

La familia de distribuciones de probabilidad Kumaraswamy

Merari Gómez Rincón

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2014

La familia de distribuciones de probabilidad Kumaraswamy

Merari Gómez Rincón

Trabajo de grado como requisito
parcial para optar el título de
Licenciada en Matemáticas

Director

Dr. Germán Moreno Arenas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2014

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios darme la vida y permitirme conseguir este logro tan importante para mi formación profesional.

Agradezco a mis padres y a Leonardo Miranda por demostrarme siempre su gran amor e incondicional apoyo tanto en los momentos alegres como en los difíciles.

Finalmente quiero hacer un agradecimiento especial a mi director de tesis Dr. Germán Moreno Arenas, por su inmensa ayuda, su ardua colaboración y esos invaluable consejos que me brindo de forma muy sincera y afectuosa.

Índice general

Introducción	12
1. Distribuciones Kw-G especiales	15
1.1. Modelo Kw-Normal (KwN)	15
1.2. Modelo Kw-Weibull (KwW)	15
1.3. Modelo Kw-Gamma (KwGa)	16
1.4. Modelo Kw-Gumbel (KwGu)	17
1.5. Modelo Kw-Gaussiana Inversa (KwGI)	17
1.6. Modelo Kw-Chen (KwChen)	18
1.7. Modelo Kw-XTG (KwXTG)	20
1.8. Modelo Kw-Weibull Flexible (KwWF)	21
2. Algunas propiedades de la familia Kw-G	22
2.1. Asíntotas y formas	22
2.2. Asimetría y curtosis de la familia Kw-G	23
2.2.1. Distribución KwChen	23
2.2.2. Distribución KwXTG	23
2.2.3. Distribución KwFW	23
2.3. Simulación de la distribución Kw-G	23
2.4. Expansiones útiles	25
2.5. Momentos	27
2.5.1. Momentos del modelo KwN	28
2.5.2. Momentos del modelo KwGa	29
2.6. Función generadora de momentos	30
2.7. Las desviaciones medias	31
2.8. Entropías	33
2.8.1. Entropía de Shannon	33
2.8.2. Entropía de Rényi	34
2.9. Fiabilidad	35
2.10. Estadísticos de Orden	36

2.11. Momentos de probabilidad ponderada	38
2.12. Valores extremos	40
2.13. Estimación	42
3. Relación de la distribución Kw con la distribución Beta	45
4. Aplicaciones	47
4.1. Crecimiento de la población del gorgojo <i>Tribolium confusum</i> (datos sin censura) . . .	47
4.2. Voltaje (datos sin censura)	48
4.3. Radioterapia (datos censurados)	49
Conclusiones	54
Bibliografía	61

Índice de figuras

1.1. Distribución Kw-Normal.	16
1.2. Distribución Kw-Gamma.	17
1.3. Distribución Kw-Gumbel.	18
1.4. Distribución Kw-Gaussiana Inversa.	19
1.5. Función de densidad KwChen para parámetros dados.	19
1.6. Función de densidad KwXTG para parámetros dados.	20
1.7. Función de densidad KwWF con $\lambda_1 = 0,5$ y $\beta_1 = 3,2$	21
2.1. Asimetría y curtosis de la distribución KwChen con $\lambda_1 = 0,2$ y $\beta_1 = 0,3$	24
2.2. Distribución KwXTG con $\lambda_2 = 0,01$, $\alpha_2 = 1,5$ y $\beta_2 = 0,05$	25
2.3. Distribución KwFW con $\alpha_3 = 0,01$ y $\beta_3 = 0,0001$	26
4.1. Histograma del crecimiento del número de adultos y densidad de probabilidad ajustada.	49
4.2. Densidades estimadas para algunos modelos ajustados a los datos de voltaje.	51
4.3. Funciones de supervivencia estimadas para algunos modelos y la función de supervivencia empírica de los datos de voltaje.	51
4.4. Funciones de supervivencia estimadas para algunos modelos ajustados y la función de supervivencia empírica de los datos de radioterapia.	53

Índice de tablas

4.1. EMV de los modelos ajustados con AIC (orden creciente)	47
4.2. Frecuencias observadas y esperadas del número de gorgojos <i>Tribolium confusum</i> . .	48
4.3. EMV de los parámetros para algunos modelos ajustados a los datos de voltaje y los valores de las estadísticas AIC, CAIC BIC.	50
4.4. EMV de los parámetros para la familia Kw-G ajustados a los datos de radioterapia y el valor de los estadísticos AIC, CAIC y BIC.	52

TITULO: LA FAMILIA DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD KUMARASWAMY ¹

AUTOR: MERARI GÓMEZ RINCÓN ²

PALABRAS CLAVE: DISTRIBUCIÓN KUMARASWAMY, MOMENTOS, ENTROPÍAS, FIA-BILIDAD, ESTADÍSTICOS DE ORDEN, VALORES EXTREMOS, ESTIMACIÓN.

DESCRIPCIÓN

La distribución de probabilidad Kumaraswamy (Kw) es muy útil para modelar experimentos de teoría de la confiabilidad y vida útil de materiales expuestos a falla por fatiga. La distribución Kw posee propiedades similares a la distribución Beta con algunas ventajas adicionales en términos de tratabilidad.

La familia de distribuciones Kumaraswamy-G (Kw-G) propuesta por Cordeiro y de Castro (2011), se puede extender a varias distribuciones conocidas como la normal, Weibull, gamma y Gumbel. La función de densidad de probabilidad de cualquier distribución Kw-G se puede expresar como una combinación lineal de funciones de densidad de G-exponenciadas. Este resultado permite derivar expresiones explícitas generales para las diferentes medidas de las distribuciones Kw-G como lo son: momentos, función generadora de momentos, desviaciones medias, curvas de Bonferroni y Lorenz, entropía de Shannon, entropía de Rényi y de fiabilidad.

La utilidad de los modelos de Kw-G se ilustra en los análisis de datos reales utilizando varios criterios como AIC, BIC y CAIC. Durante el desarrollo de este trabajo se muestran algunas aplicaciones de las distribuciones Kw-G a conjuntos de datos reales para resaltar su utilidad y ventajas con relación a otros modelos existentes. La familia de distribuciones Kw-G proporciona un mecanismo bastante flexible para el ajuste de un amplio espectro de datos positivos del mundo real.

¹Tesis

²FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Dr. Germán Moreno Arenas

TITLE: THE FAMILY OF KUMARASWAMY PROBABILITY DISTRIBUTIONS ¹

AUTHOR: MERARI GOMEZ RINCON ²

KEYWORDS: DISTRIBUTION KUMARASWAMY, MOMENTS, ENTROPIES, RELIABILITY, ORDER STATISTICS, EXTREME VALUES, ESTIMATION.

DESCRIPTION

The Kumaraswamy probability distribution (Kw) is very useful for modeling experiments involving reliability theory and service life of materials exposed to fatigue failure. The Kw has similar properties to that of the Beta distribution with some additional advantages in terms of tractability.

The family of Kumaraswamy distributions G (Kw-G) proposed by Cordeiro and Castro (2011), can be extended to several known distributions like normal, Weibull, gamma and Gumbel. The probability density function of any Kw-G distribution can be expressed as a linear combination of density functions G-exponentiated. This result allows to derive general explicit expressions for the various measures of the Kw-G distribution: moments, moment generating function, mean deviations, Bonferroni and Lorenz curves, Shannon entropy, Rényi entropy and reliability.

The utility of the Kw-G models is illustrated in the analysis of real data using criteria such as AIC, BIC and CAIC. During the development of this paper some applications of the Kw-G distributions to real data sets to highlight its usefulness and advantages over other existing models are shown. The family of Kw-G distributions provides a very flexible mechanism for adjustment of a range of positive real world data.

¹Thesis

²FACULTY OF SCIENCES, DEGREE IN MATHEMATICS. DIRECTOR Dr. Germán Moreno Arenas

Introducción

La distribución de probabilidad Kumaraswamy (Kw) despierta especial interés cuando se quieren modelar experimentos en teoría de la confiabilidad y de vida útil de materiales sujetos a fatigas. La distribución Kw posee propiedades similares a la distribución Beta con algunas ventajas adicionales en términos de tratabilidad. La distribución Kw está definida en el intervalo $(0, 1)$, tiene función de densidad de probabilidad (fdp) y función de distribución de probabilidad acumulada (fda), dadas respectivamente por:

$$f_{Kw}(x) = a b x^{a-1} (1 - x^a)^{b-1} \quad \text{y} \quad F_{Kw}(x) = 1 - (1 - x^a)^b, \quad (0.1)$$

donde $a > 0$ y $b > 0$ son parámetros de forma.

La distribución Kw no es muy conocida y ha sido poco investigada por los estadísticos. Sin embargo, en un artículo reciente Jones (2008) exploró la génesis de la distribución Kw y más importante, dejó en claro algunas similitudes y diferencias entre la distribución Beta y la distribución Kw. Por ejemplo, las densidades Kw también es unimodal, creciente, decreciente o constante dependiendo, al igual que la distribución Beta, de los valores de sus parámetros. Se resaltan varias ventajas de la distribución Kw sobre la distribución Beta: la constante de normalización es muy simple, fórmula simple para la función de distribución y la función cuantil que no implica ninguna función especial, fórmula simple para la generación de variables aleatorias y estadísticas de orden. Además, según Jones (2008), la distribución Beta tiene ventajas con respecto a la distribución Kw: fórmulas simples para los momentos y para la función generadora de momentos, genera una subfamilia de un parámetro de distribuciones simétricas, la estimación por el método de los momentos es más sencilla y existen más formas para generar la distribución a través de procesos físicos.

Considérese una función de distribución continua de referencia $G(x)$ (de aquí en adelante G denota la distribución de referencia), cuya respectiva fdp es $g(x) = dG(x)/dx$. Una forma natural de generar familias de distribuciones con soporte en G es aplicar la función cuantil a una familia de distribuciones en el intervalo $(0, 1)$. A continuación se combinan los trabajos de Eugene et al. (2002) y Jones (2008) para construir la familia de distribuciones Kw Generalizadas ("Kw-G"). La fda, $F(x)$, de la familia Kw-G es definida como

$$F(x) = 1 - \{1 - G(x)^a\}^b \quad (0.2)$$

donde $a > 0$ y $b > 0$ son dos parámetros adicionales cuya función es introducir asimetría y variar los pesos de las colas de la distribución. Debido a la forma simple de la función de distribución (0.2), esta

familia puede ser usada efectivamente para cualquier G , incluso cuando los datos son censurados. La fdp, $f(x)$, de la familia Kw-G tiene la siguiente forma

$$f(x) = a b g(x) G(x)^{a-1} \{1 - G(x)^a\}^{b-1}. \quad (0.3)$$

Si X es una variable aleatoria con función de densidad (0.3) la denotamos $X \sim \text{Kw-G}(a, b)$. La función tasa de riesgo (ftr) de X está dada por:

$$h(x) = a b g(x) G(x)^{a-1} \{1 - G(x)^a\}^{-1}. \quad (0.4)$$

Cada nueva distribución Kw-G se puede obtener de una distribución G específica. La distribución G es un caso especial de la distribución Kw-G, cuando $a = b = 1$ y podemos obtener una gran combinación de distribuciones con diferente asimetría y curtosis.

Interpretación física de la familia Kw-G: para dos enteros positivos a y b , una interpretación física de la familia Kw-G puede ser dada de la siguiente forma. Considere un sistema formado por b componentes independientes y cada componente tiene a subcomponentes independientes. Supóngase que el sistema falla si alguno de los b componentes falla y cada componente falla si todos los a subcomponentes fallan. Sea $X_{j1}, \dots, X_{ja}$ denotando el tiempo de vida de los subcomponentes dentro del j -ésimo componente, con $j = 1, \dots, b$, teniendo una fda $G(x)$ comun. Sea X_j denotando el tiempo de vida del j -ésimo componente, para $j = 1, \dots, b$, entonces X denota el tiempo de vida del sistema completo. Es decir, la fda de X es:

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq x) &= 1 - \Pr(X_1 > x, \dots, X_b > x) = 1 - \{\Pr(X_j > x)\}^b \\ &= 1 - \{1 - \Pr(X_j \leq x)\}^b = 1 - \{1 - \Pr(X_{j1} \leq x, \dots, X_{ja} \leq x)\}^b \\ &= 1 - \{1 - [\Pr(X_{ji} \leq x)]^a\}^b = 1 - \{1 - G(x)^a\}^b. \end{aligned}$$

Así la familia Kw-G dada por (0.2) es precisamente la distribución del tiempo de falla del sistema completo.

Una ventaja de la familia de densidades Kw-G es la habilidad de ajustar datos asimétricos que no pueden ser ajustados adecuadamente con las distribuciones existentes. Además, esta familia permite mayor flexibilidad en sus colas y puede ser aplicada en muchas áreas de la ingeniería y biología. La familia Kw-G es una familia paramétrica univariada de distribuciones que sirve para modelar datos univariados continuos que pueden estar en cualquier intervalo de la recta real. Así, la nueva familia es indicada para analizar datos continuos univariados que tienen cualquier tipo de soporte.

El papel de los dos parámetros adicionales, $a > 0$ y $b > 0$, es gobernar la asimetría y generar distribuciones con colas más pesadas o livianas. Estos parámetros adicionales del generador Kw buscan proporcionar una distribución más flexible. Esta familia tiene una amplia variedad de formas y es capaz de modelar datos con tasa de fallas en forma de bañera. Además, puede ser fácilmente adaptada para discriminar entre G y las distribuciones Kw-G. Si $a < 1$ entonces las colas de $f(x)$ serán más pesadas que las de $g(x)$. Del mismo modo, si $b < 1$ entonces las colas de $f(x)$ serán más pesadas

que las de $g(x)$. Por otro lado, si $a > 1$ entonces las colas de $f(x)$ serán más livianas que las de $g(x)$. Además, si $b > 1$ entonces las colas de $f(x)$ serán más livianas que las de $g(x)$.

La función de densidad Kw tiene una ventaja sobre la clase de distribución Beta Generalizada (Eugene et al. (2002)), dado que no involucra ninguna función especial. Para cada distribución continua G podemos asociar la distribución Kw-G con dos parámetros de forma adicional a y b con fda $G(x)$ y fdp $g(x)$ de la distribución G con densidad (0.3)

Las distribuciones Kw generalizadas pueden ser generadas de la siguiente forma: la distribución Kw-Normal (KwN) se obtiene tomando la fda $G(x)$ en la fórmula (0.3) como una fda de la distribución normal. Análogamente, las distribuciones Kw-Weibull (KwW), Kw-gamma (KwGa) y Kw-Gumbel (KwGu) se obtienen tomando a $G(x)$ como las fda de las distribuciones Weibull, gamma y Gumbel, respectivamente, entre muchas otras. Aquí, cada nueva distribución Kw-G se puede obtener de una distribución especificada G .

En este trabajo de revisión bibliográfica se hará una amplia descripción de la familia de la distribución Kumaraswamy. Nos ocupamos de la fórmula (0.3) con cierta generalidad en el Capítulo 1, definiendo varias funciones especiales la distribución Kw-G. En el Capítulo 2 se presentan algunas propiedades de la distribución Kw-G tales como: asíntotas, asimetría y curtosis de algunas distribuciones, momentos, función generadora de momentos, entropías, fiabilidad, estadísticos de orden, momentos de probabilidad ponderada y valores extremos. En el Capítulo 3 se presentará la relación de la distribución Kw con la distribución Beta. En el capítulo 4 se presentarán algunos ejemplos de aplicaciones ya realizadas usando las distribuciones Kw-G, tales como el crecimiento de la población del gorgojo de harina *Tribolium confusum*, tiempo de supervivencia de los pacientes con cancer sometidos a radioterapia y tiempos de fallas de dispositivos debido a los picos de voltaje durante las tormentas eléctricas. En los tres ejemplos se usan los criterios AIC, BIC y CAIC para determinar si el modelo Kw-G usado podría ser seleccionado como el mejor modelo entre los modelos ajustados.

El propósito de este trabajo es resumir en un sólo documento lo que se ha publicado hasta el momento de las distribuciones de probabilidad Kumaraswamy, por esto es una simple invitación a revisar la bibliografía usada en este trabajo para tener una idea de lo que está ya disponible en la literatura estadística y poder así determinar algunas nuevas líneas de estudio de esta interesante distribución de probabilidad. La bibliografía presentada parece exhaustiva dentro del nivel de acceso y conocimiento que tenemos disponible con los recursos electrónicos actuales, no sobra advertir que se pueden llegar a encontrar más trabajos sobre el particular que no fueron incluidos aquí, si esto ocurre será sólo por absoluto desconocimiento de su existencia actual.

Capítulo 1

Distribuciones Kw-G especiales

La familia de densidades Kw-G dadas en la ecuación (0.3) permite una mayor flexibilidad que depende de las expresiones analíticas de la fda $G(x)$ y fdp $g(x)$. Ahora, presentamos algunas distribuciones especiales Kw-G.

