

UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO RELATIVO A UN MODELO DE TIPO
LOTKA-VOLTERRA

Diana Isabel Hernández Rojas

Trabajo de Grado para optar al título de
Magíster en Matemáticas

Director

Dr. Élder Jesús Villamizar Roa

Codirector

Dr. Diego Armando Rueda Gómez

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2023

Tabla de Contenido

Introducción	3
1. Preliminares	10
2. Existencia de solución débil-fuerte	16
2.0.1. Existencia de solución, caso $N = 3$	17
2.0.2. Existencia de solución, caso $N = 2$	29
3. Problema de control óptimo	32
3.1. Existencia de una solución óptima global	32
3.1.1. Caso $N = 3$	32
3.1.2. Caso $N = 2$	36
3.2. Existencia de multiplicadores de Lagrange	38
3.2.1. Caso $N = 3$	40
3.2.2. Caso $N = 2$	53
3.3. Regularidad de los multiplicadores	60
3.3.1. Caso $N = 3$	60

3.3.2. Caso $N = 2$	67
4. Simulación numérica	71
4.1. Descripción del esquema numérico	71
4.2. Resultados numéricos	73
5. Conclusiones y Trabajos futuros	76
5.1. Conclusiones	76
5.2. Trabajos futuros	76

Índice de figuras

Figura 1.	Resultados numéricos para la especie u en el tiempo $T = 1$	73
Figura 2.	Resultados numéricos para la especie v en el tiempo $T = 1$	74
Figura 3.	Resultados numéricos para la especie w en el tiempo $T = 1$	74

Resumen

Título: Un problema de control óptimo relativo a un modelo de tipo Lotka-Volterra. *

Autor: Diana Isabel Hernández Rojas **

Palabras Clave: Competición interespecies, soluciones débiles y fuertes, Quimiorepulsión, Control Óptimo, Condiciones de optimalidad.

Descripción: En este trabajo se estudia un problema de control óptimo bilineal para un modelo difusivo de competición interespecies de tipo Lotka-Volterra con quimiorepulsión. Este modelo describe la competencia de dos especies de organismos, y una de las especies evita el encuentro con sus rivales mediante un mecanismo de quimiorepulsión. Dentro de los resultados obtenidos, se demuestra la existencia y unicidad de soluciones débiles-fuertes en el caso bidimensional y la existencia y unicidad de soluciones fuertes en el caso tridimensional, y luego se analiza la existencia de una solución óptima global para un problema de control óptimo bilineal relacionado, donde el control actúa sobre la señal química. Posteriormente, se derivan condiciones de optimalidad de primer orden para las soluciones óptimas locales a través de un teorema de existencia de multiplicadores de Lagrange en espacios de Banach. Finalmente, se propone un esquema de aproximación numérica del sistema de optimalidad basado en el método del gradiente, que se valida con algunos experimentos computacionales.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Élder Jesús Villamizar Roa, Doctor en Matemáticas. Codirector: Diego Armando Rueda Gómez, Doctor en Matemáticas.

Abstract

Title: An optimal control problem for a Lotka-Volterra competition model with chemorepulsion *

Author: Diana Isabel Hernández Rojas **

Keywords: Interspecies competition, weak and strong solutions, Chemorepulsion, Optimal Control, Optimality Conditions.

Description: In this work we study a bilinear optimal control problem for a diffusive Lotka-Volterra competition model with chemo-repulsion. This model describes the competition of two species which avoid encounters with rivals through a chemo-repulsion mechanism. We prove the existence and uniqueness of weak-strong solutions in the bi-dimensional case and the existence and uniqueness of strong solutions for three-dimensional domains, and then we analyze the existence of a global optimal solution for a related bilinear optimal control problem, where the control is acting on the chemical signal. Posteriorly, we derive first-order optimality conditions for local optimal solutions via a Lagrange multipliers Theorem in Banach spaces. Finally, we propose a discrete approximation scheme of the optimality system based on the gradient method, which is validated with some computational experiments.

* Master Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Élder Jesús Villamizar Roa, Doctor en Matemáticas. Codirector: Diego Armando Rueda Gómez, Doctor en Matemáticas.

Introducción

Uno de los principales modelos para describir la dinámica de poblaciones es el sistema introducido por Lotka (1925) y Volterra (1926), dado por dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que describen la evolución de dos especies biológicas que interactúan entre sí. Sin embargo, en situaciones biológicas más complejas, hay que considerar la difusión espacial de las especies, así como la posible difusión causada por la variación de la concentración de cierta sustancia química segregada por una de las especies, es decir, el mecanismo de quimiotaxis. En particular, existen ejemplos comunes en la naturaleza en los que una de las especies segrega una señal química, que es detectada por la segunda especie y utilizada para dirigir su movimiento lejos de la mayor concentración de esa sustancia química. Este comportamiento puede observarse en el escenario de la marcación del territorio y la defensa de los depredadores por parte de los vertebrados terrestres, que utilizan marcas de olor para evitar los encuentros con los rivales.

En (Tello and Wrzosek (2018)) se propuso un modelo matemático que describe estos procesos, el cual está dado por el siguiente sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parabólicas de difusión-reacción:

$$\begin{cases} \partial_t u - d_u \Delta u = \chi \operatorname{div}(u \nabla w) + \mu_1 u(1 - u - a_1 v), \\ \partial_t v - d_v \Delta v = \mu_2 v(1 - v - a_2 u), \\ \tau \partial_t w - d_w \Delta w = \alpha v - \lambda w, \end{cases} \quad (1)$$

en $\Omega \times (0, T)$, con Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^3 , y $(0, T)$, $T > 0$, un intervalo temporal. Aquí las incógnitas son $u = u(x, t) \geq 0$, $v = v(x, t) \geq 0$, y $w = w(x, t) \geq 0$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, denotando las densidades de las especies competidoras y la señal química, respectivamente. Los parámetros $d_u, d_v, d_w > 0$ denotan los coeficientes de autodifusión, mientras que $\chi > 0$ representa la constante de quimiorepulsión. Adicionalmente, μ_1 y μ_2 denotan las tasas de crecimiento de la población, y a_1, a_2 son parámetros positivos que miden la fuerza de la competencia entre especies. Finalmente, $\alpha, \lambda > 0$ representan la producción de la sustancia química por la especie v , y la tasa de degradación, respectivamente. Es importante destacar que el término $\chi \nabla \cdot (u \nabla w)$ representa la difusión cruzada por quimiorepulsión y establece que la especie u se aleja de aquellos puntos del dominio Ω donde hay mayor concentración de la sustancia química w , aquí el parámetro χ mide la fuerza de la quimiorepulsión. El sistema (1) se completa con datos iniciales y condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneas. La principal diferencia del sistema (1) con otros modelos quimio-repulsión (ver [Bellomo and Winkler (2015), Duarte-Rodríguez and Villamizar-Roa (2019), Guillén-González and Rodríguez-Bellido (2020a), Guillén-González and Rodríguez-Bellido (2020b), Braz e Silva and Rodríguez-Bellido (2022)]), incluso sin fuente logística, viene dada por el acoplamiento entre la densidad u y la señal química w ; de hecho, el término de reacción $\alpha v - \lambda w$ en (1) significa que la señal química es producida por la segunda especie, mientras que la primera especie se aleja de la señal química, a diferencia del sistema clásico de Keller-Segel, donde el término de reacción en la señal química viene dado por $\alpha u - \lambda w$, lo que a su vez permite derivar algún tipo de desigualdad energética que es crucial en el análisis de existencia (véanse detalles en [Guillén-González and Villamizar-Roa (2020), Braz e Silva and Rodríguez-

Bellido (2022), Guillén-González and Rodríguez-Bellido (2020a)]; en el caso de (1), nosotros no podemos controlar el término de quimiotaxis $\chi \nabla \cdot (u \nabla w)$ con el término de reacción $\alpha v - \lambda w$, lo que implica dificultades técnicas para analizar la existencia de soluciones débiles para dominios tridimensionales acotados.

En (Tello and Wrzosek (2018)), los autores demuestran la existencia de solución clásica y la estabilidad de la solución del sistema (1) en cualquier dimensión espacial; para ello, tuvieron en cuenta los siguientes submodelos del sistema (1): completamente parabólico ($\tau = 1, d_w > 0$), parabólico-elíptico ($\tau = 0, d_w > 0$) y parabólico + EDO ($\tau = 1, d_w = 0$). Otros sistemas de competencia interespecies han sido estudiados por Tello y colaboradores en (Tello and Cruz (2018), Tello and Negreanu (2019)); allí se considera el caso en que dos especies biológicas compiten por alimento, donde cada una de ellas segrega una sustancia química y además presentan la capacidad de orientar su movimiento hacia la concentración de química segregada por la otra especie. Este modelo está compuesto por cuatro EDP, dos de ellas de tipo parabólico, que describen la evolución de las especies competidoras, y otras dos ecuaciones elípticas, las cuales modelan la distribución de las sustancias químicas. Específicamente, el sistema de EDP es dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 - \chi_1 \nabla \cdot (u_1 \cdot \nabla v_1) + g_1(u_1, u_2), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 - \chi_2 \nabla \cdot (u_2 \cdot \nabla v_2) + g_2(u_1, u_2), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ -\Delta v_1 + \alpha_1 v_1 = \beta_1 u_2, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ -\Delta v_2 + \alpha_2 v_2 = \beta_2 u_1, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

donde $d_i > 0$ son los coeficientes de difusión, $\chi_i > 0$ son los coeficientes de quimioatracción, $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$ para $i = 1, 2$ y Ω es un dominio suave y acotado de \mathbb{R}^N , para $N \geq 1$ con frontera regular. Se asumen condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneas y datos iniciales suficientemente suaves y positivos. En (Tello and Cruz (2018)) se demuestra la existencia y unicidad de solución global clásica, tomando datos iniciales y parámetros adecuados para el sistema (2). Además, plantean un sistema auxiliar de ecuaciones diferenciales ordinarias relacionadas con el sistema no lineal original (2) para obtener resultados relativos al comportamiento asintótico; posteriormente, realizan un análisis comparativo de las soluciones obtenidas del sistema original (2) y las obtenidas cuando consideran el sistema auxiliar de EDO. Por otra parte, en el artículo (Tello and Negreanu (2019)) los autores plantean el mismo modelo descrito anteriormente, con la salvedad de que los coeficientes del sistema ya no son constantes, sino funciones suaves y periódicas que dependen del espacio y el tiempo; para dicho sistema, los autores introducen un sistema auxiliar de EDO y estudian la convergencia de las soluciones del sistema auxiliar a un estado periódico en el tiempo. Luego demuestran que las soluciones del sistema de EDP convergen a la misma solución periódica en el tiempo.

En este trabajo estamos interesados en el análisis matemático de un problema de control óptimo dado por la minimización de un funcional de costo general sujeto a restricciones, donde las ecuaciones de estado están dadas por el siguiente sistema de competición interespecies con

quimiorepulsión:

$$\begin{cases} \partial_t u - d_u \Delta u = \chi \operatorname{div}(u \nabla w) + \mu_1 u(1 - u - a_1 v), \\ \partial_t v - d_v \Delta v = \mu_2 v(1 - v - a_2 u), \\ \partial_t w - d_w \Delta w = \alpha v - \lambda w + f 1_{\Omega_c} w, \end{cases} \quad (3)$$

en $\Omega \times (0, T)$, donde f es un control dado que actúa sobre la concentración química en un subdominio Ω_c de Ω . Por lo tanto, el término $f 1_{\Omega_c} w$ actúa como un término de proliferación-degradación, dependiendo del signo de f en Ω_c . Aquí 1_{Ω_c} denota la función característica asociada al conjunto Ω_c . Es importante resaltar que el hecho de considerar un control bilineal permite obtener soluciones no negativas para el sistema (3), sin importar el signo del control f . Así mismo, $f 1_{\Omega_c}$ es en general una función que puede ser poco regular, con lo cual la teoría de existencia de soluciones clásicas de ecuaciones de reacción-difusión no aplica directamente. El sistema (3) se complementa con los siguientes datos iniciales y condiciones de no flujo en la frontera:

$$\begin{cases} [u(0), v(0), w(0)] = [u_0, v_0, w_0], \quad u_0, v_0, w_0 \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \end{cases} \quad (4)$$

donde ν denota el vector normal unitario hacia afuera de $\partial\Omega$. Así pues, el objetivo de este trabajo es analizar un problema de control óptimo de forma que cualquier estado admisible sea una solución

débil-fuerte de (3)-(4). Específicamente, el problema de control bilineal a analizar es dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Encontrar } [[u, v, w], f] \in \mathcal{X} \times \mathcal{F} \text{ que minimiza el funcional objetivo} \\
 J([u, v, w, f]) = \frac{\gamma_u}{2} \int_0^T \|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma_v}{2} \int_0^T \|v - v_d\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 \quad + \frac{\gamma_w}{2} \int_0^T \|w - w_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma_f}{p_+} \int_0^T \|f\|_{L^{p_+}(\Omega_c)}^{p_+} + \frac{\beta_1}{2} \int_{\Omega} |u(T) - u_T|^2 \\
 \quad + \frac{\beta_2}{2} \int_{\Omega} |v(T) - v_T|^2 + \frac{\beta_3}{2} \int_{\Omega} |w(T) - w_T|^2, \\
 \text{sujeto a que } [u, v, w, f] \text{ es una solución débil-fuerte del sistema (3)-(4).}
 \end{array} \right. \quad (5)$$

En (5), $p_+ = p + \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y \mathcal{X} denota el espacio de estados admisibles el cual será explícitamente definido en el Capítulo 3. Además, $\mathcal{F} \subset L^{p_+}(0, T; L^{p_+}(\Omega)) := L^{p_+}(Q)$ representa el espacio de los controles admisibles, con $p = 10/3$ si $N = 3$, y $p = 2$ si $N = 2$, el cual se asume que es un conjunto cerrado, convexo y no vacío. Además, las funciones $u_d, v_d, w_d \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $u_T \in L^2(\Omega)$, $v_T \in L^2(\Omega)$ y $w_T \in L^2(\Omega)$, representan estados deseados y $\gamma_u, \gamma_v, \gamma_w, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ y γ_f son parámetros reales no negativos (no todos cero) que miden el costo de los estados y del control, respectivamente. El funcional J describe la desviación de las densidades celulares u, v y de la señal química w con respecto a unas densidades celulares deseadas u_d, v_d y señal química deseada w_d , respectivamente, más el costo del control en la norma $L^{p_+}(Q)$. Los tres últimos términos de la definición de J miden la distancia en norma L^2 entre las densidades y la concentración química y los estados deseados en el tiempo final T . La inclusión de estos tres últimos términos puede ser útil en la práctica ya que, de lo contrario, las incógnitas pueden alejarse

de los estados deseados u_T, v_T y w_T cerca de $t = T$.

Se desea demostrar la solubilidad y unicidad del sistema de estados (con datos iniciales menos fuertes que en (Tello and Wrzosek (2018))) y, a continuación, se analiza un problema de control óptimo relacionado y se establecen condiciones de optimalidad de primer orden a través de la existencia y regularidad de los multiplicadores de Lagrange. Aquí es importante comparar los resultados de este trabajo con otros obtenidos previamente en este contexto. Problemas de control óptimo para modelos de quimiotaxis han sido abordados en (Braz e Silva and Rodríguez-Bellido (2022), Guillén-González and Rodríguez-Bellido (2020b), Guillén-González and Rodríguez-Bellido (2020a), Guillén-González and Villamizar-Roa (2020), Liu and Yuang (2022), López-Ríos and Villamizar-Roa (2021), Rodríguez-Bellido and Villamizar-Roa (2018)). En (Guillén-González and Rodríguez-Bellido (2020a), Guillén-González and Villamizar-Roa (2020)) se analizaron problemas de control óptimo distribuidos relacionados con el sistema quimiorepulsivo de Keller-Segel con producción lineal y no lineal en la señal química. En (Guillén-González and Rodríguez-Bellido (2020b)) se abordó el correspondiente problema de quimiorepulsión con producción lineal pero considerando dominios tridimensionales. Por otro lado, un problema de control óptimo para una quimiotaxis atractiva con consumo de la señal química y acoplada al sistema de Navier-Stokes fue analizado en (López-Ríos and Villamizar-Roa (2021)). En (Rodríguez-Bellido and Villamizar-Roa (2018)), los autores estudiaron un problema de control óptimo distributivo en el que las ecuaciones de estado vienen dadas por un modelo estacionario de quimioatracción acoplado a las ecuaciones de Navier-Stokes. Recientemente, en (Braz e Silva and Rodríguez-Bellido (2022)) los autores discuten un problema de control óptimo para un sistema de quimiotaxis atracti-

va/repulsiva con producción lineal y considerando un crecimiento logístico de la densidad celular, en un entorno bidimensional. También, en (Liu and Yuang (2022)) los autores analizan un problema de control óptimo distribuido para un sistema de quimiotaxis atractiva/repulsiva, probando la existencia global de soluciones con algunas condiciones de pequeñez o de sensibilidad quimiotáctica o de la masa total inicial. Los autores prueban la existencia de controles óptimos y derivan condiciones de optimalidad necesarias de primer orden.

El presente trabajo está dividido en cuatro capítulos cuyos contenidos han sido organizados de la siguiente manera: En el Capítulo 1, se introducen algunas notaciones básicas y resultados preliminares. En el Capítulo 2, se plantea la definición de solución débil-fuerte y se demuestra el resultado de la existencia de soluciones débiles-fuertes de (3)-(4), para los casos $N = 3$ y $N = 2$. En el Capítulo 3, se analiza la existencia de soluciones óptimas y se derivan las condiciones de optimalidad de primer orden. Finalmente, en el Capítulo 4, se presentan algunas simulaciones numéricas proporcionadas por un esquema de aproximación discreta del sistema de optimalidad basado en el método del gradiente, que ilustra la dinámica de las variables controladas.

1. Preliminares

El objetivo del presente capítulo es mencionar los preliminares y establecer la notación que se usará a lo largo de este documento. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N , $N = 2, 3$ con frontera $\partial\Omega$ de clase C^2 ; la necesidad de asumir esta regularidad particular, proviene del resultado de regularidad parabólica que se utilizará frecuentemente. Se consideran los espacios de Sobolev estándar y los espacios de Lebesgue $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p : \|\partial^\alpha u\|_{L^p} < \infty, \forall |\alpha| \leq k\}$ y $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, con las respectivas normas $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ y $\|\cdot\|_{L^p}$. En particular, se denota $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$; además,

el producto interno en $L^2(\Omega)$ será representado por (\cdot, \cdot) .

Si Y es un espacio de Banach, $L^p(Y)$ representa el espacio de funciones valuadas en Y , definidas en el intervalo $[0, T]$, que son integrables en el sentido de Bochner y su norma se denotará por $\|\cdot\|_{L^p(Y)}$. En particular, cuando Y es un espacio de Lebesgue $L^p(\Omega)$ o un espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, $L^p(Y)$ será denotada por simplicidad como $L^p(L^q)$ o $L^p(W^{k,q})$, respectivamente. Así mismo, se definen $L^p(Q) := L^p(0, T; L^p(\Omega))$ si $1 \leq p \leq \infty$ y su norma por $\|\cdot\|_{L^p(Q)}$. Se denota con $C([0, T]; Y)$ el espacio de funciones continuas de $[0, T]$ a un espacio de Banach Y , cuya norma será denotada por $\|\cdot\|_{C(Y)}$. El dual topológico de un espacio de Banach Y se denota por Y' y la dualidad para un par Y y Y' por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y'}$. Por otra parte, las letras $\mathcal{H}, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1 \dots$ denotan constantes positivas, independientes de los estados $[u, v, w]$ y el control f , pero su valor puede cambiar de una línea a otra. Además \xrightarrow{c} denotará la inmersión compacta de un espacio en otro.

Para analizar las propiedades de existencia y regularidad de las soluciones de (3)-(4), se consideran los espacios

$$\widehat{W}^{2-2/p,p}(\Omega) := \begin{cases} W^{2-2/p,p}(\Omega) & \text{si } p < 3, \\ W_v^{2-2/p,p}(\Omega) & \text{si } p > 3, \end{cases} \quad (6)$$

donde,

$$W_v^{k,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}.$$

Ahora enunciaremos el teorema de regularidad parabólica, que se utilizará muy a menudo.

Teorema 1.1 (Feireisl and Novotný (2009), Teorema 10.22.) Para $\Omega \in C^2$, sea $1 < p < +\infty$, ($p \neq 3$), $u_0 \in \widehat{W}^{2-2/p,p}(\Omega)$, y $g \in L^p(Q)$. Entonces el problema

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = g & \text{en } Q, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

admite una única solución u tal que

$$u \in C\left([0, T]; \widehat{W}^{2-2/p,p}\right) \cap L^p\left(W_v^{2,p}\right), \quad \partial_t u \in L^p(Q).$$

Además, existe una constante positiva $\mathcal{K} := \mathcal{K}(p, \Omega, T)$ de modo que

$$\|u\|_{C(\widehat{W}^{2-2/p,p})} + \|\partial_t u\|_{L^p(Q)} + \|u\|_{L^p(W_v^{2,p})} \leq C(\|g\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{\widehat{W}^{2-2/p,p}}).$$

Observación: El Teorema 1.1 continua siendo válido para el caso $p = 3$, reemplazando el espacio $C\left([0, T]; \widehat{W}^{2-2/p,p}\right)$ por $C([0, T]; Z_p)$, siendo Z_p el espacio de interpolación real entre $W_v^{2,p}(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$ (ver detalles en Feireisl and Novotný (2009)).

