Razones Trigonométricas: exploraciones de un diseño que vincula aspectos históricos y atiende la Diversidad

Yorman Extiben Rey Gil y Pablo Iván Rivera León

Trabajo de Grado para Optar al Título de *Licenciados en Matemáticas*

Directora:

Sandra Evely Parada Rico

Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2025

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi familia, quienes con su esfuerzo, amor y sacrificio han permitido que cumplir este logro. Sin su apoyo incondicional, el camino que he recorrido habría sido difícil.

Agradecimientos

De Pablo: A la vida por brindarme buenas experiencias en este logro importante y permitirme darles aprecio a las matemáticas.

A mis padres: Pablo y Maribel por su amor, esfuerzo y sacrificio constante permitieron llevar a cabo este logro.

A mi tía Teresa quien fue mi confidente y consejera más preciada para darme fuerzas en cada momento de flaqueza.

A mis compañeros de estudio, por compartir este camino lleno de desafíos y aprendizajes, especialmente a Celin Libreros y Daniel León.

De Yorman: A mi familia: Fredy Rey Mora, Margarita Gil Duran, Clender Jhoan Casas Gil, Freddy Rey Gil y Alexis Rey Gil; gracias porque, así como las estrellas son incontables, así es el amor que nos tenemos. Sin su apoyo, no habría logrado llegar tan lejos; son mi impulso constante. Este logro no solo representa un paso importante en mi vida, sino que un apoyo y contribución a su futuro.

A mi novia: Jesica Amado Pérez, gracias por su cariño, paciencia y apoyo, incluso en los momentos más difíciles. Este logro también es tuyo, y siempre llevaré conmigo la fuerza que me brindaste para alcanzar esta meta.

A mi amigo de la infancia; Edwing León Palencia, gracias porque las buenas historias siempre se escriben en compañía de los mejores.

A mis amigos de la universidad: Jeyson Suarez, Elian Oliveros, Sofia Sánchez, Luisa Fernanda Rojas, Yurley Murillo, Carol Meneses, María Moreno, Oscar Hernández, Andrés Roa, Andrés Gonzales, y Jason Díaz. Gracias por las noches interminables de estudio (y de risas), los trabajos de última hora y los momentos que jamás olvidaremos. Ustedes hicieron que el camino fuera más llevadero, y sin duda, las anécdotas que compartimos valen mucho.

De Pablo y Yerman. A la profesora Sandra Evely, por su paciencia, orientación y valiosos consejos.

A los evaluadores: La profesora Edith Johanna y al profesor Jairo por sus gratos aportes para hacer mejor este trabajo. Especialmente agradecemos al profesor Jairo por sus constantes enseñanzas en virtud de formar buenos maestros que gusten de las matemáticas.

A la Universidad Industrial de Santander y a todos los docentes que contribuyeron a nuestra formación pedagógico, didáctica y matemática.

Gracias a cada persona, que de una u otra manera dejo huella en este emocionante proceso.

Tabla de contenido

Pág.

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Lista de Apéndices

Resumen

Título: Razones Trigonométricas: exploraciones de un diseño que vincula aspectos históricos y atiende la Diversidad*

Autores: Yorman Extiben Rey Gil (1) y Pablo Iván Rivera León (2)**

Palabras clave: Razones trigonométricas, Historia**,** Inclusión

Descripción:

En este documento se presenta una investigación cuyo objetivo fue identificar y describir alcances de un diseño didáctico propuesto por Rueda (2023) para el estudio de razones trigonométricas. Dicho diseño incorporó la historia de la trigonometría y estuvo orientado en atender la diversidad en bachillerato.

El trabajo se fundamentó en los aspectos teóricos que sustentan la construcción del diseño, incluyendo la historia y la epistemología de las razones trigonométricas, enfoques didácticos basados en la historia de las matemáticas, marcos curriculares y estrategias para atender la diversidad. En este último aspecto, se consideraron los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) con el fin de garantizar la accesibilidad y adaptabilidad del material educativo. La metodología empleada fue cualitativa y se desarrolló mediante un estudio exploratorio y descriptivo. La investigación se estructuró en ocho fases, cada una orientada a analizar diferentes dimensiones del diseño didáctico para la puesta en escena en un contexto escolar.

Finalmente, se presenta la valoración del diseño didáctico a partir de tres categorías que articulan el uso de la historia, siguiendo lo expuesto por Guacaneme (2016) y los principios del DUA. Estos elementos permitieron velar la pertinencia y eficacia del diseño en la enseñanza del as razones trigonométricas en contextos diversos.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemática. Director: Dra. Sandra Evely Parada Rico

Abstract

Tittle: Trigonometric Ratios : Explorations of a Disign That Links Historiacal Aspects and Attends to Diversity.*

Author(s): Yorman Extiben Rey Gil (1) y Pablo Iván Rivera León (2)**

K**eys words:** Trigonometric Ratios , History**,** Inclution.

Description:

The document presents a research study aimed at identifying and describing the scope of a didactic design proposed by Rueda (2023) for the study of trigonometric ratios. This design incorporated the history of trigonometry and focused on addressing diversity in high school education.

The study is based on theoretical aspects that supported the construction of the design, including the history and epistemology of trigonometric ratios, didactic approaches based on the history of mathematics, curricular frameworks, and strategies for addreasing diversity. In this regard, the principies of Universal Design for Learning (UDL) ere considered ton ensure the accessibility and adaptabily or educational materials

The methodology used was qualitative, employing an exploratory and descriptive study. The research was structured into eight phases, each aimed at analysing different dimensions of the didactic design for its implementation in a school context.

Finally, the evaluation of the didactic design is presented based on three categories that integrate the use of history, following the approach proposed by Guacaneme (2016), and the principles of UDL.These elements allowed for assessing the relevance and affectiveness or the design in the teaching trigonometric ratios in diverse contexts.

* Bachelor Thesis

** Science Faculty. Mathematics School. Bachelor’s degree in Mathematics. Director : Dra. Sandra Evely Parada Rico

1 Introducción y planteamiento del problema

El estudio y desarrollo de las matemáticas ha sido una constante desde las primeras civilizaciones, motivado por la necesidad de resolver problemas prácticos. Estos primeros avances no solo han perdurado a lo largo de los siglos, sino que también han conformado un lenguaje matemático fundamental que permite el desarrollo del pensamiento lógico, la precisión y una visión espacial ampliada de la realidad (Vaca y Armas, 2020). Este valor intrínseco del aprendizaje matemático es innegable, ya que permite a los estudiantes enfrentar y comprender el mundo desde una perspectiva crítica y reflexiva.

A pesar de la importancia de las matemáticas, su enseñanza ha estado marcada por enfoques tradicionales que priorizan el aprendizaje memorístico y mecánico, desconectando el conocimiento matemático de la realidad cotidiana y dejando a un lado el fundamento histórico y filosófico. Esto es particularmente problemático en áreas como la trigonometría, donde el enfoque algebraico y la manipulación de símbolos limita la contextualización de la enseñanza de las razones trigonométricas y la aplicación de estos conocimientos por parte de los estudiantes en situaciones prácticas y cotidianas (Fiallo, 2010).

De hecho, las investigaciones en Educación Matemática revelan diversas dificultades en la enseñanza de la trigonometría. Según Rodríguez y Sgrecia (2021), la enseñanza carece de problemas que relacionan diversas representaciones y un enfoque geométrico adecuado. Además, Téllez et al., (2021) afirman que existe una dependencia por parte de los docentes en usar los libros de texto que en ciertas ocasiones contienen problemas ilusorios y poco conectados con la realidad del estudiante, especialmente en lo que respecta a las razones trigonométricas.

Así los estudiantes que cursan bachillerato[1] quienes están en una etapa crucial de su formación académica, enfrentan el reto de comprender conceptos matemáticos más abstractos y complejos, como las razones trigonométricas, evidenciados en el MEN (2006) donde se sugiere que sean capaces de describir y modelar fenómenos vinculados a un contexto real; además, el MEN (2016) asegura que la finalidad es reconocer el significado de las razones trigonométricas, especialmente a lo que respecta a seno y coseno. Respecto al impacto formativo la enseñanza de la trigonometría y las razones trigonométricas permite el desarrollo del pensamiento abstracto y espacial (Torres, 2023), asimismo, según Imbaquingo et al. (2024) dispone herramientas valiosas para el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas, igualmente permite que los estudiantes comprendan la utilidad de la trigonometría y como se aplican sus principios en la vida real como en la arquitectura, ingeniería civil, astronomía, física, etc.

En estos grados escolares (10° y 11°), la preparación para la educación superior y la vida profesional requiere que los estudiantes dominen los conceptos teóricos y sean capaces de aplicar estos conocimientos. La importancia que tiene el aprendizaje de la trigonometría en los estudiantes radica en que esta se relaciona con cursos universitarios como el algebra lineal, cálculo diferencial e integral y ecuaciones diferenciales, a su vez, favorece el desarrollo de la creatividad, el pensamiento crítico, la argumentación y la resolución de problemas (Vitola, 2023). Sin embargo, la enseñanza tradicional de la trigonometría puede impedir que los estudiantes logren este objetivo.

En Colombia, según menciona el informe del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES, 2024) en las últimas pruebas internacionales del Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA) el promedio en matemáticas ha mostrado poco

[1] A bachillerato se hace referencia a la educación media que está conformada por los grados décimo y undécimo que culmina con el título de bachiller

cambio en las últimas evaluaciones, permaneciendo por debajo del promedio de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) que participan en la prueba. Este resultado es indicativo de que un gran número de estudiantes no logra superar los niveles básicos de complejidad en matemáticas, limitándose a resolver problemas sencillos sin conectarlos con la realidad o llegar a desarrollar habilidades críticas para enfrentar situaciones más complejas.

Por lo anterior, estas dificultades en el área de matemáticas no solo impactan en el aprendizaje de los estudiantes en general, sino que en particular también afectan a aquellos estudiantes con características particulares

La enseñanza de la trigonometría, con sus enfoques predominantemente abstractos y desvinculados de la realidad, puede resultar aún más desafiante para estudiantes que requieren adaptaciones específicas en su proceso de aprendizaje. La falta de estrategias inclusivas en este ámbito no solo limita el acceso a la comprensión matemática, sino que también exacerba las desigualdades educativas existentes.

El concepto de inclusión educativa gana relevancia, destacando la necesidad de adaptar el currículo y las estrategias de enseñanza para atender a estudiantes con diversas necesidades educativas. Sin embargo, con la anterior discusión hemos expuesto que la realidad en las aulas colombianas muestra una desconexión entre las políticas de inclusión y la práctica educativa, especialmente en la enseñanza de matemáticas.

Es así como, el Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) emerge como una herramienta clave para abordar esta diversidad. Según Velasco (2022), el DUA propone centrar la inclusión no en las limitaciones individuales, sino en la adecuación de los materiales, recursos y diseños curriculares. Esto permite una atención particular a las necesidades de cada estudiante, favoreciendo su participación plena en el proceso educativo.

Esta investigación se basa en el diseño didáctico propuesto por Rueda (2023), que fue desarrollado como parte del proyecto financiado por el gobierno colombiano a través de MINCIENCIAS, titulado "Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro". Este diseño se centra en el estudio de las razones trigonométricas con el uso de la historia y la epistemología en estudiantes de grado décimo, atendiendo a sus características particulares de aprendizaje. Siguiendo, también la propuesta de Parada (2022), que aboga por una estructura curricular basada en un contexto inclusivo con diferentes niveles de profundidad buscando potenciar el aprendizaje en aulas diversas, asegurando que todos los estudiantes, independientemente de sus características particulares, puedan acceder y beneficiarse de la enseñanza de la trigonometría.

Así que, para esta investigación se pregunta ¿Q*ué alcances proporciona un diseño sobre razones trigonométricas que vincula aspectos históricos y atiende la Diversidad*? Para responder a la pregunta se plantea el objetivo: *Identificar y describir alcances de un diseño para el estudio de razones trigonométricas que vincula aspectos históricos y atiende la Diversidad.*

El documento se estructurará de la siguiente manera: primero, se expondrán los antecedentes que abarcan aspectos competentes del objeto de estudio, sobre la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas, y aspectos legales sobre la educación inclusiva respecto a avances históricos de la evolución del término inclusión con las implicaciones normativas. Además de relacionar porque deben coexistir el objeto de estudio con la diversidad como evidencia de un acercamiento de atención particular en el aula. En segundo lugar, se definen aspectos referenciales y conceptuales que guían la investigación desde tres visiones, históricos-epistemológicos, curriculares, didácticos de las razones trigonométricas y atención a la diversidad.

En tercer lugar, se presentan los aspectos metodológicos que guían la investigación. En cuarto lugar, la valoración de los resultados. Y por último las conclusiones.

2 Antecedentes

En este apartado se muestra estudios encontrados que permitieron comprender el problema de estudio, para efectos del documento se organizó de la siguiente manera: I) Aspectos sobre la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas, II) Aspectos legales sobre la educación inclusiva y III) Educación matemática y atención a la diversidad.

2.1 Enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas

A continuación, se exponen investigaciones hechas desde la Educación Matemática a nivel internacional y nacional en torno a la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría y las razones trigonométricas.

La enseñanza de las razones trigonométricas ha sido objeto de varias investigaciones desde la Educación Matemática por su importancia en la formación de los estudiantes. Desde una perspectiva pedagógica, se ha identificado que los métodos tradicionales de enseñanza sobre la trigonometría se enfocan en la memorización, uso de fórmulas y descontextualización con la realidad, nada exitosos para asegurar un aprendizaje significativo. Ibañes y Ortega (1998) destacaron que los libros de texto carecen de estrategias adecuadas para enseñar trigonometría, limitando el desarrollo del pensamiento crítico en los estudiantes. Asimismo, Fiallo (2010) afirma que predomina un enfoque algebraico en la enseñanza de esta asignatura, la cual se centra en la manipulación de símbolos, operaciones, propiedades y fórmulas sin profundizar en la comprensión de los conceptos. Investigaciones posteriores como las de Montiel (2013) y Rodríguez y Sgrecia (2021) han confirmado que este planteamiento carece de las distintas representaciones, enfoque geométrico y problemas contextualizados. Además, una dificultad, problematizada en la investigación de Téllez et al. (2021) sostiene que algunos maestros caen en la dependencia del uso de problemas de los libros de texto de trigonometría que son ilusorios y poco cercanos a la realidad del estudiante, lo que puede perjudicar el aprendizaje de ellos.

Las dificultades en el aprendizaje también han sido un tema recurrente en la investigación. Brown (2006) señala que muchos estudiantes tienen una comprensión fragmentada de conceptos fundamentales como el seno y el coseno. Herrera (2013) y Gómez (2013) destacan la importancia de los procesos de abstracción en la enseñanza de la trigonometría, ya que estos permiten la generalización de conceptos y propiedades. Aray et al. (2020) advierten que la enseñanza superficial de la trigonometría en los niveles básicos lleva a deficiencias que afectan el rendimiento en cursos más avanzados, como el cálculo.

Con respecto a los materiales didácticos, Vitola (2019) realizó una revisión documental en la que destacó deficiencias conceptuales, pedagógicas y de uso de tecnología por parte del docente. Villamarín y Gualán (2024) desarrollaron una guía didáctica con un enfoque constructivista, argumentando que el uso limitado de tecnologías digitales contribuye a un aprendizaje poco motivador. No obstante, en los últimos años se han propuesto enfoques didácticos más interactivos y tecnológicos. Fiallo (2010) presentó una propuesta de enseñanza-aprendizaje de las razones trigonométricas basada en cuatro ejes: conceptual, curricular, metodológico y formativo vinculados con uso de Software de Geometría dinámica para enseñar las razones trigonométricas. Gutiérrez (2016), Arango (2017), Cardona (2017), Chilito (2021) y más recientemente Nolivos y Moreira (2023) sugieren que herramientas como GeoGebra, WhatsApp y Moodle, así como el uso de las TIC en general, mejoran los procesos de enseñanza-aprendizaje, al facilitar la interacción y la reflexión sobre los conceptos.

Por último, algunos investigadores han centrado su atención en la historia y epistemología de las razones trigonométricas. Montiel (2017), Albonia y Miranda (2017), Álvarez (2018) y Gutiérrez (2019) han desarrollado secuencias didácticas basadas en estos enfoques que según los autores posibilita una gama de oportunidades y momentos para llevar el contenido al aula, además permite que los estudiantes puedan comprender a profundidad los conceptos y desarrollen situaciones de naturaleza práctica. De igual forma, González y Mendoza (2018) subrayan la importancia de incluir la historia de la trigonometría en los libros de texto para conectar el aprendizaje con problemas reales que han sido resueltos a lo largo de la historia, mejorando la motivación y el interés de los estudiantes.

Por lo anterior, en esta investigación se reconoce uso de las herramientas tecnológicas, especialmente GeoGebra porque permite una gama de posibilidades de interacción para el desarrollo de nociones, permitiendo comprender el concepto de las razones trigonométricas. También, se destaca que el uso de la historia y epistemología es una herramienta didáctica que favorece la motivación y comprensión por parte de los estudiantes.

Culminada la anterior problematización, se cede el paso a los aspectos legales vinculados a la inclusión y diversidad en el contexto nacional e internacional.

2.2 Aspectos legales sobre la educación inclusiva

Estos aspectos son fundamentados en diversas normativas que garantizan el derecho a la educación para todos los estudiantes, especialmente aquellos con Necesidades Educativas Particulares (NEP). A nivel internacional, la Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad y la Declaración de Salamanca enfatizan la necesidad de adaptar las prácticas educativas y el currículo para asegurar la participación plena de todos los alumnos (Naciones Unidas, 2019). En el contexto colombiano, la Ley Estatutaria 1618 de 2013 establece que el Estado debe garantizar el acceso y la permanencia de las personas con discapacidad en el sistema educativo, promoviendo su inclusión en entornos regulares, lo que es esencial para reducir las brechas educativas. Estos marcos legales no solo abogan por la igualdad de oportunidades, sino que también exigen la implementación de políticas y programas que apoyen a los docentes en la creación de ambientes de aprendizaje inclusivos.

2.2.1 Orientaciones Internacionales

Desde una perspectiva cronológica, la Declaración Universal de los Derechos Humanos establece en su artículo 26 el derecho de toda persona a la educación. Este documento fue el primero en reconocer la educación como un derecho fundamental para todos, sin discriminación. A lo largo de las décadas, otros acuerdos internacionales han reafirmado esta postura, incluyendo la Declaración Mundial de Educación para Todos (1990), que subraya la importancia de satisfacer las necesidades básicas de aprendizaje para garantizar la participación de todos los individuos en la sociedad.

Entre las principales normativas internacionales en torno a la educación, se encuentran la Declaración de Salamanca y su Marco de Acción (1994), así como los acuerdos adoptados en el Foro Mundial sobre Educación en Dakar (2000). Estos documentos establecen que la educación no solo debe ser accesible, sino que también debe estar diseñada para ser inclusiva adaptándose a la diversidad. Cabe resaltar que inicialmente la inclusión se centraba en la integración de estudiantes con discapacidades o NEP, sin embargo, con el tiempo, el concepto se ha ampliado para incluir a estudiantes con distintas características, como dificultades socioeconómicas, étnicas, o lingüísticas. En este sentido, la UNESCO ha sido un actor clave en promover la educación inclusiva, enfatizando que la diversidad debe ser vista como una fortaleza en lugar de un desafío. De igual manera, el Comité de los Derechos de Personas con Discapacidad propone una reforma sistémica para garantizar que los métodos de enseñanza, estructuras y contenidos educativos sean adaptables a las necesidades de todos los estudiantes (Naciones Unidas, 2019).

Por todo lo anterior, la inclusión educativa no se limita simplemente a la inserción de estudiantes con necesidades en aulas tradicionales, sino que implica cambios profundos en las prácticas educativas para ofrecer un ambiente igualitario y participativo, donde se vinculan estrategias como la capacitación docente y la implementación de enfoques flexibles que respeten los diferentes ritmos y estilos de aprendizaje.

2.2.2 Orientaciones Nacionales

En el ámbito nacional, la Constitución Política de Colombia establece en su artículo 67 el derecho fundamental a la educación, que debe estar al alcance de todos sin discriminación alguna. Este principio ha sido reforzado por la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994), que en sus artículos 46 y 49 menciona la inclusión de personas con limitaciones físicas, sensoriales, cognoscitivas y emocionales, así como de aquellos con capacidades o talentos excepcionales, dentro del sistema educativo. Estos documentos subrayan la importancia de garantizar una educación de calidad que respete las características y procesos de aprendizaje de cada estudiante.

La Ley Estatutaria 1618 de 2013, establece las disposiciones para garantizar el pleno ejercicio de los derechos de las personas con discapacidad buscando eliminar los obstáculos que impiden la participación en la sociedad. Además, refuerza el compromiso y responsabilidad del Estado colombiano con la inclusión educativa y exige una formación especializada a los docentes para que puedan atender adecuadamente a estudiantes con NEP. Acorde con el Decreto 1421 de 2017 fija que las instituciones educativas deben adoptar el DUA como marco pedagógico que promueve la inclusión al ofrecer múltiples formas de representación, expresión y compromiso para la enseñanza inclusiva. Además, introduce el Plan Individual de Ajustes Razonables (PIAR), que se implementa cuando los estudiantes no logran progresar adecuadamente. Esto no solo beneficia a los estudiantes con necesidades particulares, sino que también fomenta un entorno de aprendizaje más equitativo y accesible que permite la oportunidad de alcanzar el máximo potencial (Morocho, 2020).

A la postre, el MEN (2017) define el término NEP para referirse a la población con discapacidades auditivas, visuales, motoras, cognitivas, características de experto autista, entre otras, y aquellos con capacidades excepcionales. No obstante, en la ley 2216 del 2022 establece que es una definición en construcción capaz de incorporar instituciones públicas responsables de la continuidad, garantizando el proceso educativo bajo orientaciones y directrices por la entidad competente. Este planteamiento establecido, guía la atención educativa en Colombia, asegurando que las políticas de inclusión no solo contemplen la presencia de estos estudiantes en las aulas, sino que también garanticen un ambiente de aprendizaje adecuado y adaptado a sus necesidades.

A pesar de estos avances, el desafío de formar docentes con las competencias necesarias para atender la diversidad sigue siendo una tarea pendiente en muchas instituciones educativas del país.

A continuación, se ilustran investigaciones que relacionan la Educación Matemática, la trigonometría y la atención a la diversidad.

2.3 Educación Matemática y Atención a la Diversidad

En la búsqueda bibliográfica se ha atisbado que existe poca literatura donde relacionen la atención a la diversidad y la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, especialmente a lo que respecta a razones trigonométricas.

Por su parte, Gómez (2013) y Pérez (2014) centran sus investigaciones en fortalecer y desarrollar nociones sobre el aprendizaje de la trigonometría en estudiantes con discapacidades visuales, a partir de secuencias didácticas adaptadas a las características de la población de estudio como graficas de alto y bajo relieve, objetos tangibles y artefactos virtuales. En los trabajos se concluye que a pesar de la discapacidad visual los estudiantes comprenden el contenido de la trigonometría y en las tareas pueden dar valores a las funciones trigonométricas y sus inversas; realiza graficas apoyada con el alto y bajo relieve y hallan las razones trigonométricas usando tablas con braille.

Desde la Educación Matemática y la inclusión se reporta trabajos desde un ámbito internacional y nacional como los siguientes:

Anouxét et al. (2019), presentan una investigación sobre inclusión en la educación superior en Argentina. En esta definen un proyecto en el que consolidan un equipo de trabajo para identificar aquellas barreras y discutir soluciones respecto a la formación de personas sordas en cursos de matemáticas. A partir de un caso de estudio identificaron escaso uso de material visual, de lenguaje coloquial o incluso conjuntista; falta de coordinación entre horarios por parte de la universidad a estudiantes que necesitan apoyo complementario y practicas inadecuadas de los profesores para permitir la interpretación de la información en las clases. Así como, en un plano de académico de bachillerato Ruiz da Silva et al. (2020) en su estudio documental expone que existen factores que interfieren en este proceso como la capacitación de los profesores de matemáticas en lenguaje de señas y la falta de ambientes accesibles a las características de los estudiantes sordos.

En Colombia, desde la Universidad Industrial de Santander se ha llevado a cabo el proyecto anteriormente mencionado "Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro", presentado como (Diseños didácticos para la atención a la diversidad en clase de matemáticas con la medición de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores, con código 8042 de la VIE). Este tiene el objetivo de presentar diseños didácticos en matemáticas que logren un aprendizaje teniendo en cuenta las características particulares de los estudiantes en educación básica media y bachillerato.

Articulado con este proyecto se encuentran las tesis de pregrado como la de Rueda (2023), Delgado (2023), Muñoz (2023), Galvis-Hernández (2024), Murallas (2024) y Méndez (2024) que se centran en diseñar, analizar y adaptar o presentar criterios que permitan evaluar los diseños didácticos atendiendo a la diversidad, ya sea para el estudio de fracciones, secuencias y patrones, funciones lineales o razones trigonométricas.

3 Marco Conceptual y de Referencia

Inicialmente se presenta una breve referencia de los aspectos teóricos considerados en la construcción del diseño didáctico que se exploró en la investigación aquí reportada. Posteriormente, se exponen los elementos del DUA que se usan como herramienta teórica para responder a la pregunta de investigación, específicamente en lo referente a la atención a la diversidad.

3.1 Aspectos teóricos del diseño didáctico "¿Cómo medir las sombras?"

A continuación, se expondrán aquellos aspectos que se tuvieron en cuanta en la secuencia didáctica que se puso en escena en un contexto educativo. En primer lugar, se presenta brevemente el surgimiento y evolución que ha tenido la trigonometría especialmente las razones trigonométricas y cuestiones didácticas vinculados a la Historia de las Matemáticas. Por último, se describirá aquellos aspectos curriculares asociados al estudio de las razones trigonométricas.

3.1.1 Aspectos históricos y epistemológicos

Para comprender como surgieron las razones trigonométricas, fue necesario ver cómo surgió la trigonometría misma. Según Montiel (2005) la historia de la trigonometría es dividida en dos momentos claves, como uso práctico y como fundamento teórico.