1.1. Modelo Kw-Normal (KwN)

La densidad de la KwN se obtiene de (0.3) tomando $G(\cdot)$ y $g(\cdot)$ siendo la fda y fdp de la distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$, tal que:

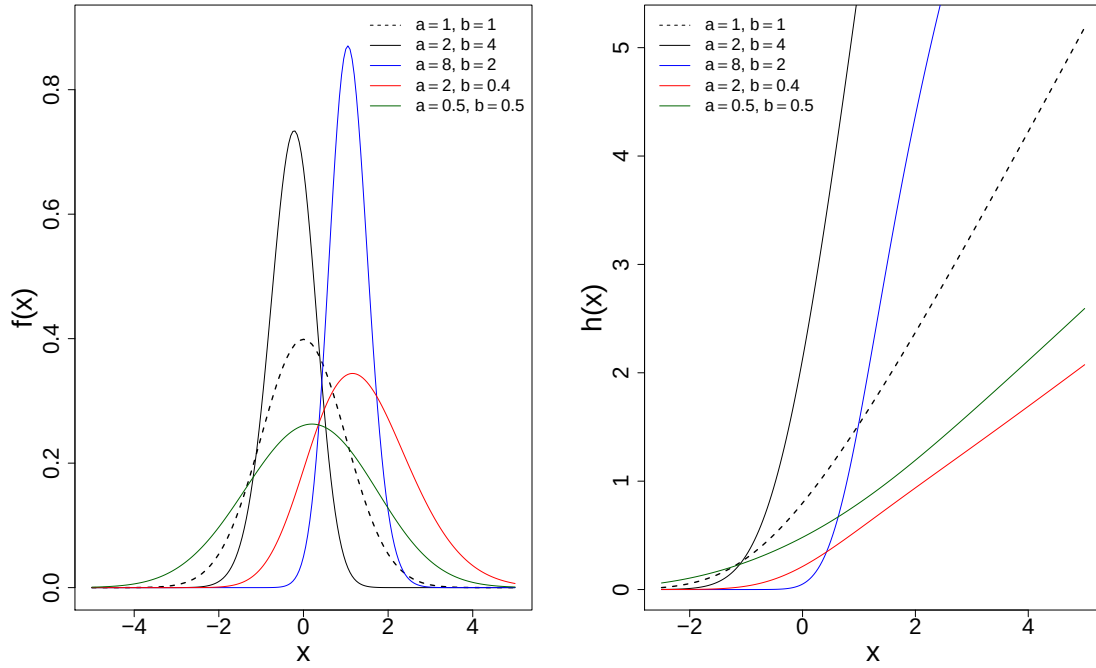
$$f(x) = \frac{ab}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \left\{ \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right\}^{a-1} \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right\}^{b-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro de localización, $\sigma > 0$ es un parámetro de escala, a y b son parámetros positivos, $\Phi(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ son la fda y fdp de la distribución normal estándar, respectivamente. Una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$ definida en la Ecuación 1.1 es denotada por $X \sim \text{KwN}(a, b, \mu, \sigma^2)$. Para $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, se obtiene la distribución KwN estándar. Además la distribución KwN con $a = 2$ y $b = 1$ coincide con la distribución skew-normal definida por Azzalini (1985). En la Figura 1.1 se presentan algunas formas de la función de densidad y función tasa de riesgo para la distribución KwN, para algunos valores especiales, con el propósito de observar su comportamiento.

1.2. Modelo Kw-Weibull (KwW)

La función de densidad acumulada de la distribución Weibull con parámetros $\beta > 0$ y $c > 0$ es $G(x) = 1 - \exp\{-(\beta x)^c\}$, para $x > 0$. La función de densidad KwW(a, b, c, β) con $x, a, b, c, \beta > 0$ se reduce a

$$f(x) = a b c \beta^c x^{c-1} e^{-(\beta x)^c} [1 - e^{-(\beta x)^c}]^{a-1} \times \{1 - [1 - e^{-(\beta x)^c}]^a\}^{b-1}. \quad (1.2)$$



(a) Función de densidad KwN(a,b,0,1)

(b) Función tasa de riesgo KwN(a,b,0,1)

Figura 1.1: Distribución Kw-Normal.

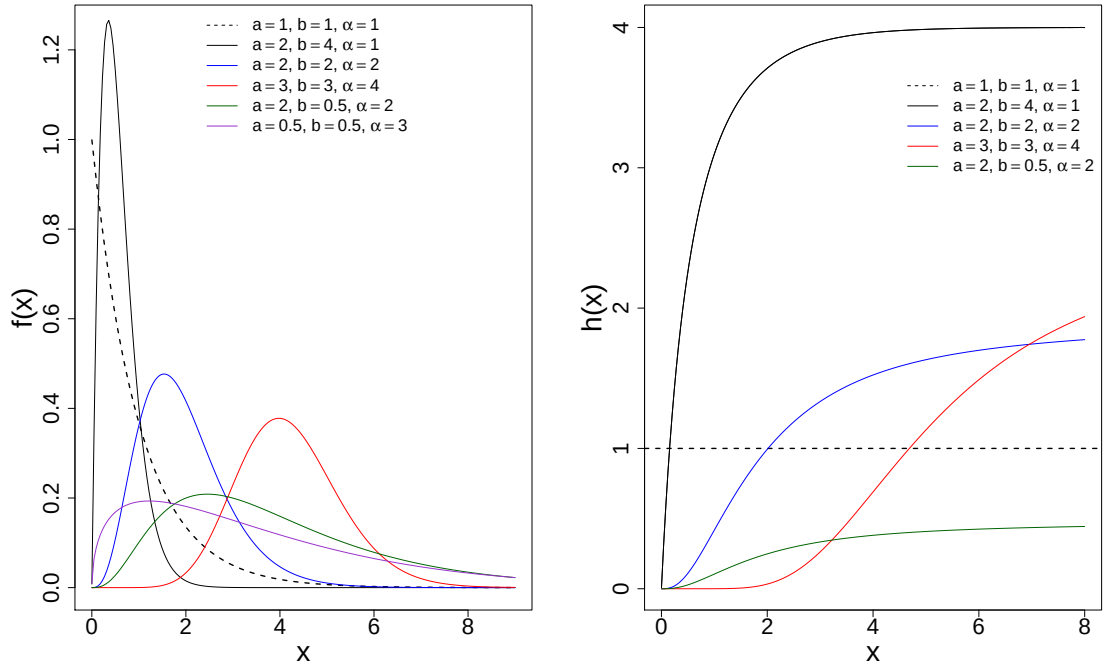
Si $c = 1$ se obtiene la distribución Kw-Exponencial (KwE). La distribución $\text{KwW}(1, b, 1, \beta)$ corresponde a la distribución exponencial con parámetro $\beta^* = b\beta$.

1.3. Modelo Kw-Gamma (KwGa)

Si Y es una variable aleatoria gamma con fda $G(y) = \Gamma_{\beta y}(\alpha)/\Gamma(\alpha)$ con $y, \alpha, \beta > 0$, donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma y $\Gamma_z(\alpha) = \int_0^z t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ es la función gamma incompleta. La densidad de una variable aleatoria $X \sim \text{KwGa}(a, b, \beta, \alpha)$ siguiendo la distribución KwGa con $x, \beta, \alpha, a, b > 0$, se puede expresar como:

$$f(x) = \frac{a b \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)^{ab}} \Gamma_{\beta x}(\alpha)^{a-1} \{\Gamma(\alpha)^a - \Gamma_{\beta x}(\alpha)^a\}^{b-1}. \quad (1.3)$$

Para $\alpha = 1$ se obtiene la distribución Kw-exponencial. Nótese que $\text{KwGa}(1, b, \beta, 1)$ corresponde a la distribución exponencial con parámetro $\beta^* = b\beta$. En la Figura 1.2 se presentan algunas formas de la función de densidad y función tasa de riesgo para la distribución KwGa.



(a) Función de densidad $KwGa(a,b,0,1)$

(b) Función tasa de riesgo $KwGa(a,b,0,1)$

Figura 1.2: Distribución Kw-Gamma.

1.4. Modelo Kw-Gumbel (KwGu)

Las funciones de densidad y de distribución Kw-Gumbel con parámetro de forma $\mu > 0$ y parámetro de escala $\sigma > 0$ están dadas respectivamente por:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[\frac{x - \mu}{\sigma} - \exp \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] \text{ y } G(x) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}, \quad x > 0. \quad (1.4)$$

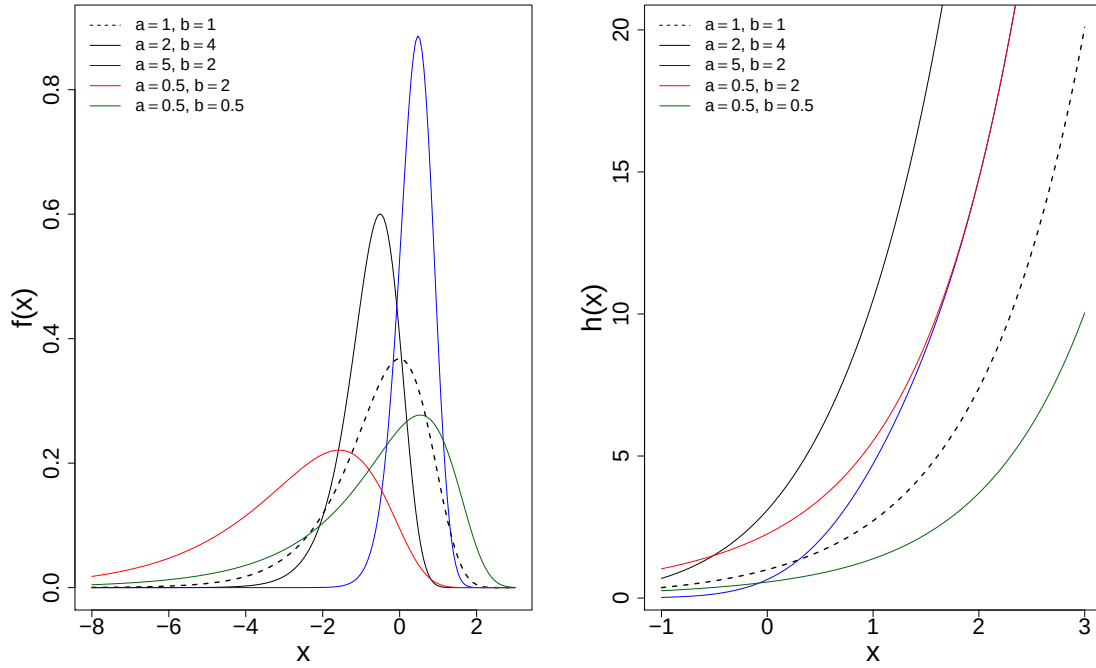
La media y la varianza son iguales a $\mu - \gamma\sigma$ y $\pi^2\sigma^2/6$, respectivamente, donde γ es la constante de Euler ($\gamma \approx 0,57722$). Incluyendo estas expresiones en la Ecuación (0.3) obtenemos la función de densidad de la distribución $KwGu(a, b, \mu, \sigma)$.

Para generar algunas formas de esta distribución presentamos la Figura 1.3.

1.5. Modelo Kw-Gaussiana Inversa (KwGI)

Adoptando la parametrización de Rigby y Stasinopoulos (2005), la fdp y la fda de la distribución Gaussiana inversa son respectivamente:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2x^3}} \exp \left\{ - \frac{1}{2\mu^2\sigma^2x} (x - \mu)^2 \right\}, \quad x, \mu, \sigma > 0$$



(a) Función de densidad KwGu(a,b,0,1)

(b) Función tasa de riesgo KwGu(a,b,0,1)

Figura 1.3: Distribución Kw-Gumbel.

y

$$G(x) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 x}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)\right) + \exp\left(\frac{2}{\mu\sigma^2}\right) \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 x}}\left(\frac{x}{\mu} + 1\right)\right).$$

El valor esperado y la varianza son iguales a μ y $\sigma^2\mu^3$, respectivamente. Remplazando estas expresiones en la Ecuación (0.3) obtenemos la distribución KwGI (a, b, μ, σ^2) . Algunas formas de la distribución KwGI son presentadas en la Figura 1.4

1.6. Modelo Kw-Chen (KwChen)

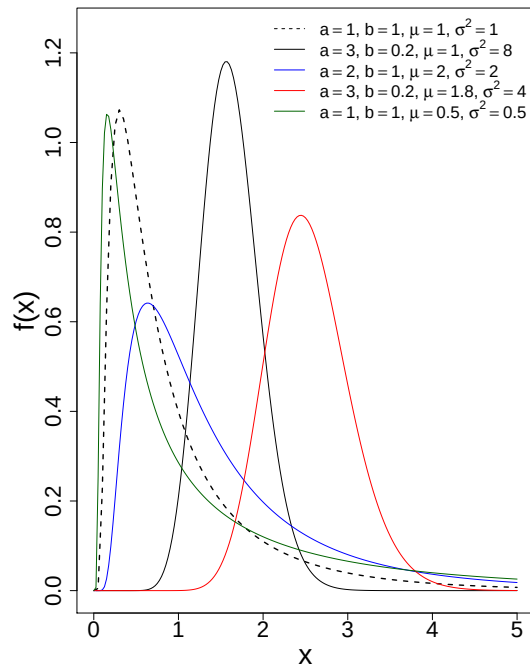
La función de densidad KwChen está dada por:

$$f(x) = a b \lambda_1 \beta_1 x^{\beta_1-1} \exp(x^{\beta_1}) \exp\{\lambda_1[1 - \exp(x^{\beta_1})]\} [1 - \exp\{\lambda_1[1 - \exp(x^{\beta_1})]\}]^{a-1} \times \\ \times \{1 - (1 - \exp\{\lambda_1[1 - \exp(x^{\beta_1})]\})^a\}^{b-1}, \quad (1.5)$$

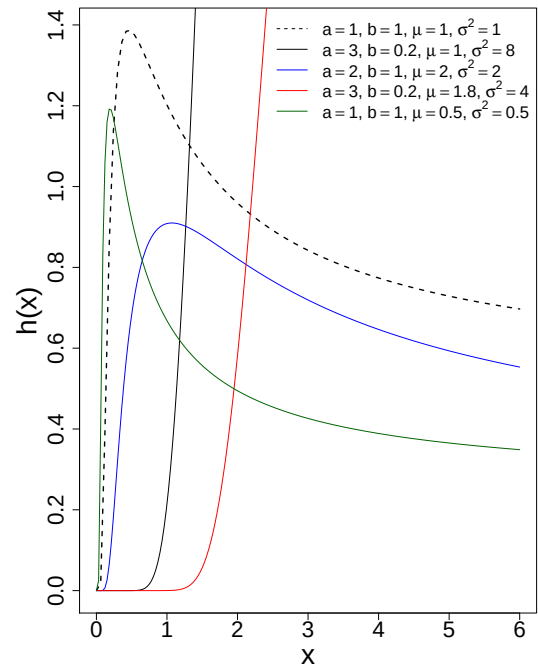
donde $\lambda_1 > 0$ y $\beta_1 > 0$. Si X es una variable aleatoria con función de densidad (1.5), se escribe $X \sim \text{KwChen}(a, b, \lambda_1, \beta_1)$. Para $a = b = 1$, se convierte en la distribución Chen propuesta por Chen (2000).

La función de supervivencia KwChen es:

$$S(x) = [1 - (1 - \exp\{\lambda_1[1 - \exp(x^{\beta_1})]\})^a]^b.$$



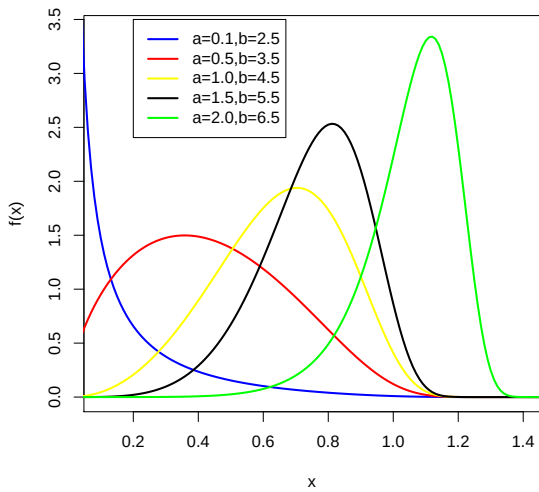
(a) Función de densidad KwGI



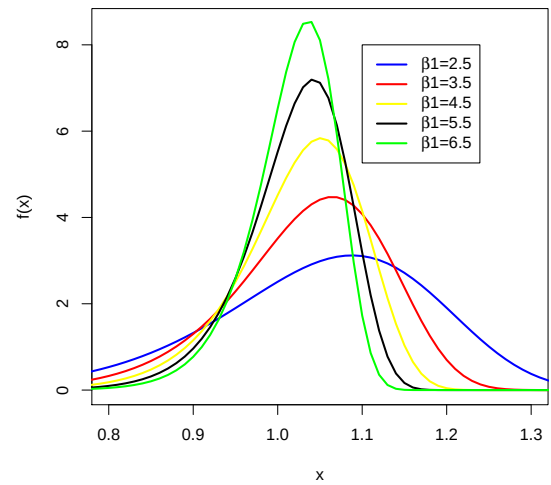
(b) Función tasa de riesgo KwGI

Figura 1.4: Distribución Kw-Gaussiana Inversa.

La Figura 1.5 presenta algunas formas de la distribución KwChen para diferentes parámetros.



(a) $\lambda_1 = 0,5$ y $\beta_1 = 3,2$



(b) $a=3.5$, $b=2.5$ y $\lambda_1 = 0,5$

Figura 1.5: Función de densidad KwChen para parámetros dados.

