Hiperespacio de sucesiones convergentes

Autor:

Daimon Santiago Mayorga Carreño

Universidad Industrial de Santander

Facultad de ciencias

Escuela de matemáticas

Bucaramanga

2022

Hiperespacio de sucesiones convergentes

Autor:

Daimon Santiago Mayorga Carreño

Trabajo de grado para optar al título de:

Matemático

Director:

Javier Enrique Camargo García

Doctor en Ciencias Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de ciencias

Escuela de matemáticas

Bucaramanga

2022

Dedicatoria

Le dedico la elaboración de este trabajo a mis padres Maritza Carreño Maldonado, Horacio Mayorga Diaz quienes me apoyaron todo este tiempo, tambien a mis hermanos Daniela, Juan Pablo, Julian y Emiliano. Espero que esto les sirva como ejemplo de siempre hacer lo que nos apasiona, lo que nos gusta.

Agradecimientos

En primer lugar agradecer al profesor Javier Camargo por sus explicaciones, su ayuda para la elaboración de este trabajo. A mi compañero Marco Quintanilla, quien me acompañó a lo largo de mis estudios, a Diego Ramirez y Lucía Gámez por su colaboración y a todos los profesores quienes hicieron parte de mi formación.

Lista de contenido

Lista de figuras

pág.

RESUMEN

TÍTULO: Hiperespacio de sucesiones convergentes *

AUTOR: Daimon Santiago Mayorga Carreño **

PALABRAS CLAVE: Espacios métricos, Hiperespacios, Sucesiones, Convergencia.

DESCRIPCIÓN:

Para este trabajo realizamos un estudio del hiperespacio de sucesiones convergentes sobre espacios específicos, como lo son los espacios métricos sin puntos aislados, esto para simplificar las pruebas realizadas. Este hiperespacio fue definido en (García-Ferreira y Ortiz-Castillo, 2015) y estudiado más adelante en (Garcia-Ferreira y Rojas-Hernandez, 2017). Vemos algunas características generales y mostramos tres propiedades principales, las cuales son muy investigadas en el estudio de los hiperespacios. Además realizamos algunas demostraciones que en estos artículos no aparecían o se seguían de ideas planteadas.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctor en Ciencias Matemáticas

ABSTRACT

TITLE: Hyperspace of convergent sequences *

AUTHOR: Daimon Santiago Mayorga **

KEYWORDS: Metric spaces, Hyperspaces, Sequences, Convergence.

DESCRIPTION:

For this work we carry out a study of the hyperspace of convergent sequences on specific spaces, such as metric spaces without isolated points, this to simplify the tests carried out. This hyperspace was defined in (García-Ferreira y Ortiz-Castillo, 2015) and studied further in (Garcia-Ferreira y Rojas-Hernandez, 2017). We see some general characteristics and show three main properties, which are much investigated in the study of hyperspaces. In addition, we carried out some demonstrations that did not appear in these articles or were followed by proposed ideas.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctor en Ciencias Matemáticas

Introducción

Las sucesiones convergentes han sido muy estudiadas ya que brindan una gran información acerca de ciertos espacios como lo son los espacios T_2, por otra parte, la investigación sobre los hiperespacios nos provee de mucha información sobre el comportamiento topológico del espacio original.

En el desarrollo del estudio de hiperespacios se han definido y estudiado una gran cantidad de subconjuntos de 2^X, que naturalmente, se dotan de la topología de subespacio. Por dar algunos ejemplos, conocemos: $C(X)$ que son todos elementos de 2^X que además son conexos; $C_n(X)$ los compactos con a lo más n componentes, $n \in \mathbb{N}$; $\mathcal{F}_n(X)$ indica los subconjuntos no vacios de X que tienen a lo sumo n elementos, $n \in \mathbb{N}$; o $\mathcal{F}(X)$ los subconjuntos finitos de X.

De esta manera el hiperespacio de todas las sucesiones convergentes no triviales (de un espacio métrico sin puntos aislados) $S_c(X)$ fue introducido en el año 2015 en el artículo titulado “The Hyperespace of convergent sequences”,como es usual, lo dotaron de la topología heredada de 2^X. Como se puede ver en las referencias de este proyecto, existen varios trabajos enfocados al estudio de este hiperespacio.

Para este trabajo haremos énfasis en el hiperespacio $S_c(X)$. Se presentará un panorama general del estudio de $S_c(X)$, analizaremos algunos resultados y se expondrán algunos de los problemas abiertos.

1. Preliminares

El objetivo de este capítulo es establecer las notaciones básicas que serán usadas a lo largo de este trabajo. Así mismo, se pretende recordar algunos resultados de la Topología general y en particular, de la Teoría de continuos que son necesarios para la lectura del trabajo.

La mayoría de los resultados que presentamos en este capítulo son conocidos y sus demostraciones se pueden encontrar en libros de topología general. Por esta razón, no realizaremos muchas de estas demostraciones.

Este capítulo lo dividimos en dos secciones. En la primera sección que llamamos *Hiperespacios*, se introduce el concepto de hiperespacio, se define una métrica y una topología para estos, y se muestran algunos ejemplos y propiedades. Para la segunda sección que titulamos *Hisperespacio de sucesiones convergentes*, definimos lo que sería una sucesión convergente no trivial describiendo el hiperespacio $S_c(X)$, y presentamos una base de este espacio topológico. El espacio $S_c(X)$ es donde se desarrolla nuestro trabajo.

1.1. Hiperespacios

Este trabajo lo desarrollamos en el contexto de los espacios métricos. Un arco es un espacio métrico homeomorfo a $[0,1]$. Además, si $h\colon [0,1] \to \alpha$ es un homeomorfismo, $h(0)$ y $h(1)$ los llamaremos los puntos extremos del arco α. Un espacio métrico X se dice arcoconexo si para cualesquiera dos puntos x_0 y x_1 de X, existe un arco α contenido en X

tal que x_0 y x_1 son los puntos extremos de α. Es conocido, que en los espacios métricos, conexidad por caminos y arcoconexidad, son nociones equivalentes. Un *continuo* es un espacio métrico compacto y conexo diferente del vacío.

Un concepto importante para la comprensión del trabajo es el de *hiperespacio*; a continuación lo definimos y junto a este su topología.

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio métrico. Un hiperespacio de X es una colección específica de subconjuntos cerrados de X con la topología de Vietoris (Ver Definición 1.1.2). En particular, abordaremos los siguientes hiperespacios:*

1. $2^X = \{A \subseteq X$: A *es no vacío y cerrado de* $X\}$.
2. $\mathcal{K}(X) = \{A : A$ *es compacto no vacío de* $X\}$.
3. $\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X : A$ *tiene como máximo* n *puntos*$\}, n \in \mathbb{N}$.
4. $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X)$.

Observe que como X es un espacio métrico, los los hiperespacios están contenidos en 2^X. Luego, es suficiente definir la topología para 2^X y todos los demás hiperespacios serán tomados como subespacios.

Definición 1.1.2. *Dados $U_1, \ldots, U_n$ abiertos de X, denotamos*

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Es posible mostrar que la familia

$$\beta = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : U_1, \ldots, U_n \text{ son abiertos de } X\}$$

es una base de topología. Definimos τ_V la topología generada por β y la llamaremos Topología de Vietoris.

A continuación definimos una métrica sobre 2^X, conocida como la métrica de Hausdorff, que si el espacio métrico X es además compacto, las topologías de Vietoris y la generada por la métrica de Hausdorff, son iguales, como mostramos en el Teorema 1.1.4.

Definición 1.1.3. *Sea X un espacio métrico con métrica acotada, para cada $A, B \in 2^X$ definimos:*

$$h(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subseteq N(B; r) \text{ y } B \subseteq N(A; r)\},$$

donde $N(D; s) = \bigcup\{B(x; s) : x \in D\}$, con $D \subseteq X$ y $s > 0$.

En (Illanes y Nadler, 1999, Teorema 2.2) se muestra que en efecto, h es una métrica sobre 2^X. La métrica definida anteriormente se conoce como la Métrica de Hausdorff.

Una prueba del Teorema 1.1.4, se puede encontrar en (Illanes y Nadler, 1999, teoremas 3.1 y 3.4).

Teorema 1.1.4. *Sea X un espacio métrico compacto. Si τ_h denota la topología inducida por la métrica de Hausdorff en 2^X, entonces $\tau_V = \tau_h$.*

La siguiente proposición nos será de utilidad en el siguiente capítulo.

Proposición 1.1.5. *Sea X un espacio métrico. La función $u\colon 2^{2^X} \to 2^X$ definida por $u(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$ para cada $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$, conocida como la función unión, es continua.*

Demostración. Para esto mostremos que, para cualesquiera $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en 2^{2^X}, tenemos que $h(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}) \leq h_h(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Supongamos que $h_h(\mathcal{A},\mathcal{B}) = r$. Sea $s > r$, veamos que $h(\bigcup\mathcal{A},\bigcup\mathcal{B}) < s$. Para esto es suficiente probar que $\bigcup\mathcal{A} \subseteq N(\bigcup\mathcal{B}, s)$ y $\bigcup\mathcal{B} \subseteq N(\bigcup\mathcal{A}, s)$. Probemos que $\bigcup\mathcal{A} \subseteq N(\bigcup\mathcal{B}, s)$. Sea $x \in \bigcup\mathcal{A}$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$, tal que $x \in A$. Como $h_h(\mathcal{A},\mathcal{B}) < s$, tenemos que $\mathcal{A} \subseteq N_h(\mathcal{B}, s)$. Así existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $h(A, B) < s$. En consecuencia $A \subseteq N(B, s)$. Ahora como $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $d(x, y) < s$. Es claro que $B \subset \bigcup\mathcal{B}$. Por lo tanto $b \in \bigcup\mathcal{B}$. De lo anterior concluimos que $\mathcal{A} \subseteq N(\bigcup\mathcal{B}, s)$. Analogamente probamos que $\bigcup\mathcal{B} \subseteq N(\bigcup\mathcal{A}, s)$. Por lo que tenemos que $h(\bigcup\mathcal{A},\bigcup\mathcal{B}) \leq h_h(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Luego u es continua. $\square$

Ahora mostramos algunas propiedades de los hiperespacios $\mathcal{F}_n(X)$ y $\mathcal{F}(X)$.