Este primer momento se agradece a las primeras civilizaciones con un alto desarrollo cultural como la egipcia y babilónica que realizaban actividades (la medición de terrenos y la astronomía con la intención de potenciar la agricultura), donde surgían problemas y sentían la necesidad de resolverlos. Asimismo, Machuca (2015) afirma que la trigonometría surgió como medio para satisfacer las necesidades de las investigaciones astronómicas que no eran estrictamente matemáticas. Sin embargo, en la civilización babilónica en las tablillas de Plimpton (1.800 a. C. aproximadamente) se exponen cálculo en torno a ternas pitagóricas, es decir, que ya hacían uso de lo que llamamos catetos e hipotenusa a partir de un triángulo rectángulo. Lo anterior evidencia que los babilonios hacían uso de una proto-trigonometría con fines prácticos para el cálculo de la posición de los cuerpos celestes y el tiempo, los calendarios y en el uso de la navegación (Abonia y Miranda, 2017).

Otro interés está en el papiro de Rhind (1.700 a. C. aproximadamente) donde los egipcios realizaron actividades matemáticas en torno a mediciones y cálculos de áreas de figuras geométricas. Este documento contiene los cálculos necesarios para construir pirámides y monumentos haciendo uso de una teoría de triángulos semejantes y trigonometría en general (Abonia y Miranda, 2017). Del mismo modo, Boyer (1986) explica que los egipcios para la construcción de las pirámides presentaban un problema esencial que era mantener la pendiente uniforme en cada cara y la misma en las cuatro, se cree que esto permitió el surgimiento del concepto de cotangente.

La necesidad de precisar los cálculos astronómicos hechos por los egipcios y babilonios hizo que los griegos formaran parte del desarrollo de la trigonometría. Por ejemplo, Tales de Mileto (624-547 a. C.) influenciado por los conocimientos anteriores a su época, fue el primer griego en introducir la geometría y desarrollar ideas en torno a los triángulos y sus ángulos. Este personaje según cuenta Abonia y Miranda (2017) introduce el concepto de razón y ángulo que conocemos actualmente al comparar la sombra que proyectaba su altura con la de un gnomon[2] de altura conocida y uso de semejanza de triángulos para calcular la altura de la pirámide de Keops.

Posteriormente a Tales el desarrollo de la trigonometría se centra en aspectos astronómicos. Aristarco (310-330 a. C.) fue el primero en hallar la distancia entre la Tierra-Luna-Sol y estimar sus proporciones entre tamaños al hacer uso de geometría y conceptos trigonométricos, afirmando que la distancia Sol-Tierra era más grande que la distancia Tierra-Luna y por tanto sus tamaños eran diferentes (Montiel, 2005). Eratóstenes de Cirene (276-194 a. C. aproximadamente) al observar un fenómeno peculiar que sucedía a medio día en un pozo en Siena en el que los rayos del sol caían paralelamente y los objetos en ese lugar no proyectaban sombra, así descubriendo que ese mismo día en Alejandría que si lo hacían; con esto pudo deducir con construcciones geométricas y conceptos de trigonometría la circunferencia de la Tierra.

Abonia y Miranda (2017) señalan que Hiparco de Nicea (190-120 a. C. aproximadamente) se le conoce el padre de la trigonometría al dedicar su vida a las observaciones astronómicas, tabulando los valores usando las relaciones entre ángulos y cuerdas de un triángulo inscrito en una circunferencia. Posteriormente, Ptolomeo (100-170 d. C.) retoma las observaciones de Hiparco y escribe su celebre documento el *Almagesto* donde se describía aspectos astronómicos y cálculos

[2] Instrumento para calcular la hora a partir de la sombra que proyecta un objeto

de longitudes desconocidas en un triángulo a partir de las conocidas, además desarrolla casi en su totalidad la trigonometría que conocemos actualmente.

> Ptolomeo incorporó en su gran libro de astronomía, el "Almagesto", una tabla de cuerdas con incrementos angulares de 1°, desde 0° a 180°, con un error menor que 1/3.600 de unidad. También explicó su método para compilar esta tabla de cuerdas, y a lo largo del libro dio bastantes ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos (Machuca, 2015, p. 62).

Con el declive de Imperio Romano los centros del conocimiento y la investigación matemática pasaron a la india y luego a oriente próximo. Los hindúes desarrollaron tratados astronómicos basados en los aportes de las civilizaciones griega, egipcia y babilónica; además a diferencia de los griegos los hindúes definieron la semicurada correspondiente a un ángulo doble, que coloquialmente conocemos como seno (Montiel, 2005).

Según Machuca (2015) con la cultura árabe la trigonometría se independiza de la astronomía y se convierte en una rama independiente. Los árabes introducen los seis tazones trigonométricos que conocemos y descubren teoremas e identidades entorno a ellas dejando a un lado las relaciones entre cuerda y ángulos que los griegos hacían y simplificando los cálculos al considerar el radio como unidad y no el 60 de los griegos. Asimismo, estos compilaron tablas de gran exactitud con cada una de las razones trigonométricas.

Por último, la trigonometría y las razones trigonométricas se formalizan en Europa tomando todos los conocimientos hasta entonces descubiertos en este campo. Aquí se introduce la palabra trigonometría, además se relaciona las magnitudes de un triángulo rectángulo para definir seno, coseno y tangente. Fue el célebre Euler (1707-1783) quien fundó la trigonometría moderna al designar las letras a, b y c a los lados de un triángulo y las mayúsculas A, B y C para los ángulos opuestos (Montiel, 2005 y Machuca, 2015). La trigonometría después del renacimiento deja a un lado la escancia geométrica y pasa a un plano más abstracto al definirse el lenguaje algebraico y las funciones.

Todo el recorrido anterior permitió evidenciar el cambio evolutivo que los objetos matemáticos tiene a través de la historia, en especial la trigonometría que empieza con las primeras civilizaciones y culmina en el último milenio.

3.1.2 Aspectos didácticos sobre la Historia de la Matemática

Para los fines de la investigación se refieren aquellos aportes hechos por Guacaneme (2016) sobre las tres formas en las que intervine la Historia de las Matemáticas en el proceso de enseñanza:

a) La Historia de las Matemáticas como uso, se refiere a hacer descripción de anécdotas, referencias sucesos históricos, mención de contribuciones de matemáticos y sus obras celebres. Esta forma de intervenir la Historia de las Matemáticas se relaciona con proporcionar problemas de índole histórico, ya sea para enseñar o estudiar maneras distintas de darle solución a la situación. Asimismo, puede llevarse a cabo como apoyo para la lección o incluso como la lección misma. Por último, las actividades planteadas pueden relacionarse con aportes de matemáticos y algunas de sus obras.

b) La Historia de las Matemáticas como integrador, Integración para Guacaneme (2016) refiere a la efectividad y el papel que su cita el uso de la Historia de las Matemáticas en la matemática misma. De esta manera, no puede verse como contenido de añadidura a la clase, sino como parte fundamental del profeso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, la historia permite identificar y comprender aquellas dificultades epistemológicas que surgen en la construcción y comprensión de los conceptos.

c) La Historia de las Matemáticas como perneador, en la educación de las matemáticas cuando se hace uso de información histórica para orientar la estructuración de propuesta curriculares. Guacaneme (2026) menciona que una dimensión histórica es aquella que permea la educación en matemáticas por medio de la historia. Esta forma de intervención es un recurso trasversal que enriquece el aprendizaje de las matemáticas lo que permite la conexión entre ideas matemáticas o fuera de ellas, comprender los orígenes de conceptos matemáticos en ciertos contextos y su evolución a través del tiempo.

De las tres formas en las que intervine la Historia de las Matemáticas en el proceso de enseñanza según Guacaneme (2016), en este trabajo se define una inclinación sobre el uso, misma que se articula con los principios y las pautas del DUA, para cumplir con el objetivo de la investigación.

3.1.3 Aspectos curriculares

En Colombia, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas definidos por el MEN (2006) establecen que los estudiantes de grado decimo y undécimo deben ser capaces de describir y modelar fenómenos vinculados a un contexto real a partir de las relaciones y las funciones trigonométricas. De igual manera, en los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) se indica para el grado decimo que los estudiantes deben comprender y utilizar funciones para construir modelos matemáticos de fenómenos periódicos e identificar sus aplicaciones, resolver problemas y justificar las soluciones; además de reconocer el significado de las razones trigonométricas y hallar valores en torno a estas, especialmente a lo que respecta a seno y coseno.

Así que, la implementación de estos estándares en el aula no solo busca que los estudiantes adquieran habilidades matemáticas, sino que también fomenta un pensamiento crítico y analítico. Al modelar situaciones del mundo real con funciones trigonométricas, los estudiantes desarrollan la capacidad de interpretar datos y formular soluciones a problemas complejos, lo que es crucial en un mundo cada vez más basado en la tecnología y la ciencia

3.2 Aspectos referentes a la atención a la diversidad

El Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) ofrece una perspectiva innovadora para la educación inclusiva, ya que no se centra en las limitaciones del estudiante, sino que dirige su atención hacia los materiales, recursos, medios y diseños curriculares, transformando la manera en que la educación aborda la diversidad. En esta investigación se toman como referentes teóricos a Morocho (2020) y Velasco (2022) porque manifiestan que la perspectiva del DUA puede aplicarse a cualquier componente del currículo, buscando crear un entorno de aprendizaje accesible para todos, eliminando las barreras que impiden el acceso equitativo a los contenidos educativos.

En el contexto de la enseñanza de las matemáticas, el DUA se implementa mediante el uso de diversas representaciones y estrategias, que a continuación se perfilan, permitiendo a los estudiantes percibir y comprender los conceptos de manera más efectiva

Principio I: Proporcionar múltiples formas de representación de la información y los contenidos

Para este principio la premisa fundamental es que los estudiantes perciben y comprenden la información de manera distinta. Este se estructura de tres pautas del DUA que son clave para los procesos anteriormente mencionados: (1) ofrecer diferentes opciones para que el estudiante perciba la información con el propósito de hacer accesible los contenidos mediante estrategias como ajustar el tamaño de letra, incluir subtítulos, utilizar diagramas, gráficos, modelos tridimensionales o convertir texto en formato braille o audio.; (2) usar distintas formas de lenguaje y símbolos matemáticos con la búsqueda que los estudiantes interpreten los sistemas lingüísticos y simbólicos de manera efectiva, promoviendo un lenguaje común; y (3) proporcionar opciones para la comprensión de los objetos matemáticos con el objetivo de proponer herramientas que faciliten la adquisición de nuevos conocimientos, como organizadores gráficos, ejemplos y explicaciones progresivas, relacionando conceptos nuevos con conocimientos previos, como conectar eventos históricos con situaciones actuales. Estas pautas promueven una enseñanza flexible, adaptada a las diversas formas en que los estudiantes interactúan con las matemáticas.

El principio II: Proporcionar múltiples formas de acción y expresión reconociendo que los estudiantes tienen diferentes maneras de actuar y expresar conocimientos, lo que implica ofrecer diversas formas interacción con el contenido y con los demás. Asimismo, busca fomentar participación a partir de utilizar herramientas y estrategias que se adapten a sus necesidades. Por ende, la pauta (4) proporcionar múltiples medios físicos de acción, implica ofrecer variado formas físicas de interacción con los materiales y en el entorno, como el uso instrumentos adaptados, dispositivos tecnológicos o materiales manipulativos que faciliten el aprendizaje a través de la acción física, es decir, permite a los estudiantes utilizar diferentes herramientas y recursos para interactuar con el contenido y el entorno. La pauta (5) enfatiza la necesidad de ofrecer opciones variadas para la expresión y la comunicación fluida, facilitando que los estudiantes puedan demostrar su conocimiento de diversas maneras, buscando que los estudiantes se sientan cómodos al compartir su pensamiento y soluciones. Ya que, la visión es que los estudiantes elijan la forma en que expresan sus ideas, ya sea a través de la escritura, el dibujo, habla o medios digitales.

Finalmente, la Pauta (6) subraya la importancia de proporcionar opciones para apoyar las funciones ejecutivas, ayudando a los estudiantes a organizar, planificar y ejecutar sus tareas de manera efectiva. De hecho, centrada en ayudar al desarrollo de habilidades de autorregulación para la toma de decisiones.

Durante la implementación del DUA en matemáticas, los docentes negocian significados en relación con las pautas del principio III: proporcionar opciones para la compresión, que se enfoca en la implicación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, es decir, la razón de aprender y en las emociones del estudiante. Aquí, reconocen que los estudiantes tienen diferentes intereses desde lo novedoso y lo tradicional, por ende, invita a comprender aspectos emocionales para fomentar una motivación duradera. Estas pautas incluyen: (7) brindar opciones para captar el interés, sugiriendo estrategias para desarrollar habilidades de toma de decisiones, reducir la inseguridad y distracción. Además, rastrea que se involucran los estudiantes empleando métodos que despierten curiosidad. La pauta (8) establece que se debe ofrecer alternativas para mantener el esfuerzo y la persistencia, destacando la importancia de presentar metas y tareas ajustadas al nivel de complejidad de las actividades según las capacidades individuales, reconociendo que los estudiantes tienen diferentes ritmos de aprendizaje, influenciados por diversas habilidades cognitivas, emocionales y físicas. Y las pautas de este principio finalizan con la (9) proporcionar opciones para la autorregulación, a partir de diversas estrategias, como la personalización de metas y la adaptación de los tiempos según las necesidades individuales, buscando que los estudiantes se involucren activamente en su propio aprendizaje con la finalidad que tomen el control de su proceso educativo. Al integrar estas pautas en las clases de matemáticas, los profesores fomentan una mayor participación y motivación en los estudiantes, independientemente de sus necesidades particulares.

Ejemplificar en matemáticas es una estrategia esencial, como destacan Figueiredo, Contreras y Blanco (2012), ya que permite una comprensión más amplia y clara de los conceptos matemáticos. Los ejemplos constituyen la base para la generalización y la abstracción, lo que facilita el razonamiento analógico y la construcción de nuevos conocimientos. En el contexto del DUA, proporcionar múltiples ejemplos y formas de representación es fundamental para garantizar que todos los estudiantes puedan transformar la información percibida en conocimiento útil.

A pesar de los avances en la implementación de enfoques inclusivos como el DUA, el currículo de matemáticas enfrenta una contradicción. Aunque se habla de inclusión y atención a la diversidad, los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional aún priorizan estándares de competencias que no contemplan de manera explícita la atención particular en el aula. Esto refleja una desconexión entre el discurso inclusivo y las prácticas concretas en la enseñanza de las matemáticas, lo que evidencia la necesidad de seguir desarrollando estrategias para abordar la diversidad en el aula de manera más efectiva. De esta manera, Parada (2022) define una estructura curricular para la construcción de diseños didácticos en matemáticas basados en un contexto inclusivo con diferentes niveles de profundidad buscando potenciar el aprendizaje en aulas diversas. Por tanto, se definirá en que consiste cada nivel de profundidad según Parada (2022) y Jácome et al. (2024):

1. Diseño de profundidad 1: Diseño que mediante el tratamiento de situaciones y necesidades cotidianas usa representaciones concretas que permiten evidenciar atributos de los números y de las formas con instrucciones sencillas, poco texto, contenido visual, auditivo y de manipulación de material, proporcionando múltiples formas de acción y expresión como el uso de palabras claves mediante texto alternativo para activar la percepción auditiva, visual y táctil de los estudiantes .Además sugerir el acompañamiento permanente

del profesor para hacer conexiones, posibilitar el trabajo colaborativo con pares y de socialización permanente de avances frente al grupo.

2. Diseño de profundidad 2: Diseño que mediante el tratamiento de situaciones y necesidades cotidianas prioriza actividades de resolución de problemas que implican la interpretación de información presentada de forma verbal con texto moderado, numérica o gráfica, mediante material visual, auditivo y concreto. Además de sugiere el acompañamiento del profesor para valorar el paso a paso y dar nuevas instrucciones hasta el logro del propósito previsto, posiblemente en trabajo colaborativo con pares y de socialización permanente de avances frente al grupo.
3. Diseño de profundidad 3: Diseño que mediante el tratamiento de situaciones del contexto matemático y cotidiano para el desarrollo de procesos matemáticos abstractos prioriza actividades de resolución de problemas que implican la abstracción de interpretación presentada de forma verbal con un lenguaje matemático preciso, numérico, grafico, tabular con diversas y variadas tecnologías; permitiendo la manipulación, variedad de feedback, y estrategias de resolución de problemas con la finalidad de construir expresiones numéricas o algebraicas que permitan modelar una situación problema del contexto. Además de sugerir el acompañamiento del profesor como mediador para que acerque y profundice al estudiante en los objetos de estudio, posibilitando socialización de avances frente al grupo.
4. Diseño de profundidad 4: Diseño que mediante el tratamiento de situaciones del contexto matemático y cotidiano prioriza actividades de resolución, deducción y planteamiento de conjeturas matemáticas con el uso de lenguaje matemático formal para que los estudiantes modelen situaciones del contexto, justifiquen y argumenten sus procedimientos y

deducciones. Además de sugerir el acompañamiento del profesor como mediador para posibilitar espacio de discusión y exposición de avances con sus pares académicos y la comunidad educativa.

Es importante aclarar que los principios de DUA se usan como categorías de análisis para responder a la pregunta de investigación. De esta manera se abarcan los referentes teóricos y conceptuales que fundamentan la investigación. Con esto, se da paso a los aspectos metodológicos los cuales se esbozan a continuación.

4 Aspectos Metodológicos

La investigación que aquí se reporta es de corte cualitativo, cuyo propósito fue identificar y describir alcances de un diseño para el estudio de razones trigonométricas que usó la historia de la trigonometría y se centró en atender la diversidad en bachillerato, por lo que se empleó un estudio exploratorio y descriptivo. Según Lösch et al. (2023) el tipo de estudio exploratorio permite hacer una comprensión inicial más amplia del fenómeno o el tema para hacer una familiarización; asimismo, según Guevara et al. (2020) el objetivo de la investigación descriptiva "consiste en llegar a conocer las situaciones, costumbres y aptitudes predominantes a través de la descripción exacta de las actividades, objetos, procesos y personas" (p. 171). En este caso fue descriptivo, ya que el propósito partió de analizar los resultados obtenidos durante la puesta en escena de un diseño didáctico construido en un estudio anterior (de Rueda (2023)) y evaluar sus alcances frente a la atención a la diversidad en clase de matemáticas. A continuación, se describen cada una de las fases del estudio.

4.1 Fase I: Revisión Bibliográfica

Inicialmente, se realizó una revisión bibliográfica a nivel internacional y nacional con el propósito de dar un fundamento firme al trabajo de investigación, estos incluyeron estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de las razones trigonométricas, aspectos normativos de la inclusión y lineamientos para el ajuste de diseños didácticos. Los resultados de esta fase se incorporaron en el capítulo 2 y 3 de este documento, que se usaron también para el proceso de triangulación de resultados.

4.2 Fase II: Análisis y Discusión del Diseño

En esta fase, se desarrolló una revisión del diseño didáctico construido por Rueda (2023) que estuvo compuesto por orientaciones para el profesor, malla curricular y hoja de trabajo. El análisis consistió en la revisión de la tesis donde se expuso el fundamento teórico del diseño, su valoración por rubrica y su versión final después del proceso de investigación. La revisión tuvo por objetivo interpretar el fenómeno, plantear ajustes del diseño para la posterior puesta en escena de este. A continuación, se presentan resultados de esta fase desde cada uno de sus componentes.

4.2.1 Análisis y discusión sobre la malla y orientaciones para el profesor

El documento de orientaciones del maestro expuesto por Rueda (2023) estuvo orientado en describir los propósitos de cada momento para los niveles de profundidad 2, 3 y 4. La estructuración de estos propósitos se valora desde cuatro categorías: i) Ajuste al nivel de conceptualización respecto al nivel de profundidad, ii) la vinculación con la pregunta problematizadora (¿Cómo se pueden medir las sombras?), iii) la relación con los estándares para el grado décimo, y iv) la compresión del objeto matemático.

Como se muestra en la malla curricular de la **Figura *1***, se puede observar en el uso de los verbos una mayor profundidad en cada nivel, empezando en el nivel 2 en el que se propuso "*reconocer al concepto de razón trigonométrica partiendo de la relación entre las medidas lineales y medidas regulares de un triángulo rectángulo*", avanzando para el nivel 3 donde se plantea un propósito similar al anterior, pero cambiando el verbo a "*comprender...*", allí apoyados en lo que menciona Olivera (2011) sobre el verbo “comprender” que implica ir más allá de la interpretación porque el estudiante usa sus propias palabras para decir lo que entiende de la información dada, y para el nivel 4 ya se usan los verbos “*analizar y construir*” con la pretensión de que muestre relaciones propias y sintetice otras sobre el concepto.

No obstante, como se exhibe en la **Figura *2*** dentro de la valoración de propósitos la autora manifestó que el validador por rubrica le sugirió reflexionar sobre el uso del verbo “*comprender*” que no es solo una acción por sí sola, sino que requiere de procesos para evidenciarlo lo que implicaría reestructurar los descriptores del propósito del nivel. A pesar de la sugerencia, se pudo observar que aún en el rediseño la autora no tuvo en cuenta esa observación para reestructurar los descriptores, por ello los autores de este trabajo lo consideraron para los ajustes.

Figura 1

Malla Curricular Rueda (2023)

	NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
Preguntas problematizadoras	**Propósito**	**Descriptores**	**Propósito**	**Descriptores**	**Propósito**	**Descriptores**
1 ¿Cómo se pueden medir las sombras?	**Pensamiento variacional** Reconoce el concepto de razón trigonométrica partiendo de la relación entre las medidas lineales y medidas angulares de un triángulo rectángulo.	**La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos** Lista, identifica y relaciona la razón y la proporción teniendo en cuenta el paso histórico de Tales de Mileto.	**Pensamiento variacional** Comprende el concepto de razón trigonométrica partiendo de la relación entre las medidas lineales y medidas angulares de un triángulo rectángulo a partir de un problema de sombras.	**La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos** Establece, comprende e interpreta la razón y la proporción teniendo en cuenta el paso histórico de Tales de Mileto. Selecciona, compara y analiza las características de una razón trigonométrica	**Pensamiento variacional** Analiza y construye el concepto de razón trigonométrica partiendo de la relación entre las medidas lineales y medidas angulares de un triángulo rectángulo a partir de un problema de sombras.	Comprende, plantea e interpreta la razón y la proporción teniendo en cuenta el paso histórico de Tales de Mileto al medir su sombra. Completa y analiza las características de una razón trigonométrica
		Comunicativo Reconoce las características de una razón trigonométrica.		**Razonamiento** Clasifica y relaciona las características de una razón trigonométrica empleando la herramienta TIC en GeoGebra.		**Razonamiento** Clasifica y relaciona las características de una razón trigonométrica empleando GeoGebra.
		Razonamiento Relaciona las características de una razón trigonométrica a una situación real.		**Modelación** Relaciona lo aprendido de las razones trigonométricas y propone soluciones a diferentes problemas planteados.		Relaciona lo aprendido de las razones trigonométricas y propone soluciones a diferentes problemas planteados.

Frente a lo anterior, en esta investigación se mantuvieron los propósitos porque se pudo evidenciar de la coherencia horizontal, según Parada (2022), además que soportó una estructura curricular basada en los estándares curriculares matemáticos (MEN,2006) en el que se abordaron las competencias planteadas, específicamente sobre razones trigonométricas, para bachillerato en los cuatro niveles de profundidad.

La rúbrica de valoración usó la escala Likert de 1 al 5, siendo 5 puntaje más alto, para evaluar la atención de los propósitos y descriptores definidos a partir de los estándares de competencias y procesos matemáticos respectivamente para el estudio de las razones trigonométricas, además verificó la atención a la diversidad a partir de las pautas y principios del DUA.

Figura 2

Coherencia horizontal por propósito

II. Coherencia horizontal (Por diseño)

Según los propósitos (pensamientos)

P.P.2. ¿Cómo se pueden medir las sombras? **Pensamiento variacional**	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
Los propósitos están ajustados al nivel de conceptualización, según cada nivel de profundidad.				X		Revisar el propósito del nivel 3, comprender no es una acción que por sí sola se pueda verificar. Teniendo en cuenta la Taxonomía de Bloom y las habilidades de proceso ajusta este propósito.
Los propósitos están vinculados estrechamente con la pregunta problematizadora y con el contexto					X	
El propósito se relaciona con estándares específicos para el grupo de grados					X	
El propósito, en cada nivel, comprende el mismo objeto matemático					X	

En cuanto al análisis vertical sobre los descriptores indicados en la **Figura *3***, se analizó los procesos esperados a desarrollar para cada nivel de profundidad, allí la autora evaluó "comunicación, modelación y razonamiento” dejando de lado el proceso “elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos”, pero considerado en la Malla. La autora valoró el proceso de modelación con el menor puntaje, por ende, el diseño no presentó actividades que favorecieran este, aunque en la Malla para el nivel 3 estableció el proceso como “*relaciona lo aprendido de las razones trigonométricas y propone soluciones a diferentes problemas plantados”,* de tales observaciones terminó preguntándose en su investigación “*¿Qué procesos de aprendizaje sobre razones trigonométricas posibilitaron los diseños en los estudiantes según sus* *características?"* (Rueda, 2023, p.75). Así que, una restructuración considerada para los descriptores fue sobre los procesos generales como puede percibir en la Figura 3 , con ausencia de modelación, que tuvieran en cuenta el enfoque histórico y resaltaran el uso de GeoGebra en la realización de las actividades.

Figura 3

Coherencia vertical descriptores

Según los descriptores (procesos)

P.P.2. ¿Cómo se pueden medir las sombras? **Pensamiento variacional**		Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
¿Los descriptores están *ajustados* a las habilidades de proceso, en cada nivel de profundidad?	Comunicación			X			Lo planteado no está en relación con las habilidades para este proceso. Se sugiere revisar el documento de Parada y Fiallo (2018)
	Modelación	X					No se plantean descriptores en todos los niveles para este proceso y por el contexto planteado y las actividades observadas sí se podrían proponer descriptores alrededor de este proceso.
	Razonamiento			X			Lo planteado no está en relación con las habilidades para este proceso. Se sugiere revisar el documento de Parada y Fiallo (2018)

A su vez, Rueda (2023) deja explicito en las recomendaciones al docente las indicaciones hacia los estudiantes para desarrollar la hoja de trabajo, ampliando en las instrucciones para el uso de los archivos de GeoGebra incorporados en el desarrollo de la secuencia para el momento 1 y 4. Sin embargo, se observó que en dichas orientaciones era necesario enfatizar sobre el uso de la Historia de las Matemáticas, particularmente en los conceptos como razón, razón geométrica, proporción y razón trigonométrica para brindarle oportunidad al estudiante de conocer o discutir sobre aspectos históricos involucrados en la trigonometría y razones trigonométricas. Por eso, desde este trabajo se aporta orientaciones al maestro para que logre promover en los estudiantes e interacción en el aula.