En lo que sigue, se usará con frecuencia la siguiente notación para espacios de Banach específicos:

$$\begin{aligned}
X &:= \left\{ u \in C(L^2(\Omega)) \cap L^2(H^1(\Omega)) : \partial_t u \in L^2\left((H^1(\Omega))'\right) \right\}, \\
\widehat{X} &:= \{u \in X : u(0) = 0\}, \\
X_p &:= \left\{ u \in C(\widehat{W}^{2-2/p,p}) \cap L^p(W^{2,p}) : \partial_t u \in L^p(Q) \right\}, \\
\widehat{X}_p &:= \left\{ v \in X_p : v(0) = 0, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \\
\widehat{X}_{p+} &:= \left\{ v \in X_{p+} : v(0) = 0, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \\
X_w &:= C(W^{1,3}) \cap L^3(W^{3/2,3}), \\
\mathbb{X} &:= \begin{cases} \widehat{X} \times \widehat{X}_{2+} \times \widehat{X}_{2+} \times L^{2+}(Q_c) & \text{si } N = 2, \\ \widehat{X} \times \widehat{X}_2 \times \widehat{X}_{10/3} \times L^{(10/3)+}(Q_c) & \text{si } N = 3, \end{cases} \\
\mathbb{Y} &:= \begin{cases} L^2\left((H^1)'\right) \times L^{2+}(Q) \times L^{2+}(Q) & \text{si } N = 2, \\ L^2\left((H^1)'\right) \times L^2(Q) \times L^{10/3}(Q) & \text{si } N = 3. \end{cases}
\end{aligned} \tag{7}$$

El teorema de punto fijo de Leray-Schauder se utilizará en varias ocasiones para demostrar la existencia de solución para algunos problemas de EDP no lineales.

Teorema 1.2 (*Teorema de punto fijo de Leray-Schauder*). Sea \mathcal{X} un espacio de Banach y $\Gamma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador compacto y continuo. Si el conjunto

$$\mathcal{T}_\beta := \{x \in \mathcal{X} : x = \beta \Gamma x \text{ para } 0 \leq \beta \leq 1\}$$

es acotado, entonces Γ tiene (como mínimo) un punto fijo.

Teorema 1.3 (Lions, 1969, Teorema 5.1.) Sean \mathcal{X} , \mathcal{B} , y \mathcal{Y} espacios de Banach reflexivos tales que $\mathcal{X} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{Y}$, con inclusión compacta $\mathcal{X} \xrightarrow{c} \mathcal{B}$ e inclusión continua $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{Y}$. Si se define

$$W = \{w : w \in L^{p_0}(0, T; \mathcal{X}), \partial_t w \in L^{p_1}(0, T; \mathcal{Y})\}$$

para un $T > 0$ finito y $p_0, p_1 \in (1, +\infty)$, entonces la inyección de W sobre $L^{p_0}(0, T; \mathcal{B})$ es compacta.

Teorema 1.4 (Simon, 1987, Corolario 4.) Sean \mathcal{X} , \mathcal{B} , y \mathcal{Y} espacios de Banach tales que $\mathcal{X} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{Y}$, con inclusión compacta $\mathcal{X} \xrightarrow{c} \mathcal{B}$ e inclusión continua $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{Y}$. Sea F un conjunto acotado en $L^\infty(0, T; \mathcal{X})$ tal que el conjunto $\partial_t F = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}; f \in F \right\}$ es acotado en $L^r(0, T; \mathcal{Y})$ para algún $r > 1$. Entonces F es relativamente compacto en $C([0, T]; \mathcal{B})$.

A lo largo de este trabajo se hará uso frecuente de desigualdades clásicas en espacios de Lebesgue y espacios de Sobolev, entre las que se incluyen la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg, entre otras.

Teorema 1.5 (Desigualdad de Hölder). Sean $p, q \in [1, \infty]$, tales que $1/p + 1/q = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Teorema 1.6 (Nirenberg, 1959, Desigualdad de interpolación de Gagliardo-Nirenberg.) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio medible y acotado con frontera Lipschitz. Sean $1 \leq q \leq +\infty$, j y m enteros no negativos tales que $j < m$, $1 \leq r \leq +\infty$, $p \geq 1$ y $\theta \in [0, 1]$ tales que

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N} \right) + \frac{1-\theta}{q}, \quad \frac{j}{m} \leq \theta \leq 1,$$

entonces
$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|D^m u\|_{L^r(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta} + C \|u\|_{L^\sigma(\Omega)},$$

donde $u \in L^q(\Omega)$ tal que $D^m u \in L^r(\Omega)$ y σ es arbitraria, con un caso excepcional:

- Si $r > 1$ y $m - j - \frac{N}{r}$ es un entero no negativo, entonces la hipótesis adicional $\frac{j}{m} \leq \theta < 1$ (note la desigualdad estricta) es necesaria.

En cualquier caso, la constante $C > 0$ depende de los parámetros j, m, N, q, r, θ y el dominio Ω , pero no de u .

Teorema 1.7 (Inmersiones de Sobolev). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera de clase C^1 , $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < +\infty$. Si $R = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$ entonces valen los siguientes enunciados con inmersiones continuas:

- Si $R > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, donde $q = \frac{1}{R}$.
- Si $R > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, donde $q \in [p, +\infty)$.
- Si $R > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Lema 1.8 Sean $r, s > 0$ y $1 < p < 2$; entonces la siguiente inmersión entre espacios de Sobolev se tiene

$$W^{r,p}(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega), \quad \text{con } s = d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) + r.$$

Lema 1.9 (Guillén-González and Rodríguez-Bellido, 2020b, Lema 6). Sean $p, p_1, p_2 \geq 1$ y $s_1, s_2 \geq 0$ tales que

$$s = (1 - \theta)s_1 + \theta s_2, \quad \frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \quad \text{con } \theta \in [0, 1].$$

Entonces, $L^{p_1}(H^{s_1}) \cap L^{p_2}(H^{s_2}) \hookrightarrow L^p(H^s)$.

Lema 1.10 (Guillén-González and Rodríguez-Bellido, 2020b, Lema 7). Sean $p, q, p_1, p_2, q_1 \geq 1$

tales que

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \theta \left(\frac{1}{p_1} - \frac{r}{N} \right), \quad \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_2}, \quad \text{con } r > 0 \text{ y } \theta \in [0, 1].$$

Entonces, $L^\infty(L^{q_1}) \cap L^{p_2}(W^{r,p_1}) \hookrightarrow L^p(L^q)$.

Corolario 1.11 (Guillén-González and Rodríguez-Bellido, 2020b, Corolario 1). Si $N = 3$, $L^\infty(L^2) \cap$

$L^2(H^1) \hookrightarrow L^{10/3}(Q)$ y $L^\infty(H^1) \cap L^2(H^2) \hookrightarrow L^{10}(Q)$.

Proposición 1.12 (Guillén-González and Rodríguez-Bellido, 2020b, Corolario 2) El espacio X_p

está inmerso compactamente en X para $p \geq 20/13$.

2. Existencia de solución débil-fuerte

En este capítulo se presentará una definición de solución débil-fuerte asociada al sistema (3)-(4) y se mostrarán algunos resultados de existencia y unicidad de soluciones para los casos $N = 3$ y $N = 2$.

Definición 2.1 (Solución débil-fuerte) Sean $0 < T < \infty$, $f \in L^{(5/2)^+}(Q_c)$ si $N = 3$ ó $f \in L^{2^+}(Q_c)$

si $N = 2$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $v_0 \in H^1(\Omega)$ y $w_0 \in W^{2N/(2+N), (2+N)/2}(\Omega)$ tal que $u_0, v_0, w_0 \geq 0$ en Ω . Una

solución débil-fuerte de (3)-(4) es una tripla $[u, v, w]$ de funciones tales que $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$ en

c.t.p de Q ,

$$u \in C(L^2) \cap L^2(H^1), \quad \partial_t u \in L^2((H^1)'),$$

$$v \in C(H^1) \cap L^2(H^2), \quad \partial_t v \in L^2(L^2),$$

$$w \in C(W^{2N/(2+N), (2+N)/2}) \cap L^{(2+N)/2}(W^{2, (2+N)/2}), \quad \partial_t w \in L^2(L^2),$$

verificando

$$\int_0^T \langle \partial_t u, \phi \rangle_{(H^1)'} + d_u \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi = -\chi \int_0^T \int_{\Omega} u \nabla w \cdot \nabla \phi + \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (1 - u - a_1 v) u \phi,$$

para toda $\phi \in L^2(H^1)$, y las ecuaciones (3)_{2,3} se verifican en c.t.p (x, t) en Q .

2.0.1. Existencia de solución, caso $N = 3$. En esta subsección, se demuestra el teorema de existencia de solución fuerte, para el caso de dimensión $N = 3$, haciendo uso del Teorema de punto fijo de Leray-Schauder; además, se establece un resultado de unicidad para la solución.

Teorema 2.2 Sea $N = 3$ y suponga que $u_0 \in W^{4/5, 5/3}(\Omega)$, $v_0 \in H^1(\Omega)$, $w_0 \in \widehat{W}^{7/5, 10/3}(\Omega)$ y $f \in L^{(10/3)+}(Q_c)$. Entonces existe una única solución fuerte $[u, v, w] \in X_{5/3} \times X_2 \times X_{10/3}$ de (3)-(4) en el sentido de la Definición 2.1.

Demostración: La prueba inicia considerando los siguientes espacios débiles

$$X := \{u \in C(L^2) \cap L^2(H^1) : \partial_t u \in L^2((H^1)')\} \text{ y } X_w := C(W^{1,3}) \cap L^3(W^{3/2,3}),$$

y definiendo el operador

$$\Gamma : X \times X \times X_w \longrightarrow X_{5/3} \times X_{5/3} \times X_{10/3}$$

$$[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] \longrightarrow \Gamma([\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]) = [u, v, w],$$

donde $[u, v, w]$ es la solución del sistema lineal desacoplado (en primer lugar, resolviendo para la ecuación en v y w , y luego resolviendo para la ecuación que satisface u):

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \langle \partial_t u, \phi \rangle_{(H^1)'} + d_u \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi + \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} u \bar{u}_+ \phi = -\chi \int_0^T \int_{\Omega} \bar{u}_+ \nabla w \cdot \nabla \phi + \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (1 - a_1 \bar{v}) \bar{u}_+ \phi, \\ \partial_t v - d_v \Delta v - \mu_2 v_+ = -\mu_2 \bar{v}_+ (\bar{v} + a_2 \bar{u}) \quad \text{en } Q, \\ \partial_t w - d_w \Delta w + \lambda w = \alpha \bar{v}_+ + f 1_{\Omega_c} \bar{w}_+ \quad \text{en } Q, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, w(0) = w_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega, \end{array} \right. \quad (8)$$

para toda $\phi \in L^2(H^1)$. Recordemos que \bar{u}_+ representa la parte positiva de \bar{u} , es decir, $\bar{u}_+ := \max\{0, \bar{u}\}$; de forma análoga se definen \bar{v}_+ y \bar{w}_+ .

Paso 1: Γ está bien definido.

Sea $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] \in X \times X \times X_w$. En primer lugar, note que

$$X_w = C(W^{1,3}) \cap L^3(W^{3/2,3}) \hookrightarrow L^\infty(L^r) \cap L^3(W^{3/2,3}), \quad \forall r \in [1, \infty).$$

En particular, $\bar{w} \in L^\infty(L^{\infty-})$, y debido a que $f \in L^{(10/3)^+}(Q_c)$ y $\bar{v} \in X$, entonces $f 1_{\Omega_c} \bar{w}_+ \in L^{10/3}(Q)$ y $\bar{v}_+ \in L^{10/3}(Q)$. Por ende, a partir del Teorema 1.1, para $p = 10/3$, existe una única solución $w \in X_{10/3}$ de (8)₃, y la siguiente estimativa se tiene:

$$\|w\|_{X_{10/3}} \leq \mathcal{K}(\|w_0\|_{\widehat{W}^{7/5,10/3}}, \|f\|_{L^{(10/3)^+}(Q_c)}, \|\bar{v}\|_X, \|\bar{w}\|_{X_w}).$$

Ahora, puesto que $\bar{u}, \bar{v} \in X \hookrightarrow L^{10/3}(Q)$ se sigue que $\mu_2 \bar{v}_+ (\bar{v} + a_2 \bar{u}) \in L^{5/3}(Q)$; entonces por el Teorema 1.1, para $p = 5/3$, existe una única solución $v \in X_{5/3}$ de $(8)_2$ y se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\|v\|_{X_{5/3}} \leq \mathcal{K}(\|v_0\|_{W^{4/5,5/3}}, \|\bar{u}\|_X, \|\bar{v}\|_X).$$

Por último, como se tiene que $w \in X_{10/3}$, es posible deducir que

$$\nabla w \in L^\infty(W^{2/5,10/3}) \cap L^{10/3}(W^{1,10/3}) \hookrightarrow L^{10}(Q) \text{ y } \Delta w \in L^{10/3}(Q),$$

consecuentemente,

$$\nabla \cdot (\bar{u}_+ \nabla w) = \nabla \bar{u}_+ \cdot \nabla w + \bar{u}_+ \Delta w \in L^{5/3}(Q).$$

Además, ya que $\bar{u}, \bar{v} \in X \hookrightarrow L^{10/3}(Q)$, se sigue que $\mu_1 \bar{u}_+ (1 - a_1 \bar{v}) \in L^{5/3}(Q)$, por ende, aplicando el Teorema 1.1, existe una única solución $u \in X_{5/3}$ de $(8)_1$, y se tiene la siguiente estimación:

$$\|u\|_{X_{5/3}} \leq \mathcal{K}(\|u_0\|_{W^{4/5,5/3}}, \|\bar{u}_+\|_X, \|\bar{v}\|_X, \|\nabla w\|_{L^{10}(Q)}, \|\Delta w\|_{L^{10/3}(Q)}).$$

Por lo tanto, Γ está bien definido y mapea conjuntos acotados de $X \times X \times X_w$ en conjuntos acotados de $X_{5/3} \times X_{5/3} \times X_{10/3}$.

Paso 2: Γ es un operador compacto.

En primer lugar, observe que en virtud del Lema 1.12 se sigue que $X_{5/3} \xrightarrow{c} X$, y por ello, solo resta mostrar que $X_{10/3} \xrightarrow{c} X_w$. Para esto, note que $\widehat{W}^{7/5,10/3}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{1,3}(\Omega)$ y $\widehat{W}^{2,10/3}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{3/2,3}(\Omega)$ y así, usando los Teoremas de Aubin-Lions y Compacidad de Simon (cf. Lions (1969) Teorema 5.1, p. 58, y Simon (1987) Corolario 4), deducimos que

$$X_{10/3} \hookrightarrow C(\widehat{W}^{7/5,10/3}) \cap L^{10/3}(\widehat{W}^{2,10/3}) \xrightarrow{c} X_w,$$

y de este modo, se concluye que Γ es compacto.

Paso 3: El conjunto de puntos fijos de $\beta\Gamma$, $\beta \in [0, 1]$ es acotado en $X \times X \times X_w$.

Se considera que $\beta \in (0, 1]$ (el caso $\beta = 0$ es claro). Si $[u, v, w]$ es un punto fijo de $\beta\Gamma$, entonces $[u, v, w] = \beta\Gamma([u, v, w])$ satisface

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \langle \partial_t u, \phi \rangle_{(H^1)'} + d_u \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi + \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} u u_+ \phi = -\chi \int_0^T \int_{\Omega} u_+ \nabla w \cdot \nabla \phi + \beta \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (1 - a_1 v) u_+ \phi, \\ \partial_t v - d_v \Delta v - \mu_2 v_+ = -\beta \mu_2 v_+ (v + a_2 u) \quad \text{en } Q, \\ \partial_t w - d_w \Delta w + \lambda w = \beta (\alpha v_+ + f 1_{\Omega_c} w_+) \quad \text{en } Q, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, w(0) = w_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega, \end{array} \right. \quad (9)$$

para toda $\phi \in L^2(H^1)$. A continuación, se desea acotar la tripla $[u, v, w]$ en $X_{5/3} \times X_{5/3} \times X_{10/3}$, independiente de $\beta \in (0, 1]$. Se probará primero que $u, v, w \geq 0$. Sea $u_- = \min\{u, 0\} \leq 0$. Puesto que $u_- = 0$ si $u \geq 0$, y $\nabla u_- = \nabla u$ si $u \leq 0$ y $\nabla u_- = 0$ si $u \geq 0$, haciendo (9)₁ por $u_- \in L^2(H^1)$, se sigue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_-\|^2 + d_u \|\nabla u_-\|^2 = -\chi \int_{\Omega} u_+ \nabla w \cdot \nabla u_- - \mu_1 \int_{\Omega} u u_+ u_- + \beta \mu_1 \int_{\Omega} u_+ (1 - a_1 v) u_- = 0,$$

lo cual implica que $u_- = 0$, y consecuentemente, $u \geq 0$. De forma análoga, multiplicando (9)₂ por v_- y (9)₃ por w_- , se obtiene $v \geq 0$ y $w \geq 0$, respectivamente.

Ahora, se quiere ver que $u \in L^\infty(L^1) \cap L^2(L^2)$. Para esto, tomando $\phi = 1$ en (8)₁, se sigue que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x,t) dx + \mu_1 \int_{\Omega} u^2(x,t) dx + \beta \mu_1 a_1 \int_{\Omega} u(x,t) v(x,t) dx = \beta \mu_1 \int_{\Omega} u(x,t) dx. \quad (10)$$

Entonces, observando que $uv \geq 0$ y

$$\int_{\Omega} u(x,t) dx \leq |\Omega|^{1/2} \left(\int_{\Omega} u^2(x,t) dx \right)^{1/2},$$

se tiene la siguiente desigualdad

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x,t) dx + \frac{\mu_1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} u(x,t) dx \right)^2 \leq \beta \mu_1 \int_{\Omega} u(x,t) dx \leq \mu_1 \int_{\Omega} u(x,t) dx.$$

Resolviendo la última desigualdad diferencial de tipo Bernoulli, es posible obtener:

$$\int_{\Omega} u(x,t) dx \leq \text{máx} \left\{ \int_{\Omega} u_0, |\Omega| \right\} := \mathcal{K}_1, \quad \forall t \geq 0. \quad (11)$$

Así, se deduce que $u \in L^\infty(L^1)$. Por otra parte, a partir de (10) se sigue

$$\mu_1 \int_{\Omega} u^2(x,t) dx \leq \mu_1 \int_{\Omega} u(x,t) dx - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x,t) dx.$$

Entonces, integrando la última desigualdad en $(0, T)$ y usando (11) se obtiene

$$\int_0^T \int_{\Omega} u^2(x, t) dx \leq \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} u_0 + \mathcal{K}_1 T := \mathcal{K}_2(T),$$

esto es, $u \in L^2(L^2)$. Ahora se desea acotar v en $L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)$; para ello, multiplicando (9)₂ por v se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{L^2}^2 + d_v \|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq \mu_2 \|v\|_{L^2}^2 - \beta \mu_2 \int_{\Omega} (v + a_2 u) v^2 \leq \mu_2 \|v\|_{L^2}^2. \quad (12)$$

Así, utilizando la desigualdad de Gronwall, se tiene que $\|v\|_X \leq \mathcal{K}$. Por otro lado, multiplicando (9)₃ por w y usando las desigualdades de Hölder, Gagliardo-Nirenberg y Young, se tiene la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2}^2 + d_w \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \lambda \|w\|_{L^2}^2 &\leq \alpha \beta \int_{\Omega} v w + \beta \int_{\Omega} f 1_{\Omega_c} w^2 \\ &\leq \alpha \|v\|_{L^2} \|w\|_{L^2} + \|f\|_{L^3} \|w\|_{L^3}^2 \\ &\leq \alpha \|v\|_{L^2} \|w\|_{L^2} + \mathcal{K} \|f\|_{L^3} (\|w\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2} + \|w\|_{L^2}^2) \\ &\leq \alpha^2 \mathcal{K} \|v\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|w\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|f\|_{L^3}^2 \|w\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{2} \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|f\|_{L^3} \|w\|_{L^2}^2 \\ &\leq \alpha^2 \mathcal{K} \|v\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|w\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{2} \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} (\|f\|_{L^3}^2 + \|f\|_{L^3}) \|w\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{2} \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|w\|_{L^2}^2 \leq \alpha^2 \mathcal{K} \|v\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} (\|f\|_{L^3}^2 + \|f\|_{L^3}) \|w\|_{L^2}^2,$$

y entonces, aplicando la desigualdad de Gronwall se concluye que $\|w\|_X \leq \mathcal{K} \left(\|v\|_X, \|f\|_{L^{(10/3)^+}(Q_c)} \right)$.

