

# NÚMEROS DE FIBONACCI

LINA ESPERANZA SOTO ARCHILA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2006

# **NÚMEROS DE FIBONACCI**

**LINA ESPERANZA SOTO ARCHILA**

Trabajo presentado para optar al título de  
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

Director

**EDILBERTO J. REYES G.**

Magíster en Matemáticas

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA DE MATEMÁTICAS**

**BUCARAMANGA**

**2006**

---

# Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

- **Dios**, por todas las bendiciones recibidas.
- **Mis padres y hermanas** quienes siempre creyeron en mis proyectos.
- Al profesor **Edilberto J. Reyes G.**, por sus aportes, porque me permitieron formarme como una profesional integral, con su ejemplo, colaboración y paciencia.
- Los **profesores de la licenciatura**, por sus sabias observaciones, conocimientos y consejos.
- **Todos aquellos** que durante mi carrera sirvieron como motivación y apoyo para seguir adelante.

*A mis Padres, hermanas y a mi  
hija.*

**TITLE:** THE FIBONACCI'S NUMBERS\*

**AUTHOR:** LINA SOTO\*\*

**KEY WORDS:**

Succession, recurrence, induction, golden ratio, continued fractions.

## **DESCRIPTION**

The Fibonacci's numbers, were born as a result of the solution to the problem of the rabbit's lineage where a pair of rabbits just born are put in a cage the first day of January, assuming that the rabbits don't die and don't succeed nothing unexpected and these engender a pair of sons when they are exactly two months. How many rabbits will be on January first the next year?

Leonardo Fibonacci founds that we can have the solution to this problem with special numbers (Fibonacci's numbers) founded from a recurrence formula.

This monograph presents the study of these numbers, divided in four chapters. The first one presents a short history of Fibonacci and his numbers. The second one shows some properties of the Fibonacci's numbers with additions and products, using induction and elementary calculus. The third chapter presents another properties of the Fibonacci's numbers related with the elementary numbers's theory. The fourth chapter presents the relation of these numbers with others such as the Lucas's numbers, the relation with the golden ratio with the continues fractions too.

The elaboration of this monograph results useful because it presents the simplicity of the Fibonacci's numbers, its properties and its relation with the nature and art.

---

\*Monograph

\*\* FACULTY OF SCIENCES, LICENTIATE IN MATHEMATICS.

DIRECTOR Edilberto J. Reyes G.

**TITULO:** NÚMEROS DE FIBONACCI\*

**AUTOR:** LINA SOTO\*\*

**PALABRAS CLAVES:**

Sucesión, recurrencia, inducción, Fibonacci, sección áurea, fracciones continuas.

## **DESCRIPCIÓN**

los números de Fibonacci, nacieron como resultado de la solución al problema de la progenie de los conejos, en donde un par de conejos se ponen en una jaula recién nacidos el primer día de enero, suponiendo que los conejos no se mueren ni les sucede nada inesperado y estos engendran un par de hijos cuando tienen exactamente 2 meses. ¿Cuántos conejos habrá el primero de enero del año siguiente?

Leonardo Fibonacci encuentra que la solución a este problema se puede dar con unos números especiales (números de Fibobacci) hallados a partir de una fórmula de recurrencia.

Esta monografía presenta el estudio de estos números, dividida en cuatro capítulos. En el primero se presenta una breve historia de Fibonacci y sus números. En el segundo capítulo se demuestran algunas propiedades de los números de Fibonacci con sumas y productos, utilizando inducción y calculo elemental. En el tercer capítulo se presentan otras propiedades de números de Fibonacci relacionados con la teoría de números. En el cuarto capítulo se presenta la relación de estos números con otros como los números de Lucas, también la relación con la sección áurea y las fracciones continuas.

La elaboración de esta monografía resulta útil porque nos presenta la sencillez de los números de Fibonacci, sus propiedades y su relación con la naturaleza y el arte.

---

\* Monografía

\*\* FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.

DIRECTOR Edilberto J. Reyes G.

---

# CONTENIDO

|                                                                                        |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>INTRODUCCIÓN</b>                                                                    | <b>1</b>  |
| <b>1. BREVE HISTORIA DE FIBONACCI Y SUS NÚMEROS</b>                                    | <b>2</b>  |
| <b>2. PROPIEDADES ELEMENTALES DE LOS NÚMEROS DE FIBONACCI</b>                          | <b>7</b>  |
| 2.1. Propiedades de sumas de números de Fibonacci . . . . .                            | 8         |
| 2.2. Propiedades de productos de números de Fibonacci . . . . .                        | 14        |
| 2.3. Fórmula de Binet . . . . .                                                        | 17        |
| 2.4. Números de Fibonacci y coeficientes binomiales . . . . .                          | 20        |
| <b>3. NÚMEROS DE FIBONACCI Y TEORÍA ELEMENTAL DE NÚMEROS</b>                           | <b>23</b> |
| 3.1. Máximo común divisor de los números de Fibonacci . . . . .                        | 23        |
| 3.2. Propiedades de divisibilidad de los números de Fibonacci . . . . .                | 28        |
| <b>4. NÚMEROS DE FIBONACCI, FRACCIONES CONTINUAS, SECCIÓN ÁUREA Y NÚMEROS DE LUCAS</b> | <b>29</b> |
| 4.1. Fracciones continuas simples . . . . .                                            | 29        |
| 4.2. Sección áurea ó razón de oro . . . . .                                            | 31        |

---

|                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.3. Números de Fibonacci y Números de Lucas . . . . .                 | 32        |
| 4.3.1. Suma de los números de Lucas . . . . .                          | 32        |
| 4.3.2. Combinaciones entre números de Fibonacci y Números de Lucas . . | 35        |
| <b>BIBLIOGRAFÍA</b>                                                    | <b>41</b> |

---

# INTRODUCCIÓN

Este trabajo nos presenta la forma como nacieron los números de Fibonacci; gracias a que un hombre llamado Leonardo Fibonacci quiso dar solución a un problema (la progenie de los conejos). Luego de encontrar estos números, se dio cuenta que presentaban muchas propiedades interesantes y que tenían una estrecha relación con la naturaleza; más adelante otro matemático (Lucas) los estudio y creo combinaciones con unos números similares a estos llamados los números de Lucas. Los números de Fibonacci también se relacionan con la conocida razón áurea que es utilizada en el arte.

Esta monografía presenta el estudio de estos números, dividida en cuatro capítulos. En el primero se presenta una breve historia de Fibonacci y sus números. En el segundo capítulo se demuestran algunas propiedades de los números de Fibonacci con sumas y productos, utilizando inducción y calculo elemental. En el tercer capítulo se presentan otras propiedades de números de Fibonacci relacionados con la teoría de números. En el cuarto capítulo se presenta la relación de estos números con otros como los números de Lucas, también la relación con la sección áurea y las fracciones continuas.

---

---

## CAPÍTULO 1

---

# BREVE HISTORIA DE FIBONACCI Y SUS NÚMEROS



Leonardo Fibonacci (1170 - 1250) conocido también como Leonardo Pisano o Leonardo de Pisa nació en Pisa ahora Italia. Su padre Bonaccio fue secretario en una de las numerosas fábricas de la costa suroriental del Mediterráneo. Leonardo adquirió un fuerte gusto por las matemáticas, cuando su padre le enseñó el uso del ábaco, fue educado primero por un maestro de escuela de Moorish, y años más tarde durante los viajes por el Mediterráneo, visitando Egipto, Siria, Grecia, Sicilia y sur de Francia se dio cuenta que los comerciantes

de allí, utilizaban diferentes sistemas aritméticos, los cuales fue recopilando y estudiando.

Al volver a Pisa publicó en 1202 su gran trabajo “Los ábacos de Liber”, en el cual trata la aritmética y el algebra elemental. Escribió sobre el sistema indú - arábigo, suma, resta, multiplicación y división de enteros, trabajo también con fraccionarios, precios de bienes, trueque, sociedad, regla de posición falsa, raíces cuadradas y cúbicas y geometría.

Fibonacci publicó otros tres trabajos; en 1220 publicó la geometría práctica, la cual contiene todos los escritos por él sobre geometría y trigonometría y algunas recopilaciones de Euclides y otros maestros griegos.