4.2.2 Análisis de la hoja de trabajo del estudiante.

Los objetivos del Momento 1 fue "*trabajar y comprender la razón geométrica y la proporción*", para esto Rueda (2023) presentó dos actividades centrales que dirigieron este momento: 1) La lectura de la historieta y espacio de socialización y, 2) la interacción con un applet.

La historieta incluyó para cada nivel un hecho histórico, como el expuesto en la **Figura *4***, en el que Tales estimó la altura de la pirámide a partir de la longitud de la vara y la sombra. La autora afirmó que la articulación del paso histórico de Tales permitió la aparición de los conceptos matemáticos que acercan la noción razón trigonométrica, (Rueda, 2023, p.62). Sin embargo, ella mencionó que los estudiantes no lograron dibujar la sombra de forma horizontal respecto al suelo, al aparecer porque esto no estaba ilustrado en la Historieta. Además, ella identificó que las preguntas y enunciados en la actividad eran extensos, por lo que los autores de esta investigación consideran importante agregar apoyos visuales que expliciten el triángulo rectángulo formado por los elementos presentes en el episodio.

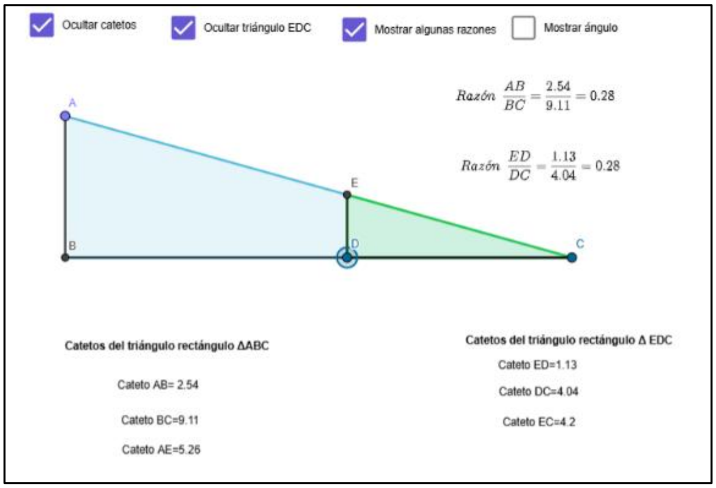
Figura 4

Episodio de la historieta

Respecto al applet el cual consistía en mostrar dos triángulos semejantes el propósito era el análisis de las razones y proporciones geométricas a partir del movimiento de los puntos C y D como se muestra a continuación en la **Figura *5***.

Figura 5

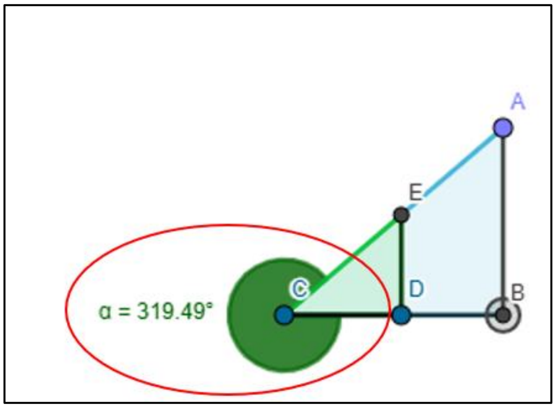
Applet Momento 1



Desde una perspectiva de los autores el uso de GeoGebra parece ser un acierto para introducir las nociones de razón y proporción, por lo que fue recuperado en los ajustes planteados después de una revisión del applet en relación al movimiento de los puntos sobre los triángulos para redefinir algunas magnitudes, asimismo, se particularizó restringir al primer cuadrante y tener en cuenta el ángulo de referencia para considerar la semejanza de triángulos, tal como se señala en el ovalo de la **Figura *6***.

Figura 6

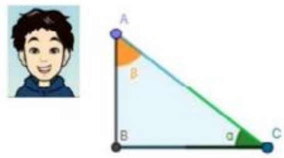
El ángulo de referencia se toma como el ángulo complementario



En el momento 2 que consiste en trabajar las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) primero se pretendió realizar una actividad para definir las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo a partir de sus ángulos de referencia como se ilustra en la **Figura *7*** y en segunda instancia el planteamiento de la construcción geométrica con regla y compas de la tangente. Sin embargo, la autora (Rueda (2023, p. 70)) afirma que en el pilotaje observó que los estudiantes tuvieron dificultades en dicha construcción, por lo que consideró necesario ajustar el diseño, únicamente trabajando el paso histórico para reforzar la razón y proporción.

Figura 7

Actividad Momento 2



De acuerdo con el triángulo anterior y los ángulos ∝ y ß. Complete:

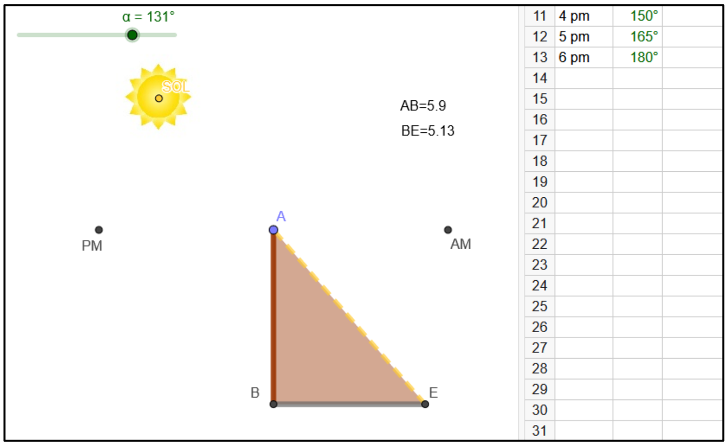
Razones	∝	β
$\frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	______	______
$\frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	______	______
$\frac{Cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	______	______

En el Momento 3, el diseño propone trabajar las razones trigonométricas mediante una actividad práctica que consiste en que a partir de las medidas de varas se recolectan datos en el instante en el que se ubica la vara verticalmente en un día soleado (longitud de la sombra proyectada y longitud de la hipotenusa). La autora después del pilotaje valora positivamente esta actividad porque evidenció aportes en la competencia comunicativa e interpretativa. Por ende, en el presente trabajo se sugiere para este momento posibilitar habilidades que apoyen el proceso de comunicación como interpretar, explicar, justificar y argumentar, por eso, se plantea la incorporación de magnitudes más reales que faciliten la medición y el uso de tecnologías.

Por último, en el Momento 4 dónde su objetivo fue evaluar con énfasis de un trabajo individual. Ella aseguró que el en la clase, respecto a los momentos anteriores se logró una generalización en relación con el cambio de magnitudes. Por ende, Rueda (2023) propuso que para este momento se evidenciaran las características de seno y coseno bajo condiciones, usando el applet exhibido en la **Figura *8*** en el que se usa el simulador con un apoyo tabular para que el estudiante pudiera extraer datos y responder a los cuestionamientos.

Figura 8

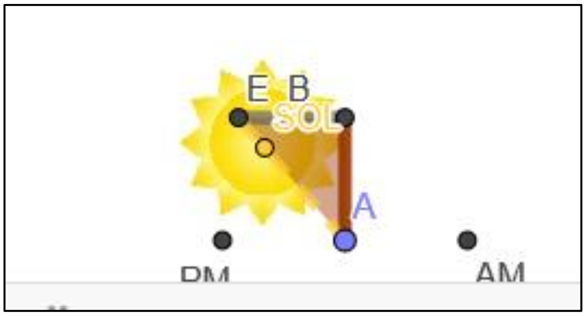
Applet Momento 4



En la revisión del applet se pudo observar que la programación permite que la vara y la sombra tome valores negativos (como puede verse en la **Figura** ***9***, por ello se hace fundamental corregir el applet precisando las características de las longitudes, reconfigurar los ángulos de referencias para que el estudiante al abordar la tarea cumpla las condiciones y mejorar la calidad de las imágenes incorporadas.

Figura 9

Bastón ubicado verticalmente hacia abajo en el applet



En resumen, en este estudio se aportan ajustes para simplificar el lenguaje, proporcionar ejemplos concretos y mejorar la interactividad con los archivos GeoGebra, para facilitar la comprensión y el aprendizaje inclusivo de los estudiantes del contexto de estudio.

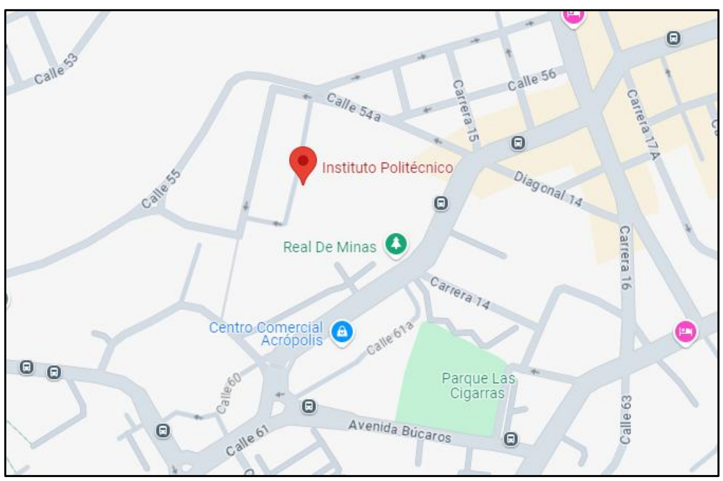
4.3 Fase III. Identificación y caracterización del contexto de estudio

En esta fase se hizo un acercamiento a la Institución Educativa Politécnico de Bucaramanga sede A, dado que los autores de este documento se encontraban haciendo su práctica docente y debido que uno de ellos estaba trabajando con estudiantes de 11°, asimismo como el diseño que se ha mencionado para la puesta en escena estaba previsto para estudiantes de bachillerato, de esta manera se vinculó esto con su práctica docente.

El establecimiento educativo se encuentra en un sector urbano, cuya dirección es Calle 55 Diagonal 14 No. 106 avenida de los estudiantes mapeado en la **Figura** ***10***, de carácter oficial, genero mixto y metodología centrada en competencias. Presta los servicios educativos de los niveles preescolar y básica en la jornada de la tarde; básica y media secundaria en la jornada de la mañana.

Figura 10

Ubicación de la Institución Politécnico Bucaramanga. [Google mapa]



Para este trabajo se tuvo un acercamiento al grado 11-2 que estuvo conformado por 39 estudiantes entre edades de 16 y 18 años; a cargo del profesor titular.

Luego, se interesó en hacer la caracterización de los estudiantes a partir de dos fuentes: el profesor titular del grado 11-2 y la percepción del practicante que se encontraba haciendo la practica en dicho grado. Se eligieron estas fuentes porque el profesor titular hace uso de una metodología de evaluación basada en procesos matemáticos, lo que le permite llevar un registro individual de las capacidades y habilidades de cada estudiante, además de brindar a los estudiantes acompañamiento individual y contacto con los padres de familia. Y por el lado del practicante que interactuó con los estudiantes durante el periodo de práctica docente le permitió bridar una percepción de la gran mayoría de los estudiantes.

Para recopilar los datos necesarios se diseñó una entrevista dirigida al profesor titular con base en el formato de caracterización diseñado por el grupo de investigación de Educación Matemática (Edumat-UIS) de la Universidad Industrial de Santander para la creación de diseños didácticos que atiendan a la diversidad (**Apéndice B**). Esta entrevista permitía caracterizar a los estudiantes no solo por sus limitaciones y ritmos de aprendizaje, sino por el nivel de conocimientos previos y rendimiento en matemáticas.

Desde las descripciones hechas por el docente y el practicante se obtuvo información de 38 estudiantes, que para fines de investigación tendrán nomenclatura con la letra (E) y enumeración de dos a tres dígitos. El primer número a la identificación del estudiante, y el segundo número corresponde a la hoja de trabajo del nivel de profundidad en que se entregó para la implementación. Por ejemplo, E3-2. Es el estudiante número 3 que se encuentra en un nivel de profundidad 2. De esta manera, cumplimos con ley estatutaria 1581 de 2012, por la cual se dictan disposiciones generales para la protección de datos personales. Asimismo, [I] representa al investigador (uno de los autores de este documento) que participó en la toma de datos.

Como resultado de la entrevista se logró categorizar dos (2) estudiantes de nivel 2, veintidós (22) de nivel 3, y catorce (14) de nivel 4. Sin embargo, de esta población se seleccionaron aquellos estudiantes que participaron en cada clase y desarrollaron por completo la hoja de trabajo en las tres intervenciones realizadas. Otra característica de selección fue por las intervenciones hechas en los espacios de socialización y trabajo colaborativo. No obstante, se hace la salvedad que hubo estudiante que no completaron todos los momentos, pero sus resultados y reflexiones de las actividades del diseño fueron material de uso para la valoración en el capítulo 5.

4.4 Fase IV: Ajustes para poner en escena el diseño.

En esta fase de investigación, se realizaron los ajustes especialmente a las hojas de trabajo para refinar los aspectos por mejorar identificados en la fase anterior y las características del contexto de implementación, que se describen a continuación en cada nivel de profundidad.

4.4.1 Ajustes a la hoja de trabajo del nivel 2

En la

Tabla *1* se muestran los ajustes en cada momento con su respectiva descripción y justificación. En los óvalos de las figuras se señalan los cambios específicos. En la tabla las Figuras no serán citadas, pero si aparecen en el diseño de la versión final de la hoja de trabajo (**Apéndice C**, **Apéndice D** y **Apéndice E**).

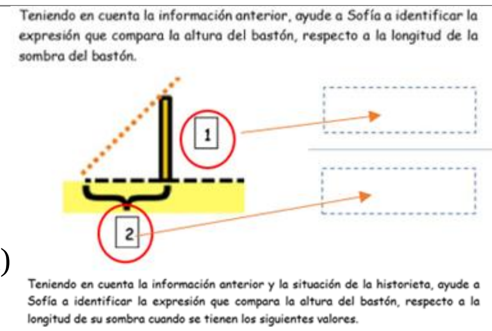
Tabla 1

Ajuste del Momento 1.

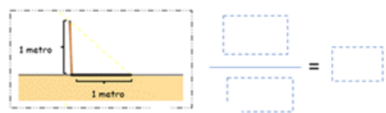
Descripción	Ajustes al diseño
En la Figura 1. se agregó en la imagen el bastón vertical al suelo y la proyección de su sombra.	

Atendiendo a la confusión generada por los números en (A), se dio valores numéricos a los elementos y se propuso un cuadro en (B) que permitiera hacer el cociente entre magnitudes.

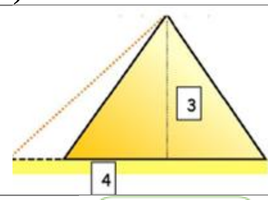
(A)

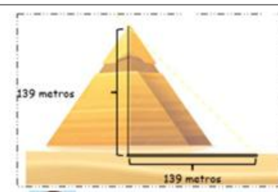


(B)

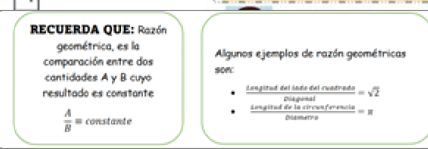


Se representó la situación del diseño inicial, considerando valores numéricos para una mayor comprensión del suceso.

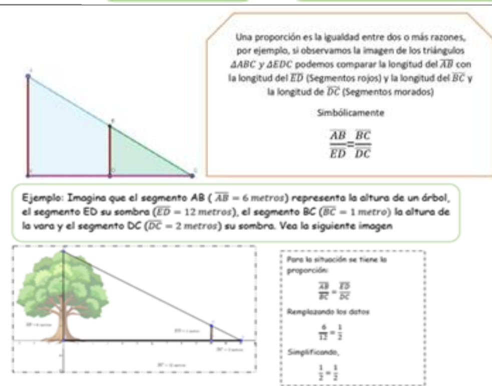




Se añadió un recuadro con ejemplos de razones geométricas contrastando la definición de razón geométrica para todos los niveles.



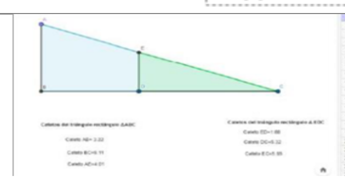
Se agregó un ejemplo contextualizado para que el estudiante hiciera relación entre el concepto y la realidad.

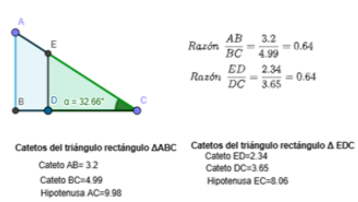


Se añadió valores en el applet para todos los niveles de profundidad.

Se redefinió nuevos catetos.

Se restrinjo los movimientos de los vértices A y C del triángulo rectángulo ABC para reducir la confusión en la medida de los ángulos.



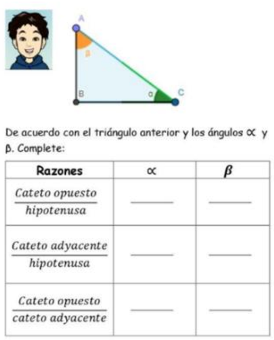
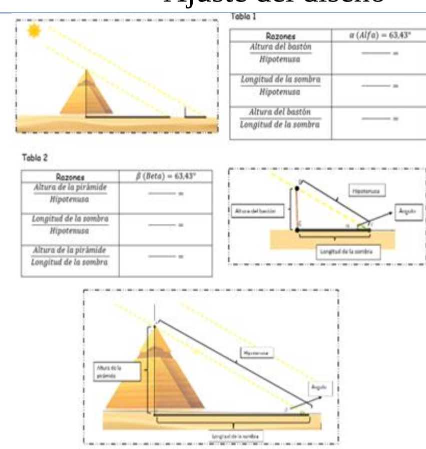
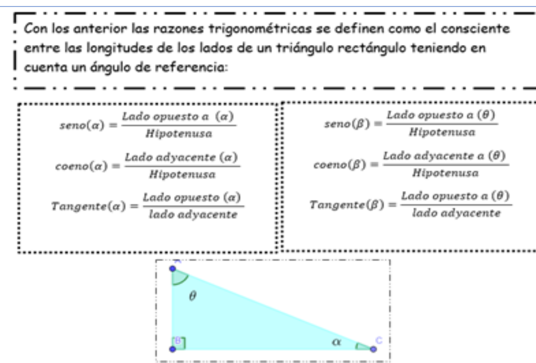
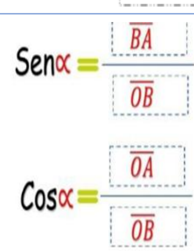


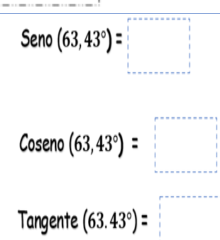
Los ajustes realizados apuntan a hacer el diseño más comprensible y accesible para los estudiantes, asegurando una mejor conexión con los conceptos matemáticos y su aplicación en contextos reales. Culminado los ajustes del primer momento, la

Tabla *2* describe los puntos claves para el momento 2.

Tabla 2

Ajustes Momento 2

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Ajuste del diseño</th></tr>
<tr><td>Se modificó la actividad para relacionar situación de la proyección de sombras como imagen de apoyo sobre los elementos involucrados.

</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Se agregó las razones trigonométricas para un ángulo de referencia en un triángulo rectángulo junto con una representación gráfica.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Se redefinió de (C en D) las razones trigonométricas a partir de un ángulo dado, para que los estudiantes usen la calculadora y contrasten con la situación.</td><td>

(C)


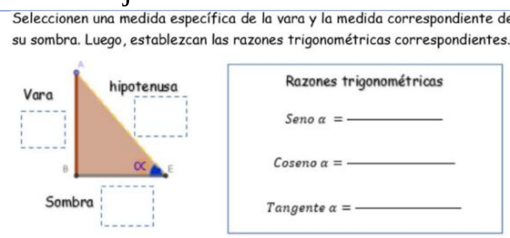
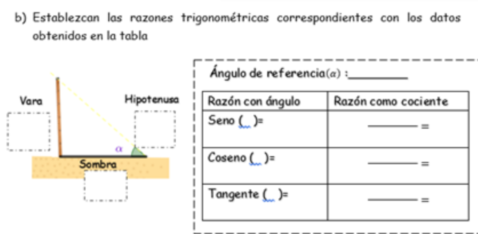
(D)</td></tr>
</table>

Los ajustes realizados proporcionan una mejor conexión entre la teoría trigonométrica y su aplicación en situaciones visuales y prácticas, favoreciendo el aprendizaje activo de los estudiantes y el uso de herramientas tecnológicas, como la calculadora. En la

Tabla *3* se podrán en contraste el momento 3 para este nivel de profundidad.

Tabla 3

Ajuste Momento 3

Descripción	Ajuste del diseño
Se redujo en todos los niveles de profundidad la extensión para los cálculos, centrando el análisis a un único día.	
Se editó las ilustraciones de apoyo en las mediciones.	

El ajuste implicó simplificar y focalizar, adaptando los elementos visuales para facilitar la comprensión de las mediciones relacionadas con el análisis. Ahora se presentan los cambios para el momento 4 que se fueron considerados pertinentes y se muestran en la **Tabla *4***.

Tabla 4

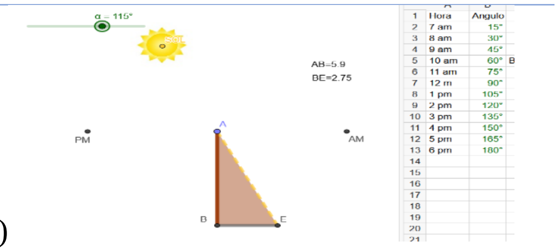
Ajustes Momento 4

Descripción	Ajustes al diseño

Se hizo uso del applet (F) en todos los niveles de profundidad con la finalidad que todos los estudiantes puedan interactuar con la herramienta.

Se realizó cambios en el formato visual de entrada (E en F) donde la altura de la vara toma medidas exactas, articulado con el deslizador.

Se mejoro los ángulos de referencias para que fueren coherentes a la situación, apoyado por tabla en Excel los datos de la hora del día y el ángulo de referencia.



(E)

(F)

Se agregó recuadros para obtener ciertas igualdades realizando un despeje en la cada definición.

Elija y marque con una x cual de las siguientes igualdades permite hallar también la longitud de la sombra con los datos dador, es decir, el ángulo y la altura del bastón.

$$Hipotenusa = \frac{Altura\ del\ bastón}{seno(ángulo)} \quad \square$$

$$Hipotenusa = \frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{coseno(ángulo)} \quad \square$$

$$Longitud\ de\ la\ sombra = \frac{Altura\ del\ bastón}{tangente(ángulo)} \quad \square$$

PROBLEMA |2

Felipe fija la altura del bastón en 10 centímetro a las 10 am, su ángulo de referencia es de 60°, y la sombra proyectada por este es igual a 4.88 centímetros

De las siguientes igualdades cual de ellas permite hallar el valor de la hipotenusa del triángulo que se .orma entre la sombra y el bastón. Marque con una x

$$Hipotenusa = \frac{Altura\ del\ bastón}{seno(ángulo)} \quad \square$$

$$Hipotenusa = \frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{coseno(ángulo)} \quad \square$$

$$Longitud\ de\ la\ sombra = \frac{Altura\ del\ bastón}{tangente(ángulo)} \quad \square$$

De esta manera, las descripciones especificas en el reajuste del diseño de nivel de profundidad 2, argumentan la aparición de los principios DUA, mediante actividades de resolución de problemas que son dirigidos hacia la interpretación de información presentada de forma verbal con texto moderado, numérica, gráfica y material visual.

4.4.2 Ajuste de la hoja de trabajo nivel 3

De igual manera, Rueda (2023) proporcionó unos resultados de reajuste después de hecho el pilotaje, dónde decidió por la dificultad presentada enfocarse en las razones trigonométricas seno y coseno sin la necesidad de introducirlas con el círculo unitario. Ahora bien, en esta adaptación, como se describe en la **Tabla 5,** se reafirma que la abstracción para la habilidad de interpretación se propicia por presentar la información de forma verbal con un lenguaje matemático preciso, numérico, grafico, tabular y tecnológico.

Tabla 5

Ajustes hoja de trabajo nivel 3

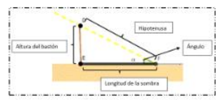
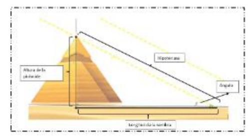
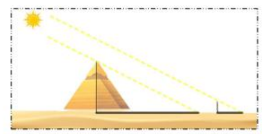
<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Ajustes del diseño</th></tr>
<tr><td colspan="2">Momento 1</td></tr>
<tr><td>Se mejoró la redacción para el acercamiento al episodio.</td><td>“Represente el momento exacto de la historieta donde se proyectaba la sombra dl bastón par a poder responder a ¿Qué figura geométrica se forma entre le bastón, su sombra y la luz?”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento 2</td></tr>
<tr><td>Se añadió una notación simbólica de longitudes para los segmentos que conforman los triángulos de las situaciones descritas sobre las sombras porque la idea principal es definir las razones con un lenguaje formal.</td><td>


Tabla 1
<table>
<tr><th>Razones</th><th>$\alpha\ (Alfa) = 63{,}43°$</th></tr>
<tr><td>$\frac{Altura\ del\ bastón}{Hipotenusa} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{Hipotenusa} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{Altura\ del\ bastón}{Longitud\ de\ la\ sombra} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$</td><td></td></tr>
</table>
Tabla 2
<table>
<tr><th>Razones</th><th>$\beta(Beta) = 63{,}43°$</th></tr>
<tr><td>$\frac{Altura\ de\ la\ pirámide}{Hipotenusa} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{Hipotenusa} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{Altura\ de\ la\ pirámide}{Longitud\ de\ la\ sombra} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$</td><td></td></tr>
</table>


</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento 3</td></tr>
<tr><td>Se agregó tabla para propiciar el proceso de elaboración, ejercitación y comparación de procedimientos.</td><td>
b) Halle las razones trigonométricas correspondientes para las tres varas de diferente tamaño con los datos de la tabla 4 y 5
<table>
<tr><td>Ángulo: ________</td><td>Altura: ________</td><td>Ángulo: ________</td><td>Altura: ________</td></tr>
<tr><td>Razón con ángulo</td><td>Razón como cociente</td><td>Razón con ángulo</td><td>Razón como cociente</td></tr>
<tr><td>Seno ( ) =</td><td>______ =</td><td>Seno ( ) =</td><td>______ =</td></tr>
<tr><td>Coseno ( ) =</td><td>______ =</td><td>Coseno ( ) =</td><td>______ =</td></tr>
<tr><td>Tangente ( ) =</td><td>______ =</td><td>Tangente ( ) =</td><td>______ =</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento 4</td></tr>
<tr><td>Se agregó pregunta para hallar cierta magnitud y realizar cálculos a partir de valores dado, contrastando los valores encontrados con el Teorema de Pitágoras.</td><td>
¿Cuál de las siguientes igualdades permite hallar la longitud de la sombra del bastón si el ángulo de refencia es de 30° y la altura del objeto es 12 cm. Marque con una X
$Hipotenusa = \frac{Altura\ del\ bastón}{seno(ángulo)}$
$Hipotenusa = \frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{coseno(ángulo)}$
$Longitud\ de\ la\ sombra = \frac{Altura\ del\ bastón}{tangente(ángulo)}$
Apartir de la igualdad elegida calcule el valor y contraste con el valor que encuentra en el apllet
</td></tr>
</table>

En síntesis, los ajustes de este nivel discuten los mínimos para el siguiente nivel con la alternativa de adaptaciones diferenciadas, dónde el objetivo fuera priorizar actividades de resolución, deducción y planteamiento de conjeturas básicas del objeto matemático con el uso de lenguaje matemático formal para que los estudiantes justifiquen y argumenten sus procedimientos y deducciones.

