $g^t x_1$  y  $g^t x_2$  es definido como el límite*

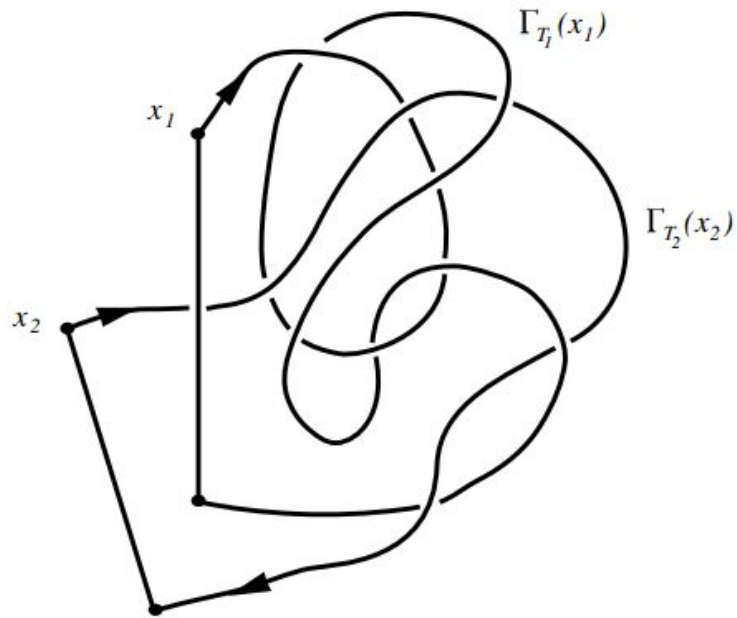


Figura 9. Par de curvas cerradas construidas a partir de  $\Delta(g^{t_k} x_k, x_k)$  y  $\{g^{t_k} x_k\}_{t \in [0, T_k]}$  ( $k = 1, 2$ ). Tomado de **arnold1999topological**.

$$\lambda(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \frac{N_{T_1, T_2}(x_1, x_2)}{T_1 T_2}, \quad (141)$$

donde  $T_1$  y  $T_2$  varían de tal suerte que  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  no se intersectan.

Mostraremos que en este limite también es independiente de la escogencia de  $\Delta$  y existe para casi cualquier par de puntos. Para ello haremos una definición integral análoga a la que hicimos con  $\hat{\lambda}(x)$  y veremos como los límites coinciden. No obstante, para en este caso la integral de la forma  $\eta$  debe ser reemplazada por la conocida como integral de Rham de doble formas. Para esto nos restringiremos a  $M \subset \mathbb{R}^3$  compacto, ya que la definición de  $\hat{\lambda}(x_1, x_2)$ , el análogo a  $\hat{\lambda}(x)$ , es más sencilla e intuitiva.

**Definición 67.** Sea  $\{g^t\}$  un grupo uniparametrico del campo solenoidal  $B$  definido en una región  $M \subset \mathbb{R}^3$  compacta, y con  $B$  tangente  $\partial M$ . Llamamos número asintótico de linking de un par de trayectorias al límite

$$\hat{\lambda}(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_2 T_1} \frac{1}{4\pi} \int_0^{T_2} \int_0^{T_1} \frac{(\dot{g}^{t_1} x_1, \dot{g}^{t_2} x_2, x_1 - x_2)}{|x_1(t_1) - x_2(t_2)|^3} dt_1 dt_2, \quad (142)$$

donde  $(, , )$  es el triple producto escalar.

Es muy claro como esta definición apela a la intuición usada en la subsección anterior, en donde se pensaba en un campo vectorial solenoidal como una conjunto de curvas que llenaban el espacio cuyo vector tangente en cada punto era el mismo valor del campo en ese punto. También muestra como el concepto de flujos de fase de campos vectoriales no solo es clave para el estudio de invariantes con la derivada de Lie, sino para entender las implicaciones topológicas de los mismos.

**Teorema 22.** El límite  $\hat{\lambda}(x_1, x_2)$  existe para casi cualquier par de puntos en  $M \times M$ , y coincide con definido anteriormente  $\lambda(x_1, x_2)$ .

*Demostración.* Para probar la existencia de nuevo tendremos que acudir al teorema ergódico **birkhoff1931proof** dado que  $\hat{\lambda}(x_1, x_2)$  corresponde a un promedio temporal de funciones en la variedad  $M \times M$ , en la que actúa el grupo conmutativo  $\{g^{t_1}\} \times \{g^{t_2}\}$ .

Debido a que el integrando

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{(B_1, B_2, x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^3}, \quad : B_i = \frac{d}{dt_k} \Big|_{t_k=0} g^{t_k} x_k, \quad (143)$$

tiene una singularidad en la diagonal de  $M \times M$  de un orden no mayor a  $|x_1 - x_2|^{-2}$  y la codimensión de la diagonal es 3,  $\Phi(x_1, x_2)$  es medible y por el teorema de **birkhoff1931proof**, el límite existe.

Ahora bien, como en el caso para  $\lambda(x)$  y  $\hat{\lambda}(x)$ , separaremos las integrales por tramos de tal suerte que  $\int_0^{T_k} + \int_{\Delta(x_k, g^{T_k} x_k)} = \int_{\Gamma_k}$ , llegando a

$$\lambda(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_2 T_1} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \frac{(\dot{g}^{t_1} x_1, \dot{g}^{t_2} x_2, x_1 - x_2)}{|x_1(t_1) - x_2(t_2)|^3} dt_1 dt_2. \quad (144)$$

De esta forma, basta entonces con mostrar que las integrales con términos  $\int_{\Delta(x_k, g^{T_k} x_k)}$  tienden a cero. Esto se garantiza con las propiedades de las curvas cortas  $\Delta$ , ya que estas integrales están acotadas por una constante que no depende de los caminos

$$\left| \int_{\Delta(x_k, g^{T_k} x_k)} \Phi dt_k \right| < C_0 \Rightarrow \quad (145)$$

$$\lambda(x_1, x_2) - \hat{\lambda}(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \left( \int_{T_1} \int_{\Delta(x_2, g^{T_2} x_2)} + \int_{T_2} \int_{\Delta(x_1, g^{T_1} x_1)} \right) = 0. \quad (146)$$

□

**Teorema 23** (Helicidad y el promedio del número de linking asintótico). *El valor promedio del número asintótico de linking de un par de trayectorias de  $B$*

$$\iint_{M \times M} \lambda(x_1, x_2) d\mu_1 d\mu_2 / \iint_{M \times M} d\mu_1 d\mu_2, \quad (147)$$

es igual al invariante de Hopf del mismo campo  $B$

$$\mathcal{H}(B) = \langle \text{curl}^{-1} B, B \rangle. \quad (148)$$

*Demostración.* Usando la integral de Biot-Savart

$$\zeta(x_2) \equiv -\frac{1}{4\pi} \int_M \frac{B(x_1) \cdot (x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^3} d\mu(x_1), \quad (149)$$

donde  $\text{curl} \zeta = B$ . Por tanto

$$\langle \zeta, B \rangle = \frac{1}{4\pi} \iint_{M \times M} \frac{(B(x_1), B(x_2), (x_1 - x_2))}{|x_1 - x_2|^3} d\mu(x_1) d\mu(x_2), \quad (150)$$

lo que termina la demostración ya que  $\mu$  es una forma de volumen normalizada.  $\square$

Con estos resultados de número de Linking y la helicidad podemos apreciar varios puntos. En primer lugar, ahora queda claro y sin lugar a duda que el invariante de Hopf tiene un significado topológico demostrable de manera formal.

Además de esto, los resultados nos permiten ver como en un sistema donde las líneas de campo no se cierran, como el stellerator, la idea del número de linking era correcta ya que siempre se pueden cerrar con una familia de curvas cortas  $\Delta$  que no altera  $\lambda(x, y)$  y por tanto la helicidad. En otras palabras, por la igualdad entre  $\lambda(x, y)$

y  $\hat{\lambda}(x, y)$ , la idea de que  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  permite pensar en la helicidad como número de linking es correcta, y nuestra introducción intuitiva de la helicidad como número de linking tiene un sustento matemático.

### **3.4. Invariantes topológicos y energía: parte 1**

Hasta ahora hemos hablado de varios aspectos en MHD. Principalmente haciendo énfasis en las características geométricas y topológicas de la teoría. Para esto último hemos desarrollado minuciosamente una justificación para llamar topológico al invariante integral definido como helicidad.

Sin embargo, aunque esto ayuda a entender la importancia de la topología en las ecuaciones MHD ( y por tanto en el estudio teórico de los reactores de fusión) a priori, “solo” hemos ganado en entendimiento físico a través de la topología. En otras palabras, hasta ahora solo podríamos decir que entendemos aspectos topológicos de la teoría y por tanto podríamos entender más la física a través de ellos.

Aunque esto ya sea satisfactorio por el mero hecho académico de conectar, de manera clara y precisa, dos ramas del conocimiento; lo cierto es que desde un punto de vista más pragmático este trabajo hasta ahora puede parecer una mera curiosidad matemática. Es por ello que, con esto en mente, procederemos a presentar un resultado relacionando el invariante topológico más estudiado en este trabajo, la helicidad, con una cantidad física que es transversal a casi cualquier teoría de campos clásica: la energía.

**3.4.1. La helicidad como cota inferior de la energía magnética** La energía, como el cualquier teoría física, juega un rol fundamental en la magnetohidrodinámica ideal. No solo porque existe una formulación lagrangiana y hamiltoniana de la misma, en la que la densidad de energía total juega el rol usual **webb2018magnetohydrodynamic** sino porque es a través de la energía que conectamos las ecuaciones MHD con la aplicación que buscamos en un reactor de fusión. Esto como consecuencia de la termodinámica.

Dicho de otra manera, el comportamiento de la energía del plasma  $U$  es importante porque su cambio dictamina el trabajo que hace el plasma con un ente externo, siguiendo la primera ley de la termodinámica

$$dU = -dW + dQ. \quad (151)$$

Dentro de los elementos que constituyen esta energía total, es la energía electromagnética la que hace diferente a la magnetohidrodinámica ideal de los fluidos sin carga (ecuaciones de Euler, Navier Stokes, etc.), y por ello la energía de mayor interés al estudiar un reactor de fusión. Dado que en MHD ideal, el campo eléctrico esta totalmente caracterizado solo por el campo magnético y la velocidad, gracias a la ley de Ohm, el estudiar el comportamiento de la energía magnética es crucial.

Con esto en mente, procederemos a mostrar como la helicidad magnética, el invariante que hemos estudiado detalladamente, presenta una cota inferior para la energía magnética<sup>15</sup>.

---

<sup>15</sup> Este resultado también se tiene para las ecuaciones de Euler

**Teorema 24.** Para un campo vectorial solenoidal **arnold1999topological**  $\xi$  sobre  $M \subset \mathbb{R}^3$  con energía

$$E(\xi) \equiv \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle = \frac{1}{2} \int_M \xi \cdot \xi dV, \quad (152)$$

se tiene que

$$E(\xi) \geq C \cdot |\mathcal{H}(\xi)|, \quad (153)$$

donde  $C$  es una constante positiva que depende de la forma de  $M$ .

*Demostración.* Por la desigualdad de Schwartz se tiene que

$$\mathcal{H}(\xi)^2 = \langle \xi, \text{curl}^{-1} \xi \rangle^2 \leq \langle \text{curl}^{-1} \xi, \text{curl}^{-1} \xi \rangle \langle \xi, \xi \rangle. \quad (154)$$

Ahora por la desigualdad de Poincare<sup>16</sup> aplicada a  $\text{curl}^{-1} \xi$  tenemos

$$\langle \text{curl}^{-1} \xi, \text{curl}^{-1} \xi \rangle = \int_M \text{curl}^{-1} \xi \cdot \text{curl}^{-1} \xi dV \leq \frac{1}{C^2} \int_M \xi \cdot \xi dV = \frac{1}{C^2} \langle \xi, \xi \rangle, \quad (155)$$

Por lo que la energía esta acotada por debajo por la helicidad.

□

Este resultado tiene una implicación directa y muy física: el trabajo que puede llegar a hacer el plasma a través de la energía magnética esta limitado por la helicidad del

---

<sup>16</sup> Usar esta desigualdad implica asumir que los espacios de funciones que trabajamos son de Sobolev. No obstante, esto no es una ligadura para la física ya que asumimos que las integrales de energía convergen.

campo. Recordemos que, por los resultados anteriores, la helicidad corresponde al promedio espacial de los números de linking asintóticos de curvas integrales de  $B$ . Por consiguiente, es la propia forma de enlazarse de las líneas de campo la que imponen una restricción en la energía mínima posible. Este resultado puede resumirse en una frase contundente: La topología del campo acota su energía.

Como veremos en el siguiente capítulo, esta frase es cierta incluso cuando  $M$  es una 3-variedad compacta, y nuestra noción de invariante de Hopf se adapta a ello. Sin embargo, antes de esto es necesario discutir más a profundidad las implicaciones del teorema anterior desde nociones aún más físicas.

**3.4.2. ¿Por que los links deberían acotar la energía?** Todo modelo físico tiene un límite de predictibilidad, es decir, un rango en el que los resultados del mismo se corresponden con la realidad. Es por ello que cualquier predicción de un modelo debe contrastarse con argumentos físicos que le den validez al mismo. Haciendo una analogía con el trabajo de David Hume **hume2020tratado**, en el problema del ser y el deber ser, las predicciones del modelo son el ser del mismo, mientras que las predicaciones físicamente posibles corresponden al deber ser. Del ser no necesariamente se sigue el deber ser.

Estos argumentos (el deber ser) sirven como filtro para conocer las predicciones que consideremos físicamente plausibles en una teoría física. En otras palabras, este filtro es el conjunto de prejuicios físicos que aceptamos a razón de “intuición física”. Un ejemplo de esto son las condiciones de energía en relatividad general.

Por tanto, es válido preguntarse ¿Por que los links del campo deberían acotar la energía?. Ya sabemos que esto es una predicción del modelo (ser), pero ¿qué hace

que lo consideremos físicamente plausible y no una consecuencia descartable cual solución patológica de relatividad general?. En esta subsección intentaremos darle respuesta a esto.

Para ello, reconstruiremos el teorema 24 usando, en la medida de lo posible, exclusivamente argumentos físicos en el contexto de una teoría clásica de campos. Más específicamente, usaremos el concepto de energía en un experimento mental.

Considere un sistema físico localizado compuesto por una serie de campos  $Q_i$  y fuentes  $q_i$ , que se relacionan de alguna forma medible empíricamente. La existencia de estos campos y fuentes no serían necesarias sin interacciones, y por tanto podemos asociar una energía total al sistema. Dado que esta energía es consecuencia de la existencia de interacción en el sistema, tenemos entonces que, independientemente de su definición, esta debe ser distinta de cero. En otras palabras, como este sistema existe, existe también su interacción y por ello debe tener una energía diferente de cero. Esto último parte de asumir el siguiente prejuicio físico: la energía es una medida de interacción.

Siguiendo con el experimento mental ¿qué puede interaccionar en este tipo de sistemas?. Dado que es un sistema macroscópico, ya que es clásico, sus interacciones deben estar relacionadas con las partículas que lo componen y sus campos. No obstante, la interacción entre partículas y campos entre si deben ser dependientes de las posiciones aparentes de los mismos, ya que en caso contrario no podría existir la noción de sistema localizado. Es decir, las interacciones deben depender de posiciones de partículas y campos porque, de no tener esta dependencia, no habría diferencia entre tener el sistema físico en un laboratorio o esparcido por todo el universo. Por tanto, medir la interacción del sistema a través de la energía es también

un acto de medir, en cierta manera, la configuración espacial del mismo.<sup>17</sup>

Esto último hace que las restricciones en las configuraciones espaciales accesibles tengan un efecto en la energía. Dado que en la topología la continuidad juega un papel central, una restricción en la topología del campo debe corresponder, en alguna medida, a una restricción en las configuraciones espaciales accesibles bajo transformaciones continuas. De esta forma, fijar la topología del campo debe corresponder a fijar la estructura espacial del mismo con cierta libertad entre configuraciones accesibles bajo transformaciones continuas.

Con esto, solo queda argumentar que estas restricciones corresponden a una cota inferior de la energía cuando hay links en el campo. Para ello usaremos el concepto del trabajo que puede realizar el sistema de nuestro experimento mental.

Si nuestro sistema mantiene la topología de los campos en su evolución, también la debe mantener en cualquier proceso. Por consiguiente, cuando el sistema hace trabajo, dado que es un proceso, también mantiene la topología. De esta forma, si nuestro sistema realiza una serie de trabajos consecutivamente tendrá cada vez una energía menor. Escogiendo una sucesión de trabajos que lleven a la energía mínima posible, llamémosla  $E_0$  se debe tener  $E_0 > 0$ .

En efecto, ya que los links tienen una energía asociada (partiendo del prejuicio físico: crear un link no tiene un costo cero de energía), y que estos procesos continuos no puede desenlazarse el campo (por definición de conservación de la topología); entonces la energía final como mínimo debe corresponder a la energía de los links.

---

<sup>17</sup> Un ejemplo claro de esto es la energía electrostática de un conjunto de cargas puntuales.



#### **4. SOBRE EL EQUILIBRIO MHD IDEAL, LAS ECUACIONES DE EULER Y LOS INVARIANTES TOPOLÓGICOS**

La topología es probablemente una de las ramas más importantes y transversales de las matemáticas. Concebir el análisis matemático o la geometría diferencial sin ella es imposible, o por lo menos incompleto. Es por esta importancia, y la influencia del análisis y la geometría en la física, que también es fundamental en la fisicomatemática.

En el capítulo anterior se mostró la existencia de cantidades invariantes (en MHD y las ecuaciones de Euler) que poseían características topológicas cuando se realizaba una analogía entre curvas cerradas y campos vectoriales solenoidales. Aunque ello ya sea un resultado que muestra la importancia de la topología en las ecuaciones MHD, y por tanto en el estudio de plasmas para fusión nuclear, en este capítulo ahondaremos aún más en la topología del sistema, con el fin de entender con más detalle las características físicas del mismo.

Hasta ahora el resultado mostrado más importante que relaciona invariantes topológicos con la física del sistema, es el como la energía se ve acotada por la helicidad del campo; sus implicaciones y porqué esto es un resultado esperado en teorías de campos clásicas (al asumir características físicas relativamente generales). No obstante, existen más resultados donde se ilustra la influencia de los invariantes topológicos en la energía, y es importante profundizar en ellos.

Con lo anterior en mente, este capítulo estudiará con más detalle la influencia de los invariantes topológicos (en magnetohidrodinámica ideal y las ecuaciones de Euler) en el contexto de equilibrio; el cual es clave para comprender la estabilidad en

plasmas de fusión. Además de esto se hará mas clara la relación de los invariantes topológicos y la energía, mediante el estudio del grupo de Lie, como espacio de configuración, correspondiente a las ecuaciones de Euler y MHD ideal incompresible.

