

MALLADO INTERACTIVO Y ANÁLISIS DE CURVATURAS DE UNA NUBE
DE PUNTOS DISPERSOS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL OBTENIDA
POR LA TÉCNICA DE PROYECCIÓN DE FRANJAS

JOSEPH FABRICIO VERGEL BECERRA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2016

MALLADO INTERACTIVO Y ANÁLISIS DE CURVATURAS DE UNA NUBE
DE PUNTOS DISPERSOS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL OBTENIDA
POR LA TÉCNICA DE PROYECCIÓN DE FRANJAS

Trabajo de grado para optar al título de
FÍSICO

JOSEPH FABRICIO VERGEL BECERRA

DIRECTOR

JAIME ENRIQUE MENESES FONSECA

POSDOCTORADO NANOMETROLOGIE ET SCIENCES DE VIVANTS

CODIRECTOR

CARLOS RICARDO CONTRERAS PICO

DOCTOR EN CIENCIAS NATURALES - FÍSICA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2016

A

Gregorio Antonio Becerra por ser el padre ideal, a Yasmin Becerra Castro y Edilma Castro de Becerra por ser las mejores madres del mundo.

Índice general

1. Introducción	21
1.1. Motivación	21
1.2. Objetivos	22
1.3. Estructura	22
1.4. Trabajos relacionados	24
2. Reconstrucción tridimensional: Conceptos básicos	26
2.1. Reconstrucción 3D por proyección de franjas	27
2.1.1. Técnica de calibración	29
2.1.2. Adquisición de la fase continua	31
2.1.3. Mapeo fase-altura	36
2.2. Visualización de la nube de puntos y planteamiento del problema	40
3. Triangulación de Delaunay	46
3.1. Construcción del mallado triangular	47
3.2. Computando el mallado triangular	49
3.3. Implementación de archivos poligonales	50

3.3.1.	Formato de archivo de objeto OFF	50
3.3.2.	Formato OBJ	51
3.4.	Visualización del mallado triangular	52
4.	Remallado incremental interactivo por curvatura	59
4.1.	Remallado incremental isotrópico uniforme	60
4.1.1.	Operadores locales de remallado	61
4.2.	Remallado incremental interactivo por curvatura	69
4.2.1.	Variedades diferenciales y análisis de curvaturas	69
4.2.2.	Inclusión del criterio de curvatura en el remallado incremental	77
5.	Remallado interactivo geodésico	86
5.1.	El concepto de geodésica sobre un mallado	86
5.2.	El flujo de calor y la extracción de geodésicas	87
5.3.	Remallado bajo el criterio de geodésica	94
6.	Estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas	100
6.1.	Flujo de trabajo	100
6.2.	Montaje experimental	101
6.3.	Digitalización de un objeto como una nube de puntos en el espacio tridimensional	104
6.3.1.	Calibración	104
6.3.2.	Proyección y adquisición en el objeto	111
6.3.3.	Corrección a fase continua	115

6.3.4. Nube de puntos	117
6.4. Transformación de la nube puntos en una superficie por medio de un mallado triangular	119
6.4.1. Optimización de la nube de puntos	120
6.4.2. Obtención del mallado triangular preliminar	122
6.4.3. Caracterización de la superficie: Cómputo de curvaturas y cálculo de geodésicas	124
6.5. Optimización de la superficie	130
6.5.1. Remallado incremental isotrópico uniforme	131
6.5.2. Remallado incremental interactivo por curvatura	132
6.5.3. Comparación entre mallados y primera aproximación de error .	141
6.5.4. Remallado geodésico	149
6.5.5. Registro de información tridimensional	151
7. Conclusiones y perspectivas	160
Bibliografía	162

Índice de figuras

1.	Diagrama esquemático de la técnica de proyección de franjas en la cual se proyecta un patrón de franjas paralelas sinusoidales mediante un dispositivo de proyección (proyector); subsecuentemente, se produce un desfase $\Delta\phi$ debido a la topografía del objeto que es registrado por la unidad de adquisición (cámara CCD). Fuente: [30]	28
2.	Etapas de la perfilometría por proyección de franjas. Fuente: [46].	28
3.	Sistema de coordenadas utilizado para la técnica de calibración. Proyección de planos para las coordenadas (a) m y (b) n . Fuente: [21].	29
4.	Una franja proyectada en la superficie de un objeto. Patrón de puntos: (a) Patrón proyectado por el proyector. (b) Patrón capturado por la cámara. Fuente: [21].	30
5.	Fase envuelta y su respectivo perfil. Fuente: [46].	32
6.	(a) Distribución de fase continua, (b) Corte transversal de la fase. Fuente: [46].	33
7.	Desenvolvimiento de fase temporal. Fuente: [46].	34
8.	Fase discontinua para cada paso de proyección. Fuente: [46].	35
9.	Fase continua para cada paso de proyección. Fuente: [46].	36
10.	Modelo de cámara inversa para el video proyector. Fuente: [21].	37
11.	(a)Diagrama esquemático de las coordenadas (m, n) en el LCD. (b) Sistema de coordenadas del proyector en la relación con las coordenadas (m, n) . Fuente: [21].	37

12.	(a) Patrón de franjas sinusoidales. (b) Perfil de intensidad representativo. Fuente: [21].	38
13.	Gráfico de la fase ϕ en función del paso p . Fuente: [21].	39
14.	Procedimiento de reconstrucción 3D del torso humano. Fuente: [21].	40
15.	Nube de puntos del modelo tridimensional “Einstein” y su respectiva ampliación.	41
16.	Nube de puntos del modelo tridimensional “Einstein” desde una segunda perspectiva.	41
17.	(a) Objeto real. (b) Nube de puntos obtenida por R3DPF de 209440 puntos.	42
18.	Nube de puntos obtenida por R3DPF reducida a una décima parte de la nube original, con un total de 20944 puntos.	43
19.	(a) Ampliación de la nube de puntos original. (b) Ampliación de la nube de puntos reducida.	44
20.	(a) Nube de puntos reducida y obtenida por R3DPF de un torso humano a 360° con 51086 puntos. (b) Ampliación de la nube de puntos reducida. Fuente: Nube de puntos proporcionada por González et al. [21]. Figura producida por el autor.	45
21.	(a) Representación gráfica de la definición de triangulación de Delaunay (segmentos de línea color negro) para un conjunto de puntos. (b) Gráfico del diagrama de Voronoi (segmentos de línea color rojo) del mismo conjunto de puntos de (a) y comparación con la triangulación de Delaunay (trazado color negro). Fuente: Modificación del autor bajo licencia Creative Commons. Autores originales: , Hferee	47
22.	Modelo tridimensional “Einstein” graficado a partir de su mallado triangular facetado.	53
23.	Estructuras del mallado con alta y baja isotropía.	54
24.	Mallado triangular facetado del Modelo 3D “T-Rex”.	54
25.	Mallado del objeto 3D “Ghost”.	55

26.	Modelo 3D “Einstein” sin facetado y con iluminación.	56
27.	Modelo tridimensional “T-Rex” sin facetado y con iluminación.	57
28.	Objeto 3D “Ghost” graficado sin resaltar bordes y con iluminación. . .	57
29.	Operadores locales de remallado. Fuente: [10].	62
30.	Explicación del operador de proyección a la superficie sobre la vista trans- versal de un mallado. El mallado de entrada esta definido por el color negro y los vectores en color verde muestran la proyección a realizar so- bre cada uno de las nuevas posiciones de los vértices, visualizadas en el mallado azul.	65
31.	Remallados isotrópicos del modelo tridimensional “T-rex” constituido por 7922 vértices. (a) Remallado uniforme con $L \approx 1[mm]$ y con un numero de 61595 vértices. (b) Remallado uniforme con $L \approx 3[mm]$ con 13394 vértices.	66
32.	Remallados isotrópicos del modelo tridimensional “T-rex” constituido por 62916 vértices. (a) Remallado uniforme con $L \approx 1[mm]$ y con un numero de 98542 vértices. (b) Remallado uniforme con $L \approx 3[mm]$ con 7065 vértices.	67
33.	Remallados isotrópicos del modelo tridimensional “Einstein” constituido por 148095 vértices. (a) Remallado uniforme con $L \approx 1[mm]$ y con un numero de 33335 vértices. (b) Remallado uniforme con $L \approx 3[mm]$ con 3460 vértices.	68
34.	(a) Conjunto de facetas cerrado de balance seis. (b) Vértice singular. (c) Borde singular. (d)Auto-intersección del mallado. Fuente: [6].	70
35.	Representación esquemática del homeomorfismo f actuando sobre la va- riedad M . Fuente: [15].	70
36.	El toroide es una variedad orientable, mientras que la cinta de Möbius no lo es. Fuente: [15].	71
37.	Diferentes ejemplos de curvatura. Fuente: [15].	72
38.	Transformaciones para la geometría de superficies. Fuente: [15].	72

39.	Diferentes variedades diferenciales bidimensionales: (a) Variedad diferencial cilíndrica. (b) Variedad esférica. (c) Paraboloides hiperbólico visto como una variedad diferencial. Fuente: [15].	74
40.	Análisis de las curvaturas media y Gaussiana para el modelo 3D “T-rex”.	75
41.	Análisis de las curvaturas media y Gaussiana para el modelo 3D “Ghost”.	76
42.	Análisis de las curvaturas media y Gaussiana para el modelo 3D “Einstein”.	77
43.	Curvatura máxima absoluta $ k_1 $ del objeto 3D “T-rex”.	78
44.	Objeto tridimensional “Ghost” y su respectiva curvatura máxima absoluta $ k_1 $	79
45.	Curvatura máxima absoluta $ k_1 $ del modelo tridimensional “Einstein”.	79
46.	Representación esquemática de la tolerancia de error ε , junto con el mallado de Delaunay representado por la arista L y la superficie reconstruida mostrada como la curva de color azul. Fuente: [19].	80
47.	Mallado interactivo por curvatura del modelo tridimensional “T-rex” con una tolerancia: (a) $\varepsilon = 0.1$, (b) $\varepsilon = 0.01$	82
48.	Mallado interactivo por curvatura del modelo tridimensional “T-rex” con una tolerancia $\varepsilon = 0.1$ y el límite inferior del campo de dimensionamiento $L(v_i)$ permitido de: (a) $L_{min} = 1.0$, (b) $L_{min} = 0.1$	83
49.	Curvatura máxima absoluta $ k_1 $ y mallado adaptativo por curvatura del objeto tridimensional “T-rex”.	84
50.	Curvatura máxima absoluta $ k_1 $ y mallado interactivo por curvatura de “Ghost”.	84
51.	Curvatura máxima absoluta $ k_1 $ y mallado interactivo por curvatura de “Einstein”.	85
52.	Curvas geodésicas sobre una variedad diferencial esférica. Fuente: Pbroks13: https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Pbroks13	87

53.	Esquema del método de calor. De izquierda a derecha: (I) Se permite una difusión de calor en un periodo de tiempo t . (II) y (III) Se obtiene el gradiente de temperatura y se normaliza negativamente para un obtener un campo vectorial $X = \frac{-\nabla u}{ \nabla u }$.(IV) El campo escalar $\phi = \gamma(v_i)$ sigue al gradiente del campo vectorial X , recuperando la distancia final. Fuente: [14]	89
54.	Laplaciano en la dirección de Y_C para el mallado “Einstein”.	91
55.	Difusión de calor sobre el mallado “Einstein” desde el punto fuente (color rojo).	92
56.	Campo escalar de geodésica $\gamma(v_i)$ para el objeto 3D “Einstein”.	93
57.	Conjuntos de nivel de geodésicas sobre el objeto 3D “Einstein”.	94
58.	Visualización de las líneas de isogeodésica para un $\Delta\gamma = 0.1[mm]$ de la vista frontal del modelo 3D “Einstein”.	95
59.	Remallado geodésico de la vista frontal del modelo “Einstein”.	96
60.	Amplaiacion de remallado geodesico de “Einstein” con $\Delta\gamma = 0.1[mm]$	97
61.	Visualización de las líneas de isogeodésica para un $\Delta\gamma = 0.4[mm]$	98
62.	Remallado geodésico de la vista frontal del modelo “Einstein” con $\Delta\gamma = 0.4[mm]$	99
63.	Diagrama de flujo de la metodología utilizada en la estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas.	101
64.	Unidad de proyección-adquisición diseñada por el grupo GOTS.	102
65.	Montaje experimental para la implementación de la R3DPF.	102
66.	Configuración de monitores para la técnica de proyección de franjas. La pantalla roja es designada para el monitor secundario y por ende al vídeo-proyector, mientras que el monitor principal se utiliza como unidad de procesamiento.	103
67.	GUI “Interfaz de adquisición” en modo basico.	103