4.4.3 Ajustes de la hoja de trabajo del nivel 4

En este nivel los ajustes son semejantes a los hechos en los niéveles de profundidad 2 y 3 tanto para los momentos 1, 2, 3 y 4. El momento 4 se diferenció de los anteriores niveles al pedirle al estudiante que con los datos obtenidos con la interacción en el applet pudiera calcular el valor de la hipotenusa como se observa en la **Figura *11***.

Figura 11

Situación asignada al nivel 4.

¿Se podría hallar el valor de la longitud de la sombra con la siguiente igualdad o no hay datos suficientes para hacerlo?

$$Hipotenusa = \frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{coseno(ángulo)}$$

Justifica tu respuesta

Ahora bien, realizados los ajustes que atendieron al contexto de implementación y fortaleció el diseño para la siguiente fase porque simplificó el lenguaje, proporcionó ejemplos concretos y mejoró la interactividad con los archivos GeoGebra.

4.5 Fase V: Planeación de la puesta en escena

En esta fase se definió para la puesta en escena el siguiente cronograma que se expone en la **Tabla 6**. Allí se tenía dispuesto para dos sesiones en la última semana de octubre. En la primera sesión se desarrollaría el momento 1 y 2, y en la segunda sesión el momento 3 y 4 con un tiempo estipulado de 2 horas.

Tabla 6

Cronograma de planeación en primera instancia

Cronograma de planeación

Fecha	Momentos	Descripción	Tiempo
22 de octubre	Momento 1	Este momento es un espacio introductorio respecto a la razón geométrica propuesta por Tales de Mileto y la altura de la pirámide de Keops haciendo uso de una historieta y un Applet desarrollado en GeoGebra para la profundización de este concepto y el de proporción	1hora 15 minutos
	Momento 2	En este momento se posibilita la matematización de las razones trigonométricas como aquella razón entre medidas lineales dependientes del comportamiento de los ángulos.	45 minutos
24 de octubre	Momento 3	Esta parte se considera el momento donde se pone en práctica y se afianza la comparación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y los ángulos, respectivamente. Esto es, relacionado con la longitud de la sombra y su relación con el ángulo de elevación debido a la posición del sol a lo largo del día. Se desarrollo un Applet que representa la situación a observar. Se sugiere el trabajo colaborativo como mediación metodológica.	45 minutos
	Momento 4	Este momento trata de valorar lo aprendido hasta el momento de tal forma que el estudiante ponga en juego sus aprendizajes y logre un aprendizaje significativo	1hora 15 minutos

Ahora se procederá hacer la descripción de los hechos acontecidos a la hora de poner en escena el diseño didáctico.

4.6 Fase VI: Puesta en escena el diseño

En esta fase se puso en escena el diseño didáctico mencionado en este documento. Como muestra la Tabla **6** donde se planteó un primer cronograma estipulando ciertas fechas y tiempos; sin embargo, este no se pudo cumplir a cabalidad debido a que al transcurrir las sesiones y el tiempo ocurrieron algunas dificultades porque la institución estaba en las últimas semanas de clase para dar paso a las semanas de recuperación. Además, la institución realizó actividades institucionales que interfirieron en la puesta en escena del diseño. Es así que se presenta en la **Tabla** 7 el cronograma de las implementaciones que se realizó al final.

Tabla 7

Cronograma final de planeación

Cronograma final de planeación		
Fecha	Momento	Tiempo
22 de octubre	Momento 1	2 horas
31 de octubre	Momento 2 y 3	2 horas
5 de noviembre	Momento 4	2 horas

Como se observa en la tabla anterior el desarrollo de las actividades fueron llevadas a cabo en 6 horas de clase que no fueron posibles llevarlas de forma progresiva por lo antedicho al inicio de este apartado. Asimismo, el desarrollo del Momento 1 fue más prolongado de lo que se había planeado, cosa similar sucedía para el Momento 4. De esta manera la puesta en escena se extendió a tres sesiones y no fueron dos como se planeó en un principio.

4.7 Fase VII: Valoración de los alcances del diseño

En esta fase se realizó la valoración de los alcances del diseño didáctico implementado a partir de las siguientes tres categorías de análisis: 1) Uso de la historia y epistemología para proporcionar múltiples representaciones; 2) uso de la historia y epistemología para proporcionar múltiples formas de acción y expresión: y 3) uso de la historia y epistemología para proporcionar múltiples formas de implicación. El propósito en esta parte fue analizar los resultados contenidos durante su aplicación y evaluar su efectividad en torno a los propósitos definidos por el DUA y el uso de la historia y epistemología de las matemáticas.

4.8 Fase VIII: Reporte de Resultados

En esta fase se presenta los resultados de la implementación del deseño didáctico donde se hace un análisis detallado de los datos recopilados en el proceso de ejecución del diseño, además se destaca su impacto en el aprendizaje de los estudiantes y la atención a sus características particulares. A partir de lo anterior, se presenta un diseño definitivo respecto a la fase VI donde se han considerado ajustes necesarios para los diseños didácticos sobre el estado de las razones trigonométricas atendiendo a la diversidad vinculado al uso de la historia.

5 Estudio de las razones trigonométricas atendiendo el DUA

Este capítulo exhibe resultados del análisis y valoración del diseño didáctico a partir de lo expuesto por Guacaneme (2016) sobre el uso de la historia en la educación matemática. Las tres categorías, que emergieron de la articulación del uso de la historia en la educación matemática con los principios y pautas del DUA, son: 1) La historia favorece múltiples representaciones; 2) La historia posibilita múltiples formas de acción y expresión: y 3) La historia proporciona múltiples formas de implicación.

5.1 La historia favorece múltiples representaciones

El Principio I del DUA consiste en brindar opciones para que los estudiantes perciban y comprendan la información de manera distinta. Este principio integra las tres siguientes pautas: 1) proporcionar diferentes opciones para percibir la información, 2) proporcionar múltiples opciones para el lenguaje y los símbolos y 3) proporcionar opciones para la comprensión.

Al respecto, Duval (1993) sostiene que dado que los objetos matemáticos no son directamente accesibles o intuitivos de percibir es necesario para su comprensión que se involucren sus diferentes representaciones semióticas.

Asimismo, según Maza (1994) un recurso valioso para enseñar Matemáticas es la creación de textos usando hechos históricos. En el momento 1 se usó la historieta que vinculaba sucesos del Antiguo Egipto y Grecia, narrando como Tales de Mileto estimó la altura de la pirámide de Keops.

Como se observa en la **Figura *12*** las estudiantes E6-3 y E23-4 se encuentran interactuando individualmente con la historieta e interpretando lo allí expuesto, e incluso socializando al respecto. La lectura de la historieta brinda un espacio diferente en el que las estudiantes se involucran en la comprensión de las matemáticas, ya que con este tipo de historias se muestra una vinculación entre la matemática y la realidad. De esta manera, lo anterior permite que los estudiantes se den cuenta que al proyectarse la sombra de un objeto implícitamente existe un triángulo rectángulo entre el rayo de luz, el objeto y a la sombra, posibilitando así opciones *para la comprensión.*

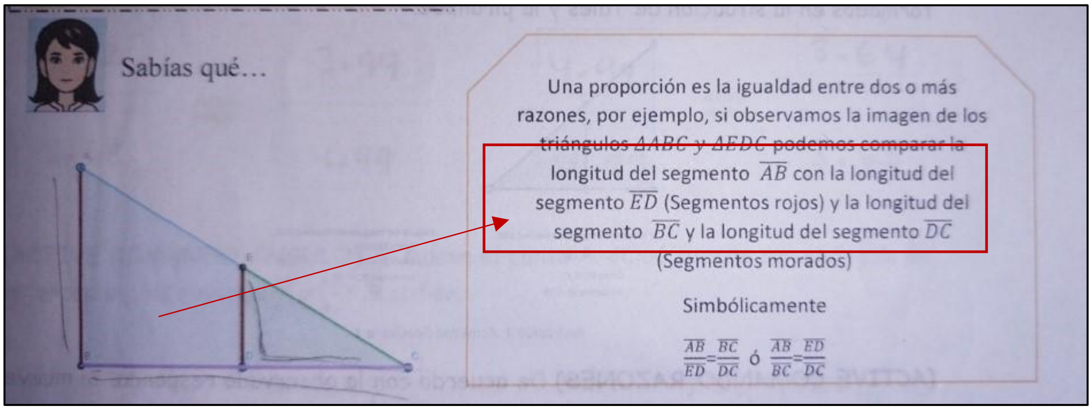
Figura 12

Historieta como herramienta para favorecer la comprensión de la razón

Posteriormente, en el trabajo del análisis por parte del estudiante en torno a entender la razón y la proporción, se encontró que en el recuadro de "sabias qué..." (en donde se involucraba tres formas de representación de una proporción: escrita, algebraica y grafica) el estudiante E1-2 hizo algunos trazos sobre la hoja de trabajo como se nota en la **Figura *13***. Al respecto, se infiere que al proporcionarse *opciones para percibir la información* y *para el uso del lenguaje y los símbolos* las líneas en lápiz fueron hechas, por la estudiante para identificar los elementos que se describían en el recuadro rojo y relacionarlos con la representación del triángulo de la parte izquierda, haciendo lo que Duval (1993) define como un tránsito entre diferentes registros semióticos, que fue suscitado por desarrollar la pauta antes citada.

Figura 13

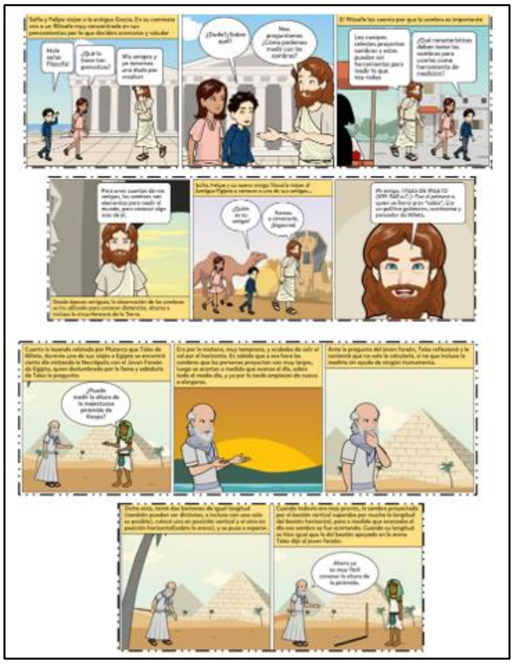
Trazos de la hoja de trabajo del estudiante E1-2



Seguidamente en el Momento 2, se introducía a los estudiantes al concepto de razón trigonométrica teniendo en cuenta el análisis realizado por Tales de Mileto como se ilustra en la historieta **Figura *14***.

Figura 14

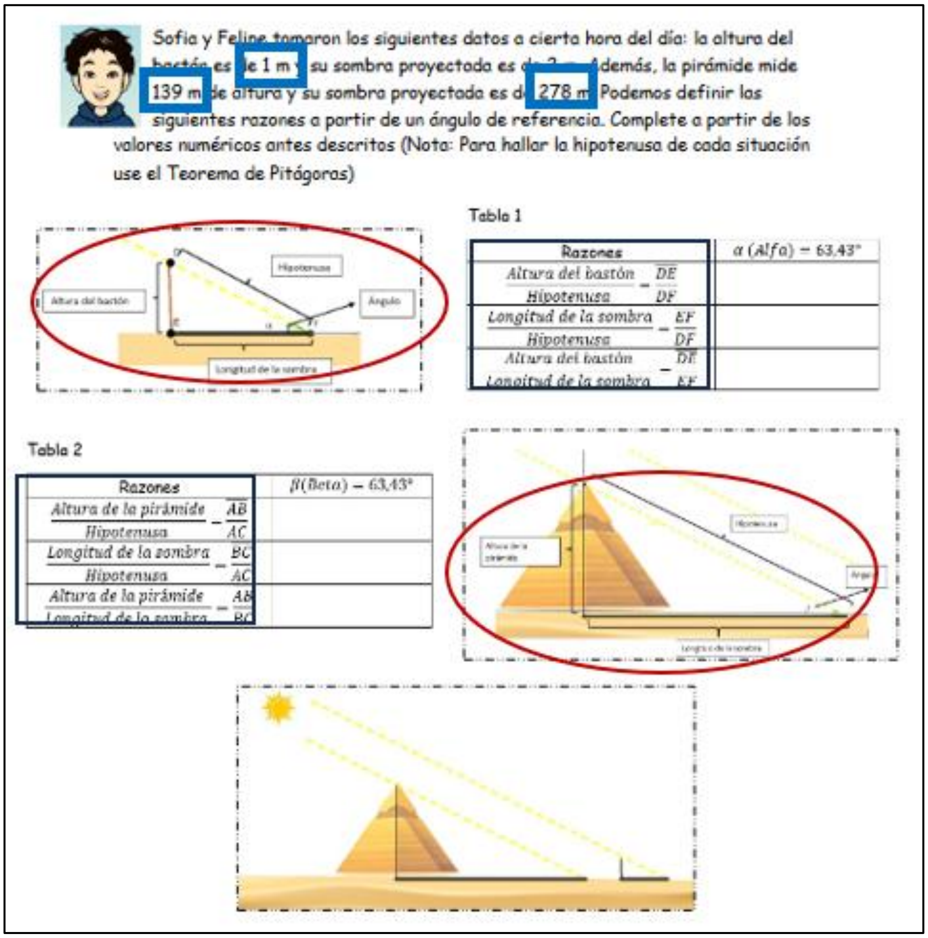
Historieta momento 1



Al introducir al estudiante a la comprensión del concepto de razón se brindaron opciones *para percibir la información* con la situación de la proyección de las sombras, así como *opciones para el lenguaje y los símbolos* al precisar cada uno de los elementos y hacer uso de un lenguaje adecuado para cada nivel de profundidad (Ver los óvalos rojos y recuadros negro de **Figura** ***15***). Además, las consignas ofrecieron otras *opciones para la comprensión* como la asignación de valores numéricos para realizar cálculos que se evidencian en los cuadros color azul de la misma figura que en el diseño inicial no se consideraron. Lo anterior con el objetivo de que los estudiantes identificaran y definieran las respectivas razones en la situación.

Figura 15

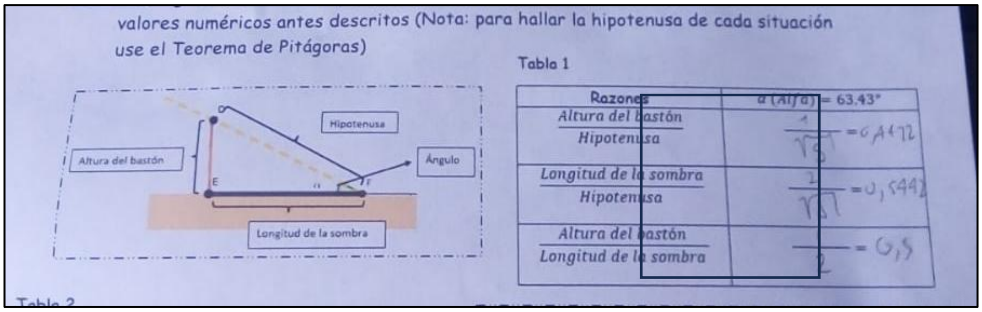
Situación para el momento 2



En la puesta en escena del diseño se pudo notar que las pautas posibilitaron que la mayoría de estudiantes definieran correctamente las razones que comparaban los elementos de la situación. Por ejemplo, en la **Figura *16*** se observa que E2-2 logra comparar las razones expresando estas inicialmente como cociente y luego como operador (desde la perspectiva de Kieren, 1976, 1983) representado el número de forma decimal como se muestra en el recuadro negro, incluso como se le sugirió, hizo uso del Teorema de Pitágoras para hallar la longitud de la hipotenusa del triángulo que se encuentra en la parte izquierda.

Figura 16

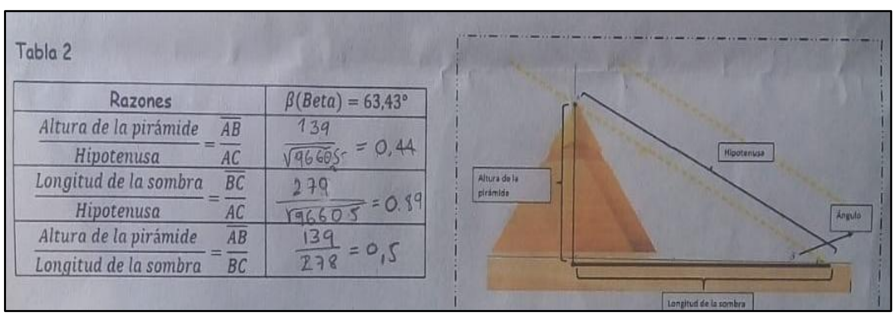
Respuesta de E2-2



Asimismo, en la **Figura *17,*** se muestra que el estudiante E23-4- puedo definir las razones, pero esta vez respecto a la pirámide (Ovalo rojo), identificando la longitud de cada elemento de la situación y haciendo uso correcto del Teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa. Además, se puede representar la razón como cociente permitiendo otra representación del número mediante expresión decimal.

Figura 17

Respuesta de E24-4



En el Momento 3 que involucraba una actividad practica que consistía en calcular las razones trigonométricas a partir de la recolección de dados con la altura de un vara (palos de balzo de diferente medidas) y la longitud de su sombra se articula con las pautas del Principio I, ya que se brindan *múltiples formas de representación* proporcionando diferentes formas de abordar el aprendizaje de las razones trigonométricas mediante la recolección de datos reales y la medición, como se muestra en la **Figura *18*.**

Figura 18

Midiendo sombras y deduciendo las razones trigonométricas

a)

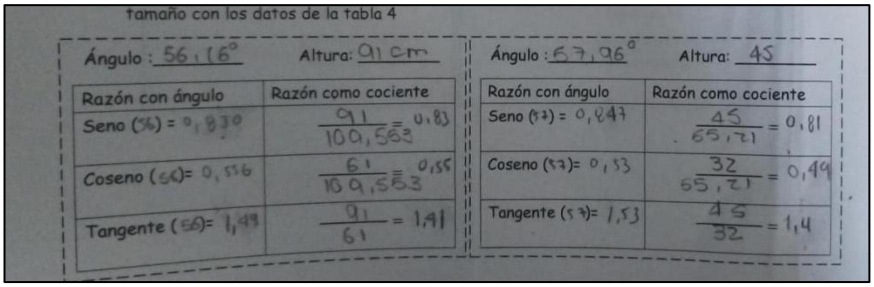
b)

En la **Figura *18*; a)** los estudiantes usaron un palo de balso como instrumento de medida que tenía marcadas únicamente las unidades, aunque esto no permite medir con exactitud se consideró su uso porque no todos los estudiantes habían llevado metro o regla. En la **Figura *18*, b)** se observan a los estudiantes interactuando: mientras uno sostiene el palo de balso para ver la proyección de la sombra, otro mide y los demás registran los datos en la hoja de trabajo.

En esta actividad de recolectar los datos y calcular las razones trigonométricas se observa en la **Figura *19*** brindó *opciones para la comprensión* que le permitieran mostrar al estudiante que la razón trigonométrica puede ser representada como un operador de un ángulo, como cociente y representación decimal.

Figura 19

Representaciones de la razón trigonométrica


tamaño con los datos de la tabla 4

Ángulo : 56,16° Altura: 91 cm

Razón con ángulo	Razón como cociente
Seno (56) = 0,830	$\frac{91}{100,563}$ = 0,83
Coseno (56)= 0,556	$\frac{61}{109,563}$ = 0,55
Tangente (56)= 1,49	$\frac{91}{61}$ = 1,41

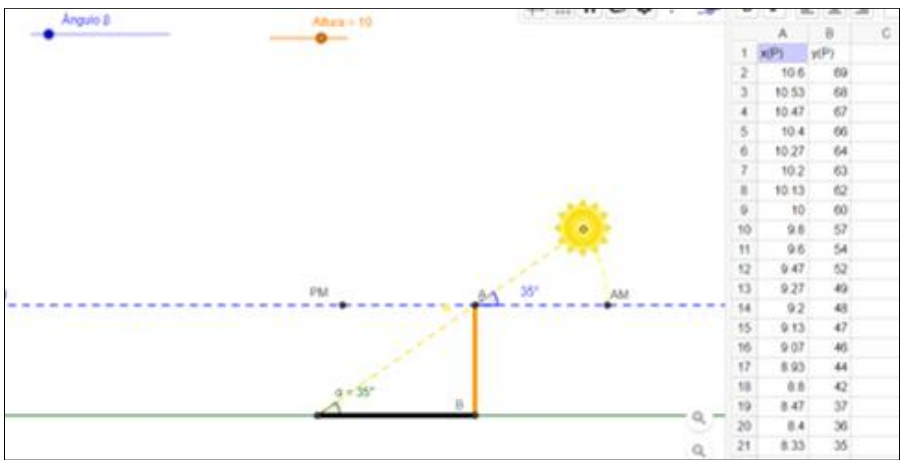
Ángulo : 57,96° Altura: 45

Razón con ángulo	Razón como cociente
Seno (57) = 0,847	$\frac{45}{65,21}$ = 0,81
Coseno (57)= 0,53	$\frac{32}{65,21}$ = 0,49
Tangente (57)= 1,53	$\frac{45}{32}$ = 1,4

Ahora bien, en el Momento 4, se desarrollaba la actividad con el uso del applet como una herramienta *para percibir la información* y *para la comprensión* que modelaba la proyección de la sombra de un bastón a cualquier hora del día siguiendo la idea del hecho histórico de la estimación de objetos por medio de sombras por parte de Tales **Figura** ***20***.

Figura 20

Entrada del applet momento 4

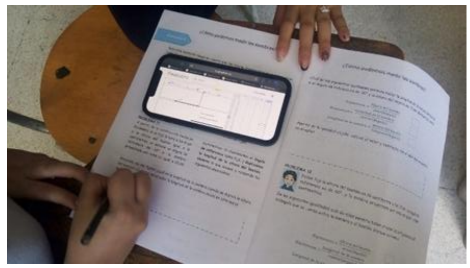


La anterior herramienta permitía que los estudiantes se involucraran de otra forma en el proceso de aprendizaje como se muestra en la **Figura** ***21*****: a)** y **b)** en donde los estudiantes usan sus dispositivos móviles para el desarrollo de las situaciones planteadas para este momento 4. El applet, incluso como se resaltó en las primeras líneas de este apartado permitió que los estudiantes vinculen las matemáticas con los sucesos de la realidad como la proyección de sombras

Figura 21

Uso por parte de los estudiantes del applet

a)

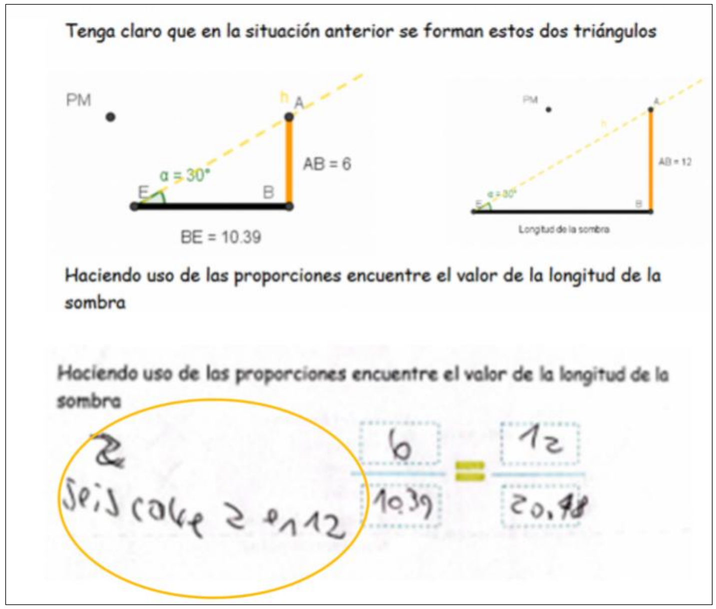


b)

En este mismo momento, particularmente en el problema 1 en la parte donde se pedía al estudiante de nivel de profundidad 2 hallar la longitud de la sombra al duplicar la altura del bastón, se evidenció que el estudiante E2-2 encuentra el valor de dicha magnitud gracias al apoyo suministrado por el applet y la representación figural de lo sucedido en el problema como se evidencia en la **Figura *22***.

Figura 22

Respuesta estudiante E2-2



De acuerdo con Leesh et al. (1998) el razonamiento proporcional es la habilidad o tipo de pensamiento complejo que permite que el trabajo de situaciones esté relacionado con la variación, el cambio, sentido de covariación y comparaciones múltiples. Como se observa en la **Figura** *22* en la parte izquierda (ovalo naranja) el estudiante E2-2 escribe “seis cabes 2 en 12”, Esto muestra que el estudiante hace un razonamiento proporcional directo, a través de una comparación que incluye relaciones multiplicativas (Mochón, 2012) ya que al duplicarse la altura del bastón la sombra también debe duplicarse.