Después de la publicación de ‘Los ábacos de Liber’, Leonardo fue presentado por el astrónomo Dominicus al emperador Federico II de Hoeristaufen, quien a su vez presentó a John de Palermo proponiéndole varios problemas, los cuales resolvió rápidamente, el primero fue encontrar un número  $x$  tal que  $x^2 + 5$  y  $x^2 - 5$  son cada uno números cuadrados; su magistral solución esta hecha en su libro El Liber Quadratorum publicado en 1225.

Otro problema presentado a Leonardo por el famoso científico fue la solución de la ecuación  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ , el trabajo sobre esta ecuación cúbica es presentado en uno de sus libros junto con la solución del siguiente problema dada a él por John de Palermo. Tres hombres poseen en común una desconocida cantidad de dinero  $t$ , la posición del primero es  $\frac{t}{2}$ , del segundo  $\frac{t}{3}$  y del tercero  $\frac{t}{6}$ , deseosos de depositar la suma en un lugar seguro cada uno toma el riesgo de una cierta cantidad; el primero toma  $x$  pero deposita  $\frac{x}{2}$ ; el segundo toma  $y$  pero deposita solamente  $\frac{y}{3}$  y el tercero toma  $z$  y deposita  $\frac{z}{6}$ , de la cantidad cada uno podrá recibir exactamente  $\frac{1}{3}$  en orden para poseer su parte de la suma total. Encontrar  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Dando como respuestas  $t = 47$ ,  $x = 33$ ,  $y = 13$  y  $z = 1$ .

Fibonacci encontró la serie que lleva su nombre gracias a un problema relativo a la progenie

de los conejos la cual está definida en forma recurrente:

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = 1$$

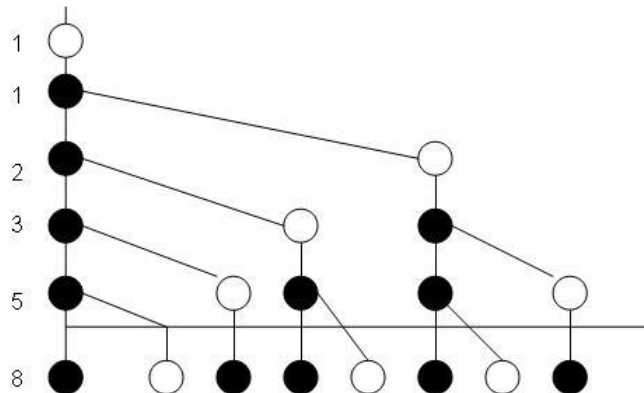
$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Estos números los denotaremos con  $U$  aunque se hubiera querido denotar con  $F$  pero hay otros números más conocidos, los de Fermat denotados con esta letra ( $F_n$ ).

### Progenie de los conejos:

Imaginemos que una pareja de conejos engendra un par de hijos cuando tienen exactamente dos meses y luego otro par cada mes. Un par de recién nacidos se pone en una jaula el primer día de enero. ¿Cuántos conejos habrá el primero de enero del año siguiente? Suponiendo que los conejos no se mueren ni les sucede nada inesperado.

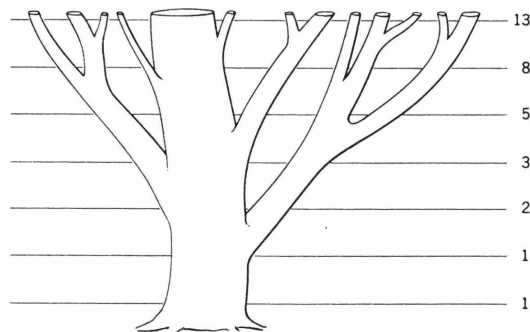
| Mes           | Enero | Febrero | Marzo | Abril | Mayo | Junio | Julio | Agosto |
|---------------|-------|---------|-------|-------|------|-------|-------|--------|
| Pares conejos | 1     | 1       | 2     | 3     | 5    | 8     | 13    | 21     |



Para su primer mes el par de conejos son crías jóvenes, para su segundo mes ellos maduran, se reproducen y producen un par de su descendencia, de este modo en el tercer mes hay dos pares de conejos, el original y el nuevo, el par original produce otra vez otro

par de descendencia pero el par inmaduro todavía no, ese par sin embargo madura, de este modo en el cuarto mes hay dos pares maduros y uno inmaduro, en el quinto mes aquellos pares maduros continúan siendo maduros, reproducen dos descendencias; y el par inmaduro se transforma en un par maduro. Esta reproducción total es de 5 pares de conejos y el proceso continúa. Este problema fue presentado en su libro el Liber Abaci.

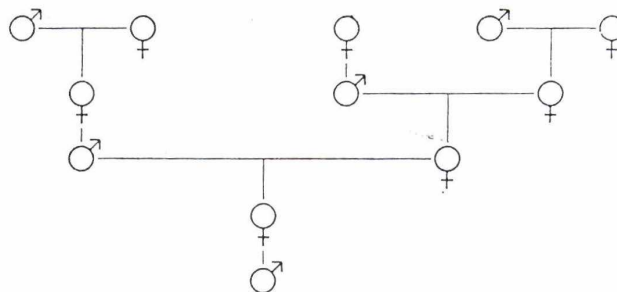
También hay ciertos fenómenos de la naturaleza que conducen a estos números. Situamos la rama de una planta y a partir de un brote movemos la mano al brote mas próximo y seguimos así mediante un movimiento espiral, en torno de la rama, el número de brotes comprendido en ese movimiento será uno de los de Fibonacci y el número de vueltas alrededor del tronco será otro número de estos.



Otras situaciones para los números de Fibonacci son:

\* **El panal de abejas:** Una abeja macho tiene madre pero no padre porque (nace de un huevo no fecundado) pero una abeja hembra tiene padre y madre. El número de antepasados de una abeja macho de una determinada generación es también un número de Fibonacci.

| No. abejas macho | No. abejas hembra | No. de abejas |
|------------------|-------------------|---------------|
| 1                | 0                 | 1             |
| 0                | 1                 | 1             |
| 1                | 1                 | 2             |
| 1                | 2                 | 3             |
| 2                | 3                 | 5             |
| 3                | 5                 | 8             |



Los números de Fibonacci presentan muchas propiedades algunas de las cuales llevan nombres especiales gracias a que se conoce quien la demostró por primera vez, entre esos esta uno de los viejos teoremas acerca de los números de Fibonacci como es la identidad de Cassini, debido al astrónomo francés Jean Dominiqui Cassini, en 1680.

Identidad de Cassini

$$U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = (-1)^n \quad n > 0$$

La cual será demostrada más adelante.

Así como Cassini muchas personas se interesaron por estos números, entre ellos Lucas quien creo una serie semejante y también aquellos que vieron en estos números una aplicación en el arte como Leonardo Da Vinci.

---

---

## CAPÍTULO 2

---

# PROPIEDADES ELEMENTALES DE LOS NÚMEROS DE FIBONACCI

Como se presentó en el capítulo anterior los números de Fibonacci están definidos recursivamente por:

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = 1$$

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Los primeros términos de esta sucesión son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Estos números han sido observados y estudiados por numerosas personas, algunas de ellas aficionados o curiosos de la aritmética.

En la siguiente sección presentamos algunas de las propiedades más importantes de esta sucesión agrupadas por rasgos comunes no tan evidentes.

## 2.1. Propiedades de sumas de números de Fibonacci

Los números de Fibonacci presentan propiedades con sumas, algunas de las cuales se demostrarán por inducción ó aplicando otras propiedades de la aritmética o el álgebra. También se dejaron otras que se pueden demostrar en forma similar para que el lector las realice dándole algunas sugerencias para su demostración.

**Proposición 2.1.** *Suma de los primeros  $n$  números de Fibonacci*

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum_{k=1}^n U_k = U_{n+2} - 1$$

Dada la relación de recurrencia

$$U_{n+2} = U_n + U_{n+1}$$

tenemos que

$$U_1 = U_3 - U_2,$$

$$U_2 = U_4 - U_3,$$

$$U_3 = U_5 - U_4,$$

$$\vdots$$

$$U_{n-1} = U_{n+1} - U_n,$$

$$\underline{U_n} = \underline{U_{n+2} - U_{n+1}} \text{ y por lo tanto}$$

$$\sum_{k=0}^n U_k = U_{n+2} - U_2$$

Como  $U_2 = 1$  tenemos que

$$\sum_{k=1}^n U_k = U_{n+2} - 1.$$

Usando inducción puede hacerse otra prueba. Esta se deja como ejercicio para el lector.