68.	Tablero ajedrezado utilizado para el método de calibración como patrón de calibración.	105
69.	(a) Homografía adquirida del tablero ajedrezado donde el usuario selecciona cuatro puntos de control. (b) La CCT identifica en la selección anterior el número de intersecciones del patrón ajedrezado y las muestra de color rojo. Fuente: [21].	106
70.	(a) La CCT calcula las coordenadas de los puntos de control (azul) y las compara con las coordenadas teóricas (rojo). (b)Ampliación para mostrar la diferencia entre una coordenada teórica (rojo) y una experimental (azul). Fuente: [21].	107
71.	Nube de dispersión de error donde cada color determina una de las posiciones del plano adquiridas. Fuente: [21].	107
72.	Gráfico de los diferentes planos adquiridos en las homografías y por consiguiente determinación de los parámetros extrínsecos de la cámara. Fuente: [21].	108
73.	La “Interfaz de adquisición” define y adquiere el patrón de puntos pseudo-aleatorio a proyectar, el cual es mostrado en el monitor secundario.	108
74.	Homografía adquirida para la calibración de la unidad de proyección-adquisición. Fuente: [21].	109
75.	(a) Fase discontinua vertical del patrón pseudo-aleatorio. (b) Fase discontinua horizontal del patrón pseudo-aleatorio de puntos. (c) Fase continua vertical del patrón de puntos pseudo-aleatorio. (d) Fase continua horizontal del patrón pseudo-aleatorio. Fuente: [21].	110
76.	(a) Coordenadas de los puntos de control vistos por la cámara CCD. (b) Coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) de los 2026 puntos de la primera homografía de calibración, con coordenadas (x, y) y (m_x, n_y) conocidas.	111
77.	(a) Diagrama esquemático de una tubería flexible con refuerzo no metálico. Fuente: [43]. (b) Fotografía de la tubería que se reconstruyó junto con los patrones geométricos.	112
78.	Montaje experimental para la proyección-adquisición y el sistema de referencia de la CCD.	113
79.	Imagen de las franjas proyectadas sobre la tubería.	113

80.	En el monitor principal se muestra la “Interfaz de adquisición y la imagen adquirida sobre la tubería de la línea central. En el monitor secundario se muestra la la imagen de la línea central a proyectar.	114
81.	Adquisición del patrón de franjas en la “Interfaz de adquisición” en el monitor principal y patrón de franjas proyectado en el monitor secundario.	114
82.	Capturas adquiridas del patrón de franjas proyectados para: (a) $\Delta\phi = 0$, (b) $\Delta\phi = \pi/2$, (c) $\Delta\phi = \pi$ y (d) $\Delta\phi = 3\pi/2$. Fuente: [43].	115
83.	(a) Fase discontinua de las franjas proyectadas sobre la tubería. (b) Perfil transversal de la fase discontinua. Fuente: [43].	116
84.	(a) Fase continua de las franjas proyectadas sobre la tubería. (b) Perfil transversal de la fase continua. Fuente: [43]	116
85.	Representación gráfica de los vectores \mathbf{R}_C , \mathbf{r}_C y \mathbf{u}_{r_C}	117
86.	Gráfico de la nube de puntos correspondiente a una vista de la tubería.	119
87.	Fotografía de las franjas proyectadas sobre un cráneo humano real.	120
88.	(a) Nube de puntos de entrada de la reconstrucción tridimensional de un cráneo humano real. (b) Nube de puntos optimizada del cráneo.	121
89.	Criterios de identificación de puntos no definidos dentro del objeto (color rojo): (a) puntos aislados de la superficie reconstruida. (b) Regiones no pertenecientes al objeto real producido por las discontinuidades en las franjas adquiridas. (c) Zonas con franjas dispersas o poco definidas.	122
90.	Mallado triangular preliminar de la tubería reconstruida.	123
91.	Gráfico del mallado de Delaunay de la tubería, sin facetado y con función de luminosidad.	124
92.	(a) Curvatura media H del mallado “Tubería1”.(b) Curvatura Gaussiana K del mallado “Tubería1”.	125
93.	Ampliación de la gráfica de curvatura media H del mallado “Tubería1”.	126
94.	Ampliación del gráfico de curvatura media H del mallado “Tubería1”.	126
95.	Curvatura máxima absoluta k_1 del mallado “Tubería1”.	127

96.	Ampliación del gráfico de la curvatura máxima absoluta k_1 del mallado “Tuberial”	128
97.	Geodésicas del mallado “Tuberial”	129
98.	Ampliación del gráfico de geodésicas del mallado “Tuberial”	130
99.	Remallado incremental isotrópico uniforme con longitud de borde definida por el usuario como $L = 3.0[mm]$: (a) Con facetado y sin función de luminosidad. (b) Sin facetado y con función de luminosidad.	131
100.	Remallado incremental isotrópico uniforme con longitud de borde $L = 1.0[mm]$: (a) Con facetado y sin función de luminosidad. (b) Sin facetado y con función de luminosidad.	132
101.	Gráfico del campo de dimensionamiento $L(v_i)$ sobre el mallado “Tuberial”	133
102.	Ampliación del gráfico del campo de dimensionamiento $L(v_i)$ sobre el mallado “Tuberial”	134
103.	Remallado interactivo por curvatura a_0 , con $\varepsilon = 0.001$, número de iteraciones i igual a 10, vértices $V = 1504423$ y facetas $F = 2995706$	135
104.	Remallado interactivo por curvatura a_1 , con $\varepsilon = 0.01$, iteraciones $i = 10$, vértices $V = 146716$ y facetas $F = 288663$	136
105.	Remallado interactivo por curvatura a_2 , con $\varepsilon = 0.01$, iteraciones $i = 10$, vértices $V = 71918$ y facetas $F = 141539$	136
106.	Remallado interactivo por curvatura a_3 , con $\varepsilon = 0.01$, iteraciones $i = 10$, vértices $V = 44174$ y facetas $F = 87000$	137
107.	Remallado interactivo por curvatura a_4 , con $\varepsilon = 0.01$, iteraciones $i = 10$, vértices $V = 32868$ y facetas $F = 64789$	138
108.	Grafico del remallado a_4 facetado.	139
109.	Superposición de la nube de vértices correspondiente al remallado a_4 (puntos color rojo) y el campo de dimensionamiento $L(v_i)$ del mallado preliminar “Tuberial” (paleta de colores).	140

110. Ampliación de la superposición de la nube de vértices correspondiente al remallado a_4 (puntos color rojo) y el campo de dimensionamiento $L(v_i)$ del mallado preliminar “Tuberial” (paleta de colores).	140
111. Comparación de una misma región entre el mallado original y los diferentes remallados.	141
112. Superposición del mallado preliminar “Tuberial” (color morado) y el remallado interactivo por curvatura a_4 (color azul aguamarina).	142
113. Función de error sobre el remallado a_0	143
114. Ampliación de la función de error sobre el remallado a_0 sobre la región agrietada.	143
115. Función de error sobre el remallado a_1	144
116. Ampliación de la función de error sobre el remallado a_1 sobre la región agrietada.	145
117. Función de error sobre el remallado a_2	145
118. Ampliación de la función de error sobre el remallado a_2 sobre la región agrietada.	146
119. Función de error sobre el remallado a_3	146
120. Ampliación de la función de error sobre el remallado a_3 sobre la región agrietada.	147
121. Función de error sobre el remallado a_4	148
122. Ampliación de la función de error sobre el remallado a_4 sobre la región agrietada.	149
123. Remallado geodésico para un $\Delta\gamma = 0.2[mm]$	150
124. Remallado geodésico para un $\Delta\gamma = 0.4[mm]$	150
125. Remallado geodésico para un $\Delta\gamma = 0.6[mm]$	151
126. Remallados a_4 para los diferentes puntos de visión obtenidos de la R3DPF.	152

127. Selección de los puntos de control para el algoritmo ICP utilizando los patrones geométricos propuestos en el GOTS.	153
128. Remallados ya alineados con la herramienta “Align” ofrecida por Meshlab.	153
129. Resultado del proceso de registro de información tridimensional mediante el algoritmo ICP de Meshlab.	154
130. Solapamiento entre remallados después del registro de información tridimensional.	154
131. Eliminación de facetas y vértices sobre un remallado solapado.	155
132. Resultado final de la eliminación de vértices y facetas en el solapamiento de remallados.	155
133. Remallados optimizados después del registro de información tridimensional.	156
134. Reconstrucción tridimensional final de “TuberiaFinal”.	157
135. Ampliación del mallado facetado sobre el objeto 3D “TuberiaFinal”.	158
136. Diferentes vistas del objeto tridimensional “TuberiaFinal”.	159

Resumen

TÍTULO: Mallado interactivo y análisis de curvaturas de una nube de puntos dispersos en el espacio tridimensional obtenida por la técnica de proyección de franjas. *

AUTOR: Joseph Fabricio Vergel Becerra†

PALABRAS CLAVES: Reconstrucción 3D, nube de puntos, análisis de curvaturas, mallado interactivo, metrología óptica.

DESCRIPCIÓN:

Las múltiples técnicas de reconstrucción tridimensional (3D) utilizadas actualmente generan una nube de puntos dispersos, los cuales poseen información metrología que describe la topografía de los objetos reconstruidos. El procesamiento de estos puntos es crucial para obtener una digitalización 3D que modelice adecuadamente la superficie del objeto original. La técnica de proyección de franjas, implementa un proyector, una cámara digital y una unidad de control, es una de las más usadas para realizar reconstrucción 3D debido a su alta precisión y resolución, esta última por lo general puede alcanzar decenas de micrómetros. Sin embargo, por medio de la técnica de proyección de franjas se obtiene una gran cantidad de puntos, los cuales deben ser reducidos con el propósito de maximizar el espacio de almacenamiento y minimizar el tiempo de posprocesamiento y visualización, sin perder información en las regiones críticas, i.e., áreas con grandes curvaturas. Para tal propósito, en esta investigación se implementaron dos procedimientos interactúan con la superficie de tal manera que una reducen el mallado triangular correspondiente a la nube de puntos 3D y generan la triangulación de Delaunay adaptativa según el criterio de curvatura, submuestreando las regiones con baja curvatura y manteniendo una densidad de puntos alta en regiones de alta curvatura. Finalmente se propone una estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas, que consolida las investigaciones realizadas por el GOTS en el área de reconstrucción tridimensional en tres grandes fases; digitalización, transformación y caracterización, y por último optimización. Esta metodología de reconstrucción 3D unificada por proyección de franjas se desarrollo con miras a que el GOTS ofrezca servicios de extensión al sector industrial y medico en materia de reconstrucción tridimensional.

* Trabajo de Grado.

† Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales, Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Dr Director: Jaime Enrique Meneses Fonseca Ph.D, Codirector: Carlos Ricardo Conteras Pico.

Abstract

TITLE: Interactive meshing and curvature analysis of a three-dimensional point cloud obtained by the fringe projection technique.*

AUTHOR: Joseph Fabricio Vergel Becerra†

KEYWORDS: 3D reconstruction, point cloud, curvature analysis, adaptive remeshing, optical metrology.

DESCRIPTION: Multiple techniques of three-dimensional (3D) reconstruction that are currently used generate a cloud of scattered points, which have metrological information that describe the topography of the reconstructed objects. The processing of these points is crucial for obtain a 3D digitization that modelice properly the surface of the original object. The fringe projection technique, which implement a projector, a digital camera and a control unit, is one of the most used for 3D reconstruction due to its high accuracy and resolution, which usually can reach tens of microns. However, through the same technique a large number of points is obtained, which must be reduced in order to maximize storage space and minimize the post-processing time, without losing information in the regions with large curvatures. For such purpose, in this paper is introduced a method that uses a series of algorithms such as nearest neighbor classification, the estimation of normal vectors to a point cloud using Voronoid diagrams and the calculation of mean curvatures of local surfaces; information that is necessary to do a selective reduction of the point cloud and generate the Delaunay triangulation of the cloud. The efficiency and performance of the proposed method is illustrated through 3D reconstructions that preserve the geometric features of the objects of the study.

* Degree work.

† Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales, Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Dr Director: Jaime Enrique Meneses Fonseca Ph.D, Codirector: Carlos Ricardo Conteras Pico.

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1 Motivación

En diferentes procedimientos médicos, estéticos, forenses, industriales, entre otros, es de interés obtener información topográfica con resolución micrométrica de diferentes objetos de estudio. Es por esto que las técnicas de reconstrucción tridimensional, actualmente son un gran campo de acción de la física y la matemática aplicada, en el sector privado, la industria y la investigación. La precisión y confiabilidad que se espera de estas medidas, sumado a la dificultad para adquirir esta información, son factores importantes a la hora de seleccionar la técnica de digitalización. En la actualidad, la técnica de proyección de franjas ha adquirido importancia gracias a que cumple con la mayoría de estos requisitos y tiene como característica favorable el bajo costo de implementación. No obstante, la obtención de la reconstrucción tridimensional trae consigo la necesidad de realizar un pos-tratamiento a los datos obtenidos, para generar una óptima visualización. En ocasiones, se hace necesario la reducción interactiva de puntos gobernada principalmente por un criterio en específico que en la mayoría de casos se rige por el concepto de curvaturas locales, para así conseguir mayor eficiencia en el tiempo efectivo de cómputo de las reconstrucciones superficiales obtenidas en el pos-procesamiento de imágenes.