5.2 La historia facilita múltiples formas de acción y expresión

Se reconoce en el Principio II que los estudiantes tienen diferentes maneras de actuar y expresar conocimiento, implicando que se permita diversas interacciones tanto con el contenido matemático, como con sus compañeros. Las pautas que conforman este principio son: 4) proporcionar múltiples medios físicos de acción; 5) ofrecer opciones variadas para la expresión y la comunicación fluida; 6) proporcionar opciones para apoyar las funciones ejecutivas, ayudando a los estudiantes a organizar, planificar y ejecutar sus tareas.

En este sentido, para la pauta de ofrecer opciones variadas para la expresión y comunicación, Fiallo y Parada (2018) definen tres habilidades involucradas en el proceso de comunicación: interpretar, explicar, justificar y argumentar:

La habilidad de interpretación requiere que los estudiantes tengan la capacidad de comprender y dar sentido a la estructura del problema en lenguaje verbal influenciado por el compromiso y explicación de lo solicitado.

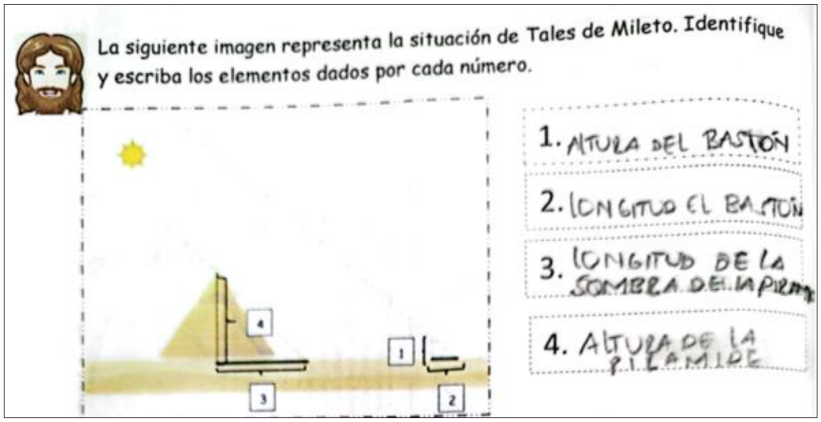
> Las habilidades de explicación, justificación y argumentación son promovidas cuando se plantea a los estudiantes la pregunta ¿Por qué?, y cuando se les solicita dar la respuesta a la actividad y explicar el procedimiento. Así, los estudiantes intercambian ideas y reflexiones para criticar y seguir los argumentos (pp.32-36).

En cuanto a las hojas de trabajo, sobre el momento 1, se les pedio a los estudiantes del nivel 2 identificar y escribir los elementos de la situación descrita en la historieta, mientras que en el nivel 3 y 4 tuvieron que representar gráficamente el instante en el que el bastón proyectaba su sombra. Lo anterior, proporcionó *opciones para* la *expresión y la comunicación* al permitir deferentes formas en las que los estudiantes pueden dar respuesta a algún problema o situación.

Las respuestas para esta situación fueron homogéneas, por lo cual se muestran las más frecuentes en cada nivel. Por ejemplo, como se puede observar en la **Figura *23*** el estudiante E1-2 logra identificar correctamente los elementos básicos y escribirlos en los recuadros en la parte derecha, con ello se evidencia la *habilidad de interpretación* que según Fiallo y Parada le permite comprender el enunciado para dar respuesta a lo planteado.

Figura 23

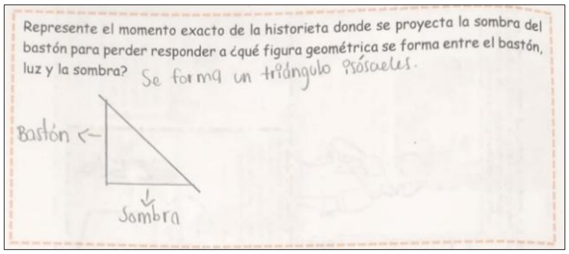
Respuesta estudiante E1-2



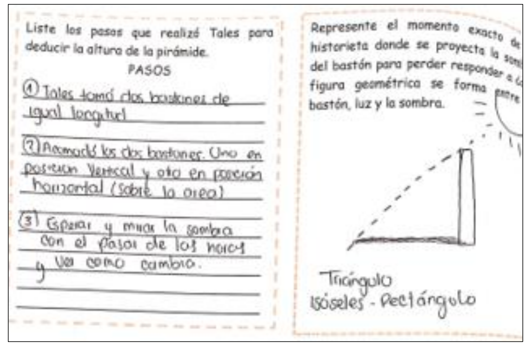
Así mismo, el estudiante E9-3 realizó una representación gráfica y concluyó que se formaba un triángulo rectángulo nombrando sus lados como se evidencia en la parte izquierda de la **Figura** ***24*****: a)**, por su capacidad de interpretar dando sentido geométrico. De igual manera en el nivel 4, además de que el estudiante E26-4, expresó de forma figural que se formaba un triángulo rectángulo como "*isósceles-rectángulo*", también listó los pasos que Tales hizo según la historieta para estimar la altura de la pirámide, a saber: 1) "Tales tomó dos bastones de igual longitud" 2) "acomodó los dos bastones uno de forma vertical y otro de forma horizontal (sobre la arena)" y 3) "Esperar y mirar la sombra con el paso de las horas y ver como cambio" **(Figura** ***24*****; b)**)

Figura 24

A la izquierda representación de E9-3; a la derecha la representación de E26-4



a)



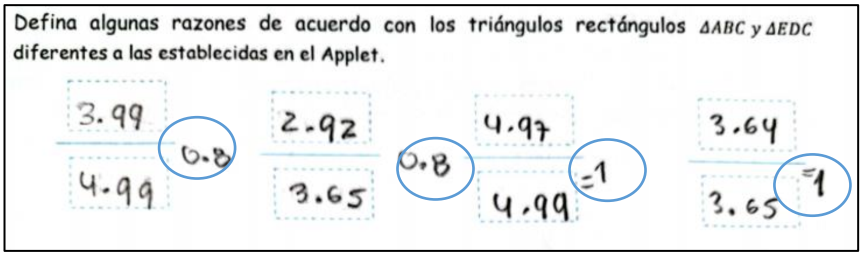
b)

Se concluyó que el hecho de realizar el ajuste a la historieta descrito en el apartado 4.4.1. proporcionó *opciones para la comprensión* de lo sucedido en el texto.

Respecto a la actividad del Momento 1 el applet hecho en GeoGebra permitió que los estudiantes interactuaran con este para definir algunas proporciones, al respecto se notó que aunque se proporcionaba una *opción para la expresión y hacer fluido la comunicación* en la hoja de trabajo de los estudiantes de nivel 2 para que representaran algunas razones, aun faltó un recuadro que permitiera al estudiante representar el resultado al hacer el cociente como 0,8 y 1 como se puede ver en la **Figura *25*** encerado en óvalos azules. Lo anterior es importante para tener en cuenta un reajuste a la hoja de trabajo del nivel de profundidad 2.

Figura 25

Ajuste para considerar en la hoja de trabajo del nivel 2

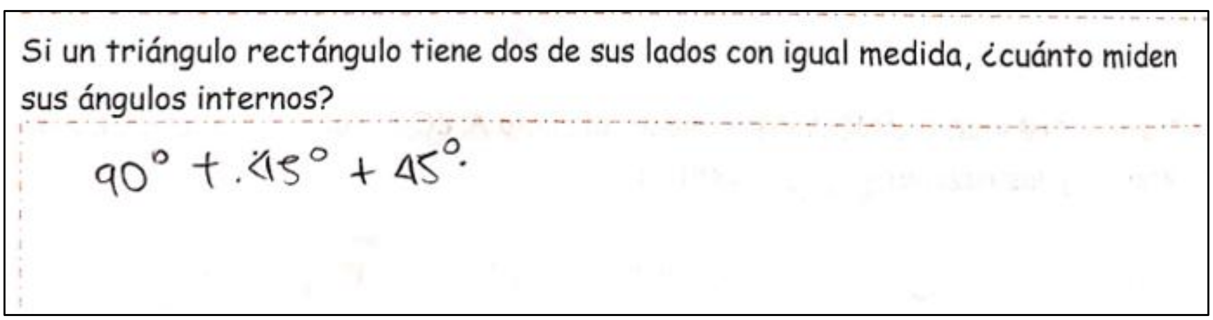


En la **Figura *25***, al parecer el estudiante E1-2 redondeo las razones a valores enteros haciendo el cociente, aproximando a 0.8 y 1 respectivamente.

Finalizando este momento 1 se le presentaba a los estudiantes de nivel de profundidad 4 el enunciando que se encuentra encerrado en el recuadro negro de la **Figura *26***.

Figura 26

Respuesta E25-4



Apoyándose de **Figura *26*** y las líneas [1-2] se observa que E25-4 usa las *habilidades de interpretación y explicación* porque comprende e identifica la estructura geométrica del triángulo isósceles rectángulo y deduce correctamente que los ángulos restantes son de 45°, demostrando una capacidad clara para dar sentido a los elementos del problema y relacionarlos con los conceptos básicos de geometría.

> [1] I: Si un triángulo rectángulo tiene dos de sus lados con igual medida ¿cuánto miden sus ángulos internos?
> [2] E25-4: 90 grados y los demás deben ser la mitad de este 45 y 45.

Para el momento 2 en la actividad mostrada en la **Figura *15*** y explicada en el apartado 5.1, [I] interactuó con los estudiantes para que le comunicarán lo que estaban realizando en esta actividad como se muestra en las siguientes líneas;

> [3] I: ¿Qué figura geométrica se formó entre el bastón su sombra y el rayo de luz?
> [4] E7-3: Un triángulo.
> [5] I: ¿Con qué característica?
> [6] E7-3: Es un triángulo rectángulo.
> [7] I: Perfecto. Si el enunciado nos pide comparar la altura del bastón y la hipotenusa ¿Qué valores tiene estas magnitudes?
> [8] E7-3: La altura del bastón 1 metro y la hipotenusa, espérame ... no sé.
> [9] I: ¿Cómo puedo hallar la longitud de la hipotenusa en un triángulo rectángulo?
> [10] E7-3 ¡Ah! Ya sé. Sumando los cuadrados de los catetos del triángulo que en este caso sería la altura del bastón y su sombra.

En la línea [4] E7-3 demuestra su *habilidad para interpretar* el problema al identificar correctamente que se forma un triángulo rectángulo entre el bastón, su sombra y el rayo de luz. Aunque inicialmente menciona solo un triángulo, al reflexionar sobre la pregunta de I en [5], logra precisar la naturaleza del triángulo. Asimismo, la *habilidad de explicación* se pone en práctica cuando E7-3 intenta identificar las magnitudes solicitadas (altura del bastón y la hipotenusa) {Línea [8]}. Aunque en primer a instancia no conoce cómo encontrar la hipotenusa, reconoce la relación geométrica al escuchar la pregunta de I y explica el procedimiento para calcularla mediante el Teorema de Pitágoras.

En este intercambio, I juega un papel clave al cuestionar constantemente a E7-3, pero sin el "*¿por qué?*", al parecer el diálogo subrayó la importancia de esta pregunta para que apareciera la habilidad de argumentación porque un "*¿Qué?, "¿Cómo?*" es una invitación a explicar el procedimiento.

> [8] I: ¿Qué vale uno y qué vale dos?
> [9] E14-4: La altura del batón vale un metro y la sombra 2 metros.
> [10] I: Excelente. Y ¿Cuál sería el área del cuadrado que se forma sobre la hipotenusa?
> [11] E14-4: Cinco.
> [12] I: Bien, entonces ¿cuál sería su longitud?

[13] E14-4: Raíz de cinco, porque el área es cinco y se le saca la raíz para hollar el lado del cuadrado.

La estudiante E14-4 en la línea [9] interpreta correctamente las magnitudes iniciales del problema, demostrando su capacidad de comprender y organizar los datos presentados en el contexto. De igual manera, cuando [I] pregunta por el área del cuadrado formado sobre la hipotenusa en [10], E14-4 responde correctamente con el valor de "*cinco*", demostrando que comprende cómo aplicar el Teorema de Pitágoras, aunque de forma implícita (al sumar los cuadrados de los catetos, $Si\ 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow h = \sqrt{5}$). También explica cómo encontrar la longitud de la hipotenusa al indicar que se obtiene extrayendo la raíz cuadrada del área del cuadrado.

En el momento 3 con el ánimo de saber que conocían los estudiantes de las razones trigonométricas, [I] propició la siguiente conversación.

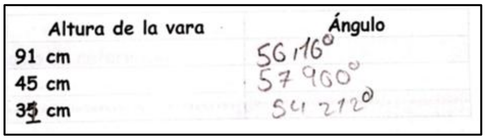
[14] I: ¿Qué es una razón trigonométrica?
[15] E27-4: Son las <u>relaciones</u> que hay entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
[16] I: Excelente. ¿Todos están de acuerdo en que las razones trigonométricas me permiten <u>comparar</u> los lados de un triángulo rectángulo? ¡Bueno! Teniendo en cuenta un <u>ángulo de referencia</u>. [Algunos estudiantes responden que sí].

La estudiante E27-4 al parecer usa sus conocimientos previos porque expone con palabras claves como “*relaciones, catetos e hipotenusa*” con la finalidad de hacerse entender al grupo. Agrega I, para complementar la respuesta la expresión “*ángulo de referencia*”. Aunque no todos asienten, si hay una aptitud de hacer intangible al grupo el objeto de conocimiento.

Asimismo, en este momento se facilitó especialmente la pauta de *múltiples medios físicos de acción* al fomentar el uso de herramientas de medición, así como calculadoras y software de geometría dinámica como GeoGebra para hallar los ángulos.

Figura 27

Uso de herramientas tecnológicas para realizar el momento 3



Altura de la vara	Ángulo
91 cm	56,16°
45 cm	57 900°
35 cm	54 212°

a)

b)

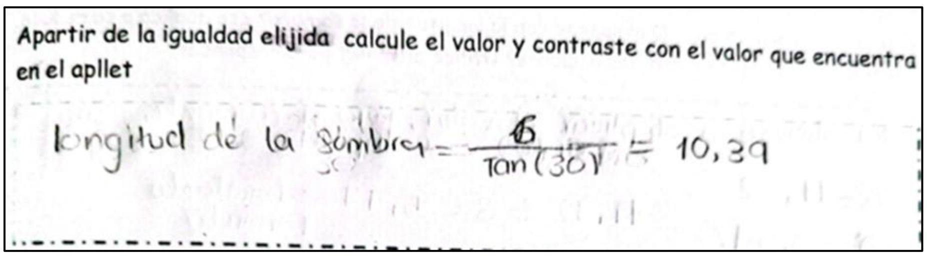
En la ***Figura 27*: a)** se observa los ángulos de referencia para hallar las razones trigonométricas mostradas en la **Figura *19*** esto fue llevado a cabo con el uso del software GeoGebra y acompañamiento del investigador que se evidencia en la ***Figura 27*: b).** También, se infiere que hay una opción para apoyar las funciones ejecutivas por la estructura procedimental, ayudando a los estudiantes a organizar la información desde su forma de registro y cumplimiento con la tarea.

Para el momento final con la intencionalidad de evaluar los conocimientos alcanzados en la aplicación del diseño, en las siguientes líneas de diálogo se exhibe que las condiciones del problema 1 (*si se fija la hora a las* $8\ a.m$ *y la altura del bastón igual a* $6\ cm$ *se obtiene un ángulo de referencia de* $30°$ *y la sombra proyectada por este es igual a* 10.39), usando el applet de la **Figura *20*** presenta el estudiante E7-14 la *habilidad de interpretar* porque comprende el problema presentado a través del applet y establece relaciones cuantitativas como en las líneas [18 y 20] entre los datos proporcionados. Además, identifica que la sombra al duplicarse la altura del bastón también se duplica [22], interpretando correctamente la proporcionalidad entre las variables y magnitudes.

> [17] I: ¿Qué valor tiene la longitud de la sombra del bastón al fijarse las condiciones?
> [18] E7-4: Según el applet 10.39 .
> [19] I: ¿Qué pasa si duplicamos la altura del bastón, que sucede con la sombra?
> [20] E7-4: Bueno, la altura del bastón seria 12 y usando el applet la sombra da 20.78 .
> [21] I: ¿Qué relación tiene el valor de la primera sombra con esta nueva al duplicarse el bastón?
> [22] E7-4: Pues... es como el doble.
> [23] I: ¡Ajá! Perfecto.

Figura 28

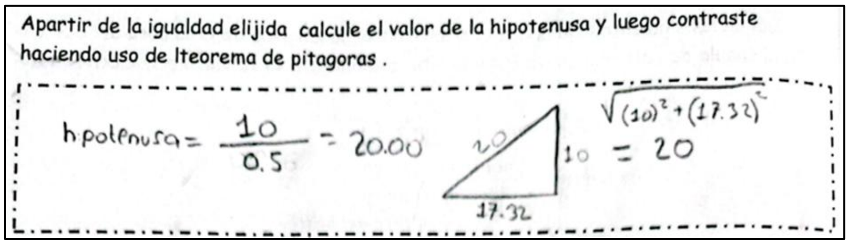
Solución del estudiante E7-3.



Ya finalizando la puesta en escena en el Momento 4 para el nivel 2 y 3, donde se pide al estudiante elegir la razón que permita calcular la longitud de la sombra y la hipotenusa, y para el nivel 4 que calcule y contraste el resultado de la razón con el Teorema de Pitágoras. Esos niveles debían usar los datos suministrados de la hoja, el applet y la calculadora. La situación posibilitó además de la pauta *proporcionar múltiples medios físicos de acción*, también *opciones para la expresión y hacer fluido la comunicación.* Por ejemplo, en la **Figura *28*** se observa que el estudiante E7-3 elije y expresa la igualdad que permite encontrar la longitud de la sombra, notando que la altura del bastón es 6 y dividiendo este valor por el seno del ángulo de referencia para luego usar la calculadora y llegar a que la longitud de la sombra es de 10.39 . Bajo esas mismas condiciones descriptas anteriormente, el estudiante se convence de la coherencia que hay en el problema 1, dicho de otra forma, una opción para apoyar a ejecutar la actividad fue el uso de applet y calculadora.

Figura 29

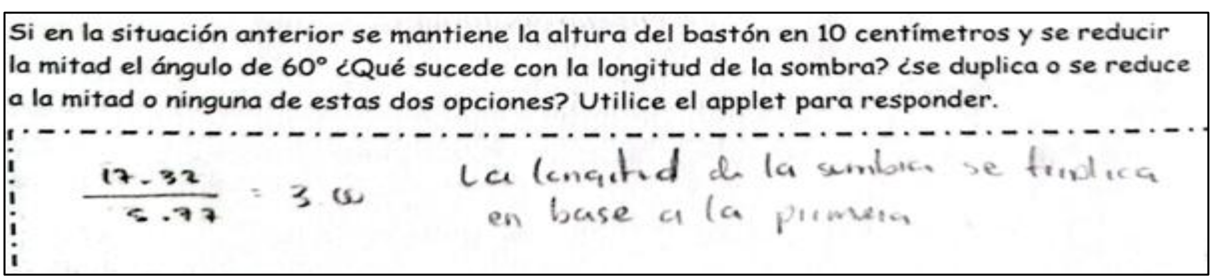
Representación del estudiante E14-3



Respecto a contrastar el valor de la hipotenusa haciendo uso de una razón y el Teorema de Pitágoras como se expone en la **Figura *29*** el estudiante E14-3 elige la razón que le permitiera hallar la hipotenusa, además hace una representación figural de la situación asignando valores para usar el Teorema de Pitágoras y redondear el valor a [Ecuación]. Asimismo, el último enunciado del problema 2 del momento 4 cuyo propósito fue que el estudiante analizara y explicara qué sucede cuando se reduce a la mitad el ángulo de referencia.

Figura 30

Respuesta estudiante E23-3



En la respuesta de la **Figura *30*** la habilidad más evidente de E23-3 es la explicación, ya que el estudiante utiliza el applet para determinar que la longitud de la sombra se triplica, y demás lo justifica al escribir el cociente entre los valores proporcionados por el applet ([Ecuación]) y concluye que "la longitud de la sombra se triplica en base a la primera".

5.3 La historia proporciona múltiples formas de implicación

Referente al Principio III el cual consiste en que los profesores negocien significados con el fin de proporcionar opciones para la comprensión, enfocándose en la implicación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Las pautas asociadas a este principio son:7) proporcionar opciones para captar el interés, 8) proporcionar opciones para mantener el esfuerzo y la perseverancia y 9) proporcionar opciones para la autorregulación.

Al respecto, Maza (1994) menciona otras dos maneras para llevar a cabo la enseñanza de la Historia de las Matemáticas: mencionar o relatas anécdotas históricas e introducir o discutir alrededor de un concepto.

En este sentido, desde las orientaciones del maestro tanto en el momento 1 y 2 se posibilitó el relato de anécdotas relacionadas con la trigonometría, las razones geométricas y las razones trigonométricas, destacando así el origen de la trigonometría. Se pone en contraste la siguiente conversación antes de empezar el Momento 1:

> [24] I: Jóvenes, antes de empezar, me gustaría hacerles la siguiente pregunta ¿A que civilizaciones se le atribuye las primeras ideas intuitivas sobre la trigonometría? ¿alguien sabe?
> [25] E19-4: ¿los Romanos? [Algunos estudiantes discuten entre ellos].
> [26] I: ¿Qué dicen todos sobre lo dicho por E19-4?
> [27]E4-3: Creo que fueron los griegos primero.
> [28] I ¡Muy bien E4-3! No fueron los primeros, pero estos si aportaron significativamente al desarrollo de este campo. Devolvámonos un poco más atrás.
> [29] E20-4: ¿Los egipcios?
> [30] I; Excelente E20-4. ¿Por qué cree que fueron ellos?
> [31] E20-4: No sé, lo había escuchado.
> [32] I: También hay que resaltar que no solo fueron los egipcios sino también la civilización babilónica, los cuales empezaron a usar ideas intuitivas de razón para el cálculo de medidas de terrenos e incluso sus calendarios. Luego de ellos como dijo [E20-4, (línea 4)] fueron los griegos que empezaron hacer un estudio más profundo de la trigonometría. Incluso en la Historieta que ahorita vamos a leer aparece un matemático griego que contribuyó a este estudio, el cual fue Tales de Mileto.

Del anterior dialogo en la línea [23] se abre el espacio para que los estudiantes compartan ideas, articulando opciones para captar su interés. Posteriormente en las líneas [25 y 26] al pedir opiniones sobre la respuesta de un compañero se promueve la pauta *proporcionar opciones para mantener el esfuerzo y persistencia* al invitar a la construcción social del aprendizaje y el intercambio de perspectivas. Por su parte, Gutiérrez (2019) afirma que la conexión entre la historia y a la enseñanza de las matemáticas favorece la formación humana del estudiante dado que los confronta consigo mismo y le despierta la sensibilidad.

Asimismo, en este momento 1 se permitió a algunos estudiantes representar los personajes mientras los otros leían mentalmente fomentando opciones *para captar el interés* y *opciones para la autorregulación* al vincular a cada estudiante en la actividad como se observa en la **Figura *31*** en la que [I] se encuentra mediando la actividad de lectura. Igualmente, para este momento se generó discusión con preguntas como ¿qué sucede con las sombras de los objetos al amanecer o atardecer? y ¿cómo estimó Tales la altura de la pirámide? Estas preguntas fomentan el análisis de la historieta y la deducción proporcional entre la altura y las sombras tenido en cuantas las putas de Principio III.

Figura 31

Momento 1: asignación de roles para la lectura de la historieta

Es importante que el lector se convenza que para los Momentos de la puesta en escena se intentó involucrar en el aprendizaje y trabajo a los estudiantes, de esta manera se presenta la siguiente discusión que se tuvo con varios estudiantes en el Momento 1 en el uso del applet de GeoGebra sobre las concepciones que tiene todo el grupo sobre semejanza y congruencia entre dos triángulos.

[33] I: ¿Qué quiere decir que el triángulo ABC es semejante al triángulo EDC?.

[34] E27-4: Las longitudes de los lados del triángulo pequeño (triángulo EDC) camben tantas veces en las longitudes del triángulo grande (Triángulos ABC).

[35] I: Muy bien. De esa manera se puede definir una proporcionalidad entre los lados de los dos triángulos. Ahora si les preguntara y ¿qué es congruencia entre dos triángulos?

[36] E4-3: Creo que congruencia es que concuerda con algo

[37] I: A, ¿puedes explicarlo mejor?

[38] E4-3: Que es como una relación entre dos cosas.

[39] I: ¿Qué creen ustedes, jóvenes? ¿Qué sería congruencia?

[40] E20-4: Que tienen algo parecido.

[41] I: Cerca. Por ejemplo, si yo cortará una hoja por su diagonal se obtendrían dos triángulos que tienen las mismas características ¿estos triángulos son congruentes o semejantes?

[42] E20-4: ¡Ah! Son congruentes porque tiene la misma longitud de los lados y los mismos ángulos.

En la anterior discusión, [I] propicia el espacio para entender la semejanza y congruencia en triángulo a través de preguntas y un ejemplo práctico (cortar una hoja, línea [42]) los estudiantes consiguen reflexionar sobre la relación proporcional, línea [34], y la igualdad de los lados y ángulos en triángulos congruentes. Aunque algunos tienen respuestas imprecisas como en las líneas [36 y 40], el ejemplo permite a E20-4 recordar las características subyacentes al concepto de congruencia.

Además, en el desarrollo de la guía en este mismo momento con los estudiantes se analizó y dialogó sobre la definición de razón geométrica y se planteó cuestiones como: a qué se refiere comparar magnitudes y que el cociente sea una constante, por qué hacen parte de este concepto los números π y $\sqrt{2}$. Con lo anterior, encontramos que algunos estudiantes tenían convenciones previas sobre la razón y estaban familiarizados con los ejemplos descritos en la hoja de trabajo.

Por último, en el Momento 2 con el cumplimiento de las pautas en este Principio como se muestra en la **Figura** ***32,*** [I] se encuentran discutiendo con los estudiantes sobre la naturaleza misma de los matemáticos preguntando si creían que la notación simbólica que aprecia en la hoja de trabajo fue usada siempre en las matemáticas a lo que se concluyó que no fue siempre así, ya que antaño se usaba más un método retorico sincopado según D' Amore (2011) al referirse al uso de la historia de las matemáticas como recurso didáctico desarrolla el análisis crítico de la evaluación de las ideas, además el desarrollo de los hechos históricos.

