CONSTRUCCIONES DINÁMICAS Y ESTÁTICAS DEL INFINITO: UN ANÁLISIS TEÓRICO EN UN CONTEXTO DE PARADOJAS

DIANA PAOLA VILLABONA MILLÁN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2014

CONSTRUCCIONES DINÁMICAS Y ESTÁTICAS DEL INFINITO: UN ANÁLISIS TEÓRICO EN UN CONTEXTO DE PARADOJAS

DIANA PAOLA VILLABONA MILLÁN

Trabajo de Grado para Optar al Título de
Magister en Educación Matemática

Directora

SOLANGE ROA FUENTES
Doctora en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2015

DEDICATORIA

A Anita… El amor infinito que trasciende el tiempo.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer muy especialmente a la doctora Solange Roa Fuentes, directora de este proyecto de investigación, quien con su amistad, confianza, apoyo y dedicación, hizo posible esta anhelada meta, mi infinita gratitud.

A la doctora María Trigueros Gaisman y a el doctor Gabriel Yáñez Canal, por su lectura crítica y objetiva, sus aportes sin duda han ayudado a hacer de éste un mejor documento.

A mi familia, especialmente a Lolo, por su apoyo, paciencia y amor incondicional, a mi padre Mauricio Villabona, a mi tía Naty y a mis hermanos Sebastián y Andrea; también a Tabita y a Lucci, quienes sin saberlo llenan mi vida de felicidad.

A los estudiantes de maestría entrevistados, gracias por su valiosísima colaboración. En general, a mis compañeros de posgrados de la Escuela de Matemáticas, por su amistad, apoyo y compañía durante estos dos años de esfuerzos, dificultades y satisfacciones.

A mis amigos, por animarme en mis fracasos y celebrar mis triunfos, en especial a Luisa Bermúdez, Juliana Guerrero, Jahir Calderón, Laura Rangel, Tatiana Sánchez, Mariana Naranjo, Sergio Castillo, Laura Avendaño, Diana Rondón, a los de toda la vida, a los colegas (Nathis y Danny), entre otros tantos que de alguna u otra forma siempre están ahí, muchas gracias.

A mi equipo de charadas, Laura Jaimes y Carolina Barajas. La vida nos llevará justo a donde queramos.

A los profesores y profesoras de la Escuela de Matemáticas por su enseñanza, acompañamiento y consejo a lo largo de mi vida universitaria. Gracias por hacer crecer en mí el amor por las matemáticas.

A la Universidad Industrial de Santander porque en sus aulas he pasado los mejores años de mi vida. Alma Mater motivo de orgullo, espero seguir llevando con honor el título de egresada.

CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

RESUMEN

TÍTULO: CONSTRUCCIONES DINÁMICAS Y ESTÁTICAS DEL INFINITO: UN ANÁLISIS TEÓRICO EN UN CONTEXTO DE PARADOJAS*.

AUTORES: VILLABONA MILLÁN Diana Paola**.

PALABRAS CLAVES: Infinito Matemático, Teoría APOE, Paradojas, Estructuras y Mecanismos Mentales y Pensamiento Matemático Avanzado.

DESCRIPCION:

El estudio de la construcción del infinito matemático a partir de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) ha permitido determinar que la naturaleza dual del infinito (potencial y actual) responde a dos estructuras cognitivas diferentes de la misma noción, proceso y objeto, respectivamente. Además, estas estructuras han logrado caracterizarse, en procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes. La estructura proceso de infinito está íntimamente relacionada con una concepción proceso del conjunto de los números naturales, es por esto que corresponde a procesos iterativos infinitos. Además, un individuo podrá construir una estructura objeto de infinito si logra ver el proceso iterativo infinito como un todo y puede imaginar las características que tendrá ese "todo".

En este estudio nos valemos del infinito en contextos paradójicos y de la geometría fractal, buscando analizar la forma en que un individuo genérico pasa de una visión potencial del infinito a una actual. Siguiendo una adaptación del paradigma de investigación propuesto por la teoría APOE, hemos planteado algunos modelos hipotéticos de construcción del infinito que han llegado a ser refinados a través de datos empíricos extraídos de entrevistas aplicadas a estudiantes de Maestría en Matemática y Maestría en Educación Matemática.

En esta investigación se ofrecen evidencias que buscan caracterizar el mecanismo que permite el paso de una concepción proceso a una concepción objeto de infinito. Este mecanismo recibe el nombre de Completez (Roa-Fuentes, 2012; Roa-Fuentes y Oktaç, 2014) y está relacionado con la concepción que el individuo tenga del conjunto de los números naturales, así como el conocimiento de algunos conceptos específicos de la teoría de conjuntos de Cantor.

*Trabajo de Grado

**Facultad de Ciencias Exactas. Escuela de Matemáticas. Directora: Ph.D. Solange Roa Fuentes.

ABSTRACT

TITLE: DYNAMIC AND STATIC CONSTRUCTIONS OF THE INFINITE: A THEORETICAL ANALYSIS IN A CONTEXT OF PARADOXES*.

AUTHOR: VILLABONA MILLÁN Diana Paola**

KEY WORDS: Mathematical Infinite, APOS Theory, Paradoxes, Structures and Mental Mechanisms and Mathematical Advanced Thinking.

DESCRIPTION:

The study of the construction of the mathematical infinite from the APOS theory (Action, Process, Object and Scheme) has allowed to determine that the dual nature of the infinite (potential and actual) answers to two cognitive structures different from the same notion, process and object, respectively. In addition, these structures have managed to be characterized, in iterative infinite processes and transcendent objects. The structure process of infinite is intimately related to a conception process of the set of the natural numbers thus it corresponds to iterative infinite processes. Furthermore, an individual will be able to construct a structure object of infinite if he manages to see the iterative infinite process as a whole and can imagine the characteristics that 'whole' will have.

In this study we use the infinite in paradoxical contexts and the fractal geometry, in order to analyze the form in which a generic individual goes from a potential vision of the infinite to a actual one. Following an adjustment of the paradigm of research proposed by the APOS theory, we have raised some hypothetical models of construction of the infinite which have managed to be refined across empirical data extracted from interviews applied to students of Master's degree in Mathematics and Master's degree in Mathematics Education.

In this research evidences which seek to characterize the mechanism that enables the step from a conception process to a conception object of infinite are offered. This mechanism is called *Completez* (Roa-Fuentes, 2012; Roa-Fuentes y Oktaç, 2014) and it is related to the conception that the individual has of the set of the natural numbers, as well as the knowledge of some specific concepts of the Cantor set theory.

---

*Graduate work

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director: Ph. D. Solange Roa Fuentes

INTRODUCCIÓN

Filósofos, matemáticos, artistas, teólogos, personas del común, entre otras, han utilizado el infinito en su quehacer, ya sea como una forma de expresar inmensidad o como una refinada construcción. "Infinito es el talento", "el amor de mi madre", "el número de estrellas en el firmamento", "la misericordia de dios", "los números naturales y también los reales". Por lo tanto, infinito es todo lo que no se agota, lo que no se puede contar y lo que no está determinado. Nuestro sentido común concibe esta noción exclusivamente de forma dinámica, donde el infinito es un proceso que se repite sin fin.

Belmonte (2009) propone que el origen del infinito es inminentemente filosófico. Sin embargo, Cantor ha reclamado para las matemáticas, el paraíso que ha dejado su entera comprensión. Contradiciendo lo propuesto por Aristóteles sobre la incapacidad que tienen los individuos de ver procesos infinitos terminados, Cantor logró demostrar que la mente humana puede imaginar lo que ocurre si un proceso infinito se realiza en su totalidad, concebir el infinito actual. Las primeras técnicas que empezaron a tomar en cuenta de alguna forma un infinito acabado (estático) resultaban ser contradictorias y paradójicas para los estudiosos de la época. Aún más, el desarrollo de toda una teoría donde se contempla la diferente cardinalidad de conjuntos infinitos y estos conjuntos como acabados. Fue realmente un trabajo arduo para Cantor, no solo el planteamiento de su revolucionaria teoría sino la tarea persuasiva que debió emprender para convencer a sus colegas, arraigados a una concepción dinámica del infinito, de aceptar que su novedosa teoría de conjuntos era la solución a un problema milenario.

Todas las ramas de las matemáticas requieren de la comprensión de esta noción, a pesar de que no hace parte explicita de ningún currículo, ya sea en la educación básica, media o de nivel superior. Ahora bien, según Fischbein (2001) los seres humanos estamos inmersos en un contexto de características finitas, donde lo que percibimos como espacio y tiempo está limitado por nuestro entorno y nuestra mortalidad, y donde el único infinito que podemos aceptar de forma intuitiva, es uno con características dinámicas. Es por esto que sin importar la genialidad de los matemáticos antiguos, el infinito actual resultaba para ellos perturbador e incluso inalcanzable para el entendimiento humano (Castro y Pérez, 2007).

A pesar de que la teoría de conjuntos de Cantor es actualmente aceptada por la comunidad matemática y ha permitido poner fin a las diversas contradicciones generadas por una exclusiva concepción potencial del infinito; en términos educativos, el infinito actual sigue ocasionando inconvenientes que se hacen evidentes cuando los estudiantes deben enfrentarse a la comprensión de los conceptos que lo relacionan. Esta es la causa que ha impulsado investigaciones de diversa índole desde la Educación Matemática, cuyo propósito ha sido determinar cómo se construye el infinito en términos cognitivos y cuáles pueden ser las causas de las dificultades en la comprensión de esta noción.

La investigación en Educación Matemática ha buscado establecer las posibles causas que dificultan la construcción del infinito en el desarrollo de las matemáticas. Como mencionamos unas líneas atrás, las intuiciones que tienen los individuos sobre el infinito, obstaculizan su construcción cognitiva. Determinar cómo logra un individuo acallar su intuición y construir el infinito actual, puede representar un avance, al interpretarlo dentro de un contexto matemático, a partir de la construcción de procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes. Este acercamiento ha sido estudiado los últimos años desde la perspectiva de la teoría APOE.

La teoría APOE (Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema), es una teoría cognitiva que permite plantear modelos de construcción de conceptos o nociones matemáticas. El estudio del infinito a través de esta teoría ha permitido establecer que la naturaleza dual del infinito, puede ser aceptada sin dar lugar a contradicciones. Bajo la hipótesis que plantea el infinito potencial y actual como dos estructuras diferentes (dinámica y estática respectivamente) de la misma noción (Dubinsky, Weller, McDonald y Brown, 2005a; 2005b).

Las investigaciones que se han adelantado usando la teoría APOE para estudiar el infinito, han logrado refinar los constructos teóricos tradicionales y proponer algunos nuevos que buscan determinar cómo se da la construcción del infinito en la mente humana. Nuestra investigación ha buscado analizar cómo se construye el infinito matemático en estudiantes de maestría en Matemáticas y maestría en Educación Matemática, cuando se enfrentan a un contexto paradójico y de construcción de curvas fractales (paradoja de Aquiles y la tortuga, paradoja del hotel de Hilbert y la construcción del triángulo de Sierpinski). Para tal fin, tomamos recientes investigaciones que han dado cuenta de esta problemática (Dubinsky et al., 2005a; 2005b; Brown, McDonald y Weller, 2010; Roa-Fuentes, 2012; Dubinsky, Weller y Arnon, 2013; Roa-Fuentes y Oktaç, 2014).

El método seguido en nuestro trabajo ha tomado básicamente dos componentes del paradigma de investigación propuesto por la teoría APOE, para con base en una descomposición genética genérica de infinito (Roa-Fuentes, 2012; Roa-Fuentes y Oktaç, 2014), proponer análisis teóricos puntuales para los contextos estudiados. El trabajo con los estudiantes ha señalado la importancia que tiene la construcción de procesos iterativos infinitos. Esta construcción se realiza a través de la coordinación de un proceso de iteración sobre el conjunto de los números naturales y un proceso que el individuo identifica del contexto que afronta.

Si un individuo logra construir dos o más procesos iterativos infinitos, deberá coordinarlos para obtener, de esta forma, un único proceso que pueda ver como un todo. En este caso, el individuo deberá poseer una concepción objeto del conjunto de los números naturales para que el mecanismo de completez se desarrolle y pueda construir el objeto que trasciende de dicho proceso. Es decir, obtener una visión actual del proceso iterativo infinito (dinámico).

El mecanismo de coordinación se hace especialmente complejo, si los procesos iterativos que el individuo requiere coordinar son de naturaleza diferente (convergente y divergente). Además, el mecanismo de completez requiere de conocimientos muy específicos de algunos conceptos de la teoría de conjuntos de Cantor.

Esperamos que los resultados evidenciados en esta investigación contribuyan a establecer y refinar los constructos que han sido propuestos para el estudio del infinito a través de la teoría APOE. Además, que los modelos cognitivos de construcción del infinito en los tres contextos mencionados y la descomposición genética genérica, puedan ser utilizados como una herramienta pedagógica de uso en el aula y de diseño de enseñanza.

Este documento se encuentra estructurado de la siguiente manera: el capítulo 1, muestra una pequeña síntesis de la evolución de la noción de infinito a través de la historia, con sus principales representantes y sus aportes. Además, una serie de importantes antecedentes que relacionan el infinito y las intuiciones. En el capítulo 2, planteamos aspectos generales de la teoría APOE y, específicamente, la teoría APOE y el infinito, donde explicaremos los constructos teóricos que han sido refinados y propuestos recientemente. En el capítulo 3, atendiendo la problemática detallada, propondremos el planteamiento de nuestro problema de investigación, las preguntas que dirigieron nuestro estudio y el objetivo que hemos alcanzado. El capítulo 4, muestra los principales resultados de nuestras componentes de investigación, descomposiciones genéticas preliminares y análisis de datos. En el capítulo 5, se presentan las versiones refinadas de las descomposiciones genéticas de cada contexto y la descomposición genética genérica de infinito. También, realizaremos algunas recomendaciones didácticas y proponemos algunos aspectos que pueden ser de interés para futuras investigaciones. Finalmente presentamos la bibliografía que respalda nuestro estudio.

1. EL INFINITO Y LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En este capítulo mostraremos la problemática del infinito matemático a través de diferentes miradas. Iniciaremos con una síntesis histórica del desarrollo del infinito matemático. Posteriormente, presentaremos algunas de las investigaciones más relevantes en términos de la Educación Matemática, específicamente en el estudio de las intuiciones, que son de principal importancia en nuestro estudio.

1.1. PROBLEMÁTICA DEL INFINITO: SÍNTESIS HISTÓRICA

Por más de 3000 años el infinito ha rondado como un fantasma en la mente de matemáticos, filósofos y estudiantes de las matemáticas; todos los asuntos que lo han relacionado, muestran características perturbadoras e incluso paradójicas. El desarrollo de esta noción y la aceptación de la comunidad al tratamiento que se le debe dar a las situaciones que lo involucran en un contexto matemático, han sido variados y en ocasiones han originado alegatos y discusiones afamadas históricamente.

Los primeros acercamientos que tenemos las personas a la noción de infinito son de tipo dinámico, donde el infinito es un adverbio que brinda una connotación de ilimitado e inalcanzable al verbo que complementa. Al parecer esta idea perdura en la mayoría de los sujetos hasta que de alguna forma se ven enfrentados a situaciones donde se requiere afrontar la naturaleza actual del infinito. En términos históricos la evolución dual del infinito se dio de una manera similar. Son bien conocidos los planteamientos de Zenón de Elea (490 – 425 a.C.) donde ponía en evidencia la razón entre lo discreto y lo continuo, los cuales pusieron en aprietos a los griegos y sus concepciones del espacio y el tiempo (el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles por lo tanto el movimiento es continuo ó el espacio y el tiempo están formados por pequeños intervalos indivisibles por lo cual el movimiento está formado por la suma de pequeñas unidades estacionarias) (Castro y Pérez, 2007).

Los griegos estaban relacionados con lo infinito pero encaminado a describir lo caótico, ilimitado e incognoscible. *Ápeiron* (sin límite), una expresión con carácter negativo que nos permite comprender por qué los griegos se resistieron a introducir el infinito actual a sus matemáticas (Belmonte, 2009). Sumado a la expresión peyorativa existente en Grecia para referirse a lo infinito, debemos mencionar la solución que Aristóteles dio a las paradojas propuestas por Zenón. Aristóteles logró solucionar las paradojas del movimiento que Zenón había planteado, haciendo una diferenciación entre un infinito potencial y un infinito que es independiente del tiempo, infinito actual (lo continuo no se constituye de lo discreto). Sin embargo, explica que este último infinito no puede ser entendido por la mente humana, que es contradictorio y que en realidad, no existe.

Posteriormente se desarrollaron en Grecia diversas técnicas que buscaban cuidadosamente valerse de un infinito potencial y que tenían un gran éxito en la práctica. Podemos hacer referencia al método de exhaución de Eudoxo (408-355 a.C.). Sin embargo, este método posee una ventana abierta que permite concebir el infinito de la forma "prohibida" (Belmonte, 2009) pensar qué sucede cuando el proceso de agotamiento se "completa".

Según Castro y Pérez (2007) son dos los motivos por los cuales las matemáticas griegas no pudieron aceptar el infinito actual:

- Los argumentos aristotélicos en contra del infinito actual.
- El principio euclidiano de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes. (p.16)

Los planteamientos de Aristóteles sobre la inexistencia del infinito actual permanecieron inalterados. En la edad media, cuando el desarrollo científico y especialmente matemático se encontraba de capa caída debido al total dominio eclesiástico, los argumentos que usaban algunos pensadores cristianos para demostrar que el universo fue creado por Dios y que por lo tanto el tiempo no es infinito, en oposición a lo planteado por Aristóteles, provenían del propio Aristóteles. El punto de vista teológico instaló la idea del infinito actual como una cualidad atribuida a un ser todo poderoso, omnipresente, creador de todo lo existente (Castro y Pérez, 2007; Belmonte, 2009) y ponían en manifiesto la contradicción generada de la negación del infinito actual.

Una de las implicaciones directas de los planteamientos de Zenón, es que se evitara el estudio físico a partir de las representaciones matemáticas. Esto se estableció desde la antigua Grecia hasta el renacimiento con Galileo Galilei (1564-1642). Por otro lado, Cavalieri (1598-1647) ya impulsaba su "método de los indivisibles" para comparar áreas y volúmenes. El trabajo de Cavalieri influyó enormemente en Galilei. El infinito se pudo percibir en el renacimiento, en la geometría (principalmente con el método de Cavalieri) y en las artes.

Galilei (1638) manifiesta una de las ideas clave en el desarrollo de la teoría de conjuntos de Cantor. A través del planteamiento de biyecciones muestra que en los conjuntos infinitos, un subconjunto propio puede tener la misma cantidad de elementos que el conjunto que lo contiene. Planteando explícitamente el ejemplo de los números cuadrados perfectos, los que son iguales al cuadrado de otro. Sin embargo Galilei piensa que la existencia de este tipo de biyecciones es una contradicción (Salat, 2011).

El desarrollo del cálculo infinitesimal por parte de Leibniz (1646-1716) y Newton (1642-1727), toma en cuenta el infinito potencial y permite el desarrollo de técnicas que solucionan diversos problemas matemáticos. Sin embargo, dentro del cálculo existían diversas contradicciones y hechos paradójicos, dado que Leibniz y Newton aceptaban el infinito actual pero no en el sentido de Cantor. Para Leibniz, los infinitesimales eran más pequeños que cualquier número positivo pero diferentes de cero (Belmonte, 2009), mientras que la concepción de Newton sobre el infinito actual puede considerarse “actualista potencial” (Sierpinska, 1987), en vista de que pensaba en los resultados de procesos infinitos en términos del “último elemento” generado por el proceso (razones de magnitudes evanescentes) (Medina, 2001).

Bolzano (1781-1848) estudia los conjuntos infinitos, estableciendo que una característica de este tipo de conjunto es que los elementos de un conjunto pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los elementos de un subconjunto propio de él mismo. Según Belmonte (2009), desde Bolzano, se ha dejado de estudiar la noción de infinito por sí misma y se ha pasado a estudiar a través de conjuntos infinitos. Para Cantor, lo que impidió que Bolzano se acercara a una teoría de conjuntos enteramente correcta, es que no contaba con la idea de cardinalidad de conjuntos infinitos.

Con la crisis de fundamentos, las matemáticas inician un proceso de formalización. Quien lideró este proceso fue Weierstrass (1815-1897), padre del rigor matemático. El lenguaje formal buscaba darle un tinte estático al infinito eliminando el devenir temporal (Belmonte, 2009). Con la definición de conjunto infinito ofrecida por Dedekind (1831-1916) y la evolución lenta pero firme que había tenido la noción de infinito, Cantor (1845-1918) demuestra que no todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad y establece el método biyectivo como la forma para determinar si dos conjuntos infinitos tienen el mismo “tamaño”, estableciendo así la relación de equipotencia.

Cantor soluciona entonces todas las situaciones paradójicas que habían surgido desde la antigüedad al no aceptarse el infinito con su naturaleza dual, potencial y actual, dinámico y estático. A medida que el desarrollo de las matemáticas se alejaba cada vez más de la intuición humana, fue posible establecer la naturaleza actual del infinito. En las siguientes secciones plantearemos algunas investigaciones que nos permiten establecer el rol que juegan las intuiciones cuando un individuo se enfrenta a situaciones que involucran el infinito matemático.

1.2. EL INFINITO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Como hemos mostrado en la sección anterior, en matemáticas son diversas las situaciones relacionadas con el infinito. Estas situaciones generan malestar en los estudiantes que enfrentan cursos de matemáticas; sobre todo en el currículo universitario, donde muchas carreras tienen como requisito los cursos de análisis elemental que incluyen temas como límites, comportamientos asintóticos de las funciones racionales, series infinitas y sucesiones, e integrales impropias. En el caso de programas académicos donde el contenido matemático es más formal, la noción de infinito se utiliza en el estudio de estructuras matemáticas como en álgebra lineal y álgebra abstracta, análisis real y topología, donde las pruebas de existencia de conjuntos infinitos requieren la construcción de procedimientos mentales infinitos (Weller, Dubinsky, McDonald y Stenger, 2004).

En términos de la investigación en Educación Matemática, las dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan a la naturaleza dual del infinito y la relación directa que tiene esta dualidad con la comprensión de conceptos fundamentales del análisis y de las matemáticas en general, ofrece una abundante y necesaria fuente de estudio. Por esta razón, diversas investigaciones han indagado los posibles obstáculos que impiden que un individuo comprenda el infinito actual, esto involucra las intuiciones, representaciones y propiedades relacionadas con el infinito.

1.2.1. El infinito y la Intuición

La mente humana se ha adaptado a realidades finitas (en espacio y tiempo) porque lidia de forma consiente solo con objetos que expresan este tipo de realidades; en el momento en el que la comprensión del infinito actual se hace necesaria, se generan contradicciones y situaciones paradójicas (Fischbein, 2001). Los conceptos matemáticos, debido a su abstracción, complejidad o inconmensurabilidad, requieren de la creación de modelos mentales que estén más acordes a nuestra capacidad de comprensión. Fischbein (2001) analiza la influencia de los modelos mentales (modelos tácitos) relacionados con el infinito cuando un individuo se enfrenta a situaciones que involucran el infinito actual. A continuación definimos, en términos de Fischbein, lo que es un modelo mental.

> Consideremos dos sistemas, A y B, B es definido como un modelo de A si es posible trasladar propiedades de A a B de modo que se produzcan descripciones coherentes de A en términos de B, o para resolver problemas - originalmente formulados en términos de A – recurriendo a una traducción en términos de B. *El concepto de modelo mental se refiere a las representaciones mentales que sustituyen, en el proceso de razonamiento, las entidades originales, por lo general con el fin de estimular y facilitar la solución de problemas* (2001, p.312)

Algunos componentes originales del proceso de razonamiento pueden ser reemplazados por modelos mentales sin que el sujeto tenga conciencia de ello, estos modelos continúan actuando e influenciando el proceso de razonamiento sin que se tenga conciencia de su origen, ni de sus efectos; esto es lo que se define como un modelo tácito. Por ejemplo, un modelo pictórico del objeto matemático abstracto denominado punto. Hay que recordar que el punto es un objeto a-dimensionado, por lo tanto no existe en el mundo real, pero su modelo pictórico puede sernos de gran ayuda si tratamos de resolver problemas en geometría Euclidiana. Este tipo de modelos es resistente a la instrucción matemática, es decir, a pesar de que un individuo entienda que el punto, que él identifica como tal, es sólo la representación pictórica de un objeto abstracto, él continuará pensando en esta representación pictórica cuando tenga que enfrentarse a situaciones que involucren al punto como objeto abstracto. Como es de esperarse los modelos pueden ser de gran ayuda o por el contrario, pueden llevar a conclusiones erróneas y contradictorias. Lo mismo sucede con el infinito, las deducciones que se hagan basadas en el modelo intuitivo pueden ser contradictorias con las obtenidas por un razonamiento abstracto-formal (Fischbein, 2001).

Las investigaciones sobre la noción de infinito a través de la determinación de los modelos tácitos han logrado identificar algunos tipos de modelos específicos que el individuo relaciona con esta noción a lo largo de su actividad académica y no académica. Belmonte (2009; 2011) estudia la evolución del concepto de infinito desde el último curso de educación primaria hasta el primer curso de la matemática universitaria (11 años a 19 años). Para tal fin, desarrolló un cuestionario que fue aplicado a más de 2000 estudiantes, con el cual logró identificar modelos tácitos en su desempeño y expresiones; proponiendo modelos que no habían sido tomados en cuenta en otras investigaciones. A continuación haremos referencia a algunos de los más importantes modelos tácitos cuya unión hace que sean inexistentes este tipo de modelos en relación con el infinito actual (Belmonte, 2009; 2011).

Modelo infinito = infinito: Dos conjuntos infinitos siempre tienen la misma cardinalidad.

Modelo de inagotabilidad: El infinito es sinónimo de inagotable (visión netamente potencial).

Modelo de divergencia: Suma de una cantidad infinita de números sin identificar su posible convergencia.

Modelo de indefinición: Predisposición natural a evitar el tratamiento de procesos o cantidades infinitas.

La intuición es un término usado en diferentes contextos, sea ciencia o filosofía, cuya definición no se ha determinado de una forma general pero cuyos significados, diversos y contradictorios, se relacionan con diferentes tipos de investigaciones, ya sea en resolución de problemas, imágenes y modelos, creencias y niveles de confianza, estudios de la inteligencia, entre otros. Según Fischbein (1987), la intuición es equivalente al conocimiento intuitivo, es decir, es un tipo de conocimiento como tal, no un método, ni una fuente del conocimiento (López, 2004).

Los modelos y las interpretaciones intuitivas, por ejemplo, los modelos pictóricos y la intuición que poseemos sobre la incapacidad de agotamiento del infinito, fueron dos aspectos estudiados por Fischbein (2001) y se llegó a concluir que el impacto de estos modelos figurativos tácitos en la lógica de los conceptos geométricos abstractos, cuando se trata del infinito, conduce a interpretaciones erróneas o contradictorias. Además se plantea que intuitivamente solo existe un tipo de infinito, el infinito inacabado, esto debido a la asociación que realizan los individuos del infinito con lo que se extiende sin fin. Es por esto que diversos estudios se han dedicado a la determinación de estas ideas intuitivas y los posibles obstáculos que puedan generarse a partir de ellas (Fischbein et al., 1979; Tall, 1980; Fischbein, 2001; Garbin, 2005; Mamolo y Zazkis, 2008; Belmonte, 2009; entre otros).

La intuición del infinito es lo que realmente sentimos como verdadero cuando nos enfrentamos a situaciones que involucran su naturaleza actual, no lo que aceptamos como verdadero o en consecuencia de un análisis lógico. A pesar de que se reciba un proceso de instrucción sobre la noción de infinito, las intuiciones que sobre él se tienen, pueden permanecer inalteradas (Fischbein et al., 1979).

Fischbein ha resaltado ciertas características del conocimiento intuitivo, algunas de las cuales resumimos de López (2004) y expondremos brevemente a continuación:

- **Autoevidente:** Es la más importante característica de las intuiciones, se siente que esta intuición en forma de afirmación no necesita una justificación, que es verdadera por sí misma.
- **Certeza Intrínseca:** Las intuiciones son aceptadas como ciertas.
- **Perseverancia:** Las intuiciones una vez se encuentran establecidas se arraigan firmemente en el estudiante. La instrucción formal tiene poco impacto sobre el conocimiento intuitivo.
- **Carácter Coercitivo:** Las intuiciones generan un efecto coercitivo en el razonamiento del individuo, imponiéndose como absolutas y únicas.
- **Estatus de Teoría:** Toda intuición es una teoría o mini-teoría pero nunca solo una percepción de un hecho dado.

Según Fischbein (1978) la naturaleza de las intuiciones, en relación con el infinito, es conflictiva entre sí. La aceptación de algunos conceptos específicos de la teoría de conjuntos de Cantor, (p. ej. que el todo no necesariamente es mayor que cualquiera de sus partes) resulta contradictoria a lo que intuitivamente esperamos que ocurra en la realidad. Lo anterior requiere de la creación de esquemas lógicos que estén en parcial contradicción con los esquemas que poseemos habitualmente (Fischbein et al., 1979).

Tall (2001) distingue entre los conceptos naturales de lo infinito y los conceptos formales. Los conceptos naturales surgen de la extensión de las propiedades identificadas en la experiencia con lo finito, los formales se construyen haciendo uso de la deducción y las definiciones formales (axiomas). A pesar de que un individuo inicialmente pueda evidenciar poseer concepciones naturales, puede llegar a construir diferentes nociones y definiciones que le permitan aminorar las ideas en conflicto generadas por su mencionada concepción natural.

Las intuiciones sobre el infinito que un individuo puede utilizar para afrontar un contexto que le resulta contradictorio han sido denominadas como *concepciones primarias* por Roa-Fuentes (2012).

Roa-Fuentes (2012) determinó de forma empírica que un individuo puede llegar a construir procesos dinámicos y estáticos, que no se relacionan con la construcción de procesos iterativos infinitos y que respalda a través de sus intuiciones (surgen en contextos no académicos). Estas concepciones aparecen cuando el individuo enfrenta una situación contradictoria que no puede afrontar a partir de sus conocimientos formales. Un proceso infinito puede ser pensado en términos de lo "inagotado" o a partir de "un último elemento" (concepciones primarias dinámicas y estáticas respectivamente). A continuación, presentamos la forma en la que Roa-Fuentes (2012) describe estas concepciones.

> Concepción estática primaria: Con esta concepción los individuos extienden propiedades de procesos finitos a procesos infinitos. Aunque se expresen sobre el proceso como infinito, lo caracterizan por un estado "final", como la aplicación de una determinada transformación al último número natural. Éste es representado en algunos casos por el símbolo ∞ al cual se asigna una categoría completa de número (idea relacionada con la Metáfora Básica del Infinito MBI, para ∞, Lakoff & Núñez, 2000). Por otra parte, esta concepción puede presentarse mediante representaciones pictóricas a partir de la construcción de un proceso que se visualiza como terminado en "alguna cosa", por ejemplo, en una imagen, un túnel.
>
> Concepción dinámica primaria: Los individuos que manifiestan este tipo de construcción se refieren a los procesos que identifican en una situación, como procesos que siguen sin fin. Estos procesos son atemporales y están determinados por las características generales de sus elementos. Esta concepción dinámica no considera un estado final, resultante del proceso, sino la posibilidad de aplicar en un tiempo no definido un proceso, un número no definido de veces. Luego, pueden concluir que dadas nuestras características humanas finitas, no es posible contemplar "el final del proceso" (p.197).

Las concepciones primarias fueron tomadas en cuenta en nuestro análisis preliminar y pudimos respaldar empíricamente su existencia en las construcciones realizadas por los estudiantes entrevistados en nuestro estudio.

Por su parte, Mamolo y Zazkis (2008) realizan una investigación en la que buscan examinar las concepciones ingenuas y emergentes de 36 estudiantes universitarios (20 de pregrado matriculados en los programas de Artes Liberales y Ciencias Sociales y 16 de Maestría en Educación Matemática) cuando se ven enfrentados a dos situaciones específicas que involucran la comprensión del infinito actual, la paradoja del hotel de Hilbert y el problema de las pelotas de ping-pong, antes, durante y después de un proceso de instrucción en el cual al grupo de estudiantes de maestría en Educación Matemática se les plantearon algunos de los principales conceptos de la teoría de conjuntos y al grupo de los estudiantes de Artes Liberales y Ciencias Sociales se les acercó a los fundamentos de la aritmética académica y al desarrollo del razonamiento cuantitativo y el análisis crítico. Naturalmente los dos grupos de participantes del estudio poseen diferentes niveles de formación matemática.

Estas son las versiones de las paradojas usadas en Mamolo y Zazkis (2008):

Paradoja del Hotel de Hilbert.