Teorema 1.1.6. *Sea X un espacio métrico. Si X es conexo, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es conexo. Además, si X es compacto, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es un continuo, para cada entero positivo n.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $g\colon X^n \to \mathcal{F}_n(X)$ la función definida por:

$$g((x_1, \ldots, x_n)) = \{x_1, \ldots, x_n\}, \text{ para cada } (x_1, \ldots, x_n) \in X^n.$$

Veamos que g es continua. Tomemos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$. Sean $U_1, \ldots, U_m$ abiertos de X tales que $g(x) \in \langle U_1, \ldots, U_m\rangle \cap \mathcal{F}_n(X)$. Sea $V_j = \bigcap\{U_i\colon x_j \in U_i\}$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Note que V_j es abierto para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, además $x \in V_1 \times \ldots \times V_n$. Probemos ahora que $g(V_1 \times \ldots \times V_n) \subseteq \langle U_1, \ldots, U_m\rangle$. Sea $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n$. Observe que $g(y) = \{y_1, \ldots, y_n\} \in \bigcup_{i=1}^{n} V_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_i$. Es claro que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $V_k \subseteq U_i$. Así $y_k \in U_i$ y $g(y) \in \langle U_1, \ldots, U_m\rangle$; es decir, g es continua.

Es claro que g es sobreyectiva. Por (Camargo y Villamizar, 2020, Teorema 7.13), X^n es conexo y por (Camargo y Villamizar, 2020, Teorema 7.10), tenemos que $\mathcal{F}_n(X)$ es conexo. Como X es compacto, Por (Camargo y Villamizar, 2020, Teorema 6.16) se tiene que X^n también compacto y por tanto, $\mathcal{F}_n(X)$ es compacto, ver (Camargo y Villamizar, 2020, Teorema 6.5). De lo anterior, $\mathcal{F}_n(X)$ es un continuo. □

Proposición 1.1.7. *Sea X un espacio métrico. Si X es conexo, entonces $\mathcal{F}(X)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}(X)$ es disconexo. Luego existen abiertos no vacíos $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ tales que $\mathcal{F}(X) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ con $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Es claro que $\mathcal{F}(X) = \bigcup \mathcal{F}_n(X)$. Por Teorema 1.1.6, $\mathcal{F}_n(X)$ es conexo. Así $\mathcal{F}_n(X) \subseteq \mathcal{U}$ ó $\mathcal{F}_n(X) \subseteq \mathcal{V}$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $\mathcal{F}_n(X) \subseteq \mathcal{U}$. Note que $\mathcal{F}_n(X) \subseteq \mathcal{F}_{n+1}(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así $\mathcal{F}_k(X) \subseteq \mathcal{U}$ siempre que $k \leq n$. Por otra parte observe que $\mathcal{F}_m(X) \subseteq \mathcal{U}$ con $m \geq n$. Pues si $\mathcal{F}_m(X) \nsubseteq \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{F}_n(X) \nsubseteq \mathcal{U}$. Así $\mathcal{F}(X) = \bigcup \mathcal{F}_n(X) \subseteq \mathcal{U}$. Es decir que $\mathcal{V} = \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{F}(X)$ es conexo. □

Observe que si X es un espacio métrico y $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle$ es un abierto de 2^X, entonces $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle \cap \mathcal{F}(X) \neq \emptyset$; pues, basta tomar $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ donde $x_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, y $A \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle \cap \mathcal{F}(X)$. Así, $\mathcal{F}(X)$ es un subconjunto denso de 2^X, para cualquier espacio métrico X. De lo anterior, $\mathcal{F}(X)$ no es compacto.

1.2. Hiperespacio de sucesiones convergentes

En este trabajo, estudiamos un hiperespacio en particular, introducido en 2015 en (García-Ferreira y Ortiz-Castillo, 2015), que se conoce como el hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales, además mostramos unas propiedades investigadas en (Garcia-Ferreira y Rojas-Hernandez, 2017). De esta manera definimos a continuación.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio métrico sin puntos aislados. Un conjunto $S \subseteq X$ se dice una sucesión convergente no trivial si:*

1. *S es un compacto infinito;*
2. *Existe $x \in S$ tal que $S \setminus \{x\}$ es numerable y discreto; y*
3. *$S \setminus U$ es finito, para cada abierto U de X tal que $x \in U$.*

El punto $x \in S$ lo denotaremos en ocasiones por x_S y lo llamaremos punto límite de S. Algunas veces notaremos

$$S = \{x; x_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Dado X un espacio topológico sin puntos aislados, definimos el hiperespacios de las sucesiones convergentes por

$$S_c(X) = \{S \subseteq X : S \text{ es una sucesión convergente no trivial}\}.$$

Es claro que $S_c(X) \subseteq 2^X$. Así, consideraremos $S_c(X)$ con la topología de Vietoris definida anteriormente. Si $U_1, \ldots, U_k$ son abiertos de un espacio métrico compacto X, entonces denotaremos:

$$\langle U_1, \ldots, U_k \rangle_c = \langle U_1, \ldots, U_k \rangle \cap S_c(X).$$

El siguiente teorema nos muestra una base particular para el hiperespacio de sucesiones convergentes $S_c(X)$. Este resultado lo usaremos constantemente en el desarrollo del trabajo.

Teorema 1.2.2. *Sea X un espacio métrico compacto. La colección*

$$\beta_c = \{\langle U_1, \ldots, U_k\rangle_c \colon U_i \textit{ es abierto, para cada } i \in \{1, \ldots, k\}, \\ \textit{y } U_i \cap U_j = \emptyset \textit{ siempre que } i \neq j\},$$

es una base para el hiperespacio $S_c(X)$.

Demostración. Sean $V_1, \ldots, V_m$ abiertos de X y $S \in \langle V_1, \ldots, V_m\rangle_c$. Supongamos que $S = \{x; x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x; x_n, n \geq N\} \subseteq V_1$, y $V_i \cap \{x_1, \ldots, x_{N-1}\} \neq \emptyset$ para cada $i \in \{2, \ldots, m\}$. Como S es una sucesión convergente en un espacio métrico, existen abiertos $W_1, \ldots, W_N$ disjuntos dos a dos, tales que $\{x; x_n, n \geq N\} \subseteq W_1$ y $x_i \in W_{i+1}$, para cada $i \in \{1, \ldots, N-1\}$. Sean $U_1, \ldots, U_N$ abiertos definidos para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, por:

$$U_i = \begin{cases} V_1 \cap W_1, & \text{si } i = 1; \\ W_i \cap (\bigcap\{V_j : x_{i-1} \in V_j\}), & \text{si } i \in \{2, \ldots, N\}. \end{cases}$$

Obsérvese que $S \in \langle U_1, \ldots, U_N\rangle_c$ y $\langle U_1, \ldots, U_N\rangle_c \subseteq \langle V_1, \ldots, V_m\rangle_c$. Además, $U_i \cap U_j = \emptyset$, siempre que $i \neq j$. Así, $\langle U_1, \ldots, U_N\rangle_c \in \beta_c$ y β_c es base de $S_c(X)$. □

2. Hiperespacio de sucesiones convergentes

La finalidad de este capítulo es mostrar varios resultados sobre el hiperespacio $S_c(X)$. Algunas de las propiedades que se estudian a menudo en los espacios topológicos son: la compacidad, la conexidad, la conexidad por caminos y la conexidad local; de esta forma, enfocamos los próximos resultados en este capítulo sobre $S_c(X)$. Además, mostramos ejemplos donde se tienen o no dichas propiedades.

2.1. Propiedades generales

El objetivo de esta sección es recopilar algunos resultados sobre el hiperespacio de sucesiones convergentes $S_c(X)$, para cuando X es un espacio métrico. En algunos resultados introduciremos como hipótesis que el espacio métrico no tiene puntos aislados para garantizar la existencia de sucesiones convergentes a todo punto del espacio; en particular, para asegurar que $S_c(X)$ no es vacío. Primeramente mostraremos que el hiperespacio no es compacto.

Teorema 2.1.1. *Sea X un espacio métrico. Si $S_c(X)$ es diferente del vacío, entonces el hiperespacio $S_c(X)$ no es compacto.*

Demostración. Sea $S \in S_c(X)$. Supongamos $S = \{x, x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $S_c(X)$ definida por $S_n = S \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Observe que $\lim_{n\to\infty} S_n = \{x\}$, usando la métrica de Hausdorff en 2^X. Como $\{x\}$ no es un elemento de $S_c(X)$, $S_c(X)$ no es compacto. $\square$

Otra propiedad sencilla se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.2. *Sea X un espacio métrico sin puntos aislados. Entonces $S_c(X)$ es un subconjunto denso de 2^X.*

Demostración. Sea $\langle U_1, \ldots, U_m \rangle$ un abierto de 2^X. Veamos que $\langle U_1, \ldots, U_m \rangle \cap S_c(X) \neq \emptyset$. Sea $z_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Como X no tiene puntos aislados, existe $S \in S_c(X)$ tal que el punto límite de S, x_S es z_1, y $S \subseteq U_1$. Notemos que $S \cup \{z_1, \ldots, z_m\} \in S_c(X) \cap \langle U_1, \ldots, U_m \rangle$. Así, $S_c(X)$ es un subconjunto denso de 2^X. $\square$

En (García-Ferreira y Ortiz-Castillo, 2015), los autores inician el artículo a manera de motivación haciendo la siguiente pregunta:

Pregunta 2.1.3. *¿Son $S_c([0,1])$ y $S_c(\mathbb{I})$ homeomorfos?*

Para dar respuesta, los autores muestran el siguiente lema.