Esto último se llevará a cabo con base en a la la geometrización propuesta en el capítulo anterior, que esta inspirada en los arrastres de Lie. De esta forma, construiremos un puente entre la formulación de Arnold para las ecuaciones MHD y de Euler, mediante argumentos topológicos y nuevos resultados sobre arrastres de Lie.

En esta formulación de Arnold se propone un grupo de Lie como espacio de configuración, y en el se define una métrica invariante a izquierda con la energía del sistema. De esta forma, los flujos geodésicos del grupo corresponden con las ecuaciones de movimiento del sistema físico. Con esto en mente, nuestra conexión con la formulación de Arnold mostrará una manera alternativa de llegar al espacio de configuración, a través de restricciones topológicos en la versión generalizada de las ecuaciones geometrizadas.

#### **4.1. Geometría diferencial de superficies y equilibrio MHD**

En esta sección será necesario incluir algunos resultados propios de la geometría diferencial de curvas y superficies. Si bien ya hemos usado el concepto de variedad, lo cierto es que siempre se ha pensado en 3-variedades o regiones contenidas en  $\mathbb{R}^3$  cuyos espacios tangentes son el hogar de los campos vectoriales como  $B$  y  $V$ . Debido a esto, y para evitar confusiones, se usará la notación de **do2016differential** en lugar de la expuesta en el marco teórico, para cuando hablemos de 2-variedades (que en nuestro sistema físico, corresponderán a la frontera que limita el plasma en una región  $M \subset \mathbb{R}^3$ ). Por ello procederemos a aclarar nuestra nueva notación en

este contexto, basados en **do2016differential**.

**Definición 68** (Superficie regular). *Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si  $\forall p \in S$ , existe un entorno  $V$  en  $\mathbb{R}^3$  y una aplicación  $x : U \rightarrow V \cup S$  de un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cup S \subset \mathbb{R}^3$  tal que*

- *Cada componente de  $x = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  es  $C^\infty$ .*
- *$x$  es un homeomorfismo.*
- *Para cada punto  $q \in S$ , la diferencial  $dx_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva.*

Es claro que con esta notación que  $dx_q$  puede escribirse para una base coordenada como

$$dx_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (156)$$

donde  $(u, v)$  corresponden a las coordenadas en  $\mathbb{R}^2$ . Por tanto, el espacio tangente en cada punto de la 2-variedad (superficie regular) corresponde a su vez al plano tangente a la superficie, que está contenida en  $\mathbb{R}^3$ .

Es este contexto no es necesario hablar de una estructura adicional, como lo es la métrica, para definir el producto punto en cada espacio tangente. Esto es así, ya que el producto punto de  $\mathbb{R}^3$  se induce en cada plano contenido en el espacio. No obstante, podríamos decir que la definición análoga a métrica, en la geometría de curvas y superficies, corresponde a la de la primera forma fundamental.

**Definición 69** (Primera forma fundamental). Sea  $p \in S$  una superficie regular, y  $T_p S \subset \mathbb{R}^3$  su plano tangente. Dados  $w_1, w_2 \in T_p S$ , llamamos  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  al producto punto de  $w_1, w_2$  como vectores en  $\mathbb{R}^3$ . A este producto punto le corresponde una forma cuadrática  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2. \quad (157)$$

Esta forma cuadrática es denominada la primera forma fundamental de la superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  en  $p \in S$ .

Por tanto, dada una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$ , y un vector representado en la base coordenada  $w = a_0 \mathbf{x}_u + b_0 \mathbf{x}_v \in T_p S$

$$I_p = \langle w, w \rangle_p = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p a_0^2 + 2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p a_0 b_0 + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p b_0^2, \quad (158)$$

donde  $\mathbf{x}_u$  hace referencia a derivadas parciales. Llamamos a  $E \equiv \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p$ ,  $F \equiv \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p$  y  $G \equiv \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p$  los coeficientes de la primera forma fundamental. Note que su equivalente en términos Riemannianos corresponde a las componentes de la métrica en una base coordenada. Note también que dada una región acotada  $R \subset S$  y una parametrización  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ , el número

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| du dv, \quad Q = \mathbf{x}^{-1}(R), \quad (159)$$

Corresponde al área de  $R$ , y en términos de la primera forma fundamental es posible escribir  $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2}$ .

Para terminar esta subsección, procederemos a presentar conceptos y resultados necesarios en la demostración del teorema Egregium de Gauss. Con este último demostraremos el teorema de Gauss-Bonnet, y el teorema a de Poincaré Hopf, con el que caracterizaremos la frontera del plasma.

**Definición 70** (Orientación). *Decimos que una superficie regular  $S$  es orientable si es posible recubrirla con una familia de entornos coordenados de forma que si un punto  $p$  pertenece a dos entornos de esta familia, entonces el cambio de coordenadas  $u = u(\bar{u}, \bar{v})$ ,  $v = v(\bar{u}, \bar{v})$  tiene un jacobiano positivo en  $p$ . A la elección de tal familia se denomina una orientación de  $S$  y, en esta caso,  $S$  se denomina orientada. Si no es posible tal elección, la superficie se denomina no orientable.*

**Teorema 25.** *Una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  es orientable si y solo si existe un campo diferenciable de vectores normales unitarios  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ .*

*Demostración.* Si  $S$  es orientable definimos para cada punto  $p = \mathbf{x}(u, v)$

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}. \quad (160)$$

Por la definición  $N$  es diferenciable, y dado que a cambios de parametrización el jacobiano es positivo,  $N$  está bien definido.

Por otro lado, si existe  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo diferenciable de vectores unitarios normales podemos considerar una familia de entornos coordenados conexos que recubran a  $S$ . Para los puntos  $p = \mathbf{x}(u, v)$  de cada entorno coordenado  $\mathbf{x}(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , es posible, gracias a la continuidad de  $N$  escribir

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}, \quad (161)$$

intercambiando  $u$  con  $v$  si fuese necesario. De hecho,

$$N(p) \cdot \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = f(p) = \pm 1, \quad (162)$$

es una función continua en  $x(U)$  y como  $x(U)$  es conexo,  $f(p)$  debe ser constante. De esta forma si  $S$  no fuera orientable existiría un cambio de parametrización negativo lo cual sería una contradicción con el hecho anterior.

□

Con el resultado anterior vemos que una orientación esta totalmente caracterizada por

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}. \quad (163)$$

Esto está relacionado directamente con la noción de orientación usual en variedades dada por una forma de volumen (en 2-variedades, una 2-forma de área). Ya que en términos de Riemann,  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$  tienen como duales métricos a  $du$  y  $dv$  respectivamente. Por ello, la forma canónica es de área  $du \wedge dv$ .

**Definición 71** (Aplicación de Gauss). *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie con una orientación  $N$ . Dado que  $N(S)$  solo toma valores en  $S^2$ , llamamos aplicación de Gauss a  $N : S \rightarrow S^2$ .*

Note que  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  es una aplicación lineal autoadjunta ( $\mathbf{x}_v \cdot dN_p(\mathbf{x}_u) = dN(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u$ ) ya que  $N \cdot \mathbf{x}_u = N \cdot \mathbf{x}_v = 0$ . Por consiguiente, es posible asociar una forma cuadrática  $\Theta_p(v) = dN_p(v) \cdot v$  en  $T_pS$ .

**Definición 72** (Segunda forma fundamental de Gauss). *La forma cuadrática, definida en  $T_pS$  por  $\Pi_p(v) = -dN_p(v) \cdot v$ , se llama segunda forma fundamental de  $S$  en  $p$ .*

De manera análoga a la primer forma fundamental, la segunda puede ser escrita en la base coordenada. Dado  $w = a_0\mathbf{x}_u + b_0\mathbf{x}_v \in T_pS$

$$\Pi_p(w) = -dN_p(w) \cdot w = -N_u \cdot \mathbf{x}_u a_0^2 - 2N_v \cdot \mathbf{x}_u a_0 b_0 - N_v \cdot \mathbf{x}_v b_0^2 = e a_0^2 + 2f a_0 b_0 + g b_0^2, \quad (164)$$

donde  $e = -N_u \cdot \mathbf{x}_u$ ,  $f = -N_v \cdot \mathbf{x}_u$  y  $g = -N_v \cdot \mathbf{x}_v$ . Así mismo, es posible escribir la diferencial de la aplicación de Gauss en esta base coordenada  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$

$$dN \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}. \quad (165)$$

Por tanto, combinando estos resultados anteriores se puede escribir

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad (166)$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad (167)$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad (168)$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \quad (169)$$

**Definición 73** (Curvatura Gaussiana y media). *Sea  $p \in S$  y sea  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  la diferencial de la aplicación de Gauss. El determinante de  $dN_p$  es la curvatura gaussiana  $K$  de  $S$  en  $p$ . El inverso de la mitad de la traza el llamada curvatura media  $H$ .*

Con el resultado anterior podemos ver que la curvatura Gaussiana puede escribirse en términos de la primera y segunda forma fundamental como

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (170)$$

Gracias a que las superficies regulares están encajadas en  $\mathbb{R}^3$ , la conexión coincide con los símbolos de Christoffel. Es decir, los números  $\Gamma_{ij}^j$  tal que

$$\mathbf{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 N, \quad (171)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N, \quad (172)$$

$$\mathbf{x}_{vu} = \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + \bar{L}_2 N, \quad (173)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + L_3 N, \quad (174)$$

$$N_u = a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \quad (175)$$

$$N_v = a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v. \quad (176)$$

Por tanto, puede verse que

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u, \quad (177)$$

$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v, \quad (178)$$

$$\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v, \quad (179)$$

$$\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u, \quad (180)$$

$$\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u, \quad (181)$$

$$\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v, \quad (182)$$

Con esto ya es posible definir la derivada covariante de manera usual.

**Definición 74** (Derivada covariante para superficies regulares). *Sea  $y = y^1(u, v)\mathbf{x}_u + y^2(u, v)\mathbf{x}_v = y^1(u, v)\mathbf{e}_1 + y^2(u, v)\mathbf{e}_2$  un campo vectorial tangente sobre una superficie regular  $S$  y  $w = w^1\mathbf{x}_u + w^2\mathbf{x}_v = w^1\mathbf{e}_1 + w^2\mathbf{e}_2 \in T_p S$ . Dada una curva  $C$  regular contenida en  $S$ , y sea  $\alpha(t)$  una parametrización de  $C$  tal que  $\alpha(0) = p$ , y  $\alpha'(0) = v$ .*

La derivada covariante de  $y$  en la dirección de  $\alpha(t)'$  es

$$\nabla_w y = \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 w^j y^i(u, v) \Gamma_{ji}^k + w^1 \frac{\partial y^k(u, v)}{\partial u} + w^2 \frac{\partial y^k(u, v)}{\partial v} \right) e_k. \quad (183)$$

**Definición 75** (Curvatura geodésica). *Sea  $C$  una curva regular orientada contenida en una superficie orientada  $S$ , y sea  $\alpha(s)$  una parametrización respecto a la longitud de arco de  $C$ , en un entorno  $p \in S$ . La norma de la derivada covariante de  $\alpha'(s)$  con respecto a sí misma, en  $p$ , se denomina curvatura geodésica de  $C$  en  $p$ .*

Ya teniendo clara la notación en ésta, la geometría diferencial de Gauss, procederemos a mostrar los resultados necesarios para llegar al teorema de Poincaré-Hopf.

**4.1.1. Teorema de Poincaré Hopf** En esta sección nos basaremos en **do2016differential** y **croom2012basic** para demostrar el teorema de Poincaré Hopf. Este lo construiremos usando la notación de Gauss que ya vimos, y basándonos en el teorema de Gauss-Bonnet que demostraremos.

**Teorema 26** (Teorema de Egregium). *La curvatura gaussiana  $K$  de una superficie es invariante ante isometrías locales.*

*Demostración.* Por la diferenciabilidad usual tenemos conmutatividad de las derivadas mixtas en  $N$  y  $x$ , por tanto

$$(\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u = 0, \quad (184)$$

$$(\mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_{vu})_v = 0, \quad (185)$$

$$N_{uv} - N_{vu} = 0, \quad (186)$$

lo que puede escribirse en términos de los símbolos de Christoffel y los coeficientes de la segunda forma fundamental. Ahora bien, debido a la independencia lineal de este triedro  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$  el reescribir las ecuaciones 184, 185 y 186 en términos del mismo nos llevará a las ecuaciones

$$A_1\mathbf{x}_u + B_1\mathbf{x}_v + C_1N = 0, \quad (187)$$

$$A_2\mathbf{x}_u + B_2\mathbf{x}_v + C_2N = 0, \quad (188)$$

$$A_3\mathbf{x}_u + B_3\mathbf{x}_v + C_3N = 0, \quad (189)$$

donde cada coeficiente debe ser 0 por independencia lineal. Empezando con la ecuación 184 junto con las ecuaciones que definen los símbolos de Christoffel tenemos al derivar

$$\Gamma_{11}^1\mathbf{x}_{uv} + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_{vv} + eN_v + (\Gamma_{11}^1)_v\mathbf{x}_u + (\Gamma_{11}^2)_v\mathbf{x}_v + e_vN \quad (190)$$

$$= \Gamma_{12}^1\mathbf{x}_{uu} + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_{vu} + fN_u + (\Gamma_{12}^1)_u\mathbf{x}_u + (\Gamma_{12}^2)_u\mathbf{x}_v + f_uN, \quad (191)$$

luego reescribiendo a su vez cada termino en el triedro local podemos obtener una ecuación para cada componente. Si tomamos las componente de  $\mathbf{x}_v$  obtenemos la ecuación equivalente a  $B_1 = 0$  que es

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + ea_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + fa_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u. \quad (192)$$

Por último, reagrupando los valores de  $\Gamma$  a un lado y los  $a_{ij}$  al otro, obtenemos

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -e \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) + f \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \quad (193)$$

$$= \frac{egE - f^2E}{EG - F^2} = -EK. \quad (194)$$

Con esto podemos ver que la curvatura gaussiana solo depende la primera forma fundamental y sus derivadas, lo que la hace invariante a isometrías locales.  $\square$

**Teorema 27** (Teorema local de Gauss-Bonnet). <sup>18</sup> Sea  $x : U \rightarrow S$  una parametrización ortogonal ( $F=0$ ) de una superficie orientada  $S$  donde  $U$  es homeomorfo a un disco abierto. Sea  $\alpha : I \rightarrow S$  tal que  $\partial R = \alpha(I)$ . Admitamos que  $\alpha$  está orientada positivamente, y está parametrizada por la longitud de arco  $s$ , siendo  $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$ , y  $\theta_0, \dots, \theta_k$  los vértices y ángulos externos de  $\alpha$  entonces

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K dA + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi, \quad (195)$$

donde  $k_g$  es la curvatura geodésica de los arcos regulares de  $\alpha$  y  $K$  es la curvatura gaussiana de  $S$ .

*Demostración.* Usando la expresión para  $k_g(s)$  en un parametrización ortogonal se tiene que

---

<sup>18</sup> Este teorema surgió por el estudio de los polígonos sobre superficies. Esto es claro ya que cada  $\alpha_i$  corresponde a un lado del polígono sobre la variedad y este teorema nos cuantifica como cambia la relación de ángulos externos del polígono, con respecto a lo que se tiene en el plano.

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\phi_i}{ds}, \quad (196)$$

donde  $\phi_i$  mide en ángulo positivo entre  $\mathbf{x}_u$  y  $\alpha'(s)$  en  $[s_i, s_{i+1}]$ . Integrando esta expresión en cada intervalo  $[s_i, s_{i+1}]$ , obtenemos

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\phi_i}{ds} ds. \quad (197)$$

Ahora bien, utilizando en teorema de Gauss-Green

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \left\{ \left( \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\phi_i}{ds} ds. \quad (198)$$

Como sabemos del teorema Egregium de Gauss,  $K$  solo depende de la primer forma fundamental. En el caso en el que  $F = 0$  se tiene que

$$\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \left\{ \left( \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv = - \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K \sqrt{EG} dudv \quad (199)$$

$$= - \iint_R K dA. \quad (200)$$

Por consecuencia, por el teorema de rotación de tangentes tenemos

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\phi_i}{ds} ds = \sum_{i=0}^k (\phi_i(s_{i+1}) - \phi_i(s_i)) = \pm 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i, \quad (201)$$

lo que finalmente, por la orientación positiva de  $\alpha$ , nos muestra que

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \int_R K dA + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi. \quad (202)$$

□

**Definición 76** (Triangulación). *Una triangulación de una región  $R \subset S$  es una familia finita de triángulos  $T_i$  tal que*

- $U_{i=1}^n = R$
- Si  $T_i \cup T_j \neq \emptyset$  solo comparten un lado o vértice.

Note que si existe una triangulación de la superficie regular  $S$ , entonces  $S$  es triangulable como espacio topológico, en el sentido discutido en el marco teórico. En otras palabras existe un complejo simplicial  $K$  cuyo poliedro asociado  $|K|$  es homeomorfo a  $S$ . Con ello, cada triángulo  $T_i$  corresponde a la imagen bajo este homomorfismo de un 2-simplex, cada lado de éste a la de un 1-simplex y cada vértice a la de un 0-simplex en  $|K|$ . Note también que las condiciones de la triangulación hacen que  $|K|$  sea igualmente una 2-pseudovariedad.

Con esto en mente, tal y como se mencionó en el marco teórico con el teorema 1, podemos justificar la existencia de esta triangulación geoméricamente <sup>19</sup>. Esto debido a que, como cada simplex es el conjunto convexo más pequeño que contiene a sus vértices, es posible escoger un poliedro asociado de tal suerte que todos sus

---

<sup>19</sup> Esta justificación no es del todo precisa, ya que para demostrar su existencia de manera adecuada es necesario incluir el concepto de Celdas. No obstante, da una idea de porqué debería existir la triangulación.

puntos estén contenidos dentro de una superficie, y pueda crearse un homeomorfismo con ella proyectándolos a esta.

De esta forma, dada una triangulación  $\zeta$  de una región regular, el número  $F - E + V = \chi$ ; donde  $F$  es el número de triángulos,  $E$  el de lados y  $V$  el de vértices; es invariante a la escogencia de la triangulación ya que corresponde a la característica de Euler del poliedro asociado con el homeomorfismo construido.

**Teorema 28** (Teorema global de Gauss-Bonnet). *Sea  $R \subset S$  una región regular de una superficie orientada y Sean  $C_i$  curvas regulares a trozos, cerradas y simples que forman la frontera de  $R$ . Suponiendo que cada  $C_i$  está orientada positivamente, entonces*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K dA + \sum_{i=1}^p \theta_i = 2\pi\chi(R), \quad (203)$$

donde  $s$  corresponde a la longitud de arco.