> Imagine que usted es el gerente de un gran hotel que tiene un número infinito de habitaciones y ninguna disponible. Si sólo se permite hospedar a una persona por habitación, ¿cómo puede acomodar a un nuevo y muy importante huésped en una habitación personal?

Problema de las pelotas de ping-pong

> Imagine que tiene un conjunto infinito de bolas de ping-pong numeradas 1, 2, 3,..., y un gran barril, usted está a punto de iniciar un experimento. El experimento tendrá una duración de 1 minuto exacto, ni más, ni menos. Su tarea es colocar las primeras 10 bolas en el barril y luego retirar la número 1 en 30 segundos. En la mitad del tiempo restante, se colocan bolas de 11 a 20 en el barril, y elimina la bola número 2. A continuación, en la mitad del tiempo que queda (el proceso cada vez es más rápido), coloque las bolas 21 a 30 en el barril, y quite la bola número 3. Continúe esta tarea ad infinitum. Después de 60 segundos, al final del experimento, ¿cuál es el número de pelotas de ping-pong que permanecen en el barril? (p.169)

La toma de datos se llevó a cabo a través de las soluciones individuales a las paradojas planteadas, y también, de los argumentos presentados por los estudiantes en las discusiones de grupo y de clase. En la etapa de discusión de clase se les presentaba a los estudiantes las soluciones individuales a las paradojas, así como la solución normativa de cada problema y los estudiantes debían manifestar si se encontraban de acuerdo o en desacuerdo con cada una de ellas y por qué. Podemos entender la solución normativa de la paradoja como la solución que involucra algún tipo de rigor o teorías matemáticas, según Mamolo y Zazkis (2008) el trabajo desarrollado por Cantor para comparar conjuntos infinitos ofrece una resolución normativa a las paradojas utilizadas en su investigación.

Este estudio reveló que los estudiantes perciben el infinito como un proceso continuo en lugar de uno terminado. La principal contribución que se hace en esta investigación es una descripción detallada de las características específicas de las dos paradojas planteadas, que pueden influir en la comprensión del infinito, así como de los factores persuasivos en el razonamiento de los estudiantes.

Una de las conclusiones es que el nivel de formación matemática de los grupos no influyó en la resolución de la situación de las pelotas de tenis, las respuestas que ambos grupos ofrecieron fueron sorprendentemente similares, antes, durante y después de la instrucción. Mientras que en la paradoja del hotel de Hilbert, los estudiantes de posgrado en Educación Matemática sí llegaron a la solución a diferencia de los estudiantes del otro grupo. Algunas de las tendencias en los datos reportados por Mamolo y Zazkis (2008, p.189) fueron las siguientes:

- Los estudiantes rechazaron la solución normativa y encontraron refugio en consideraciones de tipo no matemático. Atender a la imposibilidad práctica de los problemas presentados sirve en la resolución de conflictos cognitivos, o, más probablemente, en la prevención de conflictos cognitivos.
- Los estudiantes trataron de conciliar la solución normativa con sus concepciones ingenuas. Para estos estudiantes el conflicto cognitivo era evidente y se presentó una frustración considerable.
- Los estudiantes distinguen entre su tendencia intuitiva y el conocimiento formal. La resolución de conflictos cognitivos para estos estudiantes consiste en la separación entre ambas tendencias más que la reconciliación.

Como hemos evidenciado, el infinito ha sido objeto de estudio en investigaciones de diferente índole. La determinación de las distintas causas de las dificultades, como pueden ser las concepciones que tienen los individuos sobre esta noción, incluyendo los modelos mentales que se manifiestan al enfrentar al sujeto a situaciones que requieran la comprensión del infinito actual, representan grandes contribuciones a nuestro estudio. En la siguiente sección estudiaremos algunos elementos específicos de la teoría APOE propuestos a partir de la investigación sobre la noción de infinito.

2. LA TEORÍA APOE

Los aspectos teóricos que han sido usados en nuestro trabajo son propuestos con base en una teoría cognitiva denominada Teoría APOE. Los constructos teóricos definidos por esta teoría han sido el fundamento para realizar el análisis de datos; además, las componentes definidas en su paradigma de investigación nos han permitido plantear el fundamento metodológico que sustenta nuestro estudio. Esta teoría se propone describir las estructuras que un individuo desarrolla cuando construye un concepto o noción matemática. En las siguientes secciones nos proponemos realizar una descripción en términos generales de los elementos que involucra la teoría APOE y cómo estos han sido usados en investigaciones que tienen como objetivo analizar la construcción del infinito matemático.

2.1. LA TEORÍA APOE: UNA TEORÍA CONSTRUCTIVISTA

La teoría APOE (Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) es una interpretación de la teoría constructivista, basada en el concepto de *Abstracción Reflexiva* propuesto y usado por Piaget para describir el pensamiento lógico de los niños. Según Dubinsky (1991), esta idea se extiende a nociones matemáticas más avanzadas y puede ser usada para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un determinado concepto o noción. La abstracción reflexiva está presente en la capacidad que tiene un niño de coordinar estructuras senso-motoras y también en la capacidad que tiene un individuo de construir conocimiento matemático. En conclusión, la teoría APOE se fundamenta en la extensión de las nociones usadas por Piaget para estudiar la construcción de conceptos de la aritmética elemental, con el fin de analizar la construcción de conceptos avanzados de las matemáticas en áreas como Cálculo, Teoría de Números, Álgebra Lineal, Álgebra Moderna, entre otras (Dubinsky, 1991). Sin embargo, esto no significa que la teoría APOE sea usada de manera exclusiva en el estudio de la construcción de matemáticas avanzadas, algunas investigaciones han utilizado la teoría para analizar la construcción de conceptos más elementales en profesores o estudiantes, un ejemplo de ello es el trabajo realizado por Arnon (1998) y Arnon, Nesher y Nirenburg (1999; 2001). En dichas investigaciones se propone el inicio de la construcción de conceptos matemáticos como acciones realizadas sobre objetos concretos. Allí se logró establecer algunos caminos de construcción de conceptos relacionados con las fracciones, específicamente clases de equivalencia. El estudio realizado por dichos investigadores muestra importantes resultados que permitieron realizar una reinterpretación de la teoría al caracterizar las acciones que se hacen sobre objetos concretos y abstractos (Para más detalle sobre la construcción de objetos abstractos a partir de acciones sobre objetos concretos ver Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller, 2014).

La teoría APOE describe las estructuras (las cuales le dan nombre a la teoría) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación y tematización) con los cuales un individuo puede llegar a construir un concepto o noción matemática. De tal manera que mediante dichas estructuras y mecanismos es posible comprender la forma como un individuo construye su conocimiento matemático. Entendiendo este conocimiento según Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas (1996) como:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones problemáticas en matemáticas, reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar dichas situaciones. (p.7)

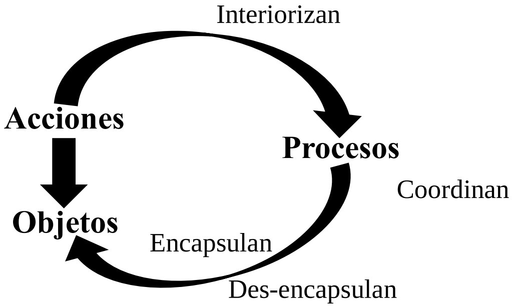
De tal manera que el conocimiento matemático se describe en términos de estructuras que son propiciadas por mecanismos desarrollados por parte del individuo. Por definición de estructura y mecanismo mental aceptaremos la presentada por:

> Una estructura mental es cualquier estructura (es decir, alguna cosa construida en la mente) relativamente estable (aunque capaz de desarrollarse) que un individuo usa para dar sentido a una situación matemática.
>
> Un mecanismo mental es el medio por el cual una estructura puede desarrollarse en la mente de un individuo o un grupo de individuos. (p.98)

Weller y otros (2004) plantean que las estructuras son construidas y conectadas por medio de mecanismos, de tal manera que pueden ser organizados y estructurados en marcos coherentes (esquemas). Estos esquemas son usados por los individuos para resolver un problema; los esquemas pueden ser tematizados para dar lugar a un nuevo objeto sobre el cual es posible aplicar nuevas acciones e iniciar la construcción de nuevos esquemas (Dubisky, 1994).

La teoría APOE posibilita la comprensión de conceptos matemáticos siempre y cuando el individuo posea las estructuras previas necesarias, las transforme mediante la aplicación de acciones o procesos, de tal manera que pueda construir un nuevo objeto que a su vez hará parte de un esquema. La siguiente figura muestra la construcción de un esquema, haciendo uso de los mecanismos y estructuras tradicionales de la teoría APOE.

Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Basado en Asiala et al., 1996, p.9)



Siguiendo lo propuesto por Arnon y otros (2014) realizaremos una descripción teórica de las estructuras y mecanismos más básicos de la teoría APOE.

Acciones: un concepto se concibe por primera vez como una acción, es decir como una transformación explicita sobre un objeto (u objetos) construido(s) previamente. Esta transformación se aplica paso a paso de forma iterativa sin obviar ningún paso de la transformación; una acción siempre está guiada por instrucciones externas. Aunque esta estructura es la más básica según la teoría APOE, la acción es necesaria para el desarrollo de otras estructuras más complejas.

Procesos: los procesos pueden obtenerse a través de los mecanismos de interiorización o coordinación. Aquí explicaremos cómo se obtiene un proceso a partir del mecanismo de interiorización, el mecanismo de coordinación será explicado más adelante. Las acciones pasan de repetirse haciendo uso de ayudas externas a ser interiorizadas, esta interiorización se da cuando el individuo puede reflexionar sobre las acciones sin actuar de manera directa sobre ellas. Los procesos se caracterizan por la capacidad que se tiene de imaginar los pasos sin necesidad de realizar cada uno de ellos de forma explícita, de saltarse pasos o de revertirlos.

Objetos: la construcción de los objetos se da a partir de la encapsulación de un proceso. La encapsulación sucede cuando un individuo es capaz de ver una estructura dinámica (proceso) como una estructura estática (objeto) a la cual se le pueden aplicar transformaciones, esto ocurre cuando el individuo logra ver el proceso en su totalidad.

Los esquemas son una colección de acciones, procesos, objetos, otros esquemas y sus diferentes relaciones, todo haciendo referencia a un concepto o noción matemática (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010). La evolución de los esquemas se define en términos de los niveles Inter, Intra y Trans; dichos niveles están asociados con la experiencia que cada individuo puede desarrollar gracias al tipo de situaciones matemáticas que aborda. Además, promueven la construcción de relaciones del concepto o noción matemática asociado al esquema y a su vez a otros esquemas de conceptos que puede relacionar con el original. Así el conocimiento matemático de un individuo queda determinado por las diferentes relaciones que logra establecer entre esquemas iniciales y aquellos que se propone construir. Un esquema puede ser tematizado, es decir considerado como una cosa total, un objeto, para ser asimilado por otro esquema. Este tipo de mecanismo ha sido considerado por ejemplo, cuando un individuo tiene construido un esquema de función y uno de transformación lineal. La relación explícita entre estas estructuras se establece cuando el esquema de transformación lineal es visto como un todo y por tanto es visto como una función (el esquema es tematizado en un objeto). Entonces este nuevo objeto es asimilado por el esquema de función, por tanto el individuo comprende que una transformación lineal es básicamente una función.

Podemos preguntarnos cuáles serían los mecanismos y estructuras mentales que puede desarrollar un individuo al enfrentarse a situaciones relacionadas con un concepto específico. Por ejemplo, el concepto de función, el cual es un ejemplo ampliamente usado para explicar cómo se relacionan las estructuras mentales. En este caso el individuo necesitará de la representación algebraica de una función $f(x)$ y empezará calculando de forma explícita algunos valores funcionales; encontraría uno y luego otro y continuaría repitiendo esta acción, con lo cual diríamos que el estudiante tiene una *concepción acción* de función.

Ahora supongamos que el estudiante continúa realizando la acción y reflexionando sobre ella, esto hará que interiorice la acción convirtiéndola de esta manera en un proceso, lo cual le permitirá imaginar el cálculo de varios valores funcionales al mismo tiempo que piensa acerca de estos cálculos. Aquí el estudiante puede pensar en el dominio de $f(x)$ y en cómo todos los elementos de dicho dominio pueden ser transformados, entonces diremos que el estudiante tiene una *concepción proceso*.

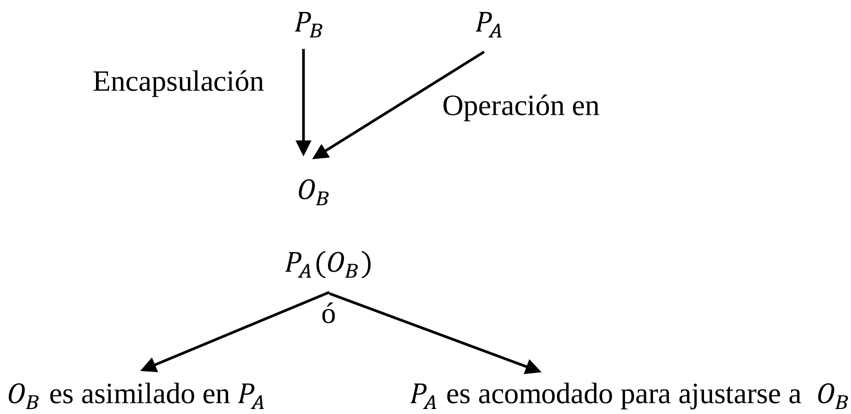
Si el estudiante alcanza a visualizar el proceso como una totalidad y cae en cuenta de las transformaciones que pueden actuar sobre esta totalidad, como pueden ser la compresión o expansión de la función, diremos que el estudiante encapsuló el proceso en un objeto f, con lo cual tendría una *concepción objeto* (Breidenbach, Dubinsky, Hawks y Nichols, 1992; Roa-Fuentes, 2012; Weller et al., 2004)

Con la función como objeto el estudiante podría enfrentarse a una situación en la que necesite "desempacar" la función y volver al proceso que le dio origen, podríamos pensar en una suma de dos funciones $f\ y\ g$. El estudiante deberá des-encapsular los objetos para obtener nuevamente los procesos $f(x)$ y $g(x)$, coordinarlos y de esta manera generar un nuevo proceso $(f+g)(x)$, pensar en el dominio de esta nueva función a partir del dominio de las funciones $f\ y\ g$, de cuya encapsulación obtendrá el objeto $f+g$.

Como mencionamos con anterioridad, los procesos no necesariamente se logran a partir de la interiorización de acciones sino que también pueden producirse de la *coordinación* de otros procesos (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010). Este mecanismo toma gran importancia en el estudio del infinito a través de la teoría APOE, sobre estos aspectos profundizaremos en la siguiente sección, aquí realizaremos una descripción del mecanismo de coordinación en términos más generales.

El mecanismo de coordinación toma suma importancia cuando el individuo necesita construir un objeto a partir de otros, tal como se mostró en el ejemplo de suma de funciones planteado anteriormente. En este caso, el individuo podrá des-encapsular los objetos construidos previamente en los procesos que los originaron y coordinarlos en un único proceso que puede ser encapsulado en un nuevo objeto cognitivo. Este mecanismo es en realidad complejo, en la actualidad no se conoce con exactitud cómo funciona o qué permite motivarlo, lo cual lo convierte en un tema importante de investigación en el marco de la teoría. Sin embargo, Arnon y otros (2014) de forma hipotética han considerado que la coordinación de dos procesos P_A y P_B (ver figura 2) puede ser entendida como la aplicación de P_A sobre P_B, lo cual puede requerir que el individuo encapsule el proceso P_B en un objeto O_B al cual se le pueda aplicar el proceso P_A. Una vez esto ocurre, o bien O_B se asimila y P_A actúa sobre él o P_A se acomoda de manera que el individuo pueda ajustarlo a O_B. Una situación análoga ocurre cuando P_B es aplicado sobre P_A.

Figura 2. Coordinación de dos procesos P_A y P_B. (Arnon et al., 2014, p.24)



Debemos recordar que este es un planteamiento hipotético que necesita de respaldo empírico que evidencie que efectivamente la coordinación ocurre de esta forma en la mente de los individuos. En el análisis de datos prestamos especial atención a la forma en la que se realiza la coordinación de procesos iterativos infinitos, esperando presentar un argumento empírico a esta propuesta. Sin embargo, no encontramos que la coordinación de procesos con el conjunto de los números naturales (construcción de procesos iterativos infinitos) y la coordinación de procesos iterativos infinitos siga este modelo.

2.2. EL INFINITO Y LA TEORÍA APOE

El infinito ha sido recientemente estudiado desde la teoría APOE, estas investigaciones han realizado grandes contribuciones, no sólo a la investigación en educación matemática en general, sino también a la teoría misma. Los mecanismos y estructuras han ganado especificidad en el estudio particular de la noción de infinito en matemáticas y han ayudado a determinar cómo es construido el infinito potencial y actual en la mente humana.

Algunas investigaciones han logrado plantear que es posible relacionar la naturaleza dual del infinito (infinito potencial y actual) con dos estructuras distintas de la misma noción, proceso y objeto, respectivamente. Dubinsky y otros (2005a) realizan uno de los primeros acercamientos al infinito matemático a través de la teoría APOE, logrando proponer soluciones cognitivas a diferentes situaciones históricas que relacionan el infinito. En esta investigación se usa la teoría APOE para respaldar el punto de vista de Cantor, su capacidad de ver el proceso infinito como una totalidad y de realizar acciones sobre esta totalidad (con el desarrollo de la aritmética de números transfinitos y la comparación entre conjuntos infinitos), lo que convierte a la teoría de conjuntos de Cantor en una evidencia de que una concepción proceso de infinito (infinito potencial) puede ser encapsulada en un objeto cognitivo (infinito actual).

Dubinsky y otros (2005a) muestran la importancia del conjunto de los números naturales a partir de un análisis construido en términos de teoría APOE, llegando a argumentar que este conjunto numérico puede ser concebido cognitivamente como una entidad sobre la cual se pueden realizar acciones. Con base en este análisis y algunos resultados preliminares de un proyecto en desarrollo Dubinsky y otros (2005b) consideran la naturaleza de los procesos infinitos, la relación cognitiva que éstos tienen con el objeto que generan y cómo se ejemplifica esto en situaciones como la construcción del conjunto de los números naturales, la igualdad $0,\overline{9} = 1$, los infinitesimales y las paradojas que ellos denominan "paradojas de procesos iterativos infinitos".

Weller y otros (2004) llevan a cabo una investigación en donde plantean a estudiantes universitarios, con fuertes conocimientos en matemáticas, situaciones que involucran el infinito matemático como la paradoja de las pelotas de tenis. Un primer análisis de los datos sugiere la necesidad que tiene un individuo de ver los procesos iterativos infinitos relacionados con el contexto del problema, como terminados; lo que muestra la importancia de una fuerte concepción proceso de infinito para que el individuo pueda llegar a encapsular el proceso en un objeto y solucionar la situación.

El estudio de diversos conceptos y nociones matemáticas a partir de la teoría APOE puede ayudar a detectar formas de construir dicho concepto o noción que no se pueden explicar bajo la luz de los elementos existentes de la teoría. Tal es el caso del estudio del infinito, en trabajos realizados por Brown y otros (2010); Roa-Fuentes (2012; 2014); Dubinsky y otros (2013), los cuales han propuesto nuevos elementos a la teoría, útiles en el estudio del infinito matemático.

La investigación del infinito matemático a través de la teoría APOE ha llegado a proponer que una concepción proceso de infinito está íntimamente relacionada con la construcción de procesos iterativos infinitos y que el objeto que se genera de este tipo de procesos no guarda las características propias de los objetos generados en cada una de las iteraciones de dicho proceso y por tanto, es un objeto que trasciende del proceso (Brown et al., 2010). En esta investigación se realiza un análisis a través de la teoría APOE para describir las construcciones mentales que desarrollan 12 estudiantes de un curso de introducción a las matemáticas abstractas cuando analizan la siguiente situación:

> Pruebe o refute: $\bigcup_{\boldsymbol{k=1}}^{\infty} \boldsymbol{P}(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots, \boldsymbol{k}\}) = \boldsymbol{P}(\mathbb{N})$
>
> donde $\mathbb{N}$ representa el conjunto de los números naturales y $\boldsymbol{P}(\mathbb{N})$ representa el "conjunto potencia", esto es, el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado. (Brown et al., 2010, p. 116)

Gracias al análisis de los datos empíricos obtenidos a través de los procedimientos realizados por los estudiantes entrevistados, se logra plantear que la estructura proceso de infinito tiene características de procesos iterativos infinitos. Al respecto los autores mencionan: "Un proceso iterativo infinito es la aplicación infinita de una transformación sobre un objeto, ya sea cognitivo o físico, que envuelve uno a más parámetros que cambian con cada repetición" (Brown y otros, 2010, p.116). En general, los procesos iterativos infinitos que son construidos para abordar situaciones que involucran el infinito, tienen como parámetro el conjunto de los números naturales. De tal manera que un proceso iterativo infinito se construye a través de la transformación iterada del conjunto de los números naturales, realizando un número finito de iteraciones, empezando por el 1, luego el 2 y así sucesivamente hasta que el individuo puede entender cómo será transformado cada número natural. Es decir, cómo actúa la transformación sobre todo el conjunto de los números naturales, lo cual sólo es posible si el individuo tiene la capacidad de ver dicho conjunto como un objeto terminado y no a través de su proceso de construcción; entonces se dice podrá encapsular el proceso iterativo infinito en un objeto.

En el estudio realizado por Stenger y otros (2008) analizan las siguientes versiones de la paradoja de las pelotas de tenis:

> Primera versión: Suponga que tiene tres recipientes, etiquetados como recipiente contenedor, recipiente A y recipiente T y un botón dispensador que cuando es presionado, mueve las pelotas del recipiente contenedor al recipiente A. La primera vez que el botón es presionado el dispensador suelta las pelotas número 1 y número 2 dentro de A y automáticamente la pelota número 1 pasa al recipiente T. Cuando el dispensador es presionado de nuevo, las pelotas número 3 y número 4 se sueltan en A, e inmediatamente la pelota con el número más pequeño en el recipiente A pasa al recipiente T. Si el proceso continúa para n presiones del botón dispensador, ¿cuál será el contenido de los recipientes A y T? (Dubinsky et al., 2008, p.106)

> Segunda versión: Suponga que tiene tres recipientes con una capacidad ilimitada, etiquetados como recipiente contenedor, recipiente A y recipiente T, con un botón dispensador que cuando se presiona, mueve pelotas del recipiente contenedor al recipiente A. El recipiente contenedor tiene una cantidad infinita de pelotas de tenis, numeradas, 1, 2, 3,… Medio minuto antes del mediodía, el dispensador es presionado y las pelotas número 1 y 2 pasan al recipiente A e instantáneamente la pelota número 1 pasa de A a T. Un cuarto de minuto antes del medio día el dispensador es presionado nuevamente y las pelotas número 3 y 4 caen al recipiente A y automáticamente la pelota de menor denominación, pasa al recipiente T. En el siguiente paso, $\frac{1}{8}$ de minuto antes del medio día el dispensador es presionado y las pelotas número 5 y número 6 pasan del recipiente contenedor al recipiente A e inmediatamente la pelota de menor denominación pasa al recipiente T. Si el modelo señalado continúa, ¿cuál es el contenido del recipiente A y T al medio día? (Stenger et al., 2008, p.100)

El análisis en términos de la teoría APOE de este problema fue abordado asumiendo la coordinación de tres procesos iterativos diferentes: uno, entre la iteración de $\mathbb{N}$ y el tiempo; dos, entre la iteración de $\mathbb{N}$ y los movimientos de las pelota de tenis; y tres, entre los procesos resultantes de las dos primeras coordinaciones; de lo cual plantean Stenger y otros (2008), se obtiene un proceso iterativo bidimensional. Las dos versiones de la paradoja fueron propuestas a 15 estudiantes universitarios y sólo uno logró ofrecer una solución matemáticamente correcta. Según el análisis de los datos, hay evidencias que señalan que dicho estudiante realizó las construcciones mentales descritas en el análisis teórico preliminar; es decir, planteó un proceso iterativo bidimensional para luego alcanzar el objeto que trasciende de dicho proceso. En resumen, un proceso iterativo bidimensional se obtiene de la coordinación de dos procesos que a su vez fueron el resultado de la coordinación de otros (Stenger et al., 2008).

Una situación puede involucrar varios procesos, que el individuo debe coordinar con el conjunto de los números naturales (para construir procesos iterativos) y a su vez coordinarlos entre sí para generar un único proceso que podrá ser encapsulado en un objeto. De la aplicación de un proceso iterativo infinito se va generando una sucesión de objetos que tienen determinadas características, cuando el individuo logra la evolución de su estructura proceso de infinito en un objeto, debe tener la capacidad de imaginar las características que debe tener el objeto que transciende. Podemos pensar en el objeto trascendente como el estado al infinito del proceso iterativo que lo originó. Al parecer los mecanismos y estructuras que tradicionalmente propone la teoría APOE pueden llegar a cambiar de naturaleza dependiendo del concepto o noción a estudiar, como es el caso de la estructura objeto asociada al infinito (Brown y otros, 2010).

A continuación planteamos un ejemplo que nos permite poner en contexto lo descrito hasta el momento.

Construcción de la curva de Koch a través de procesos iterativos infinitos. Pensemos en la construcción de una curva fractal a través de la transformación iterada de un objeto inicial, a lo largo de esa transformación podemos identificar procesos de naturaleza diferente. Construyamos la curva de Koch a partir de la transformación de un segmento de longitud 1 con el objetivo de responder la pregunta: ¿cuál es la longitud de la curva de Koch? La transformación del objeto inicial está dada como describiremos a continuación:

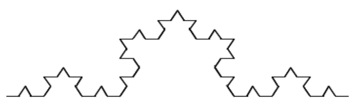
> El segmento inicial se divide en 3 partes iguales y el tercio central es reemplazado por un triángulo equilátero sin base de tal manera que se obtiene una figura conformada por 4 segmentos cada uno de longitud $\frac{1}{3}$.

$n = 1$ 

> Si a cada segmento se le aplica nuevamente el proceso descrito anteriormente, obtendremos una curva compuesta por 16 segmentos, cada uno de longitud $\frac{1}{9}$.

$n = 2$ 

> Si repetimos el proceso obtendremos una curva compuesta por 64 segmentos cada uno de longitud $\frac{1}{27}$.

$n = 3$ 

$\vdots$

La Curva de Koch

De la realización de las primeras transformaciones sobre el objeto inicial, un individuo puede identificar dos procesos: el primero, determinado por la agregación de segmentos y el segundo por la subdivisión de segmentos. Como consideraremos con detalle más adelante, el primero un proceso divergente y el segundo un proceso convergente. Luego de identificar estos procesos, construye dos procesos iterativos infinitos, uno que le permita determinar el número de segmentos que tendrá la curva en una iteración cualquiera y otro, que le permitirá determinar la longitud de cada segmento. Cada uno de ellos es construido coordinando el proceso de agregación de segmentos P_A y de subdivisión de segmentos P_S con un proceso de iteración sobre el conjunto de los número naturales P_N como puede verse en la figura 3 (Roa-Fuentes y Oktaç, 2014).

Figura 3. Coordinación de los procesos iterativos infinitos en la curva de Koch (Roa-Fuentes, 2012)

$$\left.\begin{array}{l} P_N \\ \\ P_A \end{array}\right] \longrightarrow P_1 : n \to \frac{1}{3^n} \qquad \qquad \left.\begin{array}{l} P_N \\ \\ P_A \end{array}\right] \longrightarrow P_2 : n \to 4^n$$

Con el fin de responder la pregunta planteada, el individuo coordina los procesos P_1 y P_2 generando un único proceso iterativo que le permitirá determinar la longitud de las curvas que preceden a la curva de Koch. Sin embargo, esta coordinación no es inmediata, la naturaleza de los procesos a coordinar (divergente y convergente) puede provocar que el individuo no pueda determinar la naturaleza del proceso resultante. Si el individuo analiza la situación viendo los procesos P_1 y P_2 por separado puede llegar a concluir que la curva de Koch está conformada por infinitos segmentos de longitud cero, razón por la cual puede no resultarle coherente hablar de la longitud de esta curva. Si el individuo logra coordinar los procesos P_1 y P_2, podrá generar un único proceso P_P.

Figura 4. Construcción del proceso P_P mediante la búsqueda de generalidad (Roa-Fuentes, 2012)

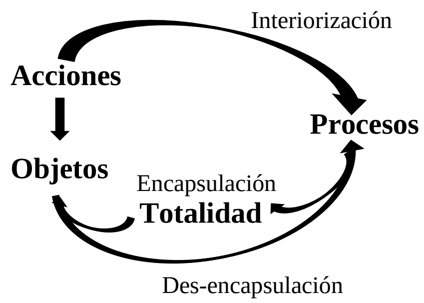
$$\left.\begin{array}{l} P_1 \\ \\ P_2 \end{array}\right] \longrightarrow P_P : n \to \frac{4^n}{3^n}$$

El estado al infinito del proceso de transformación es la curva de Koch y el estado al infinito del proceso P_P es la longitud de la curva de Koch. Las curvas que han sido generadas en cada iteración por el proceso de transformación del segmento inicial, son las curvas que preceden a la curva de Koch.

Podemos analizar algunas características de las curvas precedentes en relación a la curva de Koch, veamos que la curva de Koch es un ejemplo de una curva continua que no es derivable en ningún punto; sin embargo, las curvas precedentes son derivables en algunos puntos. La longitud de las curvas precedentes es finita, puedo asociarles un número real; sin embargo, la longitud de la curva de Koch es infinita. Por lo cual decimos que el objeto trasciende del proceso, en cuanto no se parece a los objetos generados a lo largo de la aplicación del proceso transformador. El individuo debe comprender que el objeto que produce dicho proceso no tendrá las características del proceso que le dio origen, por eso se le denomina *Objeto Trascendente (O.T)*, puesto que trasciende del proceso iterativo que lo originó (Brown y otros, 2010). Es importante aclarar que el objeto trascendente se construye cuando el proceso es visto como una totalidad y no por la aplicación de un proceso iterativo infinito al "último número natural".

La construcción del infinito es exitosa dependiendo de la capacidad que tengan los individuos de construir el proceso iterativo infinito y mirarlo como una totalidad (Weller et al., 2004; Dubinsky et al., 2005a, Dubinsky et al., 2005b; Brown et al., 2010) sin embargo, la totalidad había sido considerada como parte de la concepción objeto hasta que Dubinsky y otros (2013) plantean la necesidad de una nueva estructura independiente, a la cual denominaron *Totalidad* y que se encuentra entre las estructuras proceso y objeto, permitiendo al individuo ver el proceso iterativo infinito como terminado (ver figura 5).

Figura 5. Estructuras mentales y mecanismos para la construcción del conocimiento matemático incluyendo la estructura totalidad. (Arnon et al. 2014, p.141)



Dubinsky y otros (2013) muestran que en el estudio de la igualdad 0,999… = 1, existen evidencias de la necesidad de una *concepción totalidad* que represente un cambio en la forma de pensar del individuo sobre la expansión decimal de un entero o fracción. Esta investigación evidencia que a pesar de que el individuo pueda ver el proceso como una totalidad no necesariamente podrá aplicar acciones sobre esa totalidad. Esto ha sido mostrado empíricamente, a pesar de que algunos de los estudiantes entrevistados aceptaron que 0,999… es igual a 1, no lograron solucionar la ecuación $0,\overline{9}+x=1$. Ya que no lograron determinar si x era un número decimal infinito o no, llegando a plantear que $x=0{,}0\ldots1$, lo que es contradictorio. La posibilidad de la existencia de esta nueva estructura debe ser respaldada mediante datos empíricos que demuestren que ver el proceso como un todo y aplicar acciones sobre él, necesita de dos estructuras que el individuo debe desarrollar de manera independiente.

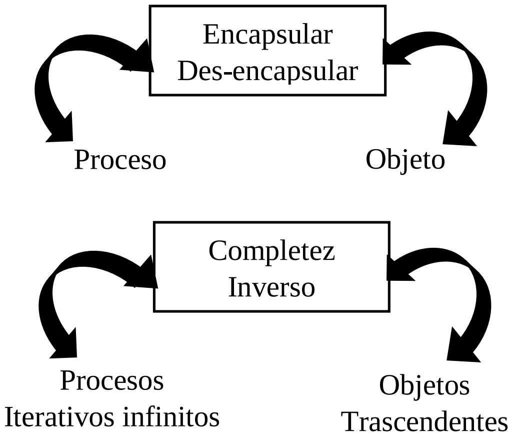
Buscando explicar cómo se da paso de un proceso iterativo infinito a un objeto trascendente Roa-Fuentes (2012) propone un nuevo mecanismo denominado *completez*. En esta investigación se usa la teoría APOE para analizar las estructuras que desarrollan niños y jóvenes talento en matemáticas al enfrentarse a situaciones relacionadas con el infinito. Las situaciones específicas usadas fueron: el problema de las pelotas de tenis, la paradoja del hotel de Hilbert y la curva de Koch. Este estudio también buscaba encontrar evidencias de la construcción de procesos iterativos, *objetos trascendentes* (Brown et al., 2010) y *totalidad* (Dubinsky et al., 2013).