Lema 2.1.4. *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Si S es una sucesión convergente no trivial tal que $S \subseteq X \setminus A$, entonces la función $f \colon A \to S_c(X)$ definida para cada $x \in A$ por $f(x) = S \cup \{x\}$ es un encaje.*

Demostración. Primero veamos que f es continua. Sean $x \in A$ y $U_1 \ldots U_n$ abiertos disjuntos dos a dos de X tal que $S \cup \{x\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_c$. Notemos que existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in U_k$. De esta manera tenemos que $x \in U_k \cap A$ y $f(U_k \cap A) \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_c$ lo que muestra que f es continua en x. De lo anterior, f es continua.

Ahora veamos que f es abierta. Sea V un abierto de A. Luego existe un abierto W de X tal que $V = W \cap A$. Veamos que $f(V)$ es abierto de $S_c(X)$. Sea $x \in V$. Como X es un espacio métrico, existen abiertos disjuntos U_1 y U_2 de X tales que $S \subseteq U_1$ y

$x \in U_2 \subseteq V$. Así, $\langle U_1, U_2\rangle_c$ es un abierto de $S_c(X)$ tal que $f(x) \in \langle U_1, U_2\rangle_c$. Ahora, si $f(z) = S \cup \{z\} \in \langle U_1, U_2\rangle_c \cap f(A)$, entonces $z \in U_2$. Así, $\langle U_1, U_2\rangle_c \cap f(A) \subseteq f(V)$ y $f(V)$ es abierto de $f(A)$. Finalmente, notemos que claramente f es inyectiva y por lo tanto, f es un encaje. □

El siguiente corolario se sigue del lema anterior. Este corolario es interesante pues muestra cuando $S_c(X)$ contiene una copia de X.

Corolario 2.1.5. *Sea X un espacio métrico. Si X tiene una copia de él mismo y existe una sucesión convergente no trivial disjunta de esa copia, entonces $S_c(X)$ tiene una copia de X.*

Tenemos la siguiente pregunta:

Pregunta 2.1.6. *¿Existe un espacio métrico X tal que $S_c(X)$ sea diferente del vacío y $S_c(X)$ no contenga una copia de X?*

Ahora, veamos algunas definiciones de dimensión topológica antes de darle solución a la Pregunta 2.1.3.

Definición 2.1.7. *Sea X un espacio métrico. Entonces, $dim(X) = 0$ si, y solo si, para todo $p \in X$ existe una base de vecindades $\mathcal{B}$ tal que $Fr(B) = \emptyset$, para todo $B \in \mathcal{B}$. En este caso diremos que X es cero dimensional o X tiene dimensión cero.*

Note que un espacio métrico tiene dimensión cero si tiene una base de subconjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados.

Observación 2.1.8. *El conjunto de irracionales, $\mathbb{I}$, es cero dimensional; pues, para cualquier $p \in \mathbb{I}$, podemos construir una base de vecindades $\mathcal{B} = \{(r,s) \cap \mathbb{I} \colon r, s \in \mathbb{Q}$ y $p \in (r,s)\}$. Note que $Fr(B) = \emptyset$ para cualquier $B \in \mathcal{B}$.*

Observación 2.1.9. *En (Michael, 1951), el autor muestra que si X un espacio métrico tal que $dim(X) = 0$, entonces $dim(\mathcal{K}(X)) = 0$, donde $\mathcal{K}(X)$ representa la colección de compactos no vacíos de X (ver Definición 1.1.1). Como $S_c(X) \subseteq \mathcal{K}(X)$, $dim(S_c(X)) = 0$, por (Nadler, 2002, Teorema 3.2).*

Ya con esto, demos respuesta a la Pregunta 2.1.3. Supongamos que $S_c([0,1])$ y $S_c(\mathbb{I})$ son homeomorfos. Por las observaciones 2.1.8 y 2.1.9, $dim(S_c(\mathbb{I})) = 0$. Además, $S_c([0,1])$ tiene una copia de $[0,1]$, por el Corolario 2.1.5. De esta manera tendríamos que $S_c(\mathbb{I})$ posee una copia de $[0,1]$. Por otra parte, por la Definición 2.1.7 podemos deducir que $dim([0,1]) \neq 0$. Lo cual es una contradicción. De lo anterior $S_c([0,1])$ y $S_c(\mathbb{I})$ no son homeomorfos. Ahora, en cuanto a los espacios cero dimensionales, una pregunta que surge naturalmente y permanece aún abierta es la siguiente:

Pregunta 2.1.10. *¿Son $S_c(\mathbb{Q})$ y $S_c(\mathbb{I})$ homeomorfos?*

Para iniciar el estudio del hiperespacio $S_c(X)$, mostraremos que $S_c([0,1])$ es arcoconexo. Recordemos que un espacio métrico X es *arcoconexo* o *conexo por caminos* si, para cualesquiera p y q en X, existe una función continua $\alpha \colon [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. En ocasiones y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que α es un encaje; esto es, $\alpha([0,1])$ es un arco con puntos extremos p y q.

Proposición 2.1.11. *El hiperespacio $S_c([0,1])$ es conexo por caminos.*

Demostración. Sean S_0 y S_1 dos puntos de $S_c([0,1])$. Consideremos dos casos:

Caso 1. Las sucesiones S_0 y S_1 tienen el mismo punto límite. Estos es, sean $S_0 = \{x, x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ y $S_1 = \{x, y_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Definimos $h\colon [0,1] \to S_c(X)$ de la siguiente forma:

$$h(0) = S_0 \text{ y } h(t) = \{x, x_1, \ldots, x_{n-1}, f_n(t), y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots\},$$

donde $f_n(t) = x_n + (n+1)(nt-1)(y_n - x_n)$ para cada $t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Nótese que $h(1) = S_1$. Además, $h\mid_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún, por (Engelking, 1989, Proposición 2.2.13), tenemos que $h\mid_{(0,1]}$ es continua. Ahora veamos la continuidad de h en 0. Tomemos abiertos disjuntos dos a dos $U_1, \ldots, U_k$ tales que $S_0 \in \langle U_1, \ldots, U_k\rangle_c$ y $x \in U_1$. Como S_0 y S_1 convergen a x, entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tales que $x_n, y_n \in U_1$ siempre que $n \geq m$.

Afirmación 2.1.12. *El intervalo* $[0, \frac{1}{m+1})$ *está contenido en* $h^{-1}\left(\langle U_1, \ldots, U_k\rangle_c\right)$*.*

Probemos la afirmación. Sean $t \in (0, \frac{1}{m+1})$ y $i \geq m+1$ tales que $t \in [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$. Por la definición sabemos que

$$h(t) = \{x, x_1, \ldots, x_m, \ldots, f_i(t), y_{i+1}, \ldots\}.$$

Note que $\{y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots\} \subseteq U_1$ y $\{x, x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} U_j$. Además, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, tenemos que $\{x, x_1, \ldots, x_m\} \cap U_j \neq \emptyset$; pues, $S_0 \in \langle U_1, \ldots, U_k\rangle_c$ y $x_n \in U_1$ siempre que $n > m$. Ahora, como $i > m$, $x_i, y_i \in U_1$. Así, tenemos que $f_i([\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]) \subseteq U_1$ porque U_1 es un intervalo abierto. Por consiguiente $h(t) \in \langle U_1, \ldots, U_k\rangle_c$. Con esto terminamos la prueba de la Afirmación 2.1.12.

Lo anterior muestra que h es continua en 0 y por lo tanto, h es continua. En este caso, S_0 y S_1 están conectados por un camino.

Caso 2. Sean $S_0 = \{x, x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $S_1 = \{y, y_n : n \in \mathbb{N}\}$ sucesiones crecientes o, las dos decrecientes, con puntos límite diferentes. Sin pérdida de generalidad supondremos que $x < y$ y S_0 y S_1 son ambas decrecientes con $x_n < y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $f_0 : [0,1] \to [0,1]$, donde $f_0(t) = x + t(y - x)$ un camino de x a y, y $f_n : [0,1] \to [0,1]$ tal que $f_n(t) = x_n + t(y_n - x_n)$ camino de x_n a y_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Definamos la función $g : [0,1] \to S_c([0,1])$ dada por

$$g(t) = S_t = \{f_0(t), f_n(t) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Note que $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}(x_n + t(y_n - x_n)) = x + t(y - x) = f_0(t)$, para cada $t \in [0,1]$. Por lo anterior, tenemos que la función g está bien definida. Más aún, como las dos sucesiones tienen la misma dirección y todas las funciones f_i son los caminos naturales, tenemos que:

$$f_0(t) < \ldots < f_n(t) < f_{n-1}(t) < \ldots < f_1(t) \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Ahora veamos que g es continua. Fijemos $t \in [0,1]$. Sean $U_1, \ldots, U_k$ abiertos disjuntos tales que $S_t \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle_c$ y $f_0(t) \in U_1$. Sea δ la distancia entre S_t y $[0,1] \setminus (\bigcup_{i=1}^k U_i)$. Como S_t y $[0,1] \setminus (\bigcup_{i=1}^k U_i)$ son compactos disjuntos, tenemos que $\delta > 0$. Sea $V = (t - \delta, t + \delta) \cap [0,1]$.

Afirmación 2.1.13. *Si $f_i(t) \in U_j$ para algún $i \in \mathbb{N}$ y $j \leq k$, entonces $f_i(r) \in U_j$ para todo*

$r \in V$.

Probemos la afirmación. Supongamos que $f_i(t) \in U_j$ para algún $i \in \mathbb{N}$ y fijemos $r \in V$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $r > t$. Entonces

$$|f_i(t) - f_i(r)| = |x_i + t(y_i - x_i) - (x_i + r(y_i - x_i))| = |(t - r)(y_i - x_i)| < \delta.$$

Así, $f_i(r) \in U_j$ y completamos la prueba de la Afirmación 2.1.13.