En cuanto al uso del estudio geométrico de las curvaturas en las nubes de puntos, a la fecha se han desarrollado gran cantidad de investigaciones en el sector del modelamiento tridimensional y el número de trabajos orientados a este sector seguirá en aumento, sin embargo, las digitalizaciones 3D obtenidas por R3DPF¹ poseen características particulares a tener en cuenta a la hora de efectuar el pos-tratamiento, como lo es la gran densidad de puntos y las frecuentes discontinuidades en la superficie reconstruida. El área de la matemática aplicada y la visualización computacional se hacen presentes en el estudio del procesamiento de imágenes obtenidas por reconstrucción tridimensional, trayendo consigo la implementación de conceptos matemáticos provenientes de ramas como la topología y la geometría diferencial. Hoy en día, la matemática aplicada proporciona las herramientas numéricas necesarias para el cómputo de conceptos, tales como, el cálculo de curvaturas, la estimación de distancias geodésicas y la noción de espacio “curvo”, que frecuentemente se actualizan para mejorar la optimización compilativa

¹Reconstrucción Tridimensional por de Proyección de Franjas

y operativa. Es acá donde la física juega un papel importante, en la interpretación y estimación de las incertidumbres; qué tan preciso puede llegar a ser una reconstrucción tridimensional que ha tenido un tratamiento de datos intermedio meramente matemático y así poder definir criterios y condiciones que resuelvan circunstancias específicas en el campo de la reconstrucción tridimensional. Además, las novedosas aplicaciones de la digitalización 3D cada vez demandan mayor cantidad de conocimientos experimentales para su adquisición y pos-procesamiento, así como su evaluación e interpretación.

Se han propuesto diferentes algoritmos para el pos-tratamiento de los datos, entre los que se encuentra el análisis de curvaturas como principal criterio de reducción de puntos. Una aplicación directa del análisis de curvatura son las modificaciones de la nube de puntos 3D y por consiguiente del mallado “preliminar” de esta, produciendo lo que se conoce como mallado adaptativo [2, 16, 56] y que permite obtener una reducción de la nube de puntos tridimensional en regiones con poca curvatura y una mayor densidad de puntos en áreas con curvaturas bien pronunciadas. Este submuestreo optimiza la visualización de la reconstrucción 3D y suministra un mayor detalle en regiones de interés, especialmente importante para las digitalizaciones 3D obtenidas por TPF. Ahora, la metrología óptica se encarga de estudiar y reducir la incertidumbre mediante un campo de tolerancia, es decir, fijar un criterio hasta el cual modificaciones sobre la nube tridimensional de puntos dispersos sigue siendo fiel a la topografía del objeto real; es por esto que se ha hecho necesario su introducción en la reconstrucción de superficies [20, 45]. Cabe resaltar que por las características de las nubes de puntos tridimensionales obtenidas por la técnica de proyección de franjas y las condiciones para mantener intacta la topografía de diferentes reconstrucciones 3D, han hecho que la evaluación metrológica en estos casos no se haya efectuado en su totalidad.

1.2 Objetivos

El objetivo principal de esta investigación fue construir un procedimiento teórico-experimental (no obstante, el procedimiento puede ser aplicado a nubes de puntos sin importar la técnica de reconstrucción tridimensional utilizada para su consecución) que redujera la nube de puntos obtenida a partir de la teoría de la R3DPF y generara un mallado con criterios adaptativos fundamentados en el cálculo de curvatura del objeto reconstruido. Este mallado adaptativo debe reducir el número de puntos en las regiones con poca curvatura y conservar una gran densidad de puntos en las áreas con curvaturas más altas.

1.3 Estructura

Esta investigación se encuentra secuenciada bajo el siguiente flujo de trabajo:

Capítulo 2 - Reconstrucción tridimensional: Conceptos básicos

Este capítulo brinda los conceptos más fundamentales en la reconstrucción 3D mediante esta técnica. En sucesión se muestra los conocimientos teóricos necesarios para la implementación de la técnica y se ilustra el proceso en general para la obtención final de nubes de puntos dispersas generadas en el

GOTS².

Capitulo 3 - Triangulación de Delaunay

Conceptos trascendentales usados en el procesamiento y generación de mallados son expuestos y explicados para el completo entendimiento de dicha implementación sobre las nubes de puntos, esto proporciona una noción de superficie mucho más clara a las reconstrucciones tridimensionales obtenidas por la R3DPF y genera la base preliminar para las posteriores caracterizaciones.

Capitulo 4 - Remallado interactivo incremental por curvatura

La geometría diferencial y la topología son aplicadas en el procesamiento de mallados computacionales donde las reconstrucciones 3D son representadas matemáticamente como una variedad diferencial con una geometría no-Euclideana. Es ahí cuando conceptos fundamentales asociados directamente a dicha variedad, como es el caso de las geodésicas, la curvatura Gaussiana y la curvatura media son calculados y extraídos de la topografía tridimensional, jugando un papel crucial en la caracterización computacional de la reconstrucción. Modificar la calidad y resolución del mallado en términos de un requerimiento en específico, que para esta investigación fue el criterio de curvatura, es el objetivo principal del remallado. En este capítulo se presentan los dos tipos de remallados utilizados desde el punto de vista teórico, así como la implementación de dichos procesamientos. La preservación de características acompaña dichas modificaciones en el mallado de entrada. En esta parte esencial de la investigación se aplicó los conocimientos de capítulos anteriores para finalmente obtener los resultados del remallado bajo el criterio de curvatura.

Capitulo 5 - Remallado interactivo geodésico

Bajo la concepción de analizar las reconstrucciones tridimensionales como variedades diferenciales bidimensionales, el concepto de geodésica permite una poderosa caracterización de las superficies analizadas. Se presenta la implementación de un algoritmo de remallado que reduzca los datos de entrada en función de las curvaturas de la topografía, ya implícitas en la caracterización por geodésicas.

Capitulo 6 - Estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por la técnica de proyección de franjas

Una vez se han definido los procedimientos para generar un remallado interactivo basado en el criterio de curvatura, se presentan en este capítulo donde se debe incluir los anteriores conceptos en el procedimiento secuencial de R3DPF. En este capítulo se realizó un análisis detallado del estado actual de las capacidades del GOTS en materia de extracción de información tridimensional en objetos o

²Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales, Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

escenas. Se exponen en detalle las secciones con adelantos destacados en el proceso de reconstrucción tridimensional y las debilidades que se convierten en retos científicos. Una vez se tenga una base sólida todo el procedimiento de reconstrucción 3D, el GOTS realizara un estudio detallado que brindara la posibilidad de crear servicios de extensión al sector industrial y medico.

Capítulo 7 - Conclusiones y perspectivas

Esta investigación es resumida y descrita resaltando los aportes hechos a la temática de reconstrucción tridimensional que se efectúa en el GOTS. Además se explican las perspectivas a futuro para el mejoramiento del pos-procesamiento de las reconstrucciones tridimensionales, obtenidas del capítulo anterior.

1.4 Trabajos relacionados

En la actualidad se implementan en las áreas del modelamiento tridimensional, el procesamiento de imágenes y la visualización computacional, aplicaciones para el tratamiento de las nubes de puntos 3D. El algoritmo de clasificación supervisada k-NN es muy utilizado y facilita la obtención de vectores normales, curvaturas medias, mallados, entre otros fundamentos para la reconstrucción superficial. Li y Zisheng en [36], y Zhao y Jianhui en [60], entre mucho autores más, han implementado el algoritmo de clasificación k-NN al análisis de nubes de puntos dispersos en el espacio 3D. El algoritmo k-NN es una herramienta poderosa para la segmentación de la nube de puntos 3D, sin embargo el problema no queda ahí, pues para efectuar el análisis de curvaturas no son suficientes los criterios promedio y locales proporcionados por los diferentes ajustes aplicados mediante el algoritmo k-NN.

Se han introducido geometrías no euclidianas y la implementación de fundamentos matemáticos geométricos, tales como el concepto de variedad³ de Riemman para una completa descripción de las reconstrucciones tridimensionales. Como primer paso para el análisis de curvaturas en este nuevo espacio “curvado” la estimación numérica de las curvaturas se realiza mediante diferentes metodos, en los que algunos efectuan una reducción de dimensionalidad no lineal o también conocida como parametrización del espacio “curvo”, facilitando así los métodos numéricos y analíticos de los conceptos más básicos de curvatura. Hoy en día, existen gran cantidad de métodos de reducción dimensional no lineal [35], entre los que se encuentran con gran predominancia en la comunidad científica los métodos de eigenmapas mediante el operador diferencial de Laplace-Beltrami [34, 41].

En cuanto al cálculo de la curvatura, gracias a la implementación de la geometría Riemmaniana, se deriva el concepto de tensor de curvaturas que se encarga de almacenar toda la información referente a la curvatura de la superficie; actualmente se trabajan diferentes métodos numéricos para la estimación del tensor de Riemann [18, 32] entre los que resaltan las modificaciones de la aproximación de Taubin [52] quien fue de los primeros investigadores en calcular numéricamente dicho tensor en este ámbito.

Otro de los conceptos fundamentales introducidos por la geometría de Riemann es el concepto de geodésica, que en esencia minimiza la concepción de distancia en el nuevo espacio “curvado” y que numéricamente se encuentra en un estado realmente avanzado de estimación, e.g., con aplicaciones

³Rowland, Todd. “Manifold.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. <http://mathworld.wolfram.com/Manifold.html>

directas en las áreas del procesamiento de imágenes biomédicas, basados en el cómputo de geodésicas mediante el método de segmentación de contorno activo [51] o el cálculo de geodésicas sobre variedades diferenciales mediante el uso del flujo de calor [14].

Toda esta caracterización de las superficies tridimensionales facilitan la obtención de mallados adaptativos, según diferentes criterios, como es el caso del criterio de geodésica [42], por parametrización de variedades diferenciales [2], remallados uniformes [9] y bajo el criterio de curvatura [19]. Sin embargo lo que hace realmente valiosa esta investigación es la unificación que implementa mediante un procedimiento teórico-experimental sobre la reconstrucción tridimensional por proyección de franjas, hasta el punto de estar a la vanguardia en técnicas de modelamiento tridimensional directamente de áreas como las matemáticas y geometría aplicadas, para la producción de objetos tridimensionales con un análisis desde la metrología óptica, que se conviertan en soluciones de extensión a los sectores médico e industrial.

CAPÍTULO 2

Reconstrucción tridimensional: Conceptos básicos

La reconstrucción tridimensional [7, 31] es una herramienta de digitalización que analiza objetos del mundo real y obtiene las propiedades cualitativas y cuantitativas de la topografía del modelo de estudio. Los datos recolectados proporcionan las características de la forma y apariencia del objeto creando así un modelo computacional en tres dimensiones. Los datos obtenidos a partir de la reconstrucción 3D poseen propiedades físicas medibles, tales como la altura, anchura, profundidad, volumen, área de la superficie, proporciones de tamaño y ubicación en un entorno. Existen varios tipos de estas técnicas de digitalización que se clasifican básicamente en reconstrucciones de contacto, pasivas y activas.

Entre los procedimientos de contacto generalmente se utiliza una sonda para tocar físicamente puntos de interés sobre la superficie del objeto. El escáner es ubicado sobre una superficie fija, mientras que el objeto esta en contacto con el anterior y descansando sobre una superficie plana. La reconstrucción tridimensional de contacto de alta precisión es utilizada en la industria de fabricación y los dispositivos para dicho procedimiento se conocen como maquinas de medición de coordenadas o CMM¹ por su acrónimo en ingles.

La denotación de pasiva hace referencia a que no emiten ningún tipo de onda o radiación y que por el contrario estas técnicas detectan y analizan la radiación de ambiente reflejada por el objeto. Generalmente estos equipos utilizan fotografías digitales 2D para las obtención del modelo 3D mediante la comparación de puntos comunes desde ángulos diferentes. Una de estos métodos más famosos es la fotogrametría.

Para la reconstrucción 3D de no contacto activa se emite algún tipo de radiación electromagnética u ondas mecánicas y seguidamente se detecta su reflexión o la transmisión en el objeto, con el fin de sensar a este o su ambiente. Entre los diferentes tipos de emisiones utilizadas se incluyen la luz, el ultrasonido, las microondas, el infrarrojo y los rayos X. En las reconstrucciones activas de transmisión se tienen la tomografía computarizada (TC) y la tomografía de transmisión de ultrasonido (TTU). En principio, la reconstrucción activa por reflexión se basa en la resolución de distancias mediante el

¹Coordinate Measuring Machines

cálculo del tiempo de vuelo de la onda, en donde los métodos mas usados son por triangulación laser, holografía concoscópica, por luz modulada y por luz estructurada. La perfilometría por proyección de franjas es clasificada entre las técnicas de reconstrucción tridimensional de no contacto activa por luz estructurada, siendo esta la implementada en el GOTS.