Roa-Fuentes (2012) ha logrado identificar plenamente la construcción de casos particulares del objeto trascendente, así como la necesidad de construir procesos iterativos infinitos. Empero, no se encontraron evidencias de alguna construcción entre el proceso iterativo infinito y el objeto trascendente, es decir no se encontraron evidencias de la estructura totalidad. Sin embargo, uno de los resultados de su investigación fue detectar la necesidad que tienen los estudiantes de desarrollar un mecanismo que les permita ver el proceso iterativo infinito (una estructura dinámica asociada al infinito potencial) como un todo y construir una estructura estática (asociada al infinito actual) ajena al proceso. Los estudiantes entrevistados que lograron construir los objetos trascendentes hicieron uso de conceptos específicos relacionados con la teoría de conjuntos, a pesar de que no tuvieran una formación matemática formal avanzada. A este mecanismo se le dio el nombre de *completez* y se describe de la siguiente forma:

> Completez: este es un mecanismo mental que permite ver las características del objeto que trasciende de un proceso iterativo infinito. El establecimiento de este mecanismo requiere de una construcción consciente por parte de un individuo de elementos fundamentales relacionados con la teoría de conjuntos: la relación entre un conjunto infinito y sus subconjuntos propios, los conceptos de cardinal y ordinal y, la construcción de conjuntos infinitos con diferentes cardinalidades. Estos elementos permiten la construcción de objetos que no se desprende de manera directa de un proceso. Este mecanismo le permite a un individuo considerar la construcción de un objeto que no se parece a los estados del proceso iterativo asociado. (Roa-Fuentes, 2012, p.210)

El mecanismo de completez le permite al individuo imaginar cuáles serán las características que debe tener el objeto trascendente a pesar de que sean ajenas a las características de los objetos generados por el proceso iterativo infinito. Este mecanismo es una versión más refinada del mecanismo de encapsulación, dado que requiere de conceptos específicos de la teoría de conjuntos de Cantor para que pueda desarrollarse. La figura 6 muestra la relación de las estructuras tradicionales objeto y proceso con sus correspondientes mecanismos, encapsulación y des-encapsulación. De la misma forma, muestra el mecanismo completez relacionando las estructuras procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes para describir la construcción del infinito matemático.

Figura 6. Nuevas construcciones y sus relaciones para explicar la construcción del infinito desde APOE (Roa-Fuentes, 2012, p.200)



Haciendo uso de algunas evidencias presentadas por Roa-Fuentes (2012) y Roa-Fuentes y Oktaç (2014), mostraremos la problemática presente en la coordinación de procesos iterativos infinitos de diversa naturaleza y la construcción del objeto trascendente. Como hemos mencionado anteriormente, la coordinación no se da de manera natural, especialmente cuando los procesos a coordinar tienen naturaleza diversa (convergente y divergente), analizaremos el caso de David, un estudiante que pudo coordinar los procesos iterativos infinitos y construir el objeto trascendente en el problema de la construcción de la curva de Koch.

David logra construir los procesos P_1 y P_2 con relativa facilidad y propone una expresión que le permite determinar la longitud de las curvas precedentes, sin embargo, cuando intenta pensar en la longitud de la curva de Koch determina que es cero.

> David: …Si yo repito los pasos un montón de veces, en realidad los segmentos en sí ya no van a ser segmentos… Los segmentos ya no se van a volver segmentos, los segmentos se van a volver puntos. Y pues la medida del punto es cero, entonces tengo un número infinito de cosas que miden cero… Entonces, como los segmentos que son puntos no tienen medida, sí van a ser cero en el paso al infinito. La curva de Koch mide cero, entonces quedaría algo así [David realiza el siguiente dibujo] (Roa-Fuentes, 2012, p.186):

Podemos ver que David analiza los procesos por separado, lo que lo lleva a concluir que la longitud de la curva se resume en una suma infinita de segmentos de longitud cero. Posteriormente hace un análisis de la situación y repasa las acciones realizadas, determinando que la longitud de cada curva precedente depende de la longitud de la curva anterior (Roa-Fuentes y Oktaç, 2014).

$$
\begin{aligned}
&1\\
&\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}\\
&\frac{16}{9} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{9}\\
&\frac{64}{27} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}\right) + \frac{4^2}{3^3}
\end{aligned}
$$

Lo que le permite coordinar los procesos P_1 y P_2, generando un único proceso iterativo infinito.

$$\text{Long}_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{4^{i-1}}{3^{i}}$$

Él entiende que debe analizar el proceso al infinito para poder determinar la longitud de la curva de Koch, lo que lo lleva a plantear el límite del proceso.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \text{long}_n &= \lim_{n \to \infty} \left(\cancel{1} + \sum_{i=1} \frac{4^{i-1}}{3^{i}}\right)\\
&= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right) \to \infty\\
&= 1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} = \infty
\end{aligned}
$$

Debemos aclarar que la solución matemática de una situación no implica que el individuo haya construido el objeto trascendente. David a pesar de haber planteado la solución matemática, todavía consideraba que la longitud de la curva podría ser cero.

> David: Es que ambos son como convincentes. Porque aquí estoy considerando como lo obvio que la longitud de los segmentos es cero. Que se va achicando, y pues que al final la suma de ellos no va a valer mucho. Por otro lado, aquí lo que considero es que cada paso aunque

> aumenta más poquito, ¡aumenta! Y lo que pasa es que en este [primer análisis] yo no estoy teniendo en cuenta... Por lo menos en esta [segundo análisis] me di cuenta que la longitud de los segmentos depende directamente del inmediatamente anterior y la primera forma no tiene en cuenta ese aspecto. Aquí lo que estoy viendo es que cada segmento proviene del anterior y por lo tanto su medida depende del anterior. Y además, de hecho, esa es la condición del problema. Que cada segmento depende del anterior o sea, el primer razonamiento no vale porque no está teniendo en cuenta eso. En cambio esta sí lo tiene. Entonces la longitud de la curva de Koch va a ser infinita, no sé qué tan infinita, pero infinita. O sea, si la longitud es cero, la curva de Koch sería un punto. Y si se tiene un conjunto de puntos pegados esa yo no serían puntos. Su longitud sería algo. Por lo tanto, la longitud de la curva de Koch es infinito. ¿Qué tan infinito?, no sé, pero supongo que esto mide el cardinal de los números reales. No sé, el caso es que mide infinito. No sé, simplemente digamos que la longitud de la curva de Koch es infinita (Roa-Fuentes, 2012, p.188).

Cuando David entiende la relación de los términos de la sucesión de perímetros generada por las curvas precedentes, entiende que ésta es una de las condiciones del problema. A pesar de que la longitud de los segmentos se haga más pequeña, el proceso de adición de segmentos crece, esto le permite concluir que la curva de Koch tiene longitud infinita y por lo tanto alcanzar el objeto que trasciende del proceso iterativo infinito que él denominó: $Long_n$ (Roa-Fuentes, 2012).

Nuestro trabajo usó los elementos tradicionales de la teoría APOE y tuvo en cuenta el nuevo mecanismo Completez para llevar a cabo la primera componente metodológica de nuestra investigación, esperando encontrar evidencias de éste mecanismo o de alguna estructura entre las tradicionales proceso y objeto. A partir de los apartados previos en los próximos capítulos propondremos los aspectos metodológicos que nos permitieron el desarrollo de nuestro estudio.

3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVO

Con base en la problemática planteada en los capítulos anteriores, proponemos de forma muy específica el problema que hemos abordado en esta investigación, así como los objetivos que nos han permitido responder las preguntas que guiaron el desarrollo de nuestro estudio.

3.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El estudio del infinito a través de la teoría APOE ha permitido un gran avance para llegar a determinar cognitivamente su construcción. Además, este tipo de investigaciones ha generado una evidente evolución de la teoría en sí misma, caracterizando los constructos teóricos que se habían ofrecido tradicionalmente y, en algunos casos, contemplando la posibilidad de estructuras o mecanismos que no habían sido detectados en el estudio de ningún otro concepto o noción. De esta manera, la teoría APOE ha logrado seguir realizando una importante labor predictiva para determinar fenómenos cognitivos asociados al conocimiento matemático, específicamente en el caso del infinito. Todo esto aunado, nos lleva a reconocer la importancia que tiene el infinito en el desarrollo de las Matemáticas y la Educación Matemática, en general. Así como la necesidad de contribuir al esclarecimiento de los constructos teóricos involucrados en el estudio del infinito en términos de la teoría, siendo esto posible solo a través de la investigación.

Por lo anterior, es de nuestro interés realizar un análisis sobre cómo estudiantes de posgrado (Maestría en Matemáticas y Maestría en Educación Matemática) enfrentan situaciones paradójicas y logran entender el infinito actual como el objeto que trasciende del proceso iterativo infinito (infinito potencial) al enfrentarse a un contexto paradójico y a la construcción de curvas fractales.

Los estudios que fundamentan nuestro trabajo y que discutimos con cierto detalle en el capítulo anterior nos llevaron a pensar que el análisis de los elementos involucrados en la construcción del infinito matemático por parte de estudiantes de maestría (en Matemáticas y Educación Matemática) puede proveer información precisa sobre cómo un individuo llega a construir la noción de infinito. Aunque en algunos trabajos se hace énfasis en que el nivel de escolaridad no determina que un individuo pueda o no comprender el infinito actual, pensamos que al retomar la descomposición genética genérica que fue construida y validada por Roa-Fuentes y Oktaç (2014) con niños y jóvenes talento ahora con estudiantes que tienen una experiencia más formal con las matemáticas, puede señalarnos puntos clave sobre cómo dentro del sistema escolar es posible motivar la construcción del infinito como una totalidad.

La determinación de las estructuras mentales y conexiones adecuadas para tal construcción, no son sólo de interés para la investigación en si misma sino que pueden desencadenar herramientas didácticas útiles en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos en los cuales la comprensión del infinito es necesaria (Weller et al., 2004).

A partir de la problemática presentada planteamos algunas preguntas que nos permitieron guiar el curso de nuestra investigación:

i. ¿Qué características tienen las concepciones primarias que evidencian los estudiantes de maestría cuando se enfrentan a un contexto paradójico?
ii. ¿Qué estructuras mentales evidencian y/o desarrollan estudiantes de maestría cuando se enfrentan a situaciones que involucran el infinito?
iii. ¿Cómo se caracteriza el mecanismo que le permite al individuo pasar de una concepción proceso de infinito a una concepción objeto? Y en general ¿Qué sucede en la mente de un individuo que le permite realizar el cambio de una estructura a otra?
iv. Los estudiantes de maestría que han tenido un mayor acercamiento con las matemáticas avanzadas, ¿evidencian estructuras más sofisticadas o esencialmente diferentes en relación a otros?

A través de estas preguntas buscamos que nuestra investigación nos permitiera alcanzar el objetivo que proponemos a continuación.

3.2. OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

Como objetivo general de nuestra investigación nos hemos propuesto explicar cómo estudiantes de posgrado que logran construir un *proceso iterativo infinito* en un contexto de paradojas particular, pueden alcanzar el objeto que trasciende de dicho proceso. Desde luego, este objetivo hizo que fuera necesario analizar las características de la construcción de un *proceso iterativo infinito* a partir de concepciones primarias y a prestar especial atención a los mecanismos que permiten el cambio de una estructura dinámica a una estática.

4. MÉTODO

En este capítulo presentamos los principales resultados de la aplicación de las componentes del método que han dirigido el desarrollo de nuestra investigación, análisis teórico y observación, análisis y verificación de resultados. Iniciamos con el planteamiento de las componentes que comprenden el paradigma de investigación propuesto desde la teoría APOE. Posteriormente, explicamos el ciclo de investigación que hemos llevamos a cabo, luego presentaremos los resultados a los que nos ha permitido llegar la aplicación de las componentes metodológicas.

4.1. PARADIGMA DE INVESTIGACIÓN

La forma en la que se lleva a cabo una investigación científica depende de algo que Thomas Kuhn (1970) denomina “paradigmas” (Asiala et al., 1996). Estos paradigmas son definidos por Kuhn como se muestra a continuación:

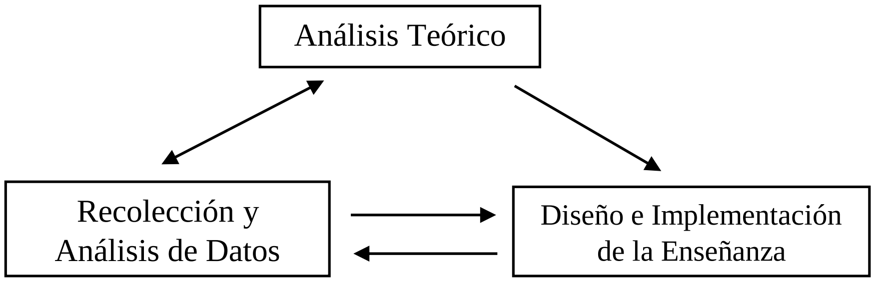
> Un paradigma es un conjunto de acuerdos (explícitos o implícitos) por parte de un individuo o grupo de individuos sobre los tipos de cosas que
>
> uno hace a la hora de realizar la investigación en un determinado campo, los tipos de preguntas que se piden, los tipos de respuestas que se esperan, y los métodos que son empleados en la búsqueda de estas respuestas. (Asiala et al., 1996, p.2)

Como plantea Asiala y otros (1996) la investigación en Educación Matemática, al igual que en otras disciplinas científicas, durante mucho tiempo fue llevada a cabo en términos estadísticos exclusivamente. Sin embargo, este paradigma de investigación no permite abordar eficientemente todas las cuestiones que son de interés para la investigación en nuestra disciplina; ha sido necesario considerar otro tipo de alternativas metodológicas que permitan hacer un análisis cualitativo de las situaciones a estudiar.

A continuación plantearemos el paradigma de investigación propuesto por la teoría APOE, del cual se han sustraído aspectos específicos que nos han permitido desarrollar nuestra investigación de manera coherente en relación a la problemática de estudio.

La teoría APOE propone un método propio, integrado por tres componentes que se relacionan formando un ciclo iterativo, la primera de ellas es un *análisis teórico* del concepto o la noción matemática que se desea estudiar; la segunda es un *diseño e implementación de enseñanza y observación* y la tercera, es un *análisis y la verificación de los datos recolectados*. Asiala y otros (1996) realizan una ilustración de las componentes y la forma en que se relacionan entre ellas (Ver figura 7).

Figura 7. Ciclo de investigación (Arnon et al., 2013, p.94)



A continuación realizaremos una descripción de lo que se espera realizar en cada una de las componentes del paradigma de investigación.

4.1.1. Análisis Teórico.

En esta componente se inicia el ciclo iterativo que guía el trabajo de investigación desde la perspectiva de la teoría APOE; mediante el estudio de las posibles construcciones que realiza un individuo al comprender un concepto o noción. Como plantean Roa-Fuentes y Oktaç (2010) esta componente se enfoca en el investigador, en la comprensión que él tenga del concepto o noción a estudiar, de sus experiencias en el aprendizaje y la enseñanza del mismo y del análisis que haga de la forma en que es abordado en los libros de texto. A partir de esto, el investigador modela la epistemología del concepto que finalmente dará lugar a un análisis teórico denominado *descomposición genética*. Asiala y otros (1996) proponen que una *descomposición genética* es un conjunto estructurado de construcciones mentales que puede describir cómo un concepto se desarrolla en la mente de un individuo.

Son dos las cuestiones que según Asiala y otros (1996) deben dirigir el trabajo que se lleva a cabo en esta componente; la primera de ellas es: ¿Qué significa entender el concepto? y la segunda, ¿cómo este entendimiento es construido por el alumno? Estas dos preguntas le permiten al investigador reflexionar sobre lo que significa en realidad comprender un concepto y la forma en la que esta comprensión es alcanzada. Dichos cuestionamientos son importantes para alcanzar el objetivo principal en esta componente, proponer una descripción de las estructuras mentales específicas que un individuo desarrolla para comprender un concepto y las estructuras mentales mediante las cuales lo logra (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010). Estos elementos se organizan en un camino cognitivo llamado descomposición genética.

Las otras componentes del paradigma de investigación van alimentando y haciendo evolucionar la *descomposición genética* del primer análisis teórico. De esta manera se espera que en cada iteración del ciclo, la descomposición genérica vaya refinándose, es decir, que cada vez se acerque más a la forma "real" en la que un individuo construye un concepto matemático.

4.1.2. Diseño y Aplicación de la Enseñanza.

La *descomposición genética* planteada en el análisis teórico, determina el diseño de la instrucción y las construcciones mentales que dicha componente fomente (Asiala et al., 1996).

En esta componente se propone realizar un acercamiento específico pedagógico denominado ACE *(*por sus siglas en inglés; *Activities, Class discussion, Exercises)*. En este ciclo, los estudiantes trabajan de forma cooperativa en el desarrollo de tareas que han sido diseñadas con base en la descomposición genética desarrollada en el análisis teórico, el objetivo de estas tareas no es que los estudiantes obtengan una solución a los problemas planteados sino promover en ellos la abstracción reflexiva; caracterizada en términos de la teoría APOE por las estructuras y mecanismos que se ponen en juego cuando se busca comprender un concepto o noción matemática. Luego, se realiza una actividad de discusión en clase donde los estudiantes organizados en pequeños grupos y guiados por el instructor, puedan reflexionar sobre el trabajo que llevaron a cabo. Por último, se proponen ejercicios estándar que buscan reforzar la actividad y la discusión en clase. El ciclo ACE busca validar o reconsiderar los elementos cognitivos propuestos en el análisis teórico que pueden ser llevados a cabo como actividades en clase o en laboratorios de cómputo donde el manejo de software es la principal herramienta para dar solución a las situaciones propuestas (Asiala et al., 1996; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

Según Roa-Fuentes y Oktaç (2012) una vez que se desarrolla un tratamiento instruccional, es necesario determinar su alcance. Es decir, se debe analizar si dicho tratamiento generó el tipo de construcciones mentales que se describieron en la descomposición genética y para esto es necesario continuar con la tercera componente.

4.1.3. Observación, Análisis y Verificación de Datos.

Esta fase se centra principalmente en la recolección y el análisis de evidencia empírica en busca de validar la descomposición genética propuesta. Según

Arnon y otros (2014) esta componente del paradigma de investigación se propone responder dos preguntas: (1) ¿Los estudiantes parecen desarrollar las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética? (2) ¿Qué tan bien los estudiantes aprenden el concepto en cuestión? Para tal fin, se deben diseñar y aplicar instrumentos veraces que permitan describir las construcciones que desarrollan los individuos y de esta forma identificar cuales se han tomado en cuenta en la descomposición genética, y cuáles no.

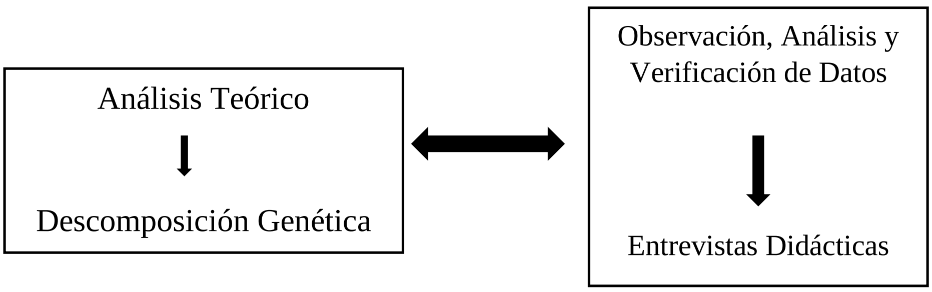
Son muchos los tipos de instrumentos que pueden diseñarse, estos dependerán del tipo de investigación que se lleve a cabo y de los objetivos que se proponga, algunos de ellos pueden ser: entrevistas grabadas (audio o video y audio), cuestionarios escritos, juegos de computadora, exámenes, etc. Los diseños metodológicos pueden incluir observaciones de clase, estudios históricos-epistemológicos, análisis de libros de texto, entre otros (Arnon et al., 2014).

Roa-Fuentes y Oktaç (2012) plantean que un aspecto fundamental es el análisis a priori el cual debe acompañar al diseño de los instrumentos. Este análisis debe plantearse de tal forma que se tengan elementos que desencadenen desequilibrios cognitivos en el individuo durante el desarrollo de las situaciones planteadas en los instrumentos. Esto permitirá que los datos que se obtengan aporten referentes significativos a la descomposición genética.

Al terminar el proceso de enriquecimiento entre las componentes del paradigma de investigación, la descomposición genética final deberá reflejar las construcciones que se observaron en el análisis de las evidencias empíricas, de esta forma es que la descomposición genética deja de ser hipotética y se valida gracias al trabajo realizado con individuos que han abordado la construcción del concepto o noción que nos interesa.

4.1.4. Ciclo de Investigación desde Nuestro Estudio.

Figura 8. Componentes del ciclo de investigación de APOE que fueron desarrolladas en esta investigación



En nuestra investigación adoptamos algunos elementos del ciclo de investigación con la finalidad de determinar un camino cognitivo que sea viable en la construcción de la noción del infinito matemático.

Partimos de la primera componente: Análisis Teórico, y el producto principal alcanzado en esta componente fue el planteamiento de tres descomposiciones genéticas particulares inéditas para dos paradojas del infinito (dos versiones de la paradoja de Aquiles y la tortuga y la construcción del triángulo de Sierpinski), como descomposición genética preliminar de la paradoja del hotel de Hilbert usamos la descomposición genética refinada planteada por Roa-Fuentes (2012). Este planteamiento teórico se realizó tomando en cuenta la descomposición genética genérica planteada por Roa-Fuentes (2012); según esta autora una descomposición genética genérica del infinito es aquella que está determinada por la naturaleza de los procesos iterativos que se llevan a cabo en cada paradoja y que determinan el mecanismo de coordinación, ya sean procesos que divergen, que convergen o la combinación de ellos.

Con base en este análisis diseñamos y realizamos entrevistas didácticas, que se aplicaron a un grupo de estudiantes de maestría en matemáticas y de educación matemática, las cuales fueron filmadas y transcritas. Como se puede ver en la figura 8, establecimos una relación directa entre la primera y tercera componente del ciclo de investigación de la teoría.

Con entrevistas didácticas nos referimos a aquellas que buscan motivar a los estudiantes a la reflexión y, también puede ser, a la construcción de estructuras que les sirva de guía al enfrentarse a las situaciones planteadas (Roa-Fuentes, 2012). Estas entrevistas, buscan generar reflexiones en los individuos sobre aspectos que tradicionalmente no se perciben en la construcción de los conceptos y nociones matemáticas.

No llevamos a cabo un acercamiento pedagógico como se propone en la segunda componente del ciclo, ya que este proceso requiere de la dedicación de un tiempo prudente, en el cual se desarrolle de forma completa el modelo; esto por cuestiones de tiempo y número de investigadores que se necesitan para hacer el seguimiento a los grupos de estudiantes. Además, nuestra investigación se propuso estudiar la construcción de la noción de infinito que puede desarrollar un individuo que ha estado bajo formación matemática fuerte pero tradicional, lo que ha quedado de él sobre la noción de infinito a lo largo de su vida cotidiana y académica.

En la siguiente sección presentamos los aspectos más relevantes del análisis preliminar llevado a cabo en la presente investigación. Naturalmente, proponemos las cuatro descomposiciones genéticas preliminares que hemos llegado a plantear a través de la aplicación de la primera componente del paradigma de investigación.

4.2. ANÁLISIS TEÓRICO

Esta sección se divide en dos partes, en la primera plantemos un acercamiento matemático a cada situación usada en nuestro trabajo; en la segunda, presentamos el producto alcanzado en el desarrollo de la primera componente del método de investigación. El análisis teórico fue usado como fundamento para el diseño y aplicación de las entrevistas y su análisis, y está compuesto por: una descomposición genética para la versión general de la paradoja de Aquiles y la tortuga; una descomposición genética para la versión particular de la paradoja de Aquiles y la tortuga (tomando en cuenta condiciones iniciales específicas); una descomposición genética para la paradoja del hotel de Hilbert (propuesta en Roa-Fuentes y Oktaç, 2014) y, finalmente una descomposición genética para la construcción del triángulo de Sierpinski. Cada uno de dichos análisis se centra en los elementos genéricos planteados por Roa-Fuentes (2012).

4.2.1. Acercamiento Matemático a los Contextos Particulares.

Paradoja de Aquiles y la Tortuga. Esta paradoja planteada por Zenón de Elea (445 a.C.) nos permitirá resaltar los aspectos que producen la concepción del tiempo y el espacio como infinitamente divisibles en términos de la construcción del infinito matemático. La forma en la que se coordinan procesos para la obtención de un único proceso, el paso de un proceso iterativo infinito a un objeto trascendente y las concepciones primarias del infinito, podrán ser identificadas en la manera en que los individuos afrontan este contexto. La paradoja plantea que si el tiempo y el espacio fueran infinitamente divisibles, el movimiento no existiría (Castro y Pérez, 2007). Sin embargo, los individuos no cuestionamos el movimiento dado que convivimos con él en nuestra realidad física, además, en muchos casos las *concepciones primarias* del infinito *(que caracterizamos en el capítulo 2 de este documento)* nos llevan a aceptar que el espacio y el tiempo pueden dividirse ilimitadamente.

A continuación plantearemos un acercamiento matemático a la versión general de la paradoja de Aquiles y la tortuga, ésta es la versión utilizada en las entrevistas y sobre la cual planteamos los análisis preliminares, es una adaptación propia de la autora de este trabajo, de la famosa paradoja propuesta por Zenón de Elea.

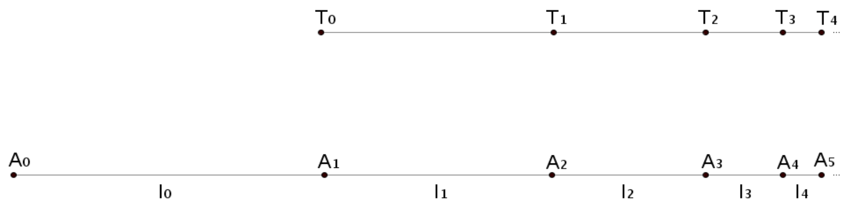
> Versión general: Aquiles, hijo de la diosa Tesis, héroe de la guerra de Troya; apodado "el de los pies ligeros" gracias a su gran velocidad, decide enfrentarse a una tortuga en una carrera que se llevará a cabo en una pista recta, a velocidad constante. Para que la disputa sea un poco más justa, Aquiles da a la tortuga cierta ventaja. Al iniciar la carrera puede verse que cuando Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ésta ya ha avanzado un poco. Nuevamente, Aquiles va tras la tortuga pero al llegar a donde ésta se encontraba descubre que ya ha avanzado otro

pequeño tramo. Así, decide seguir tras ella pero en cada intento, la tortuga ha recorrido una pequeña distancia; de esta manera, ¿podrá Aquiles alcanzar a la tortuga?

Es posible establecer que no importa cuántas veces lo intente, Aquiles se encontrará atrás de la de la tortuga, así los separe una distancia muy pequeña. Este problema contradice la realidad que percibe el individuo, ¿cómo podría el más veloz de los hombres no alcanzar a una sosegada tortuga? Sin embargo, matemáticamente podemos realizar un acercamiento que sea más justo con Aquiles. El proceso que da cuenta de los movimientos realizados por la tortuga puede representarse mediante una sucesión infinita y convergente que además, está contenida en la sucesión infinita de términos que es el proceso de movimientos realizados por Aquiles.

En esta vía, sean A_i y T_i las distancias recorridas por Aquiles y la tortuga en la $i-ésima$ iteración, respectivamente, y sea l_i la distancia que los separa en dicha iteración, como se muestra a continuación:

Figura 9. Movimientos de Aquiles y la tortuga en las primeras iteraciones



Supongamos que Aquiles es k veces más rápido que la tortuga, entonces tenemos que las distancias totales recorridas por Aquiles se pueden escribir como sigue:

$$A_0 = 0$$

$$A_1 = l_0$$

$$A_2 = l_0 + l_1 = l_0 + \frac{l_0}{k}$$

$$A_3 = l_0 + \frac{l_0}{k} + l_2 = l_0 + \frac{l_0}{k} + \frac{l_0}{k^2}$$

$$A_4 = l_0 + \frac{l_0}{k} + \frac{l_0}{k^2} + l_3 = l_0 + \frac{l_0}{k} + \frac{l_0}{k^2} + \frac{l_0}{k^3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$A_n = l_0(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^4} + \cdots + \frac{1}{k^{n-1}})$$

$$A_n = l_0 \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{k^{n-1}}$$

Reconocemos que A_n es una serie que convergente ya que $k > 1$. Para hallar el punto de convergencia tomemos a $c = \frac{1}{k}$ entonces tenemos que:

$$A_{n\to\infty} = l_0 \sum_{n=0}^{\infty} c^n$$

Dado que la suma de los primeros $n - 1$ términos de la serie geométrica está dada por:

$$1 + c + c^2 + c^3 + \cdots + c^{n-1} = \frac{1 - c^n}{1 - c}$$

Podemos observar el comportamiento de esta suma cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - c^n}{1 - c} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1 - c} - \frac{c^n}{1 - c}\right] = \frac{1}{1 - c} - \lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{1 - c} = \frac{1}{1 - c} = \frac{k}{k - 1}$$

Luego, $A_{n\to\infty} = l_0 \frac{k}{k-1}$

Por lo cual decimos que la sucesión de distancias recorridas por Aquiles converge, pero es fácil ver que la tortuga recorre las mismas distancias que Aquiles a excepción de la distancia l_0. La sucesión de distancias recorridas por la tortuga también converge y si sumamos la distancia inicial l_0, converge al mismo número que la sucesión de distancias de Aquiles, esto es:

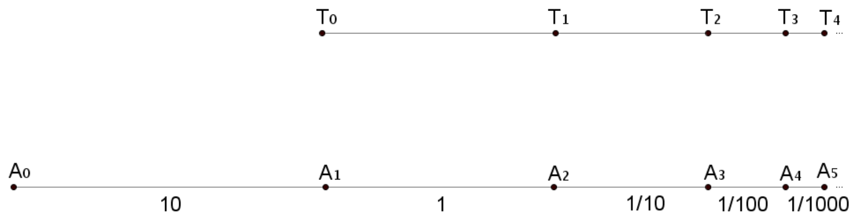
Si $n \to \infty$, $A_n = l_0 + T_n = l_0 \frac{k}{k-1}$

Por lo tanto, Aquiles alcanza a la tortuga a una distancia $l_0 \frac{k}{k-1}$ de su punto de partida.

> Consideremos ahora la versión particular en donde algunas condiciones sobre la situación general fueron dadas a los estudiantes. Versión particular. Suponga que la distancia que Aquiles da a la tortuga es de 10 m y que Aquiles es 10 veces más rápido que la tortuga

Esta versión toma en cuenta valores específicos para la ventaja inicial que le concede Aquiles a la tortuga y para la relación de velocidad entre ellos. La ventaja inicial que se propone es de 10 metros; además se plantea que Aquiles es 10 veces más rápido que la tortuga. Como podríamos pensar, afrontar matemáticamente ésta versión es más sencillo dado que se pueden plantear las distancias recorridas por Aquiles en términos de la relación 10 a 1 entre las velocidades de Aquiles y la tortuga. Esto es, tomemos A_i y T_i como las distancias recorridas por Aquiles y la tortuga en la $i - ésima$ iteración.

Figura 10. Movimientos de Aquiles y la tortuga en las primeras iteraciones



Como se puede ver en la figura 10, es posible plantear las distancias totales recorridas por Aquiles hasta determinada iteración como mostramos a continuación:

$$A_0 = 0$$

$$A_1 = 10$$

$$A_2 = 10 + \frac{10}{10}$$

$$A_3 = 10 + \frac{10}{10} + \frac{10}{100}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{10}{10^0} + \frac{10}{10^1} + \frac{10}{10^2} + \frac{10}{10^3} + \cdots + \frac{10}{10^{n-1}}$$

De lo cual se tiene que $A_n = 11,\overline{11}$, pero es fácil notar que las series A_n y T_n son iguales si sumamos la ventaja inicial que Aquiles le concedió a la tortuga a la serie T_n. Por lo tanto si $n \to \infty$, $A_n = 10 + T_n = 11,\overline{11}$ y podemos concluir que Aquiles alcanza a la tortuga a una distancia $11,\overline{11}$ de su punto de partida.

En las soluciones de la versión general y particular nos centramos en respondernos mediante argumentos matemáticos si Aquiles alcanza o no a la tortuga, sin embargo, las demostraciones que garantizan la convergencia de las series no son tratadas en este documento, ya que nuestro interés no se centra en dar solución formal a los problemas sino en analizar cómo pueden ser abordados por los individuos (Para encontrar un enfoque formal de esta paradoja ver Mayorga, 1986).