Debido a que $v, w \in X \hookrightarrow L^{10/3}$ y $f \in L^{(10/3)^+}(Q_c)$, entonces $\alpha v + f1_{\Omega_c} w_+ \in L^{5/3}(Q)$; por ende, usando el Teorema 1.1 con $p = 5/3$, se obtiene $w \in X_{5/3} \hookrightarrow L^5(Q)$; entonces, $\alpha v + f1_{\Omega_c} w_+ \in L^2(Q)$, y en consecuencia, del Teorema 1.1 para $p = 2$, $w \in X_2 \hookrightarrow L^{10}(Q)$. Ahora, note que $\alpha v + f1_{\Omega_c} w_+ \in L^{5/2}(Q)$; entonces, aplicando de nuevo el Teorema 1.1, con $p = 5/2$, se sigue

$$w \in L^\infty(W^{6/5,5/2}) \cap L^{5/2}(W^{2,5/2}) \hookrightarrow L^\infty(L^q) \cap L^{5/2}(W^{2,5/2}), \quad \forall q \in [1, \infty).$$

En particular, $w \in L^\infty(L^{\infty-})$, ya que $f \in L^{(10/3)^+}(Q_c)$ y $v \in X$, entonces $f1_{\Omega_c} w_+ \in L^{10/3}(Q)$ y $v \in L^{10/3}(Q)$. Por lo tanto $\alpha v + f1_{\Omega_c} w_+ \in L^{10/3}(Q)$, y a partir del Teorema 1.1, con $p = 10/3$, obtenemos que $w \in X_{10/3}$. A continuación se demuestra que $u \in L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)$. Para ello, multiplicando (8)₁ por u , prosigue la siguiente estimación, para lo cual se hace uso de las desigualdades de Hölder, Young y Gagliardo-Nirenberg:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + d_u \|\nabla u\|_{L^2}^2 &\leq \chi \int_{\Omega} |u \nabla w \cdot \nabla u| + \beta \mu_1 \int_{\Omega} u^2 (1 - a_1 v) - \mu_1 \int_{\Omega} u^3 \\ &\leq \chi \int_{\Omega} |u \nabla w \cdot \nabla u| + \mu_1 \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq \chi \|u\|_{L^4} \|\nabla w\|_{L^4} \|\nabla u\|_{L^2} + \mu_1 \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq \mathcal{K} \chi (\|u\|_{L^2}^{1/4} \|\nabla u\|_{L^2}^{3/4} + \|u\|_{L^2}) \|\nabla w\|_{L^4} \|\nabla u\|_{L^2} + \mu_1 \|u\|_{L^2}^2 \\ &= \mathcal{K} \chi \|u\|_{L^2}^{1/4} \|\nabla u\|_{L^2}^{7/4} \|\nabla w\|_{L^4} + \mathcal{K} \chi \|u\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^4} \|\nabla u\|_{L^2} + \mu_1 \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{d_u}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 (\mathcal{K} \|\nabla w\|_{L^4}^8 + \mathcal{K} \|\nabla w\|_{L^4}^2 + \mu_1), \end{aligned}$$

de este modo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{d_u}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 (\mathcal{K} \|\nabla w\|_{L^4}^8 + \mathcal{K} \|\nabla w\|_{L^4}^2 + \mu_1).$$

Entonces, teniendo en cuenta que $\nabla w \in L^8(L^4)$ y usando la desigualdad de Gronwall, se deduce que $u \in L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1) \hookrightarrow L^{10/3}(Q)$. Además, puesto que $\nabla u \in L^2(Q)$, $\nabla w \in L^{10}(Q)$ y $\Delta w \in L^{10/3}(Q)$, se sigue

$$\nabla \cdot (u \nabla w) = \nabla u \cdot \nabla w + u \Delta w \in L^{5/3}(Q).$$

Además, $u^2 \in L^{5/3}(Q)$ y $uv \in L^{5/3}(Q)$. Entonces $\chi \nabla \cdot (u \nabla w) - \mu_1 u(u + a_1 v) \in L^{5/3}(Q)$. Aplicando el Teorema 1.1, para $p = 5/3$, $u \in X_{5/3}$ y se tiene la siguiente estimación

$$\|u\|_{X_{5/3}} \leq \mathcal{K} \left(\|u_0\|_{W^{4/5,5/3}}, \|u\|_X, \|v\|_X, \|\nabla w\|_{L^{10}(Q)}, \|\Delta w\|_{L^{10/3}(Q)} \right).$$

Análogamente, es posible ver que v está acotada en $X_{5/3}$.

Paso 4: Γ es continuo.

Sea $\{[\bar{u}_m, \bar{v}_m, \bar{w}_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $X \times X \times X_w$ tal que $[\bar{u}_m, \bar{v}_m, \bar{w}_m]$ converge a $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$ en $X \times X \times X_w$ cuando m tiende a ∞ . A partir del *Paso 1* se tiene que $[u_m, v_m, w_m] = \Gamma([\bar{u}_m, \bar{v}_m, \bar{w}_m])$ es acotado en $X_{5/3} \times X_{5/3} \times X_{10/3}$. Por consiguiente, existe una subsucesión de $\{[u_m, v_m, w_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$, denotada también por $\{[u_m, v_m, w_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$, de manera que $[u_m, v_m, w_m] \rightharpoonup [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}]$ débilmente en $X_{5/3} \times X_{5/3} \times X_{10/3}$ y fuertemente en $X \times X \times X_w$. De la definición de Γ , $[u_m, v_m, w_m]$ es la solución

Por otra parte, ya que $[u_m, v_m, w_m] \longrightarrow [\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}]$ débil en $X_{5/3} \times X_2 \times X_{10/3}$, se obtienen las siguientes convergencias:

$$\partial_t u_m - d_u \Delta u_m - \mu_1 u_m \longrightarrow \partial_t \widehat{u} - d_u \Delta \widehat{u} - \mu_1 \widehat{u}_m \quad \text{débil en } L^{5/3}(Q),$$

$$\partial_t v_m - d_v \Delta v_m - \mu_2 v_m \longrightarrow \partial_t \widehat{v} - d_v \Delta \widehat{v} + \mu_2 \widehat{v} \quad \text{débil en } L^{5/3}(Q),$$

$$\partial_t w_m - d_w \Delta w_m + \lambda w_m \longrightarrow \partial_t \widehat{w} - d_w \Delta \widehat{w} + \lambda \widehat{w} \quad \text{débil en } L^{10/3}(Q),$$

y por lo tanto, se puede deducir que $\Gamma([\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]) = [\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}]$, lo cual implica la continuidad del operador Γ .

Finalmente, en virtud de los *Pasos 1,2,3 y 4*, se aplica el Teorema de Leray-Schauder y se concluye que (8) tiene una solución fuerte $[u, v, w] \in X_{5/3} \times X_{5/3} \times X_{10/3}$.

Note que si $u, v \in X_{5/3} \hookrightarrow L^5(Q)$ entonces $\mu_2(1 - v - a_2 u)v \in L^{5/2}(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$, además se sabe que $v_0 \in H^1(\Omega)$, eso implica, usando el Teorema 1.1 con $p = 2$, que $v \in X_2$. Por tanto, $[u, v, w] \in X_{5/3} \times X_2 \times X_{10/3}$. □

En lo que sigue, el objetivo será demostrar la unicidad de la solución fuerte.

Proposición 2.3 *La solución fuerte $[u, v, w] \in X_{5/3} \times X_2 \times X_{10/3}$ del sistema (3), encontrada en el Teorema 2.2, es única.*

Demostración: Para mostrar la unicidad, suponemos que existen $[u_1, v_1, w_1], [u_2, v_2, w_2] \in X_{5/3} \times X_2 \times X_{10/3}$ dos soluciones fuertes de (3). Denotando por $u := u_1 - u_2$, $v := v_1 - v_2$ y $w := w_1 - w_2$,

Young y Gagliardo-Nirenberg. En ese sentido se obtiene que:

$$\begin{aligned}
& -\chi \int_{\Omega} u \nabla w_2 \cdot \nabla u - \chi \int_{\Omega} u_1 \nabla w \cdot \nabla u \leq \chi \|u\|_{L^2} \|\nabla w_2\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} + \chi \|u_1\|_{L^5} \|\nabla w\|_{L^{10/3}} \|\nabla u\|_{L^2} \\
& \leq \frac{d_u}{4} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{4} \|\Delta w\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \left(\|u\|_{L^2}^2 \|\nabla w_2\|_{L^\infty}^2 + (\|u_1\|_{L^5}^5 + \|u_1\|_{L^5}^2) \|\nabla w\|_{L^2}^2 \right), \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_1 \mu_1 \int_{\Omega} v u_2 u - a_2 \mu_2 \int_{\Omega} u v_2 v \leq a_1 \mu_1 \|v\|_{L^6} \|u_2\|_{L^3} \|u\|_{L^2} + a_2 \mu_2 \|u\|_{L^6} \|v_2\|_{L^3} \|v\|_{L^2} \\
& \leq \mathcal{K} \|u_2\|_{L^3} \|u\|_{L^2} (\|\nabla v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}) + \mathcal{K} \|v_2\|_{L^3} \|v\|_{L^2} (\|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \\
& \leq \frac{d_v}{4} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{d_u}{4} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} (\|u_2\|_{L^3}^2 + 1) \|u\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} (\|u_2\|_{L^3}^2 + \|v_2\|_{L^3}^2) \|v\|_{L^2}^2, \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha \int_{\Omega} v w + \int_{\Omega} f 1_{\Omega_c} w^2 \leq \alpha \|v\|_{L^2} \|w\|_{L^2} + \|f\|_{L^3} \|w\|_{L^3}^2 \\
& \leq \alpha \|v\|_{L^2} \|w\|_{L^2} + \|f\|_{L^3} (\|w\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2} + \|w\|_{L^2}^2) \\
& \leq \frac{d_w}{2} \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|w\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|v\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} (\|f\|_{L^3} + \|f\|_{L^3}^2) \|w\|_{L^2}^2, \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w - \int_{\Omega} f 1_{\Omega_c} w \Delta w \leq \alpha \|\nabla v\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2} + \|f\|_{L^3} \|w\|_{L^6} \|\Delta w\|_{L^2} \\
& \leq \alpha \|\nabla v\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2} + \|f\|_{L^3} (\|\nabla w\|_{L^2} + \|w\|_{L^2}) \|\Delta w\|_{L^2} \\
& \leq \frac{d_v}{4} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{4} \|\Delta w\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^3}^2 (\|\nabla w\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^2}^2). \quad (22)
\end{aligned}$$

De este modo, sumando (15)-(18) y tomando en cuenta (19)-(22), se sigue que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^2}^2 + \|\nabla w\|_{L^2}^2) + \frac{d_u}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{d_v}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{2} \|\Delta w\|_{L^2}^2 \\
& + \frac{d_w}{2} \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|w\|_{L^2}^2 \\
& \leq \mathcal{K} \left(\|u\|_{L^2}^2 \|\nabla w_2\|_{L^\infty}^2 + (\|u_1\|_{L^5}^5 + \|u_1\|_{L^5}^2) \|\nabla w\|_{L^2}^2 \right) \\
& + \mathcal{K} (\|u_2\|_{L^3}^2 + 1) \|u\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} (\|v_2\|_{L^3}^2 + \|u_2\|_{L^3}^2 + 1) \|v\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|f\|_{L^3} \|w\|_{L^2}^2 \\
& + \mathcal{K} \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^3}^2 (\|\nabla w\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^2}^2).
\end{aligned}$$

Entonces, aplicando la desigualdad Gronwall en la última desigualdad, teniendo en cuenta que $u_1, u_2, v_2 \in X_{5/3} \hookrightarrow L^5(Q)$, $w_2 \in X_{10/3}$ y $f \in L^{10/3}(Q)$ implica que todos los términos que acompañan a $\|u\|_{L^2}^2, \|v\|_{L^2}^2, \|w\|_{L^2}^2$ y $\|\nabla w\|_{L^2}^2$ son integrables y dado que $[u(0), v(0), w(0)] = [0, 0, 0]$, se puede concluir la unicidad. \square

2.0.2. Existencia de solución, caso $N = 2$. El objetivo de esta sección es demostrar que el sistema (3)-(4) tiene una única solución débil-fuerte, cuando la dimensión es $N = 2$. Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.4 *Sea $N = 2$ y suponga que $u_0 \in L^2(\Omega)$, $v_0, w_0 \in W^{1+,2+}(\Omega)$. Entonces existe una única $[u, v, w] \in X \times X_{2+} \times X_{2+}$ solución débil-fuerte de (3)-(4) en el sentido de la Definición 2.1.*

Demostración: La demostración del Teorema 2.4 también se basa en el teorema del punto fijo de Leray-Schauder. Para ello, se considera el operador

$$\Gamma : L^{4-}(Q) \times L^\infty(Q) \times L^\infty(Q) \longrightarrow X \times X_{2+} \times X_{2+}$$

$$[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] \longrightarrow \Gamma([\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]) = [u, v, w],$$

donde $[u, v, w]$ es la solución del sistema lineal desacoplado, para toda $\phi \in L^2(H^1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \langle \partial_t u, \phi \rangle_{(H^1)'} + d_u \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi + \mu_1 \int_0^T \int_\Omega u \bar{u}_+ \phi = -\chi \int_0^T \int_\Omega \bar{u}_+ \nabla w \cdot \nabla \phi + \mu_1 \int_0^T \int_\Omega (1 - a_1 \bar{v}) \bar{u}_+ \phi, \\ \partial_t v - d_v \Delta v - \mu_2 v_+ = -\mu_2 \bar{v}_+ (\bar{v} + a_2 \bar{u}) \quad \text{en } Q, \\ \partial_t w - d_w \Delta w + \lambda w = \alpha \bar{v}_+ + f 1_{\Omega_c} \bar{w}_+ \quad \text{en } Q, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, w(0) = w_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (23)$$

Paso 1: Γ está bien definida.

Puesto que $\bar{v} \in L^4(Q)$, $\bar{w} \in L^\infty(Q)$ y $f \in L^{2+}(Q_c)$, entonces $\alpha \bar{v}_+ + f 1_{\Omega_c} \bar{w}_+ \in L^{2+}(Q)$, y por tanto, utilizando el Teorema 1.1, existe una solución única $w \in X_{2+}$. Ahora, ya que $\bar{u} \in L^{4-}(Q)$ y $\bar{v} \in L^\infty(Q)$ se tiene que $-\mu_2 (\bar{v} + a_2 \bar{u}) \bar{v}_+ \in L^{4-}(Q) \hookrightarrow L^{2+}(Q)$, y en consecuencia, existe una solución única $v \in X_{2+}$. Finalmente, debido a que $w \in X_{2+}$, entonces $\nabla w \in L^{4+}(Q)$; por ello $\bar{u}_+ \nabla w \in L^2(Q)$ y $-\mu_1 (1 + a_2 \bar{v}) \bar{u}_+ \in L^2(Q)$, entonces existe una única solución $u \in X$. Consecuentemente, Γ está bien definido.

Paso 2: El conjunto de puntos fijos de $\beta \Gamma$, $\beta \in [0, 1]$ es acotado en $X \times X_{2+} \times X_{2+}$.

Considere $\beta \in (0, 1]$ (el caso $\beta = 0$ es claro). Si $[u, v, w]$ es un punto fijo de $\beta\Gamma$, entonces $[u, v, w] = \beta\Gamma([u, v, w])$ satisface, para toda $\phi \in L^2(H^1)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \langle \partial_t u, \phi \rangle_{(H^1)'} + d_u \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi + \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} u u_+ \phi = -\chi \int_0^T \int_{\Omega} u_+ \nabla w \cdot \nabla \phi + \beta \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (1 - a_1 v) u_+ \phi, \\ \partial_t v - d_v \Delta v - \mu_2 v_+ = -\beta \mu_2 v_+ (v + a_2 u) \quad \text{en } Q, \\ \partial_t w - d_w \Delta w + \lambda w = \beta (\alpha v_+ + f 1_{\Omega_c} w_+) \quad \text{en } Q, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, w(0) = w_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (24)$$

De forma análoga al caso 3D, primero se demuestra la no negatividad de las variables u , v y w , y después se acota la variable u en $L^\infty(L^1) \cap L^2(L^2)$. Adicionalmente, multiplicando (24)₂ por v y (24)₃ por w , y aplicando la desigualdad de Gronwall se obtiene que v, w están acotadas en $L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)$. Por otro lado, multiplicando (24)₃ por $-\Delta w$, observando que

$$\int_{\Omega} f 1_{\Omega_c} w \Delta w \leq \mathcal{K} \|f\|_{L^{2+}}^2 \|w\|_{H^1}^2 + \frac{d_w}{2} \|\Delta w\|_{L^2}^2,$$

es posible deducir que w es acotada en $L^\infty(H^1) \cap L^2(H^2)$. Posteriormente, multiplicando (24)₁ por u y teniendo en cuenta que $\nabla w \in L^4(Q)$, aplicando la desigualdad de Gronwall, se deduce que u está acotada en $L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)$. En adición, multiplicando (24)₂ por $-\Delta v$ se obtiene que v es acotada en $L^\infty(H^1) \cap L^2(H^2)$. Más aún, la regularidad parabólica proporciona que $[v, w]$ es acotada

en $X_{2+} \times X_{2+}$. La continuidad del operador Γ se demuestra de forma análoga al caso 3D. En consecuencia, el teorema del punto fijo de Leray-Schauder implica la existencia de una solución débil-fuerte $[u, v, w] \in X \times X_{2+} \times X_{2+}$ para (23) en el sentido de la Definición 2.1. Siguiendo la demostración del Teorema 2.2, es posible concluir la unicidad de las soluciones débiles-fuertes. \square

3. Problema de control óptimo

En el presente capítulo, se demuestra que el problema de control óptimo bilineal (5) tiene solución óptima global y se deducen condiciones de optimalidad de primer orden para la solución; este análisis se realizará para las dimensiones $N = 3$ y $N = 2$.

3.1. Existencia de una solución óptima global

3.1.1. Caso $N = 3$. El objetivo de esta subsección es demostrar que existe al menos una solución óptima global para el problema de control óptimo bilineal (5) para el caso tridimensional. Para ello, definimos el conjunto admisible para el problema de control óptimo (5), como sigue

$$S_{ad} := \left\{ s = [u, v, w, f] \in X_{5/3} \times X_2 \times X_{10/3} \times \mathcal{F} : [u, v, w] \text{ es solución fuerte de (3)-(4) con dato } f \right\}.$$

Un elemento $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ es llamado una solución óptima global de (5), si

$$J([\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}]) = \min_{[u, v, w, f] \in S_{ad}} J([u, v, w, f]).$$

Teorema 3.1 Sean $N = 3$, $0 < T < \infty$, $u_0 \in W^{4/5, 5/3}(\Omega)$, $v_0 \in H^1(\Omega)$ y $w_0 \in \widehat{W}^{7/5, 10/3}(\Omega)$ tales que $u_0, v_0, w_0 \geq 0$ en Ω . Suponga que $\gamma_f > 0$ ó \mathcal{F} es acotado en $L^{(10/3)+}(Q_c)$. Entonces existe al

menos una solución global óptima $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}]$ para el problema de control óptimo bilineal (5).

Demostración: Como consecuencia del Teorema 2.2, se tiene que el conjunto S_{ad} es no vacío.

Además, dado que J está acotado inferiormente, existe una sucesión minimizante $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}} :=$

$\{[u_m, v_m, w_m, f_m]\}_{m \in \mathbb{N}} \subset S_{ad}$ de J , esto es,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(s_m) = \inf_{s \in S_{ad}} J(s).$$

De la definición del conjunto S_{ad} , para toda $m \in \mathbb{N}$, $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ satisface (3)-(4) en el sentido de la Definición 2.1. A partir de la definición de J y teniendo en cuenta la suposición de que $\gamma_f > 0$ ó \mathcal{F} es acotado en $L^{(10/3)^+}(Q_c)$, se concluye que $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ está acotada en $L^{(10/3)^+}(Q_c)$. Por otro lado, a partir de la demostración del Teorema 2.2, la sucesión $\{[u_m, v_m, w_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$ es acotada en $X_{5/3} \times X_2 \times X_{10/3}$. Por lo tanto, recordando que \mathcal{F} es un subconjunto cerrado y convexo de $L^{(10/3)^+}(Q_c)$ (por ende, débilmente cerrado en $L^{(10/3)^+}(Q_c)$), para alguna subsucesión $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, también denotada por $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, existe un vector límite $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}]$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} [u_m, v_m] \longrightarrow [\tilde{u}, \tilde{v}] \text{ débil en } L^{5/3}(W^{2,5/3}) \times L^{5/3}(W^{2,5/3}), \\ [u_m, v_m] \longrightarrow [\tilde{u}, \tilde{v}] \text{ débil-}^* \text{ en } L^\infty(W^{4/5,5/3}) \times L^\infty(W^{4/5,5/3}), \\ w_m \longrightarrow \tilde{w} \text{ débil en } L^{10/3}(W^{2,10/3}) \text{ débil-}^* \text{ en } L^\infty(W^{7/5,10/3}), \\ [\partial_t u_m, \partial_t v_m] \longrightarrow [\partial_t \tilde{u}, \partial_t \tilde{v}] \text{ débil en } L^{5/3}(L^{5/3}) \times L^{5/3}(L^{5/3}), \\ \partial_t w_m \longrightarrow \partial_t \tilde{w} \text{ débil en } L^{10/3}(L^{10/3}), \\ f_m \longrightarrow f \text{ débil en } L^{(10/3)^+}(Q_c), \text{ y } f \in \mathcal{F}. \end{array} \right. \quad (25)$$

De la Proposición 1.12, se sigue que $X_{5/3} \times X_2 \times X_{10/3} \hookrightarrow X \times X \times X_w$ compactamente. En consecuencia se sigue que

$$[u_m, v_m, w_m] \longrightarrow [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}] \text{ fuerte en } X \times X \times X_w. \quad (26)$$

Ahora note que, de (26) y teniendo en cuenta que $X \hookrightarrow L^{10/3}(Q)$, se obtiene

$$\begin{cases} \|u_m - \tilde{u}\|_{L^{10/3}} \leq \|u_m - \tilde{u}\|_X \longrightarrow 0 & \text{cuando } m \longrightarrow \infty, \\ \|v_m - \tilde{v}\|_{L^{10/3}} \leq \|v_m - \tilde{v}\|_X \longrightarrow 0 & \text{cuando } m \longrightarrow \infty, \end{cases} \quad (27)$$

entonces

$$\begin{aligned} \|u_m^2 - \tilde{u}^2\|_{L^{5/3}(Q)} &= \|(u_m - \tilde{u})(u_m + \tilde{u})\|_{L^{5/3}(Q)} \leq \|u_m - \tilde{u}\|_{L^{10/3}(Q)} \|u_m + \tilde{u}\|_{L^{10/3}(Q)} \\ &\leq \|u_m - \tilde{u}\|_{L^{10/3}(Q)} \|u_m\|_{L^{10/3}(Q)} + \|u_m - \tilde{u}\|_{L^{10/3}(Q)} \|\tilde{u}\|_{L^{10/3}(Q)}. \end{aligned}$$

Puesto que, la sucesión $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ está acotada en $L^{10/3}(Q)$ y $\tilde{u} \in L^{10/3}(Q)$, usando (27)₁ se tiene

$$\|u_m^2 - \tilde{u}^2\|_{L^{5/3}(Q)} \leq \|u_m - \tilde{u}\|_X \|u_m\|_{L^{10/3}(Q)} + \mathcal{K} \|u_m - \tilde{u}\|_X \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } m \longrightarrow \infty.$$