**Proposición 2.2.** *Suma de los cuadrados de los números de Fibonacci.*

$$U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2 = \sum_{k=1}^n U_k^2 = U_n U_{n+1}$$

*Demostración.*

a. Verificamos para  $n = 1$

Como  $U_1 = 1$  y  $1^2 = 1 \cdot 1$  se tiene

$$\sum_{k=1}^1 U_k^2 = U_1^2 = U_1 U_2 = 1.$$

b. Tenemos por hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^n U_k^2 = U_n U_{n+1} \quad (2.1)$$

entonces debemos demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_k^2 = U_{n+1} U_{n+2}$$

sumamos  $U_{n+1}^2$  a cada lado de igualdad 2.1

$$\sum_{k=1}^n U_k^2 + U_{n+1}^2 = U_n U_{n+1} + U_{n+1}^2$$

Factorizamos  $U_{n+1}$  al lado derecho de la igualdad y agregamos el término a la sumatoria del lado izquierdo de la misma igualdad.

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_k^2 = U_{n+1}(U_n + U_{n+1}) = U_{n+1} U_{n+2}.$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_k^2 = U_{n+1} U_{n+2}.$$

■

Esta propiedad se puede hallar aplicando el mismo procedimiento de la proposición 2.1 o mejor la propiedad telescópica de las sumas, bien conocida en el álgebra elemental.

**Propiedad telescópica**

$$\sum_{k=1}^n a_k - a_{k-1} = a_n - a_0.$$

**Proposición 2.3.**

$$U_1 + U_3 + \dots + U_{2n-1} = \sum_{k=1}^n U_{2k-1} = U_{2n}.$$

*Demostración.* tenemos  $U_{2n} = U_{2n-1} + U_{2n-2}$  despejando  $U_{2n-1} = U_{2n} - U_{2n-2}$   
luego

$$\sum_{k=1}^n U_{2k-1} = \sum_{k=1}^n U_{2k} - U_{2(k-1)} = U_{2n} - U_0 = U_{2n}. \text{ Con } U_0 = 0.$$

■

**Proposición 2.4.**

$$U_0 + U_3 + U_6 + \dots + U_{3n} = \sum_{k=1}^n U_{3k} = \frac{U_{3n+2} - 1}{2}.$$

*Demostración.* Se demuestra por inducción:

a. Para  $n = 1$  se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^1 U_{3k} &= \frac{U_{3(1)+1} - 1}{2} \Rightarrow U_{3(1)} = \frac{U_5 - 1}{2} \\ U_3 &= \frac{U_5 - 1}{2} \\ 2 &= \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

b. Tenemos por hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^n U_{3k} = \frac{U_{3n+2} - 1}{2}$$

entonces debemos demostrar

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_{3k} = \frac{U_{3n+5} - 1}{2}$$

Partiendo de la hipótesis de inducción y sumando a ambos lados  $U_{3n+3}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} U_{3k} &= \frac{U_{3n+2} - 1}{2} + U_{3n+3} = \frac{U_{3n+2} - 1 + 2U_{3n+3}}{2} \\ &= \frac{U_{3n+2} + U_{3n+3} + U_{3n+3} - 1}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{U_{3n+4} + U_{3n+3} - 1}{2} = \frac{U_{3n+5} - 1}{2}.$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_{3k} = \frac{U_{3n+5} - 1}{2}.$$

■

**Proposición 2.5.**

$$U_0 + U_4 + U_8 + \dots + U_{4n} = \sum_{k=1}^n U_{4k} = U_{2n+1}^2 - 1$$

*Demostración.*

a. Probaremos para  $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 U_{4k} = U_{2(1)+1}^2 - 1$$

$$U_4 = U_3^2 - 1$$

$$3 = 2^2 - 1 \Rightarrow 3 = 4 - 1 = 3$$

b. Tenemos por hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^n U_{4k} = U_{2n+1}^2 - 1$$

debemos demostrar

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_{4k} = U_{2n+3}^2 - 1$$

En esta demostración se utilizará inducción.

$$U_{m+n} = U_{m-1}U_n + U_mU_{n+1} \tag{2.2}$$

La cual se demostrará más adelante.

Partiendo de la hipótesis de inducción y sumando  $U_{4n+4}$  a ambos lados se tiene

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_{4k} = U_{2n+1}^2 - 1 + U_{4n+4}$$

Teniendo en cuenta que  $4n + 4 = (2n + 3) + (2n + 1)$  y aplicando la propiedad de suma de subíndices se llega a:

$$U_{(2n+3)+(2n+1)} = U_{2n}U_{2n+3} + U_{2n+1}U_{2n+4}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} U_{4k} &= U_{2n+1}U_{2n+1} - 1 + (U_{2n}U_{2n+3} + U_{2n+1}U_{2n+4}) \\ &= U_{2n+1}U_{2n+1} + U_{2n}U_{2n+3} + U_{2n+1}[U_{2n+3} + U_{2n+2}] - 1 \\ &= U_{2n+1}U_{2n+1} + U_{2n+1}U_{2n+2} + U_{2n+3}U_{2n+1} + U_{2n}U_{2n+3} - 1 \\ &= U_{2n+1}(U_{2n+1} + U_{2n+2}) + U_{2n+3}(U_{2n+1} + U_{2n}) - 1 \\ &= U_{2n+1}U_{2n+3} + U_{2n+3}U_{2n+2} - 1 \\ &= U_{2n+3}(U_{2n+1} + U_{2n+2}) - 1 \\ &= U_{2n+3}U_{2n+3} - 1 \\ &= U_{2n+3}^2 - 1. \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_{4k} = U_{2n+3}^2 - 1$$

■

### Proposición 2.6.

$$\sum_{k=1}^n U_{4k-1} = U_{2n}U_{2n+1}$$

*Demostración.*

- a. Se prueba para  $n = 1$ . Como  $U_2 = 1$ ,  $U_3 = 2$  y  $2 = 1 \times 2$  se verifica que  $U_3 = U_2U_3$  entonces

$$\sum_{k=1}^1 U_{4k-1} = U_2U_3$$

- b. Tenemos por hipótesis de inducción la siguiente igualdad

$$\sum_{k=1}^n U_{4k-1} = U_{2n}U_{2n+1}$$

Debemos demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n+1} U_{4i-1} = U_{2n+2}U_{2n+3}$$

Sumando  $U_{4n+3}$  a ambos lados de la igualdad en la hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_{4k-1} = U_{2n}U_{2n+1} + U_{4n+3}$$

usando la ecuación (2.2) mencionada en la proposición anterior

$$U_{4n+3} = U_{(2n+1)+(2n+2)} = U_{2n}U_{2n+2} + U_{2n+1}U_{2n+3}$$

se tiene entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} U_{4k-1} &= U_{2n}U_{2n+1} + U_{2n}U_{2n+2} + U_{2n+1}U_{2n+3} \\ &= U_{2n}(U_{2n+1} + U_{2n+2}) + U_{2n+1}U_{2n+3} \\ &= U_{2n}U_{2n+3} + U_{2n+1}U_{2n+1}U_{2n+3} \\ &= U_{2n+3}(U_{2n} + U_{2n+1}) = U_{2n+3}U_{2n+2} \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_{4k-1} = U_{2n+3}U_{2n+2}$$

■

Las siguientes proposiciones se pueden demostrar de manera similar como se demostraron las anteriores proposiciones, se darán sugerencias para que el lector tenga algunas ideas para su demostración.

**Proposición 2.7.**

$$U_2 + U_4 + U_6 + \dots + U_{2n} = \sum_{k=1}^n U_{2k} = U_{2n+1} - 1$$

**Sugerencia.** Esta propiedad se demuestra restando la ecuación de la proposición 2.3 de la ecuación de la proposición 2.1.