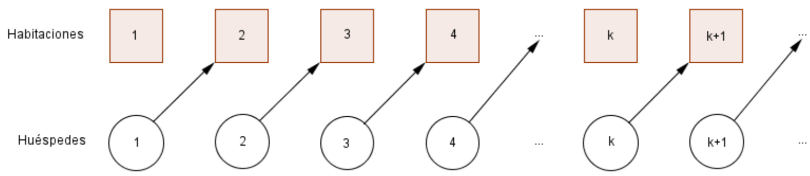
El Hotel de Hilbert. Como plantean Roa-Fuentes y Oktaç (2014), el contexto que propone esta paradoja es diferente al mostrado en la paradoja anterior. Vemos que no se propone de forma explícita un proceso que pueda ser estructurado por un individuo, más bien se expone el infinito de forma actual al afirmar que existe "*un hotel de infinitas habitaciones lleno*". Esta particularidad hace que el individuo empiece a cuestionar el contexto del problema, dando argumentos del mundo real para garantizar la imposibilidad de la existencia de un hotel con dichas características o del número de ocupantes necesarios para llenarlo. A continuación proponemos la versión de la paradoja que usamos en nuestra investigación, la cual es una adaptación de la planteada por Mamolo y Zazkis (2008):

> Suponga que hay un hotel de infinitas habitaciones lleno, cada habitación puede almacenar máximo a un ocupante. ¿Cómo acomodaría a un nuevo e importante huésped? ¿Cómo acomodaría a un infinito número de huéspedes?

Lo que resulta paradójico en esta situación es que a pesar de que el hotel se encuentra lleno siempre podremos acomodar más huéspedes, lo que puede llevar a la idea de la imposibilidad de que se encuentre realmente lleno; la pregunta es ¿cómo hacerlo?

Supongamos que las habitaciones del hotel están numeradas, entonces debemos mover los huéspedes de tal manera que lleguemos a dejar una habitación disponible para el nuevo huésped.

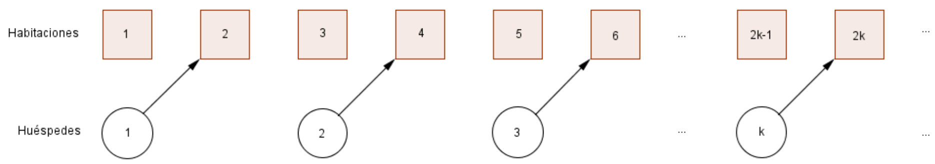
Figura 11. Proceso de acomodación para alojar a un nuevo huésped



La figura 11 puede representarse como una sucesión de naturales donde a cada huésped de una habitación se le asigna la siguiente, esto es, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = n + 1$. De esta manera queda libre la habitación 1 del hotel para el nuevo huésped.

En el caso en el que llegan infinitos nuevos huéspedes, figura 12, es posible que a cada huésped antiguo se le asigna una habitación par y quedan entonces las impares libres para que sean ocupadas por los nuevos huéspedes.

Figura 12. Proceso de Acomodación para alojar a un nuevo infinito número de huéspedes

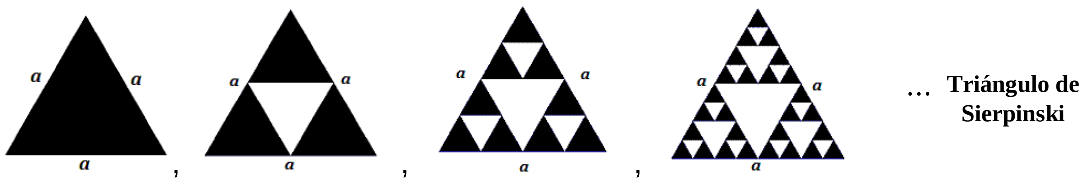


En este caso se tiene $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = 2n$, la reubicación de los huéspedes en los cuartos pares, hará que los infinitos cuartos impares queden vacíos, de esta manera el hotel podrá albergar a los nuevos huéspedes. Este planteamiento requiere del reconocimiento y aceptación de la relación que existe entre el cardinal de los números naturales y sus subconjuntos propios, de esta manera el individuo puede aceptar que el subconjunto de números pares, de los impares y de los naturales, tienen el mismo cardinal.

Construcción del Triángulo de Sierpinski. Las curvas fractales pueden ser generadas a partir de procesos iterativos infinitos, podemos pensarlas como objetos que resultan de ver un proceso inacabado como una totalidad, con características susceptibles de ser analizadas si se entienden como entes estáticos. A continuación planteamos la construcción del triángulo de Sierpinski que fue propuesta en las entrevistas (versión adaptada de Sabogal y Arenas, 2011), en este caso, buscábamos que el individuo determinara el perímetro de dicha curva fractal.

> Se tiene inicialmente un triángulo equilátero relleno de lado a, se unen los puntos medios de los lados que forman el triángulo de modo que el triángulo inicial queda dividido en cuatro triángulos equiláteros y congruentes, de los cuales se elimina el triángulo central, de esta forma quedan 3 triángulos cada uno de lado $\frac{a}{2}$. Se repite el mismo procedimiento en cada uno de los triángulos resultantes y así sucesivamente al infinito. ¿Cuál es el perímetro del triángulo de Sierpinski?

Figura 13. Construcción del triángulo de Sierpinski



Entre cada una de las iteraciones, algunas características propias de los triángulos generados varían. Tal es el caso del número de triángulos que conforman cada curva que precede el triángulo de Sierpinski y la longitud de cada uno de sus segmentos. La figura inicial está compuesta por un triángulo equilátero de lado a, por tanto su perímetro es $3a$. En la curva generada por la segunda iteración se tienen 3 triángulos equiláteros cada uno de lado $\frac{a}{2}$, lo que nos permite determinar que el perímetro de la curva será $\frac{9}{2}a$. En la tercera iteración, se tienen 9 triángulos conformados por segmentos de longitud $\frac{a}{4}$, por lo cual el perímetro será $\frac{27}{4}a$. Si logramos determinar la proporción de aumento del número de triángulos en términos generales como 3^n y la reducción de los segmentos que conforman las figuras como $\frac{1}{2^n}a$, podemos concluir que el perímetro para cualquier curva que precede al triángulo de Sierpinski será: $\left(\frac{3}{2}\right)^n 3a$. Por tanto para determinar cuál es el perímetro del triángulo de Sierpinski, debemos analizar el comportamiento al infinito de dicha expresión, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} 3a\left(\frac{3}{2}\right)^n = 3a \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty.$$

Por lo cual podremos concluir que el perímetro del triángulo de Sierpinski es infinito.

En la siguiente parte de esta sección propondremos los resultados de la aplicación de la primera componente de nuestro método de investigación. Estos resultados se consolidan en cuatro descomposiciones genéticas preliminares con las cuales diseñamos y llevamos a cabo la tercera componente del paradigma de investigación propuesto por la Teoría APOE.

4.2.2. Descomposiciones Genéticas Preliminares

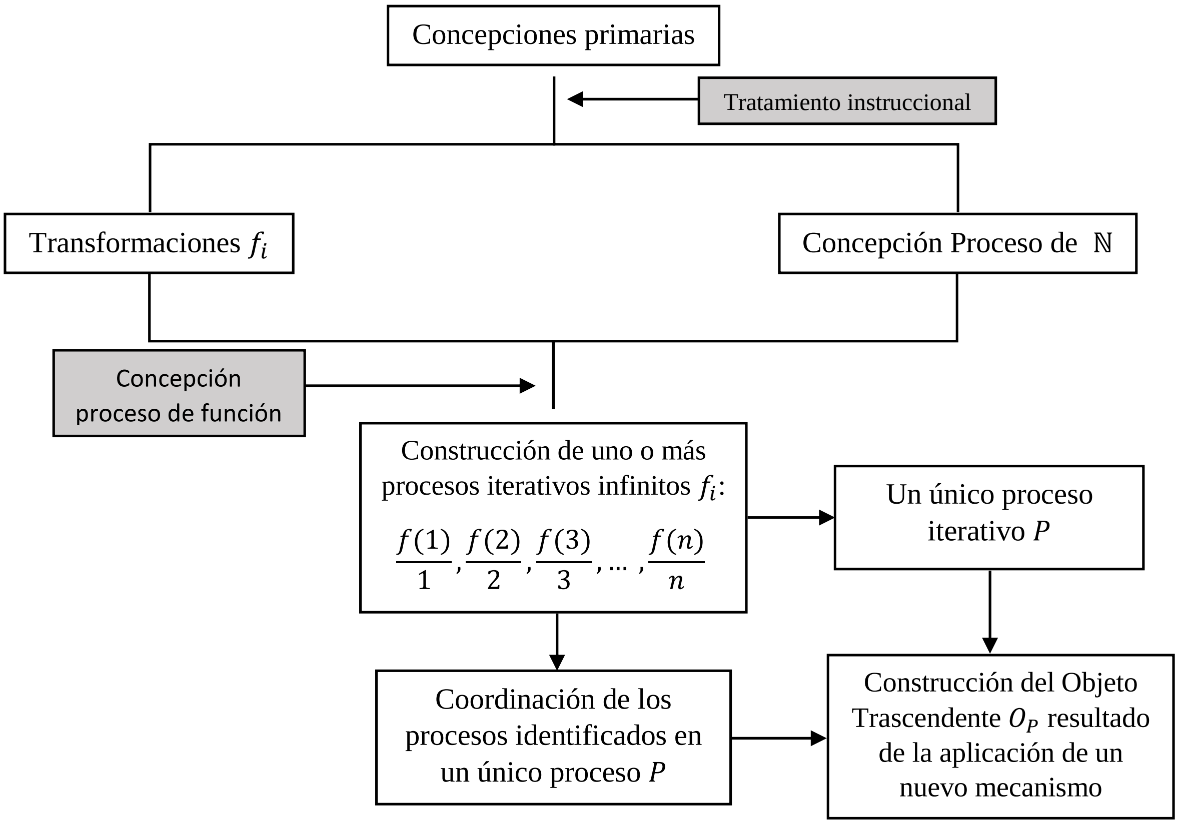
Para el planteamiento de las descomposiciones genéticas preliminares, tomamos en cuenta la descomposición genética genérica de infinito (ver figura 14) planteada por Roa-Fuentes (2012), con la cual se busca determinar posibles caminos de construcción del infinito matemático que sean independientes al contexto.

Roa-Fuentes (2012) propone que las estructuras que los individuos construyen cuando se enfrentan a situaciones que involucran el infinito matemático no se relacionan directamente con un proceso iterativo infinito sino que son abordadas de forma dual dependiendo de la manera en que aparece el infinito en cada situación. Es decir, si el contexto plantea procesos de transformación evidentes, los individuos pueden realizar un tratamiento dinámico de la situación. En los casos donde el contexto plantea el infinito como un proceso terminado, el tratamiento puede tomar características estáticas y enfocarse en estudiar las condiciones de los últimos elementos del proceso. A pesar de que estas dos formas de tratamiento son diferentes, se encuentran presentes en los argumentos que presentan los individuos al realizar una tarea; aunque muestran mayor afinidad por las concepciones de tipo dinámico dado que son más cercanas a él y le permiten realizar conclusiones, a su forma de ver, más convincentes. En esta medida es importante determinar cómo un individuo plantea un proceso iterativo infinito a partir de sus concepciones primarias.

Las concepciones primarias del infinito surgen a partir de la experiencia de los individuos en contextos no matemáticos y por ideas naturales (Tall, 2001), sobre el conjunto de los números naturales. De manera que en términos generales, estas concepciones son de tipo dinámico. Cuando el individuo se enfrenta, en la academia, a conceptos que involucran el infinito y que requieren de una mirada estática (funciones con comportamiento asintótico, límites infinitos, etc.) surgen conflictos que busca solucionar extendiendo las propiedades dinámicas de las construcciones que lo han acompañado durante toda su vida a una construcción que es fundamentalmente estática, extendiendo propiedades de lo finito a lo infinito.

En la figura 14 se exalta la necesidad de que esas concepciones primarias sean abordadas a través de un *tratamiento instruccional,* el cual fundamentalmente busca diferenciar dos conceptos que los individuos manejan y están directamente relacionados con sus concepciones, el concepto de cardinal y el concepto de ordinal, ambos en el tratamiento del conjunto de los números naturales. Básicamente se busca que el individuo comprenda la diferencia de estos dos conceptos cuando se asocian a conjuntos infinitos. El denominado tratamiento instruccional hace referencia a un diseño y aplicación de un modelo de enseñanza que se enfoque en la construcción de procesos iterativos infinitos y los objetos que trascienden de éstos.

Figura 14. Descomposición genética genérica de infinito (Roa-Fuentes, 2012, p.199)



Los resultados presentados por Roa-Fuentes (2012) plantean que un individuo que ha estado bajo un tratamiento instruccional podrá identificar las transformaciones sobre el conjunto de los números naturales que se presentan en una situación que se relacione con el infinito. Aplicará éstas transformaciones a un subconjunto finito de naturales, esas acciones deberán ser interiorizadas en un proceso, lo cual se logra cuando el individuo se percata de que ésta transformación puede actuar sobre cada número natural a pesar de que no pueda representar todas las imágenes. Roa-Fuentes (2012) propone que el individuo está en una concepción proceso de un proceso iterativo infinito cuando logra determinar cómo actúa la transformación en cada número natural y caracteriza el proceso por: tener primer elemento, dado cualquier elemento del proceso siempre es posible determinar su antecesor (exceptuando el caso del primer elemento) y su sucesor, y por ser un proceso ordenado, lo cual es heredado del orden de los naturales. Estos procesos pueden ser representados a través de funciones biyectivas.

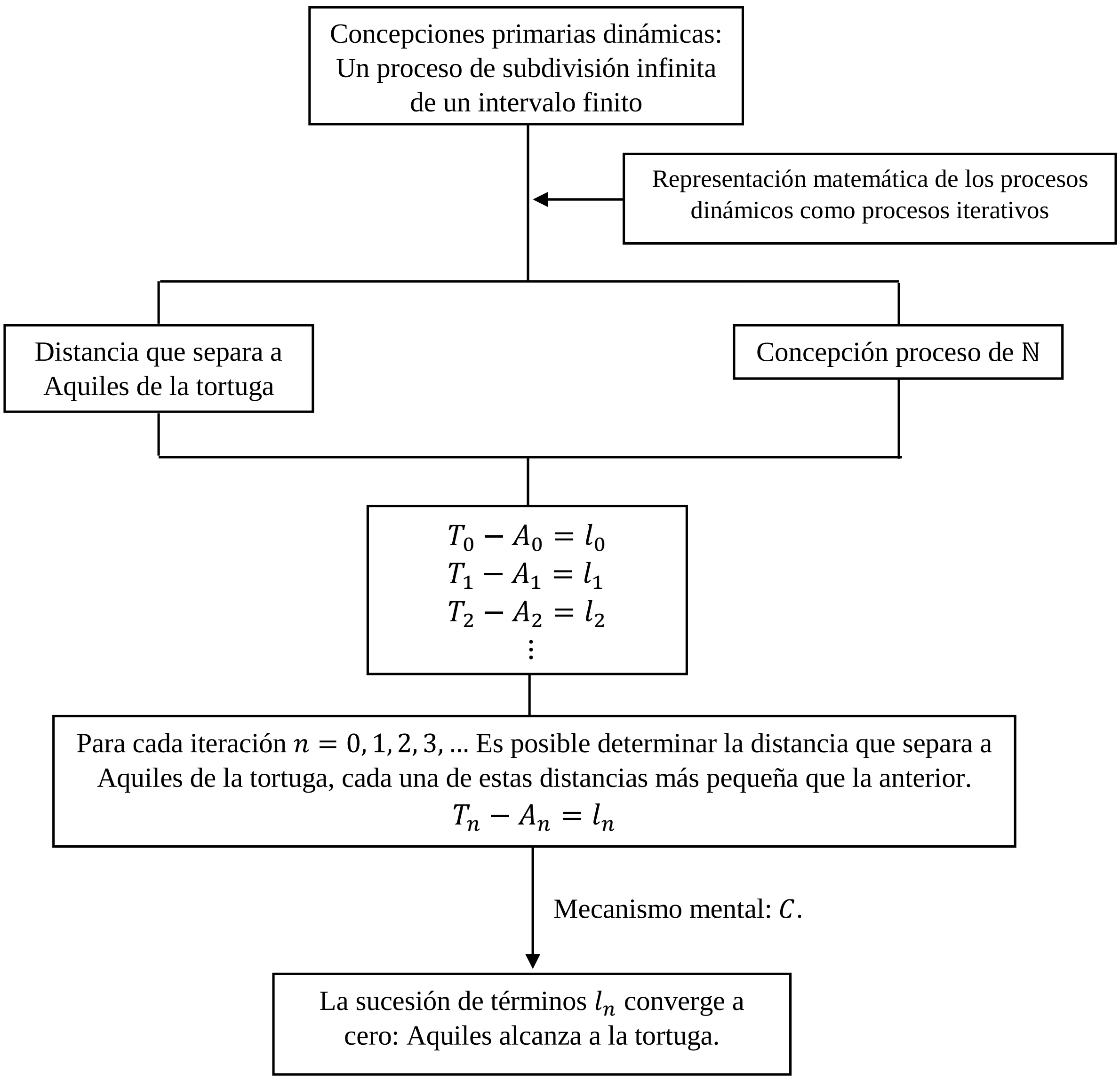
La complejidad del asunto está en ver el proceso iterativo como terminado y aceptar las nuevas condiciones que se obtienen al aplicar el proceso a todos los naturales, dado que el estado al infinito genera “cosas” que no guardan las características de los elementos generados por el proceso. En este sentido, se considera que el mecanismo tradicional de *encapsulación* no es suficiente o interviene en la construcción de un objeto a partir de un proceso iterativo infinito. A partir de este análisis y de los datos obtenidos en las entrevistas realizadas a un grupo de niños y jóvenes talento en matemáticas (Roa-Fuentes y Oktaç, 2014; Roa-Fuentes, 2012) surge la necesidad de definir un nuevo mecanismo que nos permita aceptar las nuevas condiciones, donde el objeto resultante no pertenece a la sucesión que genera el proceso, no tiene un elemento que lo anteceda ni un sucesor. El objeto trasciende ya que es el resultado de ver el proceso completo y no de tratarlo a partir del “último” elemento de la sucesión.

Con base en este análisis general a continuación describimos las cuatro descomposiciones genéticas que hacen parte del desarrollo del Análisis Teórico en nuestra investigación. En cada una de ellas se podrán diferenciar características que se adaptan al análisis genérico pero que se ligan directamente con el contexto que cada situación propone.

- ***Descomposición genética de la versión general de la paradoja de Aquiles y la tortuga***

Proponemos un modelo teórico de construcción del infinito en el contexto específico de Aquiles y la tortuga en su versión general (ver figura 15). En este contexto pueden ser identificados dos procesos diferentes pero de igual naturaleza, el proceso generado por los movimientos de Aquiles y el generado por los movimientos de la tortuga. En este caso tomamos en cuenta una solución en la que el individuo construye un único proceso iterativo (distancia que separa a Aquiles de la tortuga) a partir de los procesos identificados en el contexto, creemos que esta solución es viable debido a que esta versión de la paradoja está propuesta en términos generales, por lo cual los individuos pueden inclinarse por analizar el comportamiento de la sucesión de distancias que separan a Aquiles de la tortuga.

Figura 15. Descomposición genética preliminar versión general Aquiles y la Tortuga



Al abordar el infinito en este contexto, esperamos que un individuo soporte el problema dando argumentos generados por sus concepciones sobre el infinito. Él puede trivializar la situación alegando que es evidente que Aquiles alcanzará a la tortuga, ya que éste es más rápido o que depende de la ventaja inicial que Aquiles de a la tortuga y el tiempo de duración de la carrera. Si se enfatiza en que la ventaja puede ser cualquiera y que el problema no plantea un límite de tiempo, esperamos que identifique los procesos inmersos en el contexto: el proceso generado por el movimiento de Aquiles y el generado por el movimiento de la tortuga. Diremos entonces que el individuo comienza a tener una concepción acción de infinito que se concretará con la realización de algunas acciones específicas, que lo llevarán a establecer un proceso iterativo infinito. Por un lado, él puede asumir un único proceso que depende de los procesos mencionados inicialmente, es decir, pensar en la distancia que separa a Aquiles de la tortuga en un momento dado. Tomemos a A_i y T_i como las distancias recorridas por Aquiles y la tortuga respectivamente y a l_i como la distancia que separa a Aquiles de la tortuga en la $i-ésima$ iteración, de tal manera que:

$$\begin{gathered} T_0 - A_0 = l_0 \\ T_1 - A_1 = l_1 \\ T_2 - A_2 = l_2 \\ \vdots \end{gathered}$$

De la realización de estas acciones y de la reflexión que el individuo haga sobre ellas, se motiva la interiorización de las mismas. Esta interiorización puede generarse por la necesidad de establecer un momento específico en el que coincidan Aquiles y la tortuga, recordemos que en este caso el individuo eligió ver ambos procesos como uno sólo, de manera que las acciones han sido planteadas en términos de un proceso que en realidad involucra los dos procesos contenidos en el contexto de la situación. No entendemos muy bien, en este caso, cómo se relacionan los procesos, dado que el individuo parece "coordinarlos" en uno único antes de realizar las primeras acciones, sin embargo esperamos que estas acciones sean interiorizadas debido a que el individuo entiende que no conseguirá solucionar el problema a través de la realización de acciones sino que necesita conocer cómo se comporta la sucesión de distancias en términos más generales y de esta forma responder la pregunta que plantea la situación. La concepción proceso de infinito se evidencia con el planteamiento del término general $n-ésimo$ del proceso como mostraremos a continuación:

$$\begin{gathered} T_0 - A_0 = l_0 \\ T_1 - A_1 = l_1 \\ T_2 - A_2 = l_2 \\ \vdots \\ T_n - A_n = l_n \end{gathered}$$

Ahora, esperamos que el individuo construya el objeto trascendente, es decir, que concluya que Aquiles alcanza a la tortuga, porque en un estado infinito, la distancia entre Aquiles y la tortuga se hace cero. Sin embargo, esto no es inmediato ya que para cada iteración podemos encontrar una distancia positiva diferente de cero que separará a Aquiles de la tortuga, sin importar que n sea un número natural muy grande; de lo anterior el individuo puede concluir que Aquiles no alcanzará a la tortuga, permaneciendo en una concepción proceso de infinito, sin lograr ver el proceso iterativo como un todo. Esto conllevaría a que aunque el individuo proponga la situación al límite del proceso iterativo infinito que construyó, siga esperando encontrar una iteración para la cual la distancia entre Aquiles y la tortuga sea cero. De esta forma podría evidenciar que tiene una visión netamente potencial del infinito y que no logra alcanzar una concepción objeto del conjunto de los números naturales, ya que para él, el resultado del proceso iterativo infinito es el último elemento, el más grande y este no se puede determinar.

La concepción que el individuo tenga del concepto de límite y del conjunto de los números naturales se relacionará directamente con la respuesta que ofrezca a la pregunta detonante: ¿puede Aquiles alcanzar a la tortuga? La cual motivará el mecanismo de completez.

El mecanismo de completez da lugar a la construcción de la concepción objeto de infinito, en esta situación, se caracterizará porque el individuo abandona su visión potencial, es decir, no pretenderá encontrar una iteración para la cual Aquiles y la tortuga ocupen la misma posición, sabe que no existe, pero logra interpretar la convergencia de la sucesión de términos l_n como una tendencia de todo el proceso, podrá pensar que en el infinito, la posición que ocupa Aquiles y que ocupa la tortuga son indistinguibles. Como hemos mencionado anteriormente, la capacidad que el individuo tenga de ver el proceso iterativo como un todo está dada por la concepción que posea del conjunto de los números naturales; una de las características del mecanismo de completez es que el individuo debe poseer una concepción objeto del conjunto de los números naturales que le permita imaginar lo que sucede cuando la transformación, dada por el proceso iterativo, actúa sobre todo el conjunto, construyendo así, el objeto trascendente.

Si el individuo decide afrontar la situación no mirando las distancias que separan a Aquiles de la tortuga en cada iteración sino que busca determinar las distancias totales recorridas en cada caso, se obtendrá una situación análoga a la que afrontaremos en la descomposición genética preliminar de la versión particular que mostraremos a continuación, donde las distancias recorridas para Aquiles y la tortuga tomarán forma de series geométricas convergentes.

❖ *Descomposición genética de la versión particular de Aquiles y la tortuga*

Esta versión será planteada a los estudiantes una vez hayan afrontado la versión general, pensamos que será más sencilla debido a que se ofrecen valores específicos para la ventaja que ofrece Aquiles a la tortuga y la relación entre sus velocidades. En la figura 16 planteamos la descomposición genética preliminar de la versión particular de esta paradoja.

Esperamos que los individuos afronten de forma física el problema, utilizando las expresiones que relacionan el espacio, el tiempo y la velocidad, lo cual hará que quieran encontrar el tiempo en el que Aquiles y la tortuga tendrán la misma posición. A pesar de que en su mayoría, la población de entrevistados tienen amplios conocimientos en matemáticas, se debe recordar a los individuos que el uso de la física está supeditado a garantizar que Aquiles sí la alcanza, lo cual es la pregunta central del problema. Tal y como propone García (2003) para los físicos, la paradoja de Aquiles y la tortuga no existe, debido a que la idea de que Aquiles no pueda alcanzar a la tortuga en un recorrido finito, no entra dentro de los hechos de la experiencia.

Figura 16. Descomposición genética preliminar versión general Aquiles y la Tortuga

Concepciones primarias dinámicas: Un proceso de subdivisión infinita de un intervalo finito

Representación matemática de los procesos dinámicos como procesos iterativos

Posición de Aquiles (A_n) o la tortuga (T_n)

Concepción proceso de ℕ

Construcción de procesos iterativos. Función definida en ℕ en un conjunto X

$$A_0 = 0$$

$$A_1 = 10$$

$$A_2 = 10 + \frac{10}{10}$$

$$A_3 = 10 + \frac{10}{10} + \frac{10}{100}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{10}{10^0} + \frac{10}{10^1} + \frac{10}{10^2} + \frac{10}{10^3} + \cdots + \frac{10}{10^{n-1}}$$

Coordinación: Relación existente entre A_n y T_n

Para cada iteración $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Es posible determinar la posición de Aquiles y la tortuga en términos de la distancia de cada uno al punto de partida de Aquiles.

$$T_o = A_1$$
$$T_1 = A_2$$
$$T_2 = A_3$$
$$\vdots$$
$$T_{n-1} = A_n$$

Mecanismo mental: C.

$$T_{n\to\infty} = A_{n\to\infty} = 11.1111 \ldots$$

Aquiles y la tortuga se encuentran a una misma distancia del punto de partida de Aquiles.

Creemos que en esta versión de la paradoja, gracias a los valores específicos dados (relación de velocidad entre Aquiles y la tortuga y la distancia inicial), el individuo podrá inclinarse por encontrar la posición de Aquiles y la tortuga en término de las distancias totales recorridas.

Igual que en la versión general, el individuo inicia con la identificación de los procesos inmersos en el contexto del problema, en específico, los movimientos de Aquiles y los movimientos de la tortuga; estos procesos están sujetos al contexto particular de la situación. El individuo seleccionará uno de estos procesos y empezará a realizar una serie de transformaciones que se relacionan con el conjunto de los números naturales, identificándolas como iteraciones sobre este conjunto y construyendo así un proceso iterativo infinito. En el caso que el individuo seleccione el proceso que involucra los movimientos de Aquiles, podrá encontrar la distancia recorrida por Aquiles cuando alcanza la posición que tomaba la tortuga en la iteración exactamente anterior, es decir, de alguna forma se evidencia que los dos procesos que identificó inicialmente están relacionados. A continuación mostramos cómo pueden ser las acciones que realizará el individuo al intentar construir el proceso iterativo A_i (Posición ocupada por Aquiles en la *i-ésima* iteración) en términos de la distancia que separa a Aquiles de su punto de partida en cualquier iteración.

$$A_0 = 0$$

$$A_1 = 10$$

$$A_2 = 10 + \frac{10}{10}$$

$$A_3 = 10 + \frac{10}{10} + \frac{10}{100}$$

$$\vdots$$

Ante la imposibilidad de continuar realizando las acciones, el individuo las interioriza, y lo evidencia mediante la identificación de la forma general en la que se lleva a cabo la transformación descrita. Creemos que la interiorización es motivada principalmente porque el individuo requiere entender cómo se comportará la serie en cualquier iteración.

$$A_n = \frac{10}{10^0} + \frac{10}{10^1} + \frac{10}{10^2} + \frac{10}{10^3} + \cdots + \frac{10}{10^{n-1}}$$

Motivado por la necesidad de tener una expresión que relacione las posiciones ocupadas por Aquiles y por la tortuga, el individuo utiliza la relación mencionada anteriormente y coordina los procesos identificados. De tal manera que si T_i representa las distancias recorridas por la tortuga en la $i - ésima$ iteración, el individuo podría coordinar los procesos iterativos como mostramos a continuación.

$$T_0 = A_1 = 10$$

$$T_1 = A_2 = 10 + \frac{10}{10}$$

$$T_2 = A_3 = 10 + \frac{10}{10} + \frac{10}{100}$$

$$\vdots$$

$$T_{n-1} = A_n = \frac{10}{10^0} + \frac{10}{10^1} + \frac{10}{10^2} + \frac{10}{10^3} + \cdots + \frac{10}{10^{n-1}}$$

Si el individuo realiza la coordinación de los procesos que generan las distancias recorridas por Aquiles y las distancias recorridas por la tortuga y piensa en el comportamiento al infinito de uno de éstos, puede deducir que el comportamiento al infinito del otro es exactamente el mismo (recordemos que la coordinación de los procesos ha dejado como generalidad la expresión $T_{n-1} = A_n$. Consideramos que esta coordinación no se hace tan complicada debido a que la naturaleza de los procesos es la misma, convergente.

$$T_{n\to\infty} = A_{n\to\infty} = 11.1111\ldots$$

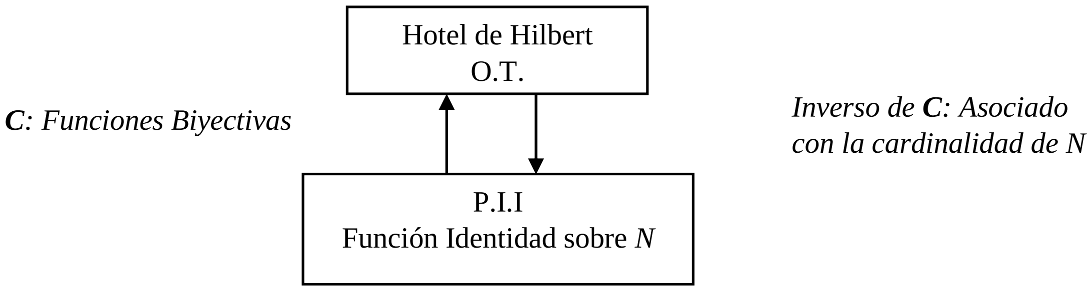
La pregunta ¿Podrá alcanzar Aquiles a la tortuga? Motiva el mecanismo de completez. El individuo puede considerar que en el infinito la posición ocupada por Aquiles y la posición ocupada por la tortuga es la misma, por lo tanto Aquiles alcanzará a la tortuga. Con lo anterior diremos que el individuo posee una concepción objeto de infinito, en el contexto particular de la paradoja. Como hemos mencionado anteriormente, que el individuo acepte que Aquiles alcanza a la tortuga no es sencillo. El individuo debe poseer una concepción objeto del conjunto de los números naturales que le permita ver el proceso de acercamiento infinito planteado en la idea de convergencia de las series como terminado y concluir que Aquiles efectivamente alcanzará a la tortuga.

Que el individuo plantee la idea de convergencia de las series no implica que haya construido el objeto trascendente, si tiene un visión potencial no podrá ver el proceso de acercamiento planteado en la convergencia como terminado. Por lo tanto, esperamos nuevamente que el mecanismo de completez esté íntimamente relacionado con la concepción que tenga el individuo del concepto de convergencia, el cual a su vez debe estar relacionado con la concepción del conjunto de los números naturales, de la interpretación que haga de la convergencia de cada serie. Esa transformación en la concepción del individuo debe ser motivada, no le bastará solo con aceptar que en ninguna iteración Aquiles y la tortuga ocuparán la misma posición, deberá ver el proceso de acercamiento infinito completado dejando de buscar una iteración específica que le permita concluir.

❖ *Descomposición genética preliminar de la paradoja del hotel de Hilbert*

A partir del análisis de datos llevado a cabo en Roa-Fuentes (2012) se evidencia que un individuo puede aceptar las condiciones de la paradoja a través de dos ideas principales: el concepto de cardinalidad de conjuntos infinitos y la equivalencia entre un conjunto y sus subconjuntos propios. Esto le permitirá abordar la situación en un sentido estático. El individuo deberá pasar de ese sentido estático a un sentido potencial con el planteamiento de un proceso iterativo infinito (P.I.I) como se muestra en la figura 17.