*Demostración.* Considere una triangulación de la superficie. Al aplicar el teorema local se tiene

$$\sum_i \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K dA + \sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi F, \quad (204)$$

donde los  $\theta_{jk}$  son los ángulos externos de cada triángulo. Ahora bien, en términos de los ángulos internos  $\phi$  esto se puede escribir como

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = \sum_{j,k} \pi - \sum_{j,k} \phi_{jk} = 3\pi F - \sum_{j,k} \phi_{jk}. \quad (205)$$

Denotando  $E_e$  = el número de aristas externas de  $\zeta$ ,  $E_i$  = el número de aristas internas de  $\zeta$ ,  $V_e$  = el número de vértices externos de  $\zeta$  y  $V_i$  = el número de vértices internos de  $\zeta$  (note que  $V_e = E_e$  porque las curvas son cerradas). Por inducción tenemos que  $3F = 2E_i + E_e$ , por tanto

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = 2\pi E_t + \pi E_e - \sum_{j,k} \phi_{jk}. \quad (206)$$

Por último, separando los vértices  $V_e = V_{ec} + V_{et}$  en los vértices que coinciden con los vértices de las curvas  $V_{ec}$  con los que no  $V_{et}$ , y tomando en cuenta que para nuestro caso  $V_e = E_e$ , tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \theta_{jk} &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_t - \pi V_e - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_i \theta_i \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_i \theta_i, \end{aligned} \quad (207)$$

que finalmente nos lleva a

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K dA + \sum_{i=1}^p \theta_i = 2\pi(F - E + V) = 2\pi\chi(R). \quad (208)$$

□

**Definición 77** (Punto singular). *Dado  $v$ , un campo vectorial tangente sobre una*

superficie orientada  $S$ . Decimos que  $p \in S$  es un punto singular si  $v(p) = 0$ . Este es aislado si existe un entorno de  $p$  en el que es el único punto singular.

**Definición 78** (Índice). Sea  $p = x(0, 0)$  con  $x$  consistente con la orientación de  $S$  y sea  $\alpha : [0, l] \rightarrow$  una curva parametrizada, regular a trozos, orientada positivamente, cerrada y simple  $\alpha([0, l]) \subset x(U)$  que contiene a  $p$  como único punto singular. Sea  $v = v(t)$  la restricción de  $v$  a lo largo de  $\alpha$  y  $\phi$  alguna determinación local del ángulo entre  $v(t)$  y  $x_u$ , entonces existe un número entero  $I^{20}$  que llamaremos índice tal que

$$2\pi I = \phi(l) - \phi(0) = \int_0^l \frac{d\phi}{dt} dt. \quad (209)$$

Es claro que el índice no depende de la parametrización ya que por el teorema local de Gauss-Bonnet, dada una parametrización diferente  $y$  con otro ángulo diferencial  $\psi$  con respecto a  $y_u$

$$\psi(l) - \psi(0) = \int_R K dA \Rightarrow \int_R K dA - 2\pi I = \Delta(\psi - \phi), \quad (210)$$

donde claramente  $\psi - \phi$  no depende de  $x_u$ . Esta definición también es independiente de la escogencia de la curva, ya que las curvas cerradas son homotópicas (en términos topológicos  $\pi_1(x_0, U) = \{0\}$  para cualquier bola abierta en el espacio euclidiano).

**Teorema 29** (Teorema Poincaré-Hopf). La suma de los índices de un campo vectorial diferenciable  $v$  con puntos singulares aislado sobre una superficie compacta  $S$ , es igual a la característica de Euler-Poincaré de  $S$ .

---

<sup>20</sup> Este es análogo al número de Winding

*Demostración.* Considere una superficie compacta que solo tiene puntos singulares aislados. Observemos que el número de éstos es finito. En caso contrario, la compacidad haría que los puntos singulares tuvieran un punto límite que sería un punto singular no aislado. Ahora bien, tomando  $\{\varphi_\alpha\}$  una familia de parametrizaciones compatibles con la orientación de  $S$ , y sea  $\zeta$  una triangulación tal que

- Cada triángulo  $T \in \zeta$  está contenido en algún entorno coordenado de la familia  $\{\varphi_\alpha\}$ .
- Cada  $T \in \zeta$  contiene a lo más un punto singular.
- La frontera de cada  $T \in \zeta$  carece de puntos singulares y está orientada positivamente.

Al aplicar 210 en cada triángulo veremos que cada una de las aristas aparece 2 veces con direcciones opuestas por lo que el resultado total nos da

$$\iint_S K d\sigma - 2\pi \sum_{i=1}^k I_i = 0.$$

Por último, al combinar esto con el teorema global de Gauss-Bonnet tenemos finalmente

$$\sum I_i = \frac{1}{2\pi} \iint_S K d\sigma = \chi(S).$$

□

**4.1.2. La necesidad de toroidicidad en el equilibrio MHD** A continuación presentaremos uno de los resultados centrales de este capítulo: La caracterización topológica de la frontera de un reactor de fusión en equilibrio magnetostático. La primera versión de este resultado fue presentado por primera vez en **kruskal1958equilibrium**. En este trabajo, Kruskal usa el teorema de Poincaré-Hopf para justificar que toda

superficie de  $p = \text{cte}$  corresponde a un toroide (y en consecuencia la frontera del plasma) siempre que  $B$  y  $j$  nunca se anulen en estas superficies.

No obstante, en **kruskal1958equilibrium** no se da realmente una justificación física clara para afirmar esto, ni se define precisamente la región correspondiente a la frontera del plasma. Además de esto, este resultado no suele mostrarse en la literatura de física del plasma y MHD como **freidberg2014ideal** o **bellan2008fundamentals**. Es por ello que aquí presentaremos esta caracterización de la frontera con todo detalle.

Empezaremos definiendo el protagonista de esta subsección: La frontera del plasma. Para ello es necesario conocer a que llamamos plasma dada una solución de las ecuaciones MHD.

**Definición 79** (Volumen MHD, Vacío MHD). *Dada una solución de las ecuaciones MHD en un abierto de  $\mathbb{R}^3$  <sup>21</sup>, llamamos volumen MHD a*

$$V_{MHD} = \{x \in \mathbb{R}^3 : p(\mathbf{x}, t) > 0\}. \quad (211)$$

*Llamamos vacío MHD al complemento en  $\mathbb{R}^3$  de  $V_{MHD}$ , es decir*

$$V_{vac} = V_{MHD}^c = \{x \in \mathbb{R}^3 : p(\mathbf{x}, t) = 0\}, \quad (212)$$

*ya que  $p$  es una función no negativa en este sistema.*

---

<sup>21</sup> Para esto asumimos que la función presión está definida para todo el espacio.

De estas definiciones, podemos construir la de frontera apelando a nociones físicas. Esta idea de frontera en un sistema físico caracterizado por la presión del fluido (dado que es natural pensar que la región donde hay plasma va hasta donde sería medible la acción del fluido con un aparato por medio de la presión) debe dar cuenta de la transición entre volumen MHD y vacío.

Por tanto, dado un  $q$  en la frontera, existe una sucesión  $x_n \rightarrow q$  tal que  $p(x, t) \rightarrow 0^+$ , y  $x_n$  solo toma valores dentro del volumen MHD. Así mismo, toda vecindad de  $q$  debe contener puntos en el vacío, porque de lo contrario no habría esa noción de transición entre volumen MHD y vacío. Esto queda caracterizado con el concepto de frontera de un subconjunto en un espacio topológico **neiratología**.

**Definición 80** (Frontera MHD). *Dada una solución de las ecuaciones MHD en un abierto de  $\mathbb{R}^3$ , llamamos frontera MHD a la intersección entre las adherencias<sup>22</sup> del volumen MHD y el vacío MHD*

$$Fr_{MHD} = \overline{V_{vac}} \cap \overline{V_{MHD}} \quad (213)$$

Asumiremos que  $Fr_{MHD}$  corresponde a una superficie siempre que las soluciones a las ecuaciones sean físicas, y que para el equilibrio magnetostático  $Fr_{MHD}$  no cambia en el tiempo. Con estas definiciones ya podemos caracterizar topológicamente la frontera para el plasma en equilibrio, cuando se asumen algunas condiciones físicas relativamente generales.

---

<sup>22</sup> La adherencia de un conjunto corresponde a la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen al mismo.

En primer lugar, asumiremos que  $Fr_{MHD}$  es una superficie regular orientable. El hecho de que sea regular es una necesidad dado que existen cantidades físicas, como corrientes o campos, que habitan en la superficie del plasma. En consecuencia, debería ser posible hacer cálculos sobre la superficie y, por tanto, el que ésta sea una superficie regular es deseable<sup>23</sup>. Por otro lado, la condición de orientabilidad es necesaria para la contención del plasma.

En caso de que la superficie no fuese orientable, se tendría que los jacobianos del cambio de cartas (y por tanto  $N$ ) pueden cambiar de signo. Considerando una partícula que se mueve dentro del volumen MHD, pero tan cerca como se quiera de la frontera, el que  $N$  cambie de signo hace que exista una curva por la que la partícula pueda tener distintos  $N$  al iniciar y terminar el recorrido. Con esto, si la partícula yace dentro de  $V_{MHD}$  es posible que entonces al terminar el recorrido se encuentre en  $V_{vacío}$ . En consecuencia, la superficie no encierra un volumen bien definido y esto no es físicamente deseable para un reactor. En otras palabras, la orientabilidad es necesaria para que la superficie  $Fr_{MHD}$  separe  $V_{MHD}$  y  $V_{vac}$ . Con estas consideraciones, el siguiente teorema es una consecuencia del equilibrio MHD, el teorema de Poincaré Hopf y el teorema de clasificación de superficies.

**Teorema 30** (Toroidicidad de la frontera MHD). *La frontera de un reactor en equilibrio es homeomorfa a un toroide si es una superficie regular. Es decir, tiene característica de Euler =0.*

*Demostración.* Sea  $S$  la superficie frontera MHD. Es claro que esta región constituye

---

<sup>23</sup> Note que esto impone que exista una capa de  $\rho_c$  en la frontera del plasma, por la ecuación de equilibrio. No obstante, esto es razonable si el plasma es ideal debido a la conductividad infinita del mismo.

una superficie isobárica para  $p \rightarrow 0$ . Dado que  $\text{Fr}_{MHD}$  es una superficie regular y orientable, el vector normal unitario a esta puede definirse continuamente. Por el análisis anterior

$$N = \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \Big|_{p \rightarrow 0}. \quad (214)$$

Ahora bien, de las ecuaciones de equilibrio se tiene que la densidad de corriente y el campo magnético son tangentes a las superficies isobáricas, en específico a la superficie  $p \rightarrow 0$

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{J} \cdot \nabla p = \mathbf{B} \cdot \nabla p = 0. \quad (215)$$

Por este motivo, la densidad de corriente y el campo magnético corresponden a campos tangentes que nunca se anulan en la frontera del plasma. En efecto, si existe un  $x \in S$  para el que  $\mathbf{B}|_x = 0$ , entonces  $\nabla p|_x = 0$  por lo que  $N|_x$  no estaría bien definido en este punto, y esto es absurdo ya que  $S$  es una superficie regular orientable.

Por esta razón, la suma de los índices de  $\mathbf{B}$  en  $S$  es igual a cero, y en consecuencia la característica de Euler de  $S$  es cero debido al teorema de Poincaré-Hopf. Por último, basados en el teorema de clasificación de superficies **gallier2013guide**,  $S$  debe ser homeomorfo a un toro.

□

Este teorema no solo es importante porque caracteriza la frontera del plasma en equilibrio, sino también porque responde a una pregunta mal contestada por la literatura en MHD: ¿por qué todos los prototipos de reactores de fusión son homeomorfos a un toro?. La respuesta que usualmente contienen los textos de física del

plasma y MHD ideal se basa en una razón empírica.

Se suele argumentar lo siguiente: los primeros experimentos de plasmas se daban en tubos de descarga de gases, por tanto, lo más natural y práctico para tener un sistema cerrado era identificar los extremos y formar un toroide. Con el teorema presentado anteriormente se muestra cómo tener de frontera a un toroide (topológicamente hablando), no solo es lo más práctico, sino también lo único posible. Esto último debido a los propios requerimientos de funcionamiento del reactor.

Dado que se requiere que el reactor genere energía constantemente, las ecuaciones MHD deben estar en equilibrio todo el tiempo, o en su defecto, regresar a el luego de perturbaciones. En consecuencia, la frontera del plasma debe tender la mayor parte del tiempo a la frontera en equilibrio.

#### 4.2. Grupos de Lie en las ecuaciones de Euler y MHD

En esta sección nos concentraremos en hallar el grupo de Lie, como espacio de configuración, de las ecuaciones MHD ideal incompresibles. Todo esto, mediante la geometrización analizada en el capítulo anterior, con nuevos resultados relacionados con el arrastre de Lie. Este grupo de Lie ya ha sido propuesto y estudiado por Arnold **khesin2005topological** mediante el siguiente procedimiento general:

Considere un grupo de Lie  $G$  (posiblemente infinito dimensional), que describe el flujo geodésico con respecto a una métrica invariante a izquierda bajo la acción de  $G$ . Este grupo puede pensarse como el espacio de configuración del sistema físico. Tomando su álgebra  $\mathfrak{g}$ , se fija una forma cuadrática a la que corresponderá la energía, y ésta se extiende bajo traslaciones adecuadas de  $\mathfrak{g}$ . De esta forma, la energía

define una métrica Riemanniana en el grupo  $G$ . Por consiguiente, el flujo geodésico en  $G$  con respecto a esta métrica representa los extremos de mínima acción, y en consecuencia los movimientos físicos del sistema.

Con esta idea se han estudiado diversas ecuaciones a parte de las de MHD, como las de Euler, las de Kirchhoff para cuerpos rígidos en un fluido y las ecuaciones de cadenas magnéticas de Heiserberg; ya que representa un marco general de ideas en físicomatemática. No obstante, en este procedimiento es necesario proponer el grupo de Lie a partir del espacio de configuración.

En esta sección justificaremos el grupo de Lie propuesto por Arnold (para MHD ideal e incompresible y las ecuaciones de Euler) mediante la geometrización anterior de las ecuaciones, y restricciones en el grupo de difeomorfismos de las mismas. Esto último, basándonos en nuevos teoremas de arrastres de Lie. De esta forma, el resultado que será presentado a continuación corresponde a un vínculo entre una formulación geométrica de los fluidos basada en los arrastres de Lie **tur1993invariants**, y la formulación de Arnold. Es por ello, que presenta uno de los resultados más importantes en esta tesis.

#### **4.2.1. Grupos de Lie en la magnetohidrodinámica ideal y las ecuaciones de Euler: Una consecuencia geométrica y topológica.**

Considere una variedad Riemanniana  $(M, g)$  cerrada, compacta y orientable, con una forma de volumen  $\mu$  que fijaremos (a priori relacionada con la métrica). Las ecuaciones MHD ideal incompresible pueden extenderse a  $M$  mediante la geometrización realizada al principio del capítulo anterior. Esto, introduciendo objetos geométricos como formas y vectores dependientes del tiempo. En otras palabras, dada una 2-forma  $\alpha_B$ , un vector  $V$ , y unas funciones  $\rho_m$  y  $p$ ; decimos que estas cantidades son solución de las

ecuaciones MHD geometrizadas si

$$d\alpha_B = 0 \quad (216)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\right)\alpha_B = 0 \quad (217)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\right)\rho_m\mu = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\right)\rho_m = 0, \quad \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\mu = 0 \quad (218)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\right)\frac{p}{\rho_m^\gamma} = 0 \quad (219)$$

$$\mathbf{j} \equiv g^\# \star d \star \alpha_B \quad (220)$$

$$\rho_m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\right) g^\flat \mathbf{V} - \rho_m d \left(\frac{1}{2} g(\mathbf{V}, \mathbf{V})\right) = dp - i_{\mathbf{j}}(\alpha_B). \quad (221)$$

De manera análoga es posible escribir las ecuaciones de Euler geometrizadas para  $M$  como

$$\alpha_V = d(g^\flat \mathbf{V}) \quad (222)$$

$$d\alpha_V = 0 \quad (223)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\right)\alpha_V = 0 \quad (224)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\right)\rho_m\mu = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\right)\rho_m = 0, \quad \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\mu = 0. \quad (225)$$

$$(226)$$

Estas pueden construirse a partir de las de MHD geometrizadas tomando  $\alpha_B \equiv 0$  en un fluido barotrópico ( $p(\rho_m)$ ):

$$\rho_m \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) g^b V - \rho_m d \left( \frac{1}{2} g(V, V) \right) = dp \Rightarrow \quad (227)$$

$$d\rho_m \wedge \left[ \frac{\partial}{\partial t} g^b V + i_V \alpha_V + \frac{1}{2} d(g(V, V)) \right] + \rho_m \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) \alpha_V = 0 \Rightarrow \quad (228)$$

$$d\rho_m \wedge \frac{dp}{\rho_m} + \rho_m \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) \alpha_V = 0 = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) \alpha_V. \quad (229)$$

Una característica inmediata dada por la geometrización, es la invarianza a la acción de difeomorfismos; es decir, dado un difeomorfismo  $\phi$  en  $M$ , las funciones y objetos geométricos mapeados con los pullbacks y pushforwards también cumplen las ecuaciones MHD y Euler geometrizadas. Esto es consecuencia del uso exclusivo de objetos y operadores geométricos en las ecuaciones. A pesar de que sea un resultado esperado, lo haremos explícito.

**Teorema 31.** *Las Ecuaciones de Euler y MHD geometrizadas son invariantes a la acción de difeomorfismos.*

*Demostración.* Nos centraremos en demostrar que las ecuaciones MHD geometrizadas son invariantes a la acción de difeomorfismos y con esto estará demostrado para ambos sets de ecuaciones, ya que las de Euler son una restricción de las MHD. Sea  $\phi$  un difeomorfismo en  $M$ , es decir  $\phi \in \text{Diff}(M)$ . Denotaremos  $\phi_*$  como el mapeo diferencial de  $\phi$  para vectores, y  $\phi^*$  como el mapeo diferencial inducido para formas. De la ecuación 216 es inmediato que  $\phi^* \alpha_B$  también es exacta dado que  $d(\phi^* \alpha_B) = \phi^* d\alpha_B$ .