**Proposición 2.8.**

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots + (-1)^{k+1}U_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}U_k = -U_{n-1} + 1$$

**Sugerencia.** Para demostrar esta propiedad basta con restar término a término la ecuación de la proposición 2.4 con la ecuación de la proposición 2.3 obteniendo

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots + (-1)^{k+1}U_k = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1}U_k = -U_{2n-1} + 1$$

Esta demostración el lector la puede realizar en forma sencilla agregando un término más de la sumatoria a ambos lados y haciendo un cambio de subíndices.

**Proposición 2.9.**

$$U_1 + U_4 + U_7 + \dots + U_{3k-2} = \sum_{k=1}^n U_{3k-2} = \frac{U_{3n}}{2}$$

**Sugerencia.** Esta demostración el lector la puede realizar en forma similar a como se probó la proposición 2.4.

---

## 2.2. Propiedades de productos de números de Fibonacci

---

Existen también propiedades con productos de números de Fibonacci, en la presente sección se demostrarán algunas de ellas; se probará la ecuación 2.1 que se menciono para la demostración de la proposición 2.5 utilizando el segundo principio de inducción.

**Proposición 2.10.** (*Suma de subíndices*)

$$U_{m+n} = U_{m-1}U_n + U_mU_{n+1}, \quad \text{para } n > 1 \text{ y } m > 1.$$

*Demostración.* La demostración de esta fórmula se hace por inducción sobre  $m$ .

a. Para  $m = 1$

$$U_{n+1} = U_0U_n + U_1U_{n+1} \quad \text{como } U_0 = 0$$

$$U_{n+1} = U_1U_{n+1} = U_{n+1}.$$

- b. Suponemos cierto para  $m = k + 1$  y todos los anteriores en particular para  $m = k$  entonces se probará que también se cumple para  $m = k + 2$ .

$$U_{n+k} = U_{k-1}U_n + U_kU_{n+1} \text{ y } U_{n+k+1} = U_kU_n + U_{k+1}U_{n+1}$$

Se probará que

$$U_{n+k+2} = U_{k+1}U_n + U_{k+2}U_{n+1}$$

Sumamos término a término las fórmulas para  $m = k$  y para  $m = k + 1$  término a término y obtenemos

$$U_{n+k} + U_{n+k+1} = (U_{k-1}U_n + U_kU_n) + (U_kU_{n+1} + U_{k+1}U_{n+1})$$

$$U_{n+k+2} = U_n(U_{k-1} + U_k) + U_{n+1}(U_k + U_{k+1})$$

$$U_{n+k+2} = U_nU_{k+1} + U_{n+1}U_{k+2}.$$

■

**Proposición 2.11.** *(La diferencia de los cuadrados de 2 números de Fibonacci.)*

$$U_{2n} = U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2$$

Se hace  $m = n$  en la propiedad anterior y se obtiene

$$U_{2n} = U_{n-1}U_n + U_nU_{n+1}$$

factorizando se obtiene  $U_{2n} = U_n(U_{n-1} + U_{n+1})$  y como  $U_n = U_{n+1} - U_{n-1}$  se reemplaza

$$U_{2n} = (U_{n+1} - U_{n-1})(U_{n-1} + U_{n+1})$$

$$U_{2n} = U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2.$$

**Proposición 2.12. Identidad de Cassini**

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$U_{n-1}U_{n+1} - U_n^2 = (-1)^n$$

*Demostración.* a. Para  $n = 1$ , como  $U_0 = 0$ ,  $U_1 = 1$ ,  $U_2 = 1$  y  $-1^2 = 1$

$$U_0U_2 - U_1^2 = (-1)^1 \text{ y como } U_0 = 0 \Rightarrow \text{tenemos } U_0U_2 - U_1^2 = (-1)^1$$

$$-1^2 = -1$$

$$-1 = -1$$

b. Tenemos por hipótesis de inducción

$$U_{n-1}U_{n+1} - U_n^2 = (-1)^n$$

Se debe demostrar que

$$U_nU_{n+2} - U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

Partiendo de la hipótesis de inducción  $U_{n-1}U_{n+1} - U_n^2 = (-1)^n$  y multiplicando por  $(-1)^1$  a ambos lados se tiene  $U_n^2 - U_{n-1}U_{n+1} = (-1)^{n+1}$ , luego sumando  $U_nU_{n+1}$ , factorizando y usando la definición de los números de Fibonacci:

$$\begin{aligned} U_n^2 - U_{n-1}U_{n+1} + U_nU_{n+1} - U_nU_{n+1} &= (-1)^{n+1} \\ U_n(U_n + U_{n+1}) - U_{n+1}(U_{n-1} + U_n) &= (-1)^{n+1} \\ U_nU_{n+2} - U_{n+1}U_{n+1} &= (-1)^{n+1} \\ U_nU_{n+2} - U_{n+1}^2 &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

■

**Proposición 2.13.**

$$U_1U_2 + U_2U_3 + \dots + U_{2n-1}U_{2n} = U_{2n}^2$$

*Demostración.*

a. Para  $n = 1$ . Como  $U_1 = 1$ ,  $U_2 = 1$  y  $1 \times 1 = 1^2$  se tiene  $U_1U_2 = U_2^2$

b. Si  $U_1U_2 + U_2U_3 + \dots + U_{2n-1}U_{2n} = U_{2n}^2$  entonces

$$U_1U_2 + U_2U_3 + \dots + U_{2n-1}U_{2n} + U_{2n}U_{2n+1} + U_{2n+1}U_{2n+2} = U_{2n+2}^2$$

sumando  $U_{2n}U_{2n+1} + U_{2n+1}U_{2n+2}$  a ambos lados de la igualdad en la hipótesis de inducción.

Tenemos:

$$\begin{aligned} U_1U_2 + \dots + U_{2n-1}U_{2n} + U_{2n}U_{2n+1} + U_{2n+1}U_{2n+2} &= U_{2n}^2 + U_{2n}U_{2n+1} + U_{2n+1}U_{2n+2} \\ &= U_{2n}(U_{2n} + U_{2n+1}) + U_{2n+1}U_{2n+2} \\ &= U_{2n}U_{2n+2} + U_{2n+1}U_{2n+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U_{2n+2}(U_{2n} + U_{2n+1}) \\
&= U_{2n+2}U_{2n+2} \\
&= U_{2n+2}^2
\end{aligned}$$

Luego

$$U_1U_2 + U_2U_3 + \dots + U_{2n}U_{2n+1} = U_{2n+2}^2$$

■

Las siguientes proposiciones se dejan como ejercicio para el lector.

**Proposición 2.14.**

$$U_{3n} = U_{n+1}^3 + U_n^3 - U_{n-1}^3$$

**Sugerencia.** Se reemplaza  $m = 2n$  en la propiedad 2.10.

**Proposición 2.15.**

$$U_{2n-1} = U_nU_{n+1} - U_{n-1}U_{n-2}$$

**Sugerencia.** Utilizando la propiedad 2.10 y reemplazando  $U_n = U_{n+1} - U_{n-1}$  se podrá demostrar.

**Proposición 2.16.**

$$U_1U_2 + U_2U_3 + U_3U_4 + \dots + U_{2n}U_{2n+1} = U_{2n+1}^2 - 1$$

**Sugerencia.** Su demostración se puede realizar en forma similar a la demostración de la proposición 2.14.

---

## 2.3. Fórmula de Binet

---

La formula de recurrencia es la formula más conocida para hallar los números de Fibonacci, sin embargo para hallar un número de Fibonacci con un subíndice muy grande usando la formula de recurrencia es un procedimiento muy tedioso. Algunos matemáticos buscaron otras formas para hallar estos números en forma directa, uno de ellos fue Binet quien

demostró la siguiente formula por primera vez, la cual lleva su nombre.

Formula de Binet

$$U_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}. \quad (2.3)$$

Aquí se demostrará utilizando valores y vectores propios. Otra demostración se puede ver en [3].