Luego, se sigue que si $S_t \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle_c$, entonces $S_r \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle_c$, para cada $r \in V$. Por lo tanto, g es continua. De lo anterior, en este caso, S_0 y S_1 se pueden unir por un camino en $S_c([0,1])$.

Con estos dos casos, terminemos la prueba mostrando que si $S_0 = \{x, x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ y $S_1 = \{y, y_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ son dos sucesiones distintas, éstas se pueden conectar con un camino. Si $x = y$, por el *Caso 1*, tenemos que existe un camino entre S_0 y S_1. Supongamos que $x \neq y$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $x < y < 1$. Sean S_2 y S_3 dos sucesiones decrecientes que convergen a x y y, respectivamente, tales que $S_2 \subseteq [x, y)$ y $S_3 \subseteq [y, 1)$. Luego, por el *Caso 1*, tenemos que existen caminos $f_1 \colon [0,1] \to S_c(X)$ tal que $f_1(0) = S_0$ y $f_1(1) = S_2$; $f_2 \colon [0,1] \to S_c(X)$ tal que $f_2(0) = S_3$ y $f_2(1) = S_1$. Luego, por el *Caso 2*, existe un camino $f_3 \colon [0,1] \to S_c(X)$ tal que $f_3(0) = S_2$ y $f_3(1) = S_3$. Notemos que

$f\colon [0,1] \to S_c(X)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} f_1(3t), & \text{si } t \in [0,1/3]; \\ f_3(3t-1), & \text{si } t \in [1/3,2/3]; \\ f_2(3t-2), & \text{si } t \in [2/3,1]. \end{cases}$$

es un camino que conecta a S_0 con S_1. □

Terminamos esta sección con el siguiente lema. La demostración es similar a los argumentos que mostramos en la prueba de la Proposición 2.1.11. Mostraremos un esquema de la prueba.

Lema 2.1.14. *Sea X un espacio métrico conexo. Si X es una unión finita de arcos, entonces $S_c(X)$ es conexo por caminos.*

Demostración. Sabemos que $X = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son arcos.

Afirmación 2.1.15. *Sean $S_0, S_1 \in S_c(X)$ tales que S_0 y S_1 tienen el mismo punto límite, entonces existe un camino que conecta a S_0 con S_1.*

Sean $S_0 = \{x, x_n, n \in \mathbb{N}\}$ y $S_1 = \{x, y_n, n \in \mathbb{N}\}$ dos elementos de $S_c(X)$. Como X es conexo y además unión finita de arcos, entonces dados $a, b \in X$ existe un δ un arco tal que a, b son sus extremos. Sean δ_n el arco con extremos x_n y y_n y $f_n\colon [1/(n+1), 1/n] \to S_c(X)$ el camino que conecta a y_n con x_n mediante el arco δ_n. Definimos $g\colon [0,1] \to S_c(X)$ tal que

$$g(0) = S_0 \text{ y } g(t) = \{x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, f_n(t), y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots\}.$$

Analogamente al *Caso 1* de la Proposición 2.1.11 tenemos que g es continua y por tanto un camino entre S_0 y S_1. Así demostramos la Afirmación 2.1.15

Sean $S_0 = \{x, x_n, n \in \mathbb{N}\}$ y $S_1 = \{y, y_n, n \in \mathbb{N}\}$ dos puntos de $S_c(X)$. Si $x = y$, entonces por la Afirmación 2.1.15, tenemos que existe un camino entre S_0 y S_1. Supongamos que $x \neq y$. Como $X = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$, entonces existe un arco γ en X con puntos extremos x y y. Sean S_2 y S_3 puntos en $S_c(X)$ tales que $S_2 \cup S_3 \subseteq \gamma$, y x y y son los puntos límite de S_2 y S_3, respectivamente. Luego, aplicando nuevamente la Afirmación 2.1.15, S_2 se puede unir con un arco a S_0 y S_3 se puede unir con un arco a S_1. Finalmente, como S_2 y S_3 están en un arco, aplicando la Proposición 2.1.11, S_2 y S_3 son puntos extremos de un arco en $S_c(X)$. De lo anterior, $S_c(X)$ es conexo por caminos y terminamos la prueba del lema. □

Un caso particular donde aplicamos el Lema 2.1.14, son las gráficas.

Definición 2.1.16. *Un continuo X es una gráfica si X se puede ver como unión finita de arcos tal que, dados cuales quiera dos arcos, estos son disjuntos o se intersecan en uno o sus dos puntos extremos.*

Una clara consecuencia del Lema 2.1.14 es el siguiente corolario.

Corolario 2.1.17. *Si X es una gráfica, entonces $S_c(X)$ es arcoconexo.*

Terminamos esta sección con otro ejemplo donde el hiperespacio de sucesiones convergentes $S_c(X)$ es conexo por trayectorias.

Ejemplo 2.1.18. *Sea X el espacio peine definido por:*

$$X = \left(\bigcup \left\{[0,1] \times \{\tfrac{1}{n}\} : n \in \mathbb{N}\right\}\right) \bigcup \left([0,1] \times \{0\}\right) \bigcup \left(\{0\} \times [0,1]\right).$$

Ver Figura 2.1 para una representación del espacio peine. Entonces $S_c(X)$ es conexo por caminos.

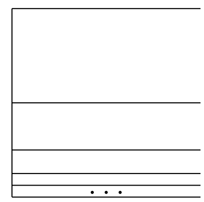

Figura 2.1. Espacio Peine.

Para esta demostración utilizamos técnicas parecidas a las que precisamos en la Proposición 2.1.11 y Lema 2.1.14.

Observación 2.1.19. *Sea $S \in S_c(X)$. Si S está contenido en una cantidad infinita de arcos, entonces $x_S \in [0,1] \times \{0\})$.*

Afirmación 2.1.20. *Sea S un elemento de $S_c(X)$, entonces existen $S' \in S_c(X)$ y f una función continua tales que S' está contenida en una cantidad finita de arcos y f conecta a S con S'.*

Sea $S \in S_c(X)$ tal que S está contenida en una cantidad infinita de arcos. Por la Observación 2.1.19, tenemos que $x_S \in ([0,1]) \times \{0\})$. Definamos $S = \{x_S, x_n, n \in \mathbb{N}\}$, donde $x_S = (a_S, 0)$ y $x_n = (a_n, b_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, si $f\colon [0,1] \to S_c(X)$ es la función definida para cada $t \in [0,1]$ por:

$$f(0) = S \text{ y } f(t) = \{(a_S + t(-a_S), 0), (a_n + t(-a_n), b_n), n \in \mathbb{N}\}.$$

Por *Caso 2* de la Afirmación 2.1.11 tenemos que la función f es continua. Además $S' = f(1)$ es un punto de $S_c(X)$ tal que $S' \subseteq (\{0\} \times [0,1])$. Es decir es una sucesión contenida en un arco. Es claro que la función anterior define un camino entre S y S'. De esta manera queda demostrada la Afirmación 2.1.20.

Sean $S_1, S_2 \in S_c(X)$ tales que $S_1 \neq S_2$. Por la Afirmación 2.1.20, tenemos que existen $S_1', S_2' \in S_c(X)$ y funciones f_1, g_2 tales que S_1' y S_2' están en una cantidad finita de arcos y $f_1(0) = S_1, f_1(1) = S_1', g_2(0) = S_2$ y $g_2(1) = S_2'$. Por Lema 2.1.14, existe f_3 que conecta a S_1' con S_2'. Sea $f_2(t) = g_2(1-t)$. Note que $f = f_1 \cup f_3 \cup f_2$ es una función continua que conecta a S_1 con S_2.

2.2. Conexidad en $S_c(X)$

Para esta sección se mostrarán algunos resultados sobre la conexidad del hiperespacio de sucesiones convergentes. Veamos que características debe tener un espacio métrico X para que su hiperespacio $S_c(X)$ sea conexo.

Teorema 2.2.1. *Sea X es un espacio métrico sin puntos aislados. Si X es conexo por caminos, entonces $S_c(X)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $S_c(X)$ no es conexo. Luego existen dos abiertos disjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $S_c(X)$ tales que $S_c(X) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Sean $U_1, \ldots, U_m$ abiertos disjuntos dos a dos tales que $\langle U_1, \ldots, U_m \rangle_c \subseteq \mathcal{U}$ (ver Teorema 1.2.2). De igual manera, tomamos $V_1, \ldots, V_n$ abiertos disjuntos dos a dos tales que $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle_c \subseteq \mathcal{V}$. Ahora fijemos un $x_i \in U_i$ y $y_j \in V_j$ para cada $i \in \{1, \ldots m\}$ y $j \in \{1, \ldots n\}$, respectivamente. Por (Engelking, 1989, 6.3.12(a)), existen encajes $f_i \colon [0,1] \to X$ tal que $f_i(0) = x_i$ y $f_i(1) = x_{i+1}$ con $i \in \{1, \ldots m-1\}$. De la misma forma, sea $g_j \colon [0,1] \to X$ encaje tal que $g_j(0) = y_j$ y $g_j(1) = y_{j+1}$ con $j \in \{1, \ldots n-1\}$. Sea $h \colon [0,1] \to X$ el encaje que conecta a x_1 con y_1.

De esta manera definimos:

$$D = h([0,1]) \cup \left(\bigcup_{i<m} f_i([0,1]) \right) \cup \left(\bigcup_{j<n} g_j([0,1]) \right).$$

Sea $S_c(D)$ un subespacio de $S_c(X)$. Ahora como $\{x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_n\} \subseteq D$, entonces podemos extender el conjunto $\{x_1, \ldots x_m\}$ a una sucesión en $S_c(D) \cap \mathcal{U}$ y el conjunto $\{y_1, \ldots, y_n\}$ a una sucesión de $S_c(D) \cap \mathcal{V}$. De esta manera obtenemos que $S_c(D) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ y $S_c(D) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Por la escogencia de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ tenemos que $S_c(D)$ es disconexo; pero, D es conexo y además, es unión finita de arcos. Esto contradice el Lema 2.1.14. Por lo anterior, $S_c(X)$ es conexo. $\square$

Ahora mostraremos que $S_c(X)$ es conexo si, y solo si, X es conexo. Para esto establecemos el siguiente lema.