De forma análoga, usando (27)₂, es posible mostrar que

$$\|u_m v_m - \tilde{u} \tilde{v}\|_{L^{5/3}(Q)} \leq \|u_m - \tilde{u}\|_X \|v_m\|_{L^{10/3}(Q)} + \mathcal{K} \|v_m - \tilde{v}\|_X \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } m \longrightarrow \infty,$$

por ello, se deduce que $\mu_1 u_m (1 - u_m - a_1 v_m)$ converge a $\mu_1 \tilde{u} (1 - \tilde{u} - a_1 \tilde{v})$ fuerte en $L^{5/3}(Q)$. A

partir de las convergencias dadas en (25)-(26), es posible obtener las siguientes convergencias:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (u_m \nabla w_m) \longrightarrow \nabla \cdot (\tilde{u} \nabla \tilde{w}) & \text{d\u00e9bil en } L^{5/3}(Q), \\ \mu_1 u_m (1 - u_m - a_1 v_m) \longrightarrow \mu_1 \tilde{u} (1 - \tilde{u} - a_1 \tilde{v}) & \text{fuerte en } L^{5/3}(Q), \\ f_m w_m \longrightarrow f \tilde{w} & \text{d\u00e9bil en } L^{5/3}(Q). \end{array} \right. \quad (28)$$

Adem\u00e1s, de (26), se sigue que

$$[u_{0,m}, v_{0,m}, w_{0,m}] \longrightarrow [\tilde{u}(0), \tilde{v}(0), \tilde{w}(0)] \text{ fuerte en } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times W^{1,3}(\Omega),$$

y ya que $u_{0,m} = u_0$, $v_{0,m} = v_0$ y $w_{0,m} = w_0$ para toda $m \in \mathbb{N}$, entonces $[\tilde{u}(0), \tilde{v}(0), \tilde{w}(0)] = [u_0, v_0, w_0]$, esto es, $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, f]$ satisface (4)₁. Por tanto, teniendo en cuenta las convergencias (25) y (26), tomando el l\u00edmite en (3) reemplazando $[u, v, w]$ por $[u_m, v_m, w_m]$ cuando m tiende a $+\infty$, se concluye que $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}]$ es una soluci\u00f3n fuerte de (3), es decir, $\tilde{s} \in S_{ad}$. Entonces,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(s_m) = \inf_{s \in S_{ad}} J(s) \leq J(\tilde{s}). \quad (29)$$

Finalmente, como J es d\u00e9bilmente semicontinuo inferior en S_{ad} , se obtiene que

$$J(\tilde{s}) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} J(s_m). \quad (30)$$

De (29) y (30) se concluye lo siguiente

$$J([\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}]) = \min_{[u, v, w, f] \in S_{ad}} J([u, v, w, f]).$$

□

3.1.2. Caso $N = 2$. En esta subsección se demuestra la existencia de una solución óptima para el problema de control (5) en el caso bidimensional. El conjunto admisible para el problema de control óptimo (5), en el caso $N = 2$, se define por:

$$S_{ad} := \left\{ s = [u, v, w, f] \in X \times X_{2+} \times X_{2+} \times \mathcal{F} : [u, v, w] \text{ es solución débil-fuerte de (3)-(4) con dato } f \right\}.$$

Teorema 3.2 Sean $N = 2$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $v_0 \in H^1(\Omega)$ y $w_0 \in H^1(\Omega)$ tales que $u_0, v_0, w_0 \geq 0$ en Ω . Suponga que $\gamma_f > 0$ ó \mathcal{F} es acotado en $L^{2+}(Q_c)$. Entonces, existe al menos una solución óptima global $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}]$ para el problema de control bilineal (5).

Demostración: A partir del Teorema 2.4, $S_{ad} \neq \emptyset$. Además, existe una sucesión minimizante $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}} := \{[u_m, v_m, w_m, f_m]\}_{m \in \mathbb{N}} \subset S_{ad}$ de J , tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(s_m) = \inf_{s \in S_{ad}} J(s),$$

para toda $m \in \mathbb{N}$, donde $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ satisface (3)-(4) en el sentido de la Definición 2.1. Teniendo en cuenta que $\gamma_f > 0$ ó \mathcal{F} es acotado en $L^{2+}(Q_c)$, y usando el Teorema 2.4, la sucesión $\{[u_m, v_m, w_m, f_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$ es acotada en $X \times X_{2+} \times X_{2+} \times L^{2+}(Q_c)$; por lo tanto, recordando que \mathcal{F} es un subconjunto cerrado y convexo de $L^{2+}(Q_c)$ (por ende, débilmente cerrado en $L^{2+}(Q_c)$), existe una subsucesión de $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, también denotada por $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, y un vector $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}]$ tales que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m \longrightarrow \tilde{u} \text{ débil en } L^2(H^1) \text{ y débil-}^* \text{ en } L^\infty(L^2), \\ [v_m, w_m] \longrightarrow [\tilde{v}, \tilde{w}] \text{ débil en } L^{2+}(W^{2,2+}) \times L^{2+}(W^{2,2+}), \\ [v_m, w_m] \longrightarrow [\tilde{v}, \tilde{w}] \text{ débil-}^* \text{ en } L^\infty(W^{1+,2+}) \times L^\infty(W^{1+,2+}), \\ \partial_t u_m \longrightarrow \partial_t \tilde{u} \text{ débil-}^* \text{ en } L^2((H^1)'), \\ [\partial_t v_m, \partial_t w_m] \longrightarrow [\partial_t \tilde{v}, \partial_t \tilde{w}] \text{ débil en } L^{2+}(Q) \times L^{2+}(Q), \\ f_m \longrightarrow f \text{ débil en } L^{2+}(Q_c), \text{ y } \tilde{f} \in \mathcal{F}. \end{array} \right. \quad (31)$$

De (31) y los resultados de compacidad de Aubin-Lions y Simon (ver Teoremas 1.3 y 1.4), en particular, se deduce que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m \longrightarrow \tilde{u} \text{ fuerte en } C((H^1)') \cap L^{4-}(Q), \\ v_m \longrightarrow \tilde{v} \text{ fuerte en } C(L^2) \cap L^\infty(Q), \\ w_m \longrightarrow \tilde{w} \text{ fuerte en } C(L^2) \cap L^\infty(Q), \\ \nabla w_m \longrightarrow \nabla \tilde{w} \text{ fuerte en } L^{4+}(Q). \end{array} \right. \quad (32)$$

Entonces, usando (31)-(32), se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_m \nabla w_m \longrightarrow \tilde{u} \nabla \tilde{w} & \text{fuerte en } L^2(Q), \\ \mu_1 u_m (1 - u_m - a_1 v_m) \longrightarrow \mu_1 \tilde{u} (1 - \tilde{u} - a_1 \tilde{v}) & \text{débil en } L^2(Q), \\ f_m 1_{\Omega_c} w_m \longrightarrow \tilde{f} 1_{\Omega_c} \tilde{w} & \text{débil en } L^{2+}(Q_c). \end{array} \right. \quad (33)$$

De (32), $[u_m(0), v_m(0), w_m(0)] = [u_0, v_0, w_0]$ converge a $[\tilde{u}(0), \tilde{v}(0), \tilde{w}(0)]$ en $(H^1(\Omega))' \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Entonces, $[\tilde{u}(0), \tilde{v}(0), \tilde{w}(0)] = [u_0, v_0, w_0]$. Por otro lado, considerando las convergencias (31) y (32), tomando el límite en (3) (reemplazando $[u, v, w]$ por $[u_m, v_m, w_m]$ y considerando la formulación variacional para u) cuando m tiende a $+\infty$, se deduce que $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}]$ es una solución débil-fuerte en (3) con dato \tilde{f} , esto es, $\tilde{s} \in S_{ad}$. Además, puesto que J es débilmente semicontinuo inferior en S_{ad} , se obtiene

$$J([\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}]) = \min_{[u, v, w, f] \in S_{ad}} J([u, v, w, f]).$$

□

3.2. Existencia de multiplicadores de Lagrange

En esta sección se derivan condiciones necesarias de optimalidad de primer orden para una solución óptima local $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}]$ del problema (5). Se utilizará un teorema de existencia de multiplicadores de Lagrange en espacios de Banach, demostrado por Zowe y Kurcyusz en Zowe and Kurcyusz (1979) en un marco funcional abstracto. Para ello, sean \mathbb{X}, \mathbb{Y} espacios de Banach, \mathbb{M} un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de \mathbb{X} , $J : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional y $G : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ un operador de restricción. Entonces, se considera el siguiente problema de optimización:

$$\min_{s \in \mathbb{M}} J(s) \quad \text{sujeto a} \quad G(s) = 0. \quad (34)$$

El conjunto $S_{ad} = \{s \in \mathbb{M} : G(s) = 0\}$ se denomina conjunto admisible. El funcional $\mathcal{L} : \mathbb{X} \times \mathbb{Y}' \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\mathcal{L}([s, \zeta]) = J(s) - \langle \zeta, G(s) \rangle_{\mathbb{Y}'}$, es llamado el Lagrangiano del problema (34).

Definición 3.3 (Mínimo local) *Un elemento $\tilde{s} \in S_{ad}$ es una solución óptima local para el proble-*

ma (34), si existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(\tilde{s}) \leq J(s)$, para toda $s \in S_{ad}$ que satisfice $\|s - \tilde{s}\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon$.

Definición 3.4 (Multiplicador de Lagrange) Sea $\tilde{s} \in S_{ad}$ una solución óptima local del problema (34). Suponga que J y G son Fréchet diferenciables en \tilde{s} , con derivadas denotadas por $J'(\tilde{s})$ y $G'(\tilde{s})$, respectivamente. Entonces, $\zeta \in \mathbb{Y}'$ es llamado un multiplicador de Lagrange para el problema (34) en el punto \tilde{s} si

$$\begin{cases} \langle \zeta, G(\tilde{s}) \rangle_{\mathbb{Y}'} = 0, \\ \mathcal{L}'_s([\tilde{s}, \zeta])[r] := J'(\tilde{s})[r] - \langle \zeta, G'(\tilde{s})[r] \rangle_{\mathbb{Y}'} \geq 0 \quad \forall r \in \mathcal{C}(\tilde{s}), \end{cases} \quad (35)$$

donde $\mathcal{C}(\tilde{s})$ denota el casco cónico de \tilde{s} en \mathbb{M} ; esto es, $\mathcal{C}(\tilde{s}) := \{\delta(s - \tilde{s}) : s \in \mathbb{M}, \delta \geq 0\}$.

Definición 3.5 (Punto regular) Sea $\tilde{s} \in S_{ad}$ una solución óptima local del problema (34). Se dice que \tilde{s} es un punto regular, si

$$G'(\tilde{s})[\mathcal{C}(\tilde{s})] = \mathbb{Y}. \quad (36)$$

El siguiente teorema garantiza la existencia de multiplicadores de Lagrange para el problema de optimización abstracto (34).

Teorema 3.6 ((Zowe and Kurcyusz, 1979, Teorema 3.1) y (Troltzsch, 2010, Teorema 6.3, p. 330))

Sea $\tilde{s} \in S_{ad}$ una solución óptima local del problema (34). Suponga que J es Fréchet diferenciable en \tilde{s} y que G es continuamente Fréchet diferenciable en \tilde{s} . Si \tilde{s} es un punto regular, entonces existe al menos un multiplicador de Lagrange para el problema (34) en el sentido de la Definición 3.4.

3.2.1. Caso $N = 3$. Note que el problema de control óptimo (5) se puede formular en términos del problema abstracto (34); para ello, se consideran los siguientes espacios de Banach:

$$\mathbb{X} := \widehat{X} \times \widehat{X}_2 \times \widehat{X}_{10/3} \times L^{(10/3)^+}(Q_c),$$

$$\mathbb{Y} := L^2((H^1)') \times L^2(Q) \times L^{10/3}(Q),$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{X} &:= \left\{ u \in X : u(0) = 0 \right\}, \\ \widehat{X}_2 &:= \left\{ v \in X_2 : v(0) = 0, \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \right\}, \\ \widehat{X}_{10/3} &:= \left\{ w \in X_{10/3} : w(0) = 0, \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Adicionalmente, se define el operador $G = [G_1, G_2, G_3] : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$, donde

$$G_1 : \mathbb{X} \longrightarrow L^2((H^1)'), \quad G_2 : \mathbb{X} \longrightarrow L^2(Q), \quad G_3 : \mathbb{X} \longrightarrow L^{10/3}(Q),$$

son definidos, en cada punto $s = [u, v, w, f] \in \mathbb{X}$, por

$$(G_1(s), \phi) = \int_0^T \langle \partial_t u, \phi \rangle_{(H^1)'} + d_u \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi + \chi \int_0^T \int_{\Omega} u \nabla w \cdot \nabla \phi - \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} u(1 - u - a_1 v) \phi,$$

$$G_2(s) = \partial_t v - d_v \Delta v - \mu_2 v(1 - v - a_2 u),$$

$$G_3(s) = \partial_t w - d_w \Delta w - \alpha v + \lambda w - f 1_{\Omega_c} w,$$

para toda $\phi \in L^2(H^1)$. Entonces, el problema de control óptimo (5) puede ser reformulado como

sigue:

$$\min_{s \in \mathbb{M}} J(s) \quad \text{sujeto a } G(s) = 0, \quad (37)$$

donde el conjunto \mathbb{M} (un subconjunto cerrado y convexo de \mathbb{X}) es definido como

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &:= [\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}, \widehat{f}] + \widehat{X} \times \widehat{X}_2 \times \widehat{X}_{10/3} \times (\mathcal{F} - \widehat{f}) \\ &= \left\{ [\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}, \widehat{f}] + [u, v, w, f] : [u, v, w, f] \in \widehat{X} \times \widehat{X}_2 \times \widehat{X}_{10/3} \times (\mathcal{F} - \widehat{f}) \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

con $[\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}, \widehat{f}]$ una solución global fuerte de (3)-(4). El conjunto admisible del problema (5) se reescribe como $S_{ad} = \{s = [u, v, w, f] \in \mathbb{M} : G(s) = 0\}$. El lagrangiano asociado al problema de control óptimo (5) está definido por el funcional $\mathcal{L} : \mathbb{X} \times L^2(H^1) \times L^2(Q) \times L^{10/7}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\mathcal{L}([s, \sigma, \eta, \xi]) := J(s) - \langle \sigma, G_1(s) \rangle_{L^2((H^1)')} - \langle \eta, G_2(s) \rangle_{L^2} - \langle \xi, G_3(s) \rangle_{L^{10/7}}.$$

Las derivadas de Fréchet del funcional J y del operador G , se presentan en los siguientes Lemas.

Lema 3.7 *El funcional $J : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable y su derivada $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}] \in \mathbb{X}$ en la dirección $r = [U, V, W, F] \in \mathbb{X}$ es dada por*

$$\begin{aligned} J'(\tilde{s})[r] &= \gamma_u \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{u} - u_d)U + \gamma_v \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{v} - v_d)V + \gamma_w \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{w} - w_d)W + \gamma_f \int_0^T \int_{\Omega_c} \text{sgn}(\tilde{f})|\tilde{f}|^{(7/3)+} F \\ &\quad + \beta_1 \int_{\Omega} (\tilde{u}(T) - u_T)U(T) + \beta_2 \int_{\Omega} (\tilde{v}(T) - v_T)V(T) + \beta_3 \int_{\Omega} (\tilde{w}(T) - w_T)W(T). \end{aligned}$$

Lema 3.8 *El operador $G : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ es continuamente Fréchet diferenciable y su derivada $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}] \in \mathbb{X}$ en la dirección $r = [U, V, W, F] \in \mathbb{X}$ está dada por el operador lineal $G'(\tilde{s})[r] =$*

$(G'_1(\tilde{s})[r], G'_2(\tilde{s})[r], G'_3(\tilde{s})[r])$ donde, para toda $\phi \in L^2(H^1)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} (G'_1(\tilde{s})[r], \phi) = \int_0^T \langle \partial_t U, \phi \rangle_{(H^1)'} + \int_0^T \int_{\Omega} (d_u \nabla U + \chi U \nabla \tilde{w} + \chi \tilde{u} \nabla W) \cdot \nabla \phi \\ \quad + \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (2\tilde{u}U + a_1 \tilde{u}V + a_1 U \tilde{v} - U) \phi, \\ G'_2(\tilde{s})[r] = \partial_t V - d_v \Delta V - \mu_2 V + 2\mu_2 \tilde{v}V + \mu_2 a_2 \tilde{u}V + \mu_2 a_2 U \tilde{v}, \\ G'_3(\tilde{s})[r] = \partial_t W - d_w \Delta W - \alpha V + \lambda W - \tilde{f} 1_{\Omega_c} W - F 1_{\Omega_c} \tilde{w}. \end{array} \right. \quad (39)$$

De la definición de punto regular, se sigue que $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ es un punto regular si el operador definido en (39) es sobreyectivo, es decir, para cualquier $[g_u, g_v, g_w] \in \mathbb{Y}$, existe $r = [U, V, W, F] \in \widehat{X} \times \widehat{X}_2 \times \widehat{X}_{10/3} \times \mathcal{C}(\tilde{f})$ tal que

$$G'(\tilde{s})[r] = [g_u, g_v, g_w].$$

Entonces, para un punto fijo $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}] \in S_{ad}$, dado $[g_u, g_v, g_w] \in \mathbb{Y}$, ya que $0 \in \mathcal{C}(\tilde{f}) = \{\delta(f - \tilde{f}) : \delta \geq 0, f \in \mathcal{F}\}$, es suficiente probar la existencia de $[U, V, W] \in \widehat{X} \times \widehat{X}_2 \times \widehat{X}_{10/3}$ que resuelva el siguiente problema lineal, para toda $\phi \in L^2(H^1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \langle \partial_t U, \phi \rangle_{(H^1)'} + \int_0^T \int_{\Omega} (d_u \nabla U + \chi U \nabla \tilde{w} + \chi \tilde{u} \nabla W) \cdot \nabla \phi \\ \quad + \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (2\tilde{u}U + a_1 \tilde{u}V + a_1 U \tilde{v} - U) \phi = \int_0^T \langle g_u, \phi \rangle_{(H^1)'}, \\ \partial_t V - d_v \Delta V - \mu_2 V + 2\mu_2 \tilde{v}V + \mu_2 a_2 \tilde{u}V + \mu_2 a_2 U \tilde{v} = g_v, \\ \partial_t W - d_w \Delta W - \alpha V + \lambda W - \tilde{f} 1_{\Omega_c} W = g_w. \end{array} \right. \quad (40)$$

Teorema 3.9 Si $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}] \in S_{ad}$, entonces \tilde{s} es un punto regular.

Demostración: Como ya se dijo, basta con demostrar la existencia de la solución de (40). Para ello, de nuevo, se utilizará el teorema de punto fijo de Leray-Schauder. Se considera el operador

$$\begin{aligned} \Gamma : L^{5/2}(Q) \times X \times X_w &\longrightarrow \widehat{X} \times \widehat{X}_2 \times \widehat{X}_{10/3} \\ [\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}] &\longrightarrow [U, V, W], \end{aligned}$$

donde $[U, V, W]$ es la única solución del problema lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \langle \partial_t U, \phi \rangle_{(H^1)'} + \int_0^T \int_{\Omega} (d_u \nabla U + \chi \tilde{u} \nabla W) \cdot \nabla \phi = \int_0^T \langle g_u, \phi \rangle_{(H^1)'} - \chi \int_0^T \int_{\Omega} \overline{U} \nabla \tilde{w} \cdot \nabla \phi \\ \quad - \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (2\tilde{u} \overline{U} + a_1 \tilde{u} \overline{V} + a_1 \overline{U} \tilde{v} - \overline{U}) \phi, \\ \partial_t V - d_v \Delta V - \mu_2 V = g_v - \mu_2 (a_2 \overline{U} \tilde{v} + 2\tilde{v} \overline{V} + a_2 \tilde{u} \overline{V}) \quad \text{en } Q, \\ \partial_t W - d_w \Delta W + \lambda W = g_w + \alpha \overline{V} + \tilde{f} 1_{\Omega_c} \overline{W} \quad \text{en } Q, \end{array} \right. \quad (41)$$

para toda $\phi \in L^2(H^1)$. La prueba se divide en los siguientes 4 pasos.

Paso 1: Γ está bien definido.