*Demostración.* Teniendo la definición  $U_{k+2} = U_{k+1} + U_k$  y la identidad  $U_{k+1} = U_{k+1}$  formaremos el sistema:

$$U_{k+2} = U_{k+1} + U_k$$

$$U_{k+1} = U_{k+1}$$

ó

$$\begin{pmatrix} U_{k+2} \\ U_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{k+1} \\ U_k \end{pmatrix}$$

Definimos  $A$  y  $x_k$  con  $k \geq 0$  por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x_k = \begin{pmatrix} U_{k+1} \\ U_k \end{pmatrix}, \quad k \geq 0 \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema se reduce a la ecuación  $x_{k+1} = Ax_k$  y conocemos  $x_0$ , tenemos entonces que  $x_1 = Ax_0$

$$x_2 = Ax_1 = A(Ax_0) = A^2x_0 \text{ reemplazando } x$$

$$x_3 = Ax_2 = A(A^2x_0) = A^3x_0$$

$\vdots$

$$x_k = Ax_{k-1} = A(A^{k-1}x_0) = A^kx_0$$

Diagonalizando  $A$ , se tiene  $A = SDS^{-1}$  entonces  $x_k = SDS^{-1}x_0$ , luego

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)\lambda - (-1)(-1) = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Por lo tanto  $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  y  $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

Hallemos los valores propios:

$$(A - \lambda_1 I)V = 0 \text{ con } V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(1 - \lambda_1)x_1 - x_2 = 0 \text{ y } x_1 - \lambda_1 x_2 = 0$$

$$\implies x_1 = x_2 \lambda_1 \text{ si } x_2 = 1$$

$$\implies x_1 = \lambda_1 \text{ luego } v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De manera similar para  $V_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$  por lo tanto  $S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix}$

luego  $S^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$  y  $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ , por lo tanto

$$S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

reemplazando en  $\begin{pmatrix} U_{k+1} \\ U_k \end{pmatrix} = x_k = SDS^{-1}x_0$

$$\begin{pmatrix} U_{k+1} \\ U_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} & \lambda_2^{k+1} \\ \lambda_1^k & -\lambda_2^k \end{pmatrix}$$

concluimos que

$$U_k = \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

■

Ahora dado que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right|^k = 0.$$

Entonces

$$U_k \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

para  $k$  suficientemente grande. Esta aproximación sugiere que si observamos la razón  $\frac{U_{k+1}}{U_k}$ , obtenemos

$$\frac{U_{k+1}}{U_k} \approx \frac{\frac{\left[ \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \right]^{k+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\left[ \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \right]^k}{\sqrt{5}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6$$

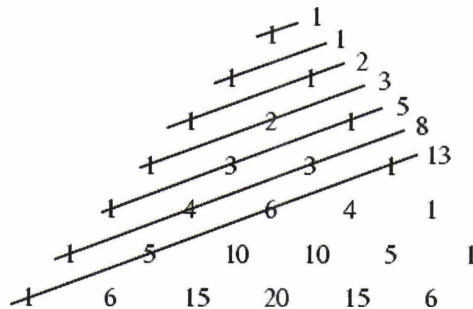
esta razón  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  fue llamada por los griegos razón áurea ó razón de oro.

## 2.4. Números de Fibonacci y coeficientes binomiales

En esta sección se presenta una relación interesante entre los números de Fibonacci y los coeficientes binomiales. Para ello veamos el triángulo de Pascal.

$$\begin{array}{l} n_0 \quad \binom{0}{0} \\ n_1 \quad \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ n_2 \quad \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ n_3 \quad \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ n_4 \quad \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\ \vdots \\ \binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \binom{n}{4} \quad \dots \quad \binom{n}{n} \end{array}$$

es decir,



**Proposición 2.17.** *La suma de los números de las diagonales ascendentes del triángulo de Pascal son números de Fibonacci.*

*Demostración.* Las dos primeras son las diagonales de un solo número el 1, es decir  $U_1$  y  $U_2$ .

Para probar la afirmación, basta con demostrar que la suma de todos los números de la  $(n-2)$  diagonal y la  $(n-1)$  diagonal es igual a la suma de los números que se encuentran en su  $n$ -ésima diagonal, es decir

$$U_{n-2} + U_{n-1} = U_n$$

La  $(n-2)$ -ésima diagonal consiste en:

$$\binom{n-3}{0} \binom{n-4}{1} \binom{n-5}{2} \dots + 1$$

y la  $(n-1)$ -ésima es

$$\binom{n-2}{0} \binom{n-3}{1} \binom{n-4}{2} \dots + 1.$$

Si las sumamos

$$\binom{n-2}{0} + \left[ \binom{n-3}{0} + \binom{n-3}{1} \right] + \left[ \binom{n-4}{1} \binom{n-4}{2} \right] + \dots + 1$$

como

$$\binom{n-2}{0} = \binom{n-1}{0} = 1$$

y

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} &= \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i} + \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)(n-i)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i \cdot (i+1)} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i} \cdot \left( 1 + \frac{n-i}{i+1} \right) \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i} \cdot \frac{i+1+n-i}{i+1} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i(i+1)} \\ &= \binom{n+1}{i+1} \end{aligned}$$

Tenemos que si se reemplaza cada uno de los paréntesis de (1) y (2) se obtiene

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots + 1$$

Que es la suma de los números que se encuentran en la  $n$ -ésima diagonal del triángulo de Pascal. ■

Luego la suma de todos los coeficientes binomiales que se encuentran arriba de la  $n$ -ésima diagonal ascendente del triángulo de Pascal más la suma de los coeficientes en la diagonal es igual a  $U_{n+1} - 1$  que es lo que ya se demostró.

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# NÚMEROS DE FIBONACCI Y TEORÍA ELEMENTAL DE NUMEROS

En este capítulo se utilizarán algunos conceptos de la teoría elemental de números que se recordarán brevemente en la sección en donde se utilicen, como son el algoritmo de Euclides y algunas propiedades sobre los máximos comunes divisores. También se utilizarán algunas notaciones especiales:

1.  $a|b$  significa  $a$  divide a  $b$ .
2. El máximo común divisor de  $a$  y  $b$  se escribe  $(a, b)$ .

---

### 3.1. Máximo común divisor de los números de Fibonacci

---

los números de Fibonacci presentan algunas propiedades relacionadas con el máximo común divisor, algunas de las cuales serán demostradas en esta sección.

**Teorema 3.1.** *Dos números de Fibonacci consecutivos son primos relativos.*

$$(U_n, U_{n+1}) = 1$$

*Demostración.* Inducción sobre  $n$

a.  $n = 1 \quad (U_1, U_2) = (1, 1) = 1$

b. Teniendo como hipótesis de inducción

$$(U_n, U_{n+1}) = 1$$

entonces se debe demostrar que

$$(U_{n+1}, U_{n+2}) = 1$$

$$\text{Sea } d = (U_{n+1}, U_{n+2}) \implies d \mid U_{n+1} \text{ y } d \mid U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$

$$\implies \text{como } d \mid U_{n+2},$$

$$\implies d \mid (U_{n+1} + U_n),$$

$$\implies \text{y como } d \mid U_{n+1},$$

$$\implies d \mid U_n,$$

entonces  $d$  es un divisor común de  $U_n$  y  $U_{n+1}$  por lo tanto  $d \mid (U_n, U_{n+1}) = 1$ ,  $d > 0$   
 $\implies d = 1$  ■

**Teorema 3.2.**  $(U_n, U_{n+3}) = 1$  ó  $2$

*Demostración.* Inducción sobre  $n$

a.  $n = 1 \quad (U_1, U_4) = (1, 3) = 1$

b. Teniendo como hipótesis de inducción

$$(U_n, U_{n+3}) = 1 \text{ ó } 2$$

entonces se debe demostrar

$$(U_{n+1}, U_{n+4}) = 1 \text{ ó } 2$$

Sea  $d = (U_{n+1}, U_{n+4})$  entonces  $d \mid U_{n+1} \wedge d \mid U_{n+4}$

como

$$\begin{aligned} U_{n+4} &= U_{n+3} + U_{n+2} \\ &= U_{n+2} + U_{n+1} + U_{n+2} \\ &= 2U_{n+2} + U_{n+1} \end{aligned}$$

entonces  $d \mid (2U_{n+2} + U_{n+1})$  y  $d \mid U_{n+1}$  luego  $d \mid 2U_{n+2}$  entonces  $d \mid 2$  ó  $d \mid U_{n+2}$ .

Caso 1.  $d \mid 2$  entonces  $d = 1$  o  $2$ .

