

CONVERGENCIA Y ESPACIOS DE BANACH

JOHN EDWIN PARRA BUITRAGO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2006

CONVERGENCIA Y ESPACIOS DE BANACH

JOHN EDWIN PARRA BUITRAGO

Trabajo de grado presentado como
requisito parcial para optar al título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Director

GILBERTO ARENAS DÍAZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2006

*A Dios y Daniel Santiago
fuentes de inspiración de mi vida*

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

- **Dios**, por darme la fortaleza y la sabiduría para lograr todos mis propósitos.
- **Mis padres José David y Bertha Inés**, por brindarme apoyo incondicional, comprensión, amor y porque sin ellos hoy este proyecto no sería una realidad.
- **Mis hermanos David, Alex, Elver y María Isabel**, por su apoyo moral, afectivo y ser quienes han compartido conmigo muy bellos momentos de mi vida.
- **Mi amor Tilcia**, quien por su apoyo, compañía, comprensión y amor incondicional, me impulso para lograr este objetivo.
- Al profesor **Gilberto Arenas**, por su colaboración y por su acertada orientación para la realización de este trabajo.
- Los **profesores**, por sus aportes en mi formación académica.
- Mis **compañeros de carrera**, que de una u otra manera me apoyaron y me brindaron amistad incondicional.

TITLE: CONVERGENCE AND BANACH SPACES*

AUTHOR: JOHN EDWIN PARRA BUITRAGO**

KEY WORDS: Vectorial space, metric space, normed space, Banach space, sequence, series, linear functional, convergence. .

DESCRIPTION

Normed spaces are of great importance in the study of the mathematical analysis; however, when it is seen further and it is studied criterion which can be used in them, such as those of convergence, it is led to other spaces called Banach spaces that are complete normed spaces which are of great importance in the study of functional analysis.

Convergence is a concept very significant in Mathematics; it is worked on some Pregrade Courses like calculus and mathematical analysis; about Banach spaces it is usually mentioned only its definition and few examples. The purpose of this monograph is to collect information from different bibliographic sources about concepts and fundamental examples of Banach spaces and convergence in normed spaces, presenting the different notions of convergence and some basic relations between them.

The present work is divided in the following way:

In the first chapter, it is showed the fundamental concepts about vectorial spaces, metric spaces and normed spaces which are of great importance in the development of the following chapters. The second chapter talks about Banach spaces, it is showed its definition and some examples that let to visualize what is a Banach spaces, as well it is showed the concept of series in these spaces.

In the third chapter it is made an exposition about dual spaces of a normed space, weak and strong convergence, bounded linear transformations and convergence in $B(X, Y)$. It is showed some basic properties and it is made comparisons between both criterion of weak and strong convergence looking for any relation between them.

*Monograph

** Faculty of Sciences. Mathematics School. Director: Gilberto Arenas Díaz.

TITULO: CONVERGENCIA Y ESPACIOS DE BANACH*

AUTOR: JOHN EDWIN PARRA BUITRAGO**

PALABRAS CLAVES: Espacio vectorial, espacio métrico, espacio normado, espacio de Banach, espacio dual, sucesión, serie, funcional lineal, convergencia.

DESCRIPCIÓN

Los espacios normados son de gran importancia en el estudio del análisis matemático; no obstante cuando se adentra más allá y se miran criterios que se pueden utilizar en ellos, como son los de convergencia, se llega a otros espacios llamados espacios de Banach, que son espacios normados completos, los cuales son de gran importancia en el estudio del análisis funcional.

La convergencia es un concepto muy importante en la matemática, el cual se trabaja en algunos cursos de pregrado como el cálculo y el análisis matemático; sobre los espacios de Banach, usualmente sólo se menciona su definición y se muestran pocos ejemplos. El propósito de esta monografía es recopilar información de diferentes fuentes bibliográficas sobre conceptos y ejemplos fundamentales de Espacios de Banach y de convergencia en espacios normados, presentando las diferentes nociones de convergencia y algunas relaciones básicas entre ellas.

El presente trabajo está dividido de la siguiente forma:

En el primer capítulo se muestran los conceptos fundamentales sobre espacios vectoriales, espacios métricos y espacios normados. Los cuales son de importancia en el desarrollo de los siguientes capítulos.

El segundo capítulo habla sobre espacios de Banach, se muestra su definición y algunos ejemplos que permiten visualizar lo que es un espacio de Banach, así como también se muestra el concepto de serie en dichos espacios.

En el tercer capítulo se hace una exposición sobre espacio dual de un espacio normado, convergencia débil y fuerte, transformaciones lineales acotadas y convergencia en $B(X, Y)$. Se muestran algunas propiedades básicas y se hacen comparaciones entre los dos criterios de convergencia fuerte y débil buscando alguna relación entre ellos.

* Monografía

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Gilberto Arenas Díaz.

Contenido

Introducción	1
1. Espacios lineales, métricos y normados	2
1.1. Espacios lineales	2
1.2. Espacios métricos	5
1.3. Espacios normados	13
2. Espacios de Banach	17
2.1. Series	21
3. Espacio dual	25
3.1. Convergencia débil y convergencia fuerte	31
3.2. Transformaciones lineales acotadas	33
3.3. Convergencia en $B(X, Y)$	37
Bibliografía	43

Introducción

Los espacios normados son de gran importancia en el estudio del análisis matemático; no obstante cuando se adentra más allá y se miran criterios que se pueden utilizar en ellos, como son los de convergencia, se llega a otros espacios llamados espacios de Banach, que son espacios normados completos, los cuales son de gran importancia en el estudio del análisis funcional. La convergencia es un concepto muy importante en la matemática, el cual se trabaja en algunos cursos de pregrado como el cálculo y el análisis matemático; sobre los espacios de Banach, usualmente sólo se menciona su definición y se muestran pocos ejemplos.

El propósito de esta monografía es mostrar conceptos y ejemplos fundamentales de espacios de Banach y de convergencia en espacios normados, presentando las diferentes nociones de convergencia y algunas relaciones básicas entre ellas.

El presente trabajo está dividido de la siguiente forma:

En el primer capítulo se muestran los conceptos fundamentales sobre espacios vectoriales, espacios métricos y espacios normados. Los cuales son de importancia en el desarrollo de los siguientes capítulos.

El segundo capítulo habla sobre espacios de Banach, se muestra su definición y algunos ejemplos que permiten visualizar lo que es un espacio de Banach, así como también se muestra el concepto de serie en dichos espacios.

En el tercer capítulo se hace una exposición sobre espacio dual de un espacio normado, convergencia débil y fuerte, transformaciones lineales acotadas y convergencia en $B(X, Y)$. Se muestran algunas propiedades básicas y se hacen comparaciones entre los dos criterios de convergencia fuerte y débil buscando alguna relación entre ellos.

Capítulo 1

Espacios lineales, métricos y normados

En este capítulo se presenta un breve resumen de los conceptos básicos de espacios vectoriales, espacios métricos y espacios normados que se emplean en el desarrollo de los siguientes capítulos. En este capítulo y en los que siguen se notará \mathbb{F} como el conjunto de los números reales o complejos, cuando no se especifique si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, se entiende que las definiciones y los resultados son válidos en ambos casos.

1.1. Espacios lineales

Definición 1.1. *Un conjunto no vacío \mathcal{V} se llama **espacio lineal o vectorial** sobre \mathbb{F} , si sus elementos satisfacen los siguientes axiomas:*

- *Para cualesquiera dos elementos $x, y \in \mathcal{V}$ esta definido unívocamente un tercer elemento $z \in \mathcal{V}$, llamado **suma de ellos dos** y denotado $x + y$, de tal forma que:*

V1. $x + y = y + x$;

V2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;

V3. existe un único elemento $\theta \in \mathcal{V}$ (elemento neutro) tal que $x + \theta = x$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

V4. para todo $x \in \mathcal{V}$ existe un único elemento $(-x) \in \mathcal{V}$ tal que $x + (-x) = \theta$.

- *Para cualquier $\alpha \in \mathbb{F}$ y cualquier elemento $x \in \mathcal{V}$ esta definido un único elemento $\alpha x \in \mathcal{V}$ (producto de un escalar α por un elemento x) que cumple:*

V5. si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ para todo $x \in \mathcal{V}$;

V6. para todo $x \in \mathcal{V}$, $1x = x$.

- Las operaciones de adición y multiplicación están relacionadas entre si mediante las leyes distributivas:

V7. si α y β son escalares $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ para todo $x \in \mathcal{V}$;

V8. para todo $x, y \in \mathcal{V}$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Según sea el conjunto \mathbb{F} utilizado ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) el espacio se llama real o complejo. Los elementos de \mathbb{F} son llamados escalares y los elementos de \mathcal{V} son llamados vectores.

Ejemplo 1.2.

- (a) El conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}$ es un espacio lineal con las siguientes operaciones:

para $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de \mathbb{R}^n y $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

- (b) Las funciones continuas reales sobre un segmento $[a, b]$ con las operaciones habituales de adición y multiplicación de funciones por números constituyen el espacio lineal:

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}.$$

Utilizando las propiedades de las funciones continuas, se sigue que la suma de funciones continuas y la multiplicación de un número por una función continua, dan funciones continuas. Las otras propiedades de espacio lineal son consecuencia de las propiedades algebraicas de los números reales.

- (c) Sean V, W espacios lineales sobre \mathbb{F} . El producto cartesiano $V \times W$ es un espacio lineal con las siguientes operaciones:

$$\forall \alpha \in \mathbb{F} \text{ y } \forall (x_i, y_i) \in V \times W, \quad i = 1, 2$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1).$$

(Usando las correspondientes operaciones en V y W).

- (d) Sea S un conjunto y \mathcal{V} un espacio lineal sobre \mathbb{F} . Se denotará al conjunto de funciones $f : S \rightarrow \mathcal{V}$ por $F(S, \mathcal{V})$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{F}$ y para cualesquiera $f, g \in F(S, \mathcal{V})$ se definen funciones $f + g$ y $\alpha f \in F(S, \mathcal{V})$ así:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \text{para todo } x \in S.$$

El conjunto $F(S, \mathcal{V})$ es un espacio lineal sobre \mathbb{F} .

Definición 1.3. Sean V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{F} . Una función $T : V \rightarrow W$ se llama **transformación lineal** si, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $x, y \in V$,

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W se denota $L(V, W)$. Si en este conjunto se definen las siguientes operaciones, para todo $S, T \in L(V, W)$ y $x \in V$:

$$(S + T)(x) = S(x) + T(x), \quad (\alpha T)(x) = \alpha T(x),$$

entonces $L(V, W)$ es un espacio vectorial.