En primer lugar, por hipótesis $g_w \in L^{10/3}(Q)$ y $\overline{V} \in X \hookrightarrow L^{10/3}(Q)$. Ahora, puesto que $\tilde{f} \in L^{(10/3)+}(Q)$ y $\overline{W} \in X_w \hookrightarrow L^\infty(L^{\infty-})$, entonces $\tilde{f} 1_{\Omega_c} \overline{W} \in L^{10/3}(Q)$. Por ende, aplicando el Teorema 1.1, con $p = 10/3$, se deduce la existencia de una única solución $W \in X_{10/3}$ de (41)₃, que satisface la siguiente estimación:

$$\|W\|_{X_{10/3}} \leq \mathcal{K} \left(\|\overline{V}\|_X, \|\tilde{f}\|_{L^{(10/3)+}(Q_c)}, \|\overline{W}\|_{X_w}, \|g_w\|_{L^{10/3}(Q)} \right). \quad (42)$$

Ahora, ya que $g_v \in L^2(Q)$, $\tilde{u}, \tilde{v} \in X_{5/3} \hookrightarrow L^5(Q)$, $\bar{U} \in L^{5/2}(Q)$ y $\bar{V} \in X \hookrightarrow L^{10/3}(Q)$, tenemos que $a_2 \bar{U} \tilde{v} + 2\tilde{v} \bar{V} + a_2 \tilde{u} \bar{V} \in L^2(Q)$. Entonces, usando el Teorema 1.1, para $p = 2$, se concluye la existencia de una única $V \in X_2$ solución de $(41)_2$, la cual satisface

$$\|V\|_{X_2} \leq \mathcal{K} \left(\|\bar{U}\|_{L^{5/2}(Q)}, \|\tilde{v}\|_{X_{5/3}}, \|\bar{V}\|_X, \|\tilde{u}\|_{X_{5/3}}, \|g_v\|_{L^2(Q)} \right). \quad (43)$$

Finalmente, se debe mostrar que $\|U\|_X \leq \mathcal{K}$, para ello, tomando $\phi = U$ en $(41)_1$ y aplicando las desigualdades de Hölder, Young y Gagliardo-Nirenberg, se sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_{L^2}^2 + d_u \|\nabla U\|_{L^2}^2 &\leq \chi \|\tilde{u}\|_{L^4} \|\nabla W\|_{L^4} \|\nabla U\|_{L^2} + \chi \|\bar{U}\|_{L^{5/2}} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^{10}} \|\nabla U\|_{L^2} + \|g_u\|_{(H^1)'} \|U\|_{H^1} \\ &\quad + \mu_1 (2\|\tilde{u}\|_{L^4} \|\bar{U}\|_{L^2} + a_1 \|\tilde{v}\|_{L^4} \|\bar{U}\|_{L^2}) \|U\|_{L^4} + (a_1 \mu_1 \|\tilde{u}\|_{L^5} \|\bar{V}\|_{L^{10/3}} + \mu_1 \|\bar{U}\|_{L^2}) \|U\|_{L^2} \\ &\leq \frac{d_u}{4} \|\nabla U\|_{L^2}^2 + \chi \mathcal{K} (\|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\nabla W\|_{L^4}^2 + \|\bar{U}\|_{L^{5/2}}^2 \|\nabla \tilde{w}\|_{L^{10}}^2) + a_1 \mu_1 \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^5}^2 \|\bar{V}\|_{L^{10/3}}^2 + \mu_1 \mathcal{K} \|\bar{U}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \mathcal{K} \|U\|_{L^2}^2 + \mu_1 (2\|\tilde{u}\|_{L^4} \|\bar{U}\|_{L^2} + a_1 \|\tilde{v}\|_{L^4} \|\bar{U}\|_{L^2}) \left(\|U\|_{L^2}^{1/4} \|\nabla U\|_{L^2}^{3/4} + \|U\|_{L^2} \right) + \|g_u\|_{(H^1)'} \|U\|_{H^1} \\ &\leq \frac{d_u}{2} \|\nabla U\|_{L^2}^2 + \chi \mathcal{K} (\|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\nabla W\|_{L^4}^2 + \|\bar{U}\|_{L^{5/2}}^2 \|\nabla \tilde{w}\|_{L^{10}}^2) + a_1 \mu_1 \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^5}^2 \|\bar{V}\|_{L^{10/3}}^2 + \mu_1 \mathcal{K} \|\bar{U}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \mathcal{K} \|U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|g_u\|_{(H^1)'}^2 + \mu_1 \mathcal{K} \left(2\|\tilde{u}\|_{L^4}^{8/5} \|\bar{U}\|_{L^2}^{8/5} + a_1 \|\tilde{v}\|_{L^4}^{8/5} \|\bar{U}\|_{L^2}^{8/5} \right) \|U\|_{L^2}^{2/5} \\ &\quad + \mu_1 \mathcal{K} (2\|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\bar{U}\|_{L^2}^2 + a_1 \|\tilde{v}\|_{L^4}^2 \|\bar{U}\|_{L^2}^2), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_{L^2}^2 + \frac{d_u}{2} \|\nabla U\|_{L^2}^2 &\leq \chi \mathcal{K} (\|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\nabla W\|_{L^4}^2 + \|\bar{U}\|_{L^{5/2}}^2 \|\nabla \tilde{w}\|_{L^{10}}^2) + a_1 \mu_1 \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^5}^2 \|\bar{V}\|_{L^{10/3}}^2 \\ &\quad + \mu_1 \mathcal{K} \|\bar{U}\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|g_u\|_{(H^1)'}^2 + \mu_1 \mathcal{K} \left(2\|\tilde{u}\|_{L^4}^{8/5} \|\bar{U}\|_{L^2}^{8/5} + a_1 \|\tilde{v}\|_{L^4}^{8/5} \|\bar{U}\|_{L^2}^{8/5} \right) \|U\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \mu_1 \mathcal{K} (2\|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\bar{U}\|_{L^2}^2 + a_1 \|\tilde{v}\|_{L^4}^2 \|\bar{U}\|_{L^2}^2), \end{aligned} \quad (44)$$

por tanto, a partir de la desigualdad de Gronwall, esto implica que U está acotada en X , es decir

$$\|U\|_X \leq \mathcal{K} \left(\|\bar{U}\|_{L^{5/2}(Q)}, \|\bar{V}\|_X, \|\tilde{u}\|_{X_{5/3}}, \|\tilde{v}\|_{X_{5/3}}, \|\tilde{w}\|_{X_w}, \|W\|_{X_{10/3}}, \|g_u\|_{L^2((H^1)')} \right). \quad (45)$$

Por lo tanto, Γ está bien definido. Observe que el operador Γ es compacto ya que que $X \times X_2 \times X_{10/3} \xrightarrow{c} L^{5/2}(Q) \times X \times X_w$.

Paso 2: El conjunto de puntos fijos de $\beta\Gamma$, $\beta \in [0, 1]$ es acotado en $L^{5/2}(Q) \times X \times X_w$.

Se considera que $\beta \in (0, 1]$ (el caso $\beta = 0$ es claro). Suponga que $[U, V, W] = \beta\Gamma([U, V, W])$,

entonces $[U, V, W]$ satisface el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \langle \partial_t U, \phi \rangle_{(H^1)'} + \int_0^T \int_{\Omega} (d_u \nabla U + \chi \tilde{u} \nabla W) \cdot \nabla \phi = \beta \int_0^T \langle g_u, \phi \rangle_{(H^1)'} - \beta \chi \int_0^T \int_{\Omega} U \nabla \tilde{w} \cdot \nabla \phi \\ \quad - \beta \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (2\tilde{u}U + a_1 \tilde{u}V + a_1 U \tilde{v} - U) \phi, \\ \partial_t V - d_v \Delta V - \mu_2 V = \beta g_v - \beta \mu_2 (a_2 U \tilde{v} + 2\tilde{v}V + a_2 \tilde{u}V), \\ \partial_t W - d_w \Delta W + \lambda W = \beta g_w + \beta \alpha V + \beta W \tilde{f} 1_{\Omega_c}, \end{array} \right. \quad (46)$$

para toda $\phi \in L^2(H^1)$. En primer lugar, multiplicando la ecuación (46)₃ por W , y haciendo uso de las desigualdades de Hölder, Young y Gagliardo-Nirenberg, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W\|_{L^2}^2 + d_w \|\nabla W\|_{L^2}^2 + \lambda \|W\|_{L^2}^2 &= \beta \int_{\Omega} g_w W + \beta \alpha \int_{\Omega} V W + \beta \int_{\Omega} \tilde{f} 1_{\Omega_c} W^2 \\
&\leq \|g_w\|_{L^2} \|W\|_{L^2} + \alpha \|V\|_{L^2} \|W\|_{L^2} + \|\tilde{f}\|_{L^3} \|W\|_{L^3}^2 \\
&\leq \mathcal{K} (\|g_w\|_{L^2}^2 + \|V\|_{L^2}^2) + \frac{\lambda}{2} \|W\|_{L^2}^2 + \|\tilde{f}\|_{L^3} (\|W\|_{L^2} \|\nabla W\|_{L^2} + \|W\|_{L^2}^2) \\
&\leq \mathcal{K} (\|g_w\|_{L^2}^2 + \|V\|_{L^2}^2) + \frac{\lambda}{2} \|W\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{2} \|\nabla W\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} (\|\tilde{f}\|_{L^3}^2 + \|\tilde{f}\|_{L^3}) \|W\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{2} \|\nabla W\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|W\|_{L^2}^2 \leq \mathcal{K} (\|g_w\|_{L^2}^2 + \|V\|_{L^2}^2) + \mathcal{K} (\|\tilde{f}\|_{L^3}^2 + \|\tilde{f}\|_{L^3}) \|W\|_{L^2}^2. \quad (47)$$

Así mismo, multiplicando la ecuación (46)₃ por $-\Delta W$, se deduce que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla W\|_{L^2}^2 + \frac{3d_w}{4} \|\Delta W\|_{L^2}^2 + \lambda \|\nabla W\|_{L^2}^2 \leq \mathcal{K} \|\tilde{f}\|_{L^3}^2 (\|W\|_{L^2}^2 + \|\nabla W\|_{L^2}^2) + \mathcal{K} (\|g_w\|_{L^2}^2 + \|V\|_{L^2}^2).$$

De manera análoga, multiplicando (46)₂ por V , se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V\|_{L^2}^2 + d_v \|\nabla V\|_{L^2}^2 &= \beta \int_{\Omega} g_v V + \mu_2 \|V\|_{L^2}^2 - \beta \mu_2 \int_{\Omega} (2\tilde{v} + a_2 \tilde{u}) V^2 - \beta \mu_2 a_2 \int_{\Omega} U \tilde{v} V \\
&\leq \mathcal{K} \|g_v\|_{L^2} \|V\|_{L^2} + \mu_2 \|V\|_{L^2}^2 + \mu_2 a_2 \|U\|_{L^2} \|\tilde{v}\|_{L^3} \|V\|_{L^6} \\
&\leq \mathcal{K} \|g_v\|_{L^2} \|V\|_{L^2} + \mu_2 \|V\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|U\|_{L^2} \|\tilde{v}\|_{L^3} (\|\nabla V\|_{L^2} + \|V\|_{L^2}) \\
&\leq \mathcal{K} \|g_v\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|V\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\tilde{v}\|_{L^3}^2 \|U\|_{L^2}^2 + \frac{d_v}{2} \|\nabla V\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

esto es,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V\|_{L^2}^2 + \frac{d_v}{2} \|\nabla V\|_{L^2}^2 \leq \mathcal{K} \|g_v\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|V\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\tilde{v}\|_{L^3}^2 \|U\|_{L^2}^2. \quad (48)$$

Por otro lado, multiplicando la ecuación (46)₁ por U , se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_{L^2}^2 + d_u \|\nabla U\|_{L^2}^2 &= \beta \int_0^T \langle g_u, U \rangle_{(H^1)'} - \chi \int_{\Omega} \tilde{u} \nabla W \cdot \nabla U - \beta \chi \int_{\Omega} U \nabla \tilde{w} \cdot \nabla U + \beta \mu_1 \|U\|_{L^2}^2 \\
&\quad - \beta \mu_1 \int_{\Omega} (a_1 \tilde{v} + 2\tilde{u}) U^2 - \beta \mu_1 a_1 \int_{\Omega} \tilde{u} V U \\
&\leq \mathcal{K} \|g_u\|_{(H^1)'} \|U\|_{H^1} + \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^5} \|\nabla W\|_{L^{10/3}} \|\nabla U\|_{L^2} + \mathcal{K} \|U\|_{L^4} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\nabla U\|_{L^2} \\
&\quad + \mathcal{K} \|U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^3} \|V\|_{L^2} \|U\|_{L^6},
\end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_{L^2}^2 + d_u \|\nabla U\|_{L^2}^2 &\leq \mathcal{K} \|g_u\|_{(H^1)'}^2 + \mathcal{K} (\|\nabla U\|_{L^2}^2 + \|U\|_{L^2}^2) \\
&\quad + \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^5}^2 \|\nabla W\|_{L^{10/3}}^2 + \frac{d_u}{4} \|\nabla U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 (\|U\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla U\|_{L^2}^{3/2} + \|U\|_{L^2}^2) \\
&\quad \mathcal{K} (\|U\|_{L^2} \|\nabla U\|_{L^2} + \|U\|_{L^2}^2) + \mathcal{K} \|U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^3} \|V\|_{L^2} (\|\nabla U\|_{L^2} + \|U\|_{L^2}) \\
&\leq \mathcal{K} \|g_u\|_{(H^1)'}^2 + \mathcal{K} \|U\|_{L^2}^2 + \frac{d_u}{2} \|\nabla U\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{4} \|\Delta W\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^5}^5 \|\nabla W\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \mathcal{K} (\|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^8) \|U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^3}^2 \|V\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Entonces, se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_{L^2}^2 + \frac{d_u}{2} \|\nabla U\|_{L^2}^2 &\leq \mathcal{K} \|g_u\|_{(H^1)'}^2 + \mathcal{K} \|U\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{4} \|\Delta W\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^5}^5 \|\nabla W\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \mathcal{K} (\|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^8) \|U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^3}^2 \|V\|_{L^2}^2. \tag{49}
\end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones (47)-(49), se puede concluir

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|U\|_{L^2}^2 + \|V\|_{L^2}^2 + \|W\|_{L^2}^2 + \|\nabla W\|_{L^2}^2) + \frac{d_u}{2} \|\nabla U\|_{L^2}^2 + \frac{d_v}{2} \|\nabla V\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{2} \|\Delta W\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{2} \|\nabla W\|_{L^2}^2 \\
& + \frac{\lambda}{2} \|W\|_{L^2}^2 \leq \mathcal{K} (\|\tilde{f}\|_{L^3}^2 + \|\tilde{f}\|_{L^3}) (\|W\|_{L^2}^2 + \|\nabla W\|_{L^2}^2) + \mathcal{K} (\|\tilde{u}\|_{L^3}^2 + 1) \|V\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^5}^5 \|\nabla W\|_{L^2}^2 \\
& + \mathcal{K} (\|\tilde{v}\|_{L^3}^2 + 1) \|U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} (\|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^8) \|U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \left(\|g_u\|_{(H^1)',} \|g_v\|_{L^2}, \|g_w\|_{L^2} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}] \in X_{5/3} \times X_2 \times X_{10/3}$ y $[g_u, g_v, g_w] \in L^2((H^1)') \times L^2(Q) \times L^{10/3}(Q)$, aplicando la desigualdad de Gronwall se deduce lo siguiente

$$\|[U, V, W]\|_{X \times X \times X} \leq \mathcal{K},$$

y además, W es acotada en $L^\infty(H^1) \cap L^2(H^2) \hookrightarrow L^{10}(Q)$. Entonces, puesto que $f \in L^{(10/3)+}(Q_c)$, se tiene que $f 1_{\Omega_c} W \in L^{5/2}(Q)$. En consecuencia, aplicando el Teorema de regularidad parabólica, $W \in C(W^{6/5, 5/2}) \cap L^{5/2}(W^{2, 5/2}) \hookrightarrow L^\infty(L^{\infty-})$. Con la última regularidad de W se obtiene que $f 1_{\Omega_c} W \in L^{10/3}(Q)$, lo cual implica, usando el Teorema 1.1, que W está acotada en $X_{10/3} \hookrightarrow X_w$.

Paso 3: Γ es continuo.

Sea $\{[\bar{U}_m, \bar{V}_m, \bar{W}_m]\}_{m \in \mathbb{N}} \subset L^{5/2}(Q) \times X \times X_w$ una sucesión que converge fuerte a $[\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}]$ en $L^{5/2}(Q) \times X \times X_w$. En particular, tenemos que $\{[\bar{U}_m, \bar{V}_m, \bar{W}_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$ es acotada en $L^{5/2}(Q) \times X \times X_w$, y a partir de (42)-(45), se sigue que

$$\{[U_m, V_m, W_m]\}_{m \in \mathbb{N}} = \{\Gamma[\bar{U}_m, \bar{V}_m, \bar{W}_m]\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ es acotada en } X \times X_2 \times X_{10/3}.$$

Entonces, existe una subsucesión, también denotada por $\{[U_m, V_m, W_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$, y un vector límite $[\widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{W}] \in X \times X_2 \times X_{10/3}$ tales que

$$[U_m, V_m, W_m] \longrightarrow [\widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{W}], \text{ débil en } X \times X_2 \times X_{10/3} \text{ y fuerte en } L^{5/2}(Q) \times X \times X_w. \quad (50)$$

De la definición del operador Γ , para toda $m \in \mathbb{N}$, $[U_m, V_m, W_m]$ es la única solución del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \langle \partial_t U_m, \phi \rangle_{(H^1)'} + \int_0^T \int_{\Omega} (d_u \nabla U_m + \chi \tilde{u} \nabla W_m) \cdot \nabla \phi = \int_0^T \langle g_u, \phi \rangle_{(H^1)'} - \chi \int_0^T \int_{\Omega} \bar{U}_m \nabla \tilde{w} \cdot \nabla \phi \\ \quad + \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (2\tilde{u} \bar{U}_m + a_1 \tilde{u} \bar{V}_m + a_1 \bar{U}_m \tilde{v} - \bar{U}_m) \phi, \\ \partial_t V_m - d_v \Delta V_m - \mu_2 V_m = g_v - \mu_2 a_2 \bar{U}_m \tilde{v} - 2\mu_2 \tilde{v} \bar{V}_m - \mu_2 a_2 \tilde{u} \bar{V}_m, \\ \partial_t W_m - d_w \Delta W_m + \alpha W_m = g_w + \lambda \bar{V}_m + \tilde{f} 1_{\Omega_c} \bar{W}_m + F 1_{\Omega_c} \tilde{w}, \end{array} \right. \quad (51)$$

para toda $\phi \in L^2(H^1)$. Teniendo en cuenta las siguientes convergencias

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{U}_m \longrightarrow \bar{U} \text{ fuerte en } L^{5/2}(Q), \\ \bar{V}_m \longrightarrow \bar{V} \text{ fuerte en } L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1), \\ \bar{W}_m \longrightarrow \bar{W} \text{ fuerte en } L^\infty(W^{1,3}) \cap L^3(W^{3/2,3}), \end{array} \right. \quad (52)$$

se obtiene que

$$a_1 \tilde{u} \bar{V}_m - 2\tilde{u} \bar{U}_m - a_1 \bar{U}_m \tilde{v} + \nabla \cdot (\bar{U}_m \nabla \tilde{w}) \longrightarrow a_1 \tilde{u} \bar{V} - 2\tilde{u} \bar{U} - a_1 \bar{U} \tilde{v} + \nabla \cdot (\bar{U} \nabla \tilde{w}) \text{ débil en } L^{5/3}(Q),$$

$$\lambda \bar{V}_m + \tilde{f} \bar{W}_m + F \tilde{w} \longrightarrow \lambda \bar{V} + \tilde{f} \bar{W} + F \tilde{w} \text{ débil en } L^{10/3}(Q).$$

Por otro lado, la sucesión $\{[U_m, V_m, W_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $[\widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{W}]$ débil en $X \times X_2 \times X_{10/3}$. Así

$$\begin{aligned}
& \gamma_u \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{u} - u_d) U + \gamma_v \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{v} - v_d) V + \gamma_w \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{w} - w_d) W + \gamma_f \int_0^T \int_{\Omega_c} \text{sgn}(\tilde{f}) |\tilde{f}|^{(7/3)+} F \\
& + \beta_1 \int_{\Omega} (\tilde{u}(T) - u_T) U(T) + \beta_2 \int_{\Omega} (\tilde{v}(T) - v_T) V(T) + \beta_3 \int_{\Omega} (\tilde{w}(T) - w_T) W(T) \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t W - d_w \Delta W - \alpha V + \lambda W - W \tilde{f} 1_{\Omega_c} + \tilde{w} F 1_{\Omega_c}) \xi \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - d_v \Delta V - \mu_2 V + 2\mu_2 \tilde{v} V + \mu_2 a_2 \tilde{u} V + \mu_2 a_2 U \tilde{v}) \eta - \int_{\Omega} \langle \partial_t U, \sigma \rangle_{(H^1)'} \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} (d_u \nabla U + \chi U \nabla \tilde{w} + \chi \tilde{u} \nabla W) \cdot \nabla \sigma - \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (2\tilde{u} U + a_1 \tilde{u} V + a_1 U \tilde{v} - U) \sigma \geq 0. \quad (54)
\end{aligned}$$

Demostración: En virtud del Teorema 3.9, $\tilde{s} \in S_{ad}$ es un punto regular. Entonces, usando el Teorema 3.6, existe un multiplicador de Lagrange $\zeta = [\sigma, \eta, \xi] \in L^2(H^1) \times L^2(Q) \times L^{10/7}(Q)$ del problema (5), el cual, de acuerdo a la Definición 3.4, satisface

$$\mathcal{L}'_s([\tilde{s}, \sigma, \eta, \xi])[r] := J'(\tilde{s})[r] - \langle \sigma, G'_1(\tilde{s})[r] \rangle_{L^2((H^1)')} - \langle \eta, G'_2(\tilde{s})[r] \rangle_{L^2} - \langle \xi, G'_3(\tilde{s})[r] \rangle_{L^{10/7}} \geq 0,$$

para toda $r = [U, V, W, F] \in \widehat{X} \times \widehat{X}_2 \times \widehat{X}_{10/3} \times \mathcal{C}(\tilde{f})$. A partir de ahí, se concluye la demostración recordando las expresiones de las derivadas de J, G_1, G_2 y G_3 . \square

Como consecuencia del Teorema 3.10 es posible derivar un sistema de optimalidad. Este es el contenido del siguiente resultado.