Caso 2.  $d \mid U_{n+2}$ . Como  $d \mid U_{n+1}$ , entonces  $d \mid (U_{n+2}, U_{n+1}) = 1$  por lo tanto  $d = 1$ . Luego  $(U_n, U_{n+3}) = 1$  ó  $2$ . ■

**Teorema 3.3.** *Si  $m$  divide a  $n$  entonces  $U_m$  divide a  $U_n$*

*Demostración.* Vamos a demostrar que  $U_m \mid U_{mn}$

Se realizará la inducción sobre  $n$ .

Sea  $k = mn$

a. para  $n = 1$ ,  $U_m \mid U_m$  y  $U_m = U_k$  por lo que  $U_m \mid U_k$ .

b. Supongamos cierto para  $n$ .

Sea  $k_1 = mn$  entonces  $U_m \mid U_{mn} = U_{k_1}$ . Debemos demostrar para  $n + 1$

$k_1 = mn$  sumando a ambos lados  $m$  se tiene  $k_1 + m = mn + m$  y sea  $k_1 + m = k_2$  entonces  $k_2 = m(n + 1)$  y  $m \mid k_2$ .

Sea  $U_{k_1+m} = U_{k_1-1}U_m + U_{k_1}U_{m+1}$ . Luego por hipótesis de inducción se tiene que  $U_m \mid U_m$  y  $U_m \mid U_{k_1}$ , por lo tanto  $U_m \mid U_m U_{k_1-1}$  y  $U_m \mid U_{k_1} U_{m+1}$ . Entonces  $U_m$  divide a una combinación lineal de estos dos que es exactamente  $U_{k_1+m}$  luego

$$U_m \mid U_{k_1+m} = U_{mn+n} = U_{m(n+1)}$$

lo que demuestra que  $U_m \mid U_{m(n+1)}$  ■

**Corolario.** *Si  $n$  es compuesto y no igual a 4 entonces  $U_n$  es compuesto.*

*Demostración.* Como  $n$  es compuesto se puede escribir de la forma

$$n = n_1 n_2 \text{ donde } 1 < n_1 < n \wedge 1 < n_2 < n \text{ y } n_1 > 2 \text{ o } n_2 > 2$$

Supongamos el primer caso que  $n_1 > 2$  entonces en virtud del teorema que acabamos de probar  $U_n$  es divisible entre  $U_{n_1}$ , además  $1 < U_{n_1} < U_n$  lo cual significa que  $U_n = U_{n_1} U_{n_2}$  por lo tanto  $U_n$  es compuesto. ■

**Teorema 3.4.**  $(U_m, U_n) = U_{(m,n)}$

*Demostración.* Supongamos que  $m > n$ . Si el algoritmo de Euclides se aplica a  $m$  y  $n$

$$\begin{aligned} m &= nq_0 + r_1 & \text{donde } 0 \leq r_1 < n \\ n &= r_1q_1 + r_2 & \text{donde } 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3 & \text{donde } 0 \leq r_3 < r_2 \\ r_{t-2} &= r_{t-1}q_{t-1} + r_t & \text{donde } 0 \leq r_t < r_{t-1} \\ r_{t-1} &= r_tq_t \end{aligned}$$

como ya se sabe  $r_t$  es el máximo común divisor de  $m$  y  $n$ . Como  $m = nq_0 + r_1$ , se tiene

$$(U_m, U_n) = (U_{nq_0+r_1}, U_n)$$

aplicando la propiedad de la suma de índices de los números de Fibonacci tenemos que:

$$(U_m, U_n) = (U_{nq_0-r}U_{r_1} + U_{nq_0}U_{r_1+1}, U_n)$$

aplicando el Teorema 3.1 como  $U_{nq_0}$  es divisible entre  $U_n$  se tiene

$$(U_m, U_n) = (U_{nq_0-r}U_{r_1}, U_n)$$

Si  $m = nq_0 + r$ , entonces  $(U_m, U_n) = (U_n, U_r)$  reemplazando  $m$  se tiene

$$(U_{nq_0+r}, U_n) = (U_n, U_r)$$

Sea  $W = (U_{nq_0+r}, U_n)$  y  $V = (U_n, U_r)$  entonces:

- a. Como  $V = (U_n, U_r)$ , entonces  $V|U_n$  y  $V|U_r$  y teniendo  $U_{nq_0+r} = U_{nq_0-1}U_r + U_{nq_0}U_{r+1}$  entonces  $V|U_r$ , luego

$$V|U_{nq_0-1}U_r \text{ y } V|U_n \tag{3.1}$$

Entonces por el teorema 3.3 se tiene que  $V|U_{nq_0}$ , luego

$$V|U_{nq_0}U_{r+1} \quad (3.2)$$

por lo tanto  $V|U_{nq_0-1}U_r + U_{nq_0}U_{r+1}$  que es una combinación lineal de (3.1) y (3.2), que es precisamente  $U_{nq_0+r}$  de lo que se deduce que  $V|U_{nq_0+r}$  y como también divide a  $U_n$  por lo tanto  $V|(U_{nq_0+r}, U_n) = W$  luego  $V|W$ .

- b.  $W = (U_{nq_0+r}, U_n)$ , entonces  $W|U_{nq_0+r}$  y  $W|U_n$ , como  $W|U_{nq_0+r} = U_{nq_0-1}U_r + U_{nq_0}U_{r+1}$  y  $W|U_n$  entonces, por el teorema 3.3,  $W|U_{nq_0}$ . Por lo tanto  $W|U_{nq_0}U_{r+1}$  luego  $W|U_{nq_0-1}U_r$ .

1<sup>er</sup> caso: Si  $W|U_{nq_0-1}$ , entonces, como  $w|U_{nq_0}$ , se tiene que  $w|(U_{nq_0-1}, U_{nq_0}) = 1$ , luego  $W = 1$  por lo tanto  $W|V$ .

2<sup>do</sup> caso: Si  $W|U_r$ , como  $W|U_n$ , entonces  $W|(U_r, U_n) = V$ , luego  $W|V$ .

Por lo tanto de a) y b) se tiene:

$$V = W,$$

$$(U_n, U_r) = (U_{nq_0+r_1}, U_{r_1}) = (U_m, U_n)$$

Siguiendo con el algoritmo de Euclides y de modo semejante se puede probar

$$(U_n, U_{r_1}) = (U_{r_2}, U_{r_1})$$

$$(U_{r_2}, U_{r_1}) = (U_{r_3}, U_{r_2})$$

$$\vdots$$

$$(U_{r_{t-1}}, U_{r_{t-2}}) = (U_{r_t}, U_{r_{t-1}}).$$

Comparando todas estas ecuaciones, se obtiene

$$(U_m, U_n) = (U_{r_t}, U_{r_{t-1}})$$

y como  $r_t$  es un divisor de  $r_{t-1}$  entonces  $U_{r_{t-1}}$  es divisible entre  $U_{r_t}$ , se concluye que  $(U_{r_t}, U_{r_{t-1}}) = U_{r_t}$ . Finalmente, si se observa que  $r_t = (m, n)$ , se llega al resultado deseado

$$(U_m, U_n) = U_{r_t} = U_{(m,n)}$$

■

---

## 3.2. Propiedades de divisibilidad de los números de Fibonacci

---

Se presentan algunos criterios de divisibilidad para los números de Fibonacci.

1. Un número de Fibonacci es par si y solo si su subíndice es divisible entre 3.
  - a.  $\Leftarrow$ ) Si  $3|m$ , entonces por el teorema 3.3,  $f_3|f_m$  y como  $f_3 = 2$ , entonces  $2|f_m$  por lo tanto  $f_m = 2k$  luego  $f_m$  es par.
  - b.  $\Rightarrow$ ) Si  $f_m$  es par entonces  $f_m = 2k$ , luego  $2|f_m$  y como  $f_3 = 2$ , entonces  $f_3|f_m$  y como el máximo entre  $f_3$  y  $f_m$  es  $f_3$ , entonces del teorema 3.4  $(f_3, f_m) = f_{(3,m)} = 3$ , luego  $3|m$ .
2. Un número es divisible entre 3 si y solo si su índice es divisible entre 4.
  - a.  $\Leftarrow$ ) Si  $4|m$ , entonces  $f_4|f_m$ , por el teorema 3.3, y como  $f_4 = 3$ , entonces  $3|f_m$
  - b.  $\Rightarrow$ ) Si  $3|f_m$  y  $f_4 = 3$ , entonces  $f_4|f_m$  y  $(f_4, f_m) = f_{(4,m)}$ , por el teorema 3.4, y sabiendo que el máximo entre  $f_4$  y  $f_m$  es  $f_4$  entonces  $f_{(4,m)} = f_4$  por lo tanto  $(4, m) = 4$  luego  $4|m$ .