Figura 17. Descomposición genética de la paradoja del hotel de Hilbert (Roa-Fuentes, 2012, p.205)



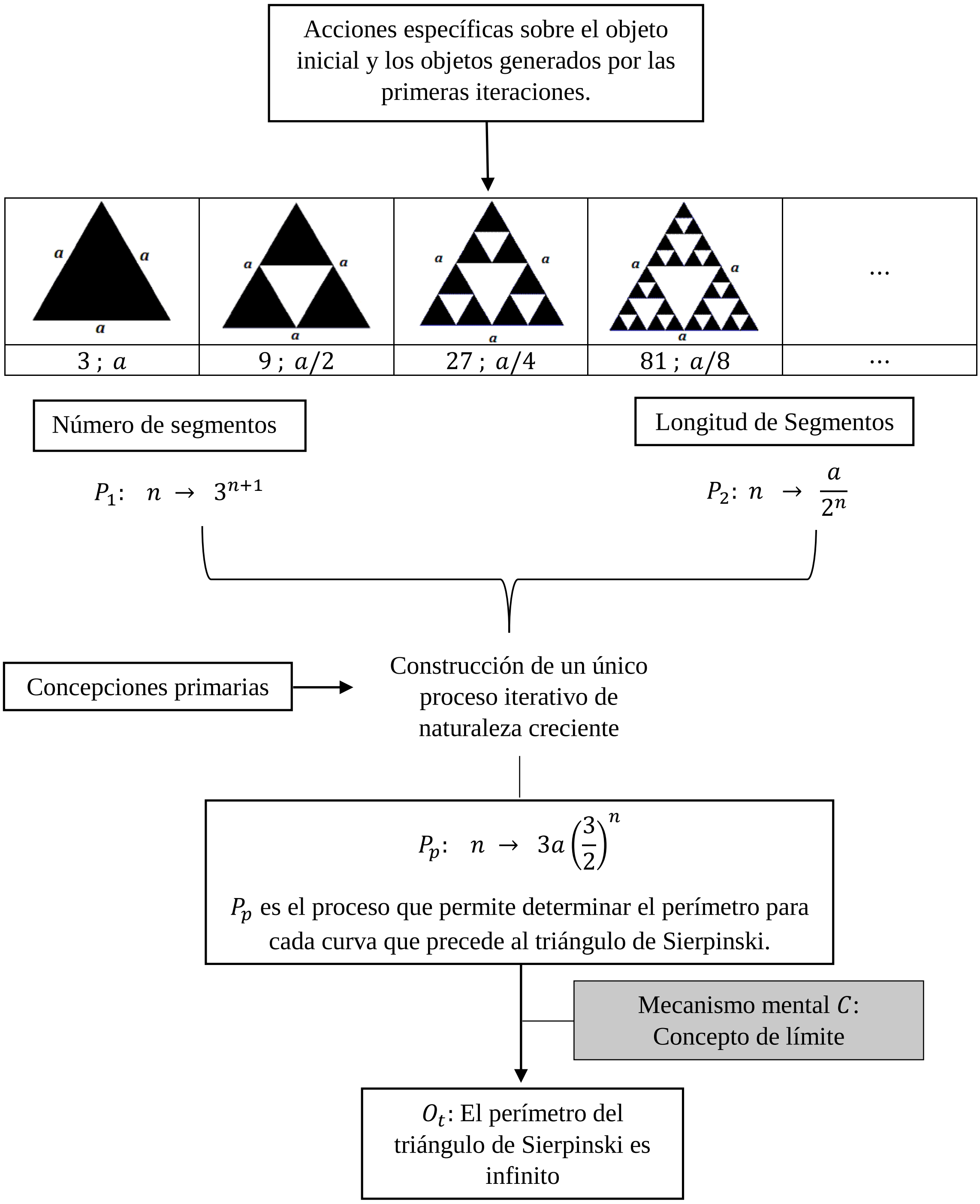
El mecanismo *Completez* se caracteriza por el conocimiento consciente que tenga el individuo del concepto de cardinalidad, que conozca la existencia de conjuntos infinitos con diferente cardinalidad y algunos resultados relacionados con la aritmética de números transfinitos. La construcción del P.I.I está relacionada con el establecimiento de una función de los naturales en los naturales, es decir, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = n$. A partir de esta función un individuo debe establecer nuevas funciones biyectivas entre el conjunto de los números naturales y los conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$, $P = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ e $I = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$. A través de estas nuevas funciones es posible acomodar al nuevo huésped y al infinito número de nuevos huéspedes, dado que la cardinalidad de cada uno de estos conjuntos es la misma, $\aleph_0$. El individuo debe tener claros algunos criterios de cardinalidad definidos por Cantor $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. En el caso específico de la paradoja del hotel de Hilbert $N = P \cup I$ esta unión disyunta de la cual tenemos que $|N| = |P| + |I|$.

No es necesario que el individuo considere casos particulares, es decir, acciones específicas sobre elementos del proceso, ya que el contexto no plantea Procesos Iterativos evidentes. Sin embargo, deberá describir de manera natural los nuevos procesos como funciones biyectivas.

Una vez establecidos estos procesos iterativos infinitos como funciones biyectivas, el individuo podrá, mediante el mecanismo de completez, aceptar los procesos como terminados y generar el objeto trascendente, que en este caso, es el mismo objeto inicial: un hotel de infinitas habitaciones lleno.

- ***Descomposición genética preliminar de la construcción del triángulo de Sierpinski***

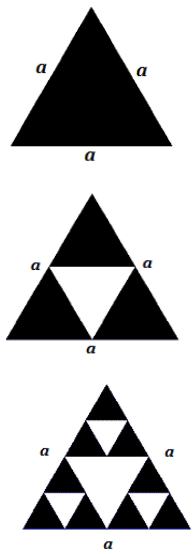
Figura 18. Descomposición genética preliminar de la construcción del triángulo de Sierpinski



En la figura 18, proponemos la descomposición genética para este contexto. Dado al planteamiento explícito del proceso iterativo que permite generar el triángulo de Sierpinski esperamos que el individuo no cuestione el contexto a pesar de que al tratar de imaginarse las características del triángulo de

Sierpinski, su imaginación le pueda jugar una mala pasada ¿cómo pensar en el perímetro de una figura que esté conformada por infinitos segmentos cada uno de longitud cero? A pesar de esta posibilidad esperamos que el individuo comprenda el proceso generador que produce la representación gráfica de las curvas que preceden al triángulo de Sierpinski para posteriormente identificar dos procesos particulares: El número de triángulos (específicamente el número total de segmentos en cada iteración) y la longitud de los mismos. Los procesos particulares están directamente relacionados con la pregunta principal que plantea la situación:

Proceso generador (Primeras acciones, construir triángulos que preceden el triángulo de Sierpinski).



$$\vdots$$

Los procesos particulares son abordados de forma independiente y son transformaciones del conjunto de los números naturales (procesos iterativos infinitos) donde a cada figura resultante se le asocia una posición dentro de la secuencia.

Proceso 1: Aumento de segmentos totales:

$$\begin{array}{lcl} n = 0 & \rightarrow & 3 \\ n = 1 & \rightarrow & 9 \\ n = 2 & \rightarrow & 27 \\ n = 3 & \rightarrow & 81 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Proceso 2: Longitud de cada segmento:

$$n = 0 \rightarrow a$$

$$n = 1 \rightarrow \frac{a}{2}$$

$$n = 2 \rightarrow \frac{a}{4}$$

$$n = 3 \rightarrow \frac{a}{8}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

La imposibilidad de seguir representando de forma gráfica el proceso generador y la necesidad de entender cómo se comportan los procesos en términos más escuetos, motiva la interiorización de las acciones anteriormente descritas en procesos que permitan determinar el número de triángulos y la longitud de cada segmento para cada una de las curvas que preceden el triángulo de Sierpinski, esto es plantear el término general de cada proceso particular.

Proceso 1: $n \rightarrow 3^{n+1}$ Proceso 2: $n \rightarrow \frac{a}{2^n}$

Los procesos particulares deben ser coordinados en un único proceso en miras a responder la pregunta que plantea la situación; sin embargo, esta coordinación no es sencilla dada la diferente naturaleza de los procesos particulares (el primero es divergente y el segundo convergente). El individuo puede encontrarse ante una situación problemática al pensar en un número infinito de segmentos cada uno de longitud cero, esto puede generar que empiece a argumentar sus posturas desde sus concepciones primarias y lo puede evidenciar con afirmaciones como: “el perímetro del triángulo de Sierpinski es cero dado que la suma infinita de ceros es cero”. La necesidad de ver los procesos particulares como un único proceso para cada una de las curvas precedentes hará que el individuo coordine los procesos 1 y 2, no entendemos exactamente cómo ocurre esta coordinación pero creemos que está íntimamente relacionada con la característica que se busca analizar. Esperemos a partir del análisis de los datos de esta investigación refinar en mayor medida la forma en que se genera dicha coordinación.

Los procesos coordinados generan un único proceso que permite obtener la longitud de los triángulos precedentes al triángulo de Sierpinski, este proceso es, desde luego un proceso iterativo infinito.

Proceso Coordinado: $n \rightarrow 3a\left(\frac{3}{2}\right)^n$

El individuo a través del *proceso iterativo infinito* debe generar la concepción objeto de infinito para lo cual esperamos que proponga el límite al infinito del proceso resultante de la coordinación pero no basta solo con proponer el límite. El individuo debe poseer una concepción objeto de límite lo cual propiciaría el mecanismo de *Completez*, lo que le permitirá imaginar el proceso de acercamiento infinito inmerso en el concepto de límite como terminado; esto está íntimamente relacionado con poder ver el conjunto de los números naturales a través de su cardinalidad. Si un individuo no posee una concepción objeto de límite puede llegar a concluir que no es lógico cuestionar la longitud del triángulo de Sierpinski, ya que no podrá concebir el triángulo de Sierpinski como un objeto terminado.

4.3. ENTREVISTAS Y DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN

Como hemos explicado en la sección 5.2 las entrevistas que diseñamos y llevamos a cabo buscaban generar en los individuos la reflexión y la construcción de estructuras que les permitieran afrontar los problemas eficazmente. Cada entrevista duró entre 90 y 120 minutos, en ella se propuso a los estudiantes las situaciones en el siguiente orden:

1. Versión general de Aquiles y la tortuga.
2. Versión particular de Aquiles y la tortuga.
3. La paradoja del hotel de Hilbert.
4. La construcción del triángulo de Sierpinski.

Nuestra población estuvo conformada por cuatro estudiantes de maestría en Matemáticas: dos de ellos realizaron su pregrado en matemática pura y en Licenciatura en Matemáticas; y por tres estudiantes de maestría en Educación Matemática: dos con título de pregrado en Licenciatura en Matemáticas y uno con pregrado en Ingeniería.

4.4. ANÁLISIS DE DATOS

En esta sección del capítulo analizaremos a profundidad y tomando como referencia las descomposiciones genéticas preliminares, las construcciones realizadas por los estudiantes entrevistados. Dichos análisis nos permitirán enriquecer y respaldar empíricamente el análisis teórico llevado a cabo en el marco de esta investigación. Expondremos evidencias empíricas de los momentos detonantes en los que los estudiantes evidencian la construcción de las estructuras (hayan sido tomadas en cuenta en el análisis preliminar o no), la manera como logran pasar de una estructura a otra, las concepciones primarias, las características de los mecanismos, entre otras.

A continuación plantearemos los seudónimos usados para referirnos a cada uno de los estudiantes entrevistados:

- Maestría en Educación Matemática: Néstor, Dalia y Orlando.
- Maestría en Matemáticas: Rocío, Mariana, Jaime y Julio.

4.4.1. Paradoja de Aquiles y la tortuga

A continuación expondremos algunas evidencias de las construcciones que realizaron los individuos entrevistados al enfrentarse a la paradoja de Aquiles y la tortuga en su versión general y posteriormente en su versión particular.

> Versión general. Aquiles, hijo de la diosa Tesis, héroe de la guerra de Troya; apodado "el de los pies ligeros" gracias a su gran velocidad, decide enfrentarse a una tortuga en una carrera que se llevará a cabo en una pista recta, a velocidad constante. Para que la disputa sea un poco más justa, Aquiles da a la tortuga cierta ventaja. Al iniciar la carrera puede verse que cuando Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ésta ya ha avanzado un poco. Nuevamente, Aquiles va tras la tortuga pero al llegar a donde ésta se encontraba descubre que ya ha avanzado otro pequeño tramo. Así, decide seguir tras ella pero en cada intento, la tortuga ha recorrido una pequeña distancia; de esta manera, ¿podrá Aquiles alcanzar a la tortuga?

❖ *Concepciones primarias dinámicas y estáticas: Reacciones al contexto.*

Como hemos resaltado en el capítulo 2, las concepciones primarias que un individuo desarrolla sobre la noción de infinito surgen en un contexto no escolar y son usadas como argumentos, al menos inicialmente, ante cualquier situación que involucre esta noción matemática. Son de tipo dinámico y estático, aunque no están relacionadas con procesos iterativos infinitos y salen a relucir para abordar situaciones que se asumen como contradictorias, paradójicas (Roa-Fuentes, 2012) o simplemente los individuos las utilizan para ofrecer argumentos de aquello que no pueden abordar con un conocimiento matemático específico. A continuación mostraremos evidencias de este tipo concepciones detectadas durante el análisis de datos.

Rocío: "Si la velocidad es constante no se alcanzarán".

Podemos evidenciar concepciones primarias de tipo dinámico en la reacción de Rocío ante la paradoja, apenas leyendo la situación concluye que Aquiles no podrá alcanzar a la tortuga ya que las velocidades son constantes.

> Rocío: ¿Podrá Aquiles alcanzar a la tortuga? Pues yo creo que no. Su merced ¿dice que sí? Aunque muchos de los estudiantes dicen que sí porque él es más veloz, pero si la velocidad es constante no se alcanzarán. ¿Algo más sobre esa pregunta?

Vemos que la conclusión de Rocío no tiene que ver con la construcción de procesos iterativos, sino con lo que ella cree que pasa cuándo las velocidades son constantes y se da cierta ventaja. Cree que es un argumento suficiente para justificar su respuesta.

Orlando: "Si ponemos a Usain Bolt sí, es uno de los hombres más rápidos del mundo".

Este estudiante, en contraste con Rocío, evidencia una concepción estática primaria, cuando usa argumentos de la vida real para cuestionar la paradoja. Decide ponerse a sí mismo en competencia contra Usain Bolt para ejemplificar la imposibilidad de que Aquiles no pueda alcanzar a la tortuga.

Orlando: Esa paradoja es rara. Aquí está el punto, aquí está Aquiles, aquí está la tortuga y luego recorre otro tramo más, pero entonces ya no está aquí, aquí ya no está la tortuga sino va a estar acá, y acá va a estar Aquiles, entonces sí siempre va estar… ¡No!

Es que no, siento que, ¡no puede pasar eso! Porque en un dado momento la tortuga… Aquiles tiene que alcanzar a la tortuga porque es más lenta. No, por ejemplo, sí ponemos a Usain Bolt… Sí, ¿no? Es uno de los hombres más rápidos del mundo, y me ponen a mí. Y él me da un tramo de no sé, cinco metros. Y él corre a una velocidad constante, obviamente si da la… Él va a correr más rápido que yo. O sea sí yo me pongo a correr no sé, cinco kilómetros en… No sé, en... Perdón, cuatro metros en cinco minutos, y Usain Bolt los va a recorrer en un minuto. Si él va… Es que no menciona ahí cual es la velocidad constante, nada más dice velocidad constante, entonces yo puedo tomar en cuenta cualquier velocidad constante ¿no? Entonces la velocidad de Usain Bolt puede ser, no sé, el doble que la mía. Aunque a mí me de intervalos grandes de distancia me va alcanzar en algún momento porque la mía va a ser la menor, tres veces menor que la de él. [Aunque la relación que Orlando establece no es correcta, es claro que busca resaltar que en una competencia en donde uno de los participantes es más veloz implica que dicho participante ganará la carrera, independientemente de la ventaja original].

La diferencia entre las velocidades es la explicación que usa Orlando para respaldar que Aquiles alcanza la tortuga.

A continuación plantaremos otro tipo de argumentos cotidianos usados para justificar la intuición que tiene una estudiante de que Aquiles deber alcanzar a la tortuga.

Mariana: "Yo diría que en la vida real sí".

Mariana cree que Aquiles sí podrá alcanzar a la tortuga, utilizando argumentos de su entorno y mostrando así que tiene concepciones primarias de tipo estático.

Mariana: Bueno pues uno diría que en la vida real sí, porque el camino es finito ¿no? Entonces, si aquí está Aquiles y aquí está la tortuga, pues en algún momento se va a acabar y entonces la va a alcanzar ¿no? Digamos… En un primer momento, ahí no dice ni la velocidad, ni cuánto avanza… sí, entonces empieza la tortuga y la tortuga avanza acá entonces Aquiles, digamos, la espera. Cuando éste esté acá, la tortuga avanza más, avanza un poquito más y así sucesivamente ¿No? Entonces cuando la tortuga ya termine su camino, es más, cuando se vaya acercando pues la va a alcanzar, van a estar en el mismo punto.

Mariana mantiene la idea de una meta que señale el final de la carrera, no asume que el final se da si Aquiles alcanza a la tortuga. Los argumentos ofrecidos a partir de la vida real para respaldar concepciones primarias son tomados en cuenta en nuestro análisis preliminar, los individuos cuestionan el contexto debido a que les parece imposible, en términos de la vida real, que una situación así pueda presentarse y por tanto, este tipo de argumentos al parecer surgen para respaldar las concepciones primarias de tipo estático.

❖ *La importancia de la concepción acción*

A continuación analizaremos los procedimientos realizados por algunos individuos que evidencian una estructura acción en términos de nuestra descomposición genética.

Jaime: Acciones casi imperceptibles.

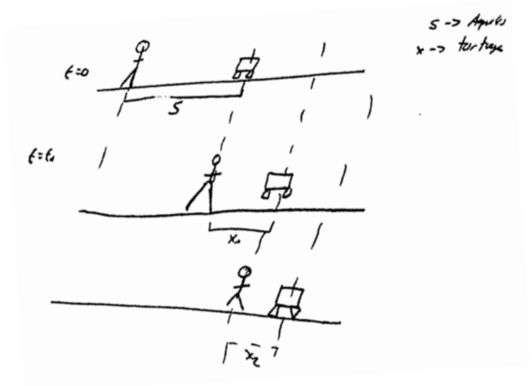
Cuando este estudiante se enfrenta al contexto del problema, rápidamente parece entender en términos generales cómo es el proceso que se genera a partir del movimiento de Aquiles y de la tortuga.

> Jaime: O sea, como la tortuga y el señor, cuando él llega acá [realiza movimientos con las manos para representar los movimientos], la tortuga ha avanzado otro poquito y luego al siguiente punto, o sea como dos sucesiones.

Las acciones que Jaime realiza son “verbales” una vez comprende el contexto de la paradoja representa los procesos que dan lugar al movimiento de Aquiles y la tortuga. Sus acciones fueron sutiles pero efectivas, comprendió básicamente la esencia de los procesos (Aquiles ocupa la posición que la tortuga ocupaba en la iteración inmediatamente anterior).

Julio: Coordinación de procesos que no han sido interiorizados

Cuando Julio se hace la pregunta ¿podrá Aquiles alcanzar a la tortuga? Propone que lo primero que debe hacer es realizar un gráfico, con el cual empieza a ejecutar las primeras acciones que relacione los procesos planteados en el contexto del problema.



Sin embargo, siente que la realización de estas acciones no es suficiente e inicia la búsqueda de una expresión que le permita relacionar los movimientos de

Aquiles y la tortuga. Julio tiene la intuición de que Aquiles alcanzará a la tortuga, porque en la realidad así ocurre, de esta forma busca argumentos que le permitan concluir eso. Por tanto empieza a abordar la situación en términos de la velocidad, el espacio recorrido y el tiempo, y casi sin haber alcanzado la concepción proceso de alguno de los dos procesos inmersos (proceso de movimiento de Aquiles y proceso de movimiento de la tortuga), busca “coordinarlos” [Para esto escribe]:

$$s + x_1 = V_A t_2$$

$$s + V_T t_1 = V_A t_2$$

> Julio: Entonces estoy tratando como de empatarlas en el sentido de qué ecuación me permite sacar eso. Porque yo sé que Aquiles en el tiempo 2 ha recorrido $s + x_1$ y pues como es la velocidad constante se tardó un tiempo t_2 para cubrir esa distancia. Por otro lado, como yo sé que la tortuga desde su punto cero avanzó x_1 ¿sí? Entonces, esto… En un tiempo t_1 entonces… La estoy aquí despejado, entonces me quedaría que:

$$s = V_A t_2 - V_T t_1$$

De sus intentos por relacionar los movimientos de Aquiles y la tortuga a través de las distancias totales recorridas, llega a la siguiente expresión:

$$s + x_1 + x_2 = V_A t_2 - V_T t_1 + x_1 + x_2$$

> Julio: Entonces yo sé que aquí ya obtuve una expresión que me relaciona x_1 en términos de la tortuga y un término x_2 que es nuevo, que sería el tiempo que avanzó acá. Entonces ¿Cómo hago para expresar la igualdad?

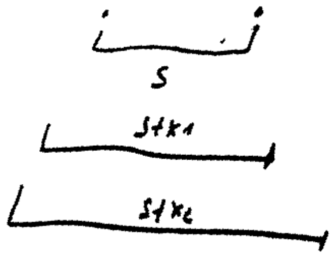
Se da cuenta que en su expresión cada vez obtendrá un nuevo término que le impide relacionar los movimientos de Aquiles y de la tortuga como él esperaba. Creemos que intentar “coordinar” acciones que no ha interiorizado, no ha construido los procesos y por tanto no puede coordinarlos en uno nuevo.

> Julio: Bueno pues ahí parece ser que, bueno antes de meterme con esto porque esto no me está diciendo nada. Si me meto solo con velocidad igual a espacio por tiempo no voy a hacer mucho.

Por lo cual decide volver a realizar acciones que le permitan reflexionar un poco más sobre los procesos involucrados.

> Julio: Yo tengo una distancia que al parecer fue constante entre ellos ¿sí? y después avanzó este poquito que sería $s + x_1$ ¿sí? Y después avanzó $s + x_2$, entonces Aquiles lo que tiene que hacer para llegar a la tortuga es recorrer primero s y tiene que recorrer luego x_1 y después de que ha

recorrido x_1 tiene que recorrer x_2 y si tiene que recorrer x_3 tendría que pasar así…



Porque bueno pasó en s pero para llegar… O sea después del tiempo t_1, la tortuga ha avanzado $s + x_1$, entonces tiene que Aquiles avanzar s y avanzar x_1 pero cuando ha llegado a x_1 la tortuga ha avanzado a x_2 entonces por eso tiene que avanzar otro poquito o sea va pasando como la situación o sea pero viéndose como al revés. Como le había comentado si tiene que avanzar un segmento tiene que avanzar la mitad, en este caso, es que tiene que avanzar s y después avanzar x_1 y después avanzar x_2 y así… <u>Parece que la distancia entre ellos nunca se cansara</u>, si va a una velocidad constante. ¿Ahora cómo escribo eso en fórmulas?

Cuando Julio realiza de manera consciente acciones sobre las distancias totales que en cada iteración han recorrido Aquiles y la Tortuga, se percata que la distancia que los separa se va haciendo más y más pequeña, lo que le permite construir una concepción proceso de infinito en términos de la situación planteada en la paradoja. A pesar de que inicialmente buscaba plantear las distancias totales recorridas por Aquiles y la tortuga, una en términos de la otra, cuando realiza las acciones descubre que las distancias entre Aquiles y la tortuga se hacen cada vez más pequeñas. Analizando la situación en términos de un solo proceso encuentra un argumento "convincente" que le permite concluir que Aquiles no podrá alcanzar a la tortuga debido a que la sucesión de distancias, a pesar de que se hace cada vez más pequeña, nunca se hará cero.

❖ *Construcción de procesos iterativos infinitos*

Plantearemos algunos de los razonamientos de los estudiantes entrevistados que evidencian cómo ha sido construida la concepción proceso de infinito en el contexto específico de la paradoja de Aquiles y la tortuga en su versión general. Resaltaremos aspectos importantes en el desarrollo de esta concepción, que como hemos contemplado en la descomposición genética preliminar, se fundamentan en la forma en que un individuo logra expresar los procesos inmersos en el contexto de la situación en términos generales y en cómo los coordina en un único proceso iterativo.

Jaime: "No la alcanza, el límite no es un valor dado".

Como mencionamos anteriormente, Jaime logra construir una concepción proceso de cada uno de los procesos inmersos en la situación y, además, logra coordinarlos en un único proceso.

> Jaime: Ok, la tortuga tiene una sucesión x_n, donde, bueno, la tortuga. Aquiles tendría una sucesión y_n donde $x_n = y_{n+1}$. ¿Sí?

A pesar de que entiende que el límite de ambas sucesiones es el mismo, Jaime concluye que Aquiles no podrá alcanzar a la tortuga.

> Jaime: Entonces ¿se podría llegar a alcanzar? Pues… Yo diría que no, o sea, si la tortuga no para, él nunca la podría llegar a alcanzar porque se supone que los $x_{n+1} \neq x_n$, siempre se va moviendo, avanzando, entonces se supone que en el límite, en el límite de las dos sucesiones debería coincidir, o sea en el límite, como en la meta, deberían llegar como al mismo… Como a la par, teniendo en cuenta que el límite de las dos sucesiones sería el mismo.

Cuando se le interroga por qué sabe que las sucesiones convergen al mismo punto, hace un tratamiento matemático que le permite deducir el hecho de que las sucesiones convergen, es equivalente a decir que la sucesión de tiempos converge a cero, la sucesión de tiempos t_n se define como el tiempo que Aquiles tarda en recorrer el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$, deja de analizar los dos procesos y pasa a mirarlos como uno único.

> Jaime: ¿Listo? Entonces tenemos que $x_{n-1} - x_n$ vendría siendo $|vt_{n-1}|$, la velocidad es constante entonces podríamos asumirla aquí $v|t_{n-1}|$. Entonces, mirar que esta sucesión converge es lo mismo que mirar que la sucesión de tiempos converge pero entonces otra vez ya sería como la explicación. Entonces, el tiempo que gasta Aquiles en alcanzar el primer punto de la tortuga va a ser mayor que en alcanzar el segundo tiempo, luego este segundo tiempo va a ser mayor que el tercero y entonces esos tiempos se van acercando hacia 0 ¿no? A medida que avance, porque tiene una velocidad mayor que la de la tortuga entonces estos tiempos irían hacia cero cuando n va hacía infinito.
>
> Entrevistadora: ¿Van hacia cero o son cero?
>
> Jaime: ¡No! Van hacia cero porque se supone que el problema dice que nunca… La alcanzaría en el límite pero como el límite en realidad no es un punto dado entonces no la va a alcanzar. Se supone que no la... Matemáticamente, yo digo, que no la alcanza.

Vemos que la concepción que tiene Jaime del concepto de límite no le permite concluir que Aquiles efectivamente alcanza a la tortuga, para él el límite es un proceso de acercamiento infinito que jamás se alcanza. Creemos que esto está íntimamente relacionado con la concepción que tiene del conjunto de los números naturales, no puede propiciar el mecanismo de completez, no logra ver el conjunto de los naturales como completo, no puede ver el proceso de acercamiento infinito del límite como una totalidad que le permita concluir que en el infinito, Aquiles efectivamente alcanzará a la tortuga. Un caso parecido es el de Julio, que estudiaremos a continuación.

Julio: "La distancia entre Aquiles y la tortuga parece que nunca se cansara".

Éste estudiante ha construido una concepción proceso de infinito, ha escrito en términos generales una sucesión decreciente que muestra que en cada iteración las distancias que separan a Aquiles de la tortuga se hacen cada vez más pequeñas. Sin embargo concluye, a diferencia de lo que pensaba inicialmente, que Aquiles no alcanza a la tortuga.

> Julio: Entonces es paradójico ¿no? Porque si es velocidad constante no parece que lo fuera a alcanzar porque siempre la tortuga… Lo que pasa es que aquí lo clave es que la velocidad de la tortuga… ¿Qué es lo que hace la velocidad de la tortuga? Que el segmento $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$ Para la tortuga y x tiene que tomar $s + x_1$, tiene que ser $s + x_1 + x_2$ ¿sí? $s + x_1 + x_2 + x_3$, etc. <u>Entonces parece que la cosa no fuera a parar, entonces pensaría yo que ese es el argumento para decir que Aquiles no alcanza a la tortuga. Porque Aquiles no va aumentando de velocidad cada vez que va tomando esos tramos, entre más distancia tenga, él no va tomando más velocidad sino que él la mantiene constante</u>. Entonces como la distancia es proporcional a la velocidad, si la velocidad la mantengo constante y el tiempo va pasando entonces la distancia que tiene que tomar tiene que requerirle más distancia, entre más tiempo entonces le va a pedir más distancia, así es la cosa ¿sí? Entonces, si la tortuga se mantiene constante estas distancias (sucesión de distancias que separan a Aquiles de la tortuga en cualquier iteración) se van haciendo más pequeñas.

Podemos ver que Julio se percata de que las distancias entre Aquiles y la tortuga se van haciendo más y más pequeñas; en otras palabras, la sucesión generada por las distancias entre Aquiles y la tortuga converge a cero. Sin embargo el hecho de que ésta sucesión sea infinita le impide verla como una totalidad y concluir que en el infinito Aquiles y la tortuga ocuparán la misma posición. A falta de construir una concepción objeto del conjunto de los números naturales no puede desarrollar el mecanismo de completez y analizar la convergencia de la sucesión en un estado al infinito.

- ***Construcción del objeto trascendente***

Tal y como se planteó en la descomposición genética preliminar mostraremos el razonamiento de un individuo que logra pasar de su concepción dinámica relacionada con la construcción del proceso iterativo infinito a ver la convergencia del mismo como una tendencia total del proceso y concluir de esta forma que Aquiles efectivamente alcanza a la tortuga.

Néstor: "La distancia entre los dos no se hará cero para un n determinado".

Néstor logra plantear de forma muy específica una serie finita en términos de la distancia inicial y de la relación de velocidad entre Aquiles y la tortuga ($kv_A = v_T$).

$$d_1 + Kd_1 + Kd_2 + Kd_3 + Kd_4$$
$$d_1 + Kd_1 + K^2d_1 + K^3d_1 + K^4d_1 + \dots + K^n d_1$$
$$d_1(1 + K + K^2 + \dots + K^n)$$

> Entrevistadora: Si uno plantea un k^n, está diciendo que…
>
> Néstor: Estaría haciendo esto infinito…
>
> Entrevistadora: Lo está haciendo finito. Está diciendo que la alcanzó en un momento n pero eso no sé si pueda garantizar o usted ¿qué piensa?
>
> Néstor ¿Y si miro esa suma infinita? No, eso no tiene límite y si lo tiene no recuerdo cómo calcularlo.

Plantea la serie finita porque siente que la serie diverge, lo cual se opone a su creencia de que Aquiles debe alcanzar a la tortuga. Sin embargo, recuerda que $0 < k < 1$ (gracias a la relación de velocidad que se estableció entre Aquiles y la tortuga) y concluye que la serie converge. A pesar de que no recuerda cómo realizar esa suma infinita, propone el término general de una sucesión que converge a cero para explicar que las distancias que separan a Aquiles de la tortuga se van haciendo más pequeñas.

> Néstor: k está entre cero y uno, sí. Eso es… k está entre cero y uno, entonces le estoy sumando números que cada vez son más pequeños.
>
> $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$
>
> Entrevistadora: ¿Qué significa que el límite de $\frac{1}{2^n}$ sea igual a cero, cuando n tiende a infinito?
> Néstor: Que a medida que ese n va creciendo, el número (distancia) va siendo muy próximo a cero.
> Entrevistadora: ¿Pero nunca va a ser cero?
> Néstor: Para un n determinado no. Se aproxima, se aproxima, pero no.
> Entrevistadora: Entonces ¿estamos de acuerdo en que la alcanza o no la alcanza?
> Néstor: Yo digo que sí.

Cuando Néstor explica que para un n determinado, la distancia no se hará cero y posteriormente concluye que Aquiles si alcanza a la tortuga, evidenciando que puede ver ese proceso de acercamiento infinito como una totalidad, sabe que no existe un n para el cual la distancia entre Aquiles y la tortuga sea cero pero que sí llegan a ocupar la misma posición.