Figura 32

Discusión sobre las notaciones en matemática en el momento 2

Particularmente en la actividad realizada en el momento 3 de la puesta en escena se trabajó a partir de la conformación de grupos 4 estudiantes, lo cual implica una opción para implicar a los estudiantes en comprender las razones trigonométricas. En la ***Figura 33*; b)** se observa a un grupo de estudiantes; una estudiante se encuentra sostenido verticalmente el palo de balso y su compañera contigua a su izquierda toma las medidas de la respetiva sombra para que su compañera de la derecha registre los datos. Esta actividad permitió que los estudiantes participaran activamente al recolectar y analizar dados sobre la proyección de sombras, lo que estimuló la curiosidad. Además, el hecho de trabajar en grupos generó un entorno de colaborativo que incluso resultó atractivo para algunos estudiantes brindando una *opción para captar el interés* y *de autorregulación*. Igualmente, como se ilustra ***Figura 33*: a)** la intención de que [I] explique los propósitos de la actividad, también contribuye a que los estuantes comprendan el valor de la actividad y perseveren en ella fomentando así una *opción para mantener el esfuerzo y la perseverancia.*

Figura 33

Acompañamiento momento 3

a) **b)**

Por último, se considera que los applets definidos para propiciar actividades en el momento 2 y 4 hizo que los estudiantes se involucrarán activamente en el desarrollo de la secuencia, al interactuar y preguntar sobre estos, lo cual se vincula con opciones para la implicación en el proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes

Es así que de esta manera hemos expuesto un panorama amplio respecto a la puesta en escena del diseño vinculando la historia y la epistemóloga de la trigonometría con el propósito de posibilitar las pautas y principios del DUA. De tal forma, en el siguiente capítulo se procede a responder la pregunta de investigación.

6 Conclusiones

En este capítulo se responde a la pregunta de investigación, a saber ¿Q*ué alcances proporciona un diseño sobre razones trigonométricas que vincula aspectos históricos y atiende la Diversidad*?, de acuerdo a las tres categorías de resultados. Las conclusiones se esbozan a continuación:

6.1 La historia y epistemología favorece múltiples representaciones

El diseño didáctico basado en la historia y epistemología favoreció múltiples representaciones para la comprensión de las razones trigonométricas. Las herramientas utilizadas como la historieta, los applets del momento 1 y 4, y la actividad practica del momento 3, permitieron a los estudiantes abordar este tema desde una perspectiva distinta; por medio de hechos históricos y situaciones relacionadas con la vida real como las proyecciones de sombras de los objetos. Además, las hojas de trabajo ofrecieron diversas opciones para percibir y presentar la información; considerando distintos registros: grafico, lenguaje natural y simbólico, así como distintas maneras de representas las razones trigonométricas: operador y cociente.

6.2 La historia y epistemología facilita múltiples formas de acción y expresión

Como se expuso en el apartado 5.2. el diseño didáctico en cada uno de sus momentos posibilitó la implementación de las tres pautas del Principio II del DUA en el desarrollo de las actividades propuesta. En primer lugar, se ofrecieron múltiples medios físicos de acción: en el momento 1, se usaron portátiles; en el momento 2 y 3, herramientas de medición como palos de medida, calculadoras y la aplicación GeoGebra para calcular ángulos, y en el momento 4, el uso de dispositivos móviles y calculadoras.

En cuanto a ofrecer opciones variadas para la expresión y la comunicación fluida, desde el diseño y el rol del investigador fomentó la muestra de habilidades comunicativas como la interpretación, explicación, justificación y argumentación según lo expuesto por Parada y Fiallo (2018), aunque se concluye que no se fomentó la habilidad argumentativa

. Por último, para apoyar las funciones ejecutivas se proporcionó una estructura procedimental en el momento 3, lo cual ayudó a los estudiantes a organizar la información, registrar su proceso y cumplir la tarea asignada.

6.3 La historia y epistemología proporciona múltiples formas de implicación

En la puesta en escena se evidencia que el diseño permitió involucrar activamente a los estudiantes en el aprendizaje de las razones trigonométricas por medio de la historia y la epistemología y la actividad proactiva del momento 3. A partir, de esta primera se fomentó la discusión, reflexión y análisis de los contenidos presentados en las hojas de trabajo, mientras que en la segunda ofreció opciones para captar el interés y fomentar la autorregulación, al crear un entorno colaborativo y atractivo para los estudiantes par las mediadas y cálculo de las razones trigonométricas.

Se resalta que el rol del maestro fue fundamental en este proceso de la implementación del diseño dado su acompañamiento constante, explicando el propósito de cada actividad y generando discusiones, esto proporcionó un marco que fomentó el esfuerzo y la perseverancia tal como lo define el DUA.

7 Reflexiones y perspectivas

Desde nuestra perspectiva esta investigación ha ofrecido resultados relevantes relacionados con el uso de la historia de las matemáticas y la atención a la diversidad en el aula. Consideramos que es fundamental integrar la historia y la epistemología en el estudio de las matemáticas, no solo en el caso de las razones trigonométricas, sino en la enseñanza de las matemáticas en general. Este enfoque permitió explorar los conceptos matemáticos relacionados con las razones trigonométricas desde sus orígenes y rescatando el sentido lógico, al otorgarse un sentido practico y cultural a los conceptos, asimismo proporcionó una visión más amplia de las matemáticas; humanizándola y contextualizándola.

Además, el diseño de actividades con niveles de profundidad resultó ser una buena estrategia para atender la diversidad en el aula. Al adaptarse las actividades a las características particulares de los estudiantes, se promovió un ambiente de aprendizaje inclusivo que incluso favoreció el desarrollo del pensamiento crítico.

A partir de este de este análisis surge una reflexión para futuras investigaciones ¿*Como desarrollar un diseño sobre le estudio de las razones trigonométricas para que vincule la historia como elemento integrador y premiable, articulándose de manera efectiva con los principios de DUA*? El anterior interrogante abre nuevas posibilidades para seguir profundizando en como la historia puede ser un recurso importante promover la inclusión el pensamiento crítico en el aula.

.

Referencias bibliográficas

Abonia, L. y Miranda, W. (2017) *Un acercamiento histórico a las razones trigonométricas seno y coseno para la implementación de una actividad en el aula*. [Tesis de pregrado]. Universidad del valle.

Álvarez, B. (2018). Las razones trigonométricas: una propuesta didáctica para su comprensión, a partir de un análisis histórico epistemológico. [Tesis de maestría]. Universidad Nacional de Colombia.

Arango, J. (2017). *Las herramientas tecnológicas, una mediación para la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas.* [Trabajo de grado]. Universidad Católica de Manizales. Tomado de:

https://repositorio.ucm.edu.co/bitstream/10839/2023/1/Juliana%20Arango%20Arias.pdf

Aray, C., Guerrero, Y., Montenegro, L., y Navarrete, S. (2020). La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario. ReHuSo: Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales, 5(2), 62-69. https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/1684

Arouxét, M., Cobeñas, P., y Grimaldi, V. (2019). Aportes para pensar la inclusión de alumnos sordos en aulas de Matemática de la educación superior. Revista de educación matemática, 34 (1), 31-51.

Ayala, J., López., C., Lara, F., y Lara, M. (2021). Factores determinantes que influyen en el aprendizaje matemático en estudiantes de Primer Año de Bachillerato de la Unidad Educativa "Carlos Cisneros". *Revista científica dominio de las ciencias*, 7 (3), 513-527.

Boyer, C. (1986). Historia de las matemáticas. Alianza editorial.

Brown, T. (2006). Understanding the fragmented concepts of fundamental trigonometric ideas. Journal of Mathematics Education, 12(3), 45-60.

Cardona, J. (2017). *Uso de las TIC como una herramienta para la enseñanza de las funciones trigonométricas.* [Tesis de maestría]. Universidad nacional de Colombia. Tomado de: https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/60938/71384845.2017.pdf?sequence

Chilito, B. (2021). *La enseñanza de las razones trigonométricas, mediadas por objetos digitales de aprendizaje en la institución educativa Piedra de León (Sotaré-cauca)*. [Tesis de maestra]. Universidad Cooperativa de Colombia. Tomado de: https://repository.ucc.edu.co/server/api/core/bitstreams/5fb330c9-6b80-4796-acdc-e2173d4723d7/content

Constitución Política de Colombia [Const]. C. P. (1991). Art.67. 7 de julio de 1991 (Colombia).

Convención sobre los derechos de las personas con discapacidad. [ONU]. Art. 24. 1 de Julio de 2008. (Nueva York y Ginebra).

D' Amore, B. (2011). Didáctica de la Matemática. Editorial Magisterio. Bogotá,

Delgado, J. (2023). *Diseños didácticos para la inclusión en la enseñanza de las fracciones en niños de quinto grado*. [Tesis]. Universidad Industrial de Santander.

Duval, R. (1993). Semiosis y neosis. En E. Sánchez y G, Zubieta (Eds.). Lecturas en didáctica de la matemática. Escuela Francesa (pp.118-144). México: Sección de Matemática Educativa del CENVESTAV-IPN.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. [Tesis de doctorado]. Universidad de valencia.

Fiallo, J., y Parada, S. (2018). Estudio dinámico del cambio y la variación. Curso de precálculo mediado por Geogebra. Ediciones UIS.

Gómez, B. y Torres, F. (2023). La enseñanza y aprendizaje de la trigonometría a partir de prácticas matemáticas que fundamentan la relación entre trigonometría y música.

Trabajo de investigación para optar al título de Licenciado en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Gómez, J. (2013). *Trigonometría en la inclusión educativa: Rompiendo barreras*. Universidad Católica de Manizales.

González, C. y Mendoza, J. (2018). Más de 60 años de presencia de la trigonometría en la educación media colombiana: Una mirada a libros de textos escolares. Universidad Pedagógica Nacional. http://hdl.handle.net/20.500.12209/11114

Guacaneme, E. (2016). Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia.

Guevara, G., Vardesoto, A., y Castro, N. (2020). Metodología de investigación educativa (descriptivas, experimentales, participativas, y de investigación-acción). *Revista Recimundo*, 4(3), 163-173.

Gutierrez, D. (2016). *Sistemas de geometría dinámica como herramientas como herramientas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de trigonometría en a la educación secundaria*. [Especialización]. Universidad de Cantabria.

Gutiérrez, J. (2019). *La historia y la epistemología en la formación de un cieudadan o matemáticamente competente: un acercamiento desde el estudio de la trigonometría*. [Tesis de maestría]. Universidad Industrial de Santander.

Herrera, F. (2013). Abstracción y generalización en la enseñanza de la trigonometría: Un enfoque necesario para el aprendizaje significativo. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 16(1), 23-36.

ICFES. (2024). Programa para la Evolución Internacional de Alumnos (PISA). Informe nacional de resultados para Colombia 2022. Bogotá, 2024.

Imbaquingo, J, Bastidas, K, Gutiérrez, J y Alvarado, S. (2024). Aplicación de trigonometría en la resolución de problemas de la vida cotidiana para estudiantes de bachillerato. Reincisol, 3(5), pp. 1593-1607. https://doi.org/10.59282/reincisol.V3(5)1593-1607

Ibañes, M. y Ortega, J. (1998). Análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de trigonometría: Un estudio crítico. Revista de Educación Matemática, 10(1), 15-30.

Jácome, I., Parada, S., y Fiallo, J. (2024). Curricular propsal to address diversity in mathematics class: A design on sequences and patterns. Eurasia Journal of Mathematic, Scince and Technology Educaction 20(6), em2458.

Kieren, T. (1976). On tjhe mathematical, cognitive and instrumental fundations of rational numbers. In R, Lesh (ed.) Numbers and mesurement , p. 101-144. Colombus: ERIC-SMEAC.

Kieren, T. (1986). La partición, la equivalencia y la construcción de ideas relacionadas numeros racionales . Posedine of Fourth International Congres son Math Education.

Kusmayadi, T. y Sujadi, I. (2017). Representaciones matemáticas de estudiantes de secundaria en la resolución de problemas trigonométricos. *Journal the physics: Conferencie Series*, 855 (1). 12-21.

L**ö**sch, S., Rambo, C., y Ferreira, J. (2023) La investigación exploratoria en el enfoque cualitativo en eduación,. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação*, 18, 1-19.

Machuca, R. (2015). Lectura como estrategia para el aprendizaje de la trigonometría en estudiantes de secundaria de la institución educativa “San Angustian” de Cajas. [Tesis de maestría]. Universidad Nacional Del Centro Del Perú.

Maza, C. (1994) Historia de las matemáticas y su enseñanza; un análisis. SUMA. *Revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. 17, pp. 17-26-

MEN. (29 de agosto de 2017a) Por el cual reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. [Decreto 1421 de 2017].

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de competencias en matemáticas. MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). Derechos básicos de aprendizaje. MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2020). Orientaciones para promover la trayectoria educativa desde la educación media a la educación superior, en el marco de la educación inclusiva. MEN.

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonmiento proporcional y alternativas para el manejo de la de tres. Educación Matematica, 24(1), 133-157.

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico*. México: secretaria Publica.

Montiel, G. (2005). Estudio Socio epistemológico de la función trigonométrica. [Tesis de doctorado]. Instituto Politécnico Nacional CICATA.

Muñoz, L. (2023). *Criterio para el diseño de actividades dirigidos a estudiantes con talento matemático: valoración de un diseño sobre secuencias y patrones*. [Tesis]. Universidad Industrial de Santander.

Murallas, O. (2024). *Función lineal: un diseño para atender a estudiantes con discapacidad auditiva en clase de matemáticas.* [Tesis]. Universidad Industrial de Santander.

Nolivos, N. y Moreira, J. (2023). GeoGebra como herramienta didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas. *Código Científico Revista de investigación,* 4(1), 112-131. Tomado de: https://revistacodigocientifico.itslosandes.net/index.php/1/article/view/88

Olivera, S. W. (2011). Taxonomía de Bloom. Universidad Cesar Vallejo, 4.

Parada, S. (2022). Educadores matemáticos que reflexionan sobre la atención a la diversidad en el aula. Conferencia presentada en el Foro EMAD 2022. Transmitida el 15 de noviembre [Vdeo]. Tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=mhGg9HbeSro

Pérez-Díaz , H. M. (2020). Las funciones trigonométricas y sus aplicaciones. Con-Ciencia Boletín Científico De La Escuela Preparatoria No. 3, 7(13), 35-37. https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa3/article/view/5199

Rodríguez, G., y Sgrecia, N. (2021). Predisposición y comprensión de estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas trigonométricos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 108, 119-148.

Rueda, D. (2023). *Estudio de razones trigonométricas ajustado a las características particulares de estudiantes en décimo grado*. [Tesis]. Universidad Industrial de Santander.

Silva, J. (2019). Reflexiones sobre las metodologías tradicionales en la enseñanza de la trigonometría: Propuestas para un rediseño curricular efectivo. Investigaciones en Didáctica Matemática, 22(4), 78-92.

Téllez, G., Nolasco, G., Juárez, J., y Juárez, E. (2021). Experiencias de estudiantes de bachillerato al resolver una tarea de libro de texto y una tarea auténtica de trigonometría. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 108, 7-25.

UNESCO. (2017). Compromiso de Cali sobre equidad e inclusión. Cali: UNESCO.

UNESCO. (2017). Informe GEM. http://gem-report-2017.unesco.org/es/inicio/.

UNESCO. (2019), Declaración mundial sobre la educación superior en el siglo XXI: visión y acción. Revista Educación Superior y Sociedad (ESS),9(2), 97-113. https://www.iesalc.unesco.org/ess/index.php/ess3/article/view/171

Vaca, B. y Armas, V. (2020). Amor u odio a la matemática: Refección desde la práctica pedagógica. *Revista educare*, 24 (2), 338-352.

Velasco, A. (2022). Profesores de matemáticas en ejercicio que reflexionan sobre la atención a la diversidad en clase de matemáticas. [Tesis de maestría]. Universidad Industrial de Santander.

Villamarín, G. y Gualán, C. (2024). Guía didáctica con enfoque constructivista para el aprendizaje de la trigonometría plana en los estudiantes de primer semestre (Tesis de grado). Universidad Nacional de Chimborazo.

Vitola, F. y Rosa, D. (2022). Enseñanza y aprendizaje de la trigonometría: Un abordaje desde las investigaciones doctorales en educación matemática. Revista Internacional de Educación Matemática, 15(2), 228-253.

.

Apéndice A. Malla curricular ajustada

egunta Orientador	Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
	Descriptores	Propósito	Descriptores	Propósito	Descriptores	Propoito
	comparación y ejercitación de procedimientos:		**y ejercitación de procedimientos:**		**comparación y ejercitación de**	
	Lista, completa, identifica y relaciona la razón y la proporción a partir del problema histórico resuelto por Tales de Mileto.		Selecciona y compara las caracteristicas de una razón y proporción a partir del problema histórico resuelto por Tales de		Selecciona, compara y analiza las caracteristicas de una razón y proporción a partir del problema histórico resuelto por	
	Lista, identifica y relaciona las razones trigonométricas haciendo uso de SGD.		Selecciona, compara y analiza las caracteristicas de una razón trigonométrica haciendo uso de SGD		Clasifica y relaciona las caracteristicas de una razón trigonométrica haciendo uso de SGD	
	Comunicación:		**Comunicación:**		**Comunicación:**	
	Reconoce a partir de un problema histórico caracteristicas de la razón y proporción.		Justifica a partir de caracteristicas propias de las razón y proporción respecto al problema histórico resuelto por Tales de Mileto	**Pensamiento Variacional** Comprende el concepto de razón trigonométrica partiendo de la relación entre las medidas lineales y medidas angulares de un triángulo rectángulo a partir de un problema de sombras	Argumenta a partir de las caracteristicas de razón y proporciòn respecto al problema histórico resuelto por Tales de Mileto	
	Reconoce la estructura propia de una razón.					
	Reconoce las caracteristicas de una razón trigonométrica haciendo uso de SGD.	**Pensamiento Variacional** Reconoce el concepto de razón trigonométrica partiendo de la relación entre las medidas lineales y medidas angulares de un triángulo rectángulo	Justifica a partir de características de una razón trigonométrica haciendo uso de SGD		Argumenta a partir de características de una razón trigonométrica haciendo uso de SGD	**Pensamiento Variacional** Analiza y construye el concepto de razón trigonométrica partiendo de la relación entre las medidas lineales y angulares de un triángulo rectángulo a partir de un problema de sombras
¿Cómo se pueden medir las sombras?	Justifica a partir de caracteristicas propias de las razón, proporción y razón trigonométrica.					
	Razonamiento:		**Razonamiento:**		**Razonamiento:**	
	Relaciona a partir de un problema histórico caracteristicas de la razón y proporción		Establece, comprende e interpreta la razón y proporción a partir del problema histórico resuelto por Tales de Mileto.		Comprende, plantea e interpreta las caracteristicas de una razón y proporción a partir del problema histórico resuelto por	
	Relaciona las caracteristicas de una razón trigonométrica haciendo uso de SGD		Establece, comprende e interpreta las caracteristicas de una razón trigonométrica haciendo uso de SGD.		Comprende, plantea e interpreta las caracteristicas de una razón trigonométrica haciendo uso de SGD	
	Resolución de Problemas		**Resolución de Problemas**		**Resolución de problemas:**	
			Resuelve problemas planteados a partir de las caracteristicas de la razón y proporción		Resuelve problemas planteados a partir de las caracteristicas de la razón y proporción	
			Resuelve problemas planteados a partir de las caracteristicas de una razón trigonométrica		Resuelve problemas planteados a partir de las caracteristicas de una razón trigonométrica	

Apéndice B. Formato de caracterización

EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:
EDUMAT –UIS

PROYECTO:
Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores

Formato de caracterización de educandos para la implementación de diseños

DATOS PERSONALES DEL ESTUDIANTE[1]

FOTO

Nombre(s):	Apellidos:
Juan Felipe	Duran Pulido
Edad (cronológica):	Sexo:
18 años	Masculino
Dirección de residencia:	Teléfono:
Calle 9 #25-48	[illegible]
Nombre de la madre:	Nombre del padre:
Sandra milena pulido Lizcano	[illegible] duran pulido
Ocupación de la madre:	Ocupación del padre:
Comerciante	
Número de hermanos:	Nombre de los hermanos:
1	[illegible] duran pulido
Personas con quien convive	Parentesco
Convive con 5 personas.	
DATOS ACADÉMICOS Y COGNITIVOS	
Nombre de la institución en la que se encuentra vinculado(a)	Característica de la institución: (especificar si es pública o privada)
Universidad industrial de Santander	pública.
Dirección de la institución:	Teléfono de contacto con la institución:
Grado en el que está incluido(a):	Nivel (primaria, secundaria, media vocacional)
¿Cuenta con apoyo particularizado en la institución?	¿Con qué apoyos cuenta en la institución?
¿Cuenta con apoyo particularizado en casa?	¿Con qué apoyos cuenta en casa?

[1] El formato debe ser diligenciado por el profesor con la ayuda de los padres (o acudientes) y si es posible del personal encargado en cada institución.

1

¿Recibe alguna terapia o atención especializada por parte de la EPS (o algún servicio médico)?	¿Qué tipo de terapia o atención recibe?
nada	nada

DATOS CLÍNICOS

¿El educando cuenta con algún diagnóstico clínico? Sí _x_ No ___	El diagnóstico es: Médico______ Neurológico Psiquiátrico___ Psicológico_x_ De trabajo de Social___ Otro___Especifique cuáles ____________

Si su respuesta es positiva indique cuál es el diagnóstico y explíquelo:
Lo diagnosticaron de TDAH, ya que presentaba problemas de atención, de organización

¿Cómo describen los padres (o acudientes) al estudiante?

¿Cómo describe usted como profesor al estudiante? (tiene en cuenta los siguientes aspectos: ¿cómo es la memoria (corto o largo plazo)? ¿es necesario repetirle continuamente las indicaciones? ¿comprende las consignas y enunciados dados? ¿cómo es su [illegible] ¿cuál es la forma de comunicación que más se ajusta a sus necesidades? ¿cómo es su atención? ¿cuáles son sus habilidades? ¿qué dificultades identifica en él/ella? ¿sigue el mismo currículo del grupo? ¿qué ajustes curriculares han realizado para él/ella?

Felipe es una persona muy activa, es muy sociable, le gusta hablar con las personas, no es necesario repetirle las cosas ya que capta todo muy bien, él sigue el mismo plan de estudios de la carrera, le va muy bien gracias a los métodos de organización y de estudio que le propuso la psicopedagoga

De acuerdo, a la caracterización de los niveles de profundidad de los diseños para la inclusión en clase de matemáticas ¿qué nivel de diseño implementaría con el estudiante?

- NIVEL 1___NIVEL 2___NIVEL 3___NIVEL 4___

Nota: No podemos usar el modelo sugerido por que la persona con la que vamos a trabajar ya se encuentra en educación superior, por esa razón se están realizando una búsqueda sobre algunos modelos o actividades ajustadas a sus necesidades

_________________________ - ______________

Nombre de la persona que diligencia el formato- Cargo o relación

Apéndice C. Diseño nivel de profundidad 2

¿Cómo podemos medir las sombras?

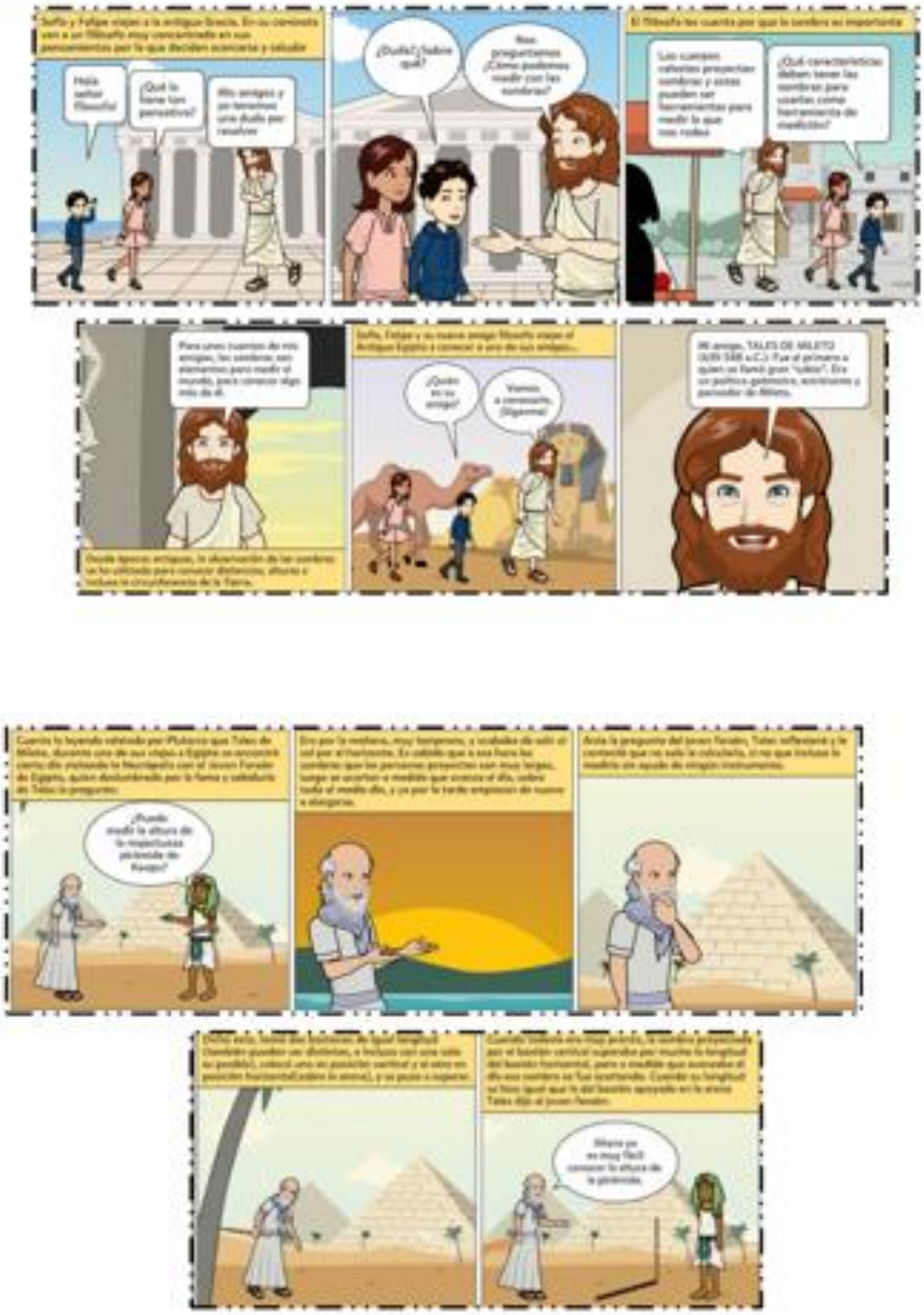
10°-11°

NOMBRE: ____

Fecha: ____________________ Colegio: ____________________

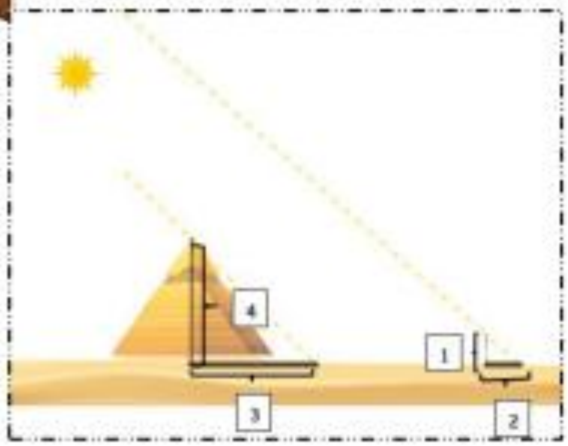
Momento 1

¿Cómo podemos medir las sombras?