El lector podrá probar con facilidad otros criterios de divisibilidad semejantes. Como por ejemplo:

3. Un número de Fibonacci es divisible en 4 si y solo si su índice es divisible en 6.
4. Un número de Fibonacci es divisible en 5 si y solo si su índice es divisible en 5.
5. Un número de Fibonacci es divisible en 6 si y solo si su índice es divisible en 8.

---

---

## CAPÍTULO 4

---

# NUMEROS DE FIBONACCI, FRACCIONES CONTINUAS, SECCIÓN ÁUREA Y NÚMEROS DE LUCAS

En este capítulo se estudia la relación de los números de Fibonacci relacionados con otros números (números de Lucas) se tendrá en cuenta cualidades de los números de Fibonacci, como que la razón de oro sea el límite de la proporción de dos números de Fibonacci consecutivos  $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ .

---

### 4.1. Fracciones continuas simples

---

Una fracción continua es un número de la forma

$$a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{a_4 + \dots}}}$$

donde ningún  $a_i$ , excepto el primero es cero. Si los  $b_i$  son todos 1 y los  $a_i$  enteros positivos excepto el primero que puede ser cero, lo llamamos fracción continua simple. También se puede escribir así:

$$f = (a_1, a_2, \dots)$$

Estas pueden ser finitas o infinitas. Si  $f$  es la fracción continua  $(a_1, a_2, \dots)$  llamamos a  $a_1$  su primer límite,  $(a_1, a_2)$  su segundo límite,  $\dots$ ,  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  su  $k$ -ésimo límite, el cual puede escribirse en la forma  $\frac{p_k}{q_k}$  donde  $p_k$  y  $q_k$  son primos entre si.

La fracción continua más simple, en cierto sentido, será aquella en que las  $a_i$  son iguales a 1 y sus convergentes sucesivos son

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots$$

que son los recíprocos de los cocientes de los números sucesivos de la sucesión de Fibonacci.

Entonces tenemos

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

ya que esta fracción continua tiene el mismo valor si empezamos con el segundo termino que si empezamos con el primero tenemos.

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Resolviendo

$$x - 1 = \frac{1}{x}$$

$$x(x - 1) = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Aplicando la formula cuadrática tenemos

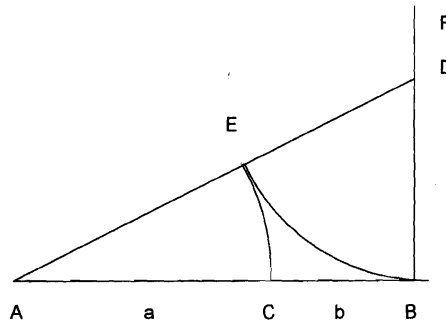
$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618034$$

Se escoge el signo positivo ya que  $x$  es positiva.

## 4.2. Sección áurea ó razón de oro

La sección áurea corresponde a la relación  $\frac{a}{b}$ , que se halla de la siguiente forma:

Dado un segmento  $AB$ , se sitúa  $BF$  perpendicular a  $AB$ , medimos un segmento  $BD$  igual a la mitad de  $AB$  y ubicado sobre  $BF$  y se une  $A$  con  $D$ . Con un compás, tomando como centro  $D$ , se obtiene  $DE = DB$ . Después tomando como centro  $A$ , se traza el arco del círculo  $CE$ , encontrando el punto  $C$  que es el que separa los segmentos  $a$  y  $b$ .



El nombre de sección áurea se le atribuye a Leonardo Da Vinci que fue quien la utilizó en sus obras. De esta relación resulta un número irracional cuyo valor aproximado es 1,618 llamado número de oro y se denota con la letra griega  $\phi$ .

Este número presenta unas características que lo hacen único.

La siguiente serie es una progresión, cuya razón es  $\phi$ : cualquier término de la serie es igual a la suma de los dos anteriores igual que con los números de Fibonacci.

Los primero términos son:

$$1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots, \phi^n, \dots$$

El cuadrado del número de oro es muy interesante ya que se halla sumándole la unidad a  $\phi$ .

$$\phi^2 = \phi + 1 \quad (4.1)$$

Si se supone desconocido el valor de  $\phi$ , podría ser hallado a partir de la igualdad anterior

$$\phi^2 = \phi + 1$$

Si se hace  $\phi = x$  y resolvemos la ecuación

$$x^2 - x - 1 = 0$$

al hallar las raíces se tiene:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618 \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 0,618$$

Si  $\phi^2 = \phi + 1$ , las potencias sucesivas de  $\phi$  son:

$$\phi^3 = \phi^2 + \phi$$

$$\phi^3 = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \phi^3 + \phi^2 = (2\phi + 1) + \phi + 1$$

$$\phi^5 = \phi^4 + \phi^3 = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = \phi^5 + \phi^4 = 8\phi + 5$$

$\vdots$

$$\phi^n = U_n \phi + U_{n-1}$$

La cual es una combinación de los números de Fibonacci con el número de oro.

### 4.3. Números de Fibonacci y Números de Lucas

Los números de Lucas aparecieron del estudio de Lucas sobre los números de Fibonacci, se definen en forma análoga:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

con  $L_1 = 1$  y  $L_2 = 3$ , y algunas de las propiedades de los números de Fibonacci también se cumplen para estos números. Los primeros términos son:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots$$

#### 4.3.1. Suma de los números de Lucas

**Proposición 4.1.** *Suma de los números de Lucas*

$$L_1 + L_2 + \dots + L_k = \sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3$$

*Demostración.* La demostración se hará por inducción

a Para  $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 L_k = L_{1+2} - 3$$

$$L_1 = L_3 - 3$$

$$1 = 4 - 3$$

$$1 = 1$$

b Tenemos por hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3$$

entonces debemos demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_k = L_{n+3} - 3$$

Sumando a cada lado de la igualdad de la hipótesis de inducción  $L_{n+1}$ .

Tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n L_k + L_{n+1} &= L_{n+2} - 3 + L_{n+1} \\ \sum_{k=1}^{n+1} L_k &= (L_{n+2} + L_{n+1}) - 3 = L_{n+3} - 3 \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_k = L_{n+3} - 3$$

■

**Proposición 4.2.**

$$L_3 + L_6 + \dots + L_{3k} = \sum_{k=1}^n L_{3k} = \frac{L_{3n+2} - 3}{2}$$

*Demostración.* La demostración se hará por inducción

a. Para  $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 L_{3k} = 4 = \frac{8}{2} = \frac{11-3}{2} = L_5 - 3 = L_{3+2} - 3 = L_{3n+2} - 3$$

luego

$$\sum_{k=1}^1 L_{3k} = L_{3n+2} - 3$$

b. Tenemos por hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^n L_{3k} = \frac{L_{3n+2} - 3}{2}$$

Entonces debemos demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{3k} = \frac{L_{3n+5} - 3}{2}$$

Partiendo de la hipótesis de inducción y sumando a cada lado  $L_{3n+3}$  se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} L_{3k} &= \frac{L_{3n+2} - 3}{2} + L_{3n+3} \\ &= \frac{L_{3n+2} - 3 + 2L_{3n+3}}{2} \\ &= \frac{L_{3n+2} + L_{3n+3} - 3 + 2L_{3n+3}}{2} \\ &= \frac{L_{3n+4} + L_{3n+3} - 3}{2} \\ &= \frac{L_{3n+5} - 3}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrado. ■

**Proposición 4.3.** *Suma de los  $n$  primeros números de Lucas con subíndices pares*

$$L_2 + L_4 + \dots + L_{2n} = \sum_{k=1}^n L_{2k} = L_{3n+1} - 1$$

*Demostración.* La demostración se hará por inducción

a Para  $n = 1$ ,

$$\sum_{k=1}^1 L_{2k} = 3 = 4 - 1 = L_3 - 1$$

luego

$$\sum_{k=1}^1 L_{2k} = L_3 - L_1$$

b Tenemos por hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^n L_{2k} = L_{2n+1} - 1$$

entonces debemos demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{2k} = L_{2n+3} - 1$$

Sumando  $L_{2n+2}$  a ambos lados de la igualdad de la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} L_{2k} &= L_{2n+1} - 1 + L_{2n+2} \\ &= (L_{2n+1} + L_{2n+2}) - 1 \\ &= L_{2n+3} - 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{2k} = L_{2n+3} - 1$$

■

### 4.3.2. Combinaciones entre números de Fibonacci y Números de Lucas

Los números de Lucas se pueden combinar con los números de Fibonacci por su estrecha relación, creando algunas propiedades como las que veremos a continuación.