1.7. Modelo Kw-XTG (KwXTG)

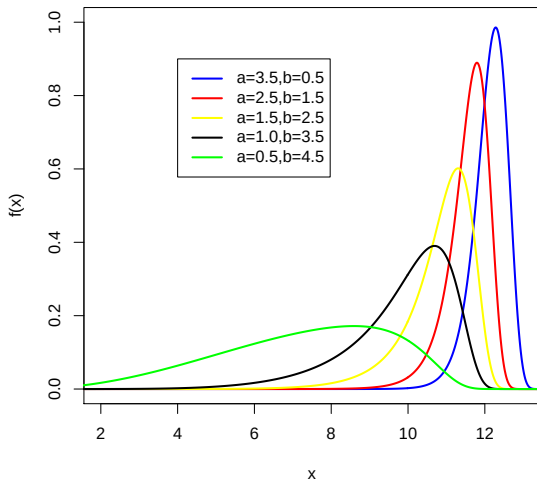
La función de densidad KwXTG está dada por:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a b \lambda_2 \beta_2 \left(\frac{x}{\alpha_2} \right)^{\beta_2-1} \exp \left\{ \left(\frac{x}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} + \lambda_2 \alpha_2 \left[1 - \exp \left(\left(\frac{x}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right) \right] \right\} \times \\
 &\times \left[1 - \exp \left\{ \lambda_2 \alpha_2 \left[1 - \exp \left(\left(\frac{x}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right) \right] \right\} \right]^{a-1} \times \\
 &\times \left\{ 1 - \left(1 - \exp \left\{ \lambda_2 \alpha_2 \left[1 - \exp \left(\left(\frac{x}{\alpha_2} \right)^{\beta_1} \right) \right] \right\} \right)^a \right\}^{b-1},
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

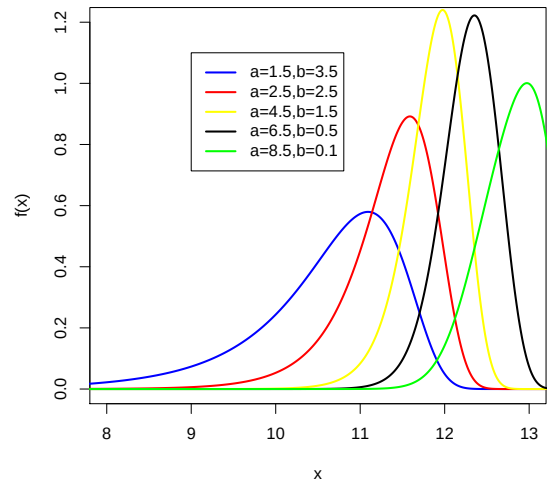
donde $\lambda_2 > 0$, $\alpha_2 > 0$ y $\beta_2 > 0$. Si X es una variable aleatoria con función de densidad (1.6), se escribe $X \sim \text{KwXTG}(a, b, \lambda_2, \alpha_2, \beta_2)$. Para $a = b = 1$, se convierte en la distribución XTG propuesta por Xie et al. (2002). La función de supervivencia de la distribución KwXTG es:

$$S(x) = \left[1 - \left(1 - \exp \left\{ \lambda_2 \alpha_2 \left[1 - \exp \left(\left(\frac{x}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right) \right] \right\} \right)^a \right]^b.$$

La Figura 1.6 muestra el comportamiento de esta distribución de probabilidad.



(a) $\lambda_1 = 0,5$ y $\beta_1 = 3,2$



(b) $a = 3.5$, $b = 2.5$ y $\lambda_1 = 0,5$

Figura 1.6: Función de densidad KwXTG para parámetros dados.

1.8. Modelo Kw-Weibull Flexible (KwWF)

La función de densidad KwWF está dada por:

$$f(x) = ab \left(\alpha_3 + \frac{\beta_3}{x^2} \right) \exp \left(\alpha_3 x - \frac{\beta_3}{x} \right) \exp \left\{ - \exp \left(\alpha_3 x - \frac{\beta_3}{x} \right) \right\} \times \quad (1.7)$$

$$\times \left[1 - \exp \left\{ - \exp \left(\alpha_3 x - \frac{\beta_3}{x} \right) \right\} \right]^{a-1} \left\{ 1 - \left(1 - \exp \left\{ - \exp \left(\alpha_3 x - \frac{\beta_3}{x} \right) \right\} \right)^a \right\}^{b-1},$$

donde $\alpha_3 > 0$ y $\beta_3 > 0$. Si X es una variable aleatoria con función de densidad (1.7), se escribe $X \sim \text{KwFW}(a, b, \alpha_3, \beta_3)$ (ver Figura 1.7). Para $a = b = 1$, se convierte en la distribución Weibull flexible (WF) propuesta por Bebbington et al. (2007). La función de supervivencia de la distribución KwWF es:

$$S(x) = \left[1 - \left(1 - \exp \left\{ - \exp \left(\alpha_3 x - \frac{\beta_3}{x} \right) \right\} \right)^a \right]^b.$$

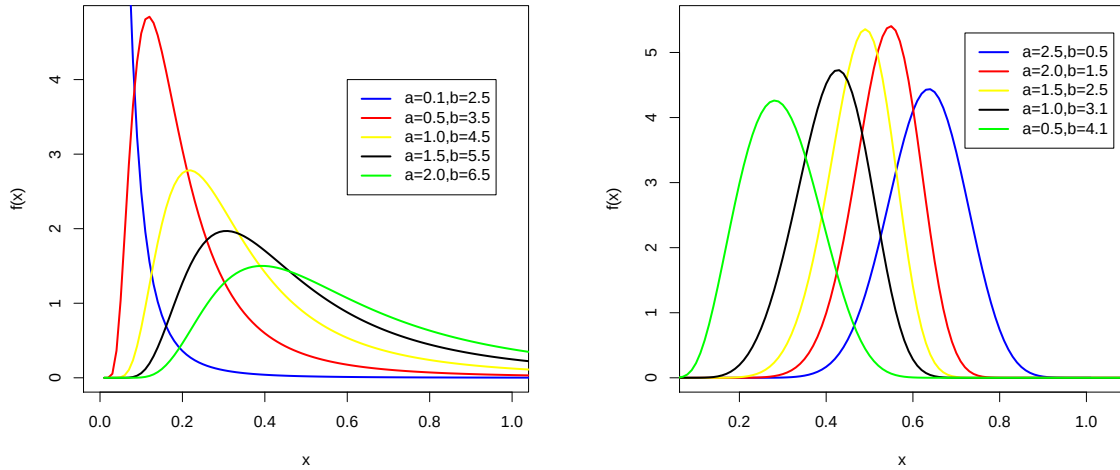


Figura 1.7: Función de densidad KwWF con $\lambda_1 = 0,5$ y $\beta_1 = 3,2$

Capítulo 2

Algunas propiedades de la familia Kw-G

En este capítulo se presentan las principales propiedades de la familia de distribuciones Kw-G.

2.1. Asíntotas y formas

Las asíntotas de (0.2), (0.3) y (0.4) cuando $x \rightarrow 0$ y $x \rightarrow \infty$ están dadas por:

$$F(x) \sim aG^a(x) \text{ cuando } x \rightarrow 0, \quad 1 - F(x) \sim \{1 - G^a(x)\}^b \text{ cuando } x \rightarrow \infty,$$

$$f(x) \sim abg(x)G^{a-1}(x) \text{ cuando } x \rightarrow 0, \quad f(x) \sim abg(x)\{1 - G^a(x)\}^{b-1} \text{ cuando } x \rightarrow \infty,$$

$$h(x) \sim abg(x)G^{a-1}(x) \text{ cuando } x \rightarrow 0, \quad h(x) \sim \frac{abg(x)}{1 - G^a(x)} \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

Las formas de la función de densidad de probabilidad (0.3) pueden ser descritas analíticamente. Los puntos críticos de la fdp son las raíces de la ecuación:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} + (a-1)\frac{g(x)}{G(x)} = a(b-1)\frac{g(x)G^{a-1}(x)}{1 - G^a(x)}. \quad (2.1)$$

Donde puede existir más de una raíz para (2.1). Si $x = x_0$ es una raíz de (2.1) entonces corresponde a un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión, dependiendo si $\lambda(x_0) < 0$, $\lambda(x_0) > 0$ o $\lambda(x_0) = 0$, donde:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{g(x)g''(x) - (g'(x))^2}{g^2(x)} + (a-1)\frac{G(x)g'(x) - g^2(x)}{G^2(x)} \\ &- a(b-1)\frac{G^{a-2}(x)\{(a-1)g^2(x) + G(x)g'(x)\}}{1 - G^a(x)} - a^2(b-1)\frac{G^{2a-2}(x)g^2(x)}{\{1 - G^a(x)\}^2}. \end{aligned}$$

2.2. Asimetría y curtosis de la familia Kw-G

A continuación se presentan algunas representaciones gráficas de los valores de la asimetría y la curtosis para algunas distribuciones de la familia KwG.

2.2.1. Distribución KwChen

Para $\lambda_1 = 0,2$ y $\beta_1 = 0,3$, las Figuras 2.1-(a), (b), (c) y (d) muestran que las curvas de asimetría decrecen y crecen dependiendo del valor de b (con a fijo) y a (con b fijo). Las curvas de curtosis decrecen dependiendo del valor de b (con a fijo) y decrecen y crecen dependiendo del valor de a (con b fijo).

2.2.2. Distribución KwXTG

Para $\lambda_2 = 0,01$, $\alpha_2 = 1,5$ y $\beta_2 = 0,05$, las Figuras 2.2-(a), (b), (c) y (d) muestran que las curvas de la asimetría aumentan con b (a fijo) y disminuyen con a (b fijo). Las curvas de curtosis disminuyen y aumentan con b (a fijo) y disminuyen con a (b fijo).

2.2.3. Distribución KwFW

Para $\alpha_3 = 0,01$ y $\beta_3 = 0,0001$, las figuras las Figuras 2.3-(a), (b), (c) y (d) muestran que las curvas de asimetría disminuyen y aumentan con b (a fijo) y a (b fijo). Las curvas de curtosis disminuyen y aumentan con b (a fijo) y a (b fijo).

2.3. Simulación de la distribución Kw-G

Se presentan dos métodos para la simulación de la distribución Kw-G. El primero utiliza el método de inversión. La función cuantil correspondiente a (0.2) se obtiene directamente de la función cuantil asociada con $G(x)$ por:

$$F^{-1}(x) = G^{-1} \left\{ [1 - (1 - x)^{1/b}]^{1/a} \right\}. \quad (2.2)$$

De esta forma se pueden generar variantes de Kw-G por:

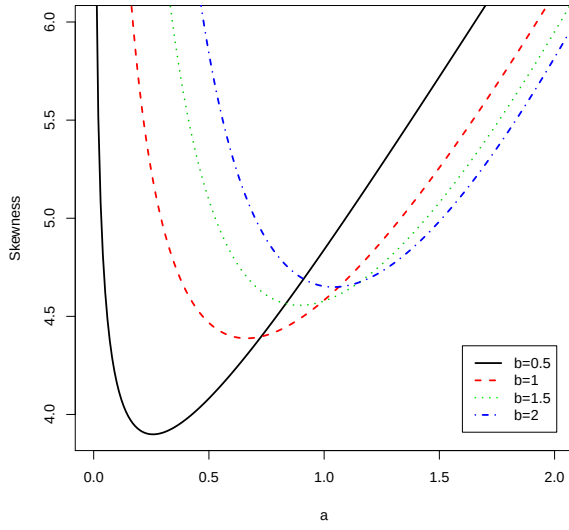
$$X = G^{-1} \left\{ [1 - (1 - U)^{1/b}]^{1/a} \right\},$$

donde U es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

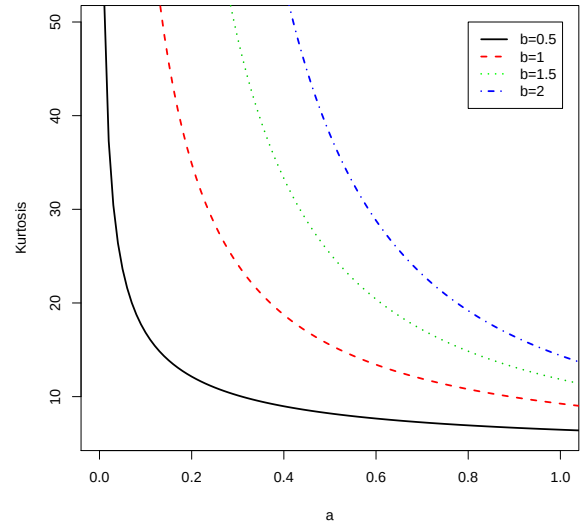
El segundo método para la simulación de la distribución Kw-G se basa en el método de rechazo. Si $a \geq 1$ y $b \geq 1$. Se define la constante M por:

$$M = \frac{a^b b (a-1)^{1-1/a} (b-1)^{b-1}}{(ab-1)^{b-1/a}}.$$

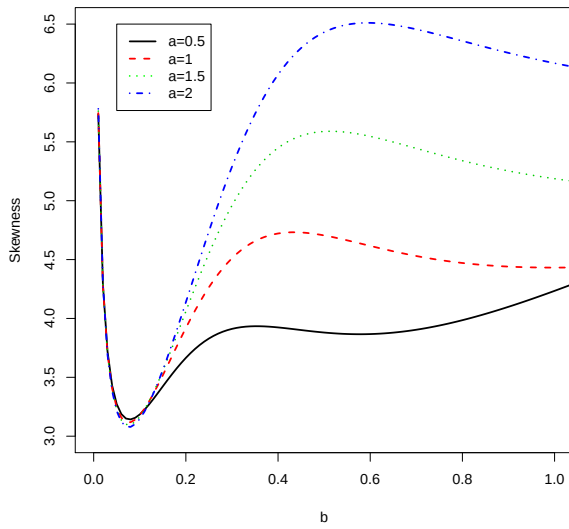
El siguiente esquema se mantiene para la simulación de variables aleatorias Kw-G:



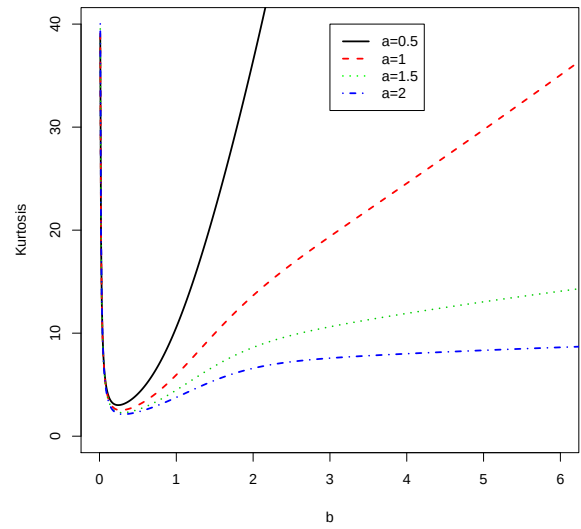
(a) Asimetría (en función de a)



(b) Curtosis (en función de a)



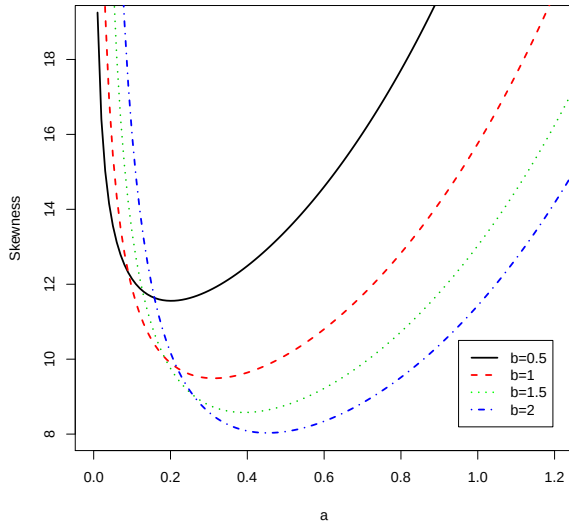
(c) Asimetría (en función de b)



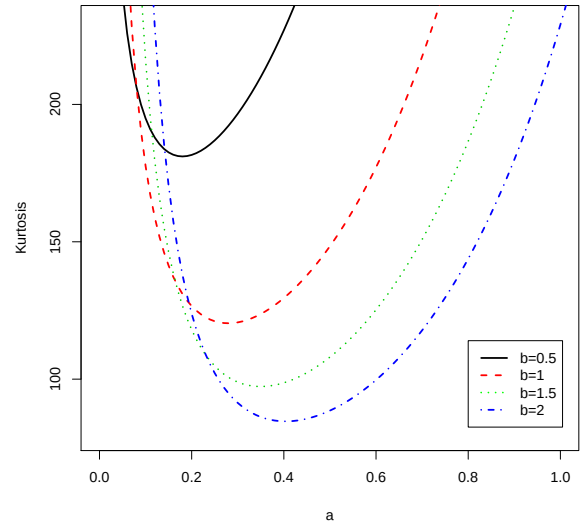
(d) Curtosis (en función de b)

Figura 2.1: Asimetría y curtosis de la distribución KwChen con $\lambda_1 = 0,2$ y $\beta_1 = 0,3$

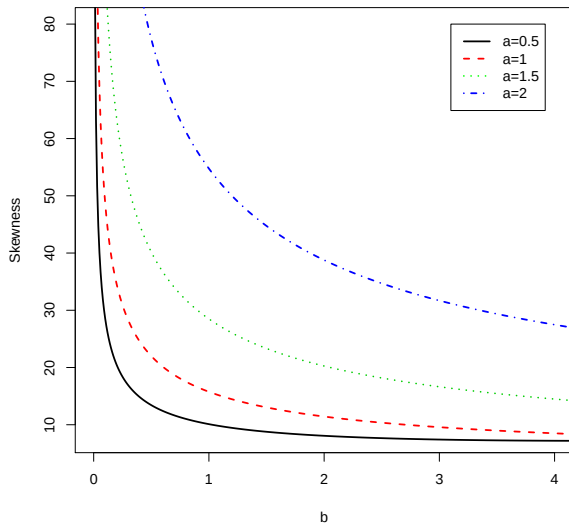
1. Simular $X = x$ de la fdp g .
2. Simular $Y = UMg(x)$, donde U es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 1]$.
3. Aceptar $X = x$ como una variable Kw-G si $Y < f(x)$. Si $Y \geq f(x)$ vuelva al paso 2.