2.1 Reconstrucción 3D por proyección de franjas

La R3DPF proporciona una nube de puntos que corresponden a las coordenadas espaciales de los puntos de la superficie del modelo muestreados y se basa en un patrón de franjas sinusoidales de corrimiento continuo, es decir, con fase continua, que se proyecta sobre el objeto a digitalizar. Las franjas de luz son deformadas por la topografía del objeto [21, 43, 55]. El montaje experimental se compone de una unidad de proyección, un dispositivo de adquisición y un equipo de procesamiento. La distribución de intensidades del patrón de franjas para un sistema no-telecéntrico, con ángulo entre los ejes de proyección y observación está dada por:

$$I(x, y) = I_b(x, y) + I_m(x, y)\cos(2\pi\nu_0x + \phi(x, y)), \quad (1)$$

donde $I_b(x, y)$ se conoce como la intensidad de fondo continuo, $I_m(x, y)$ es la distribución no uniforme de reflectancia difusa sobre el objeto o también conocida como la intensidad de modulación, ν_0 la frecuencia espacial media y $\phi(x, y)$ son las modulaciones de fase resultantes de la distribución de alturas del objeto y distorsiones geométricas del sistema. Al incidir las franjas paralelas sobre el objeto a reconstruir, se produce un desfase implícito en las modulaciones de fase $\phi(x, y)$ de la ecuación (1). Por consiguiente, la distribución de intensidades para un plano de referencia R donde $h(x, y) = 0$ puede ser expresada como:

$$I_0(x, y) = I_b(x, y) + I_m(x, y)\cos(2\pi\nu_0x + \phi_0(x, y)), \quad (2)$$

de la cual, el objetivo principal de la técnica de proyección de franjas es calcular a partir de las ecuaciones ((1),(2)) el desfase

$$\Delta\phi(x, y) = \phi(x, y) - \phi_0(x, y), \quad (3)$$

puesto que el desplazamiento $\Delta\phi(x, y)$ en la fase, está directamente relacionado con la información metrológica que describe la topografía del objeto. La figura 1 muestra un diagrama esquemático de la R3DPF.

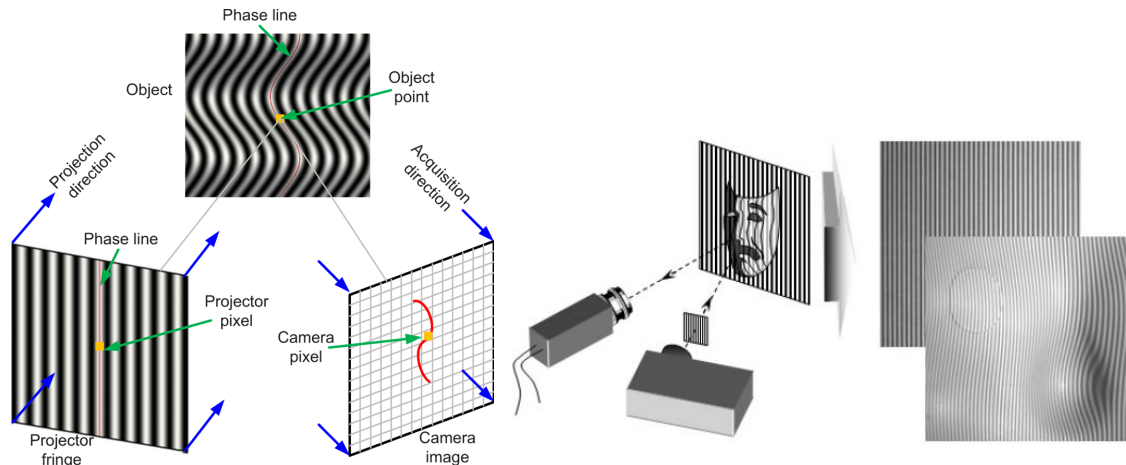


Figura 1: Diagrama esquemático de la técnica de proyección de franjas en la cual se proyecta un patrón de franjas paralelas sinusoidales mediante un dispositivo de proyección (proyector); subsecuentemente, se produce un desfase $\Delta\phi$ debido a la topografía del objeto que es registrado por la unidad de adquisición (cámara CCD). Fuente: [30]

Para la metodología de trabajo de la R3DPF (ver figura 2), inicialmente se realiza un proceso de calibración, en el que se extraen las propiedades intrínsecas y extrínsecas del hardware utilizado, es decir, del proyector y de la cámara. Con estos parámetros se obtiene una relación entre el sistema de coordenadas del proyector y el sistema de coordenadas de la cámara, obteniendo una transformación para los dos sistemas de referencia; esta transformación define entonces el proceso de calibración del montaje experimental. Consecuentemente, se procede a proyectar el patrón de franjas sobre el objeto a digitalizar y efectuar capturas con la cámara para diferentes pasos en las franjas, para posteriormente recuperar la fase continua $\Delta\phi(x, y)$ mediante la etapa de adquisición y desenvolvimiento de fase. Con los resultados de la adquisición de la fase se efectúa un cálculo de las alturas z utilizando la transformación de coordenadas obtenida en el proceso de calibración y asociándolas a cada punto (x, y) de la superficie del objeto; este procedimiento se conoce como mapeo fase-altura. Finalmente se obtiene una matriz de dimensión $(M, 3)$, donde M corresponde al total de puntos obtenidos de la reconstrucción superficial y en el que las tres columnas representan las coordenadas en el espacio tridimensional de cada uno de los puntos. El resultado final se conoce como nube de puntos dispersos. Las siguientes subsecciones detallan las etapas de la R3DPF.

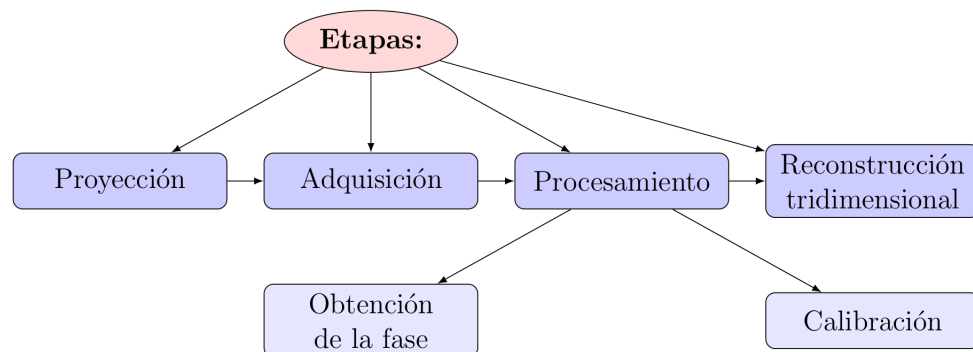


Figura 2: Etapas de la perfilometría por proyección de franjas. Fuente: [46].

2.1.1. Técnica de calibración

La calibración es parte esencial de la R3DPF, González et al. en [23, 24] desarrollaron una técnica de calibración flexible en donde el procedimiento se fundamenta en calcular los factores de una expresión matemática que relacione el sistema de coordenadas del proyector con el sistema de coordenadas de la cámara. Estos factores dependen directamente de los parámetros extrínsecos de la cámara y los parámetros intrínsecos del proyector. Fundamentalmente, el principio de calibración esta basado en el modelo de pinhole de la cámara; la figura 3.(a) muestra el sistema de coordenadas usado para un sistema de R3DPF. El arreglo (X_P, Y_P, Z_P) denota el sistema de coordenadas del proyector y tiene su origen en la pupila de entrada del objetivo de proyección. EL LCD² corresponde al plano en el cual es ubicada la distribución de transmitancia para ser proyectada. Un punto en el objeto es localizado usando dos sistemas de coordenadas, (m, n) en pixeles y X_P, Y_P en milímetros.

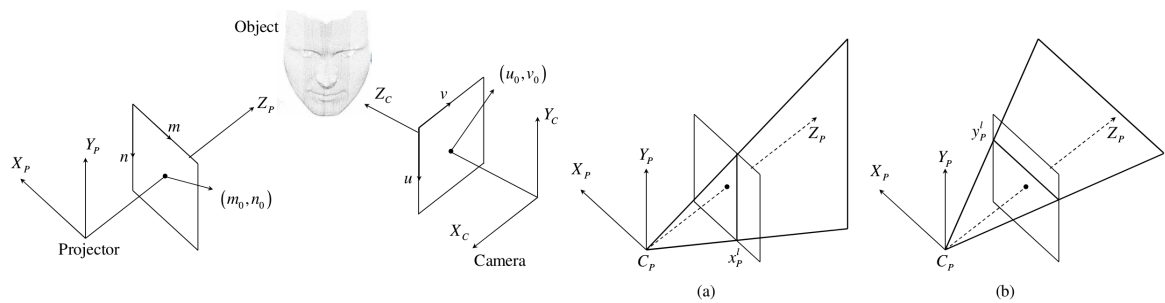


Figura 3: Sistema de coordenadas utilizado para la técnica de calibración. Proyección de planos para las coordenadas (a) m y (b) n . Fuente: [21].

Un rayo de luz que pasa por el punto de la LCD de coordenadas $m = m_x$, $n = n_y$ e intercepta al objeto, se puede descomponer como dos planos de luz que pasan por la fila m_x y columna n_y , ver figura 3.(a,b). Matemáticamente este plano de luz se puede expresar como

$$f_P X_P - x_P^l Z_P = 0 \quad \wedge \quad f_P Y_P - y_P^l Z_P = 0, \quad (4)$$

donde f_P define la longitud focal del objetivo de proyección, K_x y K_y son los factores de conversión en $[mm/pixel]$ del proyector, x_P^l y y_P^l comprenden las coordenadas en milímetros del punto en píxeles (m_x, n_y) , dado por

$$x_P^l = K_x(m_x - m_0) \quad \wedge \quad y_P^l = K_y(n_y - n_0). \quad (5)$$

Cada eje define un plano en el espacio tridimensional como se muestra en la figura 3.(b). La transformación de coordenadas entre el sistema de la cámara y el del proyector esta definido por la ecuación matricial:

²Liquid-Cristal Display

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{C11} & r_{C12} & r_{C13} \\ r_{C21} & r_{C22} & r_{C23} \\ r_{C31} & r_{C32} & r_{C33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_C} \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} t_{C1} \\ t_{C2} \\ t_{C3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{t}_C}, \quad (6)$$

donde \mathbf{R}_C representa la matriz de rotación y el vector \mathbf{t}_C la traslación entre los sistemas coordenados. Usando las ecuaciones (4) es posible escribir cada plano en función del sistema de coordenadas de la cámara:

$$w_{11}X_c + w_{12}Y_c + w_{13}Z_c + w_{14} - w_{31}m_xX_c - w_{32}m_xY_c - w_{33}m_xZ_c - w_{34}m_x = 0, \quad (7)$$

$$w_{21}X_c + w_{22}Y_c + w_{23}Z_c + w_{24} - w_{31}n_yX_c - w_{32}n_yY_c - w_{33}n_yZ_c - w_{34}n_y = 0, \quad (8)$$

donde los coeficientes w_{ij} son expresados en función de los parámetros intrínsecos del proyector (m_0, n_0, K_x, K_y) y de los elementos de \mathbf{R}_C y \mathbf{t}_C . Una descripción mas detallada acerca de la formulación de los coeficientes w_{ij} fue elaborada por González et al. en [21].

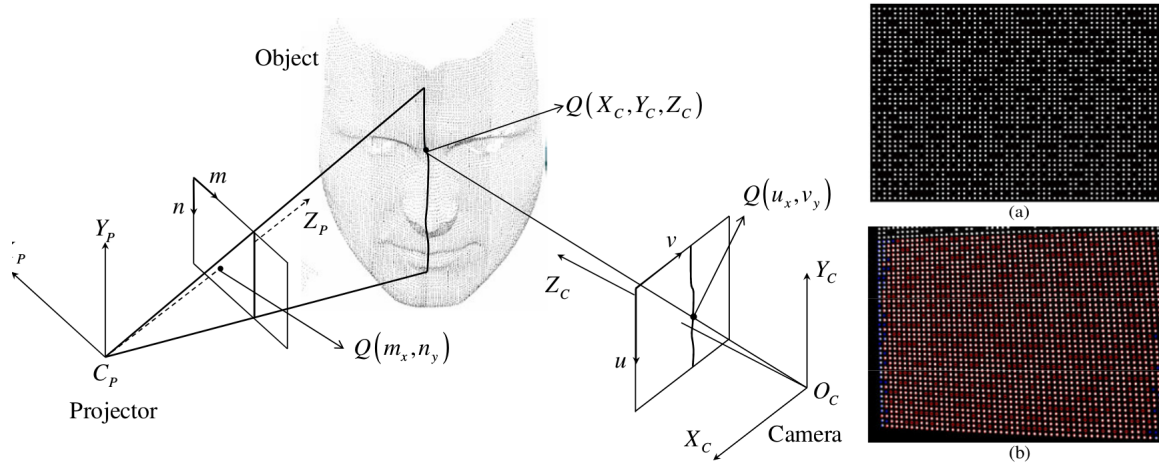


Figura 4: Una franja proyectada en la superficie de un objeto. Patrón de puntos: (a) Patrón proyectado por el proyector. (b) Patrón capturado por la cámara. Fuente: [21].