Lema 2.2.2. *Si $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_c$ es un abierto básico de $S_c(X)$, entonces*

$$\bigcup \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_c = U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Además, si $\mathcal{O}$ es una abierto no vacío de $S_c(X)$, entonces $\bigcup \mathcal{O}$ es abierto de X.

Demostración. Sea $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ un abierto básico de $S_c(X)$. Tomemos S en $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_c$. Note que $x \in S \cup \{x\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_c$ para toda $x \in U_1 \cup \cdots \cup U_n$. De esto sigue que:

$$U_1 \cup \ldots \cup U_n \subseteq \bigcup \{S \cup \{x\} : x \in U_1 \cup \cdots \cup U_n\} \subseteq$$
$$\subseteq \bigcup \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_c \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

De esta manera $\bigcup \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_c = U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

Finalmente, si $x \in \bigcup \mathcal{O}$, existe $S \in \mathcal{O}$ tal que $x \in S$. Luego, existen abiertos $U_1, \ldots, U_m$ de X tales que $S \in \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_c \subseteq \mathcal{O}$. Así, $x \in U_1 \cup \cdots \cup U_m \subseteq \bigcup \mathcal{O}$ y $U_1 \cup \cdots \cup U_m$ es abierto de X; es decir, $\bigcup \mathcal{O}$ es abierto de X.

□

Teorema 2.2.3. *Sea X un espacio métrico sin puntos aislado. Entonces, X es conexo si, y solo si, el hiperespacio $S_c(X)$ es conexo.*

Demostración. Sea X un espacio métrico sin puntos aislados. Supongamos primero que X es conexo y probemos que $S_c(X)$ es conexo. Para esto definamos los siguientes conjuntos. Para cada $S \in S_c(X)$ y $x \in X$ sean:

- $\mathcal{G}(S) = \{S \cup F : F \in \mathcal{F}(X)\}$;
- $\mathcal{H}(S) = \{T \in S_c(X) : S \subseteq T\}$;
- $\mathcal{M}(S) = \{T \in S_c(X) : x_S = x_T\}$; y
- $\mathcal{N}(x) = \{S \in S_c(X) : x \in S\}$.

Observe que las siguientes relaciones se satisfacen:

1. Si $T \in \mathcal{M}(S)$, entonces $x_S = x_T$ y $\mathcal{H}(T) \subseteq \mathcal{M}(S)$;
2. $\mathcal{M}(S)$ es denso en $\mathcal{N}(x_S)$; y
3. $\mathcal{G}(S) \subseteq \mathcal{H}(S) \subseteq cl(\mathcal{G}(S))$.

Afirmación 2.2.4. *Si $S \in S_c(X)$ y $x \in X$, entonces $\mathcal{G}(S), \mathcal{H}(S), \mathcal{M}(S)$ y $\mathcal{N}(x)$ son conexos.*

Veamos la demostración de la afirmación. Como X es conexo, por Proposición 1.1.6, el hiperespacio $\mathcal{F}(X)$ es conexo. Sean $e\colon \mathcal{F}(X) \to \{S\} \times \mathcal{F}(X)$ una función dada por $e(F) = (S, F)$ para cada $F \in \mathcal{F}(X)$, y $u\colon \{S\} \times \mathcal{F}(X) \to S_c(X)$ la función definida por $u(S, F) = S \cup F$ para cada $(S, F) \in \{S\} \times \mathcal{F}(X)$. Por la Proposición 1.1.5, u es una función continua y es facil notar que e es un encaje. Así por (Camargo y Villamizar, 2020, Proposición 3.6) tenemos que $u \circ e$ es continua. Además $(u \circ e)(\mathcal{F}(X)) = \mathcal{G}(S)$. Por (Camargo y Villamizar, 2020, Teorema 7.10), $\mathcal{G}(S)$ es conexo. Ahora por la relación (3) y (Camargo y Villamizar, 2020, Teorema 7.12) tenemos que $\mathcal{H}(S)$ es conexo. Ahora veamos que $\mathcal{M}(S)$ es conexo. Supongamos lo contrario, es decir, existen dos abiertos disjuntos no vacíos $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ de $S_c(X)$ que desconectan $\mathcal{M}(S)$. Sean $S_1, S_2 \in S_c(X)$ y $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_c, \langle V_1, \ldots, V_m \rangle_c$ abiertos de $S_c(X)$ tales que $S_1 \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_c \subseteq \mathcal{O}_1$ y $S_2 \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle_c \subseteq \mathcal{O}_2$. Como $\mathcal{H}(S_i)$ es conexo para cada $i \in \{1, 2\}$, tenemos que $\mathcal{H}(S_i) \subseteq \mathcal{O}_i$. Así se sigue que $S_1 \cup S_2 \subseteq \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$. Pues $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{H}(S_1) \cap \mathcal{H}(S_2)$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{M}(S)$ es conexo. Finalmente, veamos que para cada $x \in X$, $\mathcal{N}(x)$ es conexo. Tome $S \in S_c(X)$ tal que S converge a x, así por (2) y (Camargo y Villamizar, 2020, Teorema 7.12), se concluye la conexidad de $\mathcal{N}(x)$. Con esto se culmina la prueba de la Afirmación 2.2.4.

Ahora probemos que $S_c(X)$ es conexo. Asumamos que $S_c(X)$ no es conexo. Luego podemos encontrar dos subconjuntos abiertos disjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $S_c(X)$ tales que $S_c(X) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Para cada $S \in \mathcal{U}$, existen abiertos $U_{n1}, \ldots, U_{nk_S}$ de X tales que $S \in$

$\langle U_{n1}, \ldots, U_{nk_S}\rangle_c \subseteq \mathcal{U}$. De manera similar, para cada $S \in \mathcal{V}$ existen abiertos $V_{m1}, \ldots, V_{mr_S}$ de X tales que $S \in \langle V_{m1}, \ldots, V_{mr_S}\rangle_c \subseteq \mathcal{V}$. Sean $W_1 = \bigcup\{\bigcup\langle U_{n1}, \ldots, U_{nk_S}\rangle_c : S \in \mathcal{U}\}$ y $W_2 = \bigcup\{\bigcup\left\langle V_{m1}, \ldots, V_{mr_S}\right\rangle_c : S \in \mathcal{V}\}$. Por el Lema 2.2.2, tenemos que W_1 y W_2 son abiertos de X. Más aún, $X = W_1 \cup W_2$ ya que X no tiene puntos aislados. Ahora, como X es conexo, entonces $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Fijemos $x \in W_1 \cap W_2$. Entonces $x \in \bigcup\left\langle U_{n1}, \ldots, U_{nk_{S_1}}\right\rangle_c \cap \bigcup\left\langle V_{m1}, \ldots, V_{mr_{S_2}}\right\rangle_c$ para algún $S_1 \in \mathcal{U}$ y $S_2 \in \mathcal{V}$. Tome $T_1 = S_1 \cup \{x\} \in \left\langle U_{n1}, \ldots, U_{nk_{S_1}}\right\rangle_c \subseteq \mathcal{U}$ y $T_2 = S_2 \cup \{x\} \in \left\langle V_{m1}, \ldots, V_{mr_{S_2}}\right\rangle_c \subseteq \mathcal{V}$. Como $T_1, T_2 \in \mathcal{N}(x)$ y $\mathcal{N}(x) \subseteq S_c(X) \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, entonces los abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ desconectan $\mathcal{N}(x)$, lo que es una contradicción, por lo tanto $S_c(X)$ es conexo.

Ahora supongamos que $S_c(X)$ es conexo y veamos que X es conexo.

Sea X un espacio métrico sin puntos aislados tal que $S_c(X)$ es conexo. Supongamos que X no es conexo; es decir, existen abiertos disjuntos U y V de X tales que $X = U \cup V$. Ahora tome $\langle X, U\rangle_c$ y $\langle V\rangle_c$ abiertos de $S_c(X)$. Notemos que $\langle X, U\rangle_c \cap \langle V\rangle_c = \emptyset$. Es fácil ver que $S_c(X) = \langle X, U\rangle_c \cup \langle V\rangle_c$. De esta manera desconectamos a $S_c(X)$, lo que es una contradicción. $\square$

Observemos que si tomamos el continuo X definido por:

$$X = cl_{\mathbb{R}^2}\left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \operatorname{sen}(1/x) \text{ y } x \in (0, 1]\}\right).$$

Ver Figura 2.2 para una representación de la curva senoidal del topólogo. Tenemos que X no es arcoconexo, pero sin embargo, $S_c(X)$ es conexo, por el Teorema 2.2.3. Luego el recíproco del Teorema 2.2.1 no es cierto.

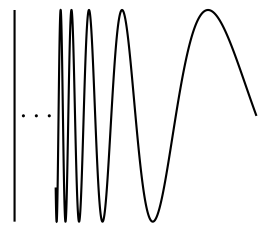

Figura 2.2. Curva senoidal del topólogo

2.3. Conexidad local en $S_c(X)$

Ahora veamos algunos resultados acerca de la conexidad local. Recordemos que un espacio métrico X es *localmente conexo* si, para cada $x \in X$ y cualquier abierto V tal que $x \in V$, existe un abierto conexo U donde $x \in U \subseteq V$. El siguiente resultado es el principal teorema de esta sección donde probamos que un espacio métrico X es localmente conexo si, y solo si, su hiperespacio de sucesiones convergentes $S_c(X)$ es localmente conexo.