¿Cómo podemos medir las sombras?

La siguiente imagen representa la situación de Tales de Mileto. Identifique y escriba los elementos dados por cada número.



1.

2.

3.

4.

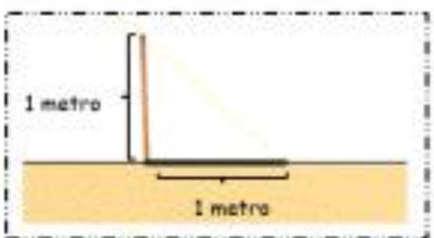
RECUERDA QUE: Razón geométrica, es la comparación entre dos cantidades A y B cuyo resultado es constante

$$\frac{A}{B} = constante$$

Algunos ejemplos de razón geométricas son:

- $\frac{Longitud\ del\ lado\ del\ cuadrado}{Diagonal} = \sqrt{2}$
- $\frac{Longitud\ de\ la\ circunferencia}{Diametro} = \pi$

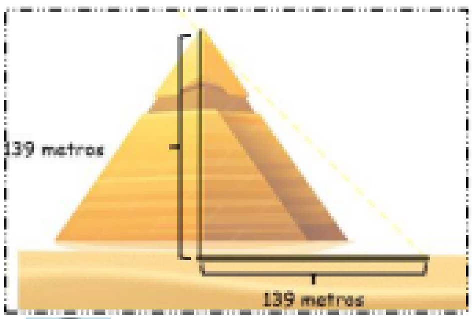
Teniendo en cuenta la información anterior y la situación de la historieta, ayude a Sofía a identificar la expresión que compara la altura del bastón, respecto a la longitud de su sombra cuando se tienen los siguientes valores.

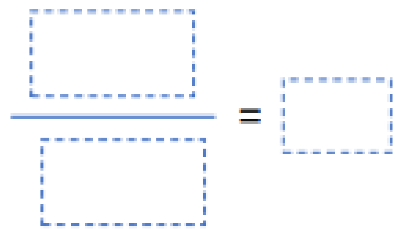


$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

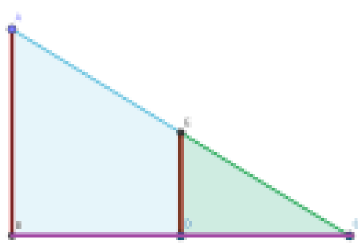
¿Cómo podemos medir las sombras?

Ahora ayude a Felipe a identificar la expresión que compara la altura de la pirámide respecto a la longitud de su sombra.





Sabias qué…



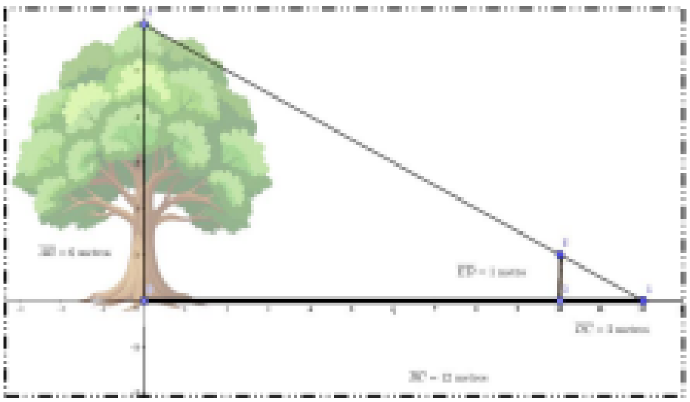
Una proporción es la igualdad entre dos o más razones, por ejemplo, si observamos la imagen de los triángulos ΔABC y ΔEDC podemos comparar la longitud del segmento $\overline{AB}$ con la longitud del segmento $\overline{ED}$ (Segmentos rojos) y la longitud del segmento $\overline{BC}$ y la longitud del segmento $\overline{DC}$ (Segmentos morados)

Simbólicamente

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} \text{ ó } \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{DC}}$$

Ejemplo: Imagina que el segmento AB ($\overline{AB} = 6\, metros$) representa la alutra de un árbol, el segmento ED su sombra ($\overline{ED} = 12\, metros$), el segmento BC ($\overline{BC} = 1\, metro$) la altura de la vara y el segmento DC ($\overline{DC} = 2\, metros$) su sombra. Vea la siguiente imagen

¿Cómo podemos medir las sombras?



Para la situación se tiene la proporción:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{DC}}$$

Remplazando los datos

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Simplificando,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

El archivo de *GeoGebra* representa geométricamente los triángulos semejantes formados en la situación de Tales y la pirámide.

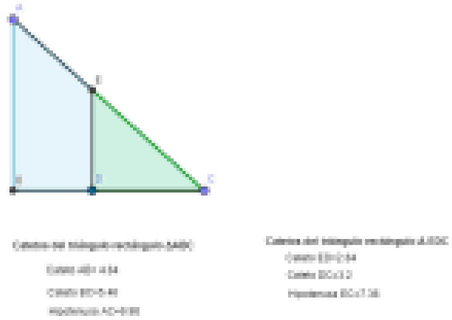


Ilustración 1. Actividad GeoGebra 1

(ACTIVE COMANDO RAZONES) De acuerdo con lo observado responda. Si mueve el punto A ¿qué sucede con las razones $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$, es decir presentan algún cambio? Y si mueve el punto D , ¿Cuál razón cambia entre $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$? Justifica.

¿Cómo podemos medir las sombras?

Defina algunas razones de acuerdo con los triángulos rectángulos ΔABC y ΔEDC diferentes a los establecidos en el Applet.

Teniendo en cuenta lo anterior, proponga dos proporciones entre los lados correspondientes de los triángulos rectángulos ΔABC y ΔEDC.

(ACTIVE COMANDO ÁNGULO) Si mueve el punto A. ¿Qué sucede con el ángulo de referencia y las razones $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$? Justifica.

Si mueve el punto D. ¿Qué sucede con el ángulo de referencia y las razones $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$? Justifica.

¿Si se mueve el punto C el ángulo de referencia se mantiene al igual que las razones entre $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$? Justifica.

Momento 2

¿Cómo podemos medir las sombras?

Sofía y Felipe tomaron los siguientes datos a cierta hora del día: la altura del bastón es de 1 m y su sombra proyectada es de 2 m. Además, la pirámide mide 139 m de altura y su sombra proyectada es de 278 m. Podemos definir las siguientes razones a partir de un ángulo de referencia. Complete a partir de los valores numéricos antes descritos (Nota: para hallar la hipotenusa de cada situación use el Teorema de Pitágoras)

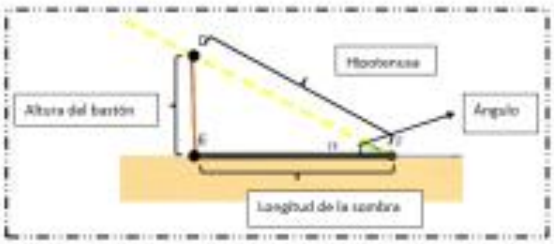
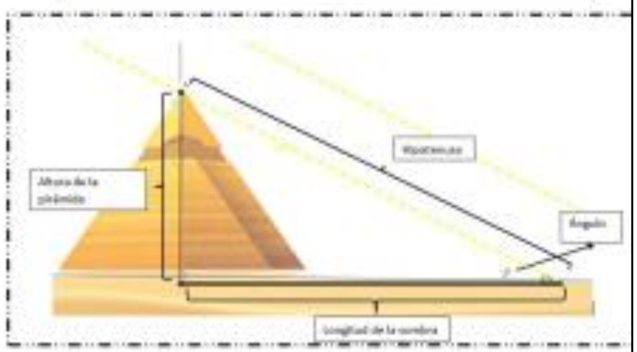


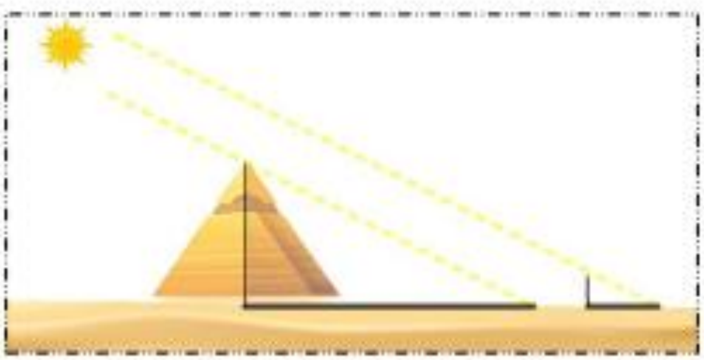
Tabla 1

Razones	$\alpha\ (Alfa) = 63.43°$
$\frac{Altura\ del\ bastón}{Hipotenusa}$	$\frac{\quad}{\quad} =$
$\frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{Hipotenusa}$	$\frac{\quad}{\quad} =$
$\frac{Altura\ del\ bastón}{Longitud\ de\ la\ sombra}$	$\frac{\quad}{\quad} =$

Tabla 2

Razones	$\beta\ (Beta) = 63{,}43°$
$\frac{Altura\ de\ la\ pirámide}{Hipotenusa}$	$\frac{\quad}{\quad} =$
$\frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{Hipotenusa}$	$\frac{\quad}{\quad} =$
$\frac{Altura\ de\ la\ pirámide}{Longitud\ de\ la\ sombra}$	$\frac{\quad}{\quad} =$





¿Cómo podemos medir las sombras?

¿Cuántas veces cabe la longitud de la sombra de la vara en su altura?

Si Sofía y Felipe tomaran los datos en otra hora del día ¿crees que las razones cambiarían o se mantendrían? Recuerda lo visto en la actividad usando el Applet. Justifica tu respuesta

Tengamos en cuenta lo siguiente:

Con los anterior las razones trigonométricas se definen como el cosciente entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo teniendo en cuenta un ángulo de referencia:

$$seno(\alpha) = \frac{Lado\ opuesto\ a\ (\alpha)}{Hipotenusa}$$

$$coseno(\alpha) = \frac{Lado\ adyacente\ (\alpha)}{Hipotenusa}$$

$$Tangente(\alpha) = \frac{Lado\ opuesto\ (\alpha)}{lado\ adyacente}$$

$$seno(\beta) = \frac{Lado\ opuesto\ a\ (\theta)}{Hipotenusa}$$

$$coseno(\beta) = \frac{Lado\ adyacente\ a\ (\theta)}{Hipotenusa}$$

$$Tangente(\beta) = \frac{Lado\ opuesto\ a\ (\theta)}{lado\ adyacente}$$

[illegible]

Seno (63, 43°) =

Coseno (63, 43°) =

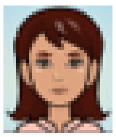
Tangente (63, 43°) =

[illegible]

¿Cómo podemos medir las sombras?

Momento 3

MIDIENDO SOMBRAS



Dado 3 varas de diferentes longitudes, ubíquelas en posición perpendicular al suelo y luego, en grupos, completen la siguiente tabla:

Altura de la vara	Longitud de la sombra	Hipotenusa

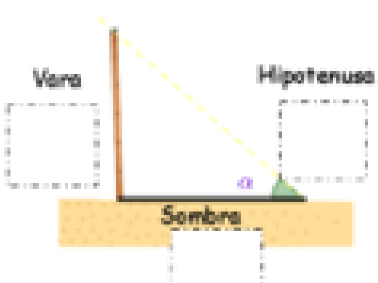
(Nota: la hipotenusa se puede calcular haciendo uso del Teorema de Pitágoras)

Respecto a los datos recolectados, responda:

a) Represente los triángulos que se forman con los datos anteriores usando GeoGebra con el fin de hallar valor del ángulo de referencia. Tengan en cuenta, que el ángulo se forma entre la hipotenusa y la sombra de la vara.

Altura de la vara	Ángulo

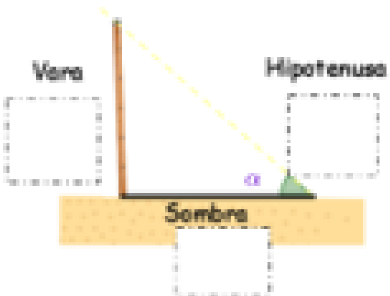
b) Establezcan las razones trigonométricas correspondientes con los datos obtenidos en la tabla



Ángulo de referencia(α) :__________

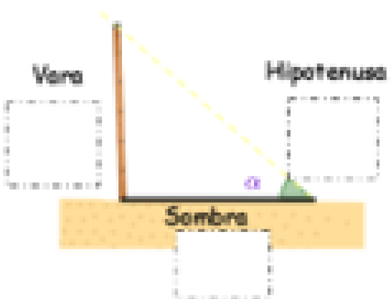
Razón con ángulo	Razón como cociente
Seno ( )=	——— =
Coseno ( )=	——— =
Tangente ( )=	——— =

¿Cómo podemos medir las sombras?



Ángulo de referencia(α) :________

Razón con ángulo	Razón como cociente
Seno ( )=	_____ =
Coseno ( )=	_____ =
Tangente ( )=	_____ =



Ángulo de referencia(α) :________

Razón con ángulo	Razón como cociente
Seno ( )=	_____ =
Coseno ( )=	_____ =
Tangente ( )=	_____ =

Finalizada la experiencia realizada en dos momentos distintos, responda:

a. Respecto a cada situación, ¿qué sucedió con la sombra de la vara al cambiar su altura?

¿Cómo podemos medir las sombras?

b, ¿Qué sucedió con ángulo de referencia al cambiar la altura de la vara?

Momento 4

Para este momento tenga en cuenta que las razone trigonométricas pueden verse como las siguientes igualdades teniendo en cuenta su ángulo de referencia

$$seno(ángulo) = \frac{Altura\ del\ bastón}{Hipotenusa} \Longrightarrow Hipotenusa = \frac{Altura\ del\ bastón}{seno(ángulo)}$$

$$\text{Coseno (ángulo)}= \frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{Hipotenusa} \Longrightarrow Hipotenusa = \frac{Altura\ del\ bastón}{coseno(ángulo)}$$

$$\text{tangente (ángulo)}= \frac{Altura\ del\ bastón}{Longitud\ de\ la\ sombra} \Longrightarrow Longitud\ de\ la\ sombra = \frac{Altura\ del\ bastón}{tangente(ángulo)}$$

Lo único que se ha hecho es un despeje.

Teniendo en cuenta lo anterior Sofia y Felipe discuten sobre lo que ocurre con la longitud de la sombra si se fijan algunas condiciones.

Sofía establece la siguiente condición: **Mantener dos elementos fijos.**

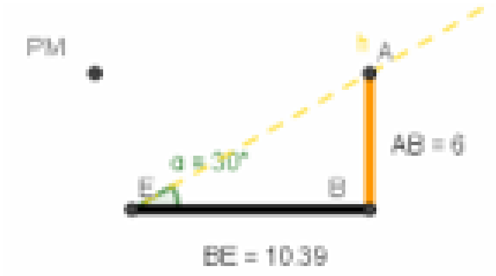
PROBLEMA |1

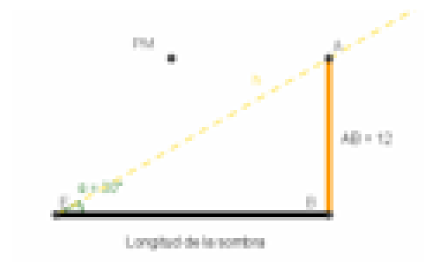
A partir, de la construcción hecha en GeoGebra, si se fija la hora a las 8 am y la altura del bastón igual a 6 centímetros, se obtiene un ángulo de referencia de 30° y la sombra proyectada por este es igual a 10.39 centímetros. Si mantenemos el **ángulo de referencia** como fijo, y **duplicamos la longitud de la altura del bastón, observe** lo que sucede y responda los siguientes enunciados:

¿Cómo podemos medir las sombras?

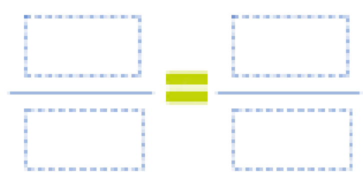
Haciendo uso del Applet ¿cuál es la longitud de la sombra cuando se duplica la altura del bastón? ¿Cuántas veces cabe la longitud de la sombra inicial en esta nueva longitud de la sombra?

Tenga claro que en la situación anterior se forman estos dos triángulos



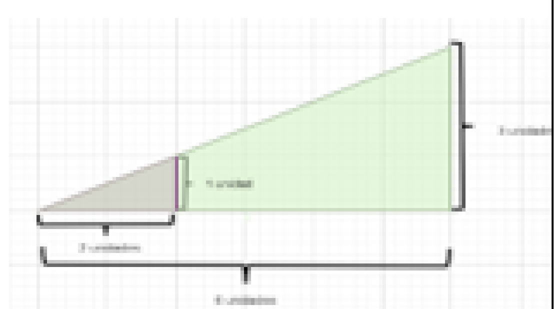


Haciendo uso de las proporciones encuentre el valor de la longitud de la sombra.



RECUERDE QUE: La proporción es la igualdad de dos razones de la misma clase. Por ejemplo, en los dos triángulos representados en la imagen

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$



¿Cómo podemos medir las sombras?

Elija y marque con una X cuál de las siguientes igualdades permite hallar también la longitud de la sombra con los datos dador, es decir, el ángulo y la altura del bastón.

$$Hipotenusa = \frac{Altura\ del\ bastón}{seno(ángulo)}$$

$$Hipotenusa = \frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{coseno(ángulo)}$$

$$Longitud\ de\ la\ sombra = \frac{Altura\ del\ bastón}{tangente(ángulo)}$$

PROBLEMA |2

Felipe fija la altura del bastón en 10 centímetro a las 10 a.m., su ángulo de referencia es de 60°, y la sombra proyectada por este es igual a 4.88 centímetros

De las siguientes igualdades cuál de ellas permite hallar el valor de la hipotenusa del triángulo que se forma entre la sombra y el bastón. Marque con una x

$$Hipotenusa = \frac{Altura\ del\ bastón}{seno(ángulo)}$$

$$Hipotenusa = \frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{coseno(ángulo)}$$

$$Longitud\ de\ la\ sombra = \frac{Altura\ del\ bastón}{tangente(ángulo)}$$

Si en la situación anterior se mantiene la altura del bastón en 10 centímetros y se reducir la mitad el ángulo de 60° ¿Qué sucede con la longitud de la sombra? ¿se duplica o se reduce a la mitad o ninguna de estas dos opciones? Utilice el applet para responder.

Apéndice D. Diseño nivel de profundidad 3

¿Cómo podemos medir las sombras?

10°-11°

NOMBRE: ____

Fecha: ____________________ Colegio: ____________________


Momento 1
¿Cómo podemos medir las sombras?

¿Cómo podemos medir las sombras?

Represente el momento exacto de la historieta donde se proyecta la sombra del bastón para poder responder a ¿qué figura geométrica se forma entre el bastón, luz y la sombra?

RECUERDA QUE: Razón geométrica, es la comparación entre dos cantidades A y B cuyo resultado es constante

$$\frac{A}{B} = constante$$

Algunos ejemplos de razón geométricas son:

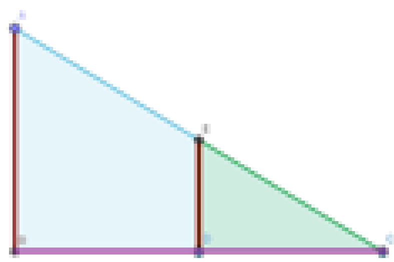
- $\frac{Longitud\ del\ lado\ del\ cuadrado}{Diagonal} = \sqrt{2}$
- $\frac{Longitud\ de\ la\ circunferencia}{Diametro} = \pi$

Teniendo en cuenta la información anterior y la situación de la historieta, ayude a Sofía a identificar la expresión que compara la altura del bastón que es de 1.5 m, respecto a la longitud de su sombra que es de 1.5 m.

¿Cómo podemos medir las sombras?

Ahora ayude a Felipe a identificar la expresión que compara la altura de la pirámide que es de 139 m respecto a la longitud de su sombra que es de 139 m.

Sabias qué…

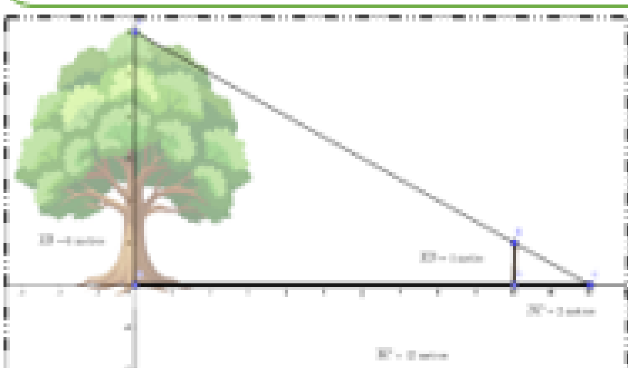


Una proporción es la igualdad entre dos o más razones, por ejemplo, si observamos la imagen de los triángulos ΔABC y ΔEDC podemos comparar la longitud del segmento $\overline{AB}$ con la longitud del segmento $\overline{ED}$ (Segmentos rojos) y la longitud del segmento $\overline{BC}$ y la longitud del segmento $\overline{DC}$ (Segmentos morados)

Simbólicamente

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} \text{ ó } \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{DC}}$$

Ejemplo: Imagina que el segmento AB ($\overline{AB} = 6\ metros$) representa la altura de un árbol, el segmento ED su sombra ($\overline{ED} = 12\ metros$), el segmento BC ($\overline{BC} = 1\ metro$) la altura de la vara y el segmento DC ($\overline{DC} = 2\ metros$) su sombra. Vea la siguiente imagen



Para la situación se tiene la proporción:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{DC}}$$

Remplazando los datos

$$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Simplificando,

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

¿Cómo podemos medir las sombras?

Usando las proporciones, si Sofía ubica el bastón verticalmente en el suelo y observa que la sombra proyectada, en un instante, es igual a la altura del bastón. ¿Qué ocurrió en ese mismo momento con la sombra que proyecta la altura de Sofía? Luego, responda a ¿qué se puede afirmar respecto a la altura de la pirámide y la longitud de su sombra? Justifique su respuesta.

Sofía piensa que: ahora, si la longitud de la sombra del bastón hubiese medido el doble que la altura del bastón, ¿qué se puede afirmar respecto a la altura y longitud de la sombra de la pirámide? Explique su respuesta.

El archivo de GeoGebra representa geométricamente los triángulos semejantes formados en la situación de Tales y la pirámide.

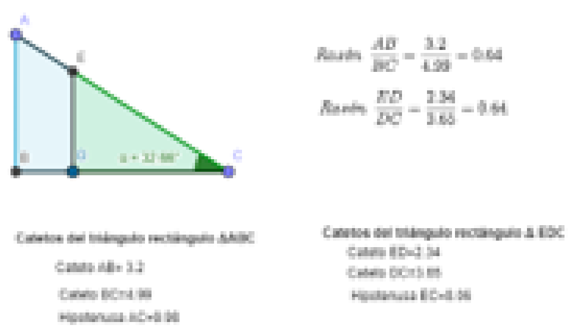


Ilustración 1. Actividad GeoGebra 1

¿Cómo podemos medir las sombras?

(ACTIVE COMANDO RAZONES) De acuerdo con lo observado responda. Si mueve el punto A ¿qué sucede con las razones $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$, es decir presentan algún cambio? Y si mueve el punto D , ¿Cuál razón cambia entre $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$? Justifica

De los triángulos rectángulos ΔABC y ΔEDC, defina algunas razones diferentes a las sugeridas entre los lados del triángulo en GeoGebra.

Establezca algunas proporciones entre los lados correspondientes de los triángulos rectángulos ΔABC y ΔEDC.

(ACTIVE COMANDO ÁNGULO) Si mueve el punto A. ¿Qué sucede con el ángulo de referencia y las razones $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$? Justifica

¿Cómo podemos medir las sombras?

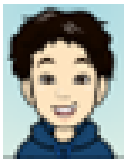
Si mueve el punto D. ¿Qué sucede con el ángulo de referencia y las razones $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$? Justifica

¿Si se mueve el punto C el ángulo de referencia se mantiene al igual que las razones entre $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$? Justifica

Si un triángulo rectángulo tiene dos de sus lados con igual medida, ¿cuánto miden sus ángulos internos?

Momento 2

¿Cómo podemos medir las sombras?