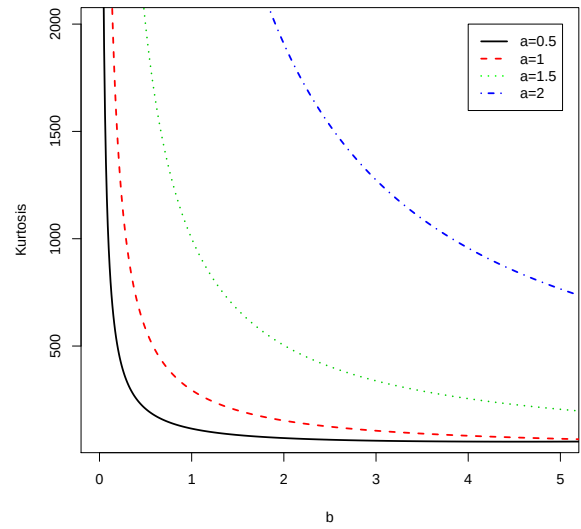
(a) Asimetría (en función de a)



(b) Curtosis (en función de a)



(c) Asimetría (en función de b)

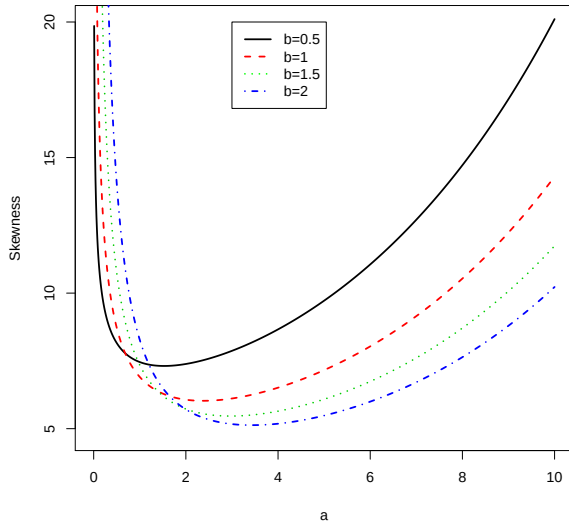


(d) Curtosis (en función de b)

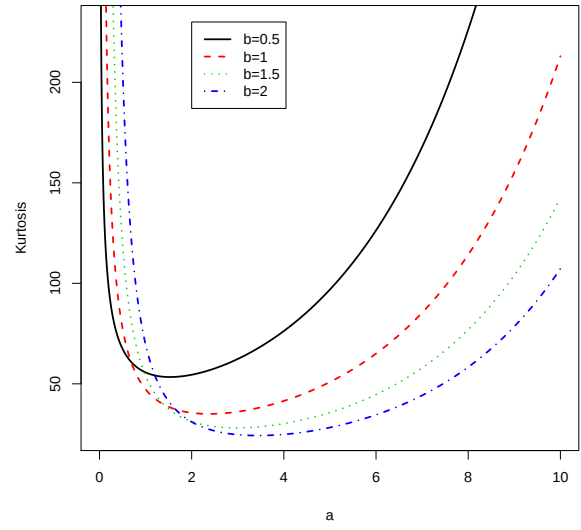
Figura 2.2: Distribución KwXTG con $\lambda_2 = 0,01$, $\alpha_2 = 1,5$ y $\beta_2 = 0,05$

2.4. Expansiones útiles

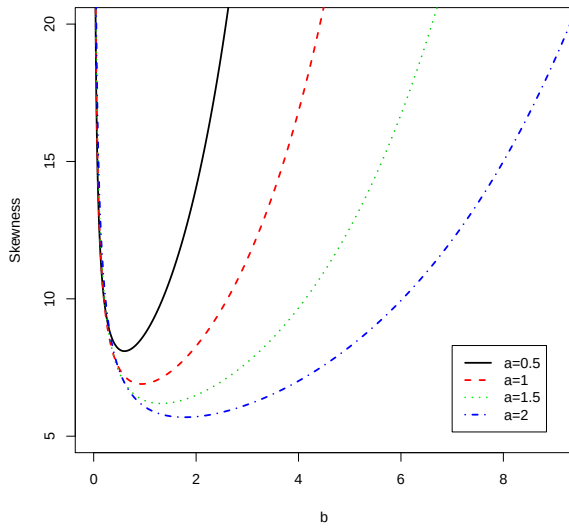
Algunas expansiones útiles para (0.2) y (0.3) pueden ser derivadas usando el concepto de las distribuciones exponenciadas. Sea $G(x)$ la función continua de referencia, se dice que una variable aleatoria tiene distribución exponenciada-G (Exp-G) con parámetro $a > 0$, es decir, $X \sim \text{Exp-G}(a)$



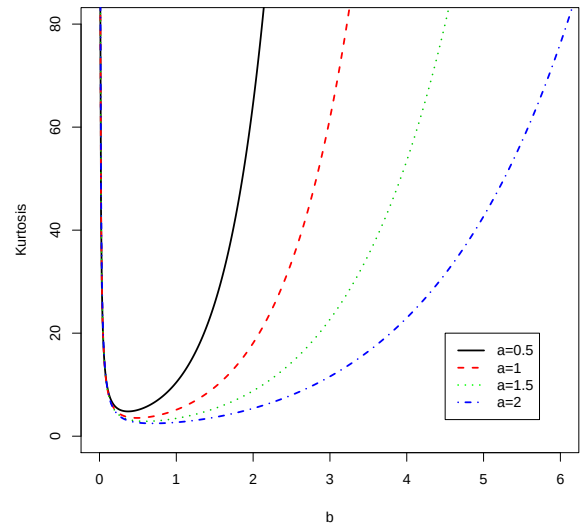
(a) Asimetría (en función de a)



(b) Curtosis (en función de a)



(c) Asimetría (en función de b)



(d) Curtosis (en función de b)

Figura 2.3: Distribución KwFW con $\alpha_3 = 0,01$ y $\beta_3 = 0,0001$

si su fdp y fda son:

$$h_a(x) = a g(x) G^{a-1}(x) \quad \text{y} \quad H_a(x) = G^a(x),$$

Las propiedades de las distribuciones exponenciadas han sido estudiadas ampliamente en los últimos años, por ejemplo, Mudholkar y Srivastava (1993), Mudholkar et al. (1995) y Murthy et al. (2004), para la distribución Weibull exponenciada, Gupta y Kundu (1999) para la distribución Pareto exponenciada, Gupta y Kundu (2001) para la distribución exponencial exponenciada y Nadarajah y Gupta

(2007) para la distribución gamma exponenciada.

Expandiendo los términos binomiales en (0.2) y (0.3), la fda y la fdp de la familia Kw-G pueden ser expresado como:

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{b}{k} H_{k,a}(x),$$

y

$$f(x) = a^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{(k+1)} h_{a(k+1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k G(x)^{a(k+1)-1} g(x), \quad (2.3)$$

donde $w_k = (-1)^k a b \binom{b-1}{k}$, $h_{a(k+1)}(x)$ y $H_{k,a}(x)$ son las fdp y fda de la distribución Exp-G($a(k+1)$) y Exp-G(ka), respectivamente. Por lo tanto las propiedades de la familia Kw-G se pueden obtener de la subfamilia Exp-G. Algunos ejemplos en la literatura son Mudholkar et al. (1995), Gupta y Kundu (2001), Nadarajah y Kotz (2006), entre otros.

2.5. Momentos

De ahora en adelante, vamos a escribir $X \sim \text{Kw-G}(a, b)$. Cordeiro y de Castro (2011) derivaron expresiones explícitas para los momentos de X como funciones lineales de momentos de probabilidad ponderada (MPP) de la distribución Exp-G. Una primera presentación para el n -ésimo momento de X se puede obtener a partir de (2.3) como:

$$E(X^n) = a^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_i}{(i+1)} E(Y_i^n),$$

donde $Y_i \sim \text{Exp-G}(a(i+1))$. Las expresiones para momentos de diversas distribuciones Exp-G están dadas en Nadarajah y Kotz (2006), las cuales pueden ser usadas para calcular $E(X^n)$.

Para un $b > 0$ real no entero, se puede reescribir (0.3) como:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i G(x)^{a(i+1)-1} g(x). \quad (2.4)$$

Si b es un número entero, el índice i en la suma anterior para en $b-1$. Una segunda representación para $E(X^n)$ se obtiene de (2.4) así:

$$E(X^n) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \tau(n, a(i+1) - 1), \quad (2.5)$$

donde $\tau(n, a)$ es una integral que puede expresarse en términos de la función cuantil de referencia $Q_G(x) = G^{-1}(x)$ como:

$$\tau(n, a) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n G(x)^a g(x) dx = \int_0^1 Q_G(u)^n u^a du. \quad (2.6)$$

Los momentos ordinarios de varias distribuciones Kw-G pueden ser determinados directamente de (2.5) y (2.6). Por ejemplo, los momentos de las distribuciones KwE (con parámetros $\lambda > 0$) y Kw-Pareto (KwPa), donde $G(x) = 1 - (1 + x)^{-\nu}$ y $\nu > 0$, están dados por:

$$E(X^n) = n! \lambda^n \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+j} \binom{a(i+1)-1}{j} w_i}{(j+1)^{n+1}},$$

y

$$E(X^n) = \sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{n+j} w_i \binom{n}{j} B(a(i+1), 1 - j\nu^{-1}),$$

respectivamente, donde $B(\cdot, \cdot)$ es la función beta. Para la distribución Kw-logística estándar (KwLS), donde $G(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$, para $t < 1$ se obtiene

$$E(X^n) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n B(t + a(i+1), 1 - t) \Big|_{t=0}.$$

Los momentos centrales (μ_s) y cumulantes (κ_s) de X pueden ser determinados como

$$\mu_s = \sum_{k=0}^p \binom{s}{k} (-1)^k \mu_1' \mu_{s-k}' \quad \text{y} \quad \kappa_s = \mu_s' - \sum_{k=1}^{s-1} \binom{s-1}{k-1} \kappa_k \mu_{s-k}',$$

respectivamente, donde $\kappa_1 = \mu_1'$. Así, $\kappa_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$, $\kappa_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$, $\kappa_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' - 3\mu_2'^2 + 12\mu_2'\mu_1' - 6\mu_1'^4$, etc. La asimetría $\gamma_1 = \kappa_3/\kappa_2^{3/2}$ y la curtosis $\gamma_2 = \kappa_4/\kappa_2^2$ pueden ser determinadas a partir del tercer y cuarto cumulante estandarizado.

Ahora proporcionamos expresiones cerradas para los momentos de los modelos Kw-normal y Kw-gamma.

2.5.1. Momentos del modelo KwN

La función de densidad KwN (para $x \in \mathbb{R}$) se obtiene de la ecuación (0.3) tomando $G(\cdot)$ y $g(\cdot)$ como fda y fdp de la distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. Obtenemos

$$f(x) = \frac{ab}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \left[\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right]^{a-1} \left[1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right]^{b-1},$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro de localización, $\sigma > 0$ es un parámetro de escala, $a > 0$, $b > 0$ son parámetros de forma, y $\phi(\cdot)$ y $\Phi(\cdot)$ son la fdp y fda de la distribución normal estándar, respectivamente. La variable aleatoria con densidad $f(x)$ es denotada por $X \sim \text{KwN}(a, b, \mu, \sigma^2)$. Para $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, obtenemos la distribución KwN estándar. Además, la distribución KwN con $a = 2$ y $b = 1$ coincide con la distribución skew-normal con parámetro de forma igual a uno.

Podemos trabajar con la distribución Kw-normal estándar (KwNS) en forma general, ya que los momentos de $X \sim \text{KwN}(a, b, \mu, \sigma)$ siguen de forma natural de los momentos de $Z \sim \text{KwN}(a, b, 0, 1)$

usando la expresión $E(X^n) = E[(\mu + \sigma Z)^n] = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \mu^{n-r} \sigma^r E(Z^r)$. La fdp de KwNS es $f(x) = a b \phi(x) \Phi(x)^{a-1} [1 - \Phi(x)^a]^{b-1}$. Los momentos de la distribución KwNS pueden ser obtenidos a partir de (2.4) para a real no entero si determinamos

$$\tau_{s,r} = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \phi(x) \Phi(x)^r dx$$

para s y r enteros no-negativos. Usando la expansión binomial e intercambiando términos, tenemos

$$\tau_{s,r} = \frac{1}{2^r \sqrt{2\pi}} \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \int_{-\infty}^{\infty} x^s e^{-x^2/2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{r-l} dx.$$

Usando la expansión en serie de la función error $\operatorname{erf}(\cdot)$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)m!},$$

la última integral se puede obtener a partir de ecuaciones (9)-(11) de Nadarajah (2008) en términos de la función Lauricella de tipo A (Aarts, 2000) definida por

$$\begin{aligned} & F_A^{(n)}(a; b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n}} \frac{x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde $(a)_i = a(a+1) \dots (a+i-1)$ es el factorial ascendente (con la convención $(a)_0 = 1$). Podemos escribir

$$\begin{aligned} \tau_{s,r} &= 2^{s/2} \pi^{-(r+1/2)} \sum_{l=0(s+r-l) \text{ incluso}}^r \binom{r}{l} 2^{-l} \pi^l \Gamma\left(\frac{s+r-l+1}{2}\right) \\ &\times F_A^{(r-l)}\left(\frac{s+r-l+1}{2}; \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}; -1, \dots, -1\right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde la suma sólo se toma cuando $s+r-l$ es par. Los términos en $\tau_{s,r}$ se desaparecen cuando $s+rl$ es impar. Por lo tanto, las ecuaciones (2.4) y (2.8) para a real no entero se puede aplicar para el cálculo de los momentos de la distribución KwN.

2.5.2. Momentos del modelo KwGa

Una variable aleatoria Z con distribución gamma con parámetro de forma $\alpha > 0$ y parámetro de escala $\beta > 0$, $G(\alpha, \beta)$, tiene la fda dada por

$$G_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0,$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma y $\gamma(\alpha, x) = \int_0^x w^{\alpha-1} e^{-w} dw$, $\alpha > 0$ es la función gamma incompleta.

Una variable aleatoria X con distribución $\text{KwGa}(a, b, \alpha, \beta)$, tiene función de densidad dada por

$$f(x) = \frac{a b \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)^{ab}} \gamma(\alpha, \beta x)^{a-1} [\Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, \beta x)^a]^{b-1}, \quad x > 0.$$

Podemos obtener $\tau_{s,r}$ de la expansión en series de potencia de la función gamma incompleta

$$G(x) = \frac{(\beta x)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\beta x)^m}{(\alpha + m)m!},$$

y entonces

$$\tau_{s,r} = \frac{\beta^{-s}}{\Gamma(\alpha)^{r+1}} \int_0^\infty u^{s+\alpha-1} \exp(-u) \left[u^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-u)^m}{(\alpha + m)m!} \right]^r du.$$

La última integral se puede obtener a partir de las ecuaciones (24) y (25) de Nadarajah (2008) como:

$$\tau_{s,r} = \frac{\beta^{-s} \alpha^{-r} \Gamma(s + \alpha(r + 1))}{\Gamma(\alpha)^{r+1}} F_A^{(r)}(s + \alpha(r + 1); \alpha, \dots, \alpha; \alpha + 1, \dots, \alpha + 1; -1, \dots, -1). \quad (2.9)$$

Por lo tanto, los momentos de la distribución KwGa se pueden escribir como una combinación lineal infinita de las funciones Lauricella de tipo A de las ecuaciones (2.4) y (2.9) para a real no-entero.

2.6. Función generadora de momentos

Presentamos tres representaciones para la función generadora de momentos (fgm) de X donde $M(t) = E(e^{tX})$. Claramente, la primera proviene de:

$$\begin{aligned} M(t) &= a b E \left[\exp(tX) G^{a-1}(X) \{1 - G^a(X)\}^{b-1} \right] \\ &= a b \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b-1}{k} (-1)^k E \left[\frac{\exp(tX)}{U^{-[a(k+1)-1]}} \right], \end{aligned}$$

donde U es una variable aleatoria uniforme definida en el intervalo unitario. Sin embargo, note que X y U no son independientes.

Una segunda representación para $M(t)$ se obtiene a partir de (2.3)

$$M(t) = a^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_i}{(i+1)} M_i(t),$$

donde $M_i(t)$ es la fgm de $Y_i \sim \text{Exp-G}(a(i+1))$; por lo tanto, para varias distribuciones Kw-G , la fgm $M(t)$ se puede determinar a partir de la fgm de la distribución G .

La tercera representación para $M(t)$ se puede derivar a partir de (2.4) como:

$$M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \rho(t, (i+1)a - 1), \quad (2.10)$$

donde la función $\rho(t, a)$ se puede expresar como:

$$\rho(t, a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} G(x)^a g(x) dx = \int_0^1 e^{tQ(u)} u^a du. \quad (2.11)$$

Podemos obtener la fgm de varias distribuciones Kw-G a partir de (2.10) y (2.11). Por ejemplo, la fgm de KwE (con parámetro real $\lambda > 0$), la fgm de KwLS (para $t < 1$) y la fgm de KwPa (con parámetro $\nu > 0$) son obtenidas a partir de (2.10) como

$$M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i B((i+1)a - \lambda t),$$

$$M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i B(t + (i+1)a, 1 - t),$$

y

$$M(t) = e^{-t} \sum_{i,r=0}^{\infty} w_i B((i+1)a, 1 - r\nu^{-1}) \frac{t^r}{r!},$$

respectivamente.