Tal y como se tuvo en cuenta en la descomposición genética preliminar, hemos podido evidenciar en nuestro análisis que el papel que juega la interiorización de las acciones, el planteamiento de los procesos en términos generales como evidencias de la concepción proceso de infinito, la coordinación de los procesos iterativos en uno único y el papel que juega la concepción que tengan los individuos del concepto de límite caracterizado por la concepción que tengan del conjunto de los números naturales, hacen posible la construcción del objeto trascendente. En este caso en específico, la concepción que tuviera el individuo sobre el concepto de límite permitía concluir si efectivamente Aquiles alcanza a la tortuga o no, es decir, a partir de los mismos argumentos matemáticos un individuo puede ofrecer respuestas diferentes de la misma situación, todo dependiendo de la concepción que tenga de dicho argumento.

Ahora ofreceremos evidencias de la forma en la que los estudiantes entrevistados abordaron la versión particular, la cual fue propuesta con la intención de permitirle al individuo realizar un análisis más específico de la situación.

> *Versión particular.* Suponga que la distancia que Aquiles da a la tortuga es de 10 m y que Aquiles es 10 veces más rápido que la tortuga.

❖ ***Realización de acciones específicas***

Tal y como lo planteamos en el análisis preliminar, la mayoría de estudiantes pudieron realizar acciones más refinadas en esta versión de la paradoja. Los valores numéricos que se establecieron (distancia inicial entre Aquiles y la tortuga y su relación de velocidad) fueron aprovechados para determinar los primeros términos de las sucesiones o series necesarias para afrontar efectivamente el problema. La tendencia en la forma de pensar de los estudiantes entre la versión general y particular casi siempre se mantuvo, afrontaron la versión particular con la misma idea que concluyeron en la versión general.

Orlando: "Si en diez no la alcanza pues yo puedo suponer que no".

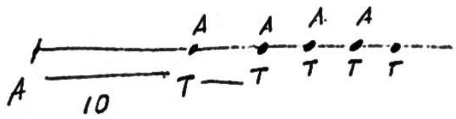
A pesar que este estudiante abordó la versión general de la paradoja con una concepción estática primaria, cuando se le guió en la realización de las primeras acciones y encontró las primeras distancias que separaban a Aquiles de la tortuga y vio cómo esas distancias se iban haciendo más pequeñas, cambió su postura inicial; ahora propone que Aquiles no logra alcanzar la tortuga. Orlando considera que la forma de mostrar si Aquiles logra o no alcanzar a la tortuga es seguir realizando acciones, no logra describir los procesos en forma general, lo que, según la descomposición genética preliminar, evidencia que no logra alcanzar una concepción proceso de infinito.

> Entrevistadora: ¿Parece ser posible? O más bien parece que no importa qué tan pequeña sea la distancia ¿siempre va a estar adelante?
>
> Orlando: Tendría que seguirle con esto, ¿no? [Señala las acciones realizadas] para poder contestar esa pregunta, o ¿simplemente a la intuición? Yo estoy viendo que siempre que intento sacar la… La distancia que recorre la tortuga con respecto a Aquiles, estoy viendo… Aquí hice uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis… Seis intentos [refiriéndose a las seis iteraciones realizadas]. Y estoy viendo que siempre la tortuga se me adelanta un poco, entonces yo puedo decir que por esto, pues nunca la va alcanzar, pero sin embargo, pues no sé, podría hacer otros tres o cuatro (iteraciones), y decir bueno ya son diez. Sí en diez no la alcanza, bueno, pues yo puedo suponer que no, ¿va?

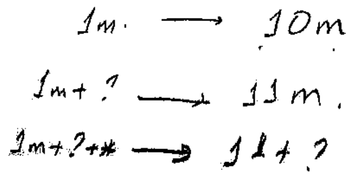
Podemos ver que Orlando no ha entendido las características principales del proceso, no ha reflexionado respecto a las acciones que ha realizado y por tanto, no ha logrado construir una concepción proceso. No está seguro de si en un número finito de iteraciones la distancia que separa a la tortuga de Aquiles se puede hacer cero.

Dalia y las acciones que le permitieron construir su concepción objeto.

Las primeras acciones que realiza Dalia en esta versión, muestran la disminución de la distancia que separa a Aquiles de la tortuga en cada iteración. Sin embargo, no usa los datos específicos para determinar explícitamente la sucesión de distancias.



Gracias a la relación de velocidad entre Aquiles y la tortuga y a la distancia inicial, Dalia logra determinar las distancias totales recorridas por cada uno de ellos.



> Dalia: Cada vez se hace más pequeño, sí. Cuando la tortuguita, bueno, recorrido de la tortuguita y recorrido de Aquiles. Entonces, cuando la tortuga recorre un metro, Aquiles recorre diez. Cuando ha recorrido uno más un décimo, entonces Aquiles, once metros ¿sí? Cuando ha recorrido $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$, Aquiles ha recorrido $11+\frac{1}{10}$, que era lo que había recorrido la tortuguita antes.

Esta estudiante logra determinar la relación existente entre los movimientos de la tortuga y Aquiles, gracias a la realización de las acciones anteriormente descritas sin embargo concluye que Aquiles no alcanza a la tortuga si la tendencia que observa en las acciones que realiza, continúa.

❖ *Construcción de procesos iterativos infinitos*

Los individuos deben determinar una única serie o sucesión, la cual puedan analizar en un estado al infinito. En este caso la convergencia de la serie que Dalia plantea le permite preparar el camino para la construcción del objeto trascendente.

Dalia

A pesar de que a partir de la realización de las acciones Dalia determina que Aquiles no alcanzará a la tortuga, plantea la siguiente expresión general para determinar el recorrido total de Aquiles.

$$R_A = 10 + \sum_{i=1} \left(\frac{1}{10}\right)^{i-1}$$

Logrando determinar que la sumatoria converge.

> Dalia: La serie es infinita pero la sumatoria es… ¡Ah! ¡Carajo! La sumatoria es infinita [Escribiendo el símbolo de infinito sobre la sumatoria].
>
> $$R_A = 10 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{i-1}$$
>
> La sumatoria es infinita… La sumatoria es infinita… ¿Cuándo converge? Converge cuando la razón es menor que uno, sí esa es convergente. Sí, esto converge.

La idea de que la suma de los recorridos realizados por Aquiles converja, es muy importante para Dalia, a continuación explicaremos cómo el percatarse de ello le permite modificar su conclusión inicial y construir el objeto trascendente.

❖ *Evidencias del objeto trascendente*

Nuestro análisis preliminar nos permitió establecer hipotéticamente las características que debe tener el razonamiento de los individuos al lograr construir el objeto trascendente. Estas características fueron identificadas en los datos empíricos obtenidos en nuestra entrevista, debemos recordar que la resolución matemática, en este contexto paradójico, puede llevar a conclusiones contradictorias.

Dalia: "¡Convergente, es convergente!"

Dalia ha logrado determinar que la suma infinita de los recorridos realizados por Aquiles en cada iteración es convergente, y además, que la serie que forman los recorridos de la tortuga, si se le suma la ventaja inicial, converge al mismo punto.

> Dalia: ¡Esa es convergente, es convergente! Lo que no me acuerdo es cuánto me da. ¡Ay! creo que debe partir de cero… No me acuerdo cuánto da, abajo me da uno menos un décimo, no, no me acuerdo cuál es el resultado.
>
> Entrevistadora: ¿Qué es la convergencia en este caso?
>
> Dalia: Eso significa que… Espere un momento, esa distancia entonces no es infinita, va a llegar un momento donde la va a alcanzar.

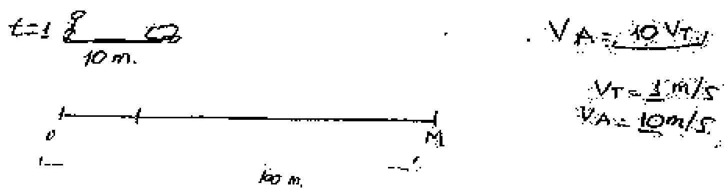
Lo anterior le permite cambiar su conclusión inicial, ahora piensa que como las distancias recorridas se van haciendo más pequeñas, se puede determinar el punto en que Aquiles va a alcanzar a la tortuga y que esto se puede garantizar precisamente por la convergencia de la suma de las distancias totales recorridas.

> Entrevistadora: ¿Qué quiere decir eso en el sentido del problema?
>
> Dalia: Que en algún momento esa distancia va a ser finita. Ahora, a medida que vamos sumando (señalando la sumatoria en R_A) estos términos cada vez van a ser más pequeños entonces este señor si va a alcanzar a la tortuga. Esta distancia que él va recorriendo entre más grande sea el exponente, va a tender a ser más pequeñito, entonces si va a llegar un momento donde la alcanza.
>
> Entrevistadora: ¿En qué momento sería o cómo? O sea, ¿puedo escoger una iteración en la cual efectivamente la alcanza?
>
> Dalia: Sí pero no sé cómo, encontrando el valor de la suma ¿no? Encontrando el valor de la suma pero no me acuerdo cómo se resuelve.

Cuando Dalia responde que puede determinar una iteración creemos que en realidad hace referencia a que puede determinar el punto de alcance, es decir, la distancia en la que Aquiles alcanza a la tortuga, dado que garantiza que puede encontrarlo al realizar la suma infinita.

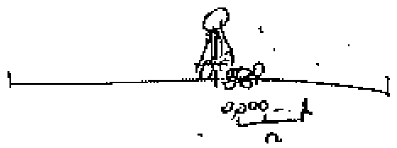
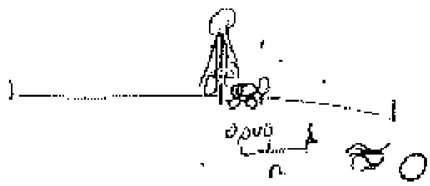
Mariana: "Toda carrera de la vida real tiene un principio y tiene un fin, meta".

Mariana aborda la versión general de la paradoja teniendo en mente la idea de una carrera de la vida real donde se tiene una meta establecida, por lo cual con argumentos cotidianos determina que Aquiles sí alcanza a la tortuga. Ante la suposición de que Aquiles es 10 veces más rápido que la tortuga y que la distancia inicial que le concede Aquiles a la tortuga es de 10 metros, su tendencia es la de aceptar lo que debe mostrar, tiene en mente la idea de una meta y realiza algunas acciones en las que va encontrando las distancias recorridas por Aquiles y la tortuga [plantea la situación que se muestra a continuación].



Al considerar que la carrera se realiza en un tiempo finito, la longitud de pista de 100 metros y con la relación 10 a 1 de la velocidad de Aquiles y la tortuga, Mariana determina que si la tortuga recorre 10 metros en un segundo, Aquiles recorrería 100 y que por lo tanto en algún punto del recorrido tuvo que haber alcanzado a la tortuga.

Cuando intenta afrontar el problema sin garantizar la idea de un tiempo total de carrera y de una pista atlética finita, logra plantear las distancias recorridas por ambos y por tanto la distancia que los separa en cada iteración, determinando que:

> Mariana: Sí… Es una décima, centésima, milésima… Entonces, en ese tiempo la distancia entre la tortuga y Aquiles, vamos a suponer que aquí está Aquiles:
>
> 
>
> O sea en la posición que antes estaba la tortuga, va a ser 0,000000…1, o sea va a estar supremamente cerca y como esta distancia es cada vez menor pues esto se va aproximando a cero.
>
> 
>
> Entrevistadora: Entonces ¿la alcanza?
> Mariana: Si, para mí la alcanza. Pues considerando el tiempo infinito y que sigue y que sigue y que sigue, ¿no? O sea que la meta para Aquiles es alcanzar a la tortuga.

Su último comentario ofrece evidencias de que puede ver el proceso como una totalidad, que al lograr Aquiles seguir realizando su acercamiento infinitamente, el resultado final será que la alcance, lo cual evidencia que ha construido una concepción objeto de infinito. Podemos ver, al igual que en los análisis que hemos expuesto previamente, que en su razonamiento juega un papel muy importante la concepción que tiene sobre el concepto de límite.

En los casos en los que se pudo construir el objeto trascendente vimos cómo influyó la idea de la convergencia de las series o sucesiones planteadas. Creemos que el mecanismo que permite ese cambio en la forma de pensar de los individuos, está firmemente relacionado con este concepto, que a su vez debe estar íntimamente relacionado con la concepción que el individuo tenga del conjunto de los números naturales. El individuo no busca una iteración específica para la cual Aquiles y la tortuga ocupen la misma posición, porque sabe que no podrá determinarse. Por tanto no busca la última iteración porque no existe una última, de la misma forma que sabe que no existe un último natural. El individuo puede ver la tendencia total del proceso de acercamiento porque sabe que en el infinito, el límite es alcanzado, esa es la característica principal que hemos logrado evidenciar y que ha sido planteada como una muestra de que se ha logrado motivar el mecanismo de completez.

Para nosotros la construcción del objeto trascendente se evidencia con la capacidad que tenga el individuo de ver el proceso iterativo infinito como una totalidad, en nuestros contextos no se le pide al individuo realizar acciones sobre esa totalidad, por lo cual no tenemos herramientas que nos permitan concluir que la capacidad de ver el proceso iterativo como una totalidad y la capacidad de realizar acciones sobre esa totalidad, son manifestaciones de dos estructuras diferentes.

4.4.2. Paradoja del hotel de Hilbert.

A continuación ofreceremos el análisis de algunos datos que nos sirven para evidenciar el tipo de construcciones que desarrollaron los individuos en este contexto particular caracterizado, como mencionamos en la sección anterior, por ser estático al hacer referencia a un "hotel con de infinitas habitaciones lleno".

Versión de la paradoja usada en las entrevistas:

> Suponga que hay un hotel de infinitas habitaciones lleno, cada habitación puede almacenar máximo a un ocupante. ¿Cómo acomodaría a un nuevo e importante huésped? ¿Cómo acomodaría a un infinito número de huéspedes?

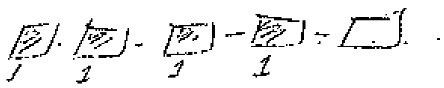
- ***Evidencias de una concepción primaria dinámica***

El carácter estático de esta situación impide al individuo la capacidad de abordarlo a partir de sus intuiciones. El individuo debe poseer conocimientos específicos que le permitan abordar el contexto.

Orlando: "Si tiene un infinito número de habitaciones no puede estar lleno"

Cuando Orlando lee la paradoja, empieza a hacer un gráfico sin que en realidad sea evidente la necesidad de hacerlo, no ha asimilado muy bien las condiciones de la situación.

Orlando: Un huésped por Habitación. Cada habitación puede almacenar máximo a un solo ocupante. ¿Cómo acomodaría a un nuevo e importante ocupante, huésped? ¿Cómo acomodaría a un infinito número de huéspedes? [Escribe]



Pues tiene infinitas habitaciones, no puede estar lleno. Sí, ¿no? ¿Infinitas o finitas?

Orlando no acepta que un hotel de infinitas habitaciones pueda estar lleno y no logra afrontar el problema aunque lo intenta; esa idea choca fuertemente con sus intuiciones y siente que le faltan "*conceptos del infinito*" para poder abordarlo.

Orlando: Pero, ¿cómo puede ser?… ¿Cómo puede haber una habitación?… ¿Cómo puede haber un hotel infinito lleno? ¿O sea ya no es infinito, entonces, no? Lo que más alude aquí es la palabra lleno. Pero sino dijera lleno, podría seguir bueno, pues como es infinito, agrego otro, ¿no? ¿Cómo podrá acomodar un número importante de huéspedes? Y ¿Cómo acomodar un número infinito de huéspedes? Creo que me hacen falta conceptos de infinito.

En busca de comprender, Orlando intenta abordar la situación desde sus concepciones primarias pero éstas no le permiten aceptar la idea de un infinito acabado como el que se muestra en la paradoja. Las estructuras de Orlando no le permiten considerar el objeto trascendente (representado en este caso en el hotel de Hilbert), él considera que le faltan conceptos que le permitan afrontar problemas relacionados con el infinito. Como se plantea en el análisis teórico preliminar, consideramos que algunos conceptos específicos de la teoría de conjuntos de Cantor (cardinalidad de conjuntos infinitos y la relación existente entre un conjunto infinito y sus subconjuntos propios) están relacionados con la capacidad que tenga un individuo de realizar estos cambios de estructura, pasar de una concepción objeto a una proceso y viceversa. Debemos resaltar que Orlando es el único estudiante entrevistado que no ha tenido acercamiento a la teoría de conjuntos de Cantor, ya que realizó su pregrado en ingeniería y a su vez es el único que no logra relacionar la situación con el conjunto de los números naturales.

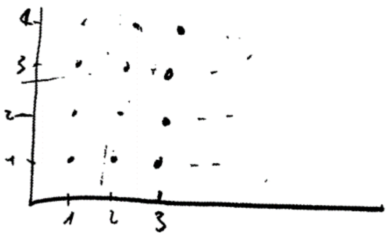
- ***Evidencias del paso de un objeto trascendente al proceso iterativo que lo origina***

Tal y como se propuso en el análisis preliminar esperábamos que los individuos relacionaran el contexto con el conjunto de los números naturales. En este caso, Julio relacionó en contexto con un conjunto equipotente con $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Este conjunto ofrece la facilidad de poner infinitos y numerables puntos en un plano de forma ordenada, sin embargo, Julio no logra acomodar a los nuevos huéspedes, consideramos que no encontró una representación adecuada que se lo permitiera.

Julio y el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Este estudiante logra relacionar el contexto de la paradoja con la cardinalidad de un conjunto infinito y numerable, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

> Julio: ¿Cómo acomodaría a un nuevo e importante huésped? En estas cosas es como bueno tomar el plano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ¿no? ¿Por qué me gusta expresarlo así? Porque… (1,1), (2,2),… Ésta sería aquí (2,1). Bueno aquí colocamos la primera hilera, estos serían los del 1, esta sería la otra, la del 2. Esto sería 1, esto sería 2, esto sería 3, esto sería 4, etc. ¿Sí?

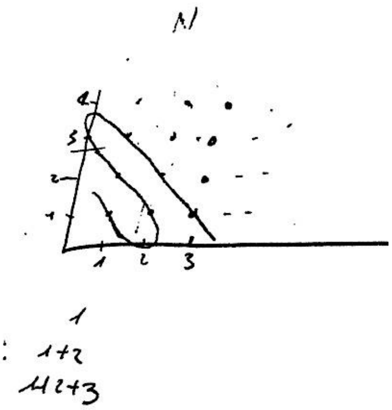


> Entrevistadora: ¿Qué representan esos puntos?

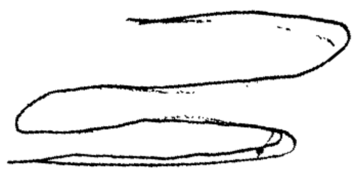
> Julio: Representan las habitaciones llenas. Entonces por ejemplo si yo quisiera verlo así como en un mundo real, como un área geométrica, como el hotel en físico; entonces ésta, por ejemplo, sería la primera habitación (señalando al punto (1,1)), ésta sería la segunda habitación (señalando al punto (2,1)), etc. ¿Sí? Y como me dice que son infinitos pues yo tomo todos esos, como el semiplano ahí.

Podemos ver como Julio acepta que las habitaciones del hotel se encuentran llenas. Sin embargo, cuando intenta acomodar al nuevo huésped, no logra plantear la función biyectiva, lo que lo lleva a rechazar las condiciones de la paradoja y plantear un proceso de llenado que denomina "*proceso de hilado*".

> Julio: Entonces, si yo tengo vacío el hotel y yo tengo aquí infinitos, entonces tomo el primero, lo acomodo así y al segundo lo voy acomodando así y al tercero lo voy acomodando así ¿sí? *Y completo el infinito y que pasa si yo agrego uno más, pues seguiré esa escalera, esa cosa ahí; de tal manera que lo pueda acomodar allá en esa última posición.* Como esto no está acotado, no tengo ningún problema ¿sí? Yo no sé si eso se ve aquí bien, el primer residente va a tener esa forma; los voy a ir como encadenando de esa manera, el segundo lo voy a encadenar de esa forma, al tercero lo voy a ir metiendo de esta forma. O sea, es como dibujando el plano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Entonces tomo la primera escalera, meto la segunda, meto la tercera, meto la cuarta y subo ¿sí?



Esta solución que Julio denomina “proceso de hilado” propone básicamente un proceso de llenado del hotel en el cual se puede incluir al nuevo huésped. Cuando se le recuerda que el hotel se encuentra lleno, busca posibles soluciones, algunas algo conflictivas. Por ejemplo, propone correr a los antiguos huéspedes una habitación, sin embargo tal y como él plantea ésta solución resulta ser contradictoria.

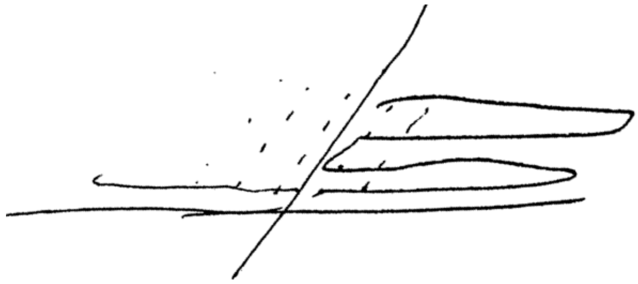


> Julio: Entonces si es esto, pues tranquilamente yo puedo ir moviendo los puntos, porque el que esté acá (señalando el primer dobles del hilo de puntos) lo subo acá y el que viene acá atrás ocupa este espacio y entonces así los voy como empujando. O sea ¿qué es lo que estoy haciendo? En la primera fila está cambiando una componente horizontal positiva, en la segunda sube una entonces aumenta una componente positiva en y. Empezar a tomar todos los que tenga componente $(x, 1)$ y empezar a unirlos. Por allá en el infinito usted lo que hace es subirlos una unidad en y y se devuelve hasta que llegue aquí a x, sería aquí entre 0 y sube y se devuelve entonces va a construyendo como una cadenita ahí. Entonces si lo que quiero es meter un nuevo usuario entonces a partir de esa cadena es empujar a todos los demás. ¿Qué significa empujar a todos los demás? Si está en la primera fila, moverle una componente en x y al que esté por allá en el infinito entonces subirle una componente en… Pensaría yo que con esta construcción podría agregar a este señor acá.

El problema en este caso sería ¿cómo determinar dónde está el doblez del hilo? Teniendo en cuenta que los puntos que se encuentran en la fila $(x, 1)$ son infinitos ¿es posible determinar un último punto de forma que le sume uno en su componente en y?

De igual forma Julio no logra determinar una función biyectiva que le permita acomodar al infinito número de huéspedes.

> Julio: Bueno de acá, entonces estos que están acá, entonces otra vez si yo tengo este aquí arriba lo muevo uno acá y al otro lo muevo uno, y al otro lo muevo uno… Y el que está por acá, lo subo acá y este que estaba anterior, va a ocupar este espacio y así… Pero este proceso lo tendría que hacer infinitas veces, no se me ocurre un proceso finito para meter infinitos huéspedes. Es como la cosa porque ¿qué podría hacer para meter en un proceso finito infinitos huéspedes? Qué pasa si lo hago con los enteros ¿usted se acuerda si los enteros eran idempotentes con alguien? Me gustaría tomar esta parte también de acá, si yo pudiera ocupar, no sólo eso sino también los negativos ¿sí? Entonces ya tendría como medio plano hacia arriba. Entonces otra vez, si yo tengo acá, estos infinitos puntos que están acá me generan infinitos puntos por este lado y aquí tengo estos acá que ya están así como ordenados ¿sí?



A pesar de que lo intenta, no logra determinar cómo acomodar a los nuevos huéspedes sin asumir el hotel como vacío o, como en la última solución planteada, parcialmente vacío. Consideramos que posiblemente el conjunto que escogió a pesar de que es un conjunto numerable, su numeración es más compleja (parejas ordenadas) que la numeración que se realiza con el conjunto de los números naturales y por tanto no logra proponer una solución satisfactoria. Sin embargo pudimos identificar que en sus argumentos usó sus conocimientos sobre teoría de conjuntos.

A continuación plantearemos dos posibles biyecciones de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que nos permitan obtener una habitación vacía para hospedar al nuevo huésped y un infinito número de habitaciones vacías para el nuevo infinito número de huéspedes.

¿Cómo acomodar a un nuevo e importante huésped?

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (x,1) &\rightarrow (x+1,1) \end{aligned}$$

De esta manera podremos garantizar que la habitación $(1,1)$ estará vacía para alojar al nuevo huésped.

¿Cómo acomodar a un infinito número de huéspedes?

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (x,y) &\rightarrow (x,y+1) \end{aligned}$$

De esta forma podemos garantizar que las infinitas habitaciones que se encuentran en la fila $(x, 1)$ estarán disponibles para hospedar al nuevo infinito número de huéspedes.

- ***Evidencias del paso de un objeto trascendente al proceso iterativo infinito y la construcción de un nuevo objeto***

Los individuos que logran enfrentar eficientemente la situación transitan entre las concepciones objeto y proceso. Como se tuvo en cuenta en la descomposición genética preliminar esto es posible gracias a un conocimiento consciente de la teoría de conjuntos de Cantor. A continuación presentamos algunas evidencias.

Mariana: "¿Álef sub-cero es que se dice?"

Cuando Mariana afronta el contexto no evidencia algún tipo de concepción primaria, aborda de inmediato conceptos de la teoría de conjuntos de Cantor relacionando el contexto con un conjunto infinito y numerable.

> Mariana: Entonces voy a considerar ¿Álef sub-cero es que se dice?

Esta estudiante considera que el infinito que se encuentra presente en la paradoja es el infinito de los conjuntos numerables y propone la necesidad de encontrar un conjunto con ésta misma característica, un conjunto equipotente con $\mathbb{N}$ sobre el cual pueda realizar un arreglo infinito. De esta forma evidencia que posee una concepción objeto de infinito ya que acepta sin problema las condiciones del contexto y lo relaciona tal y como se plantea en el análisis teórico preliminar.

> Mariana: Entonces uno sabe que hay conjuntos idempotentes o, ¿qué otra cosa? Sí. Idempotentes no era… ¡Equipotentes! Sí, o sea que uno puede hacer un isomorfismo o una biyección, una biyección, hablemos mejor de biyección, una biyección entre un conjunto y otro conjunto, y pues una característica es que tengan el mismo cardinal ¿no? Entonces si yo hago un isomorfismo entre los naturales y otro conjunto, voy a llamarlo, que no parezca así tan… Voy a llamarlo X, un conjunto cualquiera X.

El tratamiento que Mariana realiza evidencia que ha pasado de tener una concepción estática a una dinámica, cuando manifiesta que puede realizar un arreglo que la lleve a responder la segunda pregunta que plantea la paradoja; un arreglo en forma de biyección que será un puente entre un conjunto cualquiera X y el conjunto de los números naturales. Para tal fin plantea el conjunto de los números pares y de los impares, envía a los antiguos infinitos huéspedes a ocupar las habitaciones pares y los nuevos se hospedarán en las impares.

> Mariana: Entonces, pues en particular, dentro de esos mismos naturales hay subconjuntos que son equipotentes con estos naturales y corresponde, bueno podríamos tomar a los pares y los impares. Entonces

como ya sabemos que son infinitos vamos a decir que todos estos infinitos ya están llenos, entonces estos infinitos se ubiquen en las posiciones pares, en los números pares de esas habitaciones, entonces me va a quedar un número infinito de impares desocupado.

Sus conocimientos sobre algunos conceptos específicos de la teoría de conjuntos de Cantor le permiten relacionar el infinito en acto presentado en el contexto de la paradoja con el conjunto de los números naturales y argumentar por qué puede realizar su acomodación.

Sin embargo al solucionar el problema de ubicar un nuevo huésped, presenta algunas dificultades. Mariana no lograba establecer la biyección que le permitiera dejar una única habitación vacía, aunque sabía que era posible, la naturaleza dual del infinito que había enfrentado en las situaciones previas la hacen dudar. A pesar de que sus conocimientos sobre la teoría de conjuntos no le permitieron desviarse, parece que la naturaleza dual del infinito llega a confundirla.

Mariana: O sea, como ya sé que son infinitas y pues que a pesar que las infinitas estén ocupadas sigo teniendo infinitas habitaciones, siempre puedo encontrar las formas. Sí, es que antes miré que el infinito se puede llenar, pero, pero no, si yo tengo infinitos y si las tengo llenas siempre hay uno más, eso es lo que a mí me parece, porque de qué otra manera que me quede exactamente uno…

Al parecer no sabe si afrontar el infinito en acto o en potencia para poder darle cabida al nuevo huésped, sin embargo decide valerse de su mirada potencial de la situación dado que entiende que necesita establecer un proceso que le permita responder a la pregunta, es decir necesita garantizar que puede dejar una habitación vacante.

Mariana: Pues todos se corren, eh… Incluso no, que el primero se vaya para la habitación… No pero qué digo yo,… Que quede exactamente uno… Pues no sé pero, ahí estoy utilizando el problema, uno tiene infinito y a ese infinito le suma uno pues sigue siendo infinito. Entonces, yo puedo seguir encontrando las que yo quiera, siempre me va a seguir dando infinito. Y si yo tengo ese infinito puedo encontrar otra y mandarla y sigue siendo infinito no hay ningún problema.

Ante su conocimiento y la reflexión, logra plantear la biyección indicada.

Mariana: Pues usted me dirá, porque esto:

$$\underline{\infty + 1} = \underline{\infty}$$
$$\infty + n = \underline{\infty}$$

Se cumple ¿no? Entonces uno puede coger, debería uno plantear, digamos, entre este conjunto naturales infinito pero que le digo yo, los naturales uniéndole, pero es que está ahí mismo… Que me quede exactamente uno… *Pues es que uno lo mandaría al sucesor, y entonces ahí ya tiene la primera habitación.*

Cuando Mariana logra plantear la biyección, tiene nuevamente el hotel en su forma estática, infinito y lleno. Es decir, volvió de la concepción proceso, que había alcanzado gracias a la relación que hizo del hotel con el conjunto de los números naturales, a una concepción objeto. Utilizó como recurso sus conocimientos sobre conjuntos infinitos. A continuación, proponemos algunas evidencias de los razonamientos realizados por Rocío, quien argumenta, desde la teoría de conjuntos de Cantor, por qué la solución que propone funciona.

Rocío: "Si los puedo enlistar, yo los puedo correr".

Un caso parecido es el de Rocío, quien relaciona rápidamente el contexto con el conjunto de los números naturales, evidenciando así que posee una concepción objeto de infinito tal y como ha sido tomado en cuenta en la descomposición genética preliminar. Ella explica por qué la necesidad de relacionar el contexto con un conjunto infinito y numerable a través de argumentos ofrecidos desde su conocimiento de la teoría de conjuntos de cantor.

> Rocío: Enumeradas, eso es… Tengo el orden porque si es arbitrario yo diría que podría sacar una y estaría vacía, o podría estar llena pero si usted tiene una infinita depende de la cantidad infinita a la que se refieren porque hay varios infinitos ¿sí? Si se habla de infinitas numerables, pues infinitas numerables es una cosa. Numerables, que se pueden enlistar entonces si yo las enlisto, las puedo correr. Si no es infinito numerable pues están esparcidas por todo lado, no puedo garantizar que haya una sucesión o un orden adecuado en el cuál pueda trabajar y entonces no podría hacerlo ¿no?

De esta forma, garantiza que puede correr a los antiguos huéspedes y dejar la primera habitación desocupada para hospedar al nuevo huésped. Para el caso de los infinitos huéspedes Rocío propone dos soluciones:

> Rocío: De dos maneras, la primera es hacerlo de manera infinita así, irlos corriendo y acomodando, corriéndose (risas), sí. La segunda, yo pensaría en un arreglo infinito, que todos los que están acomodados ocupen el siguiente par a ellos ¿sí? No ocuparían la siguiente habitación si es impar ¿cómo decirle? La $2n$, ocuparían la $2n$. Entonces si está en la posición 1, entonces usted va a ocupar la siguiente, entonces sería la $2n+1$, más o menos ¿sería? Me pueden quedar infinitas desocupadas y a los otros los acomodo en las impares que me quedaron vacías.

La primera solución que Rocío propone es una solución desde un punto de vista muy potencial donde cada huésped, tanto los nuevos como los antiguos, debe moverse infinitamente. En el segundo caso, plantea la biyección de forma en que cada huésped debe moverse sólo una vez de cuarto, envía a los antiguos huéspedes a ocupar la habitación par correspondiente de forma en que deja las impares desocupadas, tal y como lo habíamos previsto en el análisis teórico preliminar.

Jaime: "1, 2, 3,…, 100, x, 101, 102,…"

Cuando Jaime lee la paradoja por primera vez, responde que se le debe asignar, al nuevo huésped, la primera habitación que se encuentre vacía. Parece que pasa por alto el detalle de que el hotel se encuentra lleno.