Corolario 3.11 *Sea $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución óptima local para el problema de control (5). Entonces el multiplicador de Lagrange $[\sigma, \eta, \xi] \in L^2(H^1) \times L^2(Q) \times L^{10/7}(Q)$, el cual provie-*

ne del Teorema 3.10, satisface el siguiente sistema para toda $[U, V, W] \in \widehat{X} \times \widehat{X}_2 \times \widehat{X}_{10/3}$:

$$\begin{aligned} \gamma_u \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{u} - u_d) U + \beta_1 \int_{\Omega} (\tilde{u}(T) - u_T) U(T) &= \int_0^T \langle \partial_t U, \sigma \rangle_{(H^1)'} + \int_0^T \int_{\Omega} (d_u \nabla U + \chi U \nabla \tilde{w}) \cdot \nabla \sigma \\ &+ \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (2\tilde{u}U + a_1 U \tilde{v} - U) \sigma + \mu_2 a_2 \int_0^T \int_{\Omega} U \tilde{v} \eta, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \gamma_v \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{v} - v_d) V + \beta_2 \int_{\Omega} (\tilde{v}(T) - v_T) V(T) &= \int_0^T \int_{\Omega} \mu_1 a_1 \tilde{u} V \sigma - \int_0^T \int_{\Omega} \alpha V \xi \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - d_v \Delta V - \mu_2 V + 2\mu_2 \tilde{v} V + \mu_2 a_2 \tilde{u} V) \eta, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \gamma_w \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{w} - w_d) W + \beta_3 \int_{\Omega} (\tilde{w}(T) - w_T) W(T) &= \chi \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{u} \nabla W \cdot \nabla \sigma \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t W - d_w \Delta W + \lambda W - \tilde{f} 1_{\Omega_c} W) \xi, \end{aligned} \quad (57)$$

y la condición de optimalidad

$$\int_0^T \int_{\Omega_c} (\gamma_f \operatorname{sgn}(\tilde{f}) |\tilde{f}|^{(7/3)+} + \tilde{w} \xi) (f - \tilde{f}) \geq 0, \quad \forall \tilde{f} \in \mathcal{F}. \quad (58)$$

Demostración: Del Teorema 3.10, tomando $[V, W, F] = [0, 0, 0]$ en (54) y notando que \widehat{X} es un espacio vectorial, obtenemos (55). Análogamente, escogiendo $[U, W, F] = [0, 0, 0]$ y $[U, V, F] = [0, 0, 0]$ se deducen (56) y (57), respectivamente. Finalmente, tomado $[U, V, W] = [0, 0, 0]$, se obtiene que

$$\gamma_f \int_0^T \int_{\Omega_c} \operatorname{sgn}(\tilde{f}) |\tilde{f}|^{(7/3)+} F + \int_0^T \int_{\Omega_c} F \tilde{w} \xi \geq 0, \quad \forall F \in \mathcal{C}(\tilde{f}).$$

Entonces, tomando $F = \delta(f - \tilde{f}) \in \mathcal{C}(\tilde{f})$ para toda $f \in \mathcal{F}$ y $\delta \geq 0$ en la última desigualdad, se deduce (58). \square

3.2.2. Caso $N = 2$. A continuación se analizará la existencia y regularidad de los multiplicadores de Lagrange para el problema de control óptimo (5) para $N = 2$. Para ello, se consideran los siguientes espacios de Banach:

$$\mathbb{X} := \widehat{X} \times \widehat{X}_{2+} \times \widehat{X}_{2+} \times L^{2+}(Q_c), \quad \mathbb{Y} := L^2((H^1)') \times L^{2+}(Q) \times L^{2+}(Q),$$

donde

$$\widehat{X} := \left\{ u \in X : u(0) = 0 \right\}, \quad \widehat{X}_2 := \left\{ v \in X_{2+} : v(0) = 0, \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \right\}.$$

Se considera $G = [G_1, G_2, G_3] : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$, donde, en cada punto $s = [u, v, w, f] \in \mathbb{X}$, G_1, G_2, G_3 son definidos por

$$\langle G_1(s), \phi \rangle = \int_0^T \langle \partial_t u, \phi \rangle_{(H^1)'} + d_u \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi + \chi \int_0^T \int_{\Omega} u \nabla w \cdot \nabla \phi + \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} u(1 - u - a_1 v) \phi,$$

$$G_2(s) = \partial_t v - d_v \Delta v - \mu_2 v(1 - v - a_2 u),$$

$$G_3(s) = \partial_t w - d_w \Delta w - \alpha v + \lambda w - f 1_{\Omega_c} w,$$

para toda $\phi \in L^2(H^1)$. El lagrangiano asociado al problema de control óptimo (5) (para $N = 2$) está dado por $\mathcal{L} : \mathbb{X} \times L^2(H^1) \times L^{2-}(Q) \times L^{2-}(Q) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{L}([s, \sigma, \eta, \xi]) := J(s) - \langle \sigma, G_1(s) \rangle_{L^2((H^1)')} - \langle \eta, G_2(s) \rangle_{L^{2-}} - \langle \xi, G_3(s) \rangle_{L^{2-}}.$$

ya que $a_2\bar{U}\tilde{v} + 2\tilde{v}\bar{V} + a_2\tilde{u}\bar{V} \in L^{2+}(Q)$, existe una solución única $V \in X_{2+}$ de (59)₂. Finalmente,

tomando $\phi = U$ en la ecuación (59)₁, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_{L^2}^2 + d_u \|\nabla U\|_{L^2}^2 \leq \chi \|\tilde{u}\|_{L^4} \|\nabla W\|_{L^4} \|\nabla U\|_{L^2} + \chi \|U\|_{L^4} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\nabla U\|_{L^2} \\
& \quad + \mu_1 (2\|\tilde{u}\|_{L^{4+}} \|\bar{U}\|_{L^{4-}} + a_1 \|\tilde{u}\|_{L^4} \|\bar{V}\|_{L^4} + a_1 \|\tilde{v}\|_{L^{4+}} \|\bar{U}\|_{L^{4-}} + \mu_1 \|U\|_{L^2}) \|U\|_{L^2} + \|g_u\|_{(H^1)'} \|U\|_{H^1} \\
& \leq \chi \|\tilde{u}\|_{L^4} \|\nabla W\|_{L^4} \|\nabla U\|_{L^2} + \chi \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\nabla U\|_{L^2} \left(\|U\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla U\|_{L^2}^{1/2} + \|U\|_{L^2} \right) \\
& \quad + \mathcal{K} \left(\|g_u\|_{(H^1)'}^2 + (\|\tilde{u}\|_{L^{4+}}^2 + \|\tilde{v}\|_{L^{4+}}^2) (\|\bar{U}\|_{L^{4-}}^2 + \|\bar{V}\|_{L^4}^2) \right) + \frac{d_u}{4} \|\nabla U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|U\|_{L^2}^2 \\
& \leq \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\nabla W\|_{L^4}^2 + \mathcal{K} (\|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 + 1) \|U\|_{L^2}^2 + \frac{d_u}{2} \|\nabla U\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \mathcal{K} \left(\|g_u\|_{(H^1)'}^2 + (\|\tilde{u}\|_{L^{4+}}^2 + \|\tilde{v}\|_{L^{4+}}^2) (\|\bar{U}\|_{L^{4-}}^2 + \|\bar{V}\|_{L^4}^2) \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_{L^2}^2 + \frac{d_u}{2} \|\nabla U\|_{L^2}^2 \leq \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\nabla W\|_{L^4}^2 + \mathcal{K} (\|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 + 1) \|U\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \mathcal{K} \left(\|g_u\|_{(H^1)'}^2 + (\|\tilde{u}\|_{L^{4+}}^2 + \|\tilde{v}\|_{L^{4+}}^2) (\|\bar{U}\|_{L^{4-}}^2 + \|\bar{V}\|_{L^4}^2) \right),
\end{aligned}$$

lo cual, a partir de la desigualdad de Gronwall, implica que U está acotada en X . Por tanto, Γ está

bien definida. La compacidad se desprende de la inmersión compacta $\widehat{X} \times \widehat{X}_{2+} \times \widehat{X}_{2+} \xrightarrow{c} L^{4-}(Q) \times$

$L^\infty(Q) \times L^\infty(Q)$, y la continuidad de Γ se deduce de forma análoga al caso 3D.

Paso 2: El conjunto de puntos fijos de $\beta\Gamma$, $\beta \in [0, 1]$ es acotado en $X \times X_{2+} \times X_{2+}$.

Note que si $[U, V, W] = \beta\Gamma([U, V, W])$, entonces $[U, V, W]$ satisface el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \langle \partial_t U, \phi \rangle_{(H^1)'} + \int_0^T \int_{\Omega} (d_u \nabla U + \chi \tilde{u} \nabla W + \chi U \nabla \tilde{w}) \cdot \nabla \phi = \beta \int_0^T \langle g_u, \phi \rangle_{(H^1)'} \\ \quad - \beta \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (2\tilde{u}U + a_1 \tilde{u}V + a_1 U \tilde{v} - U)\phi, \\ \partial_t V - d_v \Delta V - \mu_2 V = \beta g_v - \beta \mu_2 (a_2 U \tilde{v} + 2\tilde{v}V + a_2 \tilde{u}V), \\ \partial_t W - d_w \Delta W + \lambda W = \beta g_w + \beta \alpha V + \beta \tilde{f} 1_{\Omega_c} W, \end{array} \right. \quad (60)$$

para toda $\phi \in L^2(H^1)$. Multiplicando la ecuación (60)₃ por W , se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W\|_{L^2}^2 + d_w \|\nabla W\|_{L^2}^2 + \lambda \|W\|_{L^2}^2 &= \beta \int_{\Omega} g_w W + \beta \alpha \int_{\Omega} V W + \beta \int_{\Omega} \tilde{f} 1_{\Omega_c} W^2 \\ &\leq \|g_w\|_{L^2} \|W\|_{L^2} + \alpha \|V\|_{L^2} \|W\|_{L^2} + \|\tilde{f}\|_{L^2} \|W\|_{L^4}^2 \\ &\leq \mathcal{K} (\|g_w\|_{L^2}^2 + \|V\|_{L^2}^2) + \frac{\lambda}{2} \|W\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\tilde{f}\|_{L^2} (\|W\|_{L^2} \|\nabla W\|_{L^2} + \|W\|_{L^2}^2) \\ &\leq \mathcal{K} (\|g_w\|_{L^2}^2 + \|V\|_{L^2}^2) + \frac{\lambda}{2} \|W\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{2} \|\nabla W\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} (\|\tilde{f}\|_{L^2}^2 + \|\tilde{f}\|_{L^2}) \|W\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Por ende, se tiene la siguiente estimación

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W\|_{L^2}^2 + \frac{d_w}{2} \|\nabla W\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|W\|_{L^2}^2 \leq \mathcal{K} (\|g_w\|_{L^2}^2 + \|V\|_{L^2}^2) + \mathcal{K} (\|\tilde{f}\|_{L^2}^2 + \|\tilde{f}\|_{L^2}) \|W\|_{L^2}^2. \quad (61)$$

Multiplicando la ecuación (60)₃ por $-\Delta W$, se sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla W\|_{L^2}^2 + d_w \|\Delta W\|_{L^2}^2 + \lambda \|\nabla W\|_{L^2}^2 &= -\beta \int_{\Omega} g_w \Delta W - \beta \alpha \int_{\Omega} V \Delta W - \beta \int_{\Omega} \tilde{f} 1_{\Omega_c} W \Delta W \\ &\leq \|g_w\|_{L^2} \|\Delta W\|_{L^2} + \alpha \|V\|_{L^2} \|\Delta W\|_{L^2} + \|\tilde{f}\|_{L^2} \|W\|_{L^\infty} \|\Delta W\|_{L^2} \\ &\leq \frac{d_w}{2} \|\Delta W\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|V\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\tilde{f}\|_{L^2}^2 \|W\|_{H^1}^2 + \mathcal{K} \|g_w\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (62)$$

Entonces, a partir de (61)-(62) se sigue que

$$\frac{d}{dt} \|W\|_{H^1}^2 + \|W\|_{H^2}^2 \leq \mathcal{K} (\|g_w\|_{L^2}^2 + \|V\|_{L^2}^2) + \mathcal{K} (\|\tilde{f}\|_{L^{2+}}^2 + \|\tilde{f}\|_{L^{2+}}) \|W\|_{H^1}^2. \quad (63)$$

Ahora, multiplicando (60)₂ por V y recordando que $(2\tilde{v} + a_2\tilde{u})V^2 \geq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V\|_{L^2}^2 + d_v \|\nabla V\|_{L^2}^2 &= \beta \int_{\Omega} g_v V + \mu_2 \|V\|_{L^2}^2 - \beta \mu_2 \int_{\Omega} (2\tilde{v} + a_2\tilde{u}) V^2 - \beta \mu_2 a_2 \int_{\Omega} U \tilde{v} V \\ &\leq \|g_v\|_{L^2} \|V\|_{L^2} + \mu_2 \|V\|_{L^2}^2 + \mu_2 a_2 \|U\|_{L^2} \|\tilde{v}\|_{L^\infty} \|V\|_{L^2} \\ &\leq \mathcal{K} \|g_v\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} (\|\tilde{v}\|_{L^\infty}^2 + 1) \|V\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (64)$$

Por otra parte, tomando $\phi = U$ en (60)₁, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_{L^2}^2 + d_u \|\nabla U\|_{L^2}^2 &\leq \mathcal{X} \|\tilde{u}\|_{L^4} \|\nabla W\|_{L^4} \|\nabla U\|_{L^2} + \mathcal{X} \|U\|_{L^4} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\nabla U\|_{L^2} \\ &\quad + \|g_u\|_{(H^1)'} \|U\|_{H^1} + \mu_1 \|U\|_{L^2}^2 + \mu_1 a_1 \|\tilde{u}\|_{L^4} \|V\|_{L^2} \|U\|_{L^4} \\ &\leq \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 (\|\nabla W\|_{L^2} \|\Delta W\|_{L^2} + \|\nabla W\|_{L^2}^2) + \frac{d_u}{4} \|\nabla U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|g_u\|_{(H^1)'}^2 + \mathcal{K} \|U\|_{L^2}^2 + \\ &\quad + \mu_1 a_1 \|\tilde{u}\|_{L^4} \|V\|_{L^2} \left(\|U\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla U\|_{L^2}^{1/2} + \|U\|_{L^2} \right) + \mathcal{X} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\nabla U\|_{L^2} \left(\|U\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla U\|_{L^2}^{1/2} + \|U\|_{L^2} \right) \\ &\leq \mathcal{K} (\|\tilde{u}\|_{L^4}^4 + \|\tilde{u}\|_{L^4}^2) \|\nabla W\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\Delta W\|_{L^2}^2 + \frac{d_u}{2} \|\nabla U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^4}^{4/3} \|V\|_{L^2}^{4/3} \|U\|_{L^2}^{2/3} \\ &\quad + \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|V\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|g_u\|_{(H^1)'}^2 + \mathcal{K} (\|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 + 1) \|U\|_{L^2}^2 \\ &\leq \mathcal{K} (\|\tilde{u}\|_{L^4}^4 + \|\tilde{u}\|_{L^4}^2) \|\nabla W\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\Delta W\|_{L^2}^2 + \frac{d_u}{2} \|\nabla U\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|V\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \mathcal{K} \|g_u\|_{(H^1)'}^2 + \mathcal{K} (\|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^4 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 + 1) \|U\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (65)$$

Entonces, de (61)-(65) se tiene que $[U, V, W]$ es acotada en $X \times X \times X_2$. Aplicando la regularidad parabólica se puede concluir que $[V, W]$ está acotada en $X_{2+} \times X_{2+}$. Así, a partir del teorema del

punto fijo de Leray-Schauder, se deduce la existencia de una solución para (40). La unicidad de la solución se obtiene de manera estándar. \square

Proposición 3.13 *Sea $N = 2$ y $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución óptima local para el problema de control (5). Entonces existe un vector de multiplicadores de Lagrange $[\sigma, \eta, \xi] \in L^2(H^1) \times L^{2^-}(Q) \times L^{2^-}(Q)$ tal que para todo $[U, V, W, F] \in \widehat{X} \times \widehat{X}_{2+} \times \widehat{X}_{2+} \times \mathcal{C}(\tilde{f})$, se cumple la siguiente desigualdad, para toda $\phi \in L^2(H^1)$,*

$$\begin{aligned}
& \gamma_u \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{u} - u_d)U + \gamma_v \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{v} - v_d)V + \gamma_w \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{w} - w_d)W + \gamma_f \int_0^T \int_{\Omega_c} \text{sgn}(\tilde{f})|\tilde{f}|^{1+F} \\
& + \beta_1 \int_{\Omega} (\tilde{u}(T) - u_T)U(T) + \beta_2 \int_{\Omega} (\tilde{v}(T) - v_T)V(T) + \beta_3 \int_{\Omega} (\tilde{w}(T) - w_T)W(T) \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t W - d_w \Delta W - \alpha V + \lambda W - W \tilde{f} 1_{\Omega_c} + \tilde{w} F 1_{\Omega_c}) \xi \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - d_v \Delta V - \mu_2 V + 2\mu_2 \tilde{v} V + \mu_2 a_2 \tilde{u} V + \mu_2 a_2 U \tilde{v}) \eta - \int_0^T \langle \partial_t U, \sigma \rangle_{(H^1)'} \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} (d_u \nabla U + \chi U \nabla \tilde{w} + \chi \tilde{u} \nabla W) \cdot \nabla \sigma - \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (2\tilde{u} U + a_1 \tilde{u} V + a_1 U \tilde{v} - U) \sigma \geq 0. \quad (66)
\end{aligned}$$

Demostración: La prueba es similar a la del Teorema 3.10; por lo tanto, la omitimos. \square

Como consecuencia de la Proposición 3.13 es posible derivar un sistema de optimalidad. Este es el objetivo del siguiente resultado.

Corolario 3.14 *El multiplicador de Lagrange $[\sigma, \eta, \xi] \in L^2(H^1) \times L^{2^-}(Q) \times L^{2^-}(Q)$, dado en la Proposición 3.13, satisface el siguiente sistema para toda $U \in \widehat{X}$ y $V, W \in \widehat{X}_{2+}$:*

$$\begin{aligned}
\gamma_u \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{u} - u_d)U + \beta_1 \int_{\Omega} (\tilde{u}(T) - u_T)U(T) &= \int_0^T \langle \partial_t U, \sigma \rangle_{(H^1)'} + \mu_2 a_2 \int_0^T \int_{\Omega} U \tilde{v} \eta \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} (d_u \nabla U + \chi U \nabla \tilde{w}) \cdot \nabla \sigma + \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (2\tilde{u}U + a_1 U \tilde{v} - U) \sigma, \quad (67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_v \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{v} - v_d)V + \beta_2 \int_{\Omega} (\tilde{v}(T) - v_T)V(T) &= \int_0^T \int_{\Omega} \mu_1 a_1 \tilde{u}V \sigma - \int_0^T \int_{\Omega} \alpha V \xi \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - d_v \Delta V - \mu_2 V + 2\mu_2 \tilde{v}V + \mu_2 a_2 \tilde{u}V) \eta, \quad (68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_w \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{w} - w_d)W + \beta_3 \int_{\Omega} (\tilde{w}(T) - w_T)W(T) &= \chi \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{u} \nabla W \cdot \nabla \sigma \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t W - d_w \Delta W + \lambda W - \tilde{f} 1_{\Omega_c} W) \xi, \quad (69)
\end{aligned}$$

y la condición de optimalidad

$$\int_0^T \int_{\Omega_c} (\gamma_f \operatorname{sgn}(\tilde{f}) |\tilde{f}|^{1+} + \tilde{w} \xi)(f - \tilde{f}) \geq 0, \quad \forall \tilde{f} \in \mathcal{F}. \quad (70)$$

3.3. Regularidad de los multiplicadores

3.3.1. Caso $N = 3$. Una tripla $[\sigma, \eta, \xi] \in L^2(H^1) \times L^2(Q) \times L^{10/7}(Q)$ que satisfice

(55)-(57) corresponde al concepto de solución ultra débil del siguiente sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_t \sigma - d_u \Delta \sigma + \chi \nabla \sigma \cdot \nabla \tilde{w} - \mu_1 (\sigma - 2\tilde{u}\sigma - a_1 \tilde{v}\sigma) + \mu_2 a_2 \tilde{v}\eta = \gamma_u (\tilde{u} - u_d) \quad \text{en } Q, \\ -\partial_t \eta - d_v \Delta \eta - \mu_2 (\eta - 2\tilde{v}\eta - a_2 \tilde{u}\eta) + \mu_1 a_1 \tilde{u}\sigma - \alpha \xi = \gamma_v (\tilde{v} - v_d) \quad \text{en } Q, \\ -\partial_t \xi - d_w \Delta \xi + \lambda \xi - \tilde{f} 1_{\Omega_c} \xi - \chi \nabla \cdot (\tilde{u} \nabla \sigma) = \gamma_w (\tilde{w} - w_d) \quad \text{en } Q, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = \frac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega \times (0, T), \\ \sigma(T) = \beta_1 (\tilde{u}(T) - u_T) \quad \text{en } \Omega, \\ \eta(T) = \beta_2 (\tilde{v}(T) - v_T) \quad \text{en } \Omega, \\ \xi(T) = \beta_3 (\tilde{w}(T) - w_T) \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (71)$$

El objetivo de esta subsección es mejorar la regularidad de los multiplicadores de Lagrange que proporciona el Teorema 3.10. Para ello, en primer lugar, se demuestra que el problema adjunto (71) tiene una regularidad fuerte. Este es el contenido de la siguiente proposición.