Teorema 2.3.1. *Sea X un espacio métrico sin puntos aislados. Entonces X es localmente conexo si, y solo si, $S_c(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo y probemos que $S_c(X)$ es localmente conexo. Fijemos $S \in S_c(X)$ y un abierto $\mathcal{O}$ de $S_c(X)$ tal que $S \in \mathcal{O}$. Tomemos un abierto básico $\langle U_1 \ldots, U_n \rangle_c$ de $S_c(X)$ tal que $S \in \langle U_1 \ldots, U_n \rangle_c \subseteq \mathcal{O}$. Como X es localmente conexo, podemos encontrar un abierto básico $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle_c$ de $S_c(X)$ tal que $S \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle_c \subseteq \langle U_1 \ldots, U_n \rangle_c$ con V_i conexo, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por Proposición 1.1.7, $\mathcal{F}(V_i)$ es conexo. Por (Camargo y Villamizar, 2020, Teorema 7.13), tenemos que $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}(V_i)$ es conexo. Sea $u\colon \prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}(V_i) \to \mathcal{F}(X)$ la función dada por $u(F_1, \ldots, F_n) = F_1 \cup \ldots \cup F_n$, para cada $(F_1, \ldots, F_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}(V_i)$. Por la Proposición 1.1.5,

u es continua. Notemos que $u\left(\prod_{i=1}^{n}\mathcal{F}(V_i)\right)=\langle V_1,\ldots,V_n\rangle_c\bigcap\mathcal{F}(X)$. Por (Camargo y Villamizar, 2020, Teorema 7.10), $\langle V_1,\ldots,V_n\rangle_c\bigcap\mathcal{F}(X)$ es conexo. Ahora, tomemos V_S el abierto de $\{V_1,\ldots,V_n\}$ tal que $x_S\in V_S$. De acuerdo con el Teorema 2.2.3, $S_c(\mathcal{V}_S)$ es conexo. Entonces, $\mathcal{D}:=\{T\cup F\colon T\in S_c(\mathcal{V}_S)$ y $F\in\langle V_1,\ldots,V_n\rangle_c\bigcap\mathcal{F}(X)\}$ es la imagen continua de $S_c(\mathcal{V}_S)\times\langle V_1,\ldots,V_n\rangle_c\bigcap\mathcal{F}(X)$; por lo cual, es conexo. Por otra parte, es sencillo verificar que $\mathcal{D}$ es denso en $\langle V_1,\ldots,V_n\rangle_c$. Por lo tanto, $\langle V_1,\ldots,V_n\rangle_c$ es una vecindad conexa de S contenida en $\mathcal{O}$.

Recíprocamente, veamos que si $S_c(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo. Supongamos que X no es localmente conexo en algún punto x de X. Fijemos un abierto U de x en X tal que, para cualquier abierto V de X con $x\in V\subseteq U$, V no es conexo. Notemos que x no es punto aislado en X. Así tomemos $S\in S_c(X)$ tal que $x=x_S$ y $S\subseteq U$. Ahora, como $S_c(X)$ es localmente conexo, podemos encontrar un abierto conexo $\mathcal{O}$, tal que $S\in\mathcal{O}\subseteq\langle U\rangle_c$. Notemos que por Lema 2.4.9, tenemos que $N=\bigcup\mathcal{O}$ es un abierto de X. Como $x\in N\subseteq U$, el conjunto N no es conexo. Luego existen dos abiertos disjuntos V_0 y W_0 de X tales que $N=V_0\cup W_0$ y $x\in V_0$. Ahora por la elección de U tenemos que V_0 no es conexo, así podemos encontrar dos abiertos disjuntos V_1 y W_1 de X tales que $V_0=V_1\cup W_1$ y $x\in V_1\subseteq U$. Así de manera inductiva para cada $n\in\mathbb{N}$ podemos encontrar dos abiertos disjuntos V_n y W_n de X tal que $x\in V_n\subseteq U$ y $V_{n-1}=V_n\cup W_n$.

Observación 2.3.2. *Notemos que* $N\setminus W_k=V_k\cup\bigcup\{W_n\colon n<k\}$ *es abierto para cada* $k\in\mathbb{N}$.

Por otra parte, como X es un espacio métrico sin puntos aislados, con la prueba de la siguiente afirmación damos por terminada la demostración.

Afirmación 2.3.3. *El conjunto* W_n *es discreto para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Asumamos que W_m no es discreto para algún $m \in \mathbb{N}$. Sea y un punto de acumulación en W_m. Sean S_0 y $\langle V_1, \ldots, V_k \rangle_c$ una sucesión y un abierto de $S_c(X)$ tales que $y \in S_0 \in \langle V_1, \ldots, V_k \rangle_c \subseteq \mathcal{O}$. Para cada V_j tomemos un y_j con $j \in \{1, \ldots, k\}$. Como y no es un punto aislado. Podemos fijar $S_y \in S_c(X)$, tal que $y \in S_y \subseteq W_m \cap (V_1 \cup \ldots \cup V_k)$ y S_y converge a y. Sea $S_1 = S_y \cup \{y_j \colon 1 \leq j \leq k\}$. Notemos que $y \in S_1 \in \langle V_1, \ldots, V_k \rangle_c \subseteq \mathcal{O}$ y S_1 converge a y. Como la colección $\{W_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ es disjunta y $y \in W_m$, podemos fijar un $r \in \mathbb{N}$ tal que $S_1 \cap W_r = \emptyset$. Sea $z \in W_r$. Como $W_r \subset N$, podemos tomar una sucesión $T \in \mathcal{O}$ tal que $z \in T$. Luego $T \cap W_r \neq \emptyset$. Por la Observación 2.3.2 tenemos que $\langle N \setminus W_r \rangle_c$ es una abierto de $S_c(X)$ y es claro que $\langle W_r, N \rangle_c$ tambien es abierto de $S_c(X)$. Más aún, $\mathcal{O} \subseteq \langle N \setminus W_r \rangle_c \cup \langle W_r, N \rangle_c$ y $\langle N \setminus W_r \rangle_c \cap \langle W_r, N \rangle_c = \emptyset$. Ahora es claro que $S_1 \in \mathcal{O} \cap \langle N \setminus W_r \rangle_c$ y $T \in \mathcal{O} \cap \langle W_r, N \rangle_c$. Así $\mathcal{O}$ sería disconexo. Lo que es una contradicción. Esto prueba la Afirmación 2.3.3.

□

2.4. Conexidad por caminos en $S_c(X)$

Para esta sección, mostramos que la conexidad por caminos de $S_c(X)$ implica la conexidad por caminos de X y presentamos un ejemplo que muestra que la reciproca no es verdadera, pues se muestra un ejemplo donde el espacio es conexo por caminos pero el hiperespacio no lo es. Para esto iniciaremos mostrando el siguiente lema.

Lema 2.4.1. *Sea X un espacio métrico sin puntos aislados. Si $\mathcal{A}$ es un compacto conexo de $\mathcal{K}(X)$ y $S \in \mathcal{A}$, entonces cada componente de $\bigcup \mathcal{A}$ intersecta a S.*

Demostración. Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}(X)$, $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{K}(X)$, por (Michael, 1951, teorema 2.5). Por otra parte, $S \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, pues $S \in \bigcup \mathcal{A}$. Ahora queremos ver que, si A_0 es una componente de $\bigcup A$, entonces $A_0 \cap S \neq \emptyset$. Supongamos lo contrario; esto es, existe una componente A de $\bigcup \mathcal{A}$ tal que $A \cap S = \emptyset$. Así, por (Camargo y Villamizar, 2020, Teorema 10.11), existen dos cerrados disjuntos E y F tales que $\bigcup \mathcal{A} = E \cup F$, $A \subseteq E$ y $S \subseteq F$. A su vez, por la normalidad de X, existen abiertos U y V de X tales que $E \subseteq U, F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Notemos que $\bigcup \mathcal{A} \subseteq U \cup V$. Notemos que $\mathcal{A} \subseteq \langle X, U\rangle \cup \langle V\rangle$ y $S \in \langle V\rangle$. Además, como $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, existe $L \in \mathcal{A}$ tal que $L \cap A \neq \emptyset$; es decir, $\langle X, U\rangle \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Como $\langle X, U\rangle \cap \langle V\rangle = \emptyset$, contradecimos la conexidad de $\mathcal{A}$. De lo anterior, $A_0 \cap S \neq \emptyset$ para cada componente A_0 de $\bigcup \mathcal{A}$. $\square$

Ahora mostraremos un teorema que será de mucha ayuda.

Teorema 2.4.2. *Si $\alpha\colon [0,1] \to S_c(X)$ es un camino y $p \in \alpha(0)$, entonces existe un camino $f\colon [0,1] \to X$ tales que $f(0) = p$ y $f(t) \in \alpha(t)$ para todo $t \in [0,1]$.*

Demostración. Sea $C = \bigcup \alpha([0,1]) \subseteq X$. Por Proposición 1.1.5 tenemos que C es compacto. Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ y $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ definimos $I_{n,i} = [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Ahora para cada $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, definiremos recursivamente $p_{n,i}$ y un conjunto compacto $C_{n,i}$ de la siguiente manera. Tomemos $p_{n,0} = p$ y $C_{n,0}$ la componente de $\bigcup \alpha(I_{n,0})$ que tiene a $p_{n,0}$. Por Lema 2.4.1 para cada $0 < i < 2^n$ podemos tomar $p_{n,i} \in C_{n,i-1} \cap \alpha(\frac{i}{2^n})$. Sea $C_{n,i}$la componente conexa de $\bigcup \alpha(I_{n,i})$ que contiene a $p_{n,i}$. Aplicando nuevamente la Proposición 1.1.5 tenemos que $C_{n,i}$ es compacto para cada

$i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$. Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el subespacio compacto y conexo $G_n = \bigcup\{I_{n,i} \times C_{n,i} : i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}\}$ de $[0,1] \times C$. Como $\mathcal{K}([0,1] \times C)$ es compacto. Existe un punto de acumulación G de $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{K}([0,1] \times C)$. De esta manera mostremos las siguientes afirmaciones para mostrar que G es la gráfica de la función f que necesitamos.