La ecuación 217 también es mapeada correctamente ya que

$$\mathcal{L}_{\phi_* \mathbf{V}}(\phi^* \alpha_B) = (i_{\phi_* \mathbf{V}} d + di_{\phi_* \mathbf{V}}) \phi^* \alpha_B = di_{\phi_* \mathbf{V}} \phi^* \alpha_B \quad (230)$$

$$= d \left[ i_{\phi_* \mathbf{V}} \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\theta} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} dy^\theta \wedge dy^\sigma \right] \quad (231)$$

$$= d \left[ V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \alpha_{\theta\nu} \frac{\partial x^\theta}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} dy^\sigma \right] \quad (232)$$

$$= d \left[ V^\mu \delta_\mu^\theta \alpha_{\theta\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} dy^\sigma \right] \quad (233)$$

$$= d[\phi^* i_{\mathbf{V}} \alpha_B] = \phi^* d(i_{\mathbf{V}} \alpha_B) = \phi^* \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \alpha_B, \quad (234)$$

y  $\partial_i$  conmuta con  $\phi^*$ . De esta forma, la ecuación 216 para  $\phi^* \alpha_B$  y  $\phi_* \mathbf{V}$  se obtiene simplemente aplicando  $\phi^*$  a 216.

Dado que para funciones  $f$  cuales quiera

$$\mathcal{L}_{\phi_* \mathbf{V}}(f \circ \phi) = V^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial y^\nu} = \phi_* V[f] = \phi_* \mathcal{L}_{\mathbf{V}} f, \quad (235)$$

y, tomando  $\mu = dx^{\lambda_1} \wedge dx^{\lambda_2} \wedge dx^{\lambda_3}$  (donde  $\lambda_i$  es una permutación de  $\{1, 2, 3\}$  que mantiene la orientación de  $M$ )

$$\mathcal{L}_{\phi_* \mathbf{V}} \phi^* \mu = di_{\phi_* \mathbf{V}} \phi^* \mu = V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^{\lambda_2}}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^{\lambda_3}}{\partial y^\sigma} dy^\beta \wedge dy^\sigma \quad (236)$$

$$= V^{\lambda_1} \frac{\partial x^{\lambda_2}}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^{\lambda_3}}{\partial y^\sigma} dy^\beta \wedge dy^\sigma = \phi^* \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \mu, \quad (237)$$

se tiene que 218 y 219 mapean correctamente ya que las ecuaciones inducidas se obtiene aplicando un  $\phi^*$  a 218 y 219.

La ecuación 220 puede ser reescrita como

$$\star g^b j = d \star \alpha_B. \quad (238)$$

En vista de que el operador de Hodge para cualesquiera formas  $\alpha, \eta \in \Omega^k(M)$  está definido por

$$\alpha \wedge \star_g \eta = (\alpha | \eta) \mu \Rightarrow \quad (239)$$

$$\phi^*(\alpha \wedge \star_g \eta) = \phi^* \alpha \wedge \star_g \beta = \phi^*((\alpha | \eta) \mu) = (\phi^* \alpha | \phi^* \eta) \phi^* \mu \equiv \phi^* \alpha \wedge \star_{\phi^* g} \phi^* \eta, \quad (240)$$

por lo que  $\star$  también mapea correctamente. Esto junto con

$$\phi^*(g^b) \phi_* j = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\theta} j^\lambda \frac{\partial y^\alpha}{\partial y^\lambda} dy^\theta = g_{\mu\nu} j^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\theta} dy^\theta = \phi^*(g^b j) \quad (241)$$

hace que se tenga

$$\star_{\phi^* g} (\phi^* g^b) (\phi_* j) = \phi^* \star g^b j = d \star_{\phi^* g} \phi^* \alpha = \phi^* d \star \alpha, \quad (242)$$

por lo que la ecuación 220 es mapeada correctamente.

Por último, para ver que 221 es también mapeada correctamente, basta con mostrar que

$$\phi^* i_j \alpha_B = i_{\phi_* j} \phi^* \alpha_B, \quad \phi^* \mathcal{L}_V g^b V = \mathcal{L}_{\phi_* V} [\phi^*(g^b)(\phi_* V)], \quad (243)$$

y usar algunos argumentos anteriormente utilizados. Esto se verifica con cálculo directo

$$i_{\phi_* j} \phi^* \alpha_B = j^\nu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\nu} \alpha_{\lambda\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\theta} dy^\theta = j^\nu \alpha_{\nu\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\theta} dy^\theta = \phi^* i_j \alpha_B \quad (244)$$

$$\mathcal{L}_{\phi_* \mathbf{V}} [\phi^*(g^b)(\phi_* \mathbf{V})] = (i_{\phi_* \mathbf{V}} d + di_{\phi_* \mathbf{V}})(\phi^* g^b)(\phi_* \mathbf{V}) \quad (245)$$

$$= (i_{\phi_* \mathbf{V}} d + di_{\phi_* \mathbf{V}}) g_{\mu\nu} V^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\theta} dy^\theta \quad (246)$$

$$= d(i_{\phi_* \mathbf{V}}(\phi^* g^b)(\phi_* \mathbf{V})) + i_{\phi_* \mathbf{V}} \left[ \frac{\partial(g_{\mu\lambda} V^\lambda)}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\theta} dy^\alpha \wedge dy^\theta \right] \quad (247)$$

$$= d(\phi^* g(\phi_* \mathbf{V}, \phi_* \mathbf{V})) + \frac{\partial(g_{\mu\lambda} V^\lambda)}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\theta} V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} dy^\theta \quad (248)$$

$$= \phi^* d(g(\mathbf{V}, \mathbf{V})) + \phi^* i_{\mathbf{V}} [d(g^b \mathbf{V})] = \phi^* \mathcal{L}_{\mathbf{V}} g^b \mathbf{V}. \quad (249)$$

□

Otro aspecto a destacar de las ecuaciones, es su dependencia de la métrica. Si bien 216, 217, 218, 219, 223, 224 y 225 no dependen explícitamente de la métrica; las ecuaciones 220, 221 y 222 si lo hacen, por lo que en general  $\alpha_B$ ,  $\alpha_V$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{y}$   $\rho_m$ ,  $p$  dependen de  $g$ . En otras palabras, si se fija la estructura diferencial de  $M$ , pero se varía en la escogencia de métrica  $g$ , también podrían cambiar las soluciones a las ecuaciones geometrizadas.

No obstante, cuando analizamos el significado de las formas arrastradas, notamos que las 2-formas localmente invariantes poseen un significado topológico en términos de un campo congelado en el medio. Con esto en mente, veremos cuál es el campo correspondiente para el caso de las ecuaciones de Euler geometrizadas (que son una restricción de las MHD), y posteriormente usaremos argumentos físicos que

nos llevarán al grupo de Lie propuesto por Arnold como espacio de configuración. Después de esto, extenderemos este grupo de Lie para obtener el relacionado con MHD geometrizado.

**Teorema 32.** *Existe un isomorfismo entre un subgrupo de campos vectoriales arrastrados de Lie, con la suma, y el grupo de 2-formas exactas arrastradas de Lie ( $d_0 \Sigma^2(M)$ ) con la suma.*

*Demostración.* Sea  $\xi$  un campo vectorial arrastrado de Lie con divergencia nula

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) \xi = 0, \quad \star d \star (g^\flat \xi) = 0. \quad (250)$$

Usando la siguiente propiedad (la cual es cierta para cualesquiera campos vectoriales  $\xi, \eta$  en una variedad Riemanniana)

$$\text{curl}(\xi \times \eta) = -\mathcal{L}_\eta \xi + \eta(\text{div } \xi) - \xi(\text{div } \eta), \quad (251)$$

podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\xi} - \text{curl}(\mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi}) = 0 \Rightarrow \quad (252)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g^b \boldsymbol{\xi} - g^b \text{curl}(\mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi}) = 0 \Rightarrow \quad (253)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g^b \boldsymbol{\xi} - g^\# g^b \star d(g^b (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi})) = 0 \Rightarrow \quad (254)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \star g^b \boldsymbol{\xi} - d(g^b (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi})) = 0 \Rightarrow \quad (255)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \star g^b \boldsymbol{\xi} - d(g^b g^\# \star (g^b \mathbf{V} \wedge g^b \boldsymbol{\xi})) = 0 \Rightarrow \quad (256)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \star g^b \boldsymbol{\xi} - d(\star (g^b \mathbf{V} \wedge g^b \boldsymbol{\xi})) = 0 \Rightarrow \quad (257)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \star g^b \boldsymbol{\xi} + d(\star (g^b \boldsymbol{\xi} \wedge g^b \mathbf{V})) = 0 \Rightarrow \quad (258)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \star g^b \boldsymbol{\xi} + d(i_{\mathbf{V}} \star g^b \boldsymbol{\xi}) = 0 \Rightarrow \quad (259)$$

$$(260)$$

por lo que definiendo  $\boldsymbol{\alpha} \equiv \star g^b \boldsymbol{\xi}$  se debe tener que

$$\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} + d(i_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\alpha}) = 0. \quad (261)$$

Dado que  $\boldsymbol{\xi}$  tiene divergencia nula,  $d\boldsymbol{\alpha} = 0$  y

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \right) \boldsymbol{\alpha} = 0. \quad (262)$$

En consecuencia

$$d\boldsymbol{\alpha} = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \right) \boldsymbol{\alpha} = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \right) \boldsymbol{\xi} = 0. \quad (263)$$

A causa de que las derivadas son operadores lineales, y del procedimiento anterior, el siguiente mapeo es un monomorfismo

$$\Phi : {}_{d_0}\Sigma^2(M) \rightarrow \Sigma_1(M) \quad (264)$$

$$\alpha \mapsto g^\# \star \alpha, \quad (265)$$

por lo tanto  ${}_{d_0}\Sigma^2(M) \cong \Phi(\Sigma_1(M))$ . □

Con este resultado tenemos entonces que, dado un  $\alpha_V$  solución (para las ecuaciones de Euler), existe un campo vectorial  $g^\# \star \alpha_V$  arrastrado. Además de esto, por la interpretación que dimos en el capítulo anterior, este campo está congelado en el medio. En el caso de las ecuaciones de Euler, este juega el papel de la vorticidad  $\text{curl}(\mathbf{V})$ .

Por tanto, existe la helicidad de este campo que podemos escribir como

$$\mathcal{H}(g^\# \star \alpha_V) = \int_M \alpha_V \wedge \tilde{\mathbf{A}}, \quad (266)$$

donde  $d\tilde{\mathbf{A}} = \alpha_V$  asumiendo que  $H^2(M) = \{0\}$ <sup>24</sup>.  $\mathcal{H}(g^\# \star \alpha_V)$  está bien definida dado que  $\partial M = \emptyset$ . En efecto, si  $\tilde{\mathbf{A}} \mapsto \tilde{\mathbf{A}} + d\boldsymbol{\eta}$

$$\int_M \alpha_V \wedge \tilde{\mathbf{A}} + \int_M \alpha_V \wedge d\boldsymbol{\eta} = \int_M \alpha_V \wedge \tilde{\mathbf{A}} + \int_M d(\tilde{\mathbf{A}} \wedge \boldsymbol{\eta}) = \int_M \alpha_V \wedge \tilde{\mathbf{A}} = 0, \quad (267)$$

---

<sup>24</sup> Asumir esto tiene un significado en términos de ausencia de agujeros dos dimensionales. En otras palabras,  $H^2(M) = \{0\}$  dice que toda curva cerrada es la frontera de alguna superficie que yace en  $M$ .

por el teorema de Stokes. Además de esto, por su construcción,  $\mathcal{H}(g^\# \star \alpha_V)$  debe ser arrastrada de Lie para un gauge de  $\tilde{\mathbf{A}}$  fijo, tal y como se mostró para  $\mathbb{R}^3$  en el capítulo anterior

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V\right) \int_M \alpha_V \wedge \tilde{\mathbf{A}} = \int_M \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V\right) \alpha_V \wedge \tilde{\mathbf{A}} + \int_M \alpha_V \wedge \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V\right) \tilde{\mathbf{A}} \quad (268)$$

$$= \int_M \alpha_V \wedge \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V\right) \tilde{\mathbf{A}} = 0. \quad (269)$$

Aunque  $\mathcal{H}(g^\# \star \alpha_V)$  es invariante local, sigue dependiendo de la métrica a través de  $\alpha_V$ . Por lo tanto, al fijar la estructura diferencial de  $M$  y variar  $g$ ,  $\mathcal{H}(g^\# \star \alpha_V)$  podría cambiar.

No obstante, este no debería ser el caso siempre que  $\mathcal{H}(g^\# \star \alpha_V)$  siga apelando a una noción de linking entre curvas integrales, tal y como se demostró en el caso euclidiano. Esto último debido a que, sí se varía suavemente  $g_{\mu\nu} \mapsto g'_{\mu\nu}$  (en el espacio de métricas), se inducirían nuevos campos congelados en el medio dados por  $g'^\# \star' \alpha'_V$ , e inducidos por el mapeo en el espacio de métricas.

Este último definiría un homeomorfismo entre curvas integrales de  $g'^\# \star' \alpha'_V$  y  $g^\# \star \alpha_V$ , por lo que los números de linking asintóticos no se vería afectados, y la helicidad no dependería de la métrica. Esto, como consecuencia de que el número de linking gaussiano de dos curvas, no cambia ante deformaciones continuas de las mismas. Dicho de otra forma,  $\mathcal{H}(g^\# \star \alpha_V)$  no debería depender de la métrica siempre que siga relacionado con invariantes de las curvas integrales como el número de linking, ya que al variar en métricas se induciría un homeomorfismo en las curvas integrales de  $g'^\# \star' \alpha'_V$  y  $g^\# \star \alpha_V$ , en  $(M, g')$  y  $(M, g)$  respectivamente.

En adición a este análisis, tenemos que físicamente la ecuación 223 corresponde a la descripción dinámica de las ecuaciones de Euler (como vimos en el capítulo anterior). Dado que esto es una consecuencia física, y da una idea de la estructura de las líneas de campo; es razonable pensar que por razones físicas,  $\alpha_V$  no debería depender de la métrica. En caso de que dependiera de la métrica, la noción de flujo podría variar con ella y esto no es deseable físicamente.

Con estos argumentos desde las matemáticas y la física, es razonable imponer que  $\mathcal{H}(g^\# \star \alpha_V)$  no depende de la métrica para soluciones físicamente plausibles de las ecuaciones de Euler geometrizadas. Esta imposición hace que, para fines físicos, siempre se conserve la forma de volumen debido a que la dimensión de  $M$  es 3:

$$\mathcal{H}(g^\# \star \alpha_V) = \int_M \alpha_V \wedge \tilde{\mathbf{A}} = \int_M f(\mathbf{x}, t) \mu, \quad (270)$$

para alguna función  $f$ . En consecuencia si  $\mathcal{H}(g^\# \star \alpha_V)$  tampoco varía bajo difeomorfismos, por lo que  $\phi^* \mu = \mu$  para cualquier difeomorfismo  $\phi$  que sea físicamente posible. Esto hace que naturalmente se considere el grupo de Lie

$$\text{SDiff}(M) \equiv \{\phi \in \text{Diff}(M) | \phi^* \mu = \mu\}, \quad (271)$$

que es subgrupo del grupo de difeomorfismos al que las ecuaciones son invariantes bajo su acción.

Note que en este grupo, la helicidad de un campo  $\xi$  está definida independiente de la métrica (aunque se puede escribir con ella) mediante la forma exacta  $i_\xi \mu$  y su potencial  $\mathbf{A}$  ( $d\mathbf{A} = i_\xi \mu$ ), con lo que la helicidad se escribe como **arnold1999topological**

$$\int_M d\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = \int_M i_{\xi}\mu \wedge \mathbf{A} = \int_M i_{\xi}\mathbf{A} \wedge \mu = \int_M g(g\#\mathbf{A}, \xi)\mu = \langle \text{curl}^{-1} \xi, \xi \rangle, \quad (272)$$

ya que  $\star d\mathbf{A} = \star i_{\xi}\mu = \xi$ .

Este grupo  $\text{SDiff}(M)$  es el propuesto por **arnold1999topological** como espacio de configuración de las ecuaciones de Euler <sup>25</sup>, y subgrupo del correspondiente en MHD (no obstante, el grupo de MHD se construye partir de  $\text{SDiff}(M)$  y su álgebra, mediante el fibrado cotangente  $T^*G$ , como veremos en la próxima subsección).

De esta forma, podemos afirmar que el grupo de Lie de Arnold (espacio de configuración) constituye un grupo construido a partir de restricciones topológicas en el grupo de difeomorfismos al que naturalmente es invariante la geometrización.

Este resultado es intuitivo físicamente, ya que se espera que el espacio de configuración de un sistema físico corresponda a los estados accesibles del mismo. De esta forma, el limitarlas posibles transformaciones de las ecuaciones geometrizadas mediante argumentos topológicos (como lo fue el que la helicidad no dependiera de la métrica), debería mostrar naturalmente estos estados accesibles.

Además de esto, y dado que nuestra geometrización esta inspirada en el formalismo de arrastres de Lie, este resultado también presente un puente a explorar entre los trabajos de Arnold en mecánica fluidos, y la estructura super simétrica de los arrastres de Lie presentada por primera vez en **volkov1995hidden**.

---

<sup>25</sup> Note que  $\text{SDiff}(M)$  debe corresponder por completo con el grupo  $G$  de su espacio de configuración, ya que las ecuaciones estan totalmente caracterizadas por el arrastre de  $\alpha_V$  y la ecuación de continuidad.

**S**Diff( $M$ ), su álgebra y el grupo de Lie de MHD Antes de inspeccionar consecuencias directas de tener SDiff( $M$ ) como espacio de configuración, mostraremos algunos resultados generales de este grupo basados en **arnold1999topological** y **khesin2005topological**. Posteriormente construiremos el grupo de Lie (dado por Arnold **arnold1999topological**) para las ecuaciones MHD a partir de dotar a  $T^*G$  de operaciones suaves que lo hagan un grupo de Lie.