Proposición 3.15 *Sea $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución local óptima para el problema de control (5). Entonces el problema (71) tiene una única solución $[\sigma, \eta, \xi] \in X_{5/3} \times X_{5/3} \times X_{5/4}$.*

Demostración: Sea $s = T - t$, con $t \in (0, T)$, y se consideran los cambios de variable $\hat{\sigma}(s) = \sigma(t)$,

$\widehat{\eta}(s) = \eta(t)$ y $\widehat{\xi}(s) = \xi(t)$. Entonces el sistema (71) es equivalente al siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_s \widehat{\sigma} - d_u \Delta \widehat{\sigma} + \chi \nabla \widehat{\sigma} \cdot \nabla \tilde{w} - \mu_1 (\widehat{\sigma} - 2\tilde{u}\widehat{\sigma} - a_1 \tilde{v}\widehat{\sigma}) + \mu_2 a_2 \tilde{v}\widehat{\eta} = \gamma_u (\tilde{u} - u_d) \quad \text{en } Q, \\ \partial_s \widehat{\eta} - d_v \Delta \widehat{\eta} - \mu_2 (\widehat{\eta} - 2\tilde{v}\widehat{\eta} - a_2 \tilde{u}\widehat{\eta}) + \mu_1 a_1 \tilde{u}\widehat{\sigma} - \alpha \widehat{\xi} = \gamma_v (\tilde{v} - v_d) \quad \text{en } Q, \\ \partial_s \widehat{\xi} - d_w \Delta \widehat{\xi} + \lambda \widehat{\xi} - \tilde{f} 1_{\Omega_c} \widehat{\xi} - \chi \nabla \cdot (\tilde{u} \nabla \widehat{\sigma}) = \gamma_w (\tilde{w} - w_d) \quad \text{en } Q, \\ \frac{\partial \widehat{\sigma}}{\partial \nu} = \frac{\partial \widehat{\eta}}{\partial \nu} = \frac{\partial \widehat{\xi}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega \times (0, T), \\ \widehat{\sigma}(0) = \beta_1 (\tilde{u}(T) - u_T) \quad \text{en } \Omega, \\ \widehat{\eta}(0) = \beta_2 (\tilde{v}(T) - v_T) \quad \text{en } \Omega, \\ \widehat{\xi}(0) = \beta_3 (\tilde{w}(T) - w_T) \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (72)$$

Para demostrar la existencia de una solución de (72), de nuevo usará el teorema del punto fijo de Leray-Schauder, para lo cual se define el siguiente mapeo

$$\Gamma : L^{10/3}(Q) \times L^{10/3}(Q) \times L^2(Q) \longrightarrow X_{5/3} \times X_{5/3} \times X_{5/4} \\ \left[\overline{\sigma}, \overline{\eta}, \overline{\xi} \right] \longrightarrow [\sigma, \eta, \xi],$$

donde $[\sigma, \eta, \xi]$ es la solución del siguiente problema desacoplado

$$\left\{ \begin{array}{l}
\partial_s \sigma - d_u \Delta \sigma + \chi \nabla \sigma \cdot \nabla \tilde{w} = \mu_1 (\bar{\sigma} - 2\tilde{u}\bar{\sigma} - a_1 \tilde{v}\bar{\sigma}) - \mu_2 a_2 \tilde{v}\bar{\eta} + \gamma_u (\tilde{u} - u_d) \quad \text{en } Q, \\
\partial_s \eta - d_v \Delta \eta - \mu_2 \eta = -\mu_2 (2\tilde{v}\bar{\eta} + a_2 \tilde{u}\bar{\eta}) - \mu_1 a_1 \tilde{u}\bar{\sigma} + \alpha \bar{\xi} + \gamma_v (\tilde{v} - v_d) \quad \text{en } Q, \\
\partial_s \xi - d_w \Delta \xi + \lambda \xi - \chi \nabla \cdot (\tilde{u} \nabla \sigma) = \tilde{f} 1_{\Omega_c} \bar{\xi} + \gamma_w (\tilde{w} - w_d) \quad \text{en } Q, \\
\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = \frac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega \times (0, T) \\
\sigma(0) = \beta_1 (\tilde{u}(T) - u_T) \quad \text{en } \Omega, \\
\eta(0) = \beta_2 (\tilde{v}(T) - v_T) \quad \text{en } \Omega, \\
\xi(0) = \beta_3 (\tilde{w}(T) - w_T) \quad \text{en } \Omega.
\end{array} \right. \quad (73)$$

El operador Γ está bien definido, es compacto y continuo; para ello, se inicia multiplicando la ecuación (73)₁ por σ , por ende

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|\sigma\|_{L^2}^2 + d_u \|\nabla \sigma\|_{L^2}^2 &= -\chi \int_{\Omega} \sigma \nabla \tilde{w} \cdot \nabla \sigma + \mu_1 \int_{\Omega} (\bar{\sigma} - 2\tilde{u}\bar{\sigma} - a_1 \tilde{v}\bar{\sigma}) \sigma - \int_{\Omega} \mu_2 a_2 \tilde{v}\bar{\eta} \sigma + \gamma_u \int_{\Omega} (\tilde{u} - u_d) \sigma \\
&\leq \mathcal{K} \|\sigma\|_{L^4} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\nabla \sigma\|_{L^2} + \mathcal{K} (\|\bar{\sigma}\|_{L^2} + \|\tilde{u}\|_{L^5} \|\bar{\sigma}\|_{L^{10/3}} + \|\tilde{v}\|_{L^5} \|\bar{\sigma}\|_{L^{10/3}} \\
&\quad + \|\tilde{v}\|_{L^5} \|\bar{\eta}\|_{L^{10/3}}) \|\sigma\|_{L^2} + \gamma_u \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2} \|\sigma\|_{L^2} \\
&\leq \mathcal{K} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\nabla \sigma\|_{L^2}^{7/4} \|\sigma\|_{L^2}^{1/4} + \mathcal{K} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4} \|\nabla \sigma\|_{L^2} \|\sigma\|_{L^2} + \mathcal{K} (\|\bar{\sigma}\|_{L^2} \\
&\quad + \|\tilde{u}\|_{L^5} \|\bar{\sigma}\|_{L^{10/3}} + \|\tilde{v}\|_{L^5} \|\bar{\sigma}\|_{L^{10/3}} + \|\tilde{v}\|_{L^5} \|\bar{\eta}\|_{L^{10/3}}) \|\sigma\|_{L^2} + \gamma_u \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2} \|\sigma\|_{L^2} \\
&\leq \mathcal{K} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^8 \|\sigma\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 \|\sigma\|_{L^2}^2 + \frac{d_u}{2} \|\nabla \sigma\|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \|\sigma\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \mathcal{K} (\|\bar{\sigma}\|_{L^2}^2 + \|\tilde{u}\|_{L^5}^2 \|\bar{\sigma}\|_{L^{10/3}}^2 + \|\tilde{v}\|_{L^5}^2 \|\bar{\sigma}\|_{L^{10/3}}^2 + \|\tilde{v}\|_{L^5}^2 \|\bar{\eta}\|_{L^{10/3}}^2 + \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2}^2).
\end{aligned}$$

Entonces, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|\sigma\|_{L^2}^2 + \frac{d_u}{2} \|\nabla \sigma\|_{L^2}^2 &\leq \mathcal{K} (\|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^8 + \|\nabla \tilde{w}\|_{L^4}^2 + 1) \|\sigma\|_{L^2}^2 \\ &+ \mathcal{K} \left(\|\tilde{u}\|_{X_{5/3}}, \|\tilde{v}\|_{X_{5/3}}, \|\tilde{w}\|_{X_{10/3}}, \|\bar{\sigma}\|_{L^{10/3}}, \|\bar{\eta}\|_{L^{10/3}}, \|u_d\|_{L^2} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, a partir de la desigualdad de Gronwall es posible obtener que $\|\sigma\|_X \leq \mathcal{K}$. Ahora, ya que $\nabla \sigma \in L^2(Q)$ y $\nabla \tilde{w} \in L^{10}(Q)$, se obtiene que $\nabla \sigma \cdot \nabla \tilde{w} \in L^{5/3}(Q)$ y

$$\mu_1 \bar{\sigma} - 2\mu_1 \tilde{u} \bar{\sigma} - \mu_1 a_1 \tilde{v} \bar{\sigma} - \mu_2 a_2 \tilde{v} \bar{\eta} + \gamma_u (\tilde{u} - u_d) \in L^{5/3}(Q),$$

entonces, aplicando el Teorema 1.1, para $p = 5/3$, tenemos que $\sigma \in X_{5/3}$. De manera análoga, se demuestra que $\eta \in X_{5/3}$. Finalmente, observe que, aplicando los Lemas 1.8, 1.9 y 1.10, $X_{5/3} \hookrightarrow L^\infty(H^{1/2}) \cap L^{5/3}(H^{17/10}) \hookrightarrow L^{5/2}(H^{13/10})$. Por ende, ya que $\tilde{u}, \sigma \in X_{5/3}$, en particular $\tilde{u}, \sigma \in L^{5/2}(H^{13/10})$, y entonces, $\nabla \tilde{u}, \nabla \sigma \in L^{5/2}(H^{3/10}) \hookrightarrow L^{5/2}(Q)$, lo cual implica que

$$\nabla \cdot (\tilde{u} \nabla \sigma) = \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \sigma + \tilde{u} \Delta \sigma \in L^{5/4}(L^{5/4}).$$

En adición, note que $\tilde{f} \bar{\xi} + \gamma_w (\tilde{w} - w_d) \in L^{5/4}(Q)$, usando el Teorema 1.1 con $p = 5/4$, se obtiene que $\xi \in X_{5/4}$. La inclusión compacta $X_{5/3} \times X_{5/3} \times X_{5/4} \xrightarrow{c} L^{10/3}(Q) \times L^{10/3}(Q) \times L^2(Q)$ es una consecuencia de los teoremas de compacidad de Aubin-Lions y Simon. La continuidad de Γ se deduce del conjunto de acotaciones de las variables adjuntas. Finalmente, para demostrar que el conjunto de puntos fijos de $\beta \Gamma$ es acotado en $X_{5/3} \times X_{5/3} \times X_{5/4}$, se siguen las mismas líneas

de la demostración del Teorema 2.2. Omitimos los detalles. Entonces, aplicando el Teorema de Leray-Schauder, se concluye la existencia de una solución $[\sigma, \eta, \xi] \in X_{5/3} \times X_{5/3} \times X_{5/4}$ de (71). Teniendo en cuenta la regularidad de la solución $[u, v] \in X_{5/3} \times X_{5/3} \hookrightarrow L^5(Q) \times L^5(Q)$ sigue que $\mu_1 \sigma - 2\mu_1 \tilde{u} \sigma - \mu_1 a_1 \tilde{v} \sigma - \mu_2 a_2 \tilde{v} \eta + \gamma_u (\tilde{u} - u_d) \in L^2(Q)$, aplicando el Teorema 1.1, con $p = 2$, existe una única solución $\eta \in X_2$; se concluye entonces que la solución del sistema (71) $[\sigma, \eta, \xi] \in X_{5/3} \times X_2 \times X_{5/4}$. La unicidad se deduce de forma análoga a la demostración del Teorema 2.2; por lo tanto, la omitimos. \square

Finalmente, en el siguiente teorema se demuestra que los multiplicadores de Lagrange σ, η, ξ tienen una regularidad fuerte. Hacemos énfasis en que los multiplicadores de Lagrange $[\sigma, \eta, \xi] \in L^2(H^1) \times L^2(Q) \times L^{10/7}(Q)$, proporcionados por el Teorema 3.10, corresponden a la noción de solución ultra débil del problema (71). A continuación, se desea mejorar su regularidad haciendo una comparación con la solución fuerte del sistema adjunto (71). Este es el contenido de la siguiente proposición.

Proposición 3.16 *Asuma las hipótesis del Teorema 3.10. Sea $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución local óptima para el problema de control (5). Entonces, el multiplicador de Lagrange $\zeta = [\sigma, \eta, \xi]$ que proporciona el Teorema 3.10 es único y satisface $[\sigma, \eta, \xi] \in X_{5/3} \times X_2 \times X_{5/4}$.*

Demostración: Como consecuencia del Teorema 3.10, existe un multiplicador de Lagrange $[\sigma, \eta, \xi] \in L^2(H^1) \times L^2(Q) \times L^{10/7}(Q)$. En particular, $[\sigma, \eta, \xi]$ satisface (55)-(57). Más aún, de la Proposición 3.15, se deduce que el problema (71) tiene una solución única $[\hat{\sigma}, \hat{\eta}, \hat{\xi}] \in X_{5/3} \times X_2 \times X_{5/4}$. Por lo tanto, el objetivo es demostrar que es posible identificar $[\sigma, \eta, \xi]$ con $[\hat{\sigma}, \hat{\eta}, \hat{\xi}]$.

En primer lugar, para algún $[U, V, W] \in \widehat{X} \times \widehat{X}_2 \times \widehat{X}_{10/3}$, se considera el sistema (71) reescrito para $[\widehat{\sigma}, \widehat{\eta}, \widehat{\xi}]$, y se multiplican las ecuaciones (71)₁ por U , (71)₂ por V y (71)₃ por W , de las que, integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t U, \widehat{\sigma} \rangle_{(H^1)'} + \int_0^T \int_{\Omega} (d_u \nabla U + \chi U \nabla \tilde{w}) \cdot \nabla \widehat{\sigma} + \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (2\tilde{u}U + a_1 U \tilde{v} - U) \widehat{\sigma} \\ + \mu_2 a_2 \int_0^T \int_{\Omega} U \tilde{v} \widehat{\eta} = \gamma_u \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{u} - u_d) U + \beta_1 \int_{\Omega} (\tilde{u}(T) - u_T) U(T), \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - d_v \Delta V - \mu_2 V + 2\mu_2 \tilde{v} V + \mu_2 a_2 \tilde{u} V) \widehat{\eta} + \mu_1 a_1 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{u} V \widehat{\sigma} - \alpha \int_0^T \int_{\Omega} V \widehat{\xi} \\ = \gamma_v \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{v} - v_d) V + \beta_2 \int_{\Omega} (\tilde{v}(T) - v_T) V(T), \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t W - d_w \Delta W + \lambda W - \tilde{f} 1_{\Omega_c} W) \widehat{\xi} + \chi \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{u} \nabla W \cdot \nabla \widehat{\sigma} = \gamma_w \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{w} - w_d) W \\ + \beta_3 \int_{\Omega} (\tilde{w}(T) - w_T) W(T). \end{aligned} \quad (76)$$

Ahora, tomando la diferencia entre las ecuaciones (55) y (74), entre (56) y (75), y entre (57) y (76), y sumando las respectivas ecuaciones, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (d_u \nabla U + \chi U \nabla \tilde{w} + \chi \tilde{u} \nabla W) \cdot \nabla (\sigma - \widehat{\sigma}) + \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (2\tilde{u}U + a_1 \tilde{u}V + a_1 U \tilde{v} - U) (\sigma - \widehat{\sigma}) \\ \int_0^T \langle \partial_t U, \sigma - \widehat{\sigma} \rangle_{(H^1)'} + \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - d_v \Delta V - \mu_2 V + 2\mu_2 \tilde{v} V + \mu_2 a_2 \tilde{u} V + \mu_2 a_2 U \tilde{v}) (\eta - \widehat{\eta}) \\ + \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t W - d_w \Delta W + \lambda W - \tilde{f} 1_{\Omega_c} W - \alpha V) (\xi - \widehat{\xi}) = 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Por ende, como consecuencia del Teorema 3.9, si $[U, V, W] \in \widehat{X} \times \widehat{X}_2 \times \widehat{X}_{10/3}$ es solución del sistema

(40) asociado a algún $[g_u, g_v, g_w] \in L^2((H^1)') \times L^2(Q) \times L^{10/3}(Q)$, a partir de (77), llegamos a

$$\int_0^T \int_{\Omega} \langle g_u, \sigma - \widehat{\sigma} \rangle_{L^2((H^1)')} + \int_0^T \int_{\Omega} g_v(\eta - \widehat{\eta}) + \int_0^T \int_{\Omega} g_w(\xi - \widehat{\xi}) = 0,$$

Como $[\sigma - \widehat{\sigma}, \eta - \widehat{\eta}, \xi - \widehat{\xi}] \in L^2(H^1) \times L^2(Q) \times L^{10/3}(Q)$ y vale (84), teniendo en cuenta que $\overline{C_0^\infty}^{L^2}(\Omega) = L^2(\Omega)$, existe una sucesión:

$$[(\eta - \widehat{\eta})_\varepsilon, (\xi - \widehat{\xi})_\varepsilon]_{\varepsilon > 0} \in C_0^\infty(Q) \times C_0^\infty(Q) \text{ tal que } \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\eta - \widehat{\eta})_\varepsilon, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\xi - \widehat{\xi})_\varepsilon \right] = [\eta - \widehat{\eta}, \xi - \widehat{\xi}];$$

además, debido a la inmersión canónica

$$j : H'(\Omega) \longrightarrow (H')'(\Omega)$$

$$\sigma \longrightarrow j_\sigma : H'(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (78)$$

$$z \longrightarrow j_\sigma(z) = \int_{\Omega} \sigma z + \int_{\Omega} \nabla \sigma \cdot \nabla z,$$

$(\sigma - \widehat{\sigma}) \in L^2(H^1)$ se identifica con un elemento $j_{\sigma - \widehat{\sigma}} \in L^2((H^1)')$. Entonces

$$\int_0^T \langle g_u, \sigma - \widehat{\sigma} \rangle_{(H^1)'} + \int_0^T \int_{\Omega} g_v(\eta - \widehat{\eta})_\varepsilon + \int_0^T \int_{\Omega} g_w(\xi - \widehat{\xi})_\varepsilon = 0. \quad (79)$$

para toda $[g_u, g_v, g_w] \in L^2((H^1)') \times L^2(Q) \times L^{10/3}(Q)$, note que (79) también vale para toda $[g_u, g_v, g_w] \in L^2((H^1)') \times C_0^\infty(Q) \times C_0^\infty(Q)$, en particular si se considera $[j_{\sigma - \widehat{\sigma}}, (\eta - \widehat{\eta})_\varepsilon, (\xi - \widehat{\xi})_\varepsilon] \in L^2((H^1)') \times$

$C_0^\infty(Q) \times C_0^\infty(Q)$ se sigue:

$$\int_0^T \int_\Omega (\sigma - \widehat{\sigma})^2 + \int_0^T \int_\Omega \nabla(\sigma - \widehat{\sigma})^2 + \int_\Omega |(\eta - \widehat{\eta})_\varepsilon|^2 + \int_\Omega |(\xi - \widehat{\xi})_\varepsilon|^2 = 0,$$

por ende

$$\|\sigma - \widehat{\sigma}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|(\eta - \widehat{\eta})_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(\xi - \widehat{\xi})_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0,$$

de ahí que $[(\eta - \widehat{\eta})_\varepsilon, (\xi - \widehat{\xi})_\varepsilon]_{\varepsilon>0} = [0, 0]$, lo que permite concluir que $[\sigma, \eta, \xi] = [\widehat{\sigma}, \widehat{\eta}, \widehat{\xi}]$.

Consecuentemente, $[\sigma, \eta, \xi] \in X_{5/3} \times X_2 \times X_{5/4}$ como resultado de la regularidad de $[\widehat{\sigma}, \widehat{\eta}, \widehat{\xi}] \in X_{5/3} \times X_2 \times X_{5/4}$. \square

3.3.2. Caso $N = 2$. Una tripla $[\sigma, \eta, \xi] \in L^2(H^1) \times L^{2-}(Q) \times L^{2-}(Q)$ que satisface

(55)-(57) corresponde al concepto de solución ultra débil del siguiente sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_t \sigma - d_u \Delta \sigma + \chi \nabla \sigma \cdot \nabla \tilde{w} - \mu_1 (\sigma - 2\tilde{u}\sigma - a_1 \tilde{v}\sigma) + \mu_2 a_2 \tilde{v}\eta = \gamma_u (\tilde{u} - u_d) \quad \text{en } Q, \\ -\partial_t \eta - d_v \Delta \eta - \mu_2 (\eta - 2\tilde{v}\eta - a_2 \tilde{u}\eta) + \mu_1 a_1 \tilde{u}\sigma - \alpha \xi = \gamma_v (\tilde{v} - v_d) \quad \text{en } Q, \\ -\partial_t \xi - d_w \Delta \xi + \lambda \xi - \tilde{f} 1_{\Omega_c} \xi - \chi \nabla \cdot (\tilde{u} \nabla \sigma) = \gamma_w (\tilde{w} - w_d) \quad \text{en } Q, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = \frac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega \times (0, T), \\ \sigma(T) = \beta_1 (\tilde{u}(T) - u_T) \quad \text{en } \Omega, \\ \eta(T) = \beta_2 (\tilde{v}(T) - v_T) \quad \text{en } \Omega, \\ \xi(T) = \beta_3 (\tilde{w}(T) - w_T) \quad \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (80)$$

y se satisface la siguiente condición de optimalidad

$$\int_0^T \int_{\Omega_c} (\gamma_f \tilde{f} + \tilde{w} \tilde{\xi})(f - \tilde{f}) \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Proposición 3.17 Sea $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución local óptima del problema (5) para $N = 2$.

Entonces el problema (80) tiene una única solución $[\sigma, \eta, \xi] \in X_2 \times X_2 \times X$.