La función característica (fc) tiene propiedades útiles e importantes en la teoría estadística. Su enfoque es particularmente útil en el análisis de las combinaciones lineales de variables aleatorias independientes. Las tres representaciones (KwE, KwLS, KwPa) para la (fc) de X se generan por $\phi(t) = M(it)$ donde $\phi(t) = E(e^{itX})$, con $i = \sqrt{-1}$. Una representación más para la (fc) de X es:

$$\phi(t) = \int_0^{\infty} \cos(tx) f(x) dx + i \int_0^{\infty} \sin(tx) f(x) dx.$$

Con base en las expansiones del $\cos(tx) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r)!} (tx)^{2r}$ y $\sin(tx) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} (tx)^{2r+1}$, se obtiene

$$\phi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r t^{2r}}{(2r)!} \mu'_{2r} + i \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r t^{2r+1}}{(2r+1)!} \mu'_{2r+1}.$$

2.7. Las desviaciones medias

Sea $X \sim \text{KwG}(a, b)$. Las desviaciones medias alrededor de la media ($\delta_1(X) = E(|X - \mu'_1|)$) y alrededor de la mediana ($\delta_2(X) = E(|X - M|)$) pueden expresarse como:

$$\delta_1(X) = 2\mu'_1 F(\mu'_1) - 2m_1(\mu'_1) \text{ y } \delta_2(X) = \mu'_1 - 2m_1(M), \quad (2.12)$$

respectivamente, donde $\mu'_1 = E(X)$ y M denota la mediana de (X) , $F(\mu'_1)$ se obtiene (0.2) y $m_1(z) = \int_{-\infty}^z x f(x) dx$ es el primer momento incompleto. La mediana M sigue de (2.2) como:

$$M = Q_G \left\{ [1 - 2^{-1/b}]^{1/a} \right\}.$$

Siendo $u = G(x)$ en (2.4) se obtiene:

$$m_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k T_k(z), \quad (2.13)$$

donde la integral $T_k(z)$ se puede expresar en términos de $Q_G(u)$ por:

$$T_k(z) = \int_0^{G(z)} Q_G(u) u^{(k+1)a-1} du. \quad (2.14)$$

Las desviaciones medias de cualquier distribución Kw-G pueden ser determinados a partir de las ecuaciones (2.12) y (2.14). Por ejemplo, las desviaciones medias de KwE (con parámetro λ), KwLS y KwPa (con parámetro $\nu > 0$) son calculads inmediatamente usando la expansión binomial generalizada de las funciones

$$T_k(z) = \lambda^{-1} \Gamma(a(k+1) + 1) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \{1 - \exp(-j\lambda z)\}}{\Gamma(a(k+1) + 1 - j)(j+1)!},$$

$$T_k(z) = \frac{1}{\Gamma(k)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(a(k+1) + j) \{1 - \exp(-jz)\}}{(j+1)!}$$

y

$$T_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^j \frac{(-1)^j \binom{a(k+1)}{j} \binom{j}{r}}{(1 - r\nu)} z^{1-r\nu},$$

respectivamente.

Una representación alternativa para $m_1(z)$ puede ser derivada a partir de (2.3) de la siguiente forma

$$m_1(z) = \int_{-\infty}^z x f(x) dx = a^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{(k+1)} J_k(z), \quad (2.15)$$

donde

$$J_k(z) = \int_{-\infty}^z x h_{a(k+1)}(x) dx. \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) es la base para calcular las desviaciones medias de las distribuciones Exp-G. En consesuencias, las desviaciones medias de Kw-G sólo dependen de las desviaciones medias de la distribución Exp-G. Luego las representaciones alternativas para $\delta_1(X)$ y $\delta_2(X)$ son dadas por:

$$\delta_1(X) = 2\mu'_1 F(\mu'_1) - 2a^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{k+1} J_k(\mu'_1)$$

y

$$\delta_2(X) = \mu'_1 - 2a^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{k+1} J_k(M).$$

Las desviaciones medias pueden ser utilizadas para trazar las curvas de Lorenz y de Bonferroni en campos como la economía, fiabilidad, la demografía, los seguros y la medicina. Para una determinada probabilidad π , que se definen por $L(\pi) = m_1(q)/\mu'_1$ y $B(\pi) = m_1(q)/(\pi \mu'_1)$, respectivamente, donde $\mu'_1 = E(X)$ and $q = F^{-1}(\pi) = Q_G\{[1 - (1 - \pi)^{1/b}]^{1/a}\}$ pueden ser determinadas de la función cuantil de referencia. En economía, si π es la proporción de unidades cuyos ingresos son inferiores o iguales a q , $L(\pi)$ es la proporción del volumen total de ingresos acumulados por el conjunto de unidades con un ingreso menor o igual a q . La curva de Lorenz es creciente y convexa y, dado el ingreso medio, la función de densidad de X se puede obtener de la curvatura de $L(\pi)$. De forma similar, la curva de Bonferroni $B(\pi)$ es la razón entre el ingreso medio de este grupo y la renta media de la población. En resumen, $L(\pi)$ ofrece fracciones de los ingresos totales, mientras que los valores de $B(\pi)$ se refiere a los niveles de ingresos relativos.

2.8. Entropías

2.8.1. Entropía de Shannon

La entropía de una variable aleatoria X con función de densidad $f(x)$ es una medida de la variación de la incertidumbre. La entropía de Shannon se define por $E\{-\log[f(X)]\}$. Suponga que $X \sim \text{Kw-G}(a, b)$. Entonces,

$$E\{-\log[f(X)]\} = -\log(ab) - E[\log g(X)] - (a-1)E[\log G(X)] - (b-1)E[\log\{1 - G^a(X)\}]. \quad (2.17)$$

Ahora, se define a partir de la función de densidad cuantil G , $g(Q_G(u))$, la cantidad básica

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} \log\{g(x)\} g(x) G^{(k+1)a-1}(x) dx = \int_0^1 \log\{g(Q_G(u))\} u^{(k+1)a-1} du.$$

Las tres esperanzas en (2.17) se pueden expresar como:

$$E\{\log[g(X)]\} = ab \int_{-\infty}^{\infty} \log[g(x)] g(x) G^{a-1}(x) \{1 - G^a(x)\}^{b-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} w_k I_k,$$

$$E\{\log[G(X)]\} = \frac{b}{a} \int_0^1 \log u (1-u)^{b-1} du = \frac{b}{a} \left. \frac{\partial B(\alpha+1, b)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\frac{C + \psi(b+1)}{a}$$

y

$$E[\log\{1 - G^a(X)\}] = b \int_0^1 \log(u) u^{b-1} du = -\frac{1}{b},$$

donde C es la constante de Euler. Así, se desprende de (2.17) que

$$E \{-\log[f(X)]\} = -\log(ab) - \sum_{k=0}^{\infty} w_k I_k + \frac{(a-1)\{C + \psi(b+1)\}}{a} + \frac{b-1}{b}.$$

Podemos determinar I_k para algunas distribuciones Kw-G. Para la distribución KwE con parámetro λ , la función de densidad cuantil es $g(Q_G(u)) = \lambda(1-u)$ y entonces

$$I_k = \frac{\lambda}{a(k+1)} + \int_0^1 \log(1-u) u^{(k+1)a-1} du.$$

La última integral puede ser calculada para a real no entero, cambiando la variable $v = 1-u$, usando la expansión binomial generalizada y observando que $\int_0^1 \log(v) v^a dv = -(a+1)^{-2}$. Se tiene

$$I_k = \frac{\lambda}{a(k+1)} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} \Gamma(a(k+1))}{\Gamma(a(k+1)-j) j! (j+1)^2}.$$

Si a es un número entero, el índice j para en $(k+1)a-1$.

Para la distribución KwLS, $g(Q_G(u)) = u(1-u)$, de una manera similar, se obtiene:

$$I_k = \frac{-1}{a^2(k+1)^2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} \Gamma(a(k+1))}{\Gamma(a(k+1)-j) j! (j+1)^2}.$$

Para la distribución KwPa con parámetro ν , se tiene $g(Q_G(u)) = \nu(1-u)^{1+\nu^{-1}}$ donde:

$$I_k = \frac{\log(\nu)}{a(k+1)} + (1+\nu^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} \Gamma(a(k+1))}{\Gamma(a(k+1)-j) j! (j+1)^2}.$$

Una expresión alternativa para la primera esperanza en (2.17) se sigue de (2.15) como

$$E \{\log[g(X)]\} = a^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{k+1} E \{\log[g(Y_k)]\},$$

donde $Y_k \sim \text{Exp-G}(a(k+1))$. Así, también se puede expresar (2.17) como

$$\begin{aligned} E \{-\log[f(X)]\} &= -\log(ab) - a^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{k+1} E \{\log[g(Y_k)]\} + \frac{(a-1)\{C + \psi(b+1)\}}{a} \\ &+ \frac{b-1}{b}. \end{aligned}$$

La esperanza anterior se puede calcular para la mayoría de las distribuciones Exp-G.

2.8.2. Entropía de Rényi

Otra medida popular de entropía es la entropía de Rényi dada por:

$$\mathcal{J}_R(c) = \frac{1}{1-c} \log \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^c(x) dx \right], \quad c > 0, c \neq 1. \quad (2.18)$$

La integral puede ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^c(x) dx = (ab)^c \int_{-\infty}^{\infty} g^c(x) G^{(a-1)^c}(x) \{1 - G^a(x)\}^{(b-1)^c} dx$$

y entonces expandiendo la binomial y cambiando la variable

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^c(x) dx = (ab)^c \sum_{j=0}^{\infty} \binom{(b-1)^c}{j} (-1)^j K(c, j). \quad (2.19)$$

Aquí $K(c, j)$ denota la integral $K(c, j) = \int_0^1 g^{c-1}(Q(u)) u^{a(c+j)-c} du$, que debe ser calculada para cada modelo Kw. Para las distribuciones Kw-exponencial (con parámetro λ), Kw-logística estándar y Kw-Pareto (con parámetro ν), obtenemos

$$K(c, j) = \lambda^{c-1} B(a(c+j) - c, c-1), \quad K(c, j) = B(a(c+j) - 1, c-1),$$

e

$$K(c, j) = \nu^{c-1} B(a(c+j) - c, (1 + \nu^{-1})(c-1)),$$

respectivamente.

2.9. Fiabilidad

En este caso, presentamos la fiabilidad como $R = Pr(X_2 < X_1)$, cuando $X_1 \sim \text{Kw-G}(a_1, b_1)$ y $X_2 \sim \text{Kw-G}(a_2, b_2)$ son variables aleatorias independientes con soporte positivo. La fiabilidad tiene muchas aplicaciones, especialmente en varias áreas de la ingeniería. Sea f_i la fdp de X_i y F_i la fda de X_i . Expandiendo los binomiales en f_1 y F_2 obtenemos

$$R = 1 - a_1 b_1 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b_1-1}{j} \binom{b_2}{k} \frac{(-1)^{j+k}}{[a_1(j+1) + a_2k]}. \quad (2.20)$$

En el caso particular $a_1 = a_2 = a$, se puede reducir (2.20) a:

$$R = 1 - b_1 \sum_{j=0}^{\infty} \binom{b_1 + b_2 - 1}{j} \frac{(-1)^j}{(j+1)}.$$

Además si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$ entonces $R = 1/2$. Una expresión alternativa para R obtenida usando (2.3) y (2.3), es

$$R = 1 - a \sum_{k,m=0}^{\infty} \binom{b-1}{k} \binom{b-1}{m} \frac{(-1)^{k+m} R_{k,m}}{(k+1)},$$

donde $R_{k,m}$ se convierte en

$$R_{k,m} = \int_0^{\infty} h_{a(k+1)}(x) H_{a,m}(x) dx.$$

Por consiguiente $R_{k,m}$ denota la función de fiabilidad de las variables aleatorias independientes con el apoyo positivo de las distribuciones Exponencial-G con parámetro $a(k+1)$ y $a m$. Por lo tanto, la fiabilidad de la Kw-G(a_1, b_1) y Kw-G(a_2, b_2) variables aleatorias independientes se reduce a una combinación lineal de las funciones de fiabilidad $R_{k,m}$.

Claramente, $R_{k,m}$ denota la función de fiabilidad de variables aleatorias independientes (con soporte positivo) siguiendo las distribuciones G-exponenciadas con parámetros $a(k+1)$ y $a m$. Por lo tanto, la fiabilidad de las variables aleatorias independientes Kw-G(a_1, b_1) y Kw-G(a_2, b_2) se reducen a una combinación lineal de las funciones de confiabilidad $R_{k,m}$.

2.10. Estadísticos de Orden

Los estadísticos de orden están presentes en muchas áreas de estadística teórica y práctica. La densidad $f_{i:n}(x)$ del i -ésimo estadístico de orden, para $i = 1, \dots, n$, a partir variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $X_1, \dots, X_n$ siguiendo cualquier distribución Kw-G, es dada por

$$f_{i:n}(x) = \frac{ab}{B(i, n-i+1)} g(x) G(x)^{i-1} [1 - \{1 - G(x)^a\}^b] \{1 - G(x)^a\}^{b(n-i+1)-1}$$

y entonces

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} F(x)^{i+j-1}. \quad (2.21)$$

donde $B(., .)$ denota la función beta.

Presentamos ahora una expresión para la densidad de las estadísticas de orden Kw-G, como una función de la densidad de referencia multiplicada por infinitas sumas ponderadas de potencias de $G(x)$. Este resultado nos permite derivar los momentos ordinarios de los estadísticos de orden de la distribución Kw-G como infinitas sumas ponderadas de MPP de la distribución G .

En primer lugar, se calcula una expansión en series de potencias de $G(x)^q$ que vale para cualquier $q > 0$ real no entero. Se tiene:

$$G(x)^q = [1 - \{1 - G(x)\}]^q = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{q}{j} (-1)^j \{1 - G(x)\}^j$$

y entonces

$$G(x)^q = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^j (-1)^{j+r} \binom{q}{j} \binom{j}{r} G(x)^r.$$

Remplazando $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^j$ por $\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=r}^{\infty}$, obtenemos

$$G(x)^q = \sum_{r=0}^{\infty} s_r(q) G(x)^r, \quad (2.22)$$

donde los coeficientes son

$$s_r(q) = \sum_{j=r}^{\infty} (-1)^{r+j} \binom{q}{j} \binom{j}{r}, \quad (2.23)$$

para $r = 0, 1, \dots$

De la ecuación (0.2) la siguiente expansión para $F(x)^{i+j-1}$ vale

$$F(x)^{i+j-1} = \sum_{k=0}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{k} (-1)^k \{1 - G(x)^a\}^{kb}.$$

Usando la expansión en series para $\{1 - G(x)^a\}^{kb}$

$$\{1 - G(x)^a\}^{kb} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{kb}{m} G(x)^{ma}$$

y entonces de (2.22), se puede escribir

$$F(x)^{i+j-1} = \sum_{k=0}^{i+j-1} (-1)^k \binom{i+j-1}{k} \sum_{r=0}^{\infty} v_r(a, b, k) G(x)^r, \quad (2.24)$$

donde los coeficientes $v_r(a, b, k)$ son definidos por $v_r(a, b, k) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{kb}{m} s_r(ma)$ y las cantidades $s_r(ma)$ se dan antes para $r = 0, 1, \dots$

Intercambiando las sumas en la fórmula (2.24) se tiene:

$$F(x)^{i+j-1} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{r,i+j-1}(a, b) G(x)^r,$$

donde los coeficientes $p_{r,u}(a, b)$ pueden determinarse como:

$$p_{r,u}(a, b) = \sum_{k=0}^u (-1)^k \binom{u}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=r}^{\infty} (-1)^{mr+l} \binom{kb}{m} \binom{ma}{l} \binom{l}{r} \quad (2.25)$$

para $r, u = 0, 1, \dots$

Entonces, se puede escribir

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} G(x)^{a(k+1)+r-1} g(x), \quad (2.26)$$

donde

$$q_{r,k} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(-1)^j \binom{n-i}{j} w_k p_{r,i+j-1}}{B(i, n-i+1)}$$

y las cantidades $p_{r,u}(a, b)$ para $r, u = 0, 1, \dots$ son dados por (2.25).

De la definición de $\tau(n, a)$ dada en (2.6), el s -ésimo momento del estadístico de orden $X_{i:n}$ se puede representar como

$$E(X_{i:n}^s) = \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} \tau(s, a(k+1) + r - 1). \quad (2.27)$$

La fgm de $X_{i:n}$ se puede obtener a partir de (2.11) y (2.26) como

$$M_{i:n}(t) = \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} \rho(t, a(k+1) + r - 1). \quad (2.28)$$

A continuación se muestra una sencilla aplicación. Las expresiones $E(X_{i:n}^s)$ y $M_{i:n}(t)$ para la distribución KwE con parámetro $\lambda > 0$ se deducen de (2.27) y (2.28), respectivamente como

$$E(X_{i:n}^s) = s! \lambda^s \sum_{r,k,j=0}^{\infty} q_{r,k} \frac{(-1)^{s+j} \binom{a(k+1)+r-1}{j}}{(j+1)^{s+1}}$$

y

$$M_{i:n}(t) = \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} B(a(k+1) + r, 1 - \lambda t).$$

Estas expresiones son fácilmente derivadas para las distribuciones Kw-G citadas anteriormente.

Alternativamente, podemos expresar $f_{i:n}(x)$ como una combinación lineal de funciones de densidad G-Exponenciadas. La ecuación (2.26) se reescribe como:

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k}^* h_{a(k+1)+r} \quad (2.29)$$

donde

$$q_{r,k}^* = \frac{q_{r,k}}{a(k+1) + r}.$$

Claramente, $\sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k}^* = 1$. Algunas propiedades matemáticas de los estadísticos de orden Kw-G se pueden obtener inmediatamente conociendo los de la distribución G-exponenciada incluyendo momentos, momentos factoriales e inversos, fgm, desviaciones medias y las curvas de Bonferroni y Lorenz. Las ecuaciones (2.26)-(2.29) son los principales resultados de esta sección.

2.11. Momentos de probabilidad ponderada

Una teoría general de los momentos de probabilidad ponderada (MPP) cubre el resumen y la descripción de las distribuciones de probabilidad teóricas, el resumen y la descripción de muestras de datos observados, la estimación no paramétrica de la distribución subyacente de una muestra observada, estimación de parámetros y cuantiles de distribuciones de probabilidad y prueba de hipótesis para las distribuciones de probabilidad. El método de los MPP se puede utilizar para la estimación de parámetros de una distribución cuya forma inversa no puede ser expresado de forma explícita.

La (s, r) -ésimo MPP de X siguiendo la distribución Kw-G, se dice $\tau_{s,r}^{Kw}$ es formalmente definido por

$$\tau_{s,r}^{Kw} = E\{X^s F(X)^r\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^s F(x)^r f(x) dx.$$

De las ecuaciones (2.3) y (2.24) se puede escribir

$$\tau_{s,r}^{Kw} = \sum_{k,s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^v w_k p_{s,r}(a, b) \tau_{s,a(k+1)+s-1}, \quad (2.30)$$

donde $\tau_{s,a(k+1)+s-1} = \int_{-\infty}^{\infty} x^s G(x)^{a(k+1)+s-1} g(x) dx$ es la $(s, a(k+1) + s - 1)$ -ésimo MPP de la distribución G y de coeficientes w_k y $p_{s,r}(a, b)$ son definidos como antes.