Definición 1.4. Sea \mathcal{V} un espacio lineal. Un conjunto no vacío $U \subset \mathcal{V}$ es un **subespacio lineal** de \mathcal{V} si, U con las operaciones definidas en \mathcal{V} es un espacio lineal.

Se puede demostrar que U es un subespacio lineal de \mathcal{V} si se cumple:

- (a) para cada par de elementos $x, y \in U$ se tiene que $(x + y) \in U$;
- (b) si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $x \in U$, entonces $\alpha x \in U$.

Observe que el cumplimiento de estas dos condiciones implica inmediatamente que U es un espacio lineal, nótese en particular que el vector θ pertenece a cada subespacio debido a (b): basta con elegir $\alpha = 0$; por otro lado $-x \in U$ tomando $\alpha = -1$.

Ejemplo 1.5.

(a) Cualquier subespacio $U \subset \mathcal{V}$ debe contener como mínimo el elemento θ . El conjunto $\{\theta\} \subset \mathcal{V}$ es un subespacio lineal de \mathcal{V} .

(b) Un subespacio del espacio real \mathbb{R}^3 es:

$$W = \{(x, y, z) : ax + by + cz = 0\}.$$

Sea \mathcal{V} un espacio lineal, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathcal{V}$, $k \geq 1$ un conjunto finito y $A \subset \mathcal{V}$, $A \neq \emptyset$.

(a) Una **combinación lineal** de los elementos de V es un vector de la forma:

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \in \mathcal{V}, \quad \text{donde } \alpha_i \in \mathbb{F}; \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Por ejemplo, sea $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ y $V = \{(1, 0, 2), (-1, 1, 1)\}$, entonces el vector

$$x = (1, 0, 2) + 3(-1, 1, 1) = (-2, 3, 5),$$

es una combinación lineal de los elementos de V .

(b) V es **linealmente independiente** si:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = \theta \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Por ejemplo, sea $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ y $V = \{(1, 0), (0, 1)\}$. El conjunto V es linealmente independiente, puesto que si intentamos encontrar dos escalares α_1 y α_2 tales que

$$\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) = (0, 0),$$

veremos que la única posibilidad es que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

(c) A es linealmente independiente si todo subconjunto finito de A es linealmente independiente. Si A no es linealmente independiente entonces es linealmente dependiente.

(d) El **generado** de A que se denota $\text{gen } A$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de todos los subconjuntos finitos de A .

Como ejemplo consideremos $V = \mathbb{R}^3$ y $A = \{w_1, w_2, w_3\}$, donde $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 0)$, y $w_3 = (-2, 0, 0)$. El conjunto A genera un plano (el plano $x - y$) dentro del espacio tridimensional, mientras que w_1 y w_3 , solo generan una recta.

(e) Si V es linealmente independiente y $\text{gen } V = \mathcal{V}$, entonces V es una **base** para \mathcal{V} . Por ejemplo, sea $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$. Una base para \mathcal{V} es $V = \{(0, \frac{1}{3}, 1), (1, -\frac{2}{3}, 0)\}$, puesto que V es linealmente independiente y $\text{gen } V = \mathcal{V}$. Nótese que cualquier elemento $x \in \mathcal{V}$ puede ser escrito como una combinación lineal de los elementos de V .

(f) Si \mathcal{V} tiene una base finita, es decir, su base tiene un número finito de elementos, entonces la **dimensión** de \mathcal{V} es el número de elementos en todas las bases y \mathcal{V} se llama espacio de **dimensión finita**. Si \mathcal{V} no tiene una base finita, entonces \mathcal{V} se llama espacio de **dimensión infinita**.

Notación: La dimensión de \mathcal{V} se denota $\dim \mathcal{V}$.

Como ejemplo tómese $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ y base $V = \{(1, 0), (0, 1)\}$, entonces $\dim \mathcal{V} = 2$.

1.2. Espacios métricos

Definición 1.6. Una **métrica** sobre un conjunto M es una función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface para cualesquiera $x, y, z \in M$:

$$M_1. \quad d(x, y) \geq 0;$$

$$M_2. \quad d(x, y) = 0 \iff x = y;$$

$$M_3. \quad d(x, y) = d(y, x);$$

M_4 . $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$, (*desigualdad triangular*).

Si d es una métrica sobre M , entonces la pareja (M, d) es llamada **espacio métrico**.

Proposición 1.7. (M, d) es un espacio métrico si y sólo si,

(a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(b) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Demostración. \Rightarrow] Es inmediata.

\Leftarrow] M_2 y M_4 se verifican por hipótesis.

Verifiquemos M_3 : Utilizando (b) y haciendo $z = x$, se obtiene

$$d(x, y) \leq d(x, x) + d(y, x),$$

luego $d(x, y) \leq d(y, x)$, y como $d(y, x) \leq d(y, z) + d(x, z)$, haciendo $z = y$,

$$d(y, x) \leq d(y, y) + d(x, y),$$

luego $d(y, x) \leq d(x, y)$, por tanto

$$d(x, y) = d(y, x),$$

quedando demostrado inmediatamente M_3 .

Verifiquemos ahora M_1 : Utilizando nuevamente (b) y haciendo $z = x$, se tiene

$$d(x, x) \leq d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y),$$

de donde $0 \leq 2d(x, y)$, por ende $d(x, y) \geq 0$. ■

Ejemplo 1.8.

1. *Métrica estándar sobre \mathbb{F}^k .*

Para cualquier $k \geq 1$, la función $d : \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{R}$ definida por :

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^k |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

es una métrica sobre el conjunto \mathbb{F}^k . Esta métrica es llamada la *métrica estándar sobre \mathbb{F}^k* y, a menos que se defina otra métrica sobre \mathbb{F}^k , se considerará este espacio con esta métrica. Un ejemplo de una métrica alternativa sobre \mathbb{F}^k es la función $d_1 : \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^k |x_i - y_i|.$$

Esta métrica es llamada *métrica del taxista*.

2. **La métrica usual sobre \mathbb{R}^n .**

Considérese la familia de espacios métricos (\mathbb{R}^n, d_p) , en donde

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty).$$

Si se utiliza en \mathbb{R}^n la suma corriente de n -uplas y su multiplicación por escalares, se tiene que (\mathbb{R}^n, d_p) es una familia de espacios métricos y lineales simultáneamente. Se dice que la métrica en (\mathbb{R}^n, d_p) es euclidiana cuando $p = 2$ (es el caso del ejemplo anterior con $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Es claro que con $n = 1$ toda la familia queda reducida al caso $d(x, y) = |x - y|$, que se denomina métrica ordinaria y se denota d_0 .

3. **El espacio ℓ^p de sucesiones $1 \leq p < \infty$.**

Para $1 \leq p < \infty$ se denotará con ℓ^p al espacio vectorial de todas las sucesiones $\{x_n\}$ en \mathbb{R} con la propiedad que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ son elementos de ℓ^p , entonces una métrica sobre ℓ^p se define por:

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty).$$

Si $p = \infty$, ℓ^∞ es el espacio vectorial de sucesiones acotadas con la propiedad que:

$$\sup \{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

En este caso, se define la siguiente métrica sobre ℓ^∞ por:

$$d(x, y) = \sup \{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

4. **Métrica sobre el espacio de funciones continuas.**

Para el conjunto $C[a, b]$ de funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a, b]$, se define la siguiente familia de métricas:

$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b |f - g|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty).$$

En este conjunto también se puede definir la siguiente métrica:

$$d(f, g) = \sup_{a \leq t \leq b} |g(t) - f(t)|.$$

5. **Métrica lexicográfica.**

Sea M el conjunto de todas las "palabras", cada una de las cuales consiste en un

octeto ordenado de ceros y unos: $w = (w_1, w_2, \dots, w_8)$ donde cada "dígito binario" cumple $w_k = 0$ ó 1 .

Sea $d(u, w)$ el número de lugares en los que u y w son diferentes. Por ejemplo, si $u = 01100011$ y $w = 00110101$, entonces $d(u, w) = 4$, porque u y w difieren en los dígitos segundo, cuarto, sexto y séptimo.

Veamos que cumple las propiedades de métrica:

1. Está claro que $d(u, w) \geq 0$ para todo $u, w \in M$.
2. Por definición de d , está claro que $d(u, w) = 0$ si y sólo si $u = w$, puesto que $d(u, w) = 0$ quiere decir que u y w no difieren en ningún lugar.
3. Está claro que $d(u, w) = d(w, u)$, ya que el número de lugares en que u es distinto de w es igual al número de lugares en que w es distinto de u .
4. Para probar la desigualdad triangular, se hará uso de la siguiente expresión:

$$d(u, w) = \sum_{k=1}^8 |u_k - w_k|.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} d(u, w) &= \sum_{k=1}^8 |u_k - w_k| = \sum_{k=1}^8 |u_k - v_k + v_k - w_k| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^8 (|u_k - v_k| + |v_k - w_k|) = \sum_{k=1}^8 |u_k - v_k| + \sum_{k=1}^8 |v_k - w_k| = d(u, v) + d(v, w). \end{aligned}$$

Esta métrica es un caso particular de la métrica alternativa sobre \mathbb{F}^k del Ejemplo 1.8.1, pero con $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$.

Sea (M, d) un espacio métrico y sea N un subconjunto de M . Se define:

$$d_N : N \times N \rightarrow \mathbb{R}$$

Por $d_N(x, y) = d(x, y)$ para todo $x, y \in N$.

Entonces d_N es una métrica sobre N , llamada la métrica inducida sobre N por d .

Definición 1.9. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (M, d) **converge** a $x \in M$ (o la sucesión $\{x_n\}$ es convergente) si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $d(x, x_n) < \varepsilon$, para todo $n \geq N$. En este caso el elemento $x \in M$ es llamado **límite de la sucesión** y se denota:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{ó} \quad x_n \rightarrow x.$$

Definición 1.10. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (M, d) es llamada una **sucesión de Cauchy** si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, para todo $m, n \geq N$.

Teorema 1.11. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente en un espacio métrico (M, d) , entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

La demostración del teorema se sigue inmediatamente de la desigualdad triangular.

Sea x un punto de un espacio métrico (M, d) y r un número positivo, se llama **bola abierta** de centro x y radio r al conjunto $B_x(r) = \{y \in M : d(x, y) < r\}$.