Demostración: Sea $s = T - t$, con $t \in (0, T)$, y considere el cambio de variables $\widehat{\sigma}(s) = \sigma(t)$,

$\widehat{\eta}(s) = \eta(t)$ y $\widehat{\xi}(s) = \xi(t)$. Entonces el sistema (80) es equivalente al siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_s \widehat{\sigma} - d_u \Delta \widehat{\sigma} + \chi \nabla \widehat{\sigma} \cdot \nabla \tilde{w} - \mu_1 (\widehat{\sigma} - 2\tilde{u} \widehat{\sigma} - a_1 \tilde{v} \widehat{\sigma}) + \mu_2 a_2 \tilde{v} \widehat{\eta} = \gamma_u (\tilde{u} - u_d) \quad \text{en } Q, \\ \partial_s \widehat{\eta} - d_v \Delta \widehat{\eta} - \mu_2 (\widehat{\eta} - 2\tilde{v} \widehat{\eta} - a_2 \tilde{u} \widehat{\eta}) + \mu_1 a_1 \tilde{u} \widehat{\sigma} - \alpha \widehat{\xi} = \gamma_v (\tilde{v} - v_d) \quad \text{en } Q, \\ \partial_s \widehat{\xi} - d_w \Delta \widehat{\xi} + \lambda \widehat{\xi} - \tilde{f} 1_{\Omega_c} \widehat{\xi} - \chi \nabla \cdot (\tilde{u} \nabla \widehat{\sigma}) = \gamma_w (\tilde{w} - w_d) \quad \text{en } Q, \\ \frac{\partial \widehat{\sigma}}{\partial \nu} = \frac{\partial \widehat{\eta}}{\partial \nu} = \frac{\partial \widehat{\xi}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega \times (0, T), \\ \widehat{\sigma}(0) = \beta_1 (\tilde{u}(T) - u_T) \quad \text{en } \Omega, \\ \widehat{\eta}(0) = \beta_2 (\tilde{v}(T) - v_T) \quad \text{en } \Omega, \\ \widehat{\xi}(0) = \beta_3 (\tilde{w}(T) - w_T) \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (81)$$

Para demostrar la existencia de una solución de (81), de nuevo se usará el teorema del punto fijo

de Leray-Schauder, para lo cual se define el siguiente mapeo

$$\Gamma : L^{\infty-}(\mathcal{Q}) \times L^{\infty-}(\mathcal{Q}) \times L^{4-}(\mathcal{Q}) \longrightarrow X_2 \times X_2 \times X$$

$$[\bar{\sigma}, \bar{\eta}, \bar{\xi}] \longrightarrow [\sigma, \eta, \xi],$$

donde $[\sigma, \eta, \xi]$ es la solución del siguiente problema desacoplado

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_s \sigma - d_u \Delta \sigma + \chi \nabla \sigma \cdot \nabla \tilde{w} = \mu_1 (\bar{\sigma} - 2\tilde{u}\bar{\sigma} - a_1 \tilde{v}\bar{\sigma}) - \mu_2 a_2 \tilde{v}\bar{\eta} + \gamma_u (\tilde{u} - u_d) \quad \text{en } \mathcal{Q}, \\ \partial_s \eta - d_v \Delta \eta - \mu_2 \eta = -\mu_2 (2\tilde{v}\bar{\eta} + a_2 \tilde{u}\bar{\eta}) - \mu_1 a_1 \tilde{u}\bar{\sigma} + \alpha \bar{\xi} + \gamma_v (\tilde{v} - v_d) \quad \text{en } \mathcal{Q}, \\ \partial_s \xi - d_w \Delta \xi + \lambda \xi - \chi \nabla \cdot (\tilde{u} \nabla \sigma) = \tilde{f} 1_{\Omega_c} \bar{\xi} + \gamma_w (\tilde{w} - w_d) \quad \text{en } \mathcal{Q}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = \frac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega \times (0, T) \\ \hat{\sigma}(0) = \beta_1 (\tilde{u}(T) - u_T) \quad \text{en } \Omega, \\ \hat{\eta}(0) = \beta_2 (\tilde{v}(T) - v_T) \quad \text{en } \Omega, \\ \hat{\xi}(0) = \beta_3 (\tilde{w}(T) - w_T) \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (82)$$

El operador Γ está bien definido, es compacto y continuo. Además, el conjunto de puntos fijos de $\beta\Gamma$ está acotado en $X_2 \times X_2 \times X$. Para esto, multiplicamos (82)₁ por $\sigma - \Delta\sigma$, (82)₂ por $\eta - \Delta\eta$, y (82)₃ por ξ . Así, se puede comprobar que $[\sigma, \eta, \xi]$ es acotada en $X_2 \times X_2 \times X$. Por lo tanto, a partir del Teorema de Leray-Schauder se concluye que (80) tiene una solución $[\sigma, \eta, \xi] \in X_2 \times X_2 \times X$.

□

Proposición 3.18 *Asuma las hipótesis de la Proposición 3.13. Sea $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución óptima local para el problema de control (5). Entonces el vector de multiplicadores de Lagrange $[\sigma, \eta, \xi]$ proporcionado por la Proposición 3.13 es único y satisface $[\sigma, \eta, \xi] \in X_2 \times X_2 \times X$.*

Demostración: La prueba es análoga a la de la Proposición 3.16. A partir de la Proposición 3.13, existe un multiplicador de Lagrange $[\sigma, \eta, \xi] \in L^2(H^1) \times L^{2-}(Q) \times L^{2-}(Q)$. En particular, $[\sigma, \eta, \xi]$ satisface (67)-(69). Además, de la Proposición 3.17, se deduce que el problema (80) tiene una solución única $[\hat{\sigma}, \hat{\eta}, \hat{\xi}] \in X_2 \times X_2 \times X$. Por lo tanto, el objetivo es identificar $[\sigma, \eta, \xi]$ con $[\hat{\sigma}, \hat{\eta}, \hat{\xi}]$. En primer lugar, para algún $[U, V, W] \in \hat{X} \times \hat{X}_{2+} \times \hat{X}_{2+}$, procediendo de forma análoga al caso 3D, se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} (d_u \nabla U + \chi U \nabla \tilde{w} + \chi \tilde{u} \nabla W) \cdot \nabla (\sigma - \hat{\sigma}) + \mu_1 \int_0^T \int_{\Omega} (2\tilde{u}U + a_1 \tilde{u}V + a_1 U \tilde{v} - U) (\sigma - \hat{\sigma}) \\ & + \int_0^T \langle \partial_t U, \sigma - \hat{\sigma} \rangle_{(H^1)'} + \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - d_v \Delta V - \mu_2 V + 2\mu_2 \tilde{v}V + \mu_2 a_2 \tilde{u}V + \mu_2 a_2 U \tilde{v}) (\eta - \hat{\eta}) \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t W - d_w \Delta W + \lambda W - \tilde{f} 1_{\Omega_c} W - \alpha V) (\xi - \hat{\xi}) = 0. \end{aligned} \quad (83)$$

Por lo tanto, como consecuencia del Teorema 3.12, si $[U, V, W] \in \hat{X} \times \hat{X}_{2+} \times \hat{X}_{2+}$ es la única solución del sistema lineal (40) relacionada con cualquier $[g_u, g_v, g_w] \in L^2((H^1)') \times L^{2+}(Q) \times L^{2+}(Q)$, y teniendo en cuenta (83), se encuentra que

$$\int_0^T \langle g_u, \sigma - \hat{\sigma} \rangle_{L^2((H^1)')} + \int_0^T \int_{\Omega} g_v (\eta - \hat{\eta}) + \int_0^T \int_{\Omega} g_w (\xi - \hat{\xi}) = 0. \quad (84)$$

con lo cual, es posible deducir que (ver caso 3D) $[\sigma, \eta, \xi] = [\hat{\sigma}, \hat{\eta}, \hat{\xi}]$. Entonces $[\sigma, \eta, \xi] \in X_2 \times$

$X_2 \times X$ debido a la regularidad de $[\widehat{\sigma}, \widehat{\eta}, \widehat{\xi}] \in X_2 \times X_2 \times X$. □

4. Simulación numérica

En este capítulo, se presenta un experimento numérico (para dominios 2D) relacionado con el problema de control óptimo abordado en este trabajo. Se aproximan las ecuaciones de estado y ecuaciones adjuntas utilizando diferencias finitas en el tiempo y elementos finitos en el espacio, y se utiliza el software Freefem++ para realizar las simulaciones. Obsérvese que el sistema de optimalidad es un problema de valor límite de dos puntos donde utilizamos las condiciones iniciales para las ecuaciones de estado (3)-(4) y las condiciones terminales para el sistema adjunto (80); además, las variables de estado se mueven hacia adelante en el tiempo y las variables adjuntas se mueven hacia atrás en el tiempo.

4.1. Descripción del esquema numérico

Para definir el esquema de aproximación de las ecuaciones de estado (3)-(4) y del sistema adjunto (80), se considera una partición uniforme del intervalo de tiempo $(t_n = n\Delta t)_{n=0}^{n=N}$ (con paso de tiempo $\Delta t = T/N$), y los espacios de elementos finitos $U_h, W_h, V_h, \Sigma_h, N_h$ y Ξ_h generados por \mathbb{P}_1 -continuo. Entonces, consideramos el siguiente esquema de aproximación:

- **Ecuaciones de estado:** Dado $[v^0, w^0, u^0] \in V_h \times W_h \times U_h$, calcular, para $n = 1, \dots, N$ y para toda $[\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}] \in V_h \times W_h \times U_h$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{[Paso 1]} \left(\frac{v^n - v^{n-1}}{\Delta t}, \bar{v} \right) + d_v(\nabla v^n, \nabla \bar{v}) = \mu_2(v^n(1 - v^{n-1} - a_2 u^{n-1}), \bar{v}), \\ \text{[Paso 2]} \left(\frac{w^n - w^{n-1}}{\Delta t}, \bar{w} \right) + d_w(\nabla w^n, \nabla \bar{w}) + \lambda(w^n, \bar{w}) = \alpha(v^n, \bar{w}) + (f w^n, \bar{w}), \\ \text{[Paso 3]} \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, \bar{u} \right) + d_u(\nabla u^n, \nabla \bar{u}) = -\chi(u^n \nabla w^n, \nabla \bar{u}) \\ \qquad \qquad \qquad + \mu_1(u^n(1 - u^{n-1} - a_1 v^n), \bar{u}). \end{array} \right. \quad (85)$$

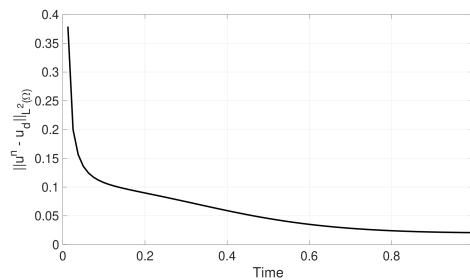
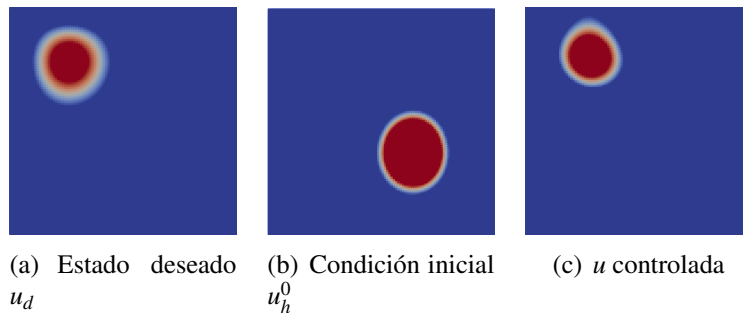
- **Ecuaciones adjuntas :** Dado $\sigma^N = \beta_1(u^N - u_T)$, $\eta^N = \beta_2(v^N - v_T)$ y $\xi^N = \beta_3(w^N - w_T)$, calcular, para $n = N - 1, \dots, 0$ y para toda $[\bar{\sigma}, \bar{\xi}, \bar{\eta}] \in \Sigma_h \times \Xi_h \times N_h$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{[Paso 1]} \left(\frac{\sigma^n - \sigma^{n+1}}{\Delta t}, \bar{\sigma} \right) + d_u(\nabla \sigma^n, \nabla \bar{\sigma}) = -\chi(\nabla w^n \cdot \nabla \sigma^n, \bar{\sigma}) \\ \qquad \qquad \qquad + \mu_1(\sigma^n(1 - 2u^n - a_1 v^n), \bar{\sigma}) - \mu_2 a_2(v^n \eta^{n+1}, \bar{\sigma}) \\ \qquad \qquad \qquad + \gamma_u(u^n - u_d, \bar{\sigma}), \\ \text{[Paso 2]} \left(\frac{\xi^n - \xi^{n+1}}{\Delta t}, \bar{\xi} \right) + d_w(\nabla \xi^n, \nabla \bar{\xi}) + \lambda(\xi^n, \bar{\xi}) \\ \qquad \qquad \qquad = (f^n \xi^n, \bar{\xi}) - \chi(u^n \nabla \sigma^n, \nabla \bar{\xi}) + \gamma_w(w^n - w_d, \bar{\xi}), \\ \text{[Paso 3]} \left(\frac{\eta^n - \eta^{n+1}}{\Delta t}, \bar{\eta} \right) + d_v(\nabla \eta^n, \nabla \bar{\eta}) = \alpha(\xi^n, \bar{\eta}) \\ \qquad \qquad \qquad + \mu_2(\eta^n(1 - 2v^n - a_2 u^n), \bar{\eta}) - \mu_1 a_1(u^n \sigma^n, \bar{\eta}) \\ \qquad \qquad \qquad + \gamma_v(v^n - v_d, \bar{\eta}). \end{array} \right. \quad (86)$$

Para resolver este sistema numérico, consideraremos el método del gradiente para problemas de control óptimo (véase, por ejemplo, Gunzburger and Manservigi (2000); Gunzburger (2002)), donde la tolerancia utilizada para comprobar la convergencia del funcional es $\tau = 10^{-4}$.

4.2. Resultados numéricos

En las simulaciones, se han considerado el dominio rectangular $\Omega = (0,2) \times (0,2)$ y los parámetros discretos $\Delta t = 0,0125$ y $h = 1/50$ (es decir, 100 nodos en ambas direcciones para la discretización espacial). Además, se tienen en cuenta los siguientes valores para los parámetros biológicos: $d_v = 0.5$, $d_u = 0.1$, $d_w = 0.5$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $a_1 = 3.2$, $a_2 = 3.7$, $\chi = 8$, $\alpha = 1.1$ y $\lambda = 2.5$; y, en el funcional, se han tomado $\gamma_u = 1$, $\gamma_v = 1$, $\gamma_w = 2$, $\gamma_f = 1.2$, $\beta_1 = 0.6$, $\beta_2 = 0.6$ y $\beta_3 = 2$.



(d) Diferencia entre el estado óptimo u y el estado deseado u_d vs. tiempo

Figura 1. Resultados numéricos para la especie u en el tiempo $T = 1$.

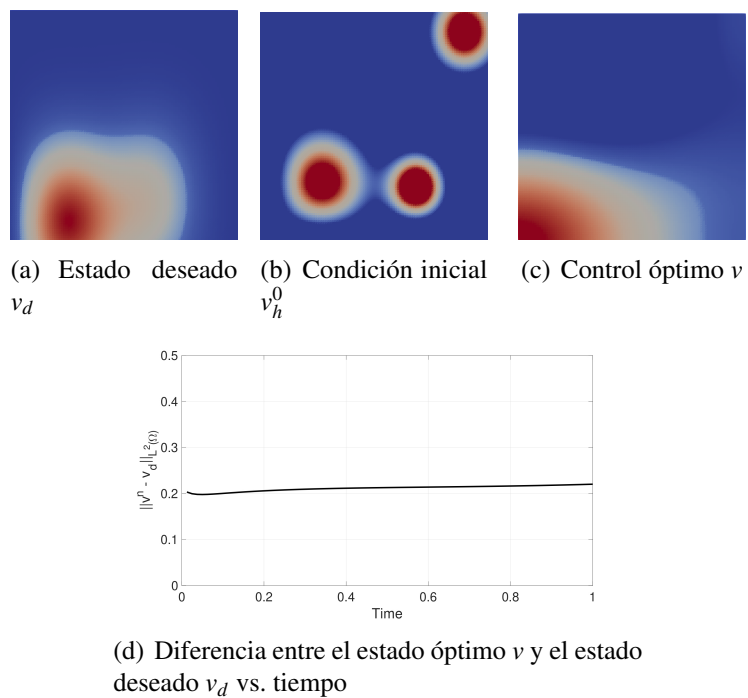


Figura 2. Resultados numéricos para la especie v en el tiempo $T = 1$.

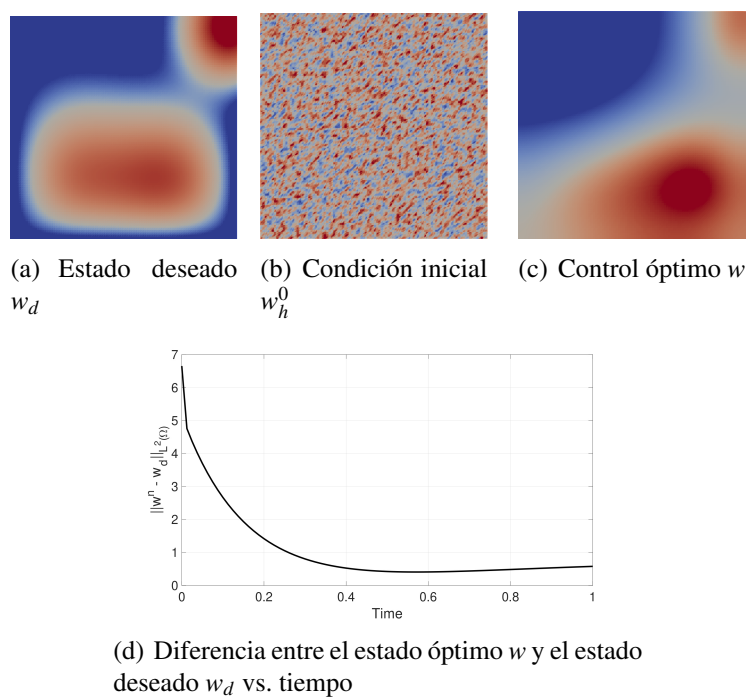


Figura 3. Resultados numéricos para la especie w en el tiempo $T = 1$.

En las Figuras 1-3 mostramos, para cada variable, las condiciones iniciales, los estados deseados, el estado óptimo obtenido y la norma L^2 de la diferencia entre los estados óptimo y deseado obtenidos para diferentes tiempos, hasta el tiempo final $T = 1$. Como condiciones iniciales, consideramos una distribución aleatoria para la concentración química, una densidad de especies u agrupadas en la parte inferior derecha del dominio, y una densidad de especies v agrupadas en tres partes del dominio (superior derecha, inferior izquierda e inferior derecha); y observamos que los estados óptimos obtenidos se acercan mucho a los estados objetivo en el tiempo $T = 1$, lo que demuestra que el sistema ha sido controlado satisfactoriamente. Además, en las figuras 1(d) y 3(d) observamos el decrecimiento de las normas $\|u^n - u_d\|_{L^2}$ y $\|w^n - w_d\|_{L^2}$ y su estabilización al cabo de poco tiempo.

5. Conclusiones y Trabajos futuros

5.1. Conclusiones

- Se demostró la existencia y unicidad de soluciones globales en un sentido débil-fuerte para un modelo de tipo Lotka-Volterra con quimiorepulsión, en dominios acotados bidimensionales.
- Se demostró la existencia y unicidad de soluciones globales fuertes para un modelo de tipo Lotka-Volterra con quimiorepulsión, en dominios acotados tridimensionales.
- Se planteó un problema de control óptimo bilineal con ecuaciones de estado dadas por un sistema de tipo Lotka-Volterra, en dos y tres dimensiones, y se demostró la existencia de solución óptima global.
- Se probaron condiciones necesarias de optimalidad de primer orden vía la existencia de multiplicadores de Lagrange para las soluciones óptimas locales asociadas al problema de control óptimo planteado.
- Se propuso un esquema de aproximación numérica del sistema de optimalidad basado en el método del gradiente, el cual fue validado con algunos experimentos computacionales.

5.2. Trabajos futuros

Algunos trabajos futuros que podrían plantearse para dar continuidad a este trabajo de investigación son los siguientes:

- El análisis de existencia de soluciones globales con datos poco regulares, para dominios tridimensionales.
- Desde el punto de vista de la teoría de control óptimo, se plantea como trabajo futuro el análisis numérico del problema de control óptimo, y el estudio de condiciones de optimalidad de segundo orden.

Bibliografía

- Bellomo, N. Bellouquid, A. T. Y. and Winkler, M. (2015). Toward a mathematical theory of keller-segel models of pattern formation in biological tissues. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15(9):663–1763.
- Braz e Silva, P. Guillén-González, F. and Rodríguez-Bellido, M. (2022). Bilinear optimal control for weak solutions of the keller-segel logistic model in 2d domains. *Archiv.*
- Duarte-Rodríguez, A. Ferreira, L. and Villamizar-Roa, E. (2019). Global existence for an attraction-repulsion chemo-taxis fluid model with logistic source. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.*, 24(2):423–447.
- Feireisl, E. and Novotný, A. (2009). *Singular Limits in Thermodynamics of Viscous Fluids*. Springer.
- Guillén-González, F. Mallea-Zepeda, E. and Rodríguez-Bellido, M. (2020a). Optimal bilinear control problem related to a chemo-repulsion system in 2d domains. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 26(29):21.
- Guillén-González, F. Mallea-Zepeda, E. and Rodríguez-Bellido, M. (2020b). A regularity criterion for a 3d chemo-repulsion system and its application to a bilinear optimal control problem. *SIAM J. Control Optim.*, 58(3):1457–1490.
- Guillén-González, F. Mallea-Zepeda, E. and Villamizar-Roa, E. (2020). On a bi-dimensional

- chemo-repulsion model with nonlinear production and a related optimal control problem. *cta Appl. Math.*, 170(29):963–979.
- Gunzburger, M. (2002). *Perspectives in flow control and optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Gunzburger, M. and Manservigi, S. (2000). Analysis and approximation of the velocity tracking problem for navier-stokes flows with boundary control. *SIAM J. Control Optim*, 39:594–634.
- Lions, J. (1969). *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod.
- Liu, C. and Yuang, Y. (2022). Optimal control of a fully parabolic attraction-repulsion chemotaxis model with logistic source in 2d. *Appl. Math. Optim.*, 85(7):38.
- López-Ríos, J. and Villamizar-Roa, E. J. (2021). An optimal control problem related to a 3d chemotaxis navier-stokes model. *ESAIM Control Optim. Calc. Var*, 27(58):37.
- Lotka, A. (1925). *Elements of Physical Biolog*. Williams and Wilkins Co.
- Nirenberg, L. (1959). On elliptic partial differential equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 3(12):115–162.
- Rodríguez-Bellido, M.A. Rueda-Gómez, D. and Villamizar-Roa, E. (2018). On a distributed control problem for a coupled chemotaxis-fluid model. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.*, 23(2):57–571.
- Simon, J. (1987). Compact sets in the space $L^p(0, t; b)$. *Ann. Mat. Pura Appl*, 146:65–96.

- Tello, J. and Negreanu, M. (2019). Global existence and asymptotic behavior of solutions to a predator–prey chemotaxis system with two chemicals. *J. Math. Anal. Appl.*, 474:1116–1131.
- Tello, J. and Wrzosek, D. (2018). Inter-species competition and chemorepulsion. *Math. Anal. Appl.*, 459:1233–1250.
- Tello, J.I. Negreanu, M. and Cruz, E. (2018). Asymptotic behavior and global existence of solutions to a two-species chemotaxis system with two chemicals. *ZAMP*, 69:170.
- Troitzsch, F. (2010). *Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications*. AMS, Providence, RI.
- Volterra, V. (1926). *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*. Mem. R. Accad. Naz. Dei Lincei. Ser. V.
- Zowe, J. and Kurcyusz, S. (1979). Regularity and stability for the mathematical programming problem in banach spaces. *Appl. Math. Optim*, 5:49–62.