> Jaime: Bueno, tengo un número infinito de habitaciones ¿cómo acomodaría a un nuevo e importante huésped? Pues en la primera habitación que tenga libre.
>
> Entrevistadora: Pero todas están llenas, el hotel está lleno ¿no?
>
> Jaime: ¡Ah! habitaciones llenas, cada habitación puede alcanzar un número máximo de ocupantes…

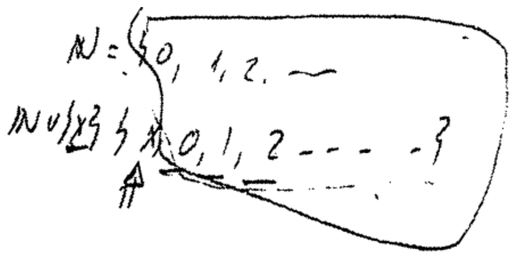
Cuando vuelve a leer el contexto, inmediatamente lo relaciona con el conjunto de los números naturales, más específicamente con el cardinal de este conjunto.

> Jaime: Sí. Bueno, es como que… Como… Como que el cardinal del número… Del conjunto de los números naturales que sería el número, pues trabajando con el infinito potencial ¿no? Como el número que yo puedo contar, sería como el cardinal del infinito, sería igual al cardinal del mismo conjunto de los números naturales unido con un elemento que no esté, con un x que no pertenezca al conjunto inicialmente.

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \cup \{x\}|$$

Jaime resalta el hecho de que el cardinal del conjunto de los números naturales es el mismo cardinal del conjunto que se forma cuando a ese conjunto se le agrega un número finito de elementos que no estaban inicialmente en él. Al relacionar el contexto con la cardinalidad del conjunto de los naturales, muestra evidencias de que ha pasado de su concepción objeto a la concepción proceso.

> Jaime: Entonces pues esto sería como la paradoja ¿cómo se puede ahí construir esto? Pues si yo tengo lo número naturales pues es porque les estoy dando un orden, 0, 1, 2, 3, 4,… Infinitos. Este conjunto al agregarle un elemento lo puedo volver a numerar ¿cómo lo puedo volver a numerar? Pues pongo este primer elemento que estoy poniendo, es un número. En realidad puedo poner un número finito de elementos los puedo poner aquí al principio. Pongo el x, pongo el 0, pongo el 1, pongo el 2,…, pongo el n,… Si es un número de habitaciones infinitas pasaría esto:



> Si se supone que las puedo contar, entonces sería como que están todas las habitaciones, entonces yo puedo cambiarle la numeración a partir de

una nueva. Voy a empezar otra vez a numerarlas y ahí podría encontrar una habitación que esté desocupada y podría poner el huésped ahí, siempre y cuando, bueno, matemáticamente, esté esto [señalando la figura anterior] pero es que esa idea de que ya está lleno es porque todo está copado, porque todos los números ya estarían usados pero no, vamos a solucionarlo así por este lado mejor.

Se percata que la solución que pretendía abordar resulta conflictiva con el contexto del problema, por lo que decide darle una nueva mirada.

> Jaime: Los naturales son equipotentes al mismo conjunto unido con una cantidad finita de elementos y siempre los puedo poner, es decir, pongo esa cantidad finita y luego los vuelvo a numerar a partir del conjunto que ya conozco que es el conjunto de los naturales. Entonces, siguiendo con esa labor podría encontrar siempre una cantidad finita de habitaciones que no esté llena. Esta x yo la puedo poner después de un número finito, contar 1, 2, 3,…, 100, x, 101, 102,… Es una nueva numeración que le estoy dando al conjunto de habitaciones.
>
> Entrevistadora: ¿Es una transformación de los naturales?
>
> Jaime: Sí, le estaría agregando un nuevo elemento pero los sigo contando igual como los naturales, tendría la misma cantidad de habitaciones, haciendo como el paso infinito.

Este estudiante busca la forma de garantizar que puede dejar libre la habitación para el nuevo huésped y evidentemente usa conceptos específicos de la teoría de conjuntos que conoce para tal fin. Logra plantear una nueva forma en la que va a numerar las habitaciones planteando una función (biyección) y volviendo a la concepción objeto de infinito.

> Jaime: Sí, la habitación 0 la voy a llamar la habitación x libre, la habitación 0 ya no va a ser la habitación 0 de acá sino que va a ser la habitación 1 que tenía anteriormente, la habitación 1 nueva va a ser la habitación 2, la habitación 2 pues la anterior, la 3. Como que la habitación $n - ésima$ va a ser $n + 1$, esto con la numeración anterior, siempre que $n \geq 1$ y va a ser la habitación x o el nuevo 0 que voy a tomar, siempre y cuando la habitación n sea pues el 0 ¿no?

$$H(n) = \begin{cases} n+1 & n \geq 1 \\ x & n = 0 \end{cases}$$

Para Jaime, el conjunto de los naturales contiene al 0 y esa es la habitación que va a dejar libre para el nuevo huésped; de tal manera que numera nuevamente las habitaciones a partir de la habitación 1 (en la antigua numeración), esencialmente es la misma idea que se propuso en el análisis preliminar.

Cuando se le propone acomodar a infinitos nuevos huéspedes, plantea la biyección que hemos tenido en cuenta en el análisis preliminar, a los antiguos huéspedes los manda a las habitaciones impares.

> Jaime: Un número infinito de huéspedes… Bueno, podría ser como coger a todos los números naturales y mandarlos en los números impares y dejar todas las habitaciones pares desocupadas y como el par es infinito, teniendo en cuenta que hay diferentes infinitos. Este nuevo infinito podría ser instalado siempre y cuando sea igual o menor que el infinito que yo ya tengo.

Jaime explica que la biyección debe ser realizada entre un conjunto dado y un conjunto con cardinalidad menor o igual a la del conjunto dado y propone:

> Jaime: Pero infinito, otra vez vuelve lo de Cantor que decíamos, cualquier conjunto infinito de un numerable pues tiene que ser numerable.

De esta forma como el conjunto de todos los pares y el conjunto de todos los impares son subconjuntos de $\mathbb{N}$, tienen la misma cardinalidad, la cardinalidad de todos los conjuntos numerables. Así, Jaime logra realizar el paso bidireccional entre su concepción objeto y su concepción proceso gracias a sus conocimientos de la teoría de conjuntos.

Hemos podido identificar, en las construcciones que realizaron los estudiantes entrevistados, la necesidad de usar argumentos desde la teoría de conjuntos de Cantor. Para determinar “Eso” que permite el cambio entre las concepciones, necesario para afrontar la paradoja, requiere de algunos conocimientos específicos. Todos los individuos que lograron pasar de una concepción objeto a una proceso, relacionaron las habitaciones del hotel con un conjunto numerable, de esta forma tenían una visión dinámica que les permitía plantear funciones biyectivas para enviar los elementos de su conjunto numerable en otro donde podrían garantizar que tendrían la nueva o las infinitas nuevas habitaciones desocupadas para poder hospedar a los nuevos huéspedes, y de esta forma volver de la concepción dinámica a una estática, el hotel de infinitas habitaciones lleno. Sin embargo, que el individuo pueda pasar de la concepción objeto presente en la paradoja a una concepción proceso, no garantiza que pueda proponer las transformaciones necesarias. Julio es un estudiante que tiene una formación matemática fuerte y a pesar de que relacionó el contexto con un conjunto numerable, no pudo proponer una transformación adecuada; creemos que esto sucedió porque el conjunto que escogió es esencialmente más complejo, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, toma en cuenta el mismo cardinal de $\mathbb{N}$ pero incluye una forma de organizar las habitaciones en el plano, hecho que pensamos, complicó la representación de una transformación que le permitiera responder las preguntas, las habitaciones ya no se numeraban 1, 2, 3, … Ahora las habitaciones se numeraban mediante parejas ordenadas (x, y).

El único individuo que no logró aceptar las condiciones del problema, debido a sus concepciones primarias de tipo dinámico, fue Orlando. Él no tiene una formación matemática tan formal debido a que, como hemos mencionado anteriormente, realizó su pregrado en ingeniería, no tuvo un tratamiento instruccional que le permitiera adecuar sus concepciones primarias; es decir, no ha tenido una formación que lo acerque a la teoría de conjuntos infinitos y al manejo más específico de conceptos que involucren directamente al infinito actual.

4.4.3. Construcción del triángulo de Sierpinski.

En este espacio propondremos algunas evidencias de los razonamientos que han permitido a los estudiantes entrevistados construir el triángulo de Sierpinski a través de procesos iterativos infinitos o por el contrario, evidenciar las dificultades generadas. Pondremos especial interés en la coordinación de los procesos y en las características del objeto trasciende del proceso iterativo infinito.

Versión de la construcción del triángulo de Sierpinski usada en las entrevistas:

> Se tiene inicialmente un triángulo equilátero relleno de lado a, se unen los puntos medios de los lados que forman el triángulo de modo que el triángulo inicial queda dividido en cuatro triángulos equiláteros y congruentes, de los cuales se elimina el triángulo central, de esta forma quedan 3 triángulos cada uno de lado $\frac{a}{2}$. Se repite el mismo procedimiento en cada uno de los triángulos resultantes y así sucesivamente al infinito.
> ¿Cuál es el perímetro del triángulo de Sierpinski?

❖ ***Concepciones primarias***

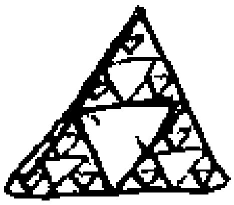
En este caso, a pesar de que en la descomposición genética no tuvimos en cuenta concepciones primarias, sí establecimos que podría presentarse el caso en que un estudiante pensara en el proceso de construcción para intentar imaginar cómo sería el perímetro del triángulo de Sierpinski. Si tiene una concepción primaria estática puede pensar que el triángulo de Sierpinski es una figura compuesta de infinitos segmentos de longitud cero, lo que lo llevaría a concluir que el perímetro es cero o que no tiene mucho sentido pensar en el perímetro de una figura con estas características. Este fue el caso de Mariana que pensó que no tendría mucha lógica pensar en el perímetro de una figura compuesta de infinitos segmentos de longitud cero.

Mariana: “Perímetro de puntos…”

Cuando Mariana lee la paradoja intenta imaginarse cómo será el triángulo de Sierpinski y comenta:

> Mariana: Pero, aquí le quité este, me quedan estos, aquí le quite esto, me quedan estos… No, no creo que eso forme una figura como tal, creo

> que termina siendo casi como… Como puntos. Sí, porque todo esto se va quitando, entonces lo que va quedando, cada vez se vuelve más pequeño, más pequeño, más pequeño… Sí, entonces terminaría siendo como punticos, y pues perímetros de puntos… No, es cero.



Podemos evidenciar que aún sin plantear en términos generales los procesos inmersos en el contexto del problema (número de segmentos, longitud de segmentos), la naturaleza diferente de cada uno de estos procesos hace que Mariana piense que el perímetro del triángulo se reduce a sumar infinitamente cero y por lo tanto es cero, esto es una evidencia de una concepción estática de tipo primario. Sin embargo, ella identifica los procesos y se propone plantear las sucesiones que la lleven a encontrar el perímetro del triángulo de Sierpinski.

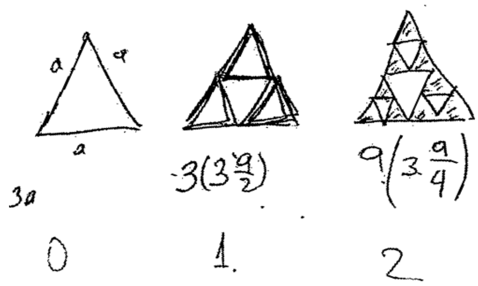
En general, como el contexto propone los procesos de forma explícita, los individuos no cuestionan la situación sino que empiezan a realizar las primeras transformaciones atendiendo a dichos procesos.

❖ *Primeras transformaciones del triángulo inicial*

Las acciones se han caracterizado por ser gráficas y aritméticas, consisten en las primeras transformaciones del triángulo inicial de lado a. Los individuos, en general, van hallando los perímetros de las primeras figuras generadas por el proceso de construcción gracias a que van identificando cómo aumenta el número de segmentos (o número de triángulos) y cómo disminuye la longitud de cada uno. A continuación proponemos un ejemplo que permite evidenciar el tipo de acciones realizadas por los estudiantes entrevistados.

Mariana y las primeras transformaciones

Cuando se le motiva para que utilice sus conocimientos en pro de verificar si realmente el perímetro es cero, realiza las primeras acciones, que representa de manera geométrica y aritmética. Entonces va generando los primeros términos de la sucesión de perímetros de las figuras que preceden al triángulo de Sierpinski a partir de los primeros términos de las sucesiones generadas por los procesos: número de segmentos y longitud de segmento, evidenciando su concepción acción de un proceso iterativo infinito**.**



Una vez realiza estás acciones está lista para generalizar y pasar así a su concepción proceso, logrando establecer cómo actuarán los procesos en cualquier iteración.

❖ ***Concepción proceso: Coordinación de procesos de diferente naturaleza***

Tal y como se propuso en la descomposición genética preliminar, el individuo pasará de una concepción acción a una concepción proceso cuando logre plantear los términos generales de las sucesiones o series identificadas en el contexto y logre coordinarlas en un único proceso iterativo. Como esperábamos, la diversa naturaleza de los procesos resultó problemática, ya que si el individuo no lograba coordinar adecuadamente los procesos, cuando intentara ver su comportamiento en la situación al límite podría llegar a resultados contradictorios.

Mariana y la coordinación de procesos

Esta estudiante logra plantear en términos generales la sucesión que va a generar el perímetro de la curva en cualquier iteración $n-ésima$, este proceso se genera de otros dos procesos que fueron "multiplicados" (número de triángulos y longitud de segmento) en la realización de las acciones.

> Mariana: Yo aquí podría definir $3^{n+1}\left(\frac{a}{2^n}\right)$, vamos a ver. En el paso dos, 9 por 3, 27 sí, es 3 a la 3, 27 y a^4, entonces eso quiere decir, en el paso cuatro, si continuamos tendría que ser $3^4\left(\frac{a}{2^3}\right)$. Y así sucesivamente. Entonces tenemos si, que en el paso n, este va a ser el perímetro que yo voy a encontrar, el perímetro de este triángulo.

$$3^{n+1}\left(\frac{a}{2^n}\right)$$

Al plantear la situación al límite de la anterior expresión, Mariana no coordina los procesos sino que analiza cada proceso por separado, lo que le da como resultado una expresión de tipo $\infty.0$ y que la lleva a concluir que el perímetro del triángulo de Sierpinski no se puede determinar.

> Mariana: Entonces si n se va a infinito, si n tiende a infinito, entonces sería como:

$$\lim_{n\to\infty} 3^{n+1}\left(\frac{a}{2^n}\right).$$

> Bueno, si esto tiende a infinito [señalando el límite], esto tiende a infinito (señalando el 3^{n+1}) y un número que se va abriendo más, más, más, tiende a cero ¿no? Uno podría decir que esto [señalando el $\frac{a}{2^n}$] tiende a 0, pero esto también tiende a infinito [señalando el 3^{n+1}]. Si yo pudiera hacer, sería como un límite de un infinito por el cero, pero yo no puedo calcular ese límite, el límite me da $\infty \cdot 0$ es una indeterminación porque yo tengo que el límite existe de un producto si la una es acotada, digamos si esta fuera acotada ya tendría que esto es 0, porque entonces esto es menor, siempre va a ser menor igual que un m, pero como no está acotada, no, no tengo…
>
> Entrevistadora: O sea, quiere decir que de pronto el límite que estamos intentando calcular no es 0. ¿Contradiciendo un poco lo que pensabas antes?
>
> Mariana: Sí (risas) sí, sí, sí, yo no puedo determinar si sí o si no. Bueno pero ahí también como que… Si realmente es 0, mmm… Sí porque bueno, esto se va a infinito, esta no está acotado y eso se va a 0, sí, no puedo. No, no puedo decir qué pasa al infinito con el perímetro del triángulo.

La conclusión matemática a la que llega le permite respaldar, de alguna forma, sus concepciones primarias que le hacían cuestionar cómo podría ser el perímetro de una figura de infinitos lados cada uno de longitud cero. A pesar de que escribió los dos procesos como un producto, cuando envío está expresión a infinito continuó analizando los procesos por separado, es decir, no logró coordinar los procesos en uno único, por lo tanto no pudo generar el objeto trascendente.

En contraste, los argumentos presentados por Dalia, nos permiten evidenciar una necesidad consciente por parte de esta estudiante por ver los procesos como uno único.

Dalia y la construcción de procesos iterativos

Dalia logra establecer los términos generales de las sucesiones identificadas en el contexto del problema (número de triángulos y longitud de segmento), con lo cual propone una expresión que permite encontrar el perímetro en cualquier iteración.

> Dalia: Entonces para un número n de iteraciones esto va a ser…

$$S_n = 3^n \times 3 \times \frac{a}{2^n} = 3^{n+1} \cdot \frac{a}{2^n}$$

¿Cuál es el perímetro del triángulo? Entonces cuando n tiende a infinito ¿qué pasa con esto? Cuando n tiende a infinito, entonces yo puedo escribir esto como

$$3^{n+1}\cdot\frac{a}{2^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 3a$$

Podemos notar que Dalia replantea la expresión, con el fin de encontrar su situación al límite, cuando se le pregunta con qué objeto hace esto, ella responde:

Dalia: Si lo queremos ver de esta manera

$$S_n = 3^n \times 3a \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Entonces qué pasa, si esto tiende a infinito (señalando el 3^n) esto es infinito y esto (señalando el $\left(\frac{1}{2}\right)^n$) tiende a cero *pero es que a mí no me interesa verlos por separado, a mí me interesa ver todo el conjunto, que es lo que pasa con toda la expresión entonces por eso es que yo lo acomodé acá*. Sino aquí llego a $\infty\cdot 0$ pero eso puede ser cualquier cosa.

Entrevistadora: Entonces usted dice que hay que ver todo el conjunto ¿no se puede ver por separado?

Dalia: No porque la pregunta es el perímetro ¿cierto? Y el perímetro es… El perímetro tiene esta forma…

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \underline{3a}$$

Esta estudiante se da cuenta que si ve los procesos por separado lo que obtiene al analizarlos al límite será la expresión $\infty\cdot 0$, que no le permite responder la pregunta central de la situación. Así que plantea que debe ver los procesos como uno único y de ésta forma poder construir el objeto que trasciende de ese proceso iterativo.

Pudimos evidenciar que la construcción de los procesos y en general, la coordinación de los mismos en un único proceso iterativo, no es una tarea fácil. Existe una marcada diferencia entre presentar el producto de dos procesos y llegar a coordinarlos realmente. Si el análisis se hace por individual, la naturaleza diversa de los procesos generará una expresión problemática que el individuo no sabrá interpretar y terminará concluyendo erróneamente. La coordinación de los procesos debe hacerse de forma consciente, el individuo debe saber qué busca y qué forma tiene eso que busca.

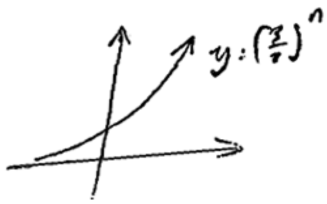
❖ ***El triángulo de Sierpinski como un objeto trascendente***

La necesidad de responder la pregunta protagónica de la situación hará que el individuo pase de una concepción proceso a una concepción objeto de infinito. Como ya evidenciamos es por sí misma una labor compleja obtener un único proceso iterativo, ahora nos veremos enfrentando a obtener el planteamiento de la situación al límite de ese proceso y mostrar cuáles fueron las conclusiones a las que llegaron los estudiantes entrevistados.

Dalia y el triángulo de Sierpinski

Como mostramos en el apartado anterior, Dalia logra coordinar los procesos y posteriormente analiza su situación límite para determinar el perímetro del triángulo de Sierpinski.

> Dalia: Ahora, esto es una exponencial y en el infinito, una exponencial con base mayor que 1, entonces en el infinito, esto tiende a infinito, lo que va a significar que el perímetro es infinito.



> Como $3a$ es constante porque a es el lado del triángulo inicial, va a depender de $\left(\frac{3}{2}\right)^n$. Entonces el perímetro del triángulo de Sierpinski va a ser infinito.

Podemos determinar que Dalia posee una concepción objeto, no sólo con el planteamiento del proceso iterativo al límite sino cuando concluye que el perímetro del triángulo de Sierpinski es infinito; logra aceptar este hecho a pesar de que resulte paradójico, teniendo en cuenta que el área del triángulo es cero. Un caso parecido es el de Julio, quien evidencia la construcción del objeto trascendente a través de una reflexión interesante.

Julio: "El infinito que cabe en la palma de la mano"

Este estudiante logra expresar los procesos iterativos en términos generales y coordinarlos eficazmente en uno único que posteriormente analiza en su situación al límite, lo que le permite concluir que el triángulo de Sierpinski tiene perímetro infinito.

> Julio: Entonces uno pensaría que si yo sacara el perímetro en términos del $n-ésimo$ paso entonces sería, paso 0, paso 1, paso 2, …, entonces el paso n sería $\frac{3^{n+1}}{2^n}a$ ¿sí? Que esto sería igual a $3\left(\frac{3}{2}\right)^n a$.

$$P_n = \frac{3^{n+1}}{2^n} a = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n a$$

Y $3a$ sería el perímetro inicial por $\left(\frac{3}{2}\right)^n$. A uno en estas cosas le dicen que mande esto al infinito y si usted manda esto al infinito el P_n pues diverge.

$$P_n = P\left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad \frac{3}{2} > 1$$

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \infty$$

Esto se mantiene constante (señalando el perímetro inicial) pero es que esta cosa $\left(\frac{3}{2}\right)$ es mayor que 1. Entonces una sucesión que tenga un número mayor que 1, si a es mayor que uno de una sucesión a la n, esa cosa diverge. Entonces me queda expresado eso y entonces yo le diría que el perímetro sería infinito.

Podemos observar que Julio acepta la posibilidad de que el perímetro del triángulo de Sierpinski sea infinito y además propone una reflexión interesante que nos permite concluir que ha construido una concepción objeto.

Julio: Entonces me queda expresado eso y entonces *yo le diría que el perímetro sería infinito, a pesar de que cabe en una palma de la mano* ¿no? Es como lo… Por ejemplo, yo tomo aquí una longitud a, de tal manera que me quepa en la mano (haciendo referencia al triángulo inicial) pero cada vez como que empiezo a hacer el fractal, eso es curioso ¿no? A pesar de que es de perímetro infinito pero yo lo puedo coger con la mano, si yo tomo un a adecuado, por ejemplo si yo tomo un a de 2 cm, me cabe acá en la mano pero empiezo a hacer Sierpinski y queda infinito. Eso es lo paradójico ¿no? Uno no lo ve porque uno pensaría que infinito no va a caber nunca en la sala, ni en el planeta tierra pero cabe ¿no? Entonces yo le diría que el perímetro es infinito.

Con esta afirmación podemos ver que Julio acepta el hecho de que una figura tenga perímetro infinito y ocupe un área finita o cero, a pesar de que pueda resultarle paradójico. Su concepción del concepto de límite le permite imaginar las características que tiene el triángulo de Sierpinski, aceptando que es una figura con perímetro infinito.

Pudimos evidenciar diversos razonamientos, las dificultades que se presentan cuando el individuo pretende coordinar procesos de diversa naturaleza, cuyo éxito, como hemos mostrado, se obtiene cuando conoce la forma que debe tener el proceso iterativo que ha sido construido con el fin de responder a una característica específica del objeto trascendente, en este caso, el perímetro y por tanto sabe que no puede analizar los procesos por separado. Una vez construida la concepción objeto, vemos que los individuos asimilan una figura con perímetro infinito y área cero, esto les permite entender que el perímetro infinito no implica que el triángulo de Sierpinski sea una entidad dinámica y por lo tanto inacabada.

5. CONCLUSIONES

En este capítulo plantearemos los resultados obtenidos en nuestra investigación a partir del análisis de datos. Las descomposiciones genéticas preliminares serán refinadas de tal manera que mostraremos caminos viables de construcción del infinito matemático en los contextos estudiados. De igual forma, presentaremos evidencias empíricas del mecanismo de *completez* y de la descomposición genética genérica de infinito planteada en Roa-Fuentes (2012; 2014). Finalmente proponemos algunas consideraciones didácticas y plantearemos cuestionamientos que pueden ser de interés para futuras investigaciones.

5.1. ASPECTOS GENERALES

En el desarrollo de esta investigación hemos abordado la problemática relacionada con la construcción del infinito matemático desde un punto de vista cognitivo. Haciendo uso de los constructos teóricos ofrecidos desde la teoría APOE, hemos llevado a cabo un análisis preliminar de la forma hipotética en que pueden afrontar estudiantes de maestría en Matemáticas y en Educación Matemática, dos situaciones relacionadas con el infinito y la construcción de una curva fractal. Tras ese primer análisis, hemos diseñado y llevado a cabo entrevistas de corte didáctico que fueron aplicadas a 7 estudiantes de maestría. El análisis de esas entrevistas, bajo los elementos de la teoría APOE, nos ha permitido ofrecer evidencias empíricas y llegar a respaldar nuestros planteamientos hipotéticos iniciales. En el caso de la paradoja del Hotel de Hilbert y la descomposición genética genérica de infinito (Roa-Fuentes, 2012), buscamos revalidar su pertinencia con estudiantes que han tenido una instrucción matemática formal. En este capítulo, ofreceremos caminos validados de construcción del infinito matemático.

5.2. DESCOMPOSICIONES GENÉTICAS VALIDADAS

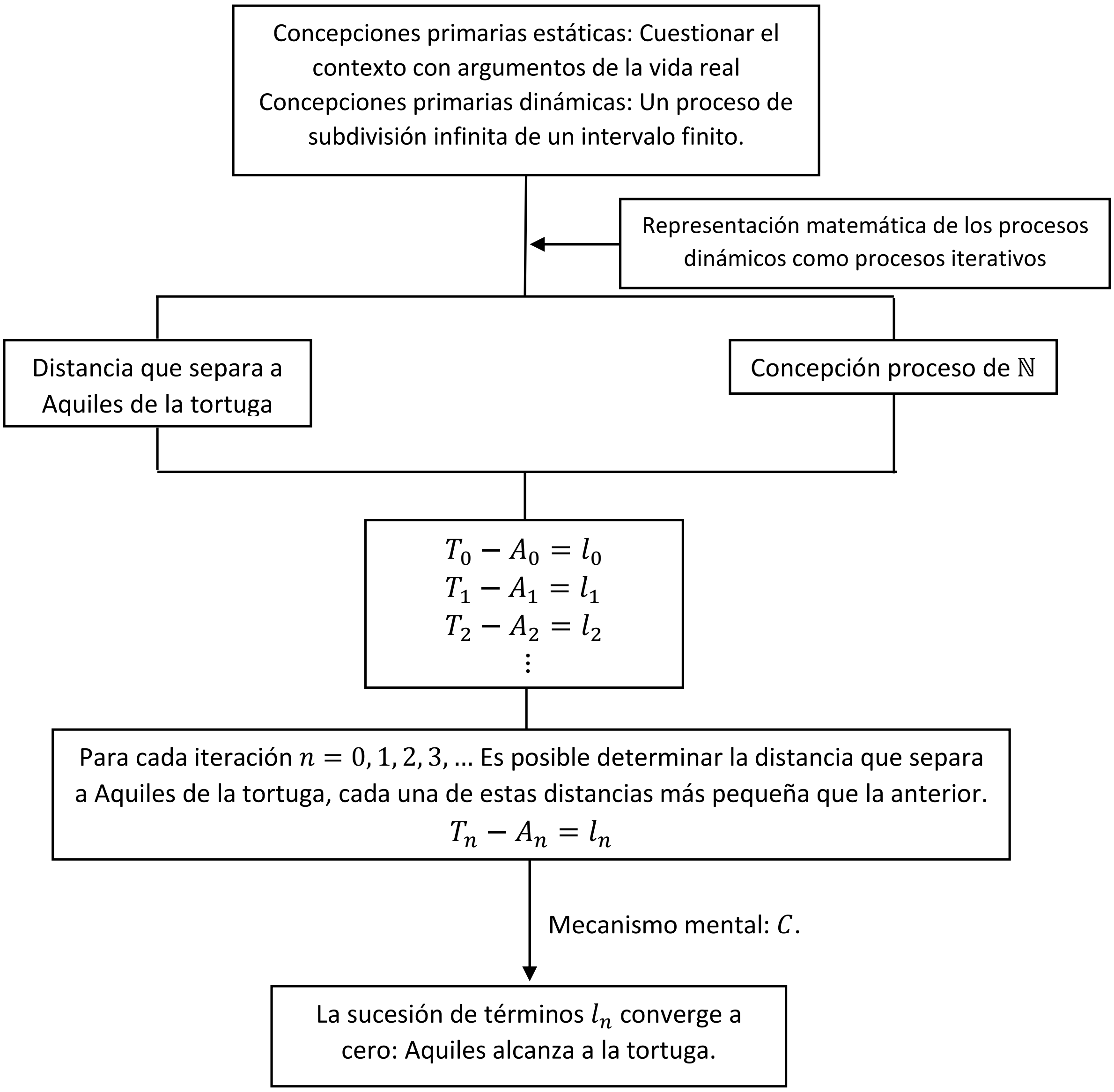
A través de los elementos propuestos por la teoría APOE, hemos realizado un análisis de las construcciones que desarrollaron estudiantes de maestría en Matemáticas y en Educación Matemática al enfrentarse a tres contextos diferentes relacionados con el infinito. Un análisis del desarrollo epistemológico e histórico de la noción de infinito (Weller et al., 2004; Dubinsky et al., 2005a; 2005b) y de cómo ha sido abordado por la Educación Matemática y en especial, por la teoría APOE, nos ha permitido plantear caminos hipotéticos de construcción que gracias a las evidencias recogidas en el análisis de datos respaldamos empíricamente.

5.2.1. Descomposición genética refinada de la versión general de Aquiles y la tortuga.

Como se mostró en el desarrollo de esta investigación las versiones estudiadas de la paradoja de Aquiles y la tortuga, nos permitieron detectar aspectos puntuales sobre cómo un individuo pone en juego su conocimiento matemático (relacionado con la construcción de procesos iterativos infinitos y el concepto de límite), así como sus intuiciones en un contexto con condiciones "reales" asociadas con el infinito.

Las concepciones primarias evidenciadas en el análisis de datos, fueron de tipo dinámico y estático. Estas concepciones están caracterizadas por la identificación que hace el individuo de un proceso de subdivisión infinita de un intervalo finito, esto se evidencia cuando el individuo propone cuestiones como: *"Aquiles no la alcanza porque el proceso sigue sin fin, Aquiles siempre se encontrará detrás de la tortuga sin importar qué tan pequeña sea la distancia que los separa"*. Por otra parte las concepciones de tipo estático se caracterizaron por ser argumentadas desde el mundo real, a partir de cuestionamientos como: "*es imposible que Aquiles siendo más rápido no pueda alcanzar a la tortuga*" o proponiendo que: "*no existe un terreno rectilíneo que pueda albergar una competencia infinita, por lo tanto, Aquiles tendría que alcanzarla";* a esto se relaciona la idea de una meta, dado que los individuos argumentan: *"debe existir una "meta" que determinará el fin de la carrera*" (ver figura 19).

Figura 19. Descomposición genética refinada versión general Aquiles y la Tortuga



A falta de datos específicos con los cuales los individuos pudieran plantear más fácilmente las distancias totales recorridas por Aquiles o la tortuga, pudimos evidenciar que en su mayoría, prefieren abordar la situación en términos de las distancias que separan a Aquiles de la tortuga en cada iteración, tal y como planteamos en el análisis preliminar.

Cuando un individuo identifica los procesos inmersos en el problema (movimiento de Aquiles y movimiento de la tortuga) y los relaciona a través del conjunto de los números naturales, realiza las primeras iteraciones sobre un subconjunto finito de números naturales y se percata que a medida que va realizando estas iteraciones las distancias que separan a Aquiles de la tortuga se hacen cada vez más pequeñas. Posteriormente, logra interiorizar esas acciones encontrando una expresión que le permite, en términos generales, hallar la distancia que separa a Aquiles de la tortuga en cualquier iteración.

$$\begin{gathered} T_0 - A_0 = l_0 \\ T_1 - A_1 = l_1 \\ T_2 - A_2 = l_2 \\ \vdots \\ T_n - A_n = L_n \end{gathered}$$

En este caso, pudimos evidenciar que el individuo toma en cuenta un único proceso desde el inicio, como fue planteado en la descomposición genética preliminar. Esto es, relaciona los dos procesos a medida que va realizando las acciones y no necesariamente se encapsula uno de los procesos para que el otro actúe sobre él como se plantea en Arnon y otros (2014).