Definición 1.12. Sea (M, d) un espacio métrico y $A \subset M$.

- (a) A es **acotado** si existe un número $b > 0$ tal que $d(x, y) < b$, para todo $x, y \in A$.
- (b) A es **abierto** si para todo punto $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_x(\varepsilon) \subset A$.
- (c) A es **cerrado** si el conjunto $M - A$ es abierto.
- (d) Un punto $x \in M$ es un **punto de adherencia** de A , si para todo $\varepsilon > 0$, existe un punto $y \in A$ con $d(x, y) < \varepsilon$ (equivalentemente, si existe una sucesión $\{y_n\} \subset A$ tal que $y_n \rightarrow x$).

El conjunto de todos los puntos de adherencia de A se denota por \bar{A} .

Teorema 1.13. Sea (M, d) un espacio métrico y $A \subset M$.

- (a) A es cerrado si y sólo si $A = \bar{A}$.
- (b) A es cerrado si y sólo si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ en A que converge a $x \in M$, entonces $x \in A$.

En el análisis la idea de una “función continua” puede ser definida en términos de la métrica estándar sobre \mathbb{R} , pero la idea también puede ser extendida en general a espacios métricos.

Definición 1.14. Dados (M, d_M) , (N, d_N) espacios métricos y una función $f : M \rightarrow N$, se define que f es **continua** en un punto $x \in M$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $y \in M$:

$$d_M(x, y) < \delta \implies d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

La función f es continua (sobre M) si es continua en todo punto de M .

Teorema 1.15. Si (M, d_M) , (N, d_N) son dos espacios métricos y $f : M \rightarrow N$, entonces:

1. f es continua en el punto $x \in M$ si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}$ convergente hacia x se verifica que $f(x_n) \rightarrow f(x)$.
2. f es continua si y sólo si $f^{-1}(A)$ es un conjunto cerrado en M , siendo A cualquier conjunto cerrado de N .

Demostración. 1. \Rightarrow] como f es continua en $x \in M$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para $y \in M$ se tiene:

$$d_M(x, y) < \delta \implies d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Ahora como $\{x_n\}$ converge hacia x , para este $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: $d_M(x, x_n) < \delta$, para $n \geq N$, pero esto implica que $d_N(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$, para todo $n \geq N$. Por lo tanto $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

\Leftarrow] Supóngase que f no es continua en $x \in M$, entonces existen $\varepsilon > 0$ y $y \in M$, tales que para todo $\delta > 0$:

$$d_M(x, y) < \delta \text{ y } d_N(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$$

considérese ahora una sucesión $\{\delta_n\}$ de números reales tal que $\delta_n \rightarrow 0$. Para cada n , se selecciona el punto $y \in M$ que satisface $d_N(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$ y llámese y_n . Evidentemente $y_n \rightarrow x$, pero $f(y_n) \not\rightarrow f(x)$, puesto que la distancia entre $f(y_n)$ y $f(x)$ nunca es menor que ε para cualquier n .

2. \Rightarrow] Sea $F = f^{-1}(A)$ y sea $x \in \overline{F} = \overline{(f^{-1}(A))}$, puesto que $x \in \overline{F}$, entonces por la Definición 1.12(d) existe una sucesión $\{y_n\} \subset F$ tal que $y_n \rightarrow x$. Como f es continua, por la parte (1) del Teorema 1.15 se tiene que $f(y_n) \rightarrow f(x)$. Cada uno de los términos $f(y_n)$ deben pertenecer a A , lo que implica que $f(x) \in \overline{A}$. Pero A es cerrado, es decir $A = \overline{A}$, así que $f(x) \in A$, lo que implica que $x \in f^{-1}(A)$ y por consiguiente $f^{-1}(A) = \overline{(f^{-1}(A))}$, es decir, que $f^{-1}(A)$ es cerrado.

\Leftarrow] Dado $\varepsilon > 0$ y para todo $x \in M$, se tiene que $B_{f(x)}(\varepsilon)$ es abierto, lo que implica que $(B_{f(x)}(\varepsilon))^c$ es cerrado en N . Por hipótesis $f^{-1}((B_{f(x)}(\varepsilon))^c)$ es cerrado, además

$$f^{-1}((B_{f(x)}(\varepsilon))^c) = [f^{-1}(B_{f(x)}(\varepsilon))]^c.$$

Tomando el complemento de $[f^{-1}(B_{f(x)}(\varepsilon))]^c$, se afirma que $f^{-1}(B_{f(x)}(\varepsilon))$ es abierto, y además $x \in f^{-1}(B_{f(x)}(\varepsilon))$, por lo que, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_x(\delta) \subset f^{-1}(B_{f(x)}(\varepsilon)),$$

lo que implica que $f(B_x(\delta)) \subset B_{f(x)}(\varepsilon)$, es decir, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$f(B_x(\delta)) \subset B_{f(x)}(\varepsilon).$$

La condición $f(B_x(\delta)) \subset B_{f(x)}(\varepsilon)$ significa: si $y \in B_x(\delta)$, entonces $f(y) \in B_{f(x)}(\varepsilon)$, es decir, si $d_M(x, y) < \delta$, entonces $d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Lo que quiere decir que f es continua. ■

Definición 1.16. Un espacio métrico (M, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy en (M, d) es convergente.

Ejemplo 1.17. Sea M un conjunto arbitrario en el que se ha definido la siguiente métrica:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y; \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

La única forma de definir una sucesión de Cauchy en este espacio es que exista algún entero N tal que $x_N = x_{N+1} = \dots$, por tanto (M, d) es completo.

Teorema 1.18. (Caracterización de convergencia en \mathbb{R}^k). Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^k$, donde $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k)$ para todo n . Entonces

$$x_n \rightarrow x = (x^1, x^2, \dots, x^k) \iff x_n^i \rightarrow x^i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Es decir, $x_n \rightarrow x$ si y solo si existe convergencia componente a componente.

Demostración. Vamos a considerar la métrica sobre \mathbb{R}^k como: $d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^k |x^i - y^i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

\Rightarrow] $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon$. Como $|x_n^i - x^i| \leq d(x_n, x)$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$, tenemos

$$|x_n^i - x^i| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N$$

esto implica que $x_n^i \rightarrow x^i$.

\Leftarrow] Sea $\varepsilon > 0$. Escójase $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ e $i = 1, 2, \dots, k$

$$|x_n^i - x^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}.$$

Tenemos que

$$d(x_n, x) = \left(\sum_{i=1}^k |x_n^i - x^i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

para $n \geq N$, así $x_n \rightarrow x$. ■

Teorema 1.19. \mathbb{R} con la métrica estándar es completo.

La demostración de este teorema se muestra en el Ejemplo 2.2.1

Teorema 1.20. Para cada $k > 1$, \mathbb{R}^k con la métrica estándar es completo.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy de puntos de \mathbb{R}^k , como $\{x_n\}$ es de Cauchy entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{i=1}^k |x_m^i - x_n^i|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{para todo } m, n \geq N.$$

Como $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k)$, en este caso para cada $i = 1, 2, \dots, k$, se obtendrá la desigualdad correspondiente a la coordenada x_n^i :

$$|x_m^i - x_n^i| < \varepsilon \quad \text{para todo } m, n \geq N,$$

por consiguiente, $\{x_n^i\}$ es una sucesión de Cauchy de puntos de \mathbb{R} y como \mathbb{R} es completo por el Teorema 1.19 $\{x_n^i\}$ converge.

Sea ahora $x^i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i$ y $x = (x^1, x^2, \dots, x^k)$. Es claro entonces por el Teorema 1.18 que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, es decir $x_n \rightarrow x$. ■

Definición 1.21. Sea (M, d) un espacio métrico y $A \subset M$. A es **compacto** si toda sucesión $\{x_n\}$ en A contiene una subsucesión que converge a un elemento de A .

Teorema 1.22. Si (M, d) es un espacio métrico y $A \subset M$, entonces:

1. Si M es completo, entonces A es completo si y sólo si es cerrado.
2. Si A es compacto, entonces es cerrado y acotado.

Si el conjunto M es compacto entonces decimos que (M, d) es un espacio métrico compacto.

La demostración del teorema anterior se puede encontrar en [1].

Dado un espacio métrico (M, d) , se denotará $C(M)$ al conjunto de funciones continuas $f : M \rightarrow \mathbb{F}$.

Definición 1.23. Supongamos que (M, d) es un espacio métrico compacto, $\{f_n\}$ es una sucesión en $C(M)$ y $f : M \rightarrow \mathbb{F}$ una función.

(a) $\{f_n\}$ **converge puntualmente** a f si $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ para todo $x \in M$.

(b) $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a f si $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\} \rightarrow 0$.

Veamos que, convergencia uniforme implica convergencia puntual, pero no inversamente: Si $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\} \rightarrow 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\} \leq \varepsilon$, entonces $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N$ y para todo $x \in M$, esto quiere decir que $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ para todo $x \in M$ es decir, $\{f_n\}$ converge puntualmente a f .

El siguiente ejemplo muestra que la convergencia puntual no implica la convergencia uniforme :

Sea $f_n(x) = x^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0, 1]$, si $x = 1$, $f_n(1) = 1^n = 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0^n = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$.

Si $0 < x < 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, de esto se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1; \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

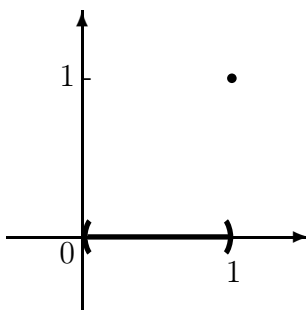


Figura 1.

Lo que quiere decir que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f .

Ahora sea $f(x) = 0$, si $0 < x < 1$ y $f(1) = 1$ entonces

$$\sup \{|f_n(x) - f(x)| : 0 < x < 1\} = \sup \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1; \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$, puesto que $\sup \{|f_n(x) - f(x)| : 0 < x < 1\}$ no converge a 0, entonces $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f en $[0, 1]$.

1.3. Espacios normados

Definición 1.24. Sea X un espacio lineal sobre \mathbb{F} . Una **norma** sobre X es una función:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

que satisface los siguientes axiomas:

N1. $\|x\| \geq 0$.

N2. $\|x\| = 0 \iff x = \theta$.

N3. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

N4. $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espacio lineal X sobre el cual esta definida una métrica es llamado **espacio lineal normado** o simplemente **espacio normado**.