Afirmación 2.4.3. *$G \cap (\{t\} \times C) \subseteq \{t\} \times \alpha(t)$.*

Supongamos lo contrario, es decir que existe $t \in [0,1]$ y un punto $x \in C \setminus \alpha(t)$ tales que $(t, x) \in G$. Tomemos dos abiertos y disjuntos U_x y U_t tales que $x \in U_x$ y $\alpha(t) \subseteq U_t$. Como α es continua, podemos encontrar un abierto V tal que $t \in V \subseteq [0,1]$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > N, i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ y $V \cap I_{n,i} \neq \emptyset$, entonces tenemos que $\alpha(I_{n,i}) \subseteq \langle U_t \rangle$. Notemos que $\mathcal{O} = \langle V \times U_x, [0,1] \times C \rangle$ es una vecindad de G en $\mathcal{K}([0,1] \times C)$ pues $(t,x) \in G$. Ahora veamos que $G_n \notin \mathcal{O}$ siempre que $n > N$ y $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$. Consideremos los siguientes casos: Si $V \cap I_{n,i} = \emptyset$, entonces es claro que $(I_{n,i} \times C_{n,i}) \cap (V \times U_x) = \emptyset$. Si $V \cap I_{n,i} \neq \emptyset$, entonces $(\bigcup \alpha(I_{n,i})) \cap U_x \subseteq U_t \cap U_x = \emptyset$. En particular, $C_{n,i} \cap U_x = \emptyset$. En consecuencia, $(I_{n,i} \times C_{n,i}) \cap (V \times U_x) = \emptyset$. De esta manera hemos probado que la intersección $G_n \cap (V \times U_x)$ es vacía para cada $n > N$. Por tanto $\mathcal{O}$ es una vecindad de G la cual interseca a lo sumo N elementos de $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$, lo que es imposible. Así $G \cap (\{t\} \times C) \subseteq \{t\} \cap \alpha(t)$. Culminando así la prueba de la Afirmación 2.4.3.

Afirmación 2.4.4. *$\pi_{[0,1]}(G) = [0,1]$ y $(0, p) \in G$, donde $\pi_{[0,1]} : [0,1] \times C \to [0,1]$ es la función proyección.*

Primero probemos que $\pi_{[0,1]}(G) = [0,1]$. Supongamos que $\pi_{[0,1]}(G) \neq [0,1]$. Tomemos un abierto propio U de $[0,1]$ tal que $\pi_{[0,1]}(G) \subseteq U$. Como $G \in \langle U \times C \rangle$, podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $G_n \in \langle U \times C \rangle$. Por lo que $\pi_{[0,1]}(G_n) \subseteq U$ lo cual contradice que $\pi_{[0,1]}(G_n) = [0,1]$. Por lo tanto $\pi_{[0,1]}(G) = [0,1]$.

Ahora veamos que $(0,p) \in G$. Supongamos que $(0,p) \notin G$. Consideremos el conjunto $V = ([0,1] \times C) \setminus \{(0,p)\}$. Observe que $G \in \langle V \rangle$. Por la construcción, sabemos que $(0,p) \in I_{n,0} \times C_{n,0} \subseteq G_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$; esto es, $G_n \notin \langle V \rangle$. Como consecuencia tenemos que $\langle V \rangle \cap \{G_n \colon n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, pero esto es una contradicción. Así $(0,p) \in G$. De esta manera queda demostrada la Afirmación 2.4.4

Afirmación 2.4.5. *El conjunto G es la gráfica de una función.*

Sean $t \in [0,1]$ y (t,x_1) y (t,x_2) puntos en G. Probemos que $x_1 = x_2$. Supongamos que $x_1 \neq x_2$. Por la Afirmación 2.4.3, tenemos que $x_1, x_2 \in \alpha(t)$, ahora existen dos abiertos U_1 y U_2 de X tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Por la continuidad de α, podemos encontrar un intervalo abierto V de $[0,1]$ tal que $t \in V$ y un $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > N, i \in \{0,\ldots,2^n-1\}$ y $V \cap I_{n,i} \neq \emptyset$, entonces $\alpha(I_{n,i}) \subseteq \langle U_1, U_2 \rangle_c$. Note que $G \in \mathcal{O}$, donde $\mathcal{O} = \langle V \times U_1, V \times U_2, [0,1] \times C \rangle_c$. Ahora veamos que $G_n \neq \mathcal{O}$ siempre que $n > N$. Fijemos $n > N$ y consideremos los conjuntos

$$G'_n = \bigcup \{I_{n,i} \times C_{n,i} \colon i \in \{0,\ldots,2^n-1\} \text{ y } I_{n,i} \cap V = \emptyset\} \text{ y}$$
$$G''_n = \bigcup \{I_{n,i} \times C_{n,i} \colon i \in \{0,\ldots,2^n-1\} \text{ y } I_{n,i} \cap V \neq \emptyset\}.$$

Por un lado es claro que $G'_n \cap (V \times U_j) = \emptyset$, para cada $j \in \{1,2\}$. Por otro lado, observemos que G''_n es conexo. Más aún, por la elección de V, $G''_n \subseteq ([0,1] \times U_1) \cup ([0,1] \times U_2)$. De esta manera para algún $j \in \{1,2\}$ tenemos que $G''_n \cap (V \times U_j) \neq \emptyset$. Luego se sigue que

$G_n \cap (V \times U_j) = (G'_n \cap (V \times U_j) \cup (G''_n \cap (V \times U_j) = \emptyset$. Esto muestra que $G_n \notin \mathcal{O}$ para todo $n > N$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x_1 = x_2$, lo que muestra nuestra Afirmación 2.4.5.

Así, definimos $f\colon [0,1] \to C$ tal que $(t, f(t)) = G \cap \{t\} \times C$. Note que f es una función tal que $f(0) = p$ y $f(t) \in \alpha(t)$ para cada $t \in [0,1]$. Sabemos que G es cerrado y que C es compacto. Ahora por (Engelking, 1989, Ejemplo 3.1.D (a)) tenemos que f es continua. □

Teorema 2.4.6. *Sea X un espacio métrico sin puntos aislados. Si $S_c(X)$ es conexo por caminos, entonces X es conexo por caminos.*

Demostración. Sean p y q puntos de X. Como X no tiene puntos aislados, podemos encontrar dos sucesiones disjuntas $S_p, S_q \in S_c(X)$ tales que S_p y S_q tienen como punto límite a p y a q, respectivamente. Por Teorema 2.4.2 tenemos que existe un camino $f_1\colon [0, 1/3] \to X$ tal que $f_1(0) = p$ y $f_1(\frac{1}{3}) = w \in S_q$. Ahora tome una sucesión $S_w \in f([0, 1/3])$ que converja a w. Aplicando nuevamente el Teorema 2.4.2, tenemos que existe un camino $f'_3\colon [2/3, 1] \to X$ tales que $f'_3(2/3) = q$ y $f'_3(1) = r \in S_w$. Note que $f_3\colon [2/3, 1] \to X$ dada por $f_3(t) = f'_3(5/3 - t)$ es un camino tal que $f_3(2/3) = r$ y $f_3(1) = q$. Además observemos que existe un camino $f_2\colon [1/3, 2/3] \to X$ tales que $f_2(1/3) = w$ y $f_2(2/3) = r$. De esta manera tenemos que existe un camino que conecta a p y q. Esto demuestra lo deseado. □

Veamos que la reciproca del teorema anterior no se cumple. Para esto veamos el siguiente lema.

Lema 2.4.7. *Sea $f\colon [0,1] \to S_c(X)$ una función continua. Suponga que C es un cerrado no vacío de $\bigcup f([0,1])$. Si $u = \text{ínf}\{s \in [0,1]\colon f(s) \cap C \neq \emptyset\}$, entonces $f(u) \cap C \neq \emptyset$.*

Demostración. Por la Proposición 1.1.5, tenemos que $\bigcup f([0,1])$ es compacto. Luego C es compacto. Supongamos que $f(u) \cap C = \emptyset$. Por la compacidad de $f(u)$ y C, existe un abierto V de X tal que $f(u) \subseteq V$ y $V \cap C = \emptyset$. Así, tenemos que $f^{-1}(\langle V \rangle)$ es un abierto de $[0,1]$ tal que $u \in f^{-1}(\langle V \rangle)$ y $f^{-1}(\langle V \rangle) \cap \{s \in [0,1]\colon f(s) \cap C \neq \emptyset\} = \emptyset$. Esto es una contradicción; pues, como $u = \text{ínf}\{s \in [0,1]\colon f(s) \cap C \neq \emptyset\}$, existe $s \in V$ y $f(s) \cap C \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f(U) \cap C \neq \emptyset$. □

Terminamos nuestro trabajo presentando un ejemplo de un continuo arcoconexo, donde su hiperespacio de sucesiones convergentes no es arcoconexo.

Proposición 2.4.8. *Existe un continuo arcoconexo X tal que su hiperespacio de sucesiones convergentes $S_c(X)$ no es arcoconexo.*

Demostración. Sea $X = (\{0\} \times [0,1]) \cup A \cup B \subset \mathbb{R}^2$, donde

$$A = \{(x, |\operatorname{sen}(\pi/x)|) : x \in [0,1]\} \text{ y}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon (x-1/2)^2 + y^2 = 1/4 \text{ y } y > 0\}.$$

Es fácil ver que X es un continuo. Este continuo se conoce como el *Círculo de Varsovia*. Note que X es conexo por caminos, pero, como veremos a continuación, su hiperespacio $S_c(X)$ no lo es. Para esto, sean las sucesiones $S_0 = \{(0,0), (0,1/n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ y $S_1 = \{(0,0), (1/n,0)\colon n \in \mathbb{N}\}$ (ver la Figura 2.3). Veamos que no existe camino en $S_c(X)$ que conecte a S_0 con S_1.

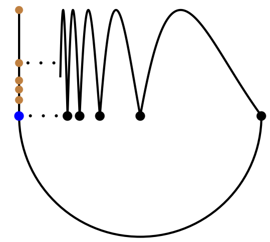

Figura 2.3. Círculo de Varsovia.