La ecuación (2.30) revela que cualquier MPP de la distribución Kw-G puede calcularse a partir de una combinación lineal ponderada infinita de MPPs de la distribución G. Claramente, los momentos generalizados $\tau_{s,r}^{Kw}$ pueden ser obtenidos numéricamente con el software existente, mediante la adopción de un gran número de sustituciones del infinito en la ecuación (2.30). Los MPPs de la distribución de referencia puede ser evaluada por integración numérica.

En problemas de estimación se usan frecuentemente los momentos de orden $(1, r)$. Por ejemplo, para las distribuciones Gumbel y Weibull Greenwood et al. (1979), tenemos:

$$\tau_{1,r} = \frac{\mu + \sigma \{\log(1+r) + \epsilon\}}{1+r} \quad \text{y} \quad \tau_{1,r} = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} \frac{\Gamma(1+1/c)}{\beta(1+k)^{1+1/c}},$$

respectivamente. Por lo tanto, las cantidades $\tau_{1,r}^{Kw}$ para las distribuciones KwGu y KwW se calculan fácilmente a partir de (2.30).

Ahora se presenta una fórmula alternativa para los momentos de los estadísticos de orden de las distribución Kw-G basados en MPP de la distribución G. Se utiliza la fórmula para el momento s -ésimo dada por Barakat y Abdelkader (2004) aplicado al caso independiente e idénticamente distribuido, sujeto a la existencia,

$$E(X_{i:n}^s) = s \sum_{j=n-i+1}^n (-1)^{j-n+i-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} I_j(s), \quad (2.31)$$

donde $I_j(s)$ denota la integral $I_j(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{s-1} \{1 - F(x)\}^j dx$. Usando de la expansión binomial e intercambiando términos, la última integral se convierte en:

$$I_j(s) = \sum_{m=0}^j (-1)^m \binom{j}{m} \tau_{s-1,m}^{Kw},$$

donde $\tau_{s-1,m}^{Kw} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{s-1} F(x)^m dx$.

Insertando la expresión $I_j(s)$ en la formula (2.31) se tiene:

$$E(X_{i:n}^s) = s \sum_{j=n-i+1}^n \sum_{m=0}^j (-1)^{j-n+i+m-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \binom{j}{m} \tau_{s-1,m}^{Kw}, \quad (2.32)$$

donde los MPP $\tau_{s-1,m}^{Kw}$ de la distribución Kw-G se obtienen inmediatamente de la ecuación (2.30) como funciones lineales de los MPP de la distribución G. Por lo tanto, se demuestra que los momentos de los estadísticos de orden Kw-G se pueden expresar de manera explícita en términos de una combinación lineal infinita ponderada de los MPP de la distribución G.

Los L-momentos son análogos a los momentos ordinarios, pero se pueden estimar mediante combinaciones lineales de estadísticas de orden. Los L-momentos tienen varias ventajas teóricas sobre los momentos ordinarios. Se tienen cada vez que existe la media de la distribución, a pesar de que no pueden existir algunos momentos de orden superior. Estos son capaces de caracterizar una amplia gama de distribuciones y cuando es estimada a partir de una muestra, son más robustas a los efectos de los valores atípicos en los datos. A diferencia de los estimadores de momentos habituales, las estimaciones de los parámetros obtenidos a partir de los L-momentos son algunas veces más precisas en pequeñas muestras, incluso en las estimaciones de máxima verosimilitud (EMV). Estos momentos son funciones lineales de los estadísticos de orden esperado definidos como

$$\lambda_{r+1} = (r+1)^{-1} \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} E(X_{r+1-k:r+1}), \quad r = 0, 1, \dots,$$

Los primeros cuatro L -momentos son $\lambda_1 = E(X_{1:1})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}E(X_{2:2} - X_{1:2})$, $\lambda_3 = \frac{1}{3}E(X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3})$ y $\lambda_4 = \frac{1}{4}E(X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4})$. Ver Hosking (1990) Hosking (1990).

De la ecuación (2.32) aplicada a los medios ($s = 1$) de los estadísticos de orden, podemos obtener fácilmente las expansiones de los L-momentos de la distribución Kw-G. Los L-momentos también se pueden calcular en términos del MPP dadas en (2.30) como

$$\lambda_{r+1} = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k} \tau_{1,k}^{Kw}, \quad r = 0, 1, \dots$$

En particular, $\lambda_1 = \tau_{1,0}^{Kw}$, $\lambda_2 = 2\tau_{1,1}^{Kw} - \tau_{1,0}^{Kw}$, $\lambda_3 = 6\tau_{1,2}^{Kw} - 6\tau_{1,1}^{Kw} + \tau_{1,0}^{Kw}$ y $\lambda_4 = 20\tau_{1,3}^{Kw} - 30\tau_{1,2}^{Kw} + 12\tau_{1,1}^{Kw} - \tau_{1,0}^{Kw}$.

2.12. Valores extremos

Algunas veces se podría estar interesado en el comportamiento asintótico de los valores extremos $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ y $m_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

En primer lugar, supongamos que G pertenece al dominio de la distribución de valores extremos de Gumbel. Entonces por Leadbetter et al. (1987) debe existir una función estrictamente positiva $h(t)$, de tal forma que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - G(t + xh(t))}{1 - G(t)} = \exp(-x)$$

para cada $x \in (-\infty, \infty)$. Pero

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(t + xh(t))}{1 - F(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 - G^a(t + xh(t))}{1 - G^a(t)} \right\}^b \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 - G(t + xh(t))}{1 - G(t)} \right\}^b = \exp(-bx) \end{aligned}$$

para cada $x \in (-\infty, \infty)$. Así, se sigue por Leadbetter et al. (1987) que F también pertenece al dominio máximo de atracción de la distribución de valores extremos de Gumbel con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{a_n (M_n - b_n) \leq x\} = \exp \{-\exp(-bx)\}$$

para algunas sutiles constantes de normalización $a_n > 0$ y b_n .

Segundo, supóngase que G pertenece al dominio máximo de atracción de la distribución de valor extremo Fréchet. Entonces por Leadbetter et al. (1987), debe existir un $\beta > 0$, tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - G(tx)}{1 - G(t)} = x^\beta$$

para cada $x > 0$. Pero

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 - G^a(tx)}{1 - G^a(t)} \right\}^b = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 - G(tx)}{1 - G(t)} \right\}^b = x^{\beta b}$$

para cada $x > 0$. Así, se tiene por Leadbetter et al. (1987) que F también pertenece al dominio máximo de atracción de la distribución de valor extremo de Fréchet como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{a_n (M_n - b_n) \leq x\} = \exp(-x^{\beta b})$$

para algunas sutiles constantes de normalización $a_n > 0$ y b_n .

Tercero, supóngase que G pertenece al dominio máximo de atracción de la distribución de valor extremo de Weibull. Entonces por Leadbetter et al. (1987), debe existir $\alpha > 0$, de tal forma que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(tx)}{G(t)} = x^\alpha$$

para cada $x < 0$. Pero

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(tx)}{F(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{G(tx)}{G(t)} \right\}^a = x^{\alpha a}$$

para cada $x < 0$. Así, por Leadbetter et al. (1987) se sigue también que F pertenece al máximo dominio de atracción de la distribución de valor Weibull con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{a_n (M_n - b_n) \leq x\} = \exp \{-(-x)^{\alpha a}\}$$

para algunas sutiles constantes de normalización $a_n > 0$ y b_n .

El mismo argumento se aplica al mínimo dominio de atracción. Es decir, F pertenece al mismo dominio mínimo de atracción que el de G .

2.13. Estimación

Aquí, se considera la estimación por el método de máxima verosimilitud (EMV) y se proporcionan expresiones para la matriz asociada de información de Fisher. También se consideran cuestiones de estimación para datos censurados.

Suponga que $x_1, \dots, x_n$ es una muestra aleatoria de la distribución Kw-G (0.3). Suponga también que g está parametrizada por un vector θ de longitud p . La función log-verosimilitud (LL) de los parámetros, (a, b, θ) , es

$$\begin{aligned} \log L(a, b, \theta) &= n \log a + n \log b + \sum_{j=1}^n \log g(x_j; \theta) + (a-1) \sum_{j=1}^n \log G(x_j; \theta) \\ &+ (b-1) \sum_{j=1}^n \log \{1 - G^a(x_j; \theta)\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Los estimadores de máxima verosimilitud (EMV) son las soluciones de las ecuaciones simultáneas de:

$$\frac{n}{a} + \sum_{j=1}^n \log G(x_j; \theta) - (b-1) \sum_{j=1}^n \frac{G^a(x_j; \theta) \log G(x_j; \theta)}{1 - G^a(x_j; \theta)} = 0,$$

$$\frac{n}{b} + \sum_{j=1}^n \log \{1 - G^a(x_j; \theta)\} = 0$$

y

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n \frac{1}{g(x_j; \theta)} \frac{\partial g(x_j; \theta)}{\partial \theta_k} + (a-1) \sum_{j=1}^n \frac{1}{G(x_j; \theta)} \frac{\partial G(x_j; \theta)}{\partial \theta_k} \\ &- a(b-1) \sum_{j=1}^n \frac{G^{a-1}(x_j; \theta)}{1 - G^a(x_j; \theta)} \frac{\partial G(x_j; \theta)}{\partial \theta_k} = 0. \end{aligned}$$

Para la estimación de intervalos para los parámetros (a, b, θ) y prueba de hipótesis se requiere la matriz de información de Fisher. La estimación de los intervalos de los parámetros del modelo pueden ser obtenidos con teoría de verosimilitud estándar. Los elementos de esta matriz de (2.33) se pueden resolver como:

$$E \left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial a^2} \right) = \frac{n}{a^2} + nE \left[\frac{(\log G(X; \theta))^2 G^a(X; \theta)}{\{1 - G^a(X; \theta)\}^2} \right],$$

$$E \left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial a \partial b} \right) = nE \left[\frac{\log G(X; \theta) G^a(X; \theta)}{1 - G^a(X; \theta)} \right],$$

$$\begin{aligned}
E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial a \partial \theta_j}\right) &= -nE\left[\frac{1}{G(X; \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial G(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right] \\
&+ n(b-1)E\left[\frac{G^{a-1}(X; \boldsymbol{\theta}) \{a \log G(X; \boldsymbol{\theta}) + 1\}}{1 - G^a(X; \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial G(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right] \\
&- naE\left[\frac{G^{2a-1}(X; \boldsymbol{\theta}) \log G(X; \boldsymbol{\theta})}{\{1 - G^a(X; \boldsymbol{\theta})\}^2} \frac{\partial G(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right],
\end{aligned}$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial b^2}\right) = \frac{n}{b^2},$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial b \partial \theta_j}\right) = naE\left[\frac{G^{a-1}(X; \boldsymbol{\theta})}{1 - G^a(X; \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial G(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right]$$

y

$$\begin{aligned}
E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_j \partial \theta_k}\right) &= nE\left[\frac{1}{g^2(X; \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial g(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \frac{\partial g(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k}\right] \\
&+ n(a-1)E\left[\frac{1}{G^2(X; \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial G(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \frac{\partial G(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k}\right] - nE\left[\frac{1}{g(X; \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial^2 g(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_k}\right] \\
&- nE\left[\frac{1}{G(X; \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial^2 G(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_k}\right] \\
&+ na(a-1)(b-1)E\left[\frac{G^{a-2}(X; \boldsymbol{\theta})}{1 - G^a(X; \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial G(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \frac{\partial G(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k}\right] \\
&+ na^2(b-1)E\left[\frac{G^{2(a-1)}(X; \boldsymbol{\theta})}{\{1 - G^a(X; \boldsymbol{\theta})\}^2} \frac{\partial G(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \frac{\partial G(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k}\right] \\
&+ na(b-1)E\left[\frac{G^{a-1}(X; \boldsymbol{\theta})}{1 - G^a(X; \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial^2 G(X; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_k}\right].
\end{aligned}$$

Las esperanzas de los dos primeros elementos se pueden calcular como

$$E\left[\frac{(\log G(X; \boldsymbol{\theta}))^2 G^a(X; \boldsymbol{\theta})}{\{1 - G^a(X; \boldsymbol{\theta})\}^2}\right] = \frac{bB(2, b-2)}{6a^2} \times N$$

donde $N = \{\pi^2 - 6\psi'(b) - 12C - 12\psi(b) + 6C^2 + 12C\psi(b) + 6\psi^2(b)\}$ y

$$E\left[\frac{\log G(X; \boldsymbol{\theta}) G^a(X; \boldsymbol{\theta})}{1 - G^a(X; \boldsymbol{\theta})}\right] = \frac{bB(2, b-1)}{a} \{1 - C - \psi(b+1)\}.$$

Las esperanzas restantes se pueden calcular numéricamente.

A menudo, con los datos de supervivencia, se encuentran datos censurados. Existen diferentes formas de censura: censura tipo I, censura tipo II, etc. Se considerará el caso general de los datos multicensurados. Sean n sujetos de los cuales

- n_0 se sabe que han fallado en los momentos $x_1, \dots, x_{n_0}$.

- n_1 se sabe que han fracasado en el intervalo $[s_{j-1}, s_j]$, $j = 1, \dots, n_1$.
- n_2 sobrevivieron a un tiempo r_j , $j = 1, \dots, n_2$ pero no se observaron por más tiempo.

Note que $n = n_0 + n_1 + n_2$. Nótese también que la censura tipo I y tipo II figuran como casos particulares de datos multicensurados. La función (LL) de los parámetros (a, b, θ) para estos datos multicensurados es

$$\begin{aligned}
 \log L(a, b, \theta) = & n_0 \log a + n_0 \log b + \sum_{j=1}^{n_0} \log g(x_j; \theta) + (a-1) \sum_{j=1}^{n_0} \log G(x_j; \theta) \\
 & + (b-1) \sum_{j=1}^{n_0} \log \{1 - G^a(x_j; \theta)\} \\
 & + \sum_{j=1}^{n_1} \log \left\{ [1 - G^a(s_{j-1}; \theta)]^b - [1 - G^a(s_j; \theta)]^b \right\} \\
 & + b \sum_{j=1}^{n_2} \log \{1 - G^a(r_j; \theta)\}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

De aquí se desprende que los EMV son las soluciones simultáneas de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 & \frac{n_0}{a} + \sum_{j=1}^{n_0} \log G(x_j; \theta) - (b-1) \sum_{j=1}^{n_0} \frac{G^a(x_j; \theta) \log G(x_j; \theta)}{1 - G^a(x_j; \theta)} \\
 & + b \sum_{j=1}^{n_1} \frac{U(s_j; \theta) - U(s_{j-1}; \theta)}{[1 - G^a(s_{j-1}; \theta)]^b - [1 - G^a(s_j; \theta)]^b} - b \sum_{j=1}^{n_2} \frac{G^a(r_j; \theta) \log G(r_j; \theta)}{1 - G^a(r_j; \theta)} = 0, \\
 & \frac{n_0}{b} + \sum_{j=1}^{n_0} \log \{1 - G^a(x_j; \theta)\} - \sum_{j=1}^{n_1} \frac{V(s_j; \theta) - V(s_{j-1}; \theta)}{[1 - G^a(s_{j-1}; \theta)]^b - [1 - G^a(s_j; \theta)]^b} \\
 & + \sum_{j=1}^{n_2} \log \{1 - G^a(r_j; \theta)\} = 0
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{n_0} \frac{1}{g(x_j; \theta)} \frac{\partial g(x_j; \theta)}{\partial \theta_k} + (a-1) \sum_{j=1}^{n_0} \frac{1}{G(x_j; \theta)} \frac{\partial G(x_j; \theta)}{\partial \theta_k} \\
 & - a(b-1) \sum_{j=1}^{n_0} \frac{G^{a-1}(x_j; \theta)}{1 - G^a(x_j; \theta)} \frac{\partial G(x_j; \theta)}{\partial \theta_k} + ab \sum_{j=1}^{n_1} \frac{W(s_j; \theta) - W(s_{j-1}; \theta)}{[1 - G^a(s_{j-1}; \theta)]^b - [1 - G^a(s_j; \theta)]^b} \\
 & - ab \sum_{j=1}^{n_2} \frac{G^{a-1}(r_j; \theta) \partial G(r_j; \theta) / \partial \theta_k}{1 - G^a(r_j; \theta)} = 0,
 \end{aligned}$$

donde $U(s) = \{1 - G^a(s)\}^{b-1} G^a(s) \log G(s)$, $V(s) = \{1 - G^a(s)\}^b \log \{1 - G^a(s)\}$ y $W(s) = \{1 - G^a(s)\}^{b-1} G^{a-1}(s) \partial G(s) / \partial \theta_k$.

Capítulo 3

Relación de la distribución Kw con la distribución Beta

Considere partir de la función de densidad acumulada de referencia $G(x)$ y función de densidad de probabilidad de referencia $g(x)$, Eugene et al. (2002) definieron la distribución beta-G(a, b) y su función de densidad por

$$f(x) = \frac{1}{B(a, b)} G(x)^{a-1} \{1 - G(x)\}^{b-1} g(x), \quad (3.1)$$

donde $a > 0$ y $b > 0$ son dos parámetros adicionales a los parámetros de G . Eugene et al. (2002), Nadarajah y Kotz (2004, 2006) definen las distribuciones beta normal, beta Gumbel y beta exponencial tomando a $G(x)$ como la fda de la distribución normal, Gumbel y exponencial, respectivamente. Se puede ver fácilmente que si $Z \sim \text{Exp-G}(a)$ con fda $H_a(x) = G(x)^a$, entonces la distribución beta- $H_a(1, b)$ es idéntica a la distribución Kw-G(a, b). Así, la distribución beta-G($1, b$) aplicada a la exp-G(a) produce la distribución Kw-G(a, b). Algunas propiedades de los modelos Kw-G se pueden derivar de esta manera. Si Z tiene la distribución beta-G($1, b$) entonces $X = G^{-1}(Z^{1/a})$ las distribución tendrá Kw-G(a, b).