Ejemplo 1.25.

1. Si $1 \leq p < \infty$ entonces $\|\{x_n\}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ es una norma sobre ℓ^p llamada la norma estándar sobre ℓ^p .

Para $p = \infty$, ℓ^p es el espacio vectorial de sucesiones acotadas que satisfacen:

$$\sup \{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

En este caso la norma se define de la siguiente forma:

$$\|\{x_n\}\|_{\infty} = \sup \{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Esta norma es llamada norma estándar sobre ℓ^{∞} .

2. En el espacio $C[a, b]$ de funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$ se define la norma de la siguiente manera:

$$\|f\| = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

N1. $\|f\| = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)| \geq 0$, ya que $|f(t)| \geq 0$.

N2. $\|f\| = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)| = 0$ entonces, $|f(t)| = 0$ para todo $t \in [a, b]$, así $f(t) = f = 0$.

Ahora sea $f(t) = f = 0$ para todo $t \in [a, b]$ entonces, $\|f\| = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)| = 0$.

N3. Sea $\alpha \in \mathbb{F}$, $\|\alpha f\| = \sup_{a \leq t \leq b} |\alpha f(t)| = |\alpha| \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)| = |\alpha| \|f\|$.

N4. Sean $f, g \in C[a, b]$ entonces,

$$\|f + g\| = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)| + \sup_{a \leq t \leq b} |g(t)| = \|f\| + \|g\|.$$

Esta norma es llamada norma estándar sobre $C[a, b]$.

3. Sean X, Y espacios vectoriales sobre \mathbb{F} y sea $Z = X \times Y$ el producto cartesiano entre X y Y .

Si $\|\cdot\|_1$ es una norma sobre X y $\|\cdot\|_2$ es una norma sobre Y entonces $\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$ define una norma sobre Z :

N1. $\|(x, y)\| \geq 0$.

$$\|x\|_1 \geq 0 \quad y \quad \|y\|_2 \geq 0 \implies \|x\|_1 + \|y\|_2 \geq 0.$$

N2. $\|(x, y)\| = 0 \iff (x, y) = (\theta, \theta)$.

$$\begin{aligned} \|(x, y)\| = 0 &\iff \|x\|_1 + \|y\|_2 = 0 \iff \|x\|_1 = 0 \quad y \quad \|y\|_2 = 0 \iff \\ &\iff x = \theta \quad y \quad y = \theta \iff (x, y) = (\theta, \theta). \end{aligned}$$

- N3. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall (x, y) \in X \times Y : \|\alpha(x, y)\| = |\alpha|\|(x, y)\|.$
 $\|\alpha(x, y)\| = \|(\alpha x, \alpha y)\| = \|\alpha x\|_1 + \|\alpha y\|_2 = |\alpha|\|x\|_1 + |\alpha|\|y\|_2 =$
 $= |\alpha|(\|x\|_1 + \|y\|_2) = |\alpha|\|(x, y)\|.$
- N4. $\forall (x, y), (w, z) \in X \times Y : \|(x, y) + (w, z)\| \leq \|(x, y)\| + \|(w, z)\|.$
 $\|(x, y) + (w, z)\| = \|(x + w, y + z)\| = \|x + w\|_1 + \|y + z\|_2 \leq$
 $\leq \|x\|_1 + \|w\|_1 + \|y\|_2 + \|z\|_2 = (\|x\|_1 + \|y\|_2) + (\|w\|_1 + \|z\|_2) = \|(x, y)\| + \|(w, z)\|.$

Todo espacio lineal normado se convierte en métrico mediante la fórmula $d(x, y) = \|x - y\|$, como se prueba trivialmente, esta métrica es llamada la métrica asociada con la norma $\|\cdot\|$.

Teorema 1.26. *Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{F} con norma $\|\cdot\|$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X que converge a x en X y $y \in X$, entonces:*

(a) $\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|;$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|.$

Demostración. (a): (i) $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ entonces, $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$

(ii) $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$ pero

$$\|y - x\| = \|-1(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\|,$$

entonces

$$\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\| \implies -\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|,$$

de (i) y (ii) se concluye que $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ por lo tanto, $\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$

(b): Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ entonces, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$, si $n \geq N$.

Además $\left| \|x_n\| - \|x\| \right| < \|x_n - x\|$, luego $\left| \|x_n\| - \|x\| \right| < \varepsilon$, si $n \geq N$, por lo tanto $\|x_n\| \rightarrow \|x\|.$ ■

Definición 1.27. *Sea X un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ dos normas sobre X , se dice que la norma $\|\cdot\|_2$ es **equivalente** a la norma $\|\cdot\|_1$ si existen $M, m > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tiene:*

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1.$$

Teorema 1.28. *Sea X un espacio vectorial y $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ dos normas equivalentes sobre X . Sean d_1, d_2 métricas definidas por $d(x, y) = \|x - y\|$ y $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$, sea $\{x_n\}$ una sucesión en X :*

(a) $\{x_n\}$ converge a x en (X, d) si y sólo si $\{x_n\}$ converge a x en (X, d_1) .

(b) $\{x_n\}$ es de Cauchy en (X, d) si y sólo si $\{x_n\}$ es de Cauchy en (X, d_1) .

(c) (X, d) es completo si y sólo si (X, d_1) es completo.

La demostración de el teorema anterior se puede encontrar en [3].

Teorema 1.29. *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita con norma $\|\cdot\|$, base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ y con otra norma definida de la siguiente manera:*

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right\|_1 = \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

entonces la norma $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes.

Corolario 1.30. *Si $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_2$ son cualesquiera dos normas sobre un espacio vectorial X de dimensión finita, entonces son equivalentes.*

Lema 1.31. *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{F} y sea $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ una base para X . Si $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ es la norma sobre X definida de la siguiente manera:*

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right\| = \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

entonces X es un espacio métrico completo, con la métrica asociada con la norma.

Corolario 1.32. *Si $\|\cdot\|$ es cualquier norma sobre un espacio X de dimensión finita entonces X es un espacio métrico completo.*

Corolario 1.33. *Si Y es un subespacio de dimensión finita de un espacio vectorial normado X , entonces Y es cerrado.*

La demostración del teorema anterior, corolarios y lema se pueden encontrar en [3].

Capítulo 2

Espacios de Banach

En este capítulo se presenta la definición y algunos ejemplos de Espacios de Banach, en la mayoría de los casos sólo se nombrará el espacio y la norma, sin comprobar que son efectivamente de Banach. También se expondrá algunas propiedades de estos espacios y se hará una breve introducción de las series en los espacios de Banach.

Según se observó en el capítulo anterior, en cualquier espacio lineal normado puede definirse una métrica de la siguiente forma: si x, y son elementos cualesquiera del espacio, podemos tomar como distancia entre ellos,

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Teniendo en cuenta esta métrica, la cual es llamada, la métrica asociada con la norma $\|\cdot\|$, podemos considerar al espacio lineal normado como un espacio métrico e interesa comprobar si tal espacio es completo o no; lo anterior nos conduce a la siguiente definición:

Definición 2.1. *Un espacio de Banach es un espacio lineal normado el cual es completo bajo la métrica asociada con la norma.*

Como ejemplo de espacio lineal normado no completo, considérese el espacio lineal \mathbb{Q} con norma

$$\|x\| = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Ahora sea $\{x_n\} = \{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ una sucesión de Cauchy en \mathbb{Q} , en donde se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

pero e no pertenece a \mathbb{Q} , lo que quiere decir que \mathbb{Q} no es completo y por lo tanto no es de Banach.

Un espacio lineal normado completo lo podemos ver en el Teorema 1.20 donde se observa que \mathbb{R}^n es completo con la métrica estándar, que es la misma asociada con la norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dado un espacio lineal particular y una métrica sobre este espacio, no siempre puede definirse una norma que coincida (en el sentido definido en un espacio de Banach) con la métrica inicial del espacio.

Por ejemplo, considérese el espacio lineal formado por todas las sucesiones infinitas de números complejos, sobre el cuerpo de los números complejos, definiéndose las operaciones lineales punto a punto y con la distancia entre dos puntos cualesquiera del espacio,

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \quad \text{e} \quad y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$$

definida así:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{1 + |\alpha_i - \beta_i|}$$

Puede comprobarse que se trata efectivamente de una métrica.

Sabemos de antemano que cualquier norma verifica:

$$\|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x - y\|,$$

pero se ve fácilmente que, si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$d(\lambda x, \lambda y) \neq |\lambda| d(x, y),$$

lo cual impide que se pueda definir una norma en este espacio que conduzca a esta métrica.

Ejemplo 2.2 (Espacios de Banach).

1. El espacio vectorial \mathbb{R} , es un espacio de Banach, si en él definimos la siguiente norma:

$$\|x\| = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En efecto, sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de \mathbb{R} , por lo que se sigue que $\{x_n\}$ es acotada. Por lo tanto existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ que converge a $x \in \mathbb{R}$.

Puesto que $\{x_n\}$ es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ entonces

$$d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado como $\{x_{n_k}\}$ converge a x , existe un número natural $N_0 \geq N$ que pertenece a $\{n_1, n_2, \dots\}$ tal que

$$d(x_{N_0}, x) = |x_{N_0} - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puesto que $N_0 \geq N$, de $d(x_n, x_m)$ con $m = N_0$ se sigue que

$$|x_n - x_{N_0}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } n \geq N.$$

Por lo tanto, si $n \geq N$ se tiene

$$|x_n - x| = |(x_n - x_{N_0}) + (x_{N_0} - x)| \leq |x_n - x_{N_0}| + |x_{N_0} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto quiere decir que $\{x_n\}$ converge a x . Por lo que se tiene que \mathbb{R} es un espacio de Banach.

2. El espacio vectorial \mathbb{R}^k , donde $k = 1, 2, 3, \dots$, será un espacio de Banach, si se define la norma para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^k$ por,

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

Este espacio también será un espacio de Banach si en él definimos las siguientes dos normas:

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1).$$

$$\|x\|_\infty = \sup \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}, \text{ para } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^k.$$

Notemos que $\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$, ya que como $p \geq 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ y $x \in \mathbb{R}^k$, entonces se tiene

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty;$$

como se puede verificar fácilmente.

3. Considerando el espacio vectorial $C[a, b]$ y tomando como norma de $f \in C[a, b]$ la siguiente:

$$\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

entonces $C[a, b]$ es un espacio de Banach.