Supongamos que existe un camino $f\colon [0,1] \to S_c(X)$ tales que $f(0) = S_0$ y $f(1) = S_1$. Sea $\pi_1\colon A \to (0,1]$ la proyección sobre la primer coordenada, esto es $\pi_1(a,b) = a$ para cada $(a,b) \in A$. Notemos que π_1 es un homeomorfismo. Para todo $q \in (0,1)$, definimos $A_q = \pi_1^{-1}(0,q)$.

Observación 2.4.9. *Notemos que una sucesión convergente S está contenida en algún arco de X si, y solo si, existe un $q \in (0,1)$ tal que $A_q \cap S = \emptyset$.*

Por la Observación 2.4.9, si S no está contenida en algún arco, entonces el punto límite de S pertenece a $\{0\} \times [0,1]$. Ahora, mientras que S_0 está contenido en el arco $\{0\} \times [0,1]$, la sucesión S_1 no lo está. Sea

$$r = \sup\{s \in [0,1] \colon f(t) \text{ esta contenido en algún arco para cada } t \leq s\},$$

y escojamos $B_1, \ldots, B_m$ abiertos disjuntos dos a dos de X, tales que $f(r) \in \langle B_1, \ldots, B_m \rangle$. Consideremos dos casos:

Caso 1. $f(r)$ esta contenido en algún arco. Claramente, $0 \leq r < 1$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $t \in [r, r+\varepsilon)$ tal que $f(t)$ no está contenido en un arco. Si $f(r) \cap (\{0\} \times [0,1]) = \emptyset$, por la Observación 2.4.9, entonces existe un abierto U y $p \in (0,1)$ tal que $f(r) \subseteq U$ y $U \cap A_p = \emptyset$. Así $f(r) \in \langle U \rangle_c$ y $\langle U \rangle_c$ no contiene una sucesión que no esté contenida en un arco. Lo cual es una contradicción, pues f es continua y tendríamos que $f(t) \in \langle U \rangle$, pero $f(t)$ no está contenida en un arco. Luego $f(r) \cap (\{0\} \times [0,1]) \neq \emptyset$. Así, por la Observación 2.4.9, existe $q \in (0,1)$ tal que $A_q \cap f(r) = \emptyset$. Sea $t_0 \in (r,1]$ tal que $f([r,t_0]) \subseteq \langle B_1, \ldots, B_m \rangle_c$ y $f(t_0)$ no esté contenido en algún arco de X. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el punto límite de $f(t_0)$ está en B_1. Por lo anterior, tenemos que $f(t_0) \cap A \cap B_1$ es infinito. Ahora tomemos una componente conexa C de $A \cap cl(B_1)$ tal que $C \cap f(t_0) \neq \emptyset$ y $C \subseteq A_q$. Note que $C \cap f(r) = \emptyset$, pues $f(r) \cap A_q = \emptyset$ y $C \subseteq A_q$. Sea $a = \text{mín}\{g(y) \colon y \in C\}$ y $b = \text{máx}\{g(y) \colon y \in C\}$. Como g es un homeomorfismo y C es un compacto no vacío, tenemos que $g(C) = [a,b]$ y $g^{-1}(a), g^{-1}(b) \in Fr(U_1)$. Notemos que ni $g^{-1}(a)$, ni $g^{-1}(b)$ están en B_1. Sea $D = C \cap (\bigcup f([r,t_0]))$. Observe que D es un subconjunto cerrado de $\bigcup f([r,t_0])$.

Afirmación 2.4.10. $D = \bigcup f([r,t_0]) \cap B_1 \cap (A_b \setminus cl(A_a))$.

Veamos la prueba de la afirmación. Como $\bigcup f([r,t_0]) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ y $B_i \cap B_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$, tenemos que $(\bigcup f([r,t_0])) \cap U_1$ es cerrado. Ahora, como $g^{-1}(a), g^{-1}(b) \notin B_1$, tenemos que $D \subseteq (\bigcup f([r,t_0])) \cap B_1 \cap (A_b \setminus cl(A_a))$. Es claro que $(\bigcup f([r,t_0])) \cap B_1 \cap (A_b \setminus cl(A_a)) \subseteq C$. De esta manera tenemos que $D = (\bigcup f([r,t_0])) \cap B_1 \cap (A_b \setminus cl(A_a))$. Lo que termina la demostración de la Afirmación 2.4.10

Por otra parte, notemos que $f|_{[r,t_0]}, \langle B_1, \ldots, B_m \rangle$ y D satisfacen las condiciones de el Lema 2.4.7. Por lo que obtenemos que $f(u) \cap D \neq \emptyset$ donde $u = \text{ínf}\{s \in [r,t_0] \colon f(s) \cap D \neq \emptyset\}$. Por la construcción, tenemos que $r < u$. Consideremos ahora los abiertos $V = B_1 \cap (A_b \setminus cl(A_a))$ y $\langle V, B_1, \ldots, B_m \rangle$. De acuerdo con la Afirmación 2.4.10, sabemos que $V \cap \bigcup f([r,t_0]) = D$ y por el Lema 2.4.7, $f(u) \in \langle V, B_1, \ldots, B_m \rangle$. Así $f^{-1}(\langle V, B_1, \ldots, B_m \rangle)$

es un abierto de $[r, t_0]$ tal que $u \in f^{-1}(\langle V, B_1, \ldots, B_m \rangle)$ y $f^{-1}(\langle V, B_1, \ldots, B_m \rangle) \cap [r, u) = \emptyset$. lo que contradice la continuidad de f.

Caso 2. $f(r)$ no está contenido en algún arco. En particular tenemos que $0 < r$ y que el punto límite de $f(r)$ está en $\{0\} \times [0, 1]$. Sin pérdida de generalidad suponemos que el punto límite de $f(r)$ está en B_1.

Fijemos $t_0 \in [0, r)$ tal que $f([t_0, r]) \subseteq \langle B_1, \ldots, B_m \rangle$ y sea $q \in (0, 1)$ tales que $f(t_0) \cap A_q = \emptyset$. Tomemos una componente conexa C de $A \cap cl(B_1)$, tal que $C \cap f(r) \neq \emptyset$ y $C \subseteq A_q$. Consideremos $a = \text{mín}\{g(y) \colon y \in C\}$ y $b = \text{máx}\{g(y) \colon y \in C\}$. Definamos $D = C \cap (\bigcup f([t_0, r]))$.

Afirmación 2.4.11. $D = (\bigcup f([t_0, r])) \cap B_1 \cap (A_b \setminus cl(A_a))$.

En primer lugar tenemos que $\bigcup f([t_0, r]) \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_i$. Como los abiertos B_i son disjuntos, entonces obtenemos que $(\bigcup f([t_0, r])) \cap B_1$ es cerrado. Notemos que $g^{-1}(a), g^{-1}(b) \notin B_1$. Luego tenemos que $D \subseteq (\bigcup f([t_0, r])) \cap B_1 \cap (A_b \setminus cl(A_a))$. Además es claro que $(\bigcup f([t_0, r])) \cap B_1 \cap (A_b \setminus cl(A_a)) \subseteq C$. Concluyendo así la demostración de la Afirmación 2.4.11.

Sea $u = \inf\{s \in [t_0, r] \colon f(s) \cap D \neq \emptyset\}$. Nuevamente observemos que la función $f|_{[t_0, r]}$, $\langle B_1, \ldots, B_m \rangle$ y D satisfacen las hipótesis del Lema 2.4.7. Así, $f(u) \cap D \neq \emptyset$. Luego $u > t_0$. Consideremos los abiertos $V = B_1 \cap (A_b \setminus cl(A_a))$ y $\langle V, B_1, \ldots, B_m \rangle$. Por la Afirmación 2.4.11, $V \cap (\bigcup f([t_0, r])) = D$. Como $f(u) \cap D \neq \emptyset$, entonces $f(u) \in \langle V, B_1, \ldots, B_m \rangle$. Luego, $f^{-1}(\langle V, B_1, \ldots, B_m \rangle)$ es un abierto de $[t_0, r]$ tal que $u \in f^{-1}(\langle V, B_1, \ldots, B_m \rangle)$ y $f^{-1}(\langle V, B_1, \ldots, B_m \rangle) \cap [u, r] = \emptyset$, pero esto contradice la continuidad de f.

Por lo tanto no existe un camino entre S_0 y S_1 y, $S_c(X)$ no es conexo por caminos.

□

Observación 2.4.12. *El Espacio Peine (ver Ejemplo 2.1.18) es un ejemplo de un espacio conexo por caminos el cual su hiperespacio también lo es. Por otra parte, el Circulo de Varsovia (ver la Proposición 2.4.8) es un espacio conexo por camino y su hiperespacio resulta no ser lo.*

En este contexto es interesante preguntarse:

Pregunta 2.4.13. *¿Qué condiciones debe tener X para que su hiperespacio $S_c(X)$ sea conexo por caminos?*

Referencias

Camargo, J., y Villamizar, E. (2020). *Topología general*. Ediciones UIS.

Engelking, R. (1989). *General topology*. Sigma Series in Pure Mathematics.

Garcia-Ferreira, S., y Rojas-Hernandez, R. (2017). Connectedness like properties on the hyperspace of convergent sequences. *Topology and its Aplications*, *230*, 639-647. Descargado de http://doi.org/10.1016/j.topol.2017.08.024

García-Ferreira, S., y Ortiz-Castillo, Y. (2015). The hyperspace of convergent sequences. *Topology and its Applications*, *196*, 795-804. Descargado de https://doi.org/10.1016/j.topol.2015.05.022

Illanes, A., y Nadler, S. (1999). *Hyperspaces: fundamentals and recent advances*. CRC Press.

Michael, E. (1951). Topologies on spaces of subsets. *Transactions of the American Mathematical Society*, *71*(1), 152-182. Descargado de https://www.jstor.org/stable/1990864

Nadler, S. (2002). *Dimension theory: an introduction with exercise*. Sociedad Matemática Mexicana.