Ahora, se obtienen algunas propiedades de la Kw-Exponencial (a, b) utilizando los resultados de Barreto-Souza et al. (2010) quienes investigaron la distribución exponencial beta exponenciada. Considere la distribución exponencial con parámetro λ . Las propiedades de la Kw-exponencial(a, b, λ) se pueden obtener inmediatamente de la distribución de cuatro parámetros de la la distribución exponencial beta exponenciada, definida aquí como un modelo tri-paramétrico BEE($1, b, \lambda, a$) ver Barreto-Souza et al. (2010).

La función de densidad Kwe de parámetros a, b y λ está dada por

$$f(x) = a b \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{a-1} \{1 - (1 - e^{-\lambda x})^a\}^{b-1}, \quad x > 0. \quad (3.2)$$

Para $b > 0$ real no entero, los momentos de X son:

$$\mu'_r = E(X^r) = \frac{a \Gamma(b+1)}{\lambda^r} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+r} \binom{b-1}{j} \frac{d^r B(p, a(j+1))}{dp^r} \Big|_{p=1}.$$

Si $b > 0$ es un número entero, la sumatoria se para en $b - 1$.

Cuando $t < \lambda$, la fgm se obtiene de Barreto-Souza et al. (2010) para $b > 0$ real, no entero como

$$M(t) = a b \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{b-1}{j} B(1-t/\lambda, (j+1)a).$$

Si $b > 0$ es un número entero, suponiendo $t < \lambda$, la suma anterior se termina en $b - 1$.

El r -ésimo momento de $X_{i:n}$, para $b > 0$ real no entero, se convierte en

$$E(X_{i:n}^r) = \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{k+i-1}=0}^{\infty} \delta_k E(X_k^r)$$

donde

$$\delta_k = \frac{(-1)^{k+\sum_{j=1}^{k+i-1} m_j} \binom{n-i}{k} B(\alpha\{a(i+1) + \sum_{j=1}^{k+i-1} m_j\}, b)}{B(a, b)^{k+i} B(i, n-i+1)} \prod_{j=1}^{k+i-1} \frac{\binom{b-1}{m_j}}{(a+m_j)}$$

y $X_k \sim \text{BGE}(a\{(i+1) + \sum_{j=1}^{k+i-1} m_j\}, b, \lambda, a)$. Para $b > 0$ entero, los índices de las cantidades anteriores termina en $b - 1$.

Capítulo 4

Aplicaciones

A continuación se presentan algunos ejemplos que ilustran algunas ventajas de las distribuciones Kw-G en comparación con algunos modelos existentes. Damos dos tipos aplicaciones (datos no censurados y censurados) se toman bases de datos conocidas para demostrar la aplicabilidad de la distribución kwG.

4.1. Crecimiento de la población del gorgojo *Tribolium confusum* (datos sin censura)

Se presenta un ejemplo con los datos de crecimiento de la población del gorgojo de la harina *Tribolium confusum* cultivados a 29°C presentado en Eugene et al. (2002).

La Tabla (4.1) contiene los valores del *AIC* en forma creciente para las distribuciones ajustadas y los EMV de los parámetros. Según el *AIC*, las distribuciones Beta-normal y Kw-normal producen esencialmente el mismo ajuste, superando a las restantes distribuciones ajustadas.

Basados en los valores de la estadística *LR* (es una prueba estadística utilizada para comparar el ajuste de dos modelos), las distribuciones *Kw*-gamma y *Kw*-exponencial no son significativamente diferentes, dado que $LR = 1,542$ (dando un p -valor=0.214, con 1 grado de libertad). Comparan-

Tabla 4.1: EMV de los modelos ajustados con AIC (orden creciente)
Estimación de parámetros

Distribuciones	<i>AIC</i>	<i>a</i>	<i>b</i>		
Beta normal	7177.1	16.22	0.26	$\mu = 15,31$	$\sigma^2 = 43,04$
<i>Kw</i> -normal	7177.2	16.67	0.26	$\mu = 22,52$	$\sigma^2 = 42,28$
<i>Kw</i> -exponencial	7180.8	17.24	1.20	$\beta = 43,18$	
<i>Kw</i> -gamma	7181.2	1.85	0.67	$\alpha = 7,37$	$\beta = 14,21$
Gamma	7183.9	—	—	$\alpha = 8,99$	$\beta = 15,56$

Tabla 4.2: Frecuencias observadas y esperadas del número de gorgojos *Tribolium confusum*

Número		Esperado			
Adultos	Observado	Gamma	<i>Kw</i> -exponencial	<i>Kw</i> -normal	beta normal
30	1	0.75	0.14	0.18	0.26
50	1	9.85	5.80	5.58	5.94
70	40	39.72	37.72	37.85	37.08
90	96	83.59	92.40	93.11	92.34
110	122	117.15	128.73	126.03	126.97
130	140	124.56	127.78	123.39	124.34
150	92	108.51	103.08	101.54	101.66
170	70	81.35	73.14	75.29	74.94
190	44	54.24	47.90	51.67	51.26
210	38	32.93	29.84	33.11	32.85
230	25	18.51	18.02	19.87	19.77
250	13	9.76	10.67	11.18	11.19
270	4	4.87	6.24	5.91	5.96
290	1	2.32	3.62	2.93	2.99
310	1	1.06	2.09	1.37	1.41
330	2	0.47	1.20	0.60	0.63
Total	690	690	688	690	690

do la distribución *Kw*-gamma con la distribución Gamma, encontramos que existe una diferencia significativa, dado que $LR = 6,681$ (p -valor=0.035, con 2 grados de libertad).

Las distribuciones ajustadas superpuestas al histograma de los datos en la Figura 4.1 refuerza el resultado presentado en la Tabla 4.1 para la distribución gamma. Las distribuciones beta normal y la *Kw*-normal son casi indistinguibles. Esta afirmación es reforzada aún más por la comparación entre las frecuencias observadas y esperadas presentadas en la Tabla 4.2.

4.2. Voltaje (datos sin censura)

En este ejemplo, se comparan los resultados de los ajustes de algunas distribuciones de un conjunto de datos presentados por Meeker y Escobar (1998), que contiene los tiempos de fallas y tiempos de funcionamiento para una muestra de dispositivos de un sistema. En un cierto punto en el tiempo, 30 unidades fueron instaladas en condiciones normales de servicio. Se observaron dos causas de fallas para cada unidad que falló: la falla causada por una acumulación de daños debido a los picos de voltaje de la línea eléctrica durante las tormentas eléctricas y fallas provocadas por el desgaste normal del producto. Las evaluaciones numéricas requeridas se implementaron utilizando el procedimiento

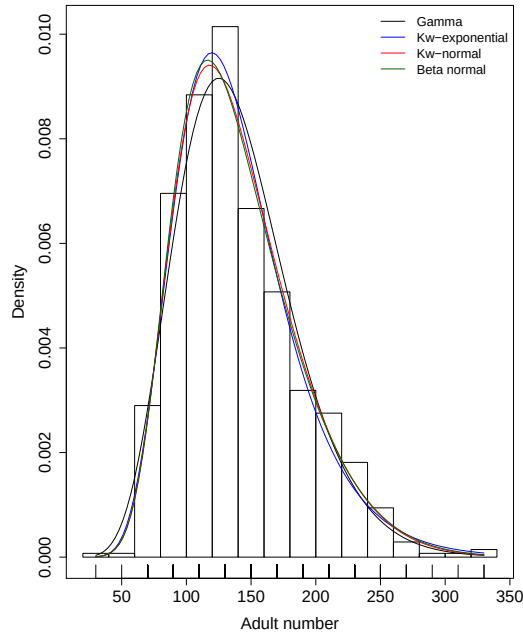


Figura 4.1: Histograma del crecimiento del número de adultos y densidad de probabilidad ajustada.

NLMIXED de SAS. La Tabla 4.3 presenta los EMV de los parámetros (y los correspondientes errores estándar en paréntesis) y los valores de las siguientes estadísticas para los modelos ajustados: AIC (Criterio de Información de Akaike), BIC (Criterio de Información Bayesiano) y CAIC (Criterio Consistente de Información de Akaike). Estos resultados indican que el modelo de Kw-Weibull tiene los valores más bajos de AIC, CAIC y BIC entre todos los modelos ajustados, por lo que podría ser elegido como el mejor modelo.

La densidad Beta Weibull está dada por:

$$f(x) = \frac{c\lambda^c}{B(a,b)} x^{c-1} \exp\{-b(\lambda x)^c\} [1 - \exp\{-(\lambda x)^c\}]^{a-1}, \quad x, a, b, c, \lambda > 0.$$

Con el fin de evaluar si el modelo es apropiado, se presenta en la Figura (4.2) el histograma de los datos y las funciones de densidad ajustadas a los datos, específicamente se ajustaron las distribuciones Kw-XGT, XGT, Kw-FW, FW, Kw-Chen, Chen, Kw-Weibull y beta Weibull. La Figura (4.3) proporciona la función de supervivencia empírica y estimada de estas distribuciones. Se concluye que la distribución Kw-XGT es la que mejor se ajusta estos datos.

4.3. Radioterapia (datos censurados)

El conjunto de datos se refiere al tiempo de supervivencia (días) para pacientes con cáncer ($n = 51$) que van a someterse a radioterapia (Louzada-Neto, 2001). El porcentaje de observaciones cen-

Tabla 4.3: EMV de los parámetros para algunos modelos ajustados a los datos de voltaje y los valores de las estadísticas AIC, CAIC BIC.

Modelo	a	b	λ_2	α_2	β_2	AIC	CAIC	BIC
Kw-XTG	0.0725 (0.0169)	0.6298 (0.0125)	1.01e-6 (0.0000)	209.43 (0.0027)	6.0854 (0.1707)	337.8	340.3	344.8
XTG	1 -	1 -	0.0016 (0.0007)	85.4922 (9.8953)	0.8020 (0.2543)	364.4	365.3	368.6
	a	b	α_3	β_3				
Kw-FW	0.0603 (0.0004)	0.0738 (0.0134)	0.0115 (0.00003)	69.0275 (2.0281)		356.4	358.0	362.0
FW	1 -	1 -	0.0033 (0.0005)	15.8889 (5.2693)		387.6	388.1	390.4
	a	b	λ_1	β_1				
Kw-Chen	0.1051 (0.0437)	0.3855 (0.1762)	1e-8 (1e-10)	0.5165 (0.0059)		357.5	359.1	363.1
Chen	1 -	1 -	0.0051 (0.0034)	0.3125 (0.0205)		366.0	366.5	368.8
	a	b	c	β				
Kw-Weibull	0.0516 (0.0241)	0.2288 (0.0905)	7.7026 (0.2191)	0.0043 (0.0003)		352.3	353.9	357.9
	a	b	c	λ				
Beta Weibull	0.1467 (0.0280)	30.0404 (2.3411)	6.3920 (0.1765)	0.0017 (0.0002)		362.6	364.2	368.2

suradas es 17,65 %. Por lo tanto, la familia Kw-G parece ser un modelo adecuado para el ajuste y análisis de dichos datos. En la Tabla (4.4) se muestran los EMV de los parámetros del modelo. Los valores de los tres estadísticos AIC, BIC y CAIC son menores para las distribuciones Kw-Weibull, Kw-Chen y Kw-XGT comparados con los valores de las otras distribuciones. Según esto, las tres distribuciones son modelos adecuados para el análisis de datos de tiempo de supervivencia. En la Figura (4.4), se gráfica la función de supervivencia empírica y la función de supervivencia estimada para las distribuciones Kw-XGT, Kw-Chen y Kw-Weibull, las cuales se ajustan de forma adecuada.

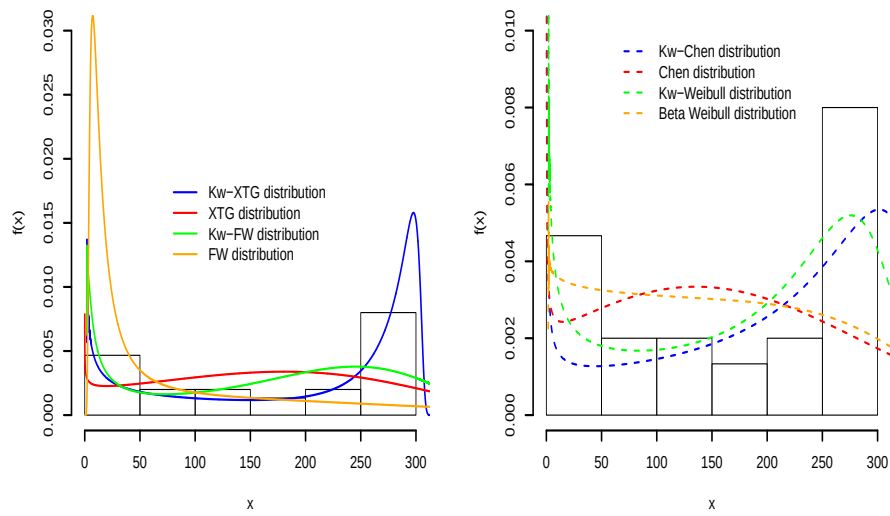


Figura 4.2: Densidades estimadas para algunos modelos ajustados a los datos de voltaje.

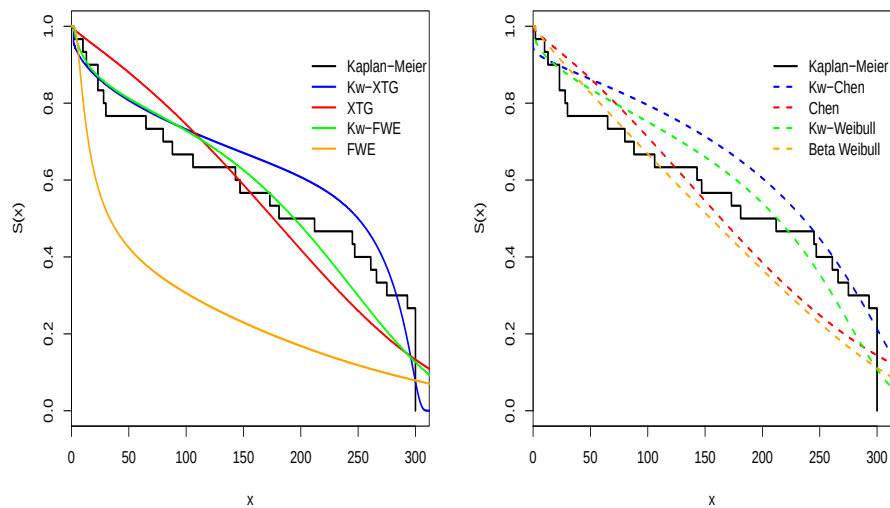


Figura 4.3: Funciones de supervivencia estimadas para algunos modelos y la función de supervivencia empírica de los datos de voltaje.

Tabla 4.4: EMV de los parámetros para la familia Kw-G ajustados a los datos de radioterapia y el valor de los estadísticos AIC, CAIC y BIC.

Modelo	a	b	λ_2	α_2	β_2	AIC	CAIC	BIC
Kw-XTG	89.0008 (7.3293)	1.3733 (0.1554)	3.1464 (1.4881)	0.3046 (0.1397)	0.0837 (0.0102)	596.2	597.5	605.9
XTG	1 -	1 -	20.8961 (2.0322)	0.00002 (18e-6)	0.1212 (0.0011)	605.5	606.0	611.3
	a	b	α_3	β_3				
Kw-FW	0.3069 (0.0841)	0.5716 (0.1646)	0.0009 (0.0003)	254.76 (7.0300)		606.9	607.8	614.6
FW	1 -	1 -	0.0007 (0.0002)	109.43 (18.1249)		609.7	610.0	613.6
	a	b	λ_1	β_1				
Kw-Chen	105.43 (47.67)	1.4934 (0.8845)	1.2080 (0.5839)	0.0833 (0.0013)		594.2	595.1	601.9
Chen	1 -	1 -	0.0185 (0.0067)	0.2260 (0.0119)		608.0	608.3	611.9
	a	b	c	β				
Kw-Weibull	21.5936 (4.7489)	1.1589 (0.6803)	0.2668 (0.0447)	0.3617 (0.1307)		594.1	595.0	601.8
	a	b	c	λ				
Beta Weibull	0.00004 (0.000012)	0.7021 (0.3196)	1.7670 (0.4176)	34.7002 (4.84070)		599.2	600.0	606.9

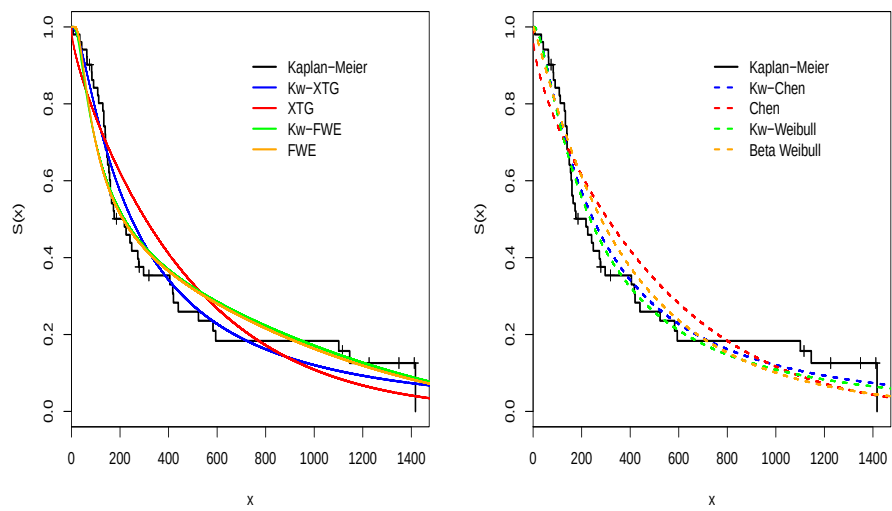


Figura 4.4: Funciones de supervivencia estimadas para algunos modelos ajustados y la función de supervivencia empírica de los datos de radioterapia.