Según las ecuaciones (7) y (8), para el proceso de calibración se requiere para cada punto (m_x, n_y) valores (X_C, Y_C, Z_C) en el volumen de calibración. Esto se puede obtener utilizando una superficie plana y proyectando un patrón de puntos, con valores conocidos de (m_x, n_y) , como se indica en la ecuación 5 y capturando las imágenes del patrón de puntos usados por la cámara, en diferentes posiciones relativas dentro de volumen de calibración. González et al. en [22] proponen que para cada posición del plano se efectúe una captura de la proyección del patrón de puntos y se proceda mediante procesamiento digital y análisis de Fourier a calcular las coordenadas (u_x, v_y) sobre la CCD, de los puntos de control, que junto con los parámetros intrínsecos y extrínsecos computados previamente con el método desarrollado por Zhang et al. en [57], calculan las coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) para cada punto del patrón. Finalmente, se reemplazan los arreglos de posición de cada punto en las ecuaciones (7) y (8), obteniendo un sistema de ecuaciones lineales con los coeficientes w_{ij} como variables desconocidas. Dado que se usan N puntos de control y se adquieren un total de M imágenes, se producen en total $2 \times N \times M$ ecuaciones

lineales, que pueden ser resueltas mediante los métodos clásicos. Las ecuaciones de los planos pueden ser reescritas como una ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} \alpha m_x \\ \alpha n_y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{c11} & w_{c12} & w_{c13} & w_{c14} \\ w_{c21} & w_{c22} & w_{c23} & w_{c24} \\ w_{c31} & w_{c32} & w_{c33} & w_{c34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Para un punto con coordenadas (m_x, n_y) y que esta ubicado en el plano objeto del proyector, es posible calcular las ecuaciones de los planos (en el sistema de coordenadas de la cámara) siendo estos paralelos al plano formado por X_P y Y_P respectivamente, que pasan a través de dicho punto. Dado que el sistema proyecta en el plano objeto un patrón de franjas con una distribución de intensidades definida por la ecuación (1), el cambio en la fase ϕ tiene una relación lineal con la posición m y depende del paso de las franjas p , con lo que se hace primordial la obtencion del valor de fase para alcanzar la reconstrucción tridimensional.

2.1.2. Adquisición de la fase continua

Para la obtención de la fase o mapa de fase bidimensional se utilizó el algoritmo de corrimiento de fase desarrollado por Hibino et al. en [27]. La distribución de fase de un frente de onda está codificada en la variación de irradiancia. La diferencia de fase de dos patrones proyectados que interfieren entre sí, puede ser obtenida analizando punto por punto la distribución de intensidades de tres o más interferogramas dependiendo de cómo se hagan variar las diferencias de fase de estos. La construcción del algoritmo de corrimiento de fase considera en primer lugar que la señal es sinusoidal y que el sistema de medición no posee error en el cambio de fase. Entre las ventajas del algoritmo de corrimiento de fase se tiene que facilita la medición punto a punto, posee baja sensibilidad a las propiedades reflectantes de la superficie del objeto de estudio y además proporciona mediciones con alta resolución y alta precisión como lo muestra Contreras et al. en [43]. La distribución de intensidades que considera el algoritmo es del tipo

$$I_{\theta_i}(x, y) = I_b(x, y) + I_m(x, y)\cos(\phi(x, y) - \theta_i), \quad (10)$$

donde se ve claramente que corresponde al mismo patrón de franjas que expresa la ecuación (1), con la disparidad de que tiene un ángulo de diferencia de fase entre patrones de franjas denotado como θ_i . De forma general, para m patrones de franjas proyectados el argumento de la función arcotangente está dada por una combinación lineal de las irradiancias proyectadas. Una expresión general para el algoritmo de corrimiento de fase es [27]

$$\phi = \arctan \frac{\sum_{i=1}^m b_i I_i}{\sum_{i=1}^m a_i I_i}, \quad \text{donde } b_i = \text{sen}\theta_i \text{ y } a_i = \text{cos}\theta_i, \quad (11)$$

si se toma el conjunto de ángulos de diferencia de fase $\theta_i = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, se define la fase $\phi(x, y)$ como [12, 43]:

$$\phi(x, y) = \arctan \left[\frac{I_{3\pi/2}(x, y) - I_{\pi/2}(x, y)}{I_0(x, y) - I_{\pi}(x, y)} \right], \quad (12)$$

que proporciona una fase con un dominio de valores en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ o si se utiliza la función atan2 ³ definida en diferentes lenguajes de programación como la función trigonométrica arcotangente para dos argumentos, entonces el dominio queda definido en el intervalo $(-\pi, \pi)$; las discontinuidades se dan cada 2π saltos de fase como se observa en la figura 5, con lo que claramente se llega a una fase discontinua, donde subsecuentemente la fase continua se obtiene mediante el algoritmo de desenvolvimiento de fase espacial⁴ o el algoritmo desenvolvimiento de fase temporal⁵. Rodríguez et al. en [46] realizan un análisis exhaustivo de los diferentes métodos para la recuperación de la fase.

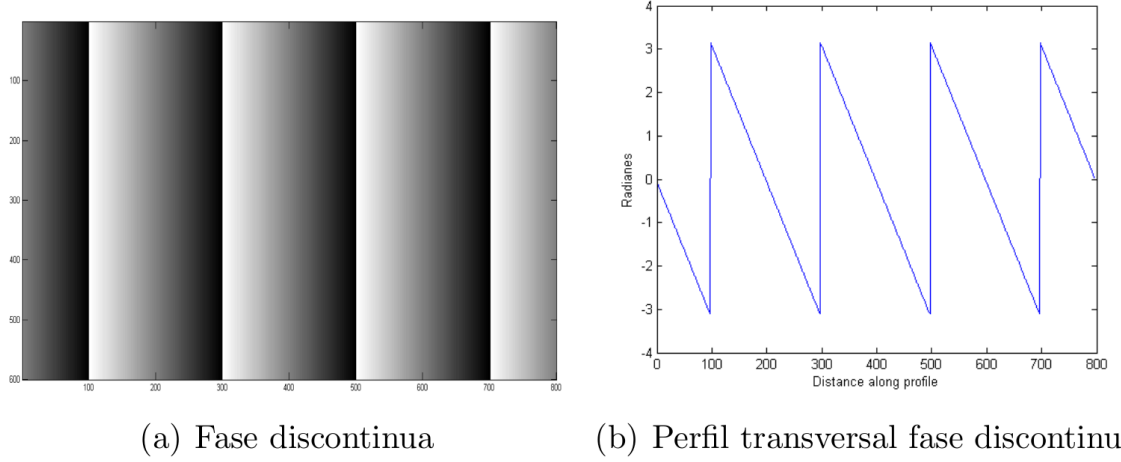


Figura 5: Fase envuelta y su respectivo perfil. Fuente: [46].

Desenvolvimiento de fase espacial

La idea principal del algoritmo SPU como lo muestra Meneses et al. en [37], es comparar los valores de fase de un punto con sus vecinos más cercanos. Sean las fases ϕ_A y ϕ_B para los píxeles “A” y “B”, respectivamente, es posible realizar el desenvolvimiento contando el número de 2π discontinuidades a lo largo del camino \overline{AB} que une dichos píxeles. Es por esto que la fase se ve representada por la secuencia $\phi(i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) a lo largo del camino \overline{AB} . Las discontinuidades a lo largo de este trayecto están denotadas por $d(i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) entre los píxeles $(i - 1)$ é (i) . La ecuación para el calculo de las discontinuidades es

$$d(i) = \left\lceil \frac{\phi(i) - \phi(i - 1)}{2\pi} \right\rceil, \quad (13)$$

donde [...] denota redondeo al entero más cercano.

El corrimiento de fase entre dos píxeles vecinos esta en el rango de $-\pi$ a π , valores fuera de este rango corresponde a una discontinuidad que se encuentra entre estos dos píxeles y al que se le asigna un valor d que puede ser -1 ó $+1$. El número total de 2π discontinuidades a lo largo del trayecto \overline{AB} se obtiene mediante

³Weisstein, Eric W. “Inverse Tangent.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource.

⁴SPU: Spatial Phase-Unwrapping

⁵TPU: Temporal Phase-Unwrapping

$$\nu = \sum_{i=1}^N d(i), \quad (14)$$

en donde al valor de la fase del píxel “ B ” se le adiciona $\pm 2\pi\nu$.

El algoritmo SPU compara los valores de fase entre píxeles vecinos y establece la condición de que el valor mas cercano a 2π representa una discontinuidad. La resolución de dicha discontinuidad se lleva acabo sumando o restando $2\pi\nu$, dependiendo de la dirección en la que se lleva a cabo el desenvolvimiento, obteniendo finalmente una fase continua como se observa en la figura 6.

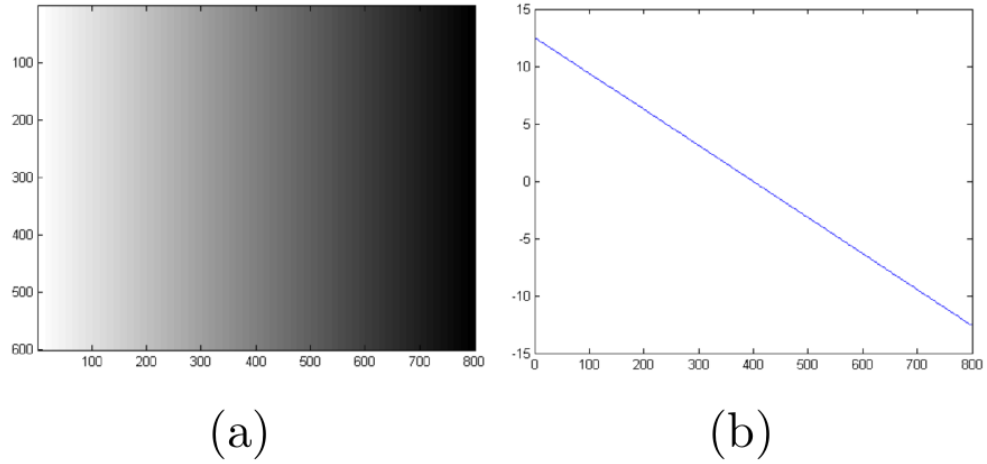


Figura 6: (a) Distribución de fase continua, (b) Corte transversal de la fase. Fuente: [46].

Desenvolvimiento de fase temporal

Entre las posibilidades para la obtención de una fase continua, Huntley et al. en [29] proponen la medición de los valores de fase de cada píxel como una función del tiempo. Se define entonces un eje temporal a lo largo del cual se realiza el proceso de desenvolvimiento para cada píxel, independiente a otros puntos. La ventaja principal del algoritmo TPU es la no propagación espacial de errores. Dicho eje temporal se obtiene al proyectar franjas de diferentes pasos p , en las que para cada una se efectuá la captura de cuatro imágenes de intensidad con corrimiento de $\pi/2$ consecutivos y se procede a calcular la fase discontinua. La figura 8.(a) muestra las fases discontinuas obtenidas cuando se proyectan sobre una superficie plana nueve patrones de franjas con pasos crecientes, donde cada posición t corresponde a la distribución de fase discontinua correspondiente.

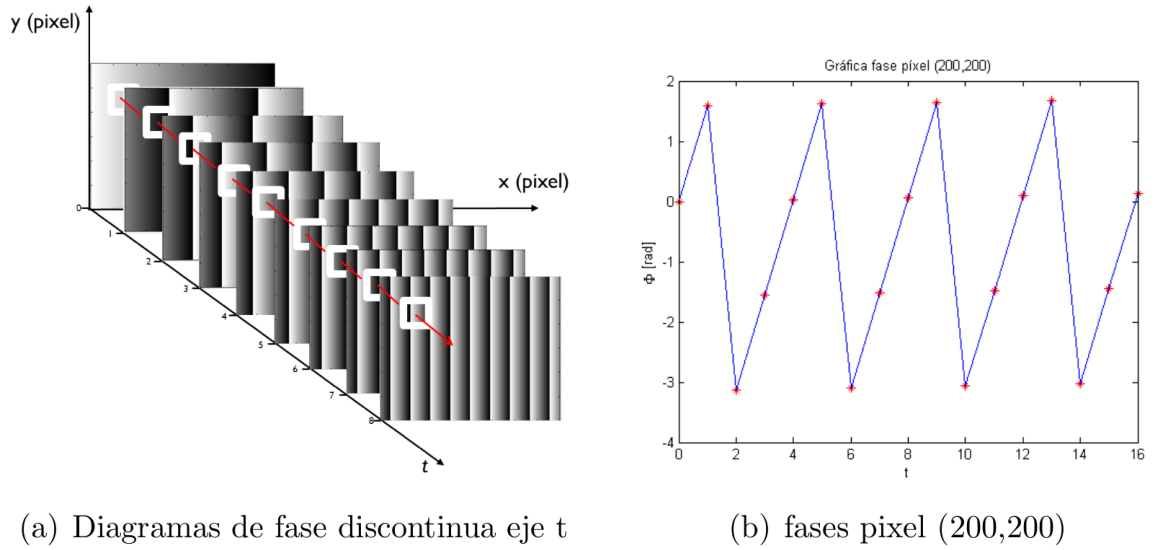


Figura 7: Desenvolvimiento de fase temporal. Fuente: [46].