Para poder comprobar que $C[a, b]$ es completo respecto a la norma anterior, tomemos una sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ de elementos de $C[a, b]$. Como se trata de una sucesión de Cauchy respecto de la norma del supremo entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, debe existir un $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N$ implica que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Esto significa según la condición de Cauchy para la convergencia uniforme (ver en [1]) que $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia alguna función f , y por el teorema 9.2 en [1] la función f debe ser continua. Así toda sucesión de Cauchy en $C[a, b]$ converge, por lo tanto $C[a, b]$ es un espacio de Banach.

4. Sea el espacio ℓ_p , con $p \geq 1$ un número real fijo. Un elemento de ℓ_p , por definición es una sucesión

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

tal que $x_n \in \mathbb{F}$ para todo n y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Tomando como norma para x

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En la demostración de la desigualdad triangular, para probar que es una norma, se utiliza la desigualdad de Minkowski para sumas infinitas.

El espacio ℓ_p con la norma anteriormente mencionada es un espacio de Banach, pero si en este espacio definimos la siguiente norma:

$$\|x\|_{\infty} = \sup_n |x_n|,$$

entonces también será un espacio de Banach.

Teorema 2.3. *Todo espacio vectorial normado de dimensión finita es un espacio de Banach.*

La demostración es un resultado inmediato del Corolario 1.32.

Teorema 2.4. *Si X es un espacio de Banach y Y es un subespacio lineal de X , entonces, Y es un espacio de Banach si y sólo si Y es cerrado en X .*

Demostración. Y es un espacio de Banach si y sólo si Y es completo.

Ahora por el Teorema 1.22 se tiene que un subconjunto de un espacio métrico completo es completo si y sólo si es cerrado. Por consiguiente Y es un espacio de Banach si y sólo si Y es cerrado en X . ■

Proposición 2.5. *Sean X un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_1$ y Y un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_2$, entonces, $Z = X \times Y$ con norma $\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Si $z_1 = (z_1^1, z_1^2)$, $z_2 = (z_2^1, z_2^2) \in Z$ entonces, la distancia entre z_1 y z_2 se define de la siguiente manera:

$d(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\| = \|(z_1^1, z_1^2) - (z_2^1, z_2^2)\| = \|(z_1^1 - z_2^1, z_1^2 - z_2^2)\| = \|z_1^1 - z_2^1\|_1 + \|z_1^2 - z_2^2\|_2$.
Sea $\{z_n\}$ una sucesión de Cauchy en Z entonces, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(z_n, z_m) < \varepsilon \quad \text{para todo } m, n \geq N.$$

Como $z_n \in Z$, para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces,

$$z_n = (z_n^1, z_n^2) \text{ y } d(z_n, z_m) = \|z_n - z_m\| = \|z_n^1 - z_m^1\|_1 + \|z_n^2 - z_m^2\|_2 < \varepsilon.$$

$$\|z_n^1 - z_m^1\|_1 < \varepsilon \text{ y } \|z_n^2 - z_m^2\|_2 < \varepsilon, \text{ para todo } m, n \geq N,$$

entonces, $\{z_n^1\}$ es una sucesión de Cauchy en X y $\{z_n^2\}$ es una sucesión de Cauchy en Y . Como X y Y son de Banach, $\{z_n^1\}$ y $\{z_n^2\}$ convergen en X, Y respectivamente es decir, para todo $\varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(z_n^1, z^1) = \|z_n^1 - z^1\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } d(z_n^2, z^2) = \|z_n^2 - z^2\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n \geq N_0,$$

entonces,

$$\|z_n^1 - z^1\|_1 + \|z_n^2 - z^2\|_2 < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N_0$$

pero,

$$d(z_n, z) = \|z_n - z\| = \|(z_n^1, z_n^2) - (z^1, z^2)\| = \|(z_n^1 - z^1, z_n^2 - z^2)\| = \|z_n^1 - z^1\|_1 + \|z_n^2 - z^2\|_2$$

es decir, $\{z_n\}$ es de Cauchy y $z_n \rightarrow z$, por lo tanto Z es un espacio de Banach. ■

2.1. Series

Un par de sucesiones $\{x_n\}, \{s_n\}$ en un espacio normado X se llama **serie** infinita si sus elementos x_n, s_n estan relacionados de la siguiente forma:

$$s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n, \text{ para cada } n = 0, 1, 2, \dots$$

De la igualdad anterior se puede ver que $x_0 = s_0$ y $x_n = s_n - s_{n-1}$ para $n \geq 1$; x_n se denomina término n -ésimo y s_n n -ésima suma parcial de la serie.

Los símbolos empleados para definir la serie son:

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n + \dots, \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Si no hay peligro de confusión se escribirá $\sum x_n$ en vez de $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

Se dice que una serie converge o diverge según la sucesión $\{s_n\}$ sea convergente o divergente es decir, una serie se dice que converge hacia s , si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$; s se llama entonces **suma** de la serie y se escribe:

$$s = x_0 + x_1 + \dots + x_n + \dots \quad \text{ó} \quad s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n,$$

pero debe entenderse claramente que s es el límite de una sucesión de sumas y que no se obtiene simplemente por adición.

A la expresión $r_n = s - s_n$ se denomina resto n -ésimo de la serie y es la suma de la serie que tiene como término k -ésimo x_{n+k} ; además se puede demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

Recordemos que dadas dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ en un espacio normado X y $\alpha \in \mathbb{R}$:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Teorema 2.6. Sean $x = \sum x_n$ y $x' = \sum x'_n$ dos series convergentes. Entonces para cada par de escalares α y β , la serie $\sum (\alpha x_n + \beta x'_n)$ converge hacia la suma $(\alpha x + \beta x')$.

Demostración. Como $\sum x_n$ y $\sum x'_n$ convergen a x, x' respectivamente entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = x'.$$

También se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha s_n = \alpha x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta s'_n = \beta x'$, para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Además $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha s_n + \beta s'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta s'_n = \alpha x + \beta x'$, por lo que la serie $\sum (\alpha x_n + \beta x'_n)$ converge a $\alpha x + \beta x'$. ■

Teorema 2.7 (Criterio de Cauchy). Si la serie $\sum x_n$ converge entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que para $n \geq N$ y $p \geq 0$, se tiene que

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|x_{n+1} + \dots + x_{n+p}\| < \varepsilon.$$

Recíprocamente, si esta condición se satisface y si el espacio X es completo entonces, la serie $\sum x_n$ converge.

Demostración. Sea $\sum x_n$ convergente a s entonces, la sucesión $\{s_n\}$ converge hacia s , es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(s_n, s) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Además,

$$\begin{aligned} s_n &= x_0 + x_1 + \dots + x_n, \quad \text{para cada } n = 0, 1, 2, \dots \\ s_{n+p} &= x_0 + x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}, \quad p \geq 0. \\ s_{n+p} - s_n &= x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$d(s_{n+p}, s_n) = \|s_{n+p} - s_n\| \leq d(s_{n+p}, s) + d(s_n, s) = \|s_{n+p} - s\| + \|s_n - s\| < \varepsilon,$$

entonces, $\|s_{n+p} - s_n\| = \|x_{n+1} + \dots + x_{n+p}\| < \varepsilon$, para todo $n \geq N$ y $p \geq 0$.

Recíprocamente, si esta condición se satisface entonces, $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y puesto que X es completo entonces, $\{s_n\}$ converge, es decir, la serie $\sum x_n$ converge. ■

Proposición 2.8. Si $\sum x_n$ converge entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0$.

Demostración. Sea $s = \sum x_n$, es decir, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Como

$$s_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n \quad \text{y} \quad s_{n-1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1},$$

entonces,

$$s_n - s_{n-1} = x_n,$$

ahora, sea $n - 1 = k$, así $n = k + 1$ entonces $s_{k+1} - s_k = x_{k+1}$ y por el Teorema 2.7 se tiene que, para cada $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq N$ y $p \geq 0$, en este caso $p = 1$, se tiene que $\|s_{k+1} - s_k\| = \|x_{k+1} - 0\| < \varepsilon$, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}). \quad \blacksquare$$

En un espacio de Banach X , se dice que la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente si la serie real $\sum \|x_n\|$ es convergente.

Teorema 2.9. Un espacio normado X es de Banach sí y sólo si toda serie $\sum x_n$ en X absolutamente convergente es convergente.

Demostración. \Rightarrow] Puesto que $\sum x_n$ es absolutamente convergente, se tiene que $\sum \|x_n\|$ es convergente, por lo que para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ y para cada $p \geq 0$ se tiene que,

$$|s'_{n+p} - s'_n| = \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\| < \varepsilon,$$

siendo $s'_n = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$, para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, por tanto,

$$\|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}\| \leq \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\| < \varepsilon,$$

y por el criterio de Cauchy $\sum x_n$ converge.

\Leftarrow] Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X .

Elijendo $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_1$ se tenga

$$\|x_n - x_{n_1}\| < \frac{1}{2},$$

luego se elije $n_2 > n_1$, tal que para $n \geq n_2$ se tenga

$$\|x_n - x_{n_2}\| < \frac{1}{2^2}$$

repetiendo indefinidamente este procedimiento se genera una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

por lo que la serie $\sum (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ es absolutamente convergente, y por tanto converge.

Ahora sea

$$x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (x_{n_{N+1}} - x_{n_1}),$$

entonces $x + x_{n_1} = \lim_{N \rightarrow \infty} x_{n_N}$ y de aquí $\{x_n\}$ converge. Como la sucesión $\{x_n\}$ de Cauchy converge entonces, X es de Banach. ■

Capítulo 3

Espacio dual

En este capítulo primero se introducirá el concepto de espacio dual, convergencia fuerte y débil, y transformaciones lineales acotadas. Se buscarán relaciones entre los criterios de convergencia fuerte y débil, y se observará si lo mismo ocurre con las transformaciones lineales acotadas.

Antes de hablar sobre espacio dual, se hará un pequeño recuento sobre *funcionales lineales* y algunas de sus características, ya que estos son la base fundamental de este espacio.

Una función $f : X \rightarrow \mathbb{F}$, donde X es un espacio vectorial sobre \mathbb{F} , que tiene la propiedad:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

para cualquier par de escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y de vectores $x, y \in X$, se llama **funcional lineal**.