**Teorema 33.** *El álgebra de SDiff( $M$ ) corresponde al espacio vectorial de campos vectoriales con divergencia cero en  $M$ , denotado como SVect( $M$ )*

*Demostración.* Considere una curva sobre SDiff( $M$ ) cerca a la identidad  $g(t) : t \mapsto x + tv(x) + O(t^2)$ . Dado que  $g(t)$  conserva la forma de volumen  $\forall t$ , el determinante del jacobiano asociado a  $x + tv(x) + O(t^2)$  debe ser 1, por tanto

$$\det \frac{\partial(x^i + tv^i(x) + O(t^2))}{\partial x^j} = \det \left( \delta_j^i + t \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial O(t)^i}{\partial x^j} \right) \approx 1 + t \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) = 1 \Rightarrow \quad (273)$$

$$\left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) = \text{div}(v) = 0. \quad (274)$$

□

**Teorema 34.** *El conmutador de SVect( $M$ ) corresponde a la derivada de Lie.*

*Demostración.* Considere dos caminos sobre SDiff( $M$ ):  $g(x) : t \mapsto x + tv(x) + O(t^2)$  y  $h(x) : s \mapsto x + sw(x) + O(s^2)$ , tal que  $v, w \in \mathfrak{g}$ . Con esto

$$h(s)(g(t))^{-1} : x^i \mapsto x^i - tv^i(x) + O(t^2) + sw^i(x - tv^i(x) + O(t^2)) + O(s^2) \quad (275)$$

$$= x - tv^i(x) + O(t^2) + s \left( w^i(x) - t \frac{\partial w^i}{\partial x^j} v^j(x) + O(t^2) \right) + O(s^2), \quad (276)$$

por lo que

$$g(t)h(s)(g(t))^{-1} : x^i \mapsto x^i + s \left( w(x)^i + t \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} w^j(x) - \frac{\partial w^i}{\partial x^j} v^j(x) \right) \right) + O(t^2) + O(s^2) \Rightarrow \quad (277)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t,s=0} [g(t)h(s)(g(t))^{-1}]^i = \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} w^j(x) - \frac{\partial w^i}{\partial x^j} v^j(x) \right) \Rightarrow ad_v w = \mathcal{L}_v w. \quad (278)$$

□

**Teorema 35.** *Los grupos de órbita adjunta en  $SVect(M)$  coinciden con la acción natural de los difeomorfismos en  $SVect(M)$ , es decir, pushforwards.*

*Demostración.* Sea  $\xi \in \mathfrak{g}$ , por definición

$$\text{Orbit}(\xi) = \{Ad_g \xi : g \in \text{SDiff}(M)\} = \left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (g \circ h \circ g^{-1}) \xi : g \in \text{SDiff}(M) \right\}, \quad (279)$$

donde  $h : x \mapsto x + t\xi(x) + O(t^2)$ , entonces

$$g \circ h \circ g^{-1} = g \left( g^{-1}(x) + \xi(g^{-1}(x))t + O(t^2) \right) \quad (280)$$

$$= x^i + \frac{\partial g^i}{\partial x^j} \xi^j(g^{-1}(x))t + O(t^2) \Rightarrow \quad (281)$$

$$\text{Orbit}(\xi) = \left\{ \frac{\partial g^i}{\partial x^j} \xi^j(g^{-1}(x)) : g \in \text{SDiff}(M) \right\} = \{g_* \xi : g \in \text{SDiff}(M)\}. \quad (282)$$

□

**Definición 81** (Extensión magnética del grupo  $G$  a  $T^*G$ ). Sea  $G$  un grupo de Lie, llamamos extensión magnética del grupo  $G$  a  $T^*G$  al grupo de Lie constituido por  $G \times \mathfrak{g}^* = \{(\phi, a) : \phi \in G, a \in \mathfrak{g}^*\}$ , con la operación

$$(\phi, a) \circ (\psi, b) = (\phi \circ \psi, Ad_{\psi}^* a + b). \quad (283)$$

Con esto, el grupo de Lie propuesto por Arnold para MHD ideal incompresible corresponde entonces a

$$SDiff(M) \times SVect(M), \quad (284)$$

con la operación

$$(g_1, \mathbf{C}) \circ (g_2, \mathbf{D}) = (g_1 \circ g_2, g_{2*} \mathbf{C} + \mathbf{D}). \quad (285)$$

Note que esta operación es suave, ya que corresponde a un producto de  $SDiff(M)$ , junto con la acción de  $SDiff(M)$  en  $SVect(M)$ . Esto último muestra que la extensión magnética de  $SDiff(M)$  corresponde a una extensión natural de  $SDiff(M)$  actuando en su álgebra y, en si mismo, con la composición.

Es necesario hacer esta extensión de  $SDiff(M)$  para MHD ideal incompresible, debido a que en éste existe una configuración de velocidad y de campo magnético. Recordemos que para llegar a las ecuaciones de Euler fue necesario anular la influencia magnética en MHD geometrizado. De esta forma, si  $\alpha_B \neq 0$ , aparte de los

difeomorfismos que conservan la forma de volumen <sup>26</sup>(que deberían estar contenidos en grupo para MHD ya que son una consecuencia de una restricción de las ecuaciones), se tiene un campo con divergencia cero arrastrado (por el teorema 32), es decir, un elemento de  $\text{SVect}(M)$ . Con esto, el grupo de Lie de MHD debe ser, como espacio topológico, el producto de  $\text{SDiff}(M)$  y  $\text{SVect}(M)$ .

Además de esto, dado que las ecuaciones MHD geometrizadas son invariantes a la acción de difeomorfismos en general, el producto de este grupo debe ser una acción de  $\text{SDiff}(M)$  en  $\text{SVect}(M)$ , y una composición consigo mismo; coincidiendo con la definición de extensión magnética.

Algo importante a recalcar antes de continuar con nuestro análisis, es que el teorema 32 ahora puede ser entendido como en términos del álgebra  $\text{SVect}(M)$ . Es posible demostrar que el espacio vectorial dual a  $\text{SVect}(M)$  es isomorfo a un espacio de 2 formas exactas **arnold1999topological**. De esta forma, la función  $\Phi$  en el teorema 32 corresponde a lo que Arnold llama como OPERADOR DE INERCIA.

**¿Por qué centrarse en la estructura de las líneas de campo y no en la incompresibilidad?** Si bien el procedimiento que usamos para hallar  $\text{SDiff}(M)$ , constituye una restricción topológica razonable en  $\text{Diff}(M)$ . Lo cierto es que desde un principio pudimos usar la incompresibilidad del fluido para llegar a  $\text{SDiff}(M)$  tal y como Arnold hace para construir su espacio de configuración.

La razón por la que tomamos un camino más largo para llegar a  $\text{SDiff}(M)$ , está

---

<sup>26</sup> También podría decirse que la restricción en los difeomorfismos es una consecuencia de la independencia de la métrica en  $\mathcal{H}(g^\# \star \alpha_B)$

basada en la importancia de los invariantes topológicos, y el interés de los mismos en otras teorías de campos. Dado que el interés central de este texto radica en los invariantes topológicos, y ya vimos como la helicidad constituye uno para soluciones en  $\mathbb{R}^3$ ; es natural tomar un camino relacionado con éste, con el fin de resaltar la importancia de hacer que la helicidad constituya un invariante topológico al extender las ecuaciones a variedades.

Además de esto, el formalismo de arrastres de Lie nos llevó naturalmente a ver la característica topológica que poseen las 2-formas arrastradas. Dado que la helicidad se construye a partir de éstas; el llegar al grupo  $\text{SDiif}(M)$  a través de la helicidad constituye un camino natural dentro de las ideas en los arrastres de Lie.

Por otro lado, como se discutió al final del capítulo anterior, el pensar en las estructuras de las líneas de campo es general en cualquier teoría clásica de campos. Además de esto, como veremos en el siguiente capítulo, el pensar en helicidad es lo que lleva a encontrar una aplicación de los métodos topológicos en hidrodinámica, a la superconductividad.

Por último, como veremos en la siguiente sección, puede demostrarse que la helicidad es el único invariante integral de  $\text{SDiff}(M)$  bajo algunas suposiciones relativamente generales. De esta forma, no se perdido generalidad en centrarnos en  $\mathcal{H}$ , para llegar a  $\text{SDiff}(M)$ .

**4.2.2. Invariantes topológicos y energía: parte 2** Ya teniendo el grupo de Lie en MHD y en las ecuaciones de Euler, podemos proceder de manera más general y precisa, con el estudio de la relación entre invariantes topológicos y la energía. Para ello procederemos a mostrar dos resultados de **freedman1988note** y

**arnold1999topological**.

En el primero es claro que la topología, en MHD ideal, acota la energía mostrado desde una perspectiva más general que con el teorema 24. Por otro lado, de **arnold1999topological** veremos como la condición extremal de la energía magnética, bajo el grupo de  $S\text{Diff}(M)$ , constituyen las ecuaciones de equilibrio MHD; mientras que la condición de extremal en la energía cinética de un fluido, bajo el mismo grupo, constituyen las ecuaciones de equilibrio de Euler.

En ambos escenarios presentados en **arnold1999topological** es necesario una definición de energía compatible con el contexto de geometrización de las ecuaciones de fluidos:

**Definición 82** (Energía). *Sea  $M$  una 3-variedad Riemanianna equipada con una forma de volumen  $\mu$ , y  $\xi$  un campo vectorial solenoidal en  $M$ . La energía del campo  $\xi$  es la integral*

$$E(\xi) = \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle \equiv \frac{1}{2} \int_M g(\xi, \xi) \mu, \quad (286)$$

donde  $\langle, \rangle$  es el producto punto heredado a  $TM$  por  $g$ .

**Equilibrio como extremal de la energía** A continuación enunciaremos y probaremos el teorema de **arnold1999topological**, basándonos en la demostración de Arnold. Sin embargo, y con el fin representar todo en el lenguaje de formas diferenciales, la escritura de la misma contiene aspectos nuevos en la literatura de mecánica de fluidos y originales del autor. Esto será útil en el siguiente capítulo cuando es estudie la injerencia de invariantes topológicos en las ecuaciones de London, ya

que las formas diferenciales presentan un camino natural para aplicar variantes de los siguientes teoremas en variedades lorentzianas.

**Teorema 36.** *Las ecuaciones de equilibrio*

$$\boldsymbol{\xi} \times \text{curl } \boldsymbol{\xi} = \text{grad } f, \quad (287)$$

corresponden a la condición de extremal de la energía de un campo  $\boldsymbol{\xi}$  con divergencia nula, al variar  $\boldsymbol{\xi}$  sobre difeomorfismos que conservan la forma de volumen  $\mu$  en  $M$  **arnol1999mathematics**.

*Demostración.* Denotando  $\delta_v$  como una variación bajo difeomorfismos que conservan el volumen, por las propiedades de  $\langle, \rangle$  se tiene que

$$\delta_v E(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{\xi}, \delta_v \boldsymbol{\xi} \rangle. \quad (288)$$

Ahora bien, dado que los difeomorfismos que conservan el volumen constituyen un grupo de Lie, un difeomorfismo infinitesimal viene dado por la derivada de Lie con respecto a un elemento del álgebra, en otras palabras  $\delta_v = \mathcal{L}_\eta$ ,  $\eta \in \mathfrak{g}$ . En consecuencia,

$$\delta_v E(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathcal{L}_\eta \boldsymbol{\xi} \rangle. \quad (289)$$

Usando la propiedad

$$\text{curl}(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta}) = -\mathcal{L}_\eta \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}(\text{div } \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\xi}(\text{div } \boldsymbol{\eta}), \quad (290)$$

válida para 3-variedades Riemannianas **arnold1999topological**, y tomando en cuenta que  $\text{div } \boldsymbol{\eta} = \text{div } \boldsymbol{\xi} = 0$ , la primera variación de la energía se escribe como

$$\delta_v E(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{\xi}, \text{curl}(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta}) \rangle = \int_M g(\boldsymbol{\xi}, \text{curl}(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta})) \mu \quad (291)$$

$$= \int_M g^b \boldsymbol{\xi} \wedge \star \star d(g^b g^\# \star (g^b \boldsymbol{\xi} \wedge g^b \boldsymbol{\eta})) \quad (292)$$

$$= \int_M g^b \boldsymbol{\xi} \wedge d(\star (g^b \boldsymbol{\xi} \wedge g^b \boldsymbol{\eta})) \quad (293)$$

$$= \int_M \star g^b \boldsymbol{\xi} \wedge \star d(\star (g^b \boldsymbol{\xi} \wedge g^b \boldsymbol{\eta})) \quad (294)$$

$$= \langle \star d \star (g^b \boldsymbol{\xi} \wedge g^b \boldsymbol{\eta}), g^b \boldsymbol{\xi} \rangle = \langle \delta (g^b \boldsymbol{\xi} \wedge g^b \boldsymbol{\eta}), g^b \boldsymbol{\xi} \rangle \quad (295)$$

$$= \langle d(g^b \boldsymbol{\xi}), (g^b \boldsymbol{\xi} \wedge g^b \boldsymbol{\eta}) \rangle = \int_M \star d(g^b \boldsymbol{\xi}) \wedge (g^b \boldsymbol{\xi} \wedge g^b \boldsymbol{\eta}) \quad (296)$$

$$= \int_M g^b \boldsymbol{\eta} \wedge g^b \boldsymbol{\xi} \wedge \star d(g^b \boldsymbol{\xi}) = \langle g^b \boldsymbol{\eta}, \star (g^b \boldsymbol{\xi} \wedge \star d(g^b \boldsymbol{\xi})) \rangle. \quad (297)$$

Ahora suponga que  $\boldsymbol{\xi}$  constituye un extremo de la variación de la energía bajo difeomorfismos que conservan el volumen, y  $\Theta \equiv \star (g^b \boldsymbol{\xi} \wedge \star d(g^b \boldsymbol{\xi}))$ . Con esto se tiene

$$\int_M g^b \boldsymbol{\eta} \wedge \star \Theta = 0 = \langle \Theta, g^b \boldsymbol{\eta} \rangle. \quad (298)$$

Sin embargo,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{g}$  por lo que tiene divergencia cero. Dado que la última expresión debe ser válida para cualquier 1-forma  $g^b \boldsymbol{\eta}$ , entonces  $g^\# \Theta$  es ortogonal a cualquier vector con divergencia cero, y por el teorema de Helmholtz, debe ser igual a un gradiente. Por tanto,  $\Theta = df$  para alguna función  $f$ . Finalmente, la condición de extremal es

$$g^b \boldsymbol{\xi} \wedge \star d(g^b \boldsymbol{\xi}) = \star df \Rightarrow \boldsymbol{\xi} \times \text{curl } \boldsymbol{\xi} = \text{grad } f. \quad (299)$$

□

Con este resultado vemos que la forma de la ecuación de equilibrio MHD ideal es consecuencia de extremar la energía magnética sobre  $S\text{Diff}(M)$ , por lo que cabe preguntar, ¿Cual es el significado físico de este teorema?, o ¿por qué debería ser un resultado esperado desde la física?.

Para responder esto debemos tomar en cuenta el significado de la energía en términos de las simetrías en física, y para ello hay que hacer uso del teorema de Noether. En este contexto, la energía no es más que la carga conservada para sistemas físicos invariantes a traslaciones temporales. En otras palabras, que se conserve la energía en un sistema físico implica una invarianza temporal del lagrangeano del sistema.

Considerando que las ecuaciones de equilibrio se obtienen cuando la parte derecha de 221 se anula, y esa cuantifica la evolución temporal del plasma (ya que es la geometrización de  $\rho_m D/dt \mathbf{V}$ ), se espera que cuando la energía no varíe  $\delta_v E = 0$ , el sistema sea invariante a la evolución temporal <sup>27</sup>. El hecho de que esta variación sea sobre  $S\text{Diif}(M)$ , no es más que un reflejo de que la variación de la energía (y en general de cualquier cantidad) debe seguir las restricciones topológicas que posee el sistema físico de manera natural.

Es claro que este análisis en términos de simetrías es también aplicable a las ecuaciones de Euler, ya que cuando  $\partial_t \mathbf{V} = 0$  en las ecuaciones de equilibrio de Euler;

---

<sup>27</sup> De hecho, un resultado análogo al del teorema anterior fue obtenido en **kruskal1958equilibrium** antes de que se conocieran los resultados de Arnold. Para esto se hacía uso de una serie de integrales de flujo y helicidad que se presumían invariantes, y se hacía una variación de la energía potencial del plasma.

estas coinciden con las de equilibrio magnetostático haciendo una identificación entre los campos:  $V$  con  $B$ , y  $\text{curl}(V)$  con  $j$ .

Es importante notar también que el variar sobre el grupo  $\text{SDiff}(M)$  no ignora que el espacio de configuración de la magnetohidrodinámica ideal incompresible coincide con la extensión magnética de  $\text{SDiff}(M)$ , ya que para la energía nos centramos solo en la configuración de campo magnético, es decir, en la acción de  $\text{SDiff}(M)$  en  $\text{SVect}(M)$ . Esto hace que el procedimiento anterior funcione tanto para las ecuaciones de Euler, como para las ecuaciones MHD.

**La topología del campo como cota inferior de la energía** Ahora mostraremos el teorema de **freedman1988note** siguiendo detalladamente su procedimiento, no sin antes definir los conceptos necesarios para comprender el teorema, y su demostración. Para ello empezaremos definiendo lo que llamaremos link

**Definición 83** (Link). *Llamamos link, y denotamos  $L$ , a un encajamiento suave de  $n$  círculos  $S^1$  en una 3-variedad  $M$ . Si estos acotan  $n$  discos encajados suaves y disyuntos, decimos que el link es trivial. De otra forma, es llamado esencial.*

Esta definición es necesaria porque, si bien en  $\mathbb{R}^3$  es claro que las líneas de un campo solenoidal deban cerrarse en sí mismas, esto no necesariamente tiene sentido en un variedad arbitraria ya que las características del campo tiene un carácter más local. Con esto en mente, procederemos a definir los conceptos necesarios para generalizar la idea que un campo se anude en un link ya sea esencial o no.

**Definición 84** (Fibrado normal). *Sea  $S$  una subvariedad de una variedad  $M$ , deno-*

tamos  $NS$  como el fibrado normal de  $S$  con respecto a  $j$ , y nos referimos al conjunto

$$NS = \{(x, v) \in TM : x \in S, v \in N_x S\}, \quad N_x S = \{v \in T_x M : g(v, x) = 0 \forall x \in T_x S\}. \quad (300)$$

**Teorema 37** (Vecindad tubular). *Para toda subvariedad  $S$ , existe un difeomorfismo de una vecindad abierta de  $S$  en  $NS$  a una vecindad abierta de  $S$  en  $M$ . A esta última la llamamos vecindad tubular de  $S$ .*

**Definición 85** (Campo vectorial modelando un link  $L$ ). *Decimos que un campo vectorial  $\xi$  en  $M$  modela un link  $L$  si existe una vecindad tubular invariante (a difeomorfismos que conservan la forma de volumen) de  $L \subset M$  foliada por curvas integrales de  $\xi$  que es difeomorfa a*

$$\cup_{i=1}^n (D_i^2 \times S^1), \quad (301)$$

*foliado por círculos  $\{\text{punto}\} \times S^1$  (Donde  $D^2$  son discos 2-dimensionales) <sup>28</sup>.*

**Lemma 2** (Lemma de Dhen). *Sea  $M$  una 3-variedad que contiene una 2-celda  $D$  (espacio homeomorfo a un 2-simplex) con auto intersecciones y una curva poligonal simple  $C$  sin puntos singulares en su frontera; entonces existe una celda 2 dimensional  $D_0$  con frontera  $C$  que puede ser encajada con un función lineal por partes en  $M$  papakyriakopoulos1957dehn.*

**Teorema 38.** *Si  $\xi$  es un campo vectorial con divergencia cero sobre una 3-variedad  $M$  cerrada en donde modela un link esencial  $L$ . Entonces existe una cota inferior de la energía (positiva) de  $\xi$  por la acción de difeomorfismos que conservan el volumen freedman1988note. Es decir, dado*

---

<sup>28</sup> Esta definición claramente apela a describir el enlazamiento de las líneas de campo de  $\xi$  en una variedad general.

$$E(\xi) \equiv \int_M \|\xi\|^2 \mu, \quad (302)$$

$E(f_*\xi)$  tiene cota inferior positiva sobre la órbita,  $f \in \text{SDiff}(M)$ , de difeomorfismos que preservan el volumen.