La fase de un píxel de coordenadas (m, n) en el t - *esimo* termino de la secuencia $(t = 0, 1, 2, \dots, s)$ de mapas de fase, se denota como $\phi(m, n, t)$. Las 2π discontinuidades se computan convirtiendo la ecuación (13) al espacio tridimensional:

$$d(m, n, t) = \left[\frac{\Delta\phi(m, n, t)}{2\pi} \right], \quad (15)$$

donde $\Delta\phi(m, n, t)$ es la diferencia entre el t - *esimo* y $(t - 1)$ - *esimo* mapa de fase, i.e.

$$\Delta\phi(m, n, t) = \phi(m, n, t) - \phi(m, n, t - 1). \quad (16)$$

El total de 2π discontinuidades hasta el s - *esimo* mapa de fase se obtiene de

$$\nu(m, n, s) = \sum_{t=1}^s d(m, n, t), \quad (17)$$

donde $2\pi\nu(m, n, s)$ es sustraído o adicionado a $\phi(m, n, s)$ para obtener la fase en el píxel. Los mapas de fase discontinua se calculan de acuerdo a la ecuación

$$\phi(t) = \arctan \left(\frac{\Delta I_{42}(t)}{\Delta I_{13}(t)} \right) \quad \text{donde} \quad \Delta I_{ij}(t) = I_i(t) - I_j(t). \quad (18)$$

La fase $\phi(t)$ tiene valores comprendidos entre $-\pi$ a $+\pi$ debido a la función arcotangente, es por esto que $\Delta\phi(t)$ siempre esta en el rango de -2π a $+2\pi$, según la ecuación 16. Tras el corrimiento de fase, usualmente la fase ϕ esta comprendida en el intervalo de $-\pi$ a $+\pi$, pero para el TPU $\Delta\phi$ esta en

el rango -2π a $-\pi$ ó $+\pi$ a $+2\pi$, cuando una 2π discontinuidad de fase se cruza. Los valores de $\Delta\phi$ que se encuentran fuera del intervalo $-\pi$ a $+\pi$ producen valores distintos de cero de $d(t)$ como se ve en la ecuación (16), además contribuyen al requisito de desenvolvimiento del s -ésimo mapa de fase mediante la ecuación (17). Sin embargo, $\Delta\phi(t)$ se puede calcular directamente desde $I_1(t), \dots, I_4(t)$ é $I_1(t-1), \dots, I_4(t-1)$ con la expresión

$$\Delta\phi(t) = \arctan \left(\frac{\Delta I_{42}(t)\Delta I_{13}(t-1) - \Delta I_{13}(t)\Delta I_{42}(t-1)}{\Delta I_{13}(t)\Delta I_{13}(t-1) - \Delta I_{42}(t)\Delta I_{42}(t-1)} \right). \quad (19)$$

En esencia, es primordial que la diferencia de fase $\Delta\phi$ calculada por medio de la ecuación (19) este comprendida automáticamente en el rango $-\pi$ a $+\pi$; i.e. que los elementos de la matriz de desenvolvimiento $d(m, n, t)$ son ceros, debido a la ecuación (15). Entonces el s -ésimo mapa de fase puede ser calculado por la suma de las diferencias de fase sin un desenvolvimiento adicional como lo efectúa Huntley et al. en [29]

$$\phi(m, n, s) = \sum_{t=1}^s \delta\phi(m, n, t). \quad (20)$$

La figura 8 muestra algunos diagramas de fase discontinua para diferentes pasos de franjas proyectadas. El objetivo del algoritmo TPU es obtener la fase continua del último grupo de franjas proyectado a partir de la información de los mapas de fase anteriores, sin recurrir al análisis espacial de la fase discontinua.

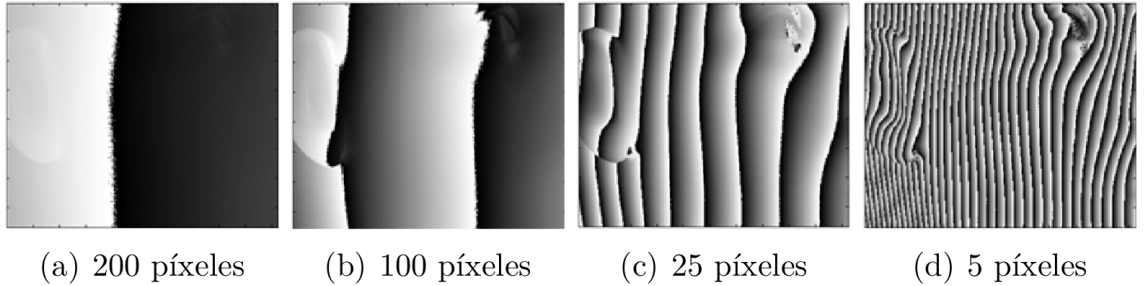


Figura 8: Fase discontinua para cada paso de proyección. Fuente: [46].

La ecuación (20) es trascendental puesto que implica que a medida que se proyecta un nuevo grupo de franjas, se computa su respectiva fase continua sumando las diferencias de las fases anteriores. En la figura 9 se observa la evolución de la fase continua hasta la obtención de la fase del último conjunto de franjas proyectados.

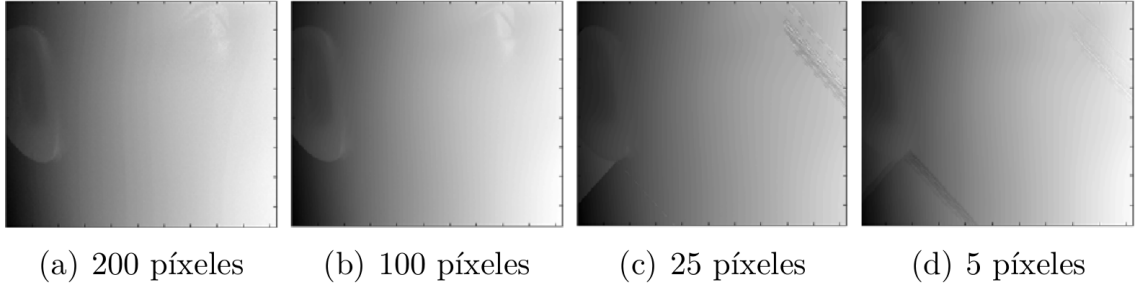


Figura 9: Fase continua para cada paso de proyección. Fuente: [46].

Para cada valor de la fase ϕ es bien conocido su correspondiente punto (m_x, n_y) ubicado en la imagen; esto asocia la fase al valor $m = p\phi/2\pi$. Por consiguiente, la ecuación del plano paralelo a Y_P en coordenadas m y la ecuación de la línea $\overline{O_cQ}$ (ver figura 3) en el sistema de coordenadas de la cámara es calculado usando los parámetros intrínsecos de la cámara. La intersección entre el plano y la línea define las coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) de los puntos de la imagen, como se muestra en la figura 4. Esto conduce al mapeo fase-altura que empalma el valor de la fase $\Delta\phi(x, y)$, con los resultados de la técnica de calibración.

2.1.3. Mapeo fase-altura

El diagrama esquemático para la representación del funcionamiento y los componentes básicos de un video proyector se encuentra en la figura 10. Un punto x_P en el LCD del proyector posee coordenadas (m, n) en píxeles. A una distancia d_0 respecto al centro del lente C_P , es proyectado un punto X con coordenadas espaciales (X_P, Y_P, Z_P) a una distancia imagen d_i respecto a C_P . Este esquema presenta una modificación en la que se supone que el LCD se encuentra ubicada delante de la lente del proyector, a una distancia $d_0 \approx f_P$ medido desde C_P ; esto con el fin de excluir la inversión de la imagen que realiza electrónicamente el sistema de proyección. Este modelo propuesto por Zhang et al. en [58] en comparación con el modelo de pinhole de la cámara solo se diferencia en la dirección de la luz, se conoce como modelo de cámara inversa.

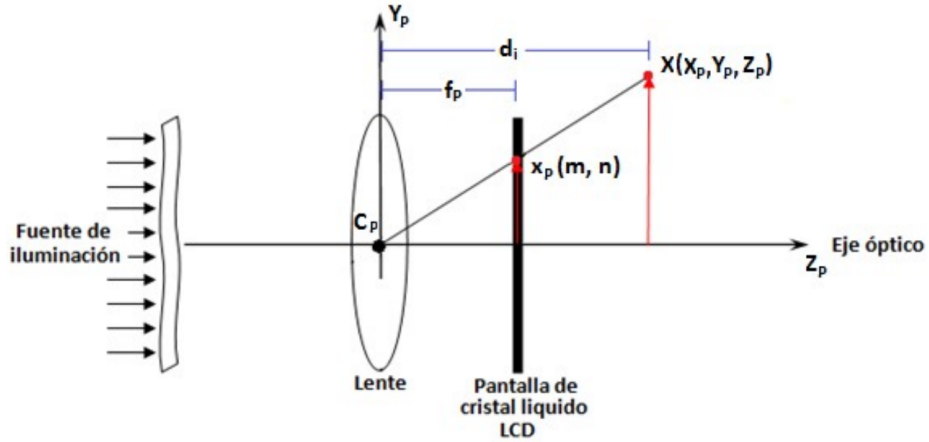


Figura 10: Modelo de cámara inversa para el video proyector. Fuente: [21].

Como ya se ha mencionado anteriormente, sobre el LCD del proyector se define un sistema coordenado con origen en el centro del panel C_{LCD} , como se muestra en la figura 11.(a). Las coordenadas de dicho centro se representan por (m_0, n_0) .

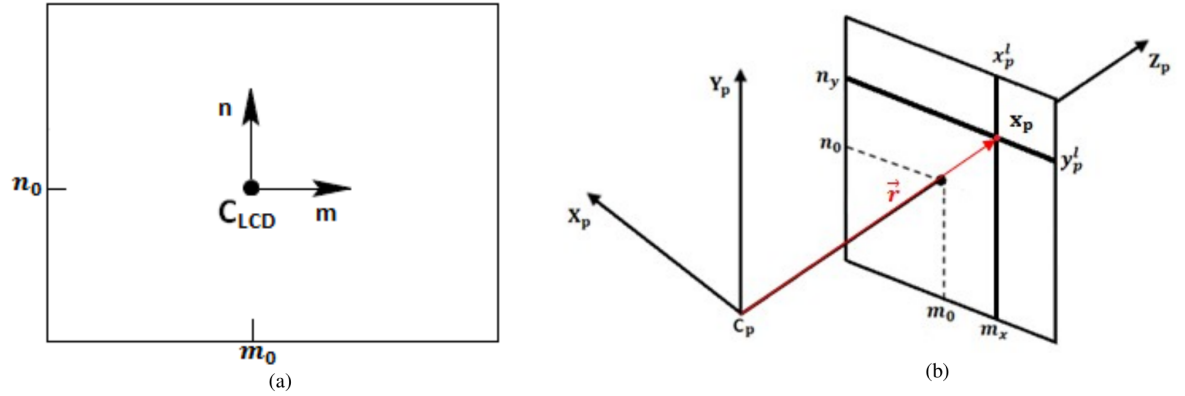


Figura 11: (a) Diagrama esquemático de las coordenadas (m, n) en el LCD. (b) Sistema de coordenadas del proyector en la relación con las coordenadas (m, n) . Fuente: [21].

En consecuencia, la intersección entre una fila n_y y una columna m_x en píxeles o la posición (x_p^l, y_p^l) en coordenadas métricas referenciadas con respecto a C_{LCD} , definen un punto sobre el LCD como se muestra en la figura 11.(b).

Ahora, cuando se proyecta un patrón de franjas verticales en el panel LCD con la distribución de intensidades dada por la ecuación (1), la fase tiene la forma

$$\phi = \frac{2\pi m}{p}, \quad (21)$$

donde m es la coordenadas horizontal y p el paso de proyección de las franjas, ambos en píxeles. Es por esto que es posible reescribir la ecuación (1) como

$$I(x, y) = I_b(x, y) + I_m(x, y) \cos\left(\frac{2\pi(m - m_0)}{p}\right), \quad (22)$$

de donde se concluye que las franjas poseen la información de la componente horizontal del sistema coordinado del LCD, como lo muestra González et al. en [21]. El valor de fase $m = m_0$ es cero e indica la posición de la franjas de orden cero.

La figura 12 presenta una distribución de franjas verticales a lo largo del eje horizontal m y su respectivo perfil de intensidad.