Un funcional lineal f sobre un espacio vectorial normado X se llama **acotado** si existe una constante real $k > 0$, tal que, para toda $x \in X$,

$$|f(x)| \leq k\|x\|.$$

Teorema 3.1. *Sea f un funcional lineal sobre un espacio vectorial normado X . Si f es continuo en un punto $x_0 \in X$ entonces, es continuo en todo X .*

Demostración. Puesto que f es continuo en x_0 entonces, si $x_n \rightarrow x_0$, se tiene que $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Sea $\{y_n\} \in X$, con $y_n \rightarrow y$.

$$f(y_n) = f(y_n - y + x_0 + y - x_0) = f(y_n - y + x_0) + f(y) - f(x_0).$$

Como $y_n - y + x_0 \rightarrow x_0$, $f(y_n - y + x_0) \rightarrow f(x_0)$ así, $f(y_n) \rightarrow f(y)$, por tanto f es continuo en todo X . ■

Teorema 3.2. *Sea f un funcional lineal sobre un espacio vectorial normado X , f es acotado si y sólo si es continuo.*

Demostración. \Rightarrow] Por hipótesis f es acotado, lo que quiere decir que existe una constante real $k > 0$, tal que, para todo $x \in X$,

$$|f(x)| \leq k\|x\|.$$

Por otra parte dado $\varepsilon > 0$ y tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ se tiene que si

$$\|x - 0\| < \delta,$$

entonces

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon,$$

lo que quiere decir que f es continuo en 0 y por el Teorema 3.1 es continuo en todo X .

\Leftarrow] Supóngase que f es no acotado, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que

$$|f(x_n)| > n\|x_n\|.$$

Sea ahora

$$y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|},$$

luego $\|y_n\| = \frac{1}{n}$, claramente $y_n \rightarrow 0$. Como f es continuo, $f(y_n) \rightarrow f(0)$ y puesto que cualquier funcional lineal aplica el vector cero en el vector cero, se tiene que $f(0) = 0$ y así $f(y_n) \rightarrow 0$.

Ahora,

$$|f(y_n)| = \frac{1}{n\|x_n\|} |f(x_n)| \text{ y } |f(x_n)| > n\|x_n\|,$$

lo cual implica que $|f(y_n)| > 1$, lo que contradice que $f(y_n)$ converge hacia 0, esto lleva a la conclusión de que f es acotado. ■

Sean f, g dos funcionales lineales acotados sobre el espacio vectorial normado X . La suma de ellos $f + g$ es el funcional lineal definido por: $(f + g)(x) =: f(x) + g(x)$, $\forall x \in X$.

El producto αf del funcional lineal f por el escalar α es el funcional definido por: $(\alpha f)(x) =: \alpha f(x)$, $\forall x \in X$.

Como se puede notar no es nada complicado comprobar que el conjunto de todos los funcionales lineales acotados, definidos sobre un espacio vectorial normado X , forma un espacio vectorial.

Para los funcionales lineales acotados, definidos sobre un espacio vectorial normado X , se introduce el concepto de norma tomando

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Efectivamente es una norma ya que:

N1. $\|f\| \geq 0$ puesto que $\|f\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq 0$;

N2. $\|f\| = 0 = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \iff |f(x)| = 0 \iff f = 0$;

N3. para todo $f \in X$ y para todo $\alpha \in \mathbb{F}$, $\|\alpha f\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|\alpha f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|\alpha| |f(x)|}{\|x\|} =$
 $= |\alpha| \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = |\alpha| \|f\|$;

N4. para todo $f, g \in X$, $\|f + g\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)+g(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} + \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|g(x)|}{\|x\|} =$
 $= \|f\| + \|g\|$.

Este espacio formado por todos los funcionales lineales acotados definidos sobre el espacio vectorial normado X es llamado **Espacio Dual** al espacio normado X .

La notación empleada para este espacio es:

$$X^*, \tilde{X} \text{ ó } X'.$$

Teorema 3.3. *Todos los funcionales lineales definidos sobre un espacio vectorial de dimensión finita X son acotados.*

Demostración. Sean $\|x\|_0 = \max_i |\alpha_i|$, f un funcional lineal sobre X y $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base para X , cada vector $x \in X$ se puede escribir de la forma:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \text{ para } \alpha_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Como f es un funcional lineal, se tiene que

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i),$$

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) \right| = |\alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n)| \leq |\alpha_1 f(e_1)| + \dots + |\alpha_n f(e_n)| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i f(e_i)| =$$

$$= \sum_{i=1}^n |\alpha_i| |f(e_i)| \leq \|x\|_0 \sum_{i=1}^n |f(e_i)|.$$

Escogiendo como constante $k = \sum_{i=1}^n |f(e_i)|$, se observa que

$$|f(x)| \leq k \|x\|_0,$$

esto quiere decir que f es acotada respecto de $\|\cdot\|_0$, y por el Corolario 1.30 también respecto de cualquier norma sobre X . ■

Teorema 3.4. X' es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en X' , esto es, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \text{ para todo } m, n \geq N.$$

De esto se obtiene que para todo $x \in X$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|,$$

esto quiere decir que para cualquier $x \in X$ la sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ converge, ya que, $f_n(x) \in \mathbb{F}$ para todo $x \in X$. Supóngase

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Se verá a continuación que efectivamente f es un funcional lineal acotado.

Primero se mostrará la linealidad:

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(\alpha x) + f_n(\beta y)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha f_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta f_n(y) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Para todo $p \geq 0$ y un N adecuado, se ve que

$$\|f_{n+p} - f_n\| < 1 \text{ para todo } n \geq N,$$

como

$$\| \|f_{n+p}\| - \|f_n\| \| \leq \|f_{n+p} - f_n\|$$

entonces,

$$\|f_{n+p}\| < \|f_n\| + 1$$

por tanto,

$$|f_{n+p}(x)| < (\|f_n\| + 1)\|x\|.$$

Aplicando el límite cuando $p \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |f_{n+p}(x)| = |f(x)| \leq (\|f_n\| + 1)\|x\|,$$

esto quiere decir que la funcional f es acotada.

Ahora se debe demostrar que $\{f_n\}$ converge hacia f . Puesto que $\{f_n\}$ es de Cauchy, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \text{ para } m, n \geq N.$$

De donde se tiene que para todo $x \in X$, $x \neq 0$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \|x\|;$$

entonces,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)| \leq \varepsilon \|x\|,$$

de aquí,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \|x\| \text{ para todo } x \in X, x \neq 0,$$

por lo que,

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{\|x\|} \leq \varepsilon, \text{ para todo } x \in X. \quad \blacksquare$$

Sea X el espacio lineal de dimensión n (real o complejo). Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de X , entonces, cualquier vector $x \in X$ se puede escribir de la forma:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

Si f es un funcional lineal sobre X ,

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = f(\alpha_1 e_1) + \dots + f(\alpha_n e_n) = \\ &= \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i). \end{aligned}$$

Defínanse las funcionales lineales f_1, f_2, \dots, f_n , tomando

$$f_j(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Es claro que

$$f_j(x) = f_j\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i)\right) = \alpha_j;$$

por eso, se puede escribir

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f(e_i) f_i(x).$$

Evidentemente estas funcionales son linealmente independientes, por consiguiente, las funcionales lineales f_1, f_2, \dots, f_n forman una base en el espacio X' , es decir, X' es un espacio lineal de dimensión n .

Teorema 3.5. *Sea f un funcional lineal acotado definido sobre el subespacio M del espacio vectorial normado X . Entonces existe un funcional lineal acotado F , definido sobre el espacio total, que extiende f y que tiene la misma norma que f .*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [2]

Teorema 3.6. *Sea x_0 un vector no nulo del espacio vectorial normado X . Entonces existe un funcional lineal acotado F , definido en todo el espacio, tal que:*

$$\|F\| = 1 \quad y \quad F(x_0) = \|x_0\|.$$

Demostración. Considérese $M = \text{gen}\{x_0\}$ que consta de todos los múltiplos escalares de x_0 , y el funcional f , definido sobre M de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathbb{F} \\ \alpha x_0 &\longmapsto \alpha \|x_0\|, \end{aligned}$$

en efecto f es un funcional lineal con la propiedad de que $f(x_0) = \|x_0\|$, ya que, dados dos elementos x, y en M y dos escalares β_0 y β_1 se tiene que

$$\begin{aligned} f(\beta_0 x + \beta_1 y) &= f((\beta_0 \alpha_0 + \beta_1 \alpha_1)x_0) = (\beta_0 \alpha_0 + \beta_1 \alpha_1)\|x_0\| = \\ &= (\beta_0 \alpha_0 \|x_0\| + \beta_1 \alpha_1 \|x_0\|) = \beta_0 f(x) + \beta_1 f(y). \end{aligned}$$

Además, f es acotado ya que para todo $x \in M$,

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|, \quad x = \alpha x_0.$$

De aquí se sigue que $\|f\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = 1$.

Ahora aplicando el Teorema 3.5 se asegura la existencia de un funcional lineal acotado F , definido en todo el espacio, que extiende f y que tiene la misma norma que f , es decir, $\|F\| = \|f\| = 1$. ■

Corolario 3.7. *Si todos los funcionales lineales acotados se anulan sobre un vector dado, este vector debe ser nulo.*

Demostración. Empleando el Teorema 3.6, uno de los funcionales al aplicarse sobre el vector debe dar como resultado un número igual a la norma del vector, es decir

$$F(x_0) = \|x_0\| = 0,$$

lo que implica

$$\|x_0\| = 0,$$

y por definición de norma

$$x_0 = \theta,$$

es decir, que el vector debe ser el vector cero. ■

3.1. Convergencia débil y convergencia fuerte

Sea X un espacio de Banach sobre \mathbb{F} , como se ha mencionado anteriormente, X' es el espacio dual a un espacio vectorial normado, en este caso X es de Banach.

En X es usual definir los siguientes criterios de convergencia:

- I. Una sucesión $\{x_n\}$ en X converge débilmente a $x \in X$, y se denota $x_n \xrightarrow{w} x$ sí,

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \text{ para todo } f \in X'.$$

- II. Una sucesión $\{x_n\}$ en X converge fuertemente (ó en la norma) a $x \in X$ sí,

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

Como se puede observar el segundo criterio es ya conocido en los espacios normados, mientras que el primer criterio es absolutamente nuevo.