**Proposición 4.4.**  $L_n = U_{n-1} + U_{n+1}$

*Demostración.* Para realizar esta demostración se utilizará el segundo método de inducción, es decir si se cumple para un  $n$  se cumple también para todas las anteriores.

a Para  $n = 1$

$$L_1 = U_0 + U_2$$

$$1 = 0 + 1$$

$$1 = 1$$

b Si  $L_n = U_{n+1} + U_{n-1} \stackrel{?}{\Rightarrow} L_{n+1} = U_n + U_{n+2}$

Por la definición de los números de Lucas se tiene que  $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$  y dado que  $L_n = U_{n-1} + U_{n+1}$  y  $L_{n-1} = U_{n-2} + U_n$  se tiene entonces que

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= (U_{n-1} + U_{n+1}) + (U_{n-2} + U_n) \\ &= (U_{n-1} + U_{n-2}) + (U_{n+1} + U_n) \\ &= U_n + U_{n+2} \end{aligned}$$

que era a donde se quería llegar. ■

**Proposición 4.5.** *Identidad Fundamental*

$$L_n^2 - 5U_n^2 = 4(-1)^n$$

*Demostración.* Basándonos en la propiedad anterior

$$\begin{aligned} L_n^2 - 5U_n^2 &= 4(-1)^n \stackrel{?}{\Rightarrow} (U_{n-1} + U_{n+1})^2 - 5U_n^2 \\ &= U_{n-1}^2 + U_{n+1}^2 + 2U_{n-1}U_{n+1} - 5U_n^2 \\ &= U_{n-1}^2 + (U_{n-1} + U_n)^2 + 2U_{n+1}U_{n-1} - 5U_n^2 \\ &= U_{n-1}^2 + U_{n-1}^2 + U_n^2 + 2U_{n-1}U_n + 2U_{n+1}U_{n-1} - 5U_n^2 \\ &= 2U_{n-1}^2 + 2U_{n-1}U_n + 2U_{n+1}U_{n-1} - 4U_n^2 \\ &= 2U_{n-1}(U_{n-1} + U_n) + 2U_{n+1}U_{n-1} - 4U_n^2 \\ &= 2U_{n-1}U_{n+1} + 2U_{n+1}U_{n-1} - 4U_n^2 \\ &= 4U_{n+1}U_{n-1} - 4U_n^2 \\ &= 4(U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2) \end{aligned}$$

como anteriormente ya se demostró

$$U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = (-1)^n$$

entonces  $L_n^2 - 5U_n^2 = 4(-1)^n$  que era lo que se quería demostrar. ■

**Proposición 4.6.** *Relación sucesor*

$$U_n = \frac{1}{5}(L_{n-1} + L_{n+1})$$

*Demostración.* Reemplazando  $L_n = U_{n-1} + U_{n+1}$  se tiene

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{5} [(U_{n-2} + U_n) + (U_n + U_{n+2})] \\ &= \frac{1}{5} (U_{n-2} + 2U_n + U_{n+2}) \\ &= \frac{1}{5} (U_{n-2} + (U_{n-1} - U_{n-1}) + 2U_n + U_{n+2}) \\ &= \frac{1}{5} (U_{n-2} + U_{n-1} - U_{n-1} + 2U_n + U_{n+2}) \\ &= \frac{1}{5} (U_n - U_{n-1} + 2U_n + U_{n+1} + U_n) \\ &= \frac{1}{5} (4U_n - U_{n-1} + U_{n+1}) \\ &= \frac{1}{5} (4U_n + U_{n+1} - U_{n-1}) \\ &= \frac{1}{5} (4U_n + U_n) \\ &= \frac{1}{5} (5U_n) \end{aligned}$$

Luego  $\frac{1}{5}(L_{n-1} + L_{n+1}) = U_n$  ■

**Proposición 4.7.** *Formula de adición*

$$U_{m+n} = \frac{1}{2}(U_m L_n + L_m U_n)$$

*Demostración.* Partiendo de la identidad de la suma en los números de Fibonacci

$$U_{m+n} = U_m U_{n+1} + U_{m-1} U_n$$

reemplazando  $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + L_n)$  queda

$$U_{m+n} = 2U_m \left[ \frac{1}{2}(U_n + L_n) \right] + U_n \left[ \frac{1}{2}(U_{m-2} + L_{m-2}) \right],$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [U_m(U_n + L_n) + U_n(U_{m-2} + L_{m-2})] \\
&= \frac{1}{2} [(U_m U_n + U_m L_n) + U_n U_{m-2} + U_n L_{m-2}]
\end{aligned}$$

reemplazando  $L_{m-2} = L_m - L_{m-1}$  en la anterior igualdad,

$$\begin{aligned}
U_{m+n} &= \frac{1}{2} [U_m U_n + U_m L_n + U_n U_{m-2} + U_n (L_m - L_{m-1})] \\
U_{m+n} &= \frac{1}{2} [U_m U_n + U_m L_n + U_n U_{m-2} + U_n L_m - U_n L_{m-1}]
\end{aligned}$$

Dado que  $L_{m-1} = U_{m-2} + U_m$

$$\begin{aligned}
U_{m+n} &= \frac{1}{2} [U_m U_n + U_m L_n + U_n U_{m-2} + U_n U_m - U_n U_{m-2} + U_m] \\
U_{m+n} &= \frac{1}{2} [U_m U_n + U_m L_n + U_n U_{m-2} + U_n U_m - U_n U_{m-2} + U_m]
\end{aligned}$$

Cancelando los términos semejantes se tiene que

$$\frac{1}{2} [U_m L_n + U_n L_m]$$

que era a donde se quería llegar. ■

#### Proposición 4.8.

$$\sum_{k=1}^n L_{4k-2} = U_{4n}$$

*Demostración.* Se demuestra por inducción

a. Para  $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 L_{4k-2} = L_2 = 3 = U_4$$

luego

$$\sum_{k=1}^1 L_{4k-2} = U_4$$

b. Tenemos por hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^n L_{4k-2} = U_{4n}$$

Debemos demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{4k-2} = U_{4n+4}$$

Sumando  $L_{4n+2}$  a ambos lados de la igualdad de la hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{4k-2} = U_{4n} + L_{4n+2}$$

y reemplazando  $L_{4n+2} = U_{4n+1} + U_{4n+1+3}$  en la anterior igualdad

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{4k-2} = U_{4n} + U_{4n+1} + U_{4n+3} = U_{4n+2} + U_{4n+3} = U_{4n+4}.$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{4k-2} = U_{4n+4}$$

■

Los números de Fibonacci presentan una estrecha relación con la naturaleza, también tiene muchas propiedades interesantes que nos muestran como se comportan estos números dadas algunas combinaciones entre ellos.

La razón de dos números de Fibonacci consecutivos, convergen a un número especial llamado número de oro o razón áurea, la cual se utiliza en importantes obras de arte de Leonardo Da Vinci, ya que se probó que al ser utilizado este número en obras de arte mostraban ser más agradables al ser humano. Es por eso que este trabajo mostró un estudio de estos números que no son tan escuchados, pero que sin embargo son utilizados en la biología, el arte, entre otras.

---

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] BONELL Carmen. *La divina Proporción*. Alfaomega grupo editor S.A. Barcelona, España. segunda edición, 2000.
- [2] BURTON Jones. *Teoria de los números*. Editorial Trillas Centro Regional de ayuda técnica. México, México D.F., 1969.
- [3] N. N. VOROBYOV. *Los números de Fibonacci*. Editorial Limusa. México, México. Primera edición, 1973.