Sofia y Felipe tomaron los siguientes datos a cierta hora del día: la altura del bastón es de 1 m y su sombra proyectada es de 2 m. Además, la pirámide mide 139 m de altura y su sombra proyectada es de 278 m. Podemos definir las siguientes razones a partir de un ángulo de referencia. Complete a partir de los valores numéricos antes descritos (Nota: Para hallar la hipotenusa de cada situación use el Teorema de Pitágoras)

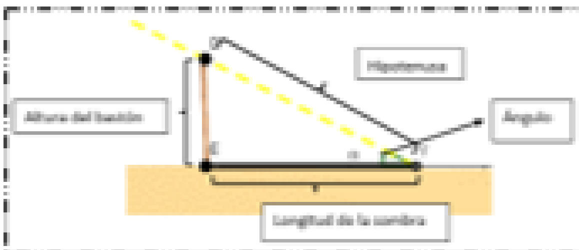
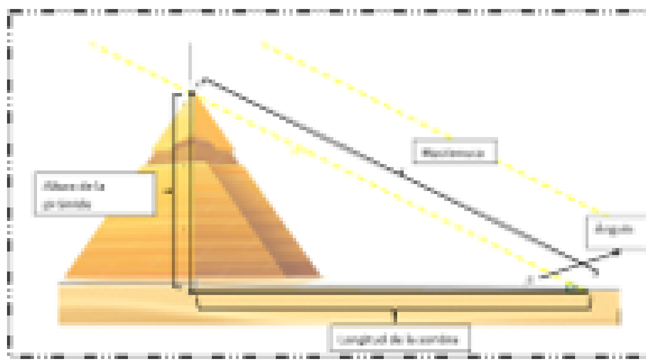


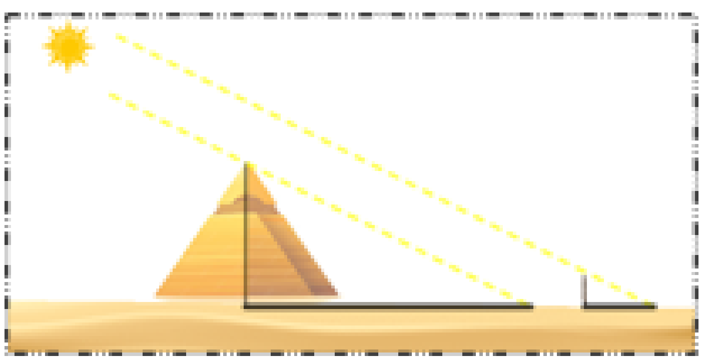
Tabla 1

Razones	$\alpha\,(Alfa) = 63.43°$
$\frac{Altura\ del\ bastón}{Hipotenusa} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$	
$\frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{Hipotenusa} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$	
$\frac{Altura\ del\ bastón}{Longitud\ de\ la\ sombra} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$	

Tabla 2

Razones	$\beta(Beta) = 63.43°$
$\frac{Altura\ de\ la\ pirámide}{Hipotenusa} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$	
$\frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{Hipotenusa} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$	
$\frac{Altura\ de\ la\ pirámide}{Longitud\ de\ la\ sombra} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$	





¿Cómo podemos medir las sombras?

¿Cuántas veces cabe la longitud de la sombra de la vara en su altura?

Si Sofia y Felipe tomaran los datos en otra hora de días ¿Crees que las razones cambiarían o se mantendrían? Recuerda lo visto en la actividad usando el Applet. Justifica tu respuesta

Tengamos en cuenta lo siguiente:

Con los anterior las razones trigonométricas se definen como el consciente entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo teniendo en cuenta un ángulo de referencia:

$$seno(\alpha) = \frac{Lado\ opuesto\ a\ (\alpha)}{Hipotenusa}$$

$$coeno(\alpha) = \frac{Lado\ adyacente\ (\alpha)}{Hipotenusa}$$

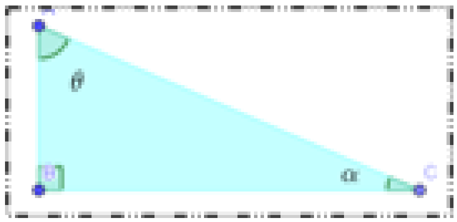
$$Tangente(\alpha) = \frac{Lado\ opuesto\ (\alpha)}{lado\ adyacente}$$

$$seno(\beta) = \frac{Lado\ opuesto\ a\ (\theta)}{Hipotenusa}$$

$$coeno(\beta) = \frac{Lado\ adyacente\ a\ (\theta)}{Hipotenusa}$$

$$Tangente(\beta) = \frac{Lado\ opuesto\ a\ (\theta)}{lado\ adyacente}$$

¿Cómo podemos medir las sombras?



De acuerdo con las anteriores definiciones calcule el valor de las razones, haciendo uso de la calculadora sabiendo que el ángulo de referencias $\alpha = \beta = 26.57°$.

Seno (63.43°) =_______

Coseno (63.43°) =_______

Tangente (63.43°) = _______

Identifica alguna diferencia entre los valores obtenidos en la tabla 1 y 2 con la tabla 3 ¿ve alguna diferencia entre estos valores?

¿Cómo podemos medir las sombras?

Momento 3

MIDIENDO SOMBRAS

Dado 3 varas de diferentes longitudes, ubíquelas en posición perpendicular al suelo y luego, en grupos, completen la siguiente tabla:

Tabla 4

Altura de la vara	Longitud de la sombra	Hipotenusa

(Nota: la hipotenusa se puede calcular haciendo uso del Teorema de Pitágoras)

Respecto a los datos recolectados, responda:

a) Represente los triángulos que se forman con los datos anteriores usando GeoGebra con el fin de hallar valor del ángulo de referencia. Tengan en cuenta, que este ángulo se forma entre la hipotenusa y la sombra de la vara.

Tabla 5

Altura de la vara	Ángulo

b) Halle las razones trigonométricas correspondientes para las tres varas de diferente tamaño con los datos de la tabla 4 y 5

Ángulo: ________ Altura: ________

Razón con ángulo	Razón como cociente
Seno ( ) =	______ =
Coseno ( ) =	______ =
Tangente ( ) =	______ =

Ángulo: ________ Altura: ________

Razón con ángulo	Razón como cociente
Seno ( ) =	______ =
Coseno ( ) =	______ =
Tangente ( ) =	______ =

¿Cómo podemos medir las sombras?

Ángulo :________ Altura: ________

Razón con ángulo	Razón como cociente
Seno ( ) =	______ =
Coseno ( )=	______ =
Tangente ( )=	______ =

De acuerdo con las razones trigonométricas, ¿Cuántas veces la sombra de la vara cuando su altura es de 45 cm?

Finalizada la experiencia realizada en dos momentos distintos, responda:

a) Respecto a cada situación, ¿qué sucedió con la sombra de la vara al cambiar su altura?

b) ¿Qué sucedió con ángulo de referencia al cambiar la altura de la vara?

¿Cómo podemos medir las sombras?

Momento 4

Para este momento tenga en cuenta que las razone trigonométricas pueden verse como las siguientes igualdades teniendo en cuenta su ángulo de referencia

$$\text{seno}(\text{ángulo}) = \frac{\text{Altura del bastón}}{\text{Hipotenusa}} \Longrightarrow \text{Hipotenusa} = \frac{\text{Altura del bastón}}{\text{seno}(\text{ángulo})}$$

$$\text{Coseno (ángulo)} = \frac{\text{Longitud de la sombra}}{\text{Hipotenusa}} \Longrightarrow \text{Hipotenusa} = \frac{\text{Altura del bastón}}{\text{coseno}(\text{ángulo})}$$

$$\text{tangente (ángulo)} = \frac{\text{Altura del bastón}}{\text{Longitud de la sombra}} \Longrightarrow \text{Longitud de la sombra} = \frac{\text{Altura del bastón}}{\text{tangente}(\text{ángulo})}$$

Lo único que se ha hecho es un despeje.

Teniendo en cuenta lo anterior Sofia y Felipe discuten sobre lo que ocurre con la longitud de la sombra si se fijan algunas condiciones.

Sofía establece la siguiente condición: **Mantener dos elementos fijos.**

PROBLEMA |1

A partir, de la construcción hecha en GeoGebra, si se fija la hora a las 8 am y la altura del bastón igual a 6 centímetros, se obtiene un ángulo de referencia de 30° y la sombra proyectada por este es igual a 10.39 centímetros. Si mantenemos el **ángulo de referencia** como fijo, y **duplicamos la longitud de la altura del bastón, observe** lo que sucede y responda los siguientes enunciados:

Haciendo uso del Applet ¿cuál es la longitud de la sombra cuando se duplica la altura del bastón? ¿Cuántas veces cabe la longitud de la sombra inicial en esta nueva longitud de la sombra?

¿Cómo podemos medir las sombras?

¿Cuál de las siguientes igualdades permite hallar la longitud de la sombra del bastón si el ángulo de refencia es de 30° y la altura del objeto es 12 cm?. Marque con una X

$$Hipotenusa = \frac{Altura\ del\ bastón}{seno(ángulo)}$$

$$Hipotenusa = \frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{coseno(ángulo)}$$

$$Longitud\ de\ la\ sombra = \frac{Altura\ del\ bastón}{tangente(ángulo)}$$

Apartir de la igualdad elegida calcule el valor y contraste con el valor que encuentra en el apllet.

PROBLEMA 2

Felipe fija la altura del bastón en 10 centímetro a las 10 a.m., su ángulo de referencia es de 60°, y la sombra proyectada por este es igual a 4,88 centímetros

De las siguientes igualdades cuál de ellas permite hallar el valor de la hipotenusa del triángulo que se forma entre la sombra y el bastón. Marque con una x

$$Hipotenusa = \frac{Altura\ del\ bastón}{seno(ángulo)}$$

$$Hipotenusa = \frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{coseno(ángulo)}$$

$$Longitud\ de\ la\ sombra = \frac{Altura\ del\ bastón}{tangente(ángulo)}$$

¿Cómo podemos medir las sombras?

Apartir de la igualdad elegida calcule el valor de la hipotenusa y luego contraste haciendo uso del Teorema de Pitagoras

Si en la situación anterior se mantiene la altura del bastón en 10 centímetros y se reducir la mitad el ángulo de 60° ¿Qué sucede con la longitud de la sombra? ¿se duplica o se reduce a la mitad o ninguna de estas dos opciones? Utilice el applet para responder.

Apéndice E. Diseño nivel de profundidad 4

¿Cómo podemos medir las sombras?

10°-11°

NOMBRE: ____

Fecha: ____________________ Colegio: ____________________


Momento 1
¿Cómo podemos medir las sombras?

¿Cómo podemos medir las sombras?

Liste los pasos que realizó Tales para deducir la altura de la pirámide.

PASOS

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Represente el momento exacto de la historieta donde se proyecta la sombra del bastón para poder responder a ¿qué figura geométrica se forma entre el bastón, la luz y la sombra?

RECUERDA QUE: Razón geométrica, es la comparación entre dos cantidades *A* y B cuyo resultado es constante

$$\frac{A}{B} = constante$$

Por ejemplo:

$\sqrt{2}$ es una razón dado que, si dividimos la longitud de cualquier cuadrado por su diagonal obtennos este valor, es decir, $\frac{L}{D} = \sqrt{2}$

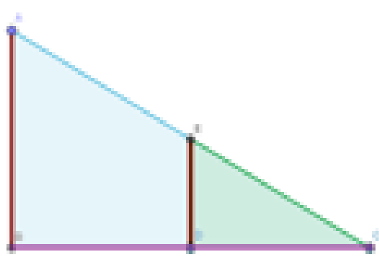
Asimismo, El número π también es una razón, ya que di dividimos la longitud de la circunferencia por su diámetro se obtiene este valor: $\frac{C}{D} = \pi$

Teniendo en cuenta la información anterior y la situación de la historieta, ayude a Sofía a identificar la expresión que compara la altura del bastón que es de 1.5 m, respecto a la longitud de su sombra que es de 1.5 m,

¿Cómo podemos medir las sombras?

Ahora ayude a Felipe a identificar la expresión que compara la altura de la pirámide que es de 139 m respecto a la longitud de su sombra que es de 139 m.

Sabias qué...

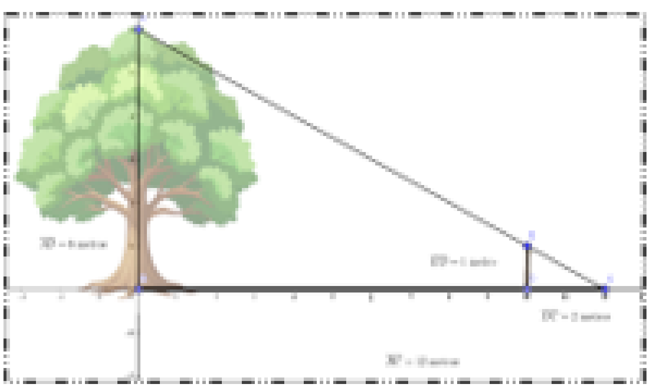


Una proporción es la igualdad entre dos o más razones, por ejemplo, si observamos la imagen de los triángulos ΔABC y ΔEDC podemos comparar la longitud del segmento $\overline{AB}$ con la longitud del segmento $\overline{ED}$ (Segmentos rojos) y la longitud del segmento $\overline{BC}$ y la longitud del segmento $\overline{DC}$ (Segmentos morados)

Simbólicamente

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} \text{ ó } \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{DC}}$$

Ejemplo: Imagina que el segmento AB ($\overline{AB} = 6\ metros$) representa la alutra de un árbol, el segmento ED su sombra ($\overline{ED} = 12\ metros$), el segmento BC ($\overline{BC} = 1\ metro$) la altura de la vara y el segmento DC ($\overline{DC} = 2\ metros$) su sombra. Vea la siguiente imagen



Para la situación se tiene la proporción:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{DC}}$$

Remplazando los datos

$$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Simplificando,

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

¿Cómo podemos medir las sombras?

usando las proporciones, si Sofía ubica el bastón verticalmente en el suelo y observa que la sombra proyectada, en un instante, es igual a la altura del bastón. ¿Qué ocurrió en ese mismo momento con la sombra que proyecta la altura de Sofía? Luego, responda a ¿qué se puede afirmar respecto a la altura de la pirámide y la longitud de su sombra? Justifique su respuesta.

Sofía piensa que: ahora, si la longitud de la sombra del bastón hubiese medido el doble que la altura del bastón, ¿qué se puede afirmar respecto a la altura y longitud de la sombra de la pirámide? Explique su respuesta.

El archivo de GeoGebra representa geométricamente los triángulos semejantes formados en la situación de Tales y la pirámide.

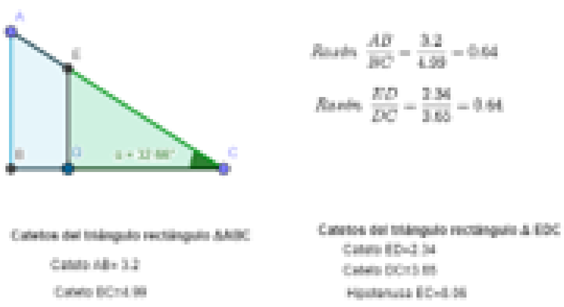


Ilustración 1. Actividad GeoGebra 1

¿Cómo podemos medir las sombras?

(ACTIVE COMANDO RAZONES) De acuerdo con lo observado responda. Si mueve el punto *A* ¿qué sucede con las razones $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$, es decir presentan algún cambio? Y si mueve el punto D , ¿Cuál razón cambia entre $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$? Justifica

De los triángulos rectángulos ΔABC y ΔEDC, defina algunas razones diferentes a las sugeridas entre los lados del triángulo en *GeoGebra*.

Establezca algunas proporciones entre los lados correspondientes de los triángulos rectángulos ΔABC y ΔEDC.

(ACTIVE COMANDO ÁNGULO) Si mueve el punto *A*. ¿Qué sucede con el ángulo de referencia y las razones $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$? Justifica

¿Cómo podemos medir las sombras?

Si mueve el punto D. ¿Qué sucede con el ángulo de referencia y las razones $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$? Justifica

¿Si se mueve el punto *C* el ángulo de referencia se mantiene al igual que las razones entre $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{ED}{DC}$? Justifica

¿Qué sucede con los valores de las razones cuando el ángulo de referencia varía entre 0º y 90º? Explique su respuesta.

Si un triángulo rectángulo tiene dos de sus lados con igual medida, ¿cuánto miden sus ángulos internos?

¿Cómo podemos medir las sombras?

FALSO O VERDADERO. Justifique.

En un triángulo rectángulo puede suceder que la longitud de la hipotenusa sea el doble de la medida de uno de sus catetos. Si es verdadero podrías dar un ejemplo en el que se cumple.

____

____

____

____

____

Momento 2

Sofia y Felipe tomaron los siguientes datos a cierta hora del día: la altura del bastón es de 1 m y su sombra proyectada es de 2 m. Además, la pirámide mide 139 m de altura y su sombra proyectada es de 278 m. Podemos definir las siguientes razones a partir de un ángulo de referencia. Complete a partir de los valores numéricos antes descritos (Nota: Para hallar la hipotenusa de cada situación use el Teorema de Pitágoras)

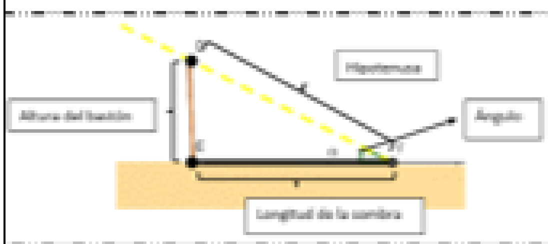
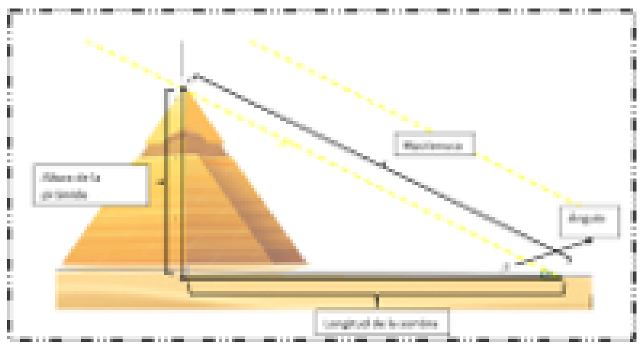


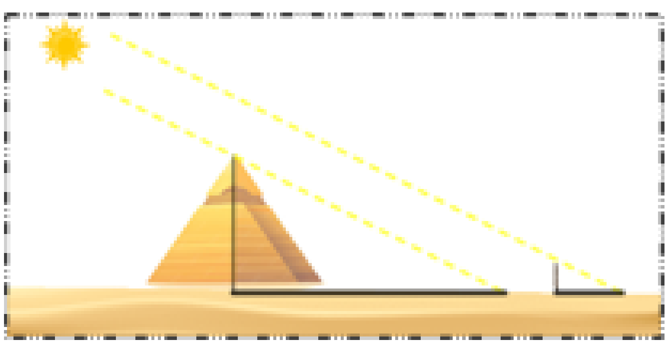
Tabla 1

Razones	$\alpha\,(Alfa) = 63{,}43°$
$\dfrac{Altura\ del\ bastón}{Hipotenusa} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$	
$\dfrac{Longitud\ de\ la\ sombra}{Hipotenusa} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$	
$\dfrac{Altura\ del\ bastón}{Longitud\ de\ la\ sombra} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$	

abla 2

Razones	$\beta(Beta) = 63{,}43°$
$\dfrac{Altura\ de\ la\ pirámide}{Hipotenusa} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$	
$\dfrac{Longitud\ de\ la\ sombra}{Hipotenusa} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$	
$\dfrac{Altura\ de\ la\ pirámide}{Longitud\ de\ la\ sombra} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$	





¿Cómo podemos medir las sombras?

¿Cuántas veces cabe la hipotenusa en la altura de la vara en la primera situación?

¿crees que si se tomaran los datos anteriores en otra hora del día las razones cambian o se mantienen? Diga por qué crees que sucede esto.

Tengamos en cuenta lo siguiente:

Con los anterior las razones trigonométricas se definen como el consciente entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo teniendo en cuenta un ángulo de referencia:

$$seno(\alpha) = \frac{Lado\ opuesto\ a\ (\alpha)}{Hipotenusa}$$

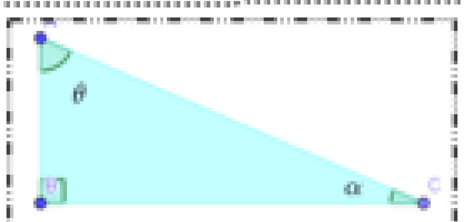
$$coseno(\alpha) = \frac{Lado\ adyacente\ (\alpha)}{Hipotenusa}$$

$$Tangente(\alpha) = \frac{Lado\ opuesto\ (\alpha)}{lado\ adyacente}$$

$$seno(\beta) = \frac{Lado\ opuesto\ a\ (\theta)}{Hipotenusa}$$

$$coseno(\beta) = \frac{Lado\ adyacente\ a\ (\theta)}{Hipotenusa}$$

$$Tangente(\beta) = \frac{Lado\ opuesto\ a\ (\theta)}{lado\ adyacente}$$



¿Como podemos medir las sombras?

De acuerdo con las anteriores definiciones calcule el valor de las razones, haciendo uso de la calculadora.

Seno (63.43°) =_______

Coseno (63.43°) =_______

Tangente (63.43°) = _______

Compare con los valores obtenidos de la tabla 1 y 2, con la tabla 3. ¿Qué puede concluir respecto a estos valores?

Momento 3

MIDIENDO SOMBRAS

Dado 3 varas de diferentes longitudes, ubíquelas en posición perpendicular al suelo y luego, en grupos, completen la siguiente tabla:

Tabla 4

Altura de la vara	Longitud de la sombra	Hipotenusa

(Nota: la hipotenusa se puede calcular haciendo uso del Teorema de Pitágoras)

Respecto a los datos recolectados, responda:

Represente los triángulos que se forman con los datos anteriores usando GeoGebra con el fin de hallar valor del ángulo de referencia. Tengan en cuenta, que este ángulo se forma entre la hipotenusa y la sombra de la vara.

Altura de la vara	Ángulo

Halle las razones trigonométricas correspondientes para las tres varas de diferente tamaño con los datos de la tabla 4

Ángulo :________ Altura: ________

Razón con ángulo	Razón como cociente
Seno (_) =	______ =
Coseno (_)=	______ =
Tangente (_)=	______ =

Ángulo :________ Altura: ________

Razón con ángulo	Razón como cociente
Seno (_) =	______ =
Coseno (_)=	______ =
Tangente (_)=	______ =

¿Cómo podemos medir las sombras?

Ángulo :________ Altura: ________

Razón con ángulo	Razón como cociente
Seno ( ) =	______ =
Coseno ( )=	______ =
Tangente ( )=	______ =

De acuerdo con las razones trigonométricas, ¿Cuántas veces la sombra de la vara cuando su altura es de 45 cm?

Finalizada la experiencia realizada en dos momentos distintos, responda:

a) Respecto a cada situación, ¿qué sucedió con la sombra de la vara al cambiar su altura?

b) ¿Qué sucedió con ángulo de referencia al cambiar la altura de la vara?

¿Cómo podemos medir las sombras?

Momento 4

Para este momento tenga en cuenta que las razone trigonométricas pueden verse como las siguientes igualdades teniendo en cuenta su ángulo de referencia

$$\textit{seno}(\textit{ángulo}) = \frac{\textit{Altura del bastón}}{\textit{Hipotenusa}} \Longrightarrow \textit{Hipotenusa} = \frac{\textit{Altura del bastón}}{\textit{seno}(\textit{ángulo})}$$

$$\text{Coseno (ángulo)} = \frac{\textit{Longitud de la sombra}}{\textit{Hipotenusa}} \Longrightarrow \textit{Hipotenusa} = \frac{\textit{Altura del bastón}}{\textit{coseno}(\textit{ángulo})}$$

$$\text{tangente (ángulo)} = \frac{\textit{Altura del bastón}}{\textit{Longitud de la sombra}} \Longrightarrow \textit{Longitud de la sombra} = \frac{\textit{Altura del bastón}}{\textit{tangente}(\textit{ángulo})}$$

Lo único que se ha hecho es un despeje.

Teniendo en cuenta lo anterior Sofia y Felipe discuten sobre lo que ocurre con la longitud de la sombra si se fijan algunas condiciones.

Sofía establece la siguiente condición: **Mantener dos elementos fijos.**

PROBLEMA |1

A partir, de la construcción hecha en GeoGebra, si se fija la hora a las 8 am y la altura del bastón igual a 6 centímetros, se obtiene un ángulo de referencia de 30° y la sombra proyectada por este es igual a 10.39 centímetros. Si mantenemos el **ángulo de referencia** como fijo, y **duplicamos la longitud de la altura del bastón, observe** lo que sucede y responda los siguientes enunciados.

Haciendo uso del Applet ¿cuál es la longitud de la sombra cuando se duplica la altura del bastón? ¿Cuántas veces cabe la longitud de la sombra inicial en esta nueva longitud de la sombra?

¿Cómo podemos medir las sombras?

¿Cuál de las siguientes igualdades permite hallar la longitud de la sombra del bastón si el ángulo de refencia es de 30° y la altura del objeto es 12 cm?. Marque con una X

$$Hipotenusa = \frac{Altura\ del\ bastón}{seno(ángulo)}$$

$$Hipotenusa = \frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{coseno(ángulo)}$$

$$Longitud\ de\ la\ sombra = \frac{Altura\ del\ bastón}{tangente(ángulo)}$$

Apartir de la igualdad elijida calcule el valor y contraste con el valor que encuentra en el apllet

¿Se podría hallar el valor de la longitud de la sombra con la siguiente igualdad o no hay datos suficientes para hacerlo?

$$Hipotenusa = \frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{coseno(ángulo)}$$

Justifica tu respuesta

¿Cómo podemos medir las sombras?

PROBLEMA |2

Felipe fija la altura del bastón en 10 centímetro a las 10 am, su ángulo de referencia es de 60^{0}, y la sombra proyectada por este es igual a 4.88 centímetros

De las siguientes igualdades cuál de ellas permite hallar el valor de la hipotenusa del triángulo que se forma entre la sombra y el bastón. Marque con una X.

$$Hipotenusa = \frac{Altura\ del\ bastón}{seno(ángulo)}$$

$$Hipotenusa = \frac{Longitud\ de\ la\ sombra}{coseno(ángulo)}$$

$$Longitud\ de\ la\ sombra = \frac{Altura\ del\ bastón}{tangente(ángulo)}$$

Apartir de la igualdad elijida calcule el valor de la hipotenusa y luego contraste haciendo uso del Teorema de Pitagoras.

Si en la situación anterior se mantiene la altura del bastón en 10 centímetros y se reducir la mitad el ángulo de 60° ¿Qué sucede con la longitud de la sombra? ¿se duplica o se reduce a la mitad o ninguna de estas dos opciones? Utilice el applet para responder.