Teorema 3.8. *En la convergencia débil el límite $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ es único.*

Demostración. Sean $x_n \xrightarrow{w} x$ y $x_n \xrightarrow{w} y$ entonces para todo $f \in X'$,

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \text{ y } f(x_n) \rightarrow f(y),$$

por la convergencia ordinaria el límite es único,

$$f(x) = f(y).$$

Como $f \in X'$,

$$f(x) - f(y) = f(x - y) = 0,$$

y puesto que f es cualquier funcional lineal acotado, por el Corolario 3.7 se tiene que,

$$x - y = 0$$

esto es,

$$x = y. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.9. *Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones en X débilmente convergentes hacia $x, y \in X$ respectivamente y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces:*

a) $x_n + y_n \xrightarrow{w} x + y;$

b) $\alpha x_n \xrightarrow{w} \alpha x.$

Demostración. a) Como $x_n \xrightarrow{w} x$ y $y_n \xrightarrow{w} y$ entonces, para todo $f \in X'$,

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \text{ y } f(y_n) \rightarrow f(y),$$

por la convergencia ordinaria $f(x_n) + f(y_n) \rightarrow f(x) + f(y)$ y puesto que $f \in X'$,

$$f(x_n + y_n) = f(x_n) + f(y_n) \rightarrow f(x) + f(y) = f(x + y),$$

es decir, $\{x_n + y_n\}$ converge débilmente hacia $x + y$.

b) Como $x_n \xrightarrow{w} x$, para todo $f \in X'$,

$$f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Por la convergencia ordinaria $\alpha f(x_n) \rightarrow \alpha f(x)$, siendo α cualquier elemento de \mathbb{F} . Puesto que $f \in X'$, $f(\alpha x_n) = \alpha f(x_n) \rightarrow \alpha f(x) = f(\alpha x)$, esto es, $\{\alpha x_n\}$ converge débilmente hacia αx . ■

No es muy difícil probar que si una sucesión $\{x_n\}$ converge fuertemente entonces también converge débilmente, es decir, la convergencia fuerte implica la convergencia débil:

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio de Banach X , que converge fuertemente a $x \in X$,

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

Ahora sea $f \in X'$, esto es, f es un funcional lineal acotado definido en X ; por el Teorema 3.2 f es continuo. Como f es continuo en X y $x_n \rightarrow x$ entonces, por el Teorema 1.15,

$$f(x_n) \rightarrow f(x),$$

es decir, $\{x_n\}$ converge débilmente a $x \in X$ para todo $f \in X'$.

En el espacio euclídeo de dimensión finita \mathbb{R}^n la convergencia débil coincide con la convergencia fuerte. En efecto, sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de \mathbb{R}^n y sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de \mathbb{R}^n convergente débilmente a $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$f_i(x_k) = x_k^i \rightarrow f_i(x) = x_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n,$$

es decir, las primeras coordenadas de los vectores x_k tienden a la primera coordenada del vector límite x , sus segundas coordenadas convergen a la segunda coordenada del vector x , etc; por decirlo de otra manera existe convergencia componente a componente. Pero entonces,

$$\|x_n - x\| = d(x_n, x) = \left(\sum_{i=1}^n (x_n^i - x^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0,$$

es decir, $\{x_n\}$ converge fuertemente a x . Puesto que la convergencia fuerte implica la débil, queda demostrada la equivalencia en \mathbb{R}^n de estas convergencias.

El anterior ejemplo muestra que la convergencia débil implica la convergencia fuerte, pero esto solo sucede en espacios de dimensión finita, como lo demuestra el siguiente teorema.

Teorema 3.10. *Si X es un espacio normado de dimensión finita entonces, la convergencia débil es equivalente a la convergencia fuerte.*

Demostración. Se demostrará únicamente el caso en que la convergencia débil implica la convergencia fuerte ya que, anteriormente se demostró que la convergencia fuerte implica la convergencia débil en cualquier espacio.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de X y $\{x_n\}$ una sucesión en X convergente débilmente a $x \in X$. Se tiene que,

$$x_n = \alpha_1^n e_1 + \dots + \alpha_k^n e_k \quad \text{para } n = 1, 2, \dots,$$

y

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k.$$

Considérese ahora los funcionales lineales $f_i \in X'$ con $i = 1, 2, \dots, k$ definidos así:

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Como $\{x_n\}$ converge débilmente a $x \in X$, para $i = 1, 2, \dots, k$,

$$f_i(x_n) \rightarrow f_i(x).$$

Por definición de f_i , $f_i(x_n) = \alpha_i^n$, mientras que $f_i(x) = \alpha_i$, así que

$$\alpha_i^{(n)} \rightarrow \alpha_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k.$$

Ahora, sea $M = \max_i \|e_i\|$. Como $\alpha_i^{(n)} \rightarrow \alpha_i$, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y todo $i = 1, 2, \dots, k$,

$$\|\alpha_i^{(n)} - \alpha_i\| < \frac{\varepsilon}{Mk};$$

por lo tanto,

$$\|x_n - x\| = \left\| \sum_{i=1}^k (\alpha_i^{(n)} - \alpha_i) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i^{(n)} - \alpha_i| \|e_i\| < \varepsilon,$$

que es equivalente a $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. ■

3.2. Transformaciones lineales acotadas

Todo funcional lineal es una transformación lineal entre el espacio vectorial X y \mathbb{F} , los resultados que se obtuvieron en dicho caso se pueden generalizar a la transformaciones lineales.

Definición 3.11. Sea T una transformación lineal entre los espacios vectoriales normados X e Y :

$$T : X \rightarrow Y.$$

Se dice que T es una transformación lineal acotada si existe una constante positiva k tal que, para cada $x \in X$,

$$\|T(x)\| \leq k\|x\|.$$

Las propiedades correspondientes a los funcionales lineales acotados también son válidas en las transformaciones lineales acotadas, solo basta con cambiar el símbolo de valor absoluto por el de norma. Para mostrar que esto es cierto se enunciarán solo algunos de los teoremas análogos y su correspondiente demostración.

Teorema 3.12. Sean X e Y dos espacios vectoriales normados y T una transformación lineal tal que,

$$T : X \rightarrow Y.$$

Entonces, si T es continua en $x_0 \in X$, es continua en todo X .

Demostración. Como T es continua en $x_0 \in X$, entonces si $x_n \rightarrow x_0$, se tiene que $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$. Sea $\{y_n\} \subset X$ con $y_n \rightarrow y$.

$$T(y_n) = T(y_n - y + x_0 + y - x_0) = T(y_n - y + x_0) + T(y) - T(x_0).$$

Como $y_n - y + x_0 \rightarrow x_0$, $T(y_n - y + x_0) \rightarrow T(x_0)$.

Así, $T(y_n) \rightarrow T(y)$, por lo tanto T es continua en todo X . ■

Teorema 3.13. Sean X e Y dos espacios vectoriales normados, T es una transformación lineal acotada si y sólo si es continua.

Demostración. \Rightarrow] Por hipótesis T es acotada, lo que quiere decir que existe una constante real $k > 0$, tal que, para todo $x \in X$,

$$\|T(x)\| \leq k\|x\|.$$

Por otra parte dado $\varepsilon > 0$ y tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ se tiene que si

$$\|x - 0\| < \delta,$$

entonces

$$\|T(x) - T(0)\| < \varepsilon,$$

lo que quiere decir que T es continua en 0 y por el Teorema 3.12 es continua en todo X .

\Leftarrow] Supóngase que T es no acotado, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que

$$\|T(x_n)\| > n\|x_n\|.$$

Sea ahora

$$y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|},$$

con norma $\|y_n\| = \frac{1}{n}$, claramente $y_n \rightarrow 0$.

Como T es continuo, $T(y_n) \rightarrow T(0)$ y como cualquier transformación lineal aplica el vector cero en el vector cero, se tiene que

$$T(0) = 0,$$

y así

$$T(y_n) \rightarrow 0.$$

Ahora,

$$\|T(y_n)\| = \frac{1}{n\|x_n\|}T(x_n) \text{ y } T(x_n) > n\|x_n\|,$$

esto implica que $\|T(y_n)\| > 1$, lo cual contradice que $T(y_n) \rightarrow 0$, esto lleva a la conclusión de que T es acotada. ■

Sean S, T transformaciones lineales acotadas desde un espacio vectorial normado X a un espacio vectorial normado Y . Se definen la suma y el producto por un escalar en ellos de la siguiente forma:

$$(S + T)(x) = S(x) + T(x),$$

$$(\alpha T)(x) = \alpha(T(x)).$$

Con estas operaciones definidas, el conjunto formado por todas las transformaciones lineales acotadas definidas desde X a Y es un espacio vectorial, y se denotará $B(X, Y)$.

En $B(X, Y)$ se define la siguiente norma:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|},$$

por lo tanto $B(X, Y)$ es un espacio normado.

Veamos que efectivamente es una norma:

N1. $\|T\| \geq 0$ ya que $\|T\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \geq 0$;

N2. $\|T\| = 0 = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \iff \|T(x)\| = 0 \iff T = 0$;

N3. para todo $T \in B(X, Y)$ y para todo $\alpha \in \mathbb{F}$, $\|\alpha T\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|\alpha T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|\alpha| \|T(x)\|}{\|x\|} = |\alpha| \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = |\alpha| \|T\|$;

N4. para todo $S, T \in B(X, Y)$, $\|S + T\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|S(x) + T(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|S(x)\|}{\|x\|} + \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|S\| + \|T\|$.

Teorema 3.14. *Sea $T : X \rightarrow Y$ una transformación lineal donde X e Y son dos espacios vectoriales normados. Si X es de dimensión finita, entonces T es acotada.*

Demostración. Sean $n = \dim X$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de X , entonces todo $x \in X$ se puede escribir de la forma

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad \alpha_i \in \mathbb{F}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Puesto que T es lineal,

$$T(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(e_i).$$

Entonces

$$\|T(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i T(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|T(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \sum_{i=1}^n \|T(e_i)\|,$$

llamando $k = \sum_{i=1}^n \|T(e_i)\|$, se tiene que

$$\|T(x)\| \leq k \cdot \|x\|_0,$$

recordando que $\|x\|_0 = \max_i |\alpha_i|$, y puesto que todas las normas son equivalentes en un espacio vectorial de dimensión finita, T es una transformación lineal acotada respecto de $\|x\|_0$ y por ende de cualquier norma sobre X . ■

Teorema 3.15. *Sean X e Y dos espacios vectoriales normados; si Y es un espacio de Banach, entonces $B(X, Y)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de Cauchy en $B(X, Y)$, esto es, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \quad \text{para } m, n \geq N.$$

De esto, se tiene que para cualquier $x \in X$,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|,$$

es decir, que la sucesión $\{T_n(x)\}$ es de Cauchy en Y . Como Y es de Banach, $\{T_n(x)\}$ converge, digamos a $y \in Y$. Se define entonces $T : X \rightarrow Y$ por: $T(x) = y$, para cada $x \in X$.