Conclusiones

La familia de distribuciones Kumaraswamy-G (Kw-G) propuesta por Cordeiro y de Castro (2011), se puede extender a varias distribuciones conocidas como la normal, Weibull, gamma y Gumbel. Es importante resaltar que la función de densidad de probabilidad de cualquier distribución Kw-G se puede expresar como una combinación lineal de funciones de densidad de G-exponenciadas. Este resultado permite derivar expresiones explícitas generales para las diferentes medidas de las distribuciones Kw-G como momentos, función generadora de momentos, desviaciones medias, curvas de Bonferroni y Lorenz, entropía de Shannon, entropía de Rényi y de fiabilidad.

Las fórmulas relacionadas con el modelo de Kw-G permiten ser manejadas adecuadamente; además, con el uso de los recursos computacionales modernos de buena capacidad analítica y numérica, se pueden convertir en un instrumento muy útil y adecuado para el análisis de aplicaciones estadísticas en diversos campos.

Como se pudo observar la estimación de los parámetros es abordada por el método de máxima verosimilitud. La utilidad de los modelos de Kw-G se ilustra en los análisis de datos reales utilizando varios criterios: AIC, BIC y CAIC. Durante el desarrollo de este trabajo se mostraron algunas aplicaciones de las distribuciones Kw-G a conjuntos de datos reales para mostrar su utilidad y ventajas con relación a otros modelos existentes. En conclusión, la familia de distribuciones Kw-G proporciona un mecanismo bastante flexible para el ajuste de un amplio espectro de datos positivos del mundo real.

Apéndice

Los elementos que están incluidos en este apéndice corresponden a definiciones y propiedades básicas y fueron recopiladas y adaptadas del libro Estadística Matemática con aplicaciones (William Mendenhall, Richard L. Scheaffer, Dennis D Wackerly) para este trabajo.

Variables aleatorias discretas: Se dice que una variable aleatoria Y es *discreta* si puede tomar sólo un número finito o contablemente infinito¹ de valores distintos.

Para cualquier distribución de probabilidad discreta, se debe cumplir:

1. $0 \leq p(y) \leq 1$ para toda y .
2. $\sum_y p(y) = 1$, donde la sumatoria es para todos los valores de y con probabilidad diferente de cero.

El valor esperado de una variable aleatoria: Sea Y una variable aleatoria discreta con la función de probabilidad $p(y)$. Entonces el *valor esperado* de Y , $E(Y)$, se define como²

$$E(Y) = \sum_y yp(y).$$

Si Y es una variable aleatoria con media $E(Y) = \mu$, la *varianza* de una variable aleatoria Y se define como el valor esperado de $(Y - \mu)^2$. Esto es,

$$V(Y) = E[(Y - \mu)^2].$$

La *desviación estándar* de Y es la raíz cuadrada positiva de $V(Y)$.

Momentos y funciones generadoras de momentos: El k -ésimo momento de una variable aleatoria Y alrededor del origen se define como $E(Y^k)$ y se denota con μ'_k .

¹Un conjunto de elementos es contable infinito si los elementos del conjunto se pueden poner en correspondencia biunívoca con los enteros positivos.

²El valor esperado de una variable aleatoria discreta existe si la suma, es absolutamente convergente, es decir si,

$$\sum_y |y|p(y) < \infty.$$

La función generadora de momentos $m(t)$ para una variable aleatoria Y se define como

$$m(t) = E(e^{tY}).$$

Una función generadora de momentos para Y existe si existe una constante positiva b tal que $m(t)$ es finita para $|t| \leq b$.

Si $m(t)$ existe, entonces para cualquier entero positivo k ,

$$\left. \frac{d^k m(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = m^{(k)}(0) = \mu'_k.$$

Si se encuentra la k -ésima derivada de $m(t)$ con respecto a t y luego se hace $t = 0$, el resultado será μ'_k .

Variables aleatorias continuas: Se dice que una variable aleatoria Y es *continua* si su recorrido no es un conjunto numerable. Denote con Y cualquier variable aleatoria. La *función de distribución de Y* , denotada por $F(Y)$, es tal que

$$F(y) = P(Y \leq y), \quad -\infty < y < \infty.$$

Propiedades de una función de distribución

Si $F(y)$ es una función de distribución entonces:

1. $F(-\infty) \equiv \lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = 0$
2. $F(\infty) \equiv \lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 1$
3. $F(y)$ es una función no decreciente de y . [Si y_1 y y_2 son cualesquiera valores de manera que $y_1 \leq y_2$, entonces $F(y_1) \leq F(y_2)$.]

Sea $F(Y)$ la función de distribución para una variable aleatoria continua Y . Entonces $f(y)$, está dada por

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = F'(y)$$

siempre que exista la derivada, se denomina *función de densidad de probabilidad* para la variable aleatoria Y .

Propiedades de una función de densidad

Si $f(y)$ es una función de densidad para una variable aleatoria continua, entonces

1. $f(y) \geq 0$ para toda y , $-\infty < y < \infty$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$.

Valores esperados para una variable aleatoria continua: El valor esperado de una variable aleatoria continua Y es

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy,$$

siempre que exista la integral.³ Y la varianza es:

$$Var(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - E(Y))^2 f(y) dy$$

Distribuciones de probabilidad bivariantes: Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias discretas. La *función de probabilidad conjunta* (o bivalente) para Y_1 y Y_2 está dada por

$$p(y_1, y_2) = P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2), \quad -\infty < y_1 < \infty, -\infty < y_2 < \infty.$$

Si Y_1 y Y_2 son variable aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta $p(y_1, y_2)$, entonces:

1. $p(y_1, y_2) \geq 0$ para toda y_1 y y_2 .
2. $\sum_{y_1, y_2} p(y_1, y_2) = 1$, donde la suma es para todos los valores (y_1, y_2) a los que se asignan probabilidades diferentes de cero.

Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta $F(y_1, y_2)$. Si existe una función no negativa $f(y_1, y_2)$, tal que:

$$F(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{y_1} \int_{-\infty}^{y_2} f(t_1, t_2) dt_2 dt_1$$

para toda $-\infty < y_1 < \infty, -\infty < y_2 < \infty$. La función $f(y_1, y_2)$ recibe el nombre de *función de densidad de probabilidad conjunta*.

Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias con función de distribución conjunta $F(y_1, y_2)$, entonces:

1. $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y_2) = F(y_1, -\infty) = 0$.
2. $F(\infty, \infty) = 1$.
3. Si $y_1^* \geq y_1$ y $y_2^* \geq y_2$, entonces $F(y_1^*, y_2^*) - F(y_1^*, y_2) - F(y_1, y_2^*) + F(y_1, y_2) \geq 0$.

Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias continuas conjuntas con una función de densidad conjunta dada por $f(y_1, y_2)$, entonces:

1. $f(y_1, y_2) \geq 0$ para toda y_1, y_2 .
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = 1$.

³Técnicamente, $E(Y)$ existe si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| f(y) dy < \infty.$$

Distribuciones de probabilidad marginal: Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias discretas conjuntas con función de probabilidad $p(y_1, y_2)$. Entonces las *funciones de probabilidad marginal* de Y_1 y Y_2 , están dadas por:

$$p_1(y_1) = \sum_{\forall y_2} p(y_1, y_2) \quad \text{y} \quad p_2(y_2) = \sum_{\forall y_1} p(y_1, y_2).$$

Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias continuas conjuntas con función de densidad conjunta $f(y_1, y_2)$. Entonces las *funciones de densidad marginal* de Y_1 y Y_2 , están dadas por:

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 \quad \text{y} \quad f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1.$$

Variables aleatorias independientes: Sea Y_1 que tiene una función de distribución $F_1(y_1)$ y sea Y_2 que tiene una función de distribución $F_2(y_2)$, y $F(y_1, y_2)$ es la función de distribución conjunta de Y_1 y Y_2 . Entonces se dice que Y_1 y Y_2 son *independientes* si y sólo si $F(y_1, y_2) = F(y_1)F(y_2)$. Si Y_1 y Y_2 no son independientes, se dice que son *dependientes*.

El valor esperado de una función de variables aleatorias: Sea $g(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ una función de las variables aleatorias discretas, $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$, que tienen función de probabilidad $p(y_1, y_2, \dots, y_k)$. Entonces el *valor esperado* de $g(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ es

$$E[g(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)] = \sum_{\forall y_k} \dots \sum_{\forall y_2} \sum_{\forall y_1} g(y_1, y_2, \dots, y_k) p(y_1, y_2, \dots, y_k).$$

Cuando las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ son continuas con función de densidad conjunta $f(y_1, y_2, \dots, y_k)$, entonces el *valor esperado* de $g(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ es

$$E[g(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, y_2, \dots, y_k) \times f(y_1, y_2, \dots, y_k) dy_1 dy_2 \dots dy_k.$$

Determinación de la distribución de probabilidad de una función de variables aleatorias: Sean las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ y una función $U(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, denotada en adelante sólo como U . A continuación se presentan tres de los métodos más usados para determinar la distribución de probabilidad de U .

- **Método de las funciones de distribución:** Sea U una función de las variables aleatorias $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$.

1. Localice la región $U = u$ del espacio $y_1, y_2, \dots, y_n$.
2. Localice la región $U \leq u$.
3. Determine $F_U(u) = P(U \leq u)$ al integrar $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sobre la región $U \leq u$.
4. Determine la función de densidad $f_U(u)$ al derivar $F_u(u)$. Por tanto, $f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du}$.

- **Método de las transformaciones:** Sea $U = h(Y)$, donde $h(y)$ es una función creciente (decreciente) de y para toda y tal que $f_Y(y) > 0$.

1. Deduzca la función inversa, $y = h^{-1}(u)$.
2. Evalúe $\frac{dh^{-1}}{du} = \frac{d[h^{-1}(u)]}{du}$.
3. Encuentre $f_U(u)$ mediante $f_U(u) = f_Y[h^{-1}(u)] \left| \frac{dh^{-1}}{du} \right|$.

■ **Método de las funciones generadoras de momentos:** Denotemos con $m_X(t)$ y $m_Y(t)$ las funciones generadoras de momentos de las variables aleatorias X y Y , respectivamente. Si existen las funciones generadoras de momentos y $m_X(t) = m_Y(t)$ para todos los valores de t , entonces X y Y tienen la misma distribución de probabilidad. Sea U una función de las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

1. Encuentre la función generadora de momentos para U , $m_U(t)$.
2. Compare $m_U(t)$ con otras funciones generadoras de momentos bien conocidas.
Si $m_U(t) = m_V(t)$ para todos los valores de t , implica que U y V tienen distribuciones idénticas.

Estadísticos de orden: Sean $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ variables aleatorias continuas independientes e idénticamente distribuidas con una función de distribución común $F(y)$ y función de densidad común $f(y)$. Si $Y_{(k)}$ está dada por:

$$g_{(k)}(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(y_k)]^{k-1} [1 - F(y_k)]^{n-k} f(y_k), \quad -\infty < y_k < \infty.$$

Si j y k son dos enteros tales que $1 \leq j < k \leq n$, la densidad conjunta de $Y_{(j)}$ y $Y_{(k)}$ está dada por:

$$g_{(j)(k)}(y_j, y_k) = \frac{n!}{(j-1)!(k-1-j)!(n-k)!} [F(y_j)]^{j-1} [F(y_k) - F(y_j)]^{k-1-j} \times \\ \times [1 - F(y_k)]^{n-k} f(y_j) f(y_k), \quad -\infty < y_j < y_k < \infty$$

Método de los momentos: Es un procedimiento usado para hallar un estimador para uno o más parámetros poblacionales. Se escoje como estimaciones los valores de los parámetros que son soluciones de las ecuaciones $\mu'_k = m'_k$, para $k = 1, 2, \dots, t$, donde t es el número de parámetros por estimar y $\mu'_k = E(Y^k)$ y $m'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^k$.

Método de máxima verosimilitud: Este método proporciona estimadores insesgados de varianza mínima. Suponga que la función de verosimilitud depende de k parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$. Se escoje como estimadores los valores de los parámetros que maximicen la verosimilitud $L(y_1, y_2, \dots, y_n \mid \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$.

Método de los momentos ponderados de probabilidad: Dada una variable aleatoria X con una función de distribución de probabilidad F , la probabilidad de momentos ponderados se definen como

$$M_{r,j,k} = E[X^r \{F(X)\}^j \{1 - F(X)\}^k]$$

Función Tasa de Riesgo: La función de riesgo mide la probabilidad de que a un individuo le ocurra cierto suceso a lo largo del tiempo. Sea T una variable aleatoria definida sobre el intervalo

$[0, \infty]$ que indica la probabilidad de que un sujeto sobreviva más allá de un determinado tiempo. Sea $F(t)$ su función de distribución. Entonces

$$Pr(T \leq t) = F(t) = 1 - S(t), \quad t \geq 0.$$

Si $f(t)$ es su correspondiente función de densidad, es decir,

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx,$$

entonces, la función de riesgo es:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}.$$

Función de supervivencia: La función de supervivencia, también es conocida en ingeniería como función de fiabilidad, esta función mide la probabilidad de que un objeto (sujeto) sobreviva más allá de un periodo de tiempo dado. Sea T una variable aleatoria definida en el intervalo $[0, \infty]$. Sea $F(t)$ su función de distribución. Entonces se define la función de supervivencia como

$$S(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(u) du = 1 - F(t).$$

Función característica: La función característica es una función de variable real que toma valores complejos, ya que permite la aplicación de métodos analíticos (análisis funcional) en el estudio de la probabilidad. Dada una variable aleatoria continua X su función característica, denotada por $\varphi_X(t)$ para t real, se define como:

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx$$

Se hace uso de la función exponencial compleja y E denota la esperanza matemática.

Bibliografía

- Azzalini A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 12, 171–178.
- Barakat H. and Abdelkader Y. (2004). Computing the moments of order statistics from nonidentical random variables. *Statistical Methods and Applications*, vol. 13, 15–26.
- Barreto-Souza, W., Santos, A. and Cordeiro, G. (2010). The beta generalized exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, vol. 80, 159–172.
- Bebbington M., Lai C. and Zitikis R. (2007). A flexible Weibull extension. *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 92, 719–726, 2007.
- Chen Z. A. (2000). A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function. *Statistics and Probability Letters*, vol. 49, 155–61.
- Cordeiro G. and de Castro, M. (2011). A new family of generalized distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, vol. 81, 883–898.
- Cordeiro G., Ortega E. and Nadarajah, S. (2010). The Kumaraswamy Weibull distribution with application to failure data. *Journal of the Franklin Institute*, vol. 347, 1399–1429.
- Cordeiro G., Silva G. and Ortega, E. (2013). The beta-Weibull geometric distribution. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, vol. 47, 817–834.
- Cordeiro G., Nadarajah S. and Ortega E. (2012). The Kumaraswamy Gumbel distribution. *Statistical Methods and Applications*, vol. 21, 139–168.
- Eugene N., Lee C. and Famoye F. (2002). Beta-normal distribution and its applications. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, vol. 31, 497–512.
- Fletcher S. C. and Ponnambalam K. (1996). Estimation of reservoir yield and storage distribution using moments analysis. *Journal of Hydrology*, vol. 182, 259–275.
- Greenwood J., Landwehr J., Matalas N. and Wallis J. (1979). Probability weighted moments: definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water Resources Research*, vol. 15, 1049–1054.

- Gupta R. and Kundu D. (1999). Generalized exponential distributions. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, vol. 41, 173–188.
- Gupta R. and Kundu D. (2001). Exponentiated exponential distribution: an alternative to gamma and Weibull distributions. *Biometrical Journal*, vol. 43, 117–130.
- Hosking J. (1990). *L*-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, vol. 52, 105–124.
- Jones M. (2008). Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages. *Statistical Methodology*, vol. 6, 70–81.
- Kumaraswamy P. (1980). Generalized probability density function for double bounded random-processes. *Journal of Hydrology*, vol. 462, 79–88.
- Leadbetter M., Lindgren G. and Rootzén H. (1987). *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*. Springer, New York..
- Louzada-Neto F., Mazucheli J. and Achcar J. (2001). Bayesian Inference for Polyhazard Models in the Presence of Covariates. *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. 38, 1–14.
- Meeker W. and Escobar L. (1998). Pitfalls of Accelerated Testing. *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 47, 114–118.
- Mudholkar G. and Srivastava D. K. (1993) Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-real data. *IEEE Transaction on Reliability*, vol. 42, 299–302.
- Mudholkar G., Srivastava D. and Friemer M. (1995). The exponentiated Weibull family: A reanalysis of the bus-motor-failure data. *Technometrics*, vol. 37, 436–445.
- Murthy D., Xie M. and Jiang R. (2004). *Weibull Models*. New York: John Wiley and Sons.
- Nadarajah, S. and Gupta, A. (2007). The exponentiated gamma distribution with application to drought data. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, vol. 59, 29–54.
- Nadarajah S. and Kotz S. (2006). The beta exponential distribution. *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 91, 689–697.
- Nadarajah S and Kotz S. (2004). The beta Gumbel distribution. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 10, 323–332.
- R Development Core Team.(2009). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

- Rigby R. and Stasinopoulos D. (2005). Generalized additive models for location, scale and shape (with discussion). *Applied Statistics*, vol. 54, 507–554.
- Stasinopoulos D. and Rigby R. (2007). Generalized additive models for location scale and shape (GAMLSS) in R. *Journal of Statistical Software*, vol. 23, 1–46.
- Xie M., Tang Y., y Goh T. N. (2002). A modified Weibull extension with bathtub failure rate function. *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 76, 279-285.