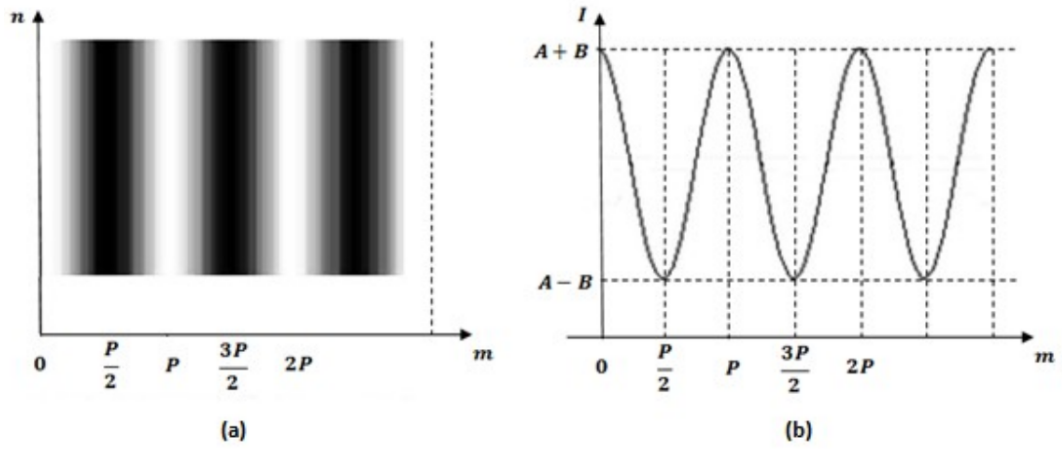


Figura 12: (a) Patrón de franjas sinusoidales. (b) Perfil de intensidad representativo. Fuente: [21].

La variación de la fase en función del paso es mostrada en la figura 13.

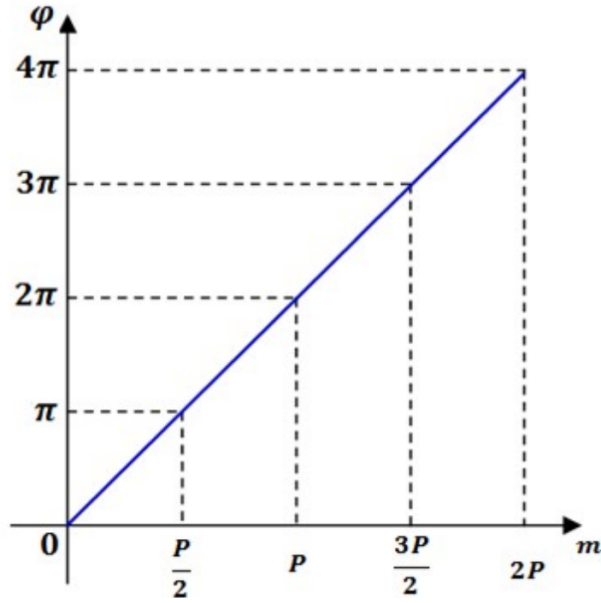


Figura 13: Gráfico de la fase ϕ en función del paso p . Fuente: [21].

Al proyectar una franja vertical x_p^l como lo detalla en la figura 11, es posible deducir de la ecuación (21) que la posición horizontal m_x en píxeles esta dada por

$$m_x = \frac{\phi_x p}{2\pi} = \frac{\phi_x}{k_x} \quad \text{donde} \quad k_x = \frac{2\pi}{p}. \quad (23)$$

Según el análisis anterior, en la columna m_0 se ubica la franja de orden cero ($\phi = 0[\text{rad}]$) y alrededor de esta columna se ubican las demás franjas verticales. Al proyectar sobre el cuerpo las franjas y al calcular la fase, se obtiene en coordenadas de la CCD, la fase continua de tal manera que se identifique cual es la fase $\phi = 0$ del proyector y las demás organizadas de manera creciente de izquierda a derecha; este es el concepto de fase absoluta, que permite calcular m_x según la ecuación 23, para cada punto de la CCD. Como se conocen los parámetros intrínsecos de la CCD, se conoce la ecuación de la línea de visión que pasa por (x, y) y como para este punto se conoce m_x , se tiene la ecuación del plano de luz que pasa por m_x , la intersección determina las coordenadas del punto (X_C, Y_C, Z_C) , ver figura 14. Repitiendo el proceso para todos los puntos en la imagen con valores de fase continuos, se obtiene la nube de puntos de la superficie de estudio muestreada.

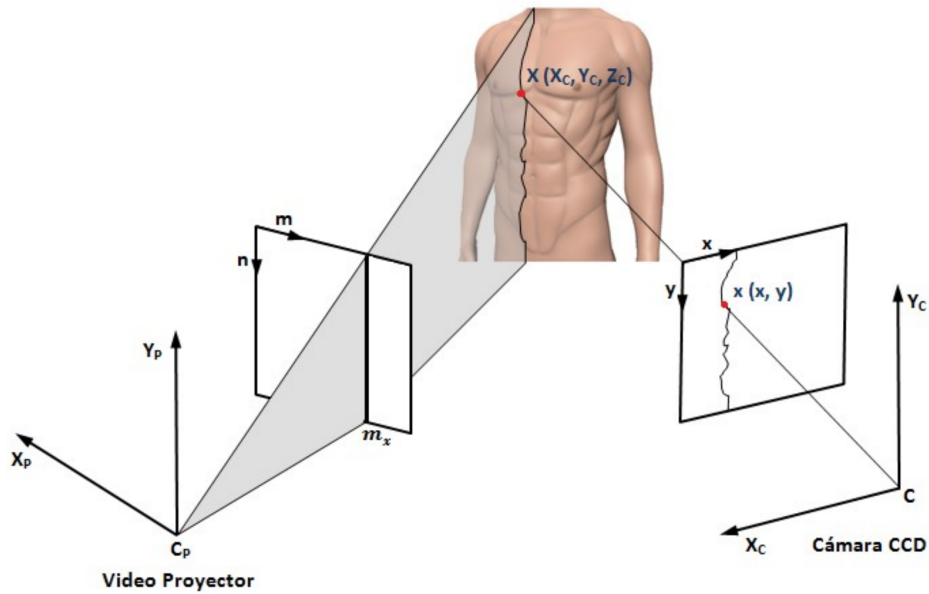


Figura 14: Procedimiento de reconstrucción 3D del torso humano. Fuente: [21].

2.2 Visualización de la nube de puntos y planteamiento del problema

Los modelos tridimensionales son conformados por una nube de puntos dispersos a los que posteriormente se les proporciona una superficie bien definida. La figura 15 muestra el modelo 3D del busto de Albert Einstein⁶. Una nube de puntos no es más que la visualización del arreglo (X_C, Y_C, Z_C) de los puntos sobre la superficie del objeto y que brinda muy poca información acerca de la topografía del objeto y que además cuenta con diferentes problemáticas como se muestra en la figura 15. El principal problema de la representación por nubes de puntos es la noción de superficie que esta no representa, como se observa claramente entre las figuras 15 y 16. Otra falencia en la visualización se produce cuando dos regiones del objeto 3D se superponen desde una misma perspectiva, como se muestra en las ampliaciones de dichas imágenes, puesto que esto dificulta el reconocimiento de que parte de la superficie pertenece cierto conjunto de puntos. En el caso del modelo tridimensional de Einstein, se observa que los puntos correspondientes a la parte posterior de la cabeza, se mezclan visualmente con los puntos que componen el rostro.

⁶Modelo 3D “Albert Einstein Bust” bajo licencia Creative Commons. <http://www.thingiverse.com/thing:966908>

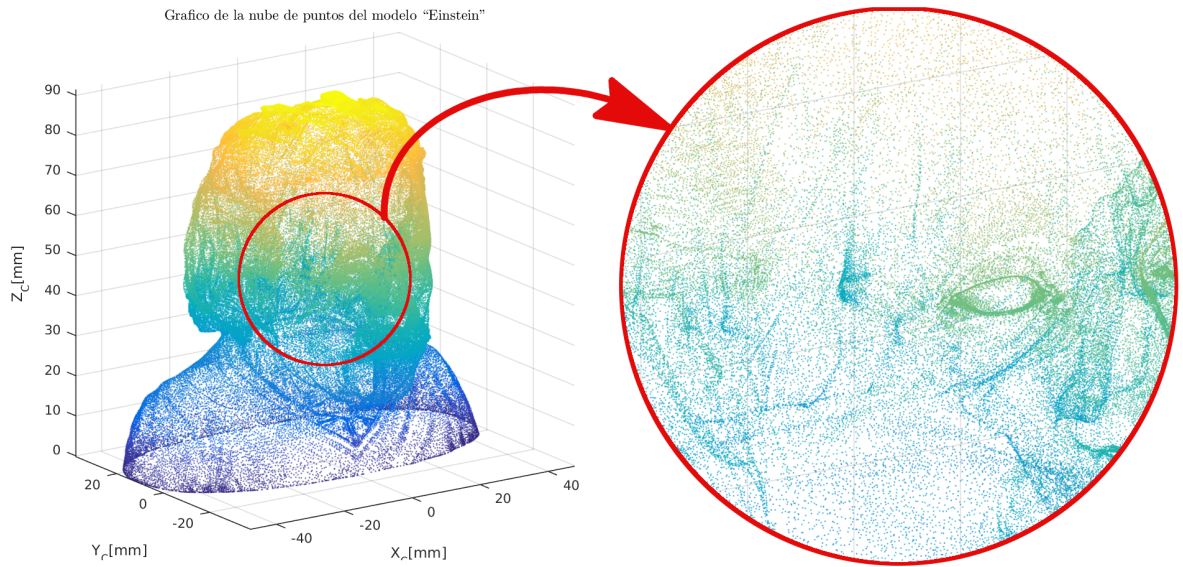


Figura 15: Nube de puntos del modelo tridimensional "Einstein" y su respectiva ampliación.

La figura 16 no es mas que la misma representación vista desde una segunda perspectiva y muestra exactamente la misma problemática.

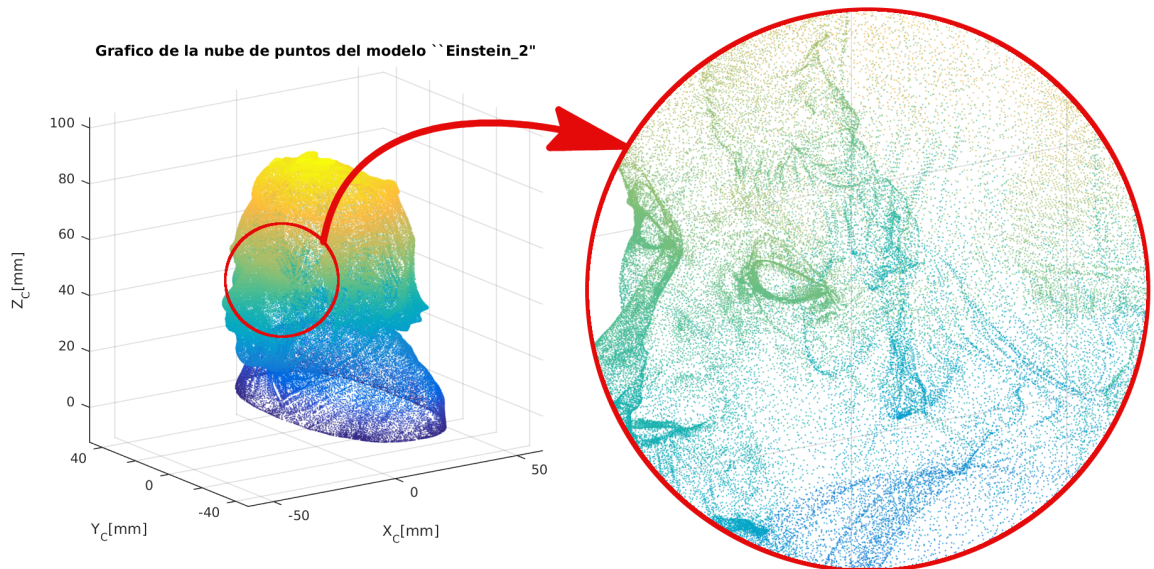


Figura 16: Nube de puntos del modelo tridimensional "Einstein" desde una segunda perspectiva.

La reconstrucción tridimensional por proyección de franjas posee grandes ventajas respecto a otras técnicas de reconstrucción 3D y radican en su alta resolución, su precisión y su reducido costo de

implementación. Es por esto que las nubes de puntos obtenidas por R3DPF poseen una gran densidad de datos, por lo que se hace necesario un pos-tratamiento de las nubes de puntos tridimensionales dependiendo de las condiciones de visualización. La figura 17.(a) muestra el objeto real y la figura 17.(b) su respectiva nube de puntos obtenida por TPFR. Dada que la densidad de puntos es tan elevada en comparación al área reconstruida, este hecho es el causante de la alta resolución del sistema de reconstrucción por proyección de franjas, pero que en contraste dificulta en gran medida la correcta visualización del objeto 3D, pues como se observa en la figura 17.(b) no es posible identificar puntos discretos, sí no que por el contrario, se muestra una distribución de color continua. Esto desfavorece la visualización y conlleva a buscar otras metodologías para la representación del objeto tridimensional.