Se debe demostrar ahora que T es acotada y que $T_n \rightarrow T$.

Como $\{T_n\}$ es de Cauchy, sus términos están uniformemente acotados; existe algún número real M tal que,

$$\|T_n\| \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, para todo n y cualquier $x \in X$,

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq M \|x\|,$$

aplicando límite cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| \leq M\|x\|,$$

se puede aplicar límite ya que $\|\cdot\|$ es continua, por lo tanto

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|,$$

lo que quiere decir que T es una transformación lineal acotada.

Ahora se demostrará que $T_n \rightarrow T$.

De antemano se tiene que para todo $m, n > N$ y todo $x \in X$,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| < \varepsilon\|x\|.$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ y empleando la continuidad de la norma, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| = \|T(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon\|x\|,$$

lo que implica que para todo $m > N$,

$$\|T - T_m\| \leq \varepsilon,$$

es decir, $T_n \rightarrow T$ por lo que $B(X, Y)$ es un espacio de Banach. ■

3.3. Convergencia en $B(X, Y)$

A continuación se mostrarán tres tipos de convergencia en el espacio $B(X, Y)$ y se verá alguna relación entre ellos.

Definición 3.16. Si $\{T_n\}$ es una sucesión en $B(X, Y)$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$$

para algún $T \in B(X, Y)$, se dice que T_n **converge uniformemente** a T . Ordinariamente se diría tan sólo que $\{T_n\}$ converge hacia T .

Definición 3.17. Se dice que la sucesión $\{T_n\}$ en $B(X, Y)$ **converge fuertemente** hacia T , y se denota

$$T_n \xrightarrow{s} T,$$

si, para todo $x \in X$,

$$T_n(x) \rightarrow T(x).$$

Donde $\{T_n(x)\}$ converge respecto de la norma de Y .

Definición 3.18. Se dice que la sucesión $\{T_n\}$ en $B(X, Y)$ **converge débilmente** hacia T , y se denota

$$T_n \xrightarrow{w} T,$$

si para todo $x \in X$, la sucesión de elementos de Y , $\{T_n(x)\}$ converge débilmente hacia $T(x)$; dicho de otra forma,

$$T_n \xrightarrow{w} T,$$

si y sólo si, para todo $x \in X$ y para todo $f \in Y'$,

$$f(T_n(x)) \rightarrow f(T(x)).$$

Tenemos tres tipos de convergencia en $B(X, Y)$ que son, convergencia uniforme, fuerte y débil.

Si comparamos las definiciones de convergencia fuerte y débil, se puede observar que cada una de ellas se basa en la nociones de convergencia débil y fuerte de los vectores $T_n(x)$, los cuales forman una sucesión de vectores de Y .

Puesto que la convergencia fuerte siempre implica la convergencia débil, en este nuevo sentido también la convergencia fuerte implica la débil:

Sea $\{T_n\}$ en $B(X, Y)$ convergente fuertemente hacia T , esto es para todo $x \in X$,

$$T_n(x) \rightarrow T(x).$$

Ahora sea $f \in Y'$, es decir f es un funcional lineal acotado y por el Teorema 3.2 f es continuo; además la sucesión $\{T_n(x)\}$ en Y converge hacia $T(x) \in Y$, por el Teorema 1.15,

$$f(T_n(x)) \rightarrow f(T(x)),$$

esto quiere decir que $\{T_n\}$ converge débilmente hacia T para todo $x \in X$.

Ahora se demostrará que la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte:

Supóngase que la sucesión $\{T_n\}$ converge uniformemente hacia T , esto es

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0.$$

Lo que quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\|T_n - T\| < \varepsilon \quad \text{para } n \geq N.$$

Por lo tanto, para todo $x \in X$,

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \|T_n - T\| < \varepsilon \|x\|,$$

así,

$$T_n(x) \rightarrow T(x).$$

Lo que demuestra que convergencia uniforme implica convergencia fuerte. Así pues,

Convergencia uniforme \implies Convergencia fuerte \implies Convergencia débil.

Los recíprocos de estas implicaciones los podemos ver en [2].

Ahora tomando $Y = \mathbb{R}$, aparentemente en $B(X, \mathbb{R})$ hay tres tipos de convergencia según lo visto anteriormente, pero esto no es así. A continuación se demostrará que se trata sólo de dos.

En $B(X, \mathbb{R})$ las nociones de convergencia fuerte y débil son equivalentes:

Recuérdese que una sucesión $\{f_n\}$ en $B(X, \mathbb{R})$ converge fuertemente hacia f si, para todo $x \in X$,

$$f_n(x) \rightarrow f(x).$$

Como también la sucesión $\{f_n\}$ converge débilmente hacia f si, para todo $x \in X$,

$$f_n(x) \xrightarrow{w} f(x).$$

Las nociones de convergencia fuerte y débil que se acaban de mencionar tienen lugar en el espacio unidimensional \mathbb{R} , habiéndose demostrado en el Teorema 3.10 que en los espacios de dimensión finita ambas convergencias coinciden.

Así pues que en $B(X, \mathbb{R})$ las nociones de convergencia fuerte y débil son equivalentes. por lo que en $B(X, \mathbb{R})$ se puede eliminar el término convergencia “fuerte”, refiriéndose siempre a este tipo de convergencia como débil.

En $B(X, \mathbb{R})$ se puede definir la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ hacia f en la norma de $B(X, \mathbb{R})$. Se debería denominar convergencia “uniforme”. Sin embargo ésta no es la forma usual, ya que esta convergencia se denomina convergencia *fuerte* de funcionales, se dirá que las transformaciones lineales acotadas convergen uniformemente y que los funcionales lineales acotados convergen fuertemente si

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0$$

o bien

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0,$$

donde $T_n, T \in B(X, Y)$ y $f_n, f \in B(X, \mathbb{R})$ respectivamente.

El siguiente teorema justifica el uso de la palabra “uniforme” en $B(X, Y)$.

Teorema 3.19. *La sucesión $\{T_n\}$ en $B(X, Y)$ converge uniformemente hacia T si y sólo si $T_n(x) \rightarrow T(x)$ uniformemente para todo $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$.*

Demostración. \Rightarrow] Sea $\{T_n\} \in B(X, Y)$ tal que $T_n \rightarrow T$, es decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n - T\| < \varepsilon \text{ para } n > N.$$

Entonces, si x es tal que $\|x\| \leq 1$,

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \|T_n - T\| \cdot \|x\| \leq \|T_n - T\| < \varepsilon.$$

Evidentemente N no depende de la elección de x , lo que demuestra la convergencia uniforme.

⇐] Sea $\{T_n(x)\}$ en Y tal que $T_n(x) \rightarrow T(x)$, es decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ dependiente sólo de ε tal que

$$\|T_n(x) - T(x)\| < \varepsilon \text{ para } n > N,$$

para todo x tal que $\|x\| \leq 1$. Se elige $x \in X$ no nulo y definiendo

$$y = \frac{x}{\|x\|}.$$

Para $n > N$,

$$\|T_n(y) - T(y)\| = \left\| T_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|T_n(x) - T(x)\| < \varepsilon,$$

por lo que $\|T_n - T\| < \varepsilon$.

Nuevamente N depende sólo de ε y no de x . ■

Se puede decir que cuando se están tratando espacios de Banach debe tenerse muy presente que antes de todo, estos espacios deben ser espacios vectoriales normados, y que normalmente al nivel de pregrado es un poco complicado demostrar la completez.

En cuanto a espacio dual de un espacio normado no se mostró sino un solo ejemplo debido a la necesidad de mostrar sólo lo que un estudiante normal de pregrado estudia en toda la licenciatura, y para mostrar más ejemplos que se puedan entender se necesita de algunos conceptos avanzados que no se dan en la licenciatura. Algunas de las cosas que son de resaltar es que un espacio dual siempre es un espacio de Banach, así el espacio en el cual se definen los funcionales lineales no sea de Banach, como también se debe resaltar que los funcionales lineales son sólo un caso particular de unos más generales que en este caso son las transformaciones lineales, y en el cual también se extiende el concepto de continuidad. En la convergencia débil y fuerte se notó que es más sencillo trabajar en espacios de dimensión finita ya que, en estos espacios los criterios de convergencia fuerte y débil coinciden, mientras que en el caso de dimensión infinita sólo se tiene que la convergencia fuerte implica la débil, pero que no se mostró que la convergencia débil no necesariamente implica la fuerte debido a su complejidad.

- Todas las normas sobre un espacio vectorial X de dimensión finita son equivalentes.
- Un espacio de Banach es un espacio lineal normado el cual es completo bajo la métrica asociada con la norma.
- Todo espacio vectorial normado de dimensión finita es un espacio de Banach.
- El espacio dual X' de un espacio vectorial normado es un espacio de Banach.
- En la convergencia débil el límite es único.
- En un espacio normado de dimensión finita, la convergencia débil es equivalente a la convergencia fuerte.
- Sean X e Y dos espacios vectoriales normados; si Y es un espacio de Banach, entonces $B(X, Y)$ es un espacio de Banach.

Bibliografía

- [1] APOSTOL, Tom M. Análisis matemático. Barcelona España, Editorial Reverté, 1977.
- [2] BACHMAN George y Narici Lawrence. Análisis funcional. Madrid, Editorial Tecnos, S.A., 1981.
- [3] BRYAN P. Rynne and Martin A. Youngson. Linear functional analysis. Great Britain, Springer-Verlag, 2000.
- [4] DIEUDONNÉ, J. Fundamentos de análisis moderno. Barcelona, Editorial Reverté, 1966.
- [5] HOFFMAN, K y Kunze, R. Linear algebra. Englewood Cliffs, New Jersey: Segunda Edición, Prentice-hall, 1971.
- [6] KOLMOGOROV A.N y Fomin S.V. Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Moscú, Editorial Mir, 1975.
- [7] RESTREPO Guillermo. Análisis en \mathbb{R}^n , Editorial Universidad del Valle, Santiago de Cali, 1997.
- [8] RUDIN, Walter. Principios de análisis matemático. Madrid: Segunda Edición, Ediciones del Castillo, 1966.