*Demostración.* Sea  $T$  una vecindad tubular de  $L \subset M$ . Debido al teorema de formas de volumen **moser1965volume**; existe un difeomorfismo que preserva el volumen :

$$p : \cup_{i=1}^n (D_{r_i}^2 \times S^1) \rightarrow T. \quad (303)$$

Sea  $\mathbf{J}$  el campo vectorial  $\phi_i \partial/\partial\theta$  donde  $\phi_i : D_{r_i} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup 0$  es una función test que cae suavemente a cero a un radio  $r_i$  y  $\partial/\partial\theta$  es el vector unitario tangente a cada  $S^1$ . El campo vectorial  $\xi$ , dado que modela a  $L$ , puede escribirse como  $p_*\mathbf{J}$  en  $T$  y cero en  $M - T$ . Esto apela a la idea intuitiva de que si el campo modela el link, debe tener la dirección de cada  $S^1$  en cada toro sólido, mientras que la libertad en  $\phi_i$  hace que la magnitud de  $\xi$  coincida con la de  $p_*\mathbf{J}$ .

Ahora con estas definiciones probaremos la afirmación contra recíproca del teorema; es decir, veremos que sí existe una sucesión de difeomorfismos  $f_i \in \text{SDiff}(M)$  tal que  $E(f_{i*}\xi) \rightarrow 0$ , entonces  $L$  es trivial. Para ello probaremos un resultado más fuerte: sí existe una sucesión de difeomorfismos  $f_i \in \text{SDiff}(M)$  tal que

$$E_1(f_{i*}\xi) = \int_M \|f_{i*}\xi\| \mu \rightarrow 0,$$

entonces  $L$  es trivial.

Considere  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \text{SDiff}(M)$  tal que  $E_1 \rightarrow 0$ . Sea  $T$  una vecindad tubular (invariante a difeomorfismos que conservan el volumen) de  $L$ . Sea  $q : X \equiv \cup_{i=1}^n (D_{r_i}^2 \times S^1) \rightarrow T$  un difeomorfismo tal que  $q$  mapea  $\{\text{punto}\} \times S^1$  a órbitas de  $\xi$ . Dado que  $q$  es continua y las órbitas, al ser homeomorfas a  $\{\text{punto}\} \times S^1$ , son cerradas; entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{1}{c} \|\xi\| \leq \|q_* \partial_\theta\| \leq c \|\xi\|. \quad \frac{1}{c} \text{dvol}(t) \leq q^{-1*} \text{dvol}(x) \leq c \text{dvol}(t) \forall t = q(x) \in T. \quad (304)$$

Debido a esto

$$\int_X \|(f_i \circ q)_* \partial_\theta\| \text{dvol}(x) \rightarrow 0. \quad (305)$$

Podemos pensar en  $X$  como  $X = Y \times S^1$ , donde  $Y = \cup_{i=1}^n D_{r_i}^2$  al integra en cada toro sólido. Por ello, y usando el teorema de Fubini (integrando primero en  $S^1$  y luego en  $Y$ ),

$$\int_X \|(f_i \circ q)_* \partial_\theta\| \text{dvol}(x) = \int_Y \text{longitud}[f_i \circ q(y \times S^1)] = \int_Y \text{longitud}[\gamma_y^i] \rightarrow 0. \quad (306)$$

Por tanto,  $\forall \varepsilon > 0$  existe un  $j$  tal que, para  $i > j$   $\text{longitud}[\gamma_y^i] < \varepsilon$  para todo  $y \in Y^- \subset Y$ , donde  $Y^-$  tiene medida  $(1 - \varepsilon)$  (note que estas  $\gamma_y^i$  corresponden entonces a curvas integrales).

Ahora considere una componente  $l_1$  de  $L$  (componente en términos de los  $S^1$ ). Para  $i$  grandes, esta componente se encuentra representada por varias curvas integrales cortas; es decir, con longitud menor a  $\varepsilon$ . Sea  $\gamma_1^i$  una de ellas y sea  $\star$  un punto base de  $\gamma_1^i$ , es decir, el punto final e inicial de  $\gamma_1^i$ . Si  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño, la bola

geodésica de radio  $4\varepsilon$  centrada en  $\star$   $B(\star; 4\varepsilon)$  no puede contener todos los círculos cortos paralelos a ninguna componente de  $L$ , dado que estos llenan un volumen acotado por debajo independiente de  $i$  mientras que  $\text{vol}B(\star, 4\varepsilon) \rightarrow 0$ .

Esto último es consecuencia de que dadas 2 componentes paralelas de  $L$ , y  $i_0$  suficientemente grande, las curvas  $\gamma_1^j$  y  $\gamma_2^j \forall j > i_0$  llenan el volumen correspondiente a la imagen bajo  $q$  de dos toros sólidos. Uno por cada componente. De esta forma, si los 2 toros sólidos estuvieran dentro de la bola geodésica  $B(\star; 4\varepsilon)$  no se podría tener que  $\text{vol}B(\star, 4\varepsilon) \rightarrow 0$ .

Con esto el link  $f_i L$  representado por  $n$  lazos posee  $n - 1$  fuera de  $B(\star; 3\varepsilon)$ . Así mismo, podemos excluir un conjunto pequeño (para  $i$  suficientemente grande) de curvas representativas, para obtener la condición de que  $\gamma_3^i, \dots, \gamma_n^i$  estén fuera de  $B(y_2; 3\varepsilon)$ ,  $y_2 \in \gamma_2^i$ . Procediendo de manera inductiva, se encuentra  $\gamma_3^i, \dots, \gamma_n^i$  donde cada uno está en una bola geodésica con radio  $3\varepsilon$  disyunta de otras. Por tanto,  $f_i L$  para  $i$  suficientemente grande (y en consecuencia  $L$ ) está totalmente separado en el sentido de que existe una colección de bolas suaves disyuntas (cada una centradas en algún punto base de cada  $\gamma_1^i, \dots, \gamma_n^i$ ) de tal suerte que las preimágenes bajo  $f_i$  de éstas contienen exactamente una sola componente. Con esto último, junto con que  $E_1 \rightarrow 0$ , veremos que efectivamente  $L$  es trivial.

La condición de que  $L$  esté completamente separado no significa necesariamente que  $L$  es trivial, ya que en cada bola geodésica puede tener componentes anudadas. Sin embargo, note que sí  $\xi$  modela a  $L$ , también lo hace con algún  $2L$  (separando cada componente en 2 copias paralelas) de  $2n$  componentes. Esto, definiendo discos disjuntos  $D'$  y  $D''$  tal que  $D' \cup D'' \subset D^2$  y restringiendo  $q|_{\cup_{i=1}^n (D' \cup D'' \times S^1)}$ .

De esta forma, si una curva  $\gamma'$  es paralela a un nudo  $\gamma$  que yace en una de las bolas disyuntas, la homotopía radial de esta bola, junto con el cilindro formado por  $\gamma'$  y  $\gamma$ . lleva a que exista  $\Delta$  (un disco de Dehn) para el que sus singularidades no se intersectan con su frontera. Usando finalmente el Lemma de Dhen,  $\Delta$  puede ser reemplazada por un encajamiento de un disco  $\Delta'$  tal que  $\partial\Delta' = \partial\Delta = \gamma$  y  $\Delta'$  posee una vecindad arbitrariamente chica de  $\Delta$ . En consecuencia, el nudo original limita un disco encajado, y por tanto, es trivial.

□

La importancia del teorema anterior radica en el cómo generaliza, para variedades Riemannianas, una de las ideas centrales del capítulo anterior: En linking o anudamiento de las líneas de campos vectoriales solenoidales (con divergencia nula) acotan la energía del mismo. Además de esto, debido a la generalidad del resultado, se tiene una justificación aún más fuerte para presumir que en situaciones relativamente generales de teorías de campos, el anudamiento de las líneas de campo acota la energía del mismo.

Esta última idea será fundamental para escudriñar las características topológicas de las ecuaciones de London, que serán estudiadas en el próximo capítulo. De esta forma, el pensar en anudamientos del campo, nos llevará naturalmente a las ecuaciones de London y, en consecuencia, a la superconductividad

### 4.3. Helicidad: el invariante fundamental de $\mathbf{SDiff}(M)$

Hasta ahora en este capítulo hemos estudiado aspectos topológicos de la frontera del plasma, y de la propia dinámica MHD mediante la geometrización de las ecuaciones. Esto nos ha permitido obtener resultados en donde los invariantes topológicos

juegan un rol decisivo a la hora de caracterizar aspectos como la frontera (con el teorema 30). Además de esto encontramos el grupo de Lie correspondiente al espacio de configuración de las ecuaciones MHD y Euler usando argumentos topológicos. Con esto último, recreamos algunos resultados importantes en la mecánica de fluidos no disipativa.

A pesar de esto, y aunque hallamos a  $\text{SDiff}(M)$  basándonos fuertemente en la invarianza topológica de la helicidad, aún no es claro que tan importante es esta cantidad para el grupo  $\text{SDiff}(M)$ . Es por ello que, en esta sección enunciaremos un teorema que hace que la helicidad tenga un rol fundamental en las ecuaciones de Euler y MHD. Este resultado corresponde al teorema demostrado en **enciso2016helicity**, que da solución a una conjetura planteada por **arnold1999topological**: La helicidad es el único invariante integral del grupo de difeomorfismos que conservan el volumen. En otras palabras, no existe otro invariante de la forma

$$\mathcal{I}(u) \equiv \int_M G(x_1, \dots, x_n, u(x_1), \dots, u(x_n)) dx_1 \dots dx_n, \quad (307)$$

para funciones  $G$ , bien comportadas.

**Definición 86** (Derivada de Frechét). *Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales normados, y  $U \subset V$  un abierto en  $V$ . Decimos que  $f : U \rightarrow W$  es Frechét diferenciable, si existe un operador lineal acotado  $A : V \rightarrow W$ , tal que*

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_W}{\|h\|_V} = 0. \quad (308)$$

*Si  $A$  es único, escribimos  $Df(x) = A$  y llamamos a  $A$  la derivada de Frechét de  $f$  en  $x$ .*

**Definición 87** (Invariante integral regular). Sea  $M$  una 3-variedad Riemanniana compacta. Dado un funcional  $\mathcal{I}$  sobre los vectores  $C^1$  con divergencia cero en  $M$  ( $\chi^1(M)$ ), decimos que  $\mathcal{I}$  es un invariante integral regular si

- Es invariante a la acción de difeomorfismos que conservan el volumen, es decir  $\mathcal{I}(\mathbf{w}) = \mathcal{I}(\phi_*\mathbf{w})$ ,  $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{SDiff}(M)$ .
- En cada punto  $\mathbf{w} \in \chi^1(M)$  la derivada de Fréchet de  $\mathcal{I}$  es un operador integral con kernel continuo, es decir

$$(D\mathcal{I})_{\mathbf{w}}(u) = \int_M K(\mathbf{w}) \cdot u, \quad (309)$$

donde  $K : \chi^1(M) \rightarrow \chi^1(M)$  es continua.

**Teorema 39.** Sea  $\mathcal{I}$  invariante integral regular, entonces  $\mathcal{I}$  es una función  $C^1$  de la helicidad

$$\mathcal{I} = f(\mathcal{H}), \quad (310)$$

donde la helicidad es calculada con la generalización de  $\text{curl}^{-1}$  para 3-variedades compactas, mediante el operador de Biot-Savart  $k(x, y)$ <sup>29</sup>:

---

<sup>29</sup> Este operador está bien definido sobre  $\chi^1(M)$  por el teorema de Helmholtz, tal y como sucede en  $\mathbb{R}^3$ .

$$\operatorname{curl}^{-1} \mathbf{w}(x) = \int_M k(x, y) \mathbf{w}(y) dy \Rightarrow \mathcal{H} = \int_M \mathbf{w} \cdot \operatorname{curl}^{-1} \mathbf{w}(x) dx. \quad (311)$$

Si bien no presentaremos la demostración de este teorema, vale la pena ahondar en su rango de aplicabilidad y su significado a la luz de los resultados anteriores. Para esto veremos más precisamente como este teorema responde a la conjetura anteriormente mencionada, y el significado, en la ecuación 307, de que  $G$  sea una función bien comportada.

Dado que la derivada de Fréchet corresponde a una generalización de la derivada para espacios vectoriales normados, la segunda propiedad de los invariantes integrales regulares hace referencia a la continuidad de  $D\mathcal{I}$ . Por tanto, podría interpretarse como una continuidad de  $\mathcal{I}$  al derivar bajo el signo integral. Por otro lado, la primera propiedad de los invariantes integrales regulares nos dice claramente que al movernos sobre la órbita de  $\mathbf{w}$  en  $\operatorname{SDiff}(M)$  esta integral no cambia. En términos de la conjetura de Arnold, entonces se tiene que las integrales 307 deben tener integrandos contruidos a partir de la forma de volumen y diferenciables.

Con esto en mente, es claro que dado  $f : M \rightarrow M$ , los invariantes integrales de la forma

$$\mathcal{F}(f, \mathbf{w}) \equiv \int_M f \mathbf{w} \cdot \operatorname{curl}^{-1} \mathbf{w}(x) dx, \quad (312)$$

no son regulares, ya que  $\forall \phi \in \operatorname{SDiff}(M)$

$$\phi\mathcal{F}(f, \mathbf{w}) = \mathcal{F}(f \circ \phi^{-1}, \phi_*\mathbf{w}) \neq \mathcal{F}(f, \phi_*\mathbf{w}). \quad (313)$$

Por tanto, considerando el procedimiento del capítulo anterior, tenemos que todos los invariantes integrales de las ecuaciones son regulares. Si bien esto da una restricción al tipo de invariantes integrales que son funciones de la helicidad, lo cierto es que el conjunto de invariantes integrales regulares sigue siendo bastante general. Basado en esta generalidad es que en el siguiente capítulo usaremos a  $S\text{Diff}(M)$  en un contexto donde la forma de volumen no parece relevante a priori, pero la helicidad sí.

Además de esto, este último análisis y resultado nos permite dar una definición satisfactoria de invariante topológico.

**Definición 88** (Invariante topológico). *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana cerrada, compacta y orientable, con una forma de volumen  $\mu$ . Llamamos invariante topológico de una solución a las ecuaciones MHD (de Euler) geometrizadas, a las integrales sobre  $M$  invariantes bajo la acción  $S\text{Diff}(M)$ .*

## 5. INVARIANTES TOPOLÓGICOS Y LA ESTRUCTURA DE CONTACTO DE LAS ECUACIONES DE LONDON

A principios del siglo XX diversos experimentos mostraron que, en algunos materiales, la conductividad eléctrica decae a cero por debajo de una temperatura crítica, haciendo que los materiales sufran una transición de fase **kittel1955solid**. Este fenómeno, llamado superconductividad, comenzó a ser estudiado y desde entonces se ha convertido en una de las ramas de investigación más importantes en la física de materiales.

La importancia de la superconductividad, aparte del interés teórico, radica principalmente en la aplicabilidad de la teoría. Esto, porque de tenerse materiales superconductores estables a temperatura ambiente, las pérdidas en la transmisión de energía eléctrica bajarían drásticamente. Con ello, la sociedad entera tendría una evolución tecnológica sin precedentes.

Existen diversos modelos para describir los fenómenos superconductores a escala microscópica. Sin embargo, todo modelo microscópico de superconductividad debe coincidir, a grandes escalas, con el único modelo (electrodinámico) macroscópico de la superconductividad: las ecuaciones de London. Estas corresponden a

$$\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E}, \quad (314)$$

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m} \mathbf{B} \quad (315)$$

donde  $\mathbf{j}_s$  es la densidad de corriente superconductora,  $e$  la carga del electrón,  $m$  su

masa y  $n_s$  una constante fenomenológica que depende de la densidad de electrones. La ecuación 314 hace referencia a que dentro del superconductor las cargas se aceleran por campos eléctricos sin disipación, y es llamada también ecuación de aceleración **london1935electromagnetic**. Por otro lado, la ecuación 315 es análoga a la ley de Ohm, y fue propuesta por los hermanos London para acotar el conjunto de soluciones de la ecuación 314. Esto último debido a experimentos realizados por ellos.

Estas ecuaciones también pueden escribirse de manera compacta como

$$\mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m} \mathbf{A}_s, \quad (316)$$

para un gauge fijo del vector potencial  $\nabla \cdot \mathbf{A}_s = 0$ . En algunos textos como **kittel1955solid**, se presentan las ecuaciones de London como un postulado a partir de la ecuación 316.

Debido a esto, el entendimiento de las ecuaciones de London es fundamental para comprender el fenómeno superconductor, y recientemente se han dado pasos en ese camino. Uno de estos pasos corresponde al trabajo de **flores2021contact**, en el que las ecuaciones de London (para superconductores bidimensionales) se obtienen al imponer una condición llamada epsilon contact. Esta condición actúa en la geometrización de las ecuaciones de Maxwell sobre una variedad lorentziana de contacto.

En este capítulo repasaremos este resultado de **flores2021contact**. Posteriormente, mostraremos una versión del teorema 36 para variedades lorentzianas. Con ello, demostraremos que las ecuaciones de London extreman la energía electromagné-

tica, al variar sobre difeomorfismos que conservan la forma de volumen. De esta forma, presentaremos un resultado que permite entender estas ecuaciones desde un nuevo punto de vista.

En consecuencia, este capítulo presenta el resultado más importante de la tesis ya que crea una conexión entre hidrodinámica y ecuaciones de London mediante la topología. Siendo, no solo un resultado nuevo, sino también dando un significado topológico al estado superconductor desde la teoría macroscópica de superconductividad.

## 5.1. Estructuras de Contacto

Antes de discutir los resultados de **flores2021contact**, es necesario comprender algunos conceptos matemáticos. Más específicamente, es primordial entender las estructuras de contacto, es por ello que en esta sección, nos centraremos en definir formalmente: las estructuras de contacto y la condición  $\varepsilon$ -contact. Para esto nos basaremos principalmente en **arnol2013mathematical** y **murcia2020contact**.