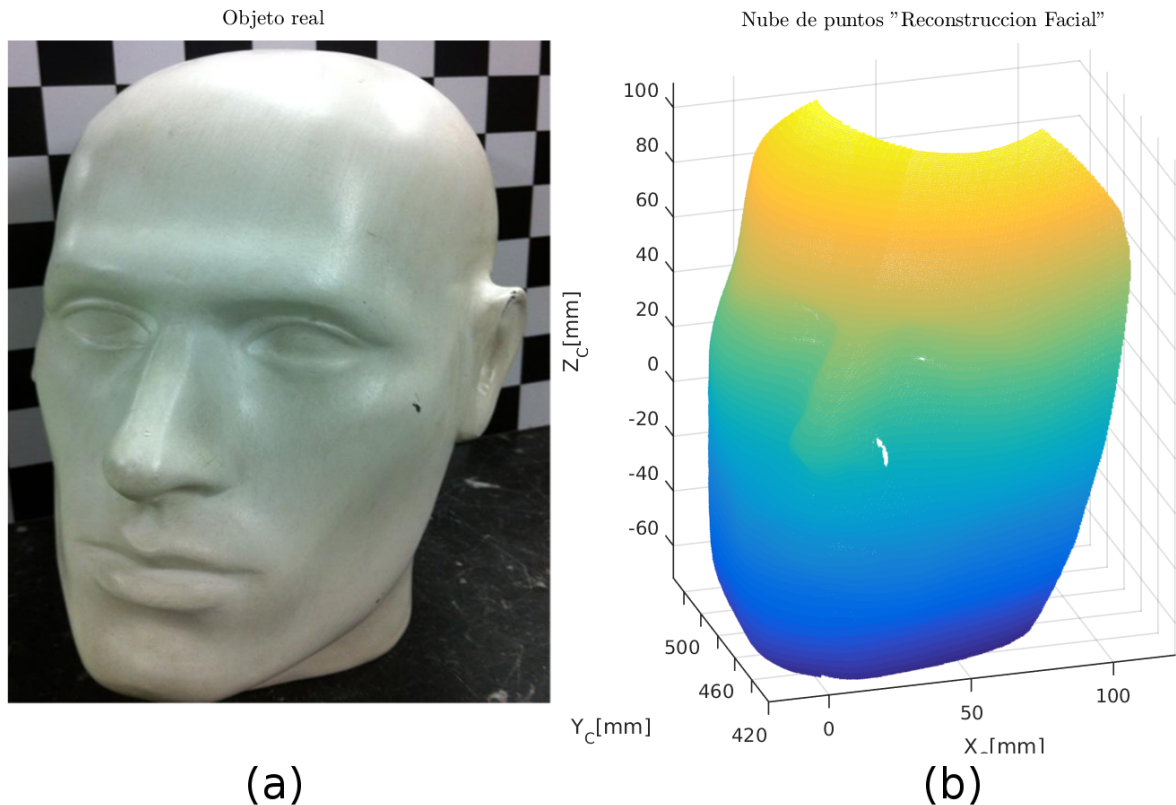


Figura 17: (a) Objeto real. (b) Nube de puntos obtenida por R3DPF de 209440 puntos.

Entre las soluciones implementadas en las reconstrucciones tridimensionales hechas por el GOTS, se propone mejorar la visualización ya sea realizando múltiples ampliaciones a la nube de datos o realizando una reducción aleatoria o periódica del arreglo de puntos (X_C , Y_C , Z_C). La figura 18 muestra la nube de puntos "Reconstrucción Facial" reducida a una décima parte del total de puntos original mostrado en la figura 17. Dicha reducción fue de carácter periódico, esto trae consigo una pérdida trascendental de la información topográfica y la inclusión de un patrón periódico en la distribución de puntos como se muestra en la figura 18. Sí en contraste, la reducción es de tipo aleatoria, se genera igualmente pérdida de información topográfica, añadido a la imposibilidad de obtener una reducción de la distribución bien definida.

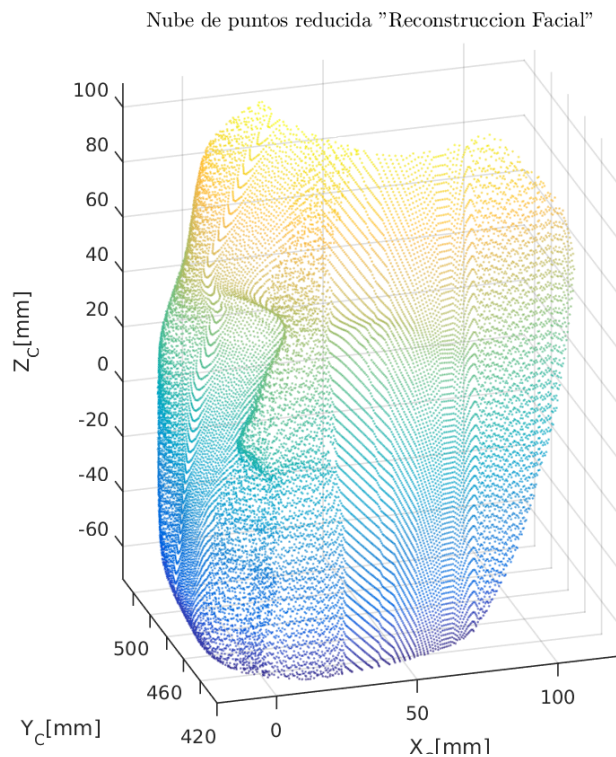


Figura 18: Nube de puntos obtenida por R3DPF reducida a una décima parte de la nube original, con un total de 20944 puntos.

Otra solución efectuada para la visualización de las nubes de puntos es ampliar o efectuar múltiples ampliaciones localizadas para mejorar la percepción de los detalles en la reconstrucción tridimensional, como se representa en la figura 19.(a). Las desventajas de este método es la dificultad en el manejo de la nube de puntos, pues al tener la totalidad de puntos de la nube graficados, las rotaciones, reducciones y ampliaciones consumen buena parte de los recursos del hardware donde es visualizada la nube. Esto representa la poca optimización de esta opción. La figura 19 muestra dos ampliaciones realizadas a la nube de puntos "Reconstrucción Facial", donde la figura 19.(a) es derivada de la reconstrucción tridimensional original representada en la figura 17.(b) y su homologa, la ampliación de la figura 19.(b) perteneciente a la reducción mostrada en la figura 18. Cabe resaltar la gran pérdida de información topográfica al comparar las gráficas de la figura 19.

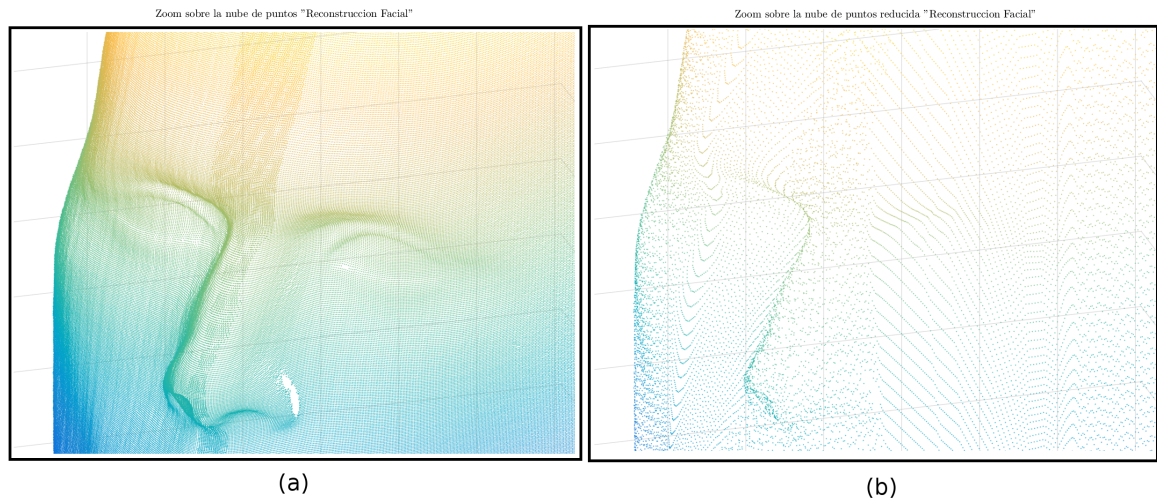
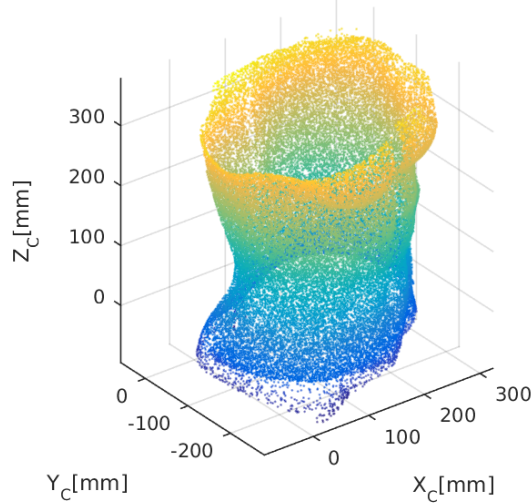


Figura 19: (a) Ampliación de la nube de puntos original. (b) Ampliación de la nube de puntos reducida.

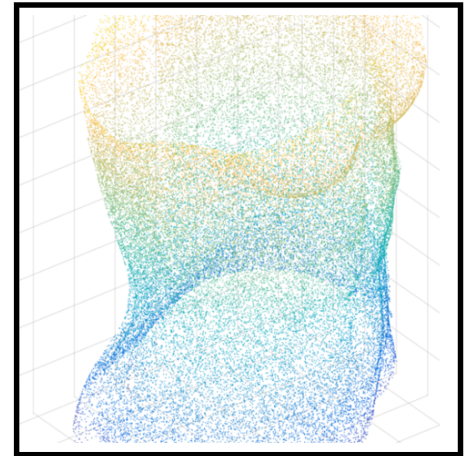
Otros de los aspectos a tener en cuenta cuando se visualizan objetos tridimensionales mediante la nube de puntos es el solapamiento de estos según la perspectiva de observación; problemática ya discutida en la figura 15 y de la cual la TPFR también adolece. Esto se evidencia en la figura 20, en la que la reconstrucción tridimensional de un torso humano a 360° realizada por González et al. en [21]. Esta superposición de regiones confunde la visualización y no permite la identificación de detalles en el objeto 3D. Esta confusión repercute seriamente en las intenciones de analizar metrológicamente propiedades físicas como longitud, área, volumen, etc; por lo que es trascendental una solución para el área de metrología óptica en reconstrucciones tridimensionales del grupo de investigación GOTS.

Nube de puntos reducida "Reconstruccion 360° torso"

Zoom nube de puntos reducida "Reconstruccion 360° torso"



(a)



(b)

Figura 20: (a) Nube de puntos reducida y obtenida por R3DPF de un torso humano a 360° con 51086 puntos. (b) Ampliación de la nube de puntos reducida. Fuente: Nube de puntos proporcionada por González et al. [21]. Figura producida por el autor.

Debido al reconocimiento de todas estas falencias, el propósito principal de este trabajo es fundamentado en la optimización de la visualización de las reconstrucciones tridimensionales obtenidas por la técnica de proyección de franjas. Para esto, el primer paso es dotar a la nube de puntos de una noción de superficie, aspecto que no es suplido por la representación en nubes de puntos. En consecuencia, se optó por la implementación de mallados triangulares o mallados de Delaunay en los objetos 3D, como se mostrará en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3

Triangulación de Delaunay

Como se mostró en la sección anterior, la representación por nube de datos 3D no permite definir usualmente el concepto de superficie del objeto, dificultándose la extracción de ambas características superficiales necesarias para la evaluación metrológica de la topografía. En este capítulo se muestra la asociación espacial de puntos 3D que comúnmente se emplea para generar la superficie digital no-paramétrica del objeto reconstruido, a partir de la nube de puntos dispersos en el espacio 3D.

Los diagramas de Voronoi son una herramienta geométrica que divide, en un determinado número de regiones, el espacio euclídeo. Estas construcciones geométricas son también conocidas bajo los nombres de teselación de Dirichlet y polígonos de Thiessen. Al elaborar un diagrama de Voronoi inicialmente se especifica un conjunto de puntos conocidos como semillas o generadores, donde cada uno tendrá una región correspondiente que consta de todos los puntos más cercanos a la semilla, donde estas regiones se conocen con la designación de celdas de Voronoi. La figura 21.(b) muestra un diagrama de Voronoi en los segmentos de línea de color rojo [39].

Análogamente, existe una construcción geométrica dual o grafo dual¹, denotada como triangulación de Delaunay, donde un conjunto de puntos P en un plano es una triangulación de Delaunay $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ tal que ningún punto perteneciente al conjunto P esté dentro de la circunferencia circunscrita de cualquier triángulo correspondiente a $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$. Además, la triangulación de Delaunay $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ maximiza el ángulo mínimo de los triángulos en la triangulación. En la figura 3.1.(a) se aprecia gráficamente la definición de la triangulación de Delaunay [17].

La triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos discretos P en general, corresponde a un grafo dual de un diagrama de Voronoi para P , esto se evidencia en la figura 21, en la cual están representados dos conjuntos de puntos idénticos P , a partir de los cuales se obtiene la respectiva triangulación de Delaunay $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ en la figura 21.(a) y consecuentemente, de los vértices de la triangulación se obtiene el diagrama de Voronoi trazado en color rojo en la figura 21.(b).

¹<http://mathworld.wolfram.com/DualGraph.html>