Pudimos observar en el análisis de los datos la importancia de la realización de las acciones y de la reflexión que un individuo pueda generar sobre estas acciones para dar lugar a la construcción de un proceso. En el caso de la paradoja de Aquiles y la tortuga si el individuo no se percata de que cada vez, las distancias que separan a Aquiles de la tortuga se hacen más pequeñas o, visto de otro modo, de la relación de las posiciones que ocupan Aquiles y la tortuga, no podrá proponer un término general para los procesos coordinados debido a que no tendrá clara la naturaleza de cada proceso (Ver particularmente el trabajo realizado por Julio). A pesar de que el individuo pueda plantear expresiones generales, este proceso no le dirá mucho sobre la convergencia de la sucesión que representa las distancias que separan a Aquiles de la tortuga.

Ahora bien, la construcción del objeto que transciende del proceso iterativo que construyó depende de la concepción que él tenga de la convergencia de esta sucesión infinita. A pesar de que el individuo determine que la sucesión de términos L_n converge a cero, puede concluir que Aquiles alcanza a la tortuga o bien, que no la alcanza. Pensar en que el límite de una sucesión pueda no ser alcanzado, nos permite ver que el individuo está pensando en términos del último elemento de la sucesión. Medina (2001) propone que este obstáculo epistemológico surge a partir de las diferentes definiciones de límite (dadas por Jurín, Robins, D'Alembert, Lhuilier y Cauchy) que están fuertemente influenciadas por el infinito potencial. Sin embargo, este obstáculo fue superado cuando Weierstrass quien propone que el "límite" es un objeto generado por el "proceso infinito", haciendo uso del infinito actual. El mecanismo que permite al individuo construir el objeto trascendente, debe estar íntimamente relacionado con la capacidad que tenga de ver el proceso infinito, que se encuentra implícito en la convergencia de la sucesión como un todo. Lo cual está relacionado con una concepción estática del conjunto de los números naturales, dadas las características iterativas de dicho proceso.

5.2.2. Descomposición genética refinada de la versión particular de Aquiles y la tortuga.

Figura 20. Descomposición genética refinada versión general Aquiles y la Tortuga

Concepciones primarias estáticas: Cuestionar el contexto con argumentos de la vida real
Concepciones primarias dinámicas: Un proceso de subdivisión infinita de un intervalo finito

Representación matemática de los procesos dinámicos como procesos iterativos

Distancias totales recorridas por Aquiles (A_n) o la tortuga (T_n)

Concepción proceso de $\mathbb{N}$

Construcción de procesos iterativos. Función definida en $\mathbb{N}$ en un conjunto X

$$A_0 = 0$$

$$A_1 = 10$$

$$A_2 = 10 + \frac{10}{10}$$

$$A_3 = 10 + \frac{10}{10} + \frac{10}{100}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{10}{10^0} + \frac{10}{10^1} + \frac{10}{10^2} + \frac{10}{10^3} + \cdots + \frac{10}{10^{n-1}}$$

Coordinación: Relación existente entre A_n y T_n

Para cada iteración $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Es posible determinar las distancias totales recorridas por Aquiles y la tortuga.

$$T_o = A_1$$
$$T_1 = A_2$$
$$T_2 = A_3$$
$$\vdots$$
$$T_{n-1} = A_n$$

Mecanismo mental: C

$$10 + T_{n\to\infty} = A_{n\to\infty} = 11.1111 \ldots$$

Aquiles y la tortuga recorren la misma distancia, Aquiles alcanza a la tortuga.

Esta versión con datos más específicos (distancia inicial que separa a Aquiles de la tortuga y relación de velocidad entre los dos), nos permitió plantear en el análisis preliminar que el individuo se sentiría inclinado por abordar el problema con argumentos físicos para determinar el punto de encuentro, pudimos evidenciar en el análisis de datos que efectivamente así ocurrió. Como ya hemos mencionado en la descomposición genética preliminar, una situación en la que un competidor como Aquiles no puede alcanzar a una tortuga, no es paradójica desde el punto de vista físico dado que éste hecho no se cuenta entre los hechos de la experiencia.

Las concepciones primarias que pudimos evidenciar en esta situación son de tipo dinámico y estático, casi siempre relacionadas con la forma en la que el individuo aborda la versión general. Los argumentos generados a partir de las concepciones primarias estáticas son débiles, una vez que se le muestran los procesos inmersos en el contexto del problema, el individuo abandona su postura inicial y empieza a trabajar en el camino señalado por la situación (ver figura 20).

El individuo puede identificar los procesos propios de la situación, distancia total recorrida por Aquiles (A_n) o distancia total recorrida por la tortuga (T_n). Las primeras acciones están enfocadas en determinar las distancias totales recorridas en las primeras iteraciones, estas primeras acciones son más elaboradas que las acciones realizadas en la versión general, dados los valores específicos. En el análisis preliminar esperábamos que el individuo realizara las acciones sobre uno de los procesos y luego los coordinara determinando la relación existente entre las dos sucesiones en términos generales. Sin embargo, pudimos ver que el individuo también puede establecer inicialmente la relación y realizar las acciones a la par, determinando las distancias totales recorridas por ambos en cada iteración. La coordinación de los dos procesos se logra en la medida en que el individuo establezca que $T_n = A_{n+1}$.

La convergencia de la serie T_n implica la convergencia de la serie A_n, por lo cual el individuo puede determinar que Aquiles recorre la misma distancia que recorrió la tortuga más la ventaja inicial y concluir que la alcanza. Sin embargo, nuevamente la construcción del objeto trascendente queda resumida en la concepción que el individuo tenga del concepto de límite, es decir, a la capacidad que tenga de ver el proceso infinito, inmerso en el concepto de límite, como un todo y asumir el límite como un objeto que trasciende de ese proceso. Asumir esto es entender que el límite es por sí mismo un contexto donde se puede mostrar la doble naturaleza del infinito matemático.

$$10 + T_{n\to\infty} = A_{n\to\infty} = 11.1111\ldots$$

O lo que es igual:

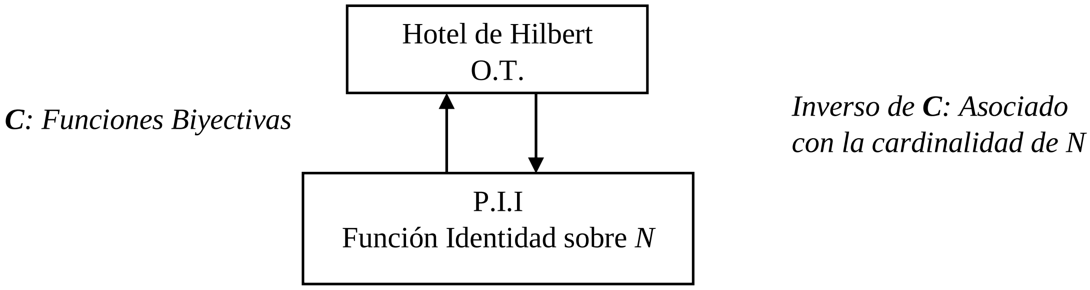
$$\lim_{n\to\infty}[A_n - T_n] = 0$$

Por lo tanto, un individuo que tiene una concepción objeto de infinito, al plantear la anterior expresión, concluirá que Aquiles efectivamente alcanza a la tortuga.

5.2.3. Descomposición genética refinada de la paradoja del hotel de Hilbert.

Este es el único contexto estático que trabajamos en nuestra investigación, hemos podido respaldar la descomposición genética particular planteada por Roa-Fuentes (2012) sobre esta paradoja. Los datos empíricos de nuestra investigación nos han permitido concluir que entender el enunciado de la paradoja y aceptarlo requiere de una concepción objeto del conjunto de los números naturales. Poder imaginar que existe un hotel que tiene infinitas habitaciones ocupadas, es asumir que es posible “agotar” el proceso de construcción de un conjunto infinito, pensarlo como una “cosa”.

Figura 21. Descomposición genética refinada de la paradoja del hotel de Hilbert



La mayoría de los estudiantes entrevistados pudieron relacionar el contexto con el conjunto de los números naturales, pasar de una concepción objeto de infinito (explícita en el contexto) a una concepción proceso. Pensar, ya no en el hotel infinito lleno sino en la posibilidad que se tiene de numerar cada una de las habitaciones y a los huéspedes. Plantear una biyección del conjunto de los números naturales en él mismo.

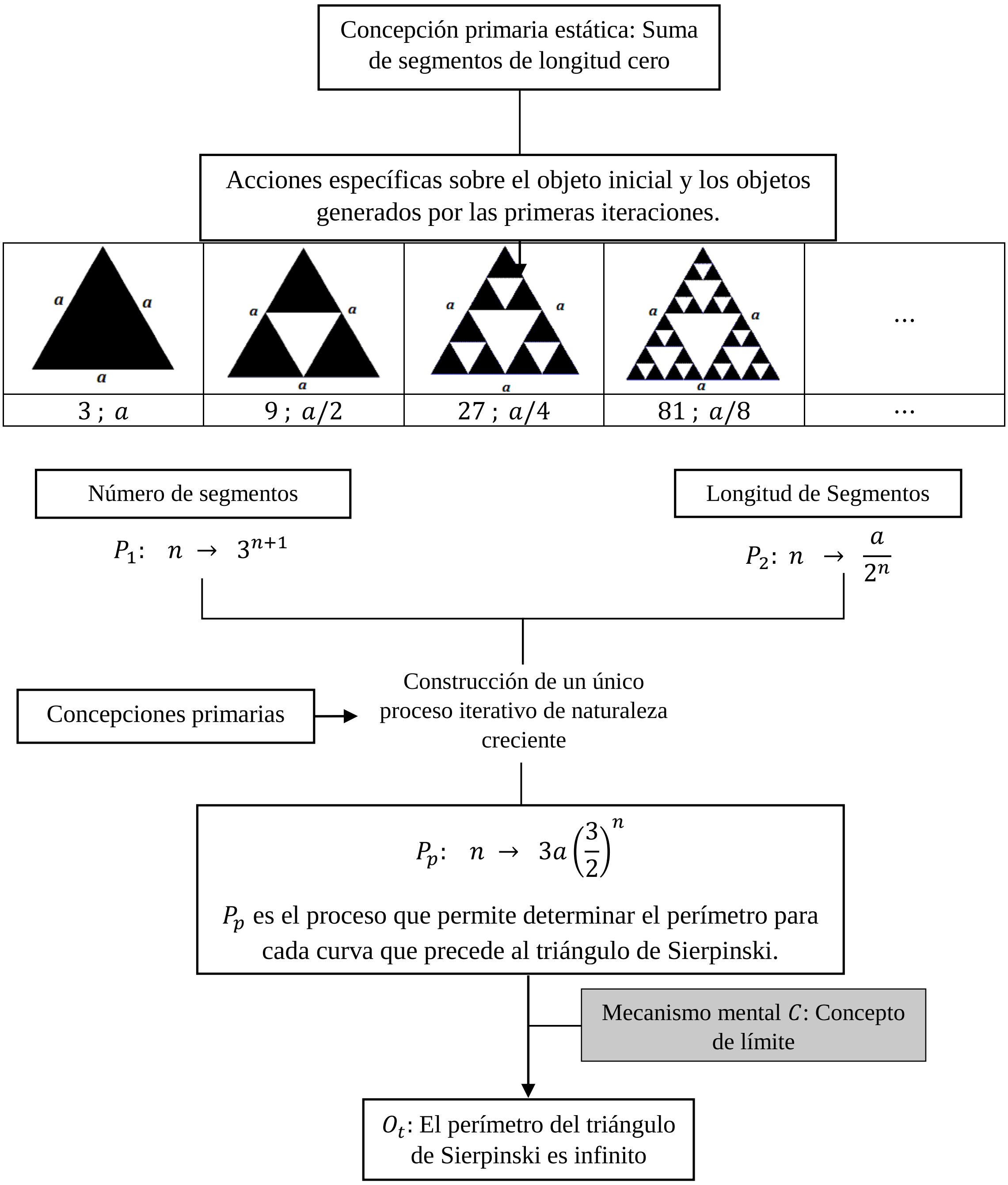
Un individuo que no pueda aceptar las condiciones planteadas en el problema evidenciado una concepción dinámica primaria y no pueda relacionar las características de un hotel infinito con un conjunto numerable, posiblemente no ha estado relacionado con el estudio de la teoría de conjuntos de Cantor. Conceptos específicos como la cardinalidad de conjuntos infinitos y el planteamiento de funciones biyectivas para establecer si dos conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad, posibilitan el paso de una estructura estática a una dinámica y viceversa. En nuestro estudio, Orlando fue el único estudiante que no pudo aceptar las condiciones del problema, a pesar de que no es concluyente, pensamos que el hecho de que haya sido el único estudiante que no tuvo un estudio formal de la teoría de conjuntos, interviene en su capacidad de afrontar la situación.

Lo anterior nos ofrece una importante evidencia empírica de la relación del mecanismo de completez con los conceptos mencionados anteriormente. Ese mecanismo que le permite a un individuo aceptar el infinito actual evidenciado que posee una concepción objeto de infinito. Pasar de una concepción objeto a una concepción proceso con el planteamiento de funciones biyectivas de un conjunto numerable en otro conjunto numerable y posteriormente tener la capacidad de ver los procesos terminados y pasar de nuevo a una concepción objeto de infinito, tiene relación directa con los conceptos que ya habían sido tomados en cuenta por Roa-Fuentes (2012) para definir el mecanismo de completez y a su vez nos permite revalidar su descomposición genética refinada.

5.2.4. Descomposición genética refinada de la construcción del triángulo de Sierpinski.

Este contexto específico nos ha permitido estudiar la coordinación de procesos iterativos de diferente naturaleza y la construcción del objeto trascendente a partir del planteamiento de una situación límite de un proceso iterativo infinito bidimensional.

Figura 22. Descomposición genética refinada de la construcción del triángulo de Sierpinski



A pesar de que esperamos que los individuos identifiquen el proceso transformador del triángulo inicial y comiencen a trabajar sobre él sin cuestionar el contexto, también hemos podido evidenciar que es posible que al intentar imaginarse lo que sería el triángulo de Sierpinski y cuál podría ser su perímetro, la naturaleza diferente de los procesos involucrados en la transformación, hagan que el individuo piense que no tiene mucho sentido hablar sobre el perímetro de esta figura o que es cero, ya que la figura está compuesta por infinitos segmentos de longitud cero, lo que se asemeja a una nube de puntos (ver el caso de Mariana).

Las primeras transformaciones que se hacen sobre el objeto inicial (triángulo equilátero de lado a) son representadas de manera geométrica y aritmética, caracterizadas por encontrar los perímetros de los primeros triángulos. Para tal fin, un individuo identifica los procesos, número de segmentos o número de triángulos y longitud de cada segmento (procesos divergente y convergente respectivamente). Cuando el individuo entiende la forma en la que ese proceso transformador actúa en cualquier iteración, propone una expresión que le permite determinar el perímetro de cualquier curva precedente. Sin embargo, que el individuo pueda determinar el perímetro de cualquier curva precedente con una expresión, no implica que haya coordinado los dos procesos iterativos en uno único. Es decir, la expresión:

$$P_p = 3^{n+1}\left(\frac{a}{2^n}\right)$$

Le permite calcular el perímetro de cualquier triángulo precedente. Sin embargo, no es un proceso coordinado, solo ha escrito la generalización de los dos procesos "una al lado de la otra". Sin importar si el individuo coordinó los procesos para generar uno único o si sigue viendo cada proceso por individual, él puede encontrar los perímetros de los triángulos que preceden al triángulo de Sierpinski. La dificultad de coordinar los procesos se hace evidente cuando el individuo piensa en la situación al límite de la expresión P_p. Si al momento de plantear la situación al límite de este proceso, no diferencia entre analizar en el infinito cada proceso por individual o el hecho de reescribir el proceso planteado para que sea analizado de forma única. En este caso diremos que el individuo no pudo coordinar los procesos involucrados.

$$\text{Proceso Coordinado: } n \;\rightarrow\; 3a\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

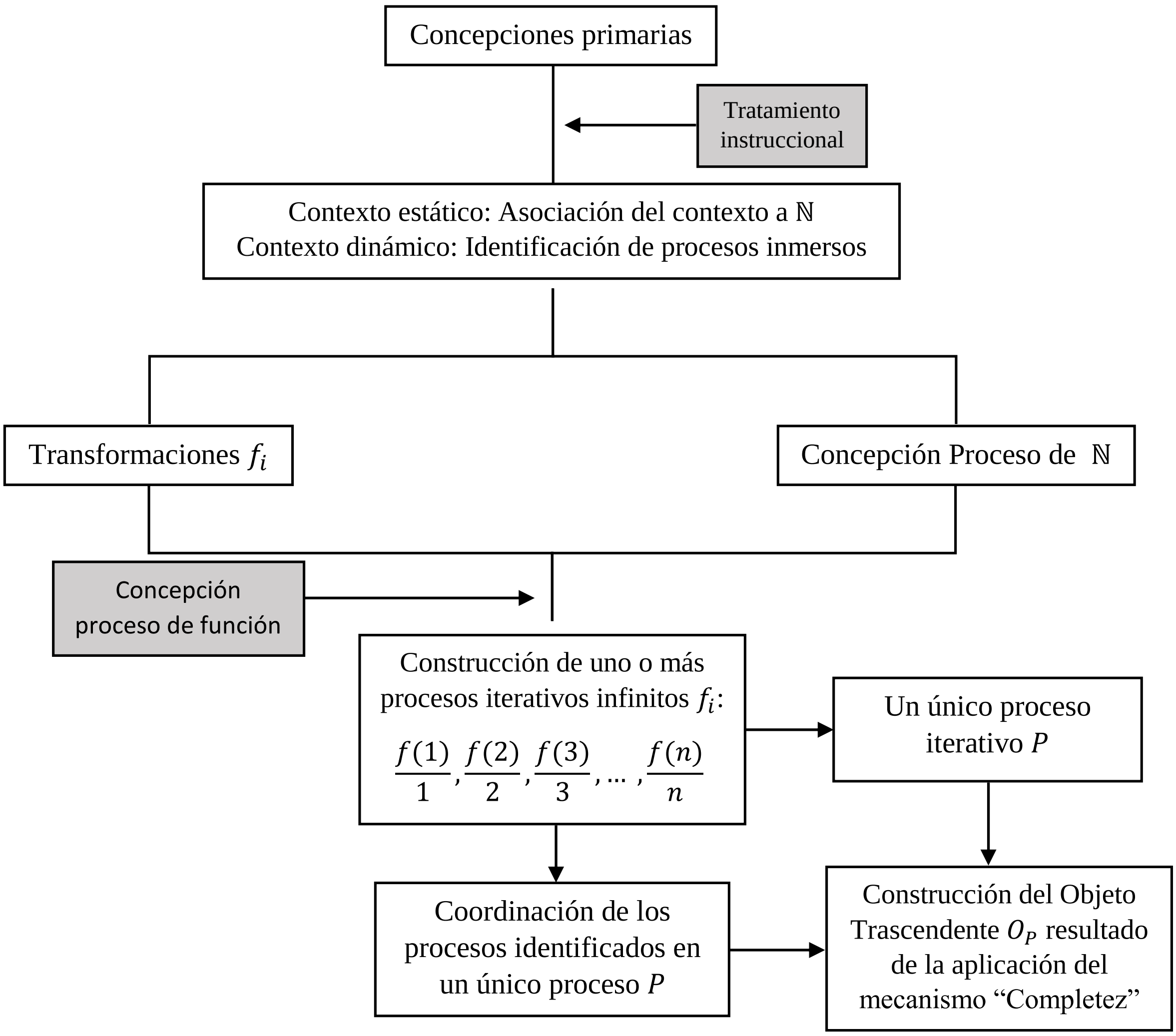
Consideramos que un individuo que tenga éxito en la coordinación de procesos de diferente naturaleza debe tener un conocimiento consciente de que la situación al límite de los procesos por individual lo llevará a encontrar expresiones que son problemáticas, ya que no es posible obtener un objeto a partir de dos procesos.

El mecanismo completez, igual que en el caso de la paradoja de Aquiles y la tortuga, está relacionado con la concepción del concepto de límite que tenga el individuo. Consideramos que es más fácil aceptar que el límite al infinito de un proceso iterativo es infinito, ya que el límite está definido como un proceso infinito que no es visto como un todo (Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas y Vidakovic, 1996); y a la "lemniscata" se le asocia también un sentido "dinámico", lo que puede respaldar la creencia que tenga un individuo de que el triángulo de Sierpinski es un objeto en construcción. Un individuo a pesar de que pueda plantear el límite del proceso iterativo infinito y determinar que es infinito, puede estar pensando en el triángulo de Sierpinski como una estructura dinámica.

5.3. DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA GENÉRICA DE INFINITO

Las descomposiciones genéticas preliminares que fueron diseñadas para los contextos específicos fueron altamente acertadas en la predicción del tipo de estructuras que desarrollaría un individuo al enfrentarse a un contexto particular. Consideramos que esto se debe a que planteamos el análisis preliminar haciendo uso de la descomposición genética genérica propuesta por Roa-Fuentes (2012; 2014). Esta descomposición genética permite sintetizar y relacionar los constructos teóricos que han sido propuestos para el estudio del infinito y adecuarlos al contexto de interés. Sin embargo, consideramos que la descomposición genética genérica no era muy explícita en contextos estáticos, donde el individuo debe poseer inicialmente una concepción objeto de infinito y asociarla al conjunto de los números naturales para volver al proceso. Por tal motivo hemos decidido agregar este importante paso que hace que la descomposición genética genérica tome más sentido en el caso de los dos contextos posibles de infinito (ver figura 23).

Figura 23. Descomposición genética genérica de infinito



Si el contexto de una situación a la que se enfrenta un individuo es estático, no podrá ver de manera evidente los procesos que dieron origen al objeto que propone la situación. Por tanto tendrá que identificar cómo se relaciona en contexto con el conjunto de los números naturales. Como mostramos en la descomposición genética refinada del hotel de Hilbert, esto podrá hacerlo si ha recibido una instrucción que lo acerque a algunos conceptos específicos de la teoría de conjuntos. Una vez esto ocurra, el individuo deberá usar su concepción proceso del conjunto de los números naturales y asociarla a una transformación que le permita empezar a construir nuevamente su concepción objeto de infinito a través de la construcción de procesos iterativos infinitos y del mecanismo de completez.

Nuestra investigación ha logrado mostrar evidencias de la existencia de un mecanismo que se relaciona directamente con el conocimiento consciente de algunos conceptos específicos de la teoría de conjuntos, Completez. La investigación que reportó las primeras evidencias (Roa-Fuentes, 2012), fue llevada a cabo en una población cuya instrucción matemática avanzada no era formal, por tal motivo pensamos que no fueron identificados contextos que relacionaran directamente el concepto de límite y la construcción del objeto que trasciende de un proceso iterativo infinito.

Entendemos la relación que existe entre la capacidad que tenga un individuo de ver el conjunto de los números naturales como un todo y la capacidad que tiene de ver el proceso de acercamiento infinito, explícito en la definición formal de límite, completo. A pesar de que consideramos que el concepto de límite no debe ser incluido en la caracterización del mecanismo de completez debido a que por sí sólo es un contexto del infinito (solucionar un límite es enfrentarse a la dualidad potencial y actual del infinito), sí debe incluirse la concepción objeto del conjunto de los números naturales que se hace necesaria para que el individuo pueda construir el límite como un objeto que trasciende del proceso de acercamiento infinito anteriormente mencionado. Muchas situaciones que involucran el infinito matemático se resumen en solucionar el problema del límite como un contexto del infinito, hemos evidenciado dos (la paradoja de Aquiles y la tortuga y la construcción del triángulo de Sierpinski) pero en general, todas las situaciones que involucran procesos iterativos infinitos. A continuación proponemos la caracterización del mecanismo de completez.

> ***Completez:*** Este es un mecanismo mental que le permite al individuo imaginar las características del objeto que trasciende de un proceso iterativo infinito. El establecimiento de este mecanismo requiere de una construcción consciente de elementos fundamentales relacionados con la teoría de conjuntos: la relación entre un conjunto infinito y sus subconjuntos propios, los conceptos de cardinal y ordinal y, la construcción de conjuntos infinitos con diferentes cardinalidades, específicamente, la construcción de una concepción objeto del conjunto de los números naturales. Estos elementos permiten la construcción de objetos que no se desprende de manera directa de un proceso. Este

mecanismo le permite a un individuo considerar la construcción de un objeto que no se parece a los estados del proceso iterativo asociado.

5.4. RECOMENDACIONES DIDÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Tal y como ha sido planteado, las descomposiciones genéticas pueden ser vistas como potentes herramientas pedagógicas que permitan determinar qué es necesario potenciar en el aula de tal manera que se propicie la construcción de un concepto o noción. A pesar de que en el estudio del infinito matemático no es posible establecer una única descomposición genética debido a que el infinito depende directamente del contexto que lo presenta, consideramos que los elementos fundamentales que han sido tomados en cuenta en la descomposición genética genérica (construcción de procesos iterativos infinitos, coordinación de procesos iterativos infinitos, análisis del proceso iterativo infinito en términos de su tendencia total, límites de sucesiones infinitas) deben ser abordados en la instrucción matemática que reciban los individuos desde etapas más tempranas que la universitaria. Familiarizar a los estudiantes de bachillerato con la construcción de procesos iterativos infinitos y con sus objetos trascendentes (valiéndose, por ejemplo, de la construcción de fractales a partir de procesos iterativos infinitos o de diferentes contextos que pueden ser abordados por los individuos de dicho nivel escolar) puede enfocarlos en la necesidad que se tiene de ver un proceso infinito, no en términos del último elemento, sino en su tendencia total. Además, las características propias de los conjuntos infinitos que llevan abordando desde el inicio de su vida académica, específicamente el conjunto de los números naturales, puede preparar el terreno para que el individuo enfrente las situaciones que involucran el infinito en matemáticas más formales.

Estas ideas deben confrontarse con lo que se ha ido establecido como concepciones sobre el infinito a través de la investigación. La construcción de herramientas para abordar situaciones matemáticas relacionadas con el infinito puede solventar el hecho de que las situaciones matemáticas relacionadas con el infinito se aborden de manera exclusiva con ideas primarias e intuitivas que se construyen en escenarios no escolares.

Los constructos teóricos que ofrece la teoría APOE para el estudio del infinito están siendo establecidos y respaldados a través de la investigación. Creemos que se debe hacer un especial énfasis en la forma en la que se coordinan los procesos infinitos, tanto en la construcción de procesos iterativos infinitos (coordinación de un proceso de iteración del conjunto de los números naturales con otro proceso) como en la coordinación de procesos con naturaleza diferente. En esta investigación hemos evidenciado que el mecanismo de coordinación debe ser motivado por la necesidad de ver una característica del objeto que trasciende del proceso y que requiere que el individuo esté consciente que, en el estado al infinito, ver los procesos de forma particular no le permitirá analizar la característica que desea estudiar. Sin embargo, es poco lo que se sabe de la coordinación de los procesos, de cómo específicamente se coordinan los procesos en la mente de un individuo y de qué herramientas pedagógicas pueden hacer que un individuo agudice su capacidad de coordinar procesos iterativos en cualquier contexto.

Como ya hemos mencionado, no obtuvimos evidencias de una estructura entre las estructuras proceso y objeto, *Totality* (Dubinsky et al., 2013) en el razonamiento de los estudiantes entrevistados. Hemos considerado que el contexto influye enormemente en la capacidad de identificar esta estructura. Tradicionalmente han sido dos características que se le atribuyen a la concepción objeto, la capacidad de ver el proceso como un todo y la capacidad de realizar acciones sobre ese todo. En el caso del contexto estudiado por Dubinsky y otros (2013), se pide a los individuos ver el proceso, adición de nueves en las cifras decimales, como terminado y aceptar que la totalidad de ese proceso es 1.

$$0,\overline{9} = 1$$

Además, debía realizar acciones sobre esa totalidad cuando se proponía encontrar la solución de la ecuación:

$$0,\overline{9} + x = 1$$

Los contextos usados en nuestra investigación piden analizar características puntuales sobre el objeto trascendente. Sin embargo para poder ser analizadas, el individuo construye un proceso iterativo infinito en términos de esa característica y responde su pregunta analizando el proceso al infinito, no realizando acciones específicas sobre la totalidad del proceso. En el caso de la construcción del triángulo de Sierpinski, se le pide al individuo determinar el perímetro de ese triángulo, por lo cual plantea un proceso iterativo infinito que le permite determinar el perímetro de los triángulos precedentes, el proceso iterativo coordinado es analizado al infinito y el resultado de ese análisis es el perímetro del triángulo de Sierpinski. El individuo no debe realizar acciones específicas sobre la totalidad del proceso iterativo infinito para determinar el perímetro de la figura a estudiar. Consideramos que es muy importante realizar investigaciones en las cuales se usen contextos donde el individuo sienta la necesidad de aplicar acciones sobre la totalidad del proceso iterativo infinito y buscar evidencias de que a pesar de que realmente vea el proceso como un todo eso no implica que pueda aplicar acciones sobre ese todo.

Planteamos la necesidad de seguir investigando y refinando los constructos considerados hasta ahora en nuestro estudio. Especialmente, estudios que logren analizar el impacto del mecanismo de completez en otros contextos particulares y con poblaciones de diferentes características.

En general, esperamos que los análisis mostrados en este trabajo de investigación propicien la reflexión de los miembros de nuestra comunidad sobre la importancia que ataña, a diversos campos de la Matemática y la Educación Matemática, la construcción del infinito. Además, la necesidad de seguir contribuyendo en hacer investigaciones que determinen de forma refinada los constructos teóricos ofrecidos por la Teoría APOE, con el fin de que ésta siga cumpliendo su capacidad predictiva. Y por tanto, se consolide como una herramienta robusta para diferentes miembros de la comunidad, particularmente en el desarrollo de modelos e instrumentos de clase que potencien la construcción exitosa del infinito actual en diversos contextos matemáticos.

BIBLIOGRAFÍA

Arnon, I. (1998). In the mind's eye: How children develop mathematical concepts—Extending Piaget's theory. Unpublished doctoral dissertation, School of Education, Haifa University.

Arnon, I., Nesher, P., & Nirenburg, R. (1999). What can be learnt about fractions only with computers. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 33–40). Haifa, Israel.

Arnon, I., Nesher, P., & Nirenburg, R. (2001). Where do fractions encounter their equivalents? Can this encounter take place in elementary school? International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6, 167–214.

Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). Apos theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Belmonte, J. (2009). Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad. Tesis de doctorado no publicada. España: Universidad de Salamanca.

Belmonte, J. y Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 14(2), 139-171.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function, *Educational Studies in Mathematics*, 23 (3), 247-285.

Brown, A., McDonald, M. & Weller, K. (2010). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 115-141.

Castro, I. y Pérez, J. (2007). Un paseo finito por lo infinito. El infinito en Matemáticas. Bogotá: Editorial Pontificia Universidad Javeriana.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15 (2), 167-192

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht:

Kluwer.
Dubinsky, E. (1994). A Theory and Practice of Learning College Mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), Mathematical Thinking and Problem Solving (pp. 22-247). Hillsdale, NJ: Erslbaum.
Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335-359.
Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 253–266.
Dubinsky, E., Weller, K., Stenger, K. & Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The Tennis Ball Problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1(1), 99-121
Dubinsky, E., Weller, K. & Arnon, I. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The Case of 0.999... and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*. 13(3).
Fischbein, E. (1978). Intuition and mathematical education. *Osnabrücker Schriften zür Mathematik* 1, 148–176.
Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10 (1), 491-512.
Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 23(48), 309-329.
Galilei, G. (1638). Dialogues Concerning Two New Sciences. New York: Dover Publications.
Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los estudiantes entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (2), 169–193.
García, J. (2003). Aquiles, la Tortuga y el infinito. *Revista de filosofía*, 28(2), 215-236.
Kuhn, T. (1970). The Structure of Scientic Revolutions (2nd ed.). Chicago: University of Chicago Press.
López, C. (2004). La intuición y la matemática. *Ciencia y tecnología*, 6, 29-36.
Malet, A. (1996). Remaking Indivisibles: Pascal, Barrow, Wallis. From Indivisibles to Infinitesimals (pp. 23-50), España: Universitat Autònoma de Barcelona.
Mamolo, A. & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education*, 10(2), 167-182.

Mayorca, B. (1986). Sopa de tortuga. *Revista Integración*, 4(1), 23-34.

Medina, A. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Tecné, episteme y didaxis: revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*, (9), 45-59.

Roa-Fuentes, S. (2012). El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas. Tesis de doctorado no publicada, CINVESTAV - IPN. México.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 199-232.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2014). El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas. *Educación Matemática*, 26(1), 73-101.

Sabogal, S. y Arenas, G. (2011). Una introducción a la geometría fractal. Publicaciones: Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Salat, R. (2011). El infinito en matemáticas. *Números*, 77, 75-83.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371 -397.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E. & Vidakovic, D. (2008). A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(1), 93-125.

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 1 1, 271 -284.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 199-238.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M. & Stenger, C. (2004). Intimations of Infinity. *Notices of the AMS*, 51(7), 741-750.