**Definición 89** (Estructura de contacto). *Una estructura de contacto de una variedad  $M$  3-dimensional corresponde a un campo suave de planos (2 dimensionales) que satisfacen una condición de no degenerancia que formularemos más adelante.*

Esta condición de no degenerancia, que definiremos posteriormente, esta relacionada con la condición de no integrabilidad del campo de planos. El campo de planos se dice integrable sí existe una 2-subvariedad de  $M$  de tal suerte que el espacio tangente de ésta coincida con el campo de planos. Dado un campo suave de planos, es posible identificar el plano en cada punto como el conjunto  $\ker(\omega)_p$ , donde  $\omega$  es una 1-forma (Note que dado  $\omega$ , la 1-forma  $a_0\omega$  también define el mismo plano

$\forall a_0 \neq 0 \in \mathbb{R}$ ). Por tanto, la 1-forma  $\omega$  caracteriza la integrabilidad del campo de planos con el siguiente teorema.

**Teorema 40** (Integrabilidad). *El campo de planos con 1-forma asociada  $\omega$  es integrable si y solo si  $d\omega = 0$  para el espacio nulo de  $\omega$ .*

De esta forma, la condición de integrabilidad del campo de planos hace referencia a que  $d\omega = 0$ , siempre que  $\omega = 0$ . Esto puede escribirse de otra forma usando el teorema de integrabilidad de Frobenius.

**Teorema 41** (Condición de integrabilidad de Frobenius). *La condición de integrabilidad  $d\omega = 0$ , siempre que  $\omega = 0$ , es equivalente a la condición de Frobenius*<sup>30</sup>

$$\omega \wedge d\omega = 0. \quad (317)$$

Con esto ya es posible definir la condición de no degenerancia del campo de planos y tener todos los elementos para comprender la definición de estructura de contacto.

**Definición 90** (No-degenerancia). *Decimos que un campo de planos es no-degenerado en un punto  $p$ , si el rango de la 2-forma  $d\omega|_{\ker \omega}$  es igual a la dimensión del plano en ese punto. Llamamos no-degenerado un campo de planos en  $M$ , si es no degenerado para cada punto  $p \in M$ .*

Ahora bien, teniendo claro lo que constituye una estructura de contacto, finalizaremos esta subsección definiendo los tipos de difeomorfismos que mantienen invariante esta estructura. Por último, definiremos un tipo de variedades de contacto

---

<sup>30</sup> Note que la condición de Frobenius tiene forma de helicidad nula para el campo cuyo flujo está asociado con  $d\omega$ . Por tanto, la restricción topológica que presenta la helicidad no nula puede pensarse como una restricción de integrabilidad. En otras palabras, si un campo se enreda en sí mismo generando helicidad no nula, los planos normales al campo en cada punto no son integrables en una superficie.

llamadas  $\varepsilon$ -contact.

**Definición 91** (Contactomorfismos). *Llamamos contactomorfismo a los difeomorfismos entre 2 variedades, cada una con una estructura de contacto, que mantienen la estructura de contacto invariante, es decir*

$$\Psi^*(\omega) = \lambda\omega, \quad (318)$$

donde  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no nula. Los contactomorfismos forman un subgrupo de  $\text{Diff}(M)$  con la composición.

**Definición 92** (Condición  $\varepsilon$ -contact). *Dada una 3-variedad con una estructura de contacto, decimos que esta variedad es  $\varepsilon$ -contact si a su vez es una variedad riemanniana o pseudoriemanniana en la que*

$$\omega = l \star d\omega, \quad |\omega|_g = \epsilon l^2 \quad (319)$$

para  $l \neq 0 \in \mathbb{R}$ ,  $y \epsilon \in \{\pm 1, 0\}$ .

Este tipo de variedades de contacto fue propuesta por primera vez en **murcia2020contact** para obtener teorías de super gravedad en 6 dimensiones. Posteriormente, fue usada en **flores2021contact** para conseguir las ecuaciones de London, tal y como veremos en la próxima sección.

## 5.2. Ecuaciones de London y estructuras de contacto en electromagnetismo

En esta sección presentaremos brevemente las ecuaciones de Maxwell geometrizadas, su significado, y el cómo pueden derivar en las ecuaciones de London siguiendo el trabajo de **flores2021contact**. Para ello, al igual que en los capítulos anteriores, haremos uso de formas diferenciales, y operadores geométricos como el de Hodge. Posteriormente, discutiremos el significado de la métrica en esta geometrización, y terminaremos presentado el resultado principal de **flores2021contact**, al imponer la condición de  $\varepsilon$ -contact.

### 5.2.1. Ecuaciones de Maxwell geometrizadas, y las ecuaciones de London

Al igual que con la magnetohidrodinámica y las ecuaciones de Euler, la electrodinámica puede geometrizarse usando formas diferenciales. Dado que las ecuaciones de Maxwell son intrínsecamente relativistas, esta geometrización debe realizarse en una variedad lorentziana. Con esto en mente, considere  $M$  una variedad lorentziana y orientable. Las ecuaciones de Maxwell geometrizadas corresponden a

$$d\mathbf{F} = 0, \quad d\mathbf{G} = \mathbf{J}, \quad (320)$$

donde  $\mathbf{F}$  es la 2-forma de Faraday,  $\mathbf{J}$  es la 3-forma de corriente (o 2-forma si la dimensión de  $M$  es 3) y la relación entre  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{F}$  viene dada por la métrica.

Comúnmente se suele tomar, como relación entre  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{F}$ , la condición  $\mathbf{G} = \star\mathbf{F}$ . No obstante, independientemente de la relación con la que se defina  $\mathbf{G}$ , esta es la única parte de las ecuaciones que dependen de la métrica. Esto es consecuencia de las ecuaciones 320, ya que la derivada exterior no depende de la métrica.

Además de esto, el vínculo entre  $G$  y  $F$  relaciona el campo  $F$  con su fuente  $J$ . En consecuencia,  $G = \star F$  corresponde a una relación constitutiva dependiente de la métrica. Debido a esto, en esta geometrización del electromagnetismo, la métrica caracteriza los materiales.

**Ecuaciones de London geometrizadas** Cuando el espacio-tiempo es tridimensional (2 dimensiones espaciales y una temporal), es posible definir una estructura de contacto en  $M$  cuya forma  $\omega$  (que caracteriza la estructura de contacto) viene dada por la 1-forma potencial  $A$ ; es decir, la 1-forma tal que  $dA = F$ <sup>31</sup>. De este modo, si se escoge una métrica con la condición  $\varepsilon$ -contact **flores2021contact** se tiene

$$\star A = l dA \Rightarrow \quad (321)$$

$$A = l \star F \Rightarrow \quad (322)$$

$$dA = F = l d \star F = l J \Rightarrow \quad (323)$$

$$d \star J = l^2 F, \quad (324)$$

lo que corresponde a las ecuaciones de London **sternberg2013curvature** para  $l^2 = \mu_0 n_s e^2 / m$ . Esto implica que las ecuaciones de London no son más que la condición  $\varepsilon$ -contact para el electromagnetismo.

---

<sup>31</sup> Asumiéremos de nuevo que  $H^2(M) = \{0\}$ , para que este potencial  $A$  pueda definirse de manera global.

### 5.3. Ecuaciones de London como un extremo de la energía electromagnética

Ahora nos centraremos en demostrar el resultado principal de este capítulo, el cual es el cómo la energía electromagnética, para sistemas bidimensionales espacialmente, tiene un extremo sobre difeomorfismos que conservan el volumen en las ecuaciones de London.

**Teorema 42.** *Las ecuaciones de London (condición  $\varepsilon$ -contact) son un extremal de la energía electromagnética al variar sobre difeomorfismos que conservan la forma de volumen, en una 3-variedad lorentziana.*

*Demostración.* Considere el campo vectorial  $\xi = g^\# \star F$  sobre  $M$ . Por su construcción, su energía  $(\int_M (\xi, \xi)_{g\mu})$  está relacionada con la electromagnética

$$\langle \xi, \xi \rangle = \langle g^\flat \xi, g^\flat \xi \rangle = -\langle \star g^\flat \xi, \star g^\flat \xi \rangle = -\langle F, F \rangle. \quad (325)$$

Por lo que los extremos de la energía de  $\xi$ , y los de la energía electromagnética están relacionados por la definición de  $\xi$ .

Como hicimos anteriormente, denotaremos las variaciones sobre el grupo de difeomorfismos que conservan el volumen como  $\delta_{vol}$ , por tanto

$$\delta_{vol} \langle \xi, \xi \rangle = \int_M \delta_{vol} (\xi, \xi)_{g\mu} = 2 \int_M (\xi, \delta_{vol} \xi)_{g\mu} = 2 \langle \xi, \delta_{vol} \xi \rangle. \quad (326)$$

La primera variación del campo vectorial  $\xi$  es un difeomorfismo infinitesimal dado por la derivada de Lie de  $\xi$  a lo largo de algún  $\eta \in \mathfrak{g}$  de  $\text{SDiff}(M)$ , en consecuencia

$$\delta_{vol}\langle \xi, \xi \rangle = 2\langle \xi, \mathcal{L}_\eta \xi \rangle = 2 \int_M (\xi, \mathcal{L}_\eta \xi)_{g^\flat}. \quad (327)$$

Usando la expresión derivada en el apéndice 346, la última ecuación puede escribirse como

$$\delta_{vol}\langle \xi, \xi \rangle = 2\langle g^\flat \xi, g^\flat \mathcal{L}_\eta \xi \rangle = -2\langle g^\flat \xi, \star d \star (g^\flat \xi \wedge g^\flat \eta) \rangle \Rightarrow \quad (328)$$

$$\delta_{vol}\langle \xi, \xi \rangle = -2\langle g^\flat \xi, \delta(g^\flat \xi \wedge g^\flat \eta) \rangle = -2\langle d(g^\flat \xi), g^\flat \xi \wedge g^\flat \eta \rangle \Rightarrow \quad (329)$$

$$\delta_{vol}\langle \xi, \xi \rangle = -2 \int_M \star d(g^\flat \xi) \wedge (g^\flat \xi \wedge g^\flat \eta) = -2 \int_M g^\flat \eta \wedge g^\flat \xi \wedge \star d(g^\flat \xi) \quad (330)$$

$$= 2\langle \star g^\flat \eta, g^\flat \xi \wedge \star d(g^\flat \xi) \rangle. \quad (331)$$

Asumamos que  $\xi$  es extremal del funcional  $\langle \xi, \xi \rangle$ . En consecuencia

$$\langle g^\flat \eta, \star(g^\flat \xi \wedge \star d(g^\flat \xi)) \rangle = \int_M g^\flat \eta \wedge g^\flat \xi \wedge \star d(g^\flat \xi) = 0. \quad (332)$$

Tomando  $\Theta \equiv \star(g^\flat \xi \wedge \star d(g^\flat \xi))$ , tenemos

$$\int_M g^\flat \eta \wedge \star \Theta = 0. \quad (333)$$

Sin embargo,  $\eta \in \mathfrak{g}$  por lo que  $d \star (g^\flat \eta) = 0$ . Debido a que  $H^2(M) = 0$ , existe una 1-forma  $\Lambda$  tal que  $\star g^\flat \eta = d\Lambda \Rightarrow g^\flat \eta = \star d\Lambda$  haciendo que la condición de extremal sea

$$\int_M \star d\Lambda \wedge \star \Theta = 0 \Rightarrow \langle \star d\Lambda, \Theta \rangle = 0 = \langle \star \Theta, d\Lambda \rangle \Rightarrow \quad (334)$$

$$\int_M d\Lambda \wedge \Theta = 0 = \int_M d(\Lambda \wedge \Theta) + \int_M \Lambda \wedge d\Theta = 0 = \int_M \Lambda \wedge d\Theta. \quad (335)$$

La última ecuación debe ser válida para cualquier 1-forma  $\Lambda$ , luego  $d\Theta = 0$ , de esta forma  $\Theta = d\Phi + \sum_{i=1}^l a_i \sigma_i$  para alguna función  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , y formas cerradas  $\sigma_i$  no exactas linealmente independientes<sup>32</sup>. Finalmente la condición de extremal se convierte en

$$g^\flat \xi \wedge \star d(g^\flat \xi) = \star d\Phi + \star \sum_{i=1}^l a_i \sigma_i \Rightarrow \star \mathbf{F} \wedge \star d \star \mathbf{F} = \star d\Phi + \star \sum_{i=1}^l a_i \sigma_i, \quad (336)$$

para alguna función  $\Phi$  y reales  $\{a_i\}$ .

Usando las ecuaciones de London

$$l d \star \mathbf{F} = \mathbf{F}, \quad (337)$$

se tiene un extremo de la energía electromagnética tomando  $\Phi = 0$  y  $\{a_i\} = 0$ .  $\square$

Es claro que este resultado es análogo al del teorema 36, con una diferencia debido a la signatura de la métrica. Esta diferencia radica en que no existe una descomposición de Helmholtz para variedades lorentzianas, por lo que no podemos argumentar que para un vector  $\xi$ , ortogonal a todos los que tienen divergencia cero, se debe tener que  $\xi$  sea el gradiente de una función. Esto hace que debamos limitar uno de

---

<sup>32</sup> Note que  $l$  constituye un número de Betti, y  $\sigma_i$  una base para  $B^1(M)$

los grupos de cohomología para obtener un resultado similar al del teorema 36, tal y como hicimos en el teorema anterior.

Esta diferencia en la signatura también afecta la interpretación del resultado en términos de simetrías. Dado que en relatividad no hay un tiempo absoluto, no se sigue que este extremal implique alguna solución estacionaria de las ecuaciones de Maxwell (si es que esto siquiera está bien definido). No obstante, usaremos lo que conocemos del grupo de difeomorfismos que conserva el volumen, para intentar entender este resultado. De esta forma, nos basaremos en que este grupo de difeomorfismos no depende de la signatura, para explorar una posible interpretación del teorema 42.

No obstante, buscar una interpretación en base a  $\text{SDiff}(M)$  se aleja de la estructura de contacto que caracteriza las ecuaciones, como sabemos de **flores2021contact**. En otras palabras, si las ecuaciones de London son producto de un tipo de métrica sobre una estructura de contacto, no parece lógico que  $\text{SDiff}(M)$  tenga un protagonismo, en lugar del grupo de contactomorfismos. Esto lleva a plantear la siguiente pregunta:

**¿Por qué se debería variar bajo  $\text{SDiff}(M)$  y no bajo contactomorfismos?** Sea  $\delta_c$  una variación con respecto a contactomorfismos, y  $u$  un generador de contactomorfismos. Con esto tenemos

$$\delta_c E = \int_M \delta_c(d\mathbf{A} \wedge \star d\mathbf{A}), \quad (338)$$

$$\delta_c E = \int_M \mathcal{L}_u(d\mathbf{A} \wedge \star d\mathbf{A}) = \int_M \mathcal{L}_u(d\mathbf{A}) \wedge \star d\mathbf{A} + d\mathbf{A} \wedge \mathcal{L}_u(\star d\mathbf{A}). \quad (339)$$

Usando la identidad,

$$L_X \star \omega = (\operatorname{div} X) \star \omega + \star [(L_X g) g^{-1} \cdot \omega] + \star L_X \omega, \quad (340)$$

podemos escribir

$$\delta_c E = \int_M \mathcal{L}_u(d\mathbf{A}) \wedge \star d\mathbf{A} + d\mathbf{A} \wedge [\operatorname{div}(\mathbf{u}) \star d\mathbf{A} + \star [(\mathcal{L}_u g) g^{-1} d\mathbf{A}] + \star \mathcal{L}_u d\mathbf{A}] \quad (341)$$

$$= \int_M d(\lambda \mathbf{A}) \wedge \star d\mathbf{A} + d\mathbf{A} \wedge [\operatorname{div}(\mathbf{u}) \star d\mathbf{A} + \star [(\mathcal{L}_u g) g^{-1} d\mathbf{A}] + \star d(\lambda \mathbf{A})]. \quad (342)$$

Finalmente usando el teorema de Stokes

$$\delta_c E = \int_M d\mathbf{A} \wedge \star [(\mathcal{L}_u g) g^{-1} d\mathbf{A}] + \int_M \operatorname{div}(\mathbf{u}) d\mathbf{A} \wedge \star d\mathbf{A} \quad (343)$$

$$+ 2 \int_M \lambda(\mathbf{A} \wedge d \star d\mathbf{A}) + 2 \int_{\partial M} \lambda \mathbf{A} \wedge \star d\mathbf{A} \quad (344)$$

$$= \int_M d\mathbf{A} \wedge \star [(\mathcal{L}_u g) g^{-1} d\mathbf{A}] + \int_M \operatorname{div}(\mathbf{u}) d\mathbf{A} \wedge \star d\mathbf{A} + 2 \int_M \lambda(\mathbf{A} \wedge d \star d\mathbf{A}). \quad (345)$$

En donde las ecuaciones de London no son extremales.

Dada la importancia del teorema 42, y los cálculos realizados al variar con respecto contactomorfismos, es menester intentar darle una interpretación física a estos resultados. Para ello la pregunta clave es ¿por qué se debería conservar la forma de volumen en la variación, y no la estructura de contacto?.

Si bien la estructura de contacto es necesaria para definir la condición epsilon-contact, lo cierto es que las ecuaciones de London geometrizadas pueden tener la forma  $d \star \mathbf{J} = l^2 \mathbf{F}$ , sin acudir a una estructura de contacto, tal y como se presenta

en **sternberg2013curvature**. Además de esto, sabemos por la teoría BCS que el estado superconductor se encuentra en un mínimo de energía, por lo que las ecuaciones de London debería ser el resultado de extremar la energía electromagnética de alguna forma.

El cómo extremar la energía es entonces la clave. Extremar bajo difeomorfismos daría naturalmente una solución trivial porque en ausencia de campos la energía es constantemente nula. Extremar sobre isometrías (ya que la métrica caracteriza al material) no permitiría variar a su vez sobre materiales, y esto sería muy restrictivo.

Sabemos que en el caso riemanniano, la helicidad caracteriza la estructura del campo y al grupo de difeomorfismos que conservan la forma de volumen (ya que esto lo mostramos en el capítulo anterior). Si esta noción se mantiene para variedades lorentzianas podríamos extrapolar nuestras ideas en hidrodinámica, a las ecuaciones de London.

De esta forma, la interpretación física de este resultado podría ser que LA SUPERCONDUCTIVIDAD EN SISTEMAS BIDIMENSIONALES ESTÁ CARACTERIZADA POR LA TOPOLOGÍA DE CAMPO, siempre que sea posible definir una helicidad del campo electromagnético, y  $S\text{Diff}(M)$  se relacione con ella como lo hace para el caso riemanniano. No obstante, del teorema 42 no se sigue que las ecuaciones de London son el único extremal de la energía. Es por ello, que se debe seguir investigando esta relación entre  $S\text{Diff}(M)$  y las ecuaciones de London.

## 6. OBSERVACIONES FINALES

**6.0.1. Perspectivas futuras** La estabilidad en magnetohidrodinámica ideal es de interés general debido a que, de obtenerse, se tendría un paso importante en la construcción de reactores de fusión nuclear. Por ello, estudiar una segunda variación de la energía en el teorema 36 sería de gran ayuda para entender mejor la estabilidad del plasma. Algunos trabajos han demostrado cómo el extremo al que corresponde las ecuaciones de equilibrio es a su vez un mínimo para algunos tipos de variedades de contacto Sasakianas, siempre que el campo (velocidad para las ecuaciones de Euler y campo magnético para MHD) sea de beltrami peralta2021energy. No obstante, aún no se ha explorado si existe una condición de estabilidad sin apelar a una estructura de contacto. Es por ello que una perspectiva a futuro de este trabajo, es el enfocarse en una segunda variación en el teorema 36.

Además de esto, se ha encontrado que los arrastres de Lie **volkov1995hidden** poseen una estructura super simétrica; es decir, las cantidades conservadas hacen parte de una super álgebra de Lie. Con esto en mente, y dado que nuestra geometrización se basa en los arrastres de Lie, sería posible explorar con más detalle la relación de las estructuras algebraicas en la formulación de Arnold, y en esta super álgebra. Hasta ahora, con nuestro nuevo teorema 32 mostrado para arrastres de Lie, podemos identificar las 2-formas exactas arrastradas de Lie con el dual del álgebra de Lie de  $S\text{Diff}(M)$  debido a un isomorfismo mostrado en **arnold1999topological**. No obstante, aún no se conoce si cada forma arrastrada corresponda un álgebra o sub-álgebra de  $S\text{Vect}(M)$  o  $S\text{Vect}(M)^*$ . Por tanto, una perspectiva a futuro de este resultado, es conectar por completo la estructura super simétrica de Volkov, y la formulación de geométrica de Arnold.

Con respecto a los nuevos resultados en superconductividad, y dado que la construcción de super conductores es de gran interés general, se necesita explorar las condiciones en las que las ecuaciones de London no solo extreman la energía, sino que corresponden a un mínimo de ésta. Esto último como consecuencia esperada del principio de correspondencia, ya que en predicciones de teorías como la BCS, la energía del estado superconductor es mínima. Para ello es necesario estudiar con más detalle y precisión, el significado físico del grupo de difeomorfismos que conservan la forma de volumen en una variedad Lorentziana.

**6.0.2. Conclusiones** El trabajo presentado en este proyecto de grado representa un acercamiento a los invariantes topológicos en MHD y fluidos no disipativos, junto con una aplicación de éstos en las ecuaciones de London para superconductividad. Hemos aprendido como los invariantes topológicos en MHD surgen de manera natural al estudiar los invariantes locales mediante arrastres de Lie, los cuales a su vez aparecen como una necesidad física dado el análisis que propusimos.

Partiendo de los arrastres de Lie se estudió el invariante topológico llamado helicidad (magnética y cinética) y se mostró su significado en términos de invariantes topológicos (asintóticos) de curvas integrales, para posteriormente analizar el significado físico del mismo demostrando que acota la energía. Esto último fue analizado con más detalle de manera conceptual, donde se propuso que en general la topología del campo debía acotar su energía bajo consideraciones relativamente generales.

Además de esto, se recreó de manera detallada el resultado de Kruskal que caracteriza la frontera del plasma en equilibrio, y con base a los arrastres de Lie; se geometrizaron las ecuaciones de fluidos no disipativos. En el contexto de esta geometrización se mostró que la necesidad de tomar en cuenta al grupo  $S\text{Diff}(M)$  en

las ecuaciones de fluidos puede explicarse desde la imposición de que la helicidad no dependa de la métrica, constituyendo una razón paralela a la incompresibilidad.

Esta última idea fue extrapolada en las ecuaciones de London 2-D, en las que se mostró un nuevo resultado. Este resultado consiste en la demostración de que las ecuaciones de London extreman la energía electromagnética bajo difeomorfismos que conservan la forma de volumen; pero esto no sucede cuando se extrema bajo contactomorfismos. Con esto, y en base a los resultados anteriores para fluidos, se realizó la siguiente conjetura: LA SUPERCONDUCTIVIDAD EN SISTEMAS BIDIMENSIONALES ESTÁ CARACTERIZADA POR LA TOPOLOGÍA DE CAMPO.

## BIBLIOGRAFÍA

- ALFARO, V. M. "Métodos de sintonización de controladores PID que operan como reguladores". En: *Ingeniería* 12.1,2 (2002), págs. 21-36.
- ALZATE, R. y V. A. OLIVEIRA. "Multiobjective design of PI controllers with applications". En: *Control Applications (CCA), IEEE Conference on* (2016), págs. 203-214.
- ASTROM, K. y T. HAGGLUND. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. ISA: The Instrumentation, Systems, y Automation Society, 1995.
- CHAPRA, S. C. y R. P. CANALE. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Mc-Graw Hill, 2007.
- CORREA, R., R. VILLAMIZAR y J. QUIROZ. *De La Sintonización De Controladores*. División de Publicaciones UIS, 2008.
- DATA, A. y S. P. BHATTACHARYYA. *Structure and synthesis of PID controllers*. Springer, 2000.
- DÍAZ, I. y S. P. BHATTACHARYYA. "PI controller design in the achievable gain-phase margin plane". En: *Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on*. 2016, págs. 4919-4924.
- DÍAZ, I. "Modern design of classical controllers". Tesis doct. USA: Texas A&M University, 2017.

- ELIZONDO, C., M. LÓPEZ y C. POSADAS. “Conjunto de controladores PID para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica”. En: *Congreso Nacional de Control Automático AMCA, 2013 México*. 2013, págs. 797-801.
- FARKH, R., K. LAABIDI y M. KSOURI. “Stabilizing Sets of PI/PID Controllers for Unstable Second Order Delay System”. En: *International Journal of Automation and Computing* 11.9 (2014), págs. 210-222.
- FERNANDEZ DA SILVA, A. “Obtenção de Conjuntos Estabilizantes de Controladores PID para Sistemas com Atraso Utilizando o Teorema de Hermite-Biehler”. Tesis de Maestría (Magister en Ingeniería eléctrica). Brasil: Universidad de São Paulo, 2008.
- FUNG, H. W., Q. G. WANG y T. H. LEE. “PI tuning in terms of gain and phase margin”. En: *Automática* 34.9 (1998), págs. 1145-1149.
- GROSSMAN, Stanley I. *Algebra Lineal con aplicaciones*. McGraw-Hill, 1993.
- GUPTE, S., P. MOHANDAS y J. M. CONRAD. “A survey of quadrotor Unmanned Aerial Vehicles”. En: *Southeastcon, 2012 Proceedings of IEEE*. 2012, págs. 1-6.
- HO, M., A. DATTA y S. P. BHATTACHARYYA. “Generalizations of the Hermite-Biehler Theorem”. En: *Linear Algebra and its Applications* 302-303 (1999), págs. 135-153.
- HO, W., C. HANG y L. CAO. “Tuning of PI controller based on gain and phase margin specifications”. En: *Automatica* 31.3 (1995), págs. 497-502.
- KEEL, L. H. y S. P. BHATTACHARYYA. “Controller synthesis free of analytical models: Three term controllers”. En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 53.6 (2008), 1353–136.

- KEEL, L. H. y S. P. BHATTACHARYYA. "Robust Control: The Parametric Approach".  
En: *IFAC Proceedings Volumes 27* (1994), págs. 49-52.
- "Robust, fragile or optimal?" En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 42.8  
(1997), págs. 1098-1105.
- LOERA, R., R. MELCHOR y D. MORALES. "Análisis de estabilidad de controladores PI para un regulador conmutado boost". En: *Congreso Latinoamericano de Control Automático CLCA, 2014 México*. 2014, págs. 1465-1470.
- LUUKKONEN, Teppo. *Modelling and control of quadcopter*. Independent research project in applied mathematics, Aalto University, Finland. 2011.
- MÉNDEZ, C. y col. "On the fragility of PI controllers for time-delay SISO systems".  
En: *Mediterranean Conference on control and automation*. 2008, págs. 529-534.
- MORARESCU, I. C., S. I. NICULESCU y K. GU. "The geometry of stability crossing curves of PI controllers for SISO systems I/O delays". En: *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics* 55.4 (2010), págs. 297-313.
- OGATA, K. *Ingeniería de control Moderna*. Pearson Education, 2010.
- OLIVEIRA., V., M. TEIXEIRA. y L. COSSI. "Stabilizing a class of time delay systems using the Hermite-Biehler theorem". En: *Linear Algebra and its Applications* 369 (2003), págs. 203-216.
- ROA CANO Gustavo y AYALA ORTÍZ, Andruv Saim. *Control en espacio de estados para un dron tipo cuadrotor*. Trabajo de Grado (Ingeniero Electrónico). Bucaramanga - Colombia: Universidad Industrial de Santander, 2016.

- SAFONOV, M. G. y Tung-Ching TSAO. "The unfalsified control concept and learning". En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 42.6 (1997), págs. 843-847.
- SEARS, F. W., A. L. FORD y R. A. FREEDMAN. *Física universitaria: con física moderna*. Vol. 2. Pearson Educación, 2005.
- SILVA, G., A. DATTA y S. P. BHATTACHARYYA. "New Results on the Synthesis of PID Controllers". En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.2 (2002), págs. 241-252.
- SPONG, Mark W. y Mathukumalli VIDYASAGAR. *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons, 2008.
- TAYEBI, A. y S. MCGILVRAY. "Attitude stabilization of a VTOL quadrotor aircraft". En: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 14.3 (2006), págs. 562-571.
- TOSCANO, R. "A simple robust PI/PID controller design via numerical optimization approach". En: *Journal of process control* 15 (2005), págs. 81-88.
- VIANNA RAFFO, Guilherme. "Modelado y Control de un Helicóptero Quadrotor". Tesis de Maestría (Magister en Automática, Robótica y Telemática). España: Universidad de Sevilla, 2007.
- ZIEGLER, J. G. y N. B. NICHOLS. "Optimum settings for automatic controllers". En: *Transactions of the ASME* 64 (1942), págs. 759-768.

## ANEXOS

### Anexo A. Derivada de Lie sobre variedades Lorentzianas

En este apéndice deduciremos la ecuación usada en el teorema 42

$$g^b \mathcal{L}_\eta \xi = - \star d \star (g^b \xi \wedge g^b \eta) = -\delta(g^b \xi \wedge g^b \eta), \quad (346)$$

Dado que esta relación solo depende de primeras derivadas de la métrica, podemos demostrar 346 usando coordenadas geodésicas, por lo que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \cdot g^b \eta = \eta_\mu dx^\mu$  y  $g^b \xi = \xi_\mu dx^\mu$ ,

$$\Rightarrow g^b \eta \wedge g^b \xi = (\eta_0 \xi_1 - \eta_1 \xi_0) dt dx + (\eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1) dx dy + (\eta_0 \xi_2 - \eta_2 \xi_0) dt dy. \quad (347)$$

$$(348)$$

Dada una dos forma  $\alpha = \alpha_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

$$\Rightarrow \star \alpha = \alpha^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\lambda} dx^\lambda, \quad (349)$$

donde  $\epsilon_{\mu\nu\lambda}$  es el objeto de Levi-civita. Por tanto

$$\star(dt dx) = -\epsilon_{01\lambda} dx^\lambda = -dy, \quad \star(dx dy) = \epsilon_{12\lambda} dx^\lambda = dt, \quad \star(dt dy) = -\epsilon_{02\lambda} dx^\lambda = dx. \quad (350)$$

Luego,

$$\star(g^{\flat}\boldsymbol{\eta} \wedge g^{\flat}\boldsymbol{\xi}) = -(\eta_0\xi_1 - \eta_1\xi_0)dy + (\eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1)dt + (\eta_0\xi_2 - \eta_2\xi_0)dx \Rightarrow \quad (351)$$

$$d(\star(g^{\flat}\boldsymbol{\eta} \wedge g^{\flat}\boldsymbol{\xi})) = -\{(\partial_1\eta_0\xi_1 + \eta_0\partial_1\xi_1 - \partial_1\eta_1\xi_0 - \eta_1\partial_1\xi_0)dxdy \quad (352)$$

$$+ (\partial_0\eta_0\xi_1 + \eta_0\partial_0\xi_1 - \partial_0\eta_1\xi_0 - \eta_1\partial_0\eta_0)dtdy\} \quad (353)$$

$$- \{(\partial_1\xi_1\eta_2 + \xi_1\partial_1\eta_2 - \partial_1\eta_1\xi_2 - \eta_1\partial_1\xi_2)dxdt \quad (354)$$

$$+ (\partial_2\xi_1\eta_2 + \xi_1\partial_2\eta_2 - \partial_2\eta_1\xi_2 - \eta_1\partial_2\xi_2)dydt\} \quad (355)$$

$$+ \{(\partial_0\eta_0\xi_2 + \eta_0\partial_0\xi_2 - \partial_0\eta_2\xi_0 - \eta_2\partial_0\xi_0)dtdx \quad (356)$$

$$+ (\partial_2\eta_0\xi_2 + \eta_0\partial_2\xi_2 - \partial_2\eta_2\xi_0 - \eta_2\partial_2\xi_0)dydx\} \Rightarrow \quad (357)$$

$$= dxdy\{\eta_0(-\partial_1\xi_1 - \partial_2\xi_2) + \xi_0(\partial_1\eta_1 + \partial_2\eta_2) \quad (358)$$

$$+ \eta_1\partial_1\xi_0 - \xi_1\partial_1\eta_0 + \eta_2\partial_2\xi_0 - \xi_2\partial_2\eta_0\} \quad (359)$$

$$+ dtdy\{\xi_1(-\partial_0\eta_0 + \partial_2\eta_2) + \eta_1(\partial_0\xi_0 - \partial_2\xi_2) \quad (360)$$

$$+ \xi_0\partial_0\eta_1 - \eta_0\partial_0\xi_1 - \xi_2\partial_2\eta_1 + \eta_2\partial_2\xi_1\} \quad (361)$$

$$+ dtdx\{\xi_2(\partial_0\eta_0 - \partial_1\eta_1) + \eta_2(-\partial_0\xi_0 + \partial_1\xi_1) \quad (362)$$

$$+ \eta_0\partial_0\xi_2 - \xi_0\partial_0\eta_2 + \xi_1\partial_1\eta_2 - \eta_1\partial_1\xi_2\}. \quad (363)$$

Note que  $d\star g^{\flat}\boldsymbol{\xi} = d\star\star\boldsymbol{F} = 0$ , por lo que  $\boldsymbol{\xi}$  es solenoidal  $\boldsymbol{\eta}$ , entonces  $-\partial_0\eta_0 + \partial_1\eta_1 + \partial_2\eta_2 = -\partial_0\xi_0 + \partial_1\xi_1 + \partial_2\xi_2 = 0$ . Por esta razón

$$d(\star(g^b \boldsymbol{\eta} \wedge g^b \boldsymbol{\xi})) = dx dy \{ \eta_0(-\partial_0 \xi_0) + \xi_0(\partial_0 \eta_0) + \eta_1 \partial_1 \xi_0 - \xi_1 \partial_1 \eta_0 + \eta_2 \partial_2 \xi_0 - \xi_2 \partial_2 \eta_0 \} \quad (364)$$

$$+ dt dy \{ \xi_1(-\partial_1 \eta_1) + \eta_1(\partial_1 \xi_1) + \xi_0 \partial_0 \eta_1 - \eta_0 \partial_0 \xi_1 - \xi_2 \partial_2 \eta_1 + \eta_2 \partial_2 \xi_1 \} \quad (365)$$

$$+ dt dx \{ \xi_2(\partial_2 \eta_2) + \eta_2(-\partial_2 \xi_2) + \eta_0 \partial_0 \xi_2 - \xi_0 \partial_0 \eta_2 + \xi_1 \partial_1 \eta_2 - \eta_1 \partial_1 \xi_2 \} \Rightarrow \quad (366)$$

$$\star d(\star(g^b \boldsymbol{\eta} \wedge g^b \boldsymbol{\xi})) = dt \{ -\eta_0 \partial_0 \xi_0 + \xi_0 \partial_0 \eta_0 + \eta_1 \partial_1 \xi_0 - \xi_1 \partial_1 \eta_0 + \eta_2 \partial_2 \xi_0 - \xi_2 \partial_2 \eta_0 \} \quad (367)$$

$$+ dx \{ -\xi_1 \partial_1 \eta_1 + \eta_1 \partial_1 \xi_1 + \xi_0 \partial_0 \eta_1 - \eta_0 \partial_0 \xi_1 - \xi_2 \partial_2 \eta_1 + \eta_2 \partial_2 \xi_1 \} \quad (368)$$

$$- dy \{ \xi_2 \partial_2 \eta_2 - \eta_2 \partial_2 \xi_2 + \eta_0 \partial_0 \xi_2 - \xi_0 \partial_0 \eta_2 + \xi_1 \partial_1 \eta_2 - \eta_1 \partial_1 \xi_2 \} \Rightarrow \quad (369)$$

$$g^\# \star d(\star(g^b \boldsymbol{\eta} \wedge g^b \boldsymbol{\xi})) = \partial_t \{ +\eta^0 \partial_0 \xi^0 - \xi^0 \partial_0 \eta^0 + \eta_1 \partial_1 \xi^0 - \xi_1 \partial_1 \eta^0 + \eta_2 \partial_2 \xi^0 - \xi_2 \partial_2 \eta^0 \} \quad (370)$$

$$+ \partial_x \{ -\xi^1 \partial_1 \eta^1 + \eta^1 \partial_1 \xi^1 - \xi^0 \partial_0 \eta^1 + \eta^0 \partial_0 \xi^1 - \xi^2 \partial_2 \eta^1 + \eta^2 \partial_2 \xi^1 \} \quad (371)$$

$$\partial_2 \{ -\xi^2 \partial_2 \eta^2 + \eta^2 \partial_2 \xi^2 + \eta^0 \partial_0 \xi^2 - \xi^0 \partial_0 \eta^2 - \xi^1 \partial_1 \eta^2 + \eta^1 \partial_1 \xi^2 \} \quad (372)$$

$$= -(\xi^\lambda \partial_\lambda \eta^\mu - \eta^\lambda \partial_\lambda \xi^\mu) \partial_\mu. \quad (373)$$

Ahora, dado que  $\boldsymbol{\xi}$  también es solenoidal  $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{g}$  **arnold1999topological** se tiene

$$\mathcal{L}_\eta \boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}] = (\xi^\lambda \partial_\lambda \eta^\mu - \eta^\lambda \partial_\lambda \xi^\mu) \partial_\mu, \quad (374)$$

lo que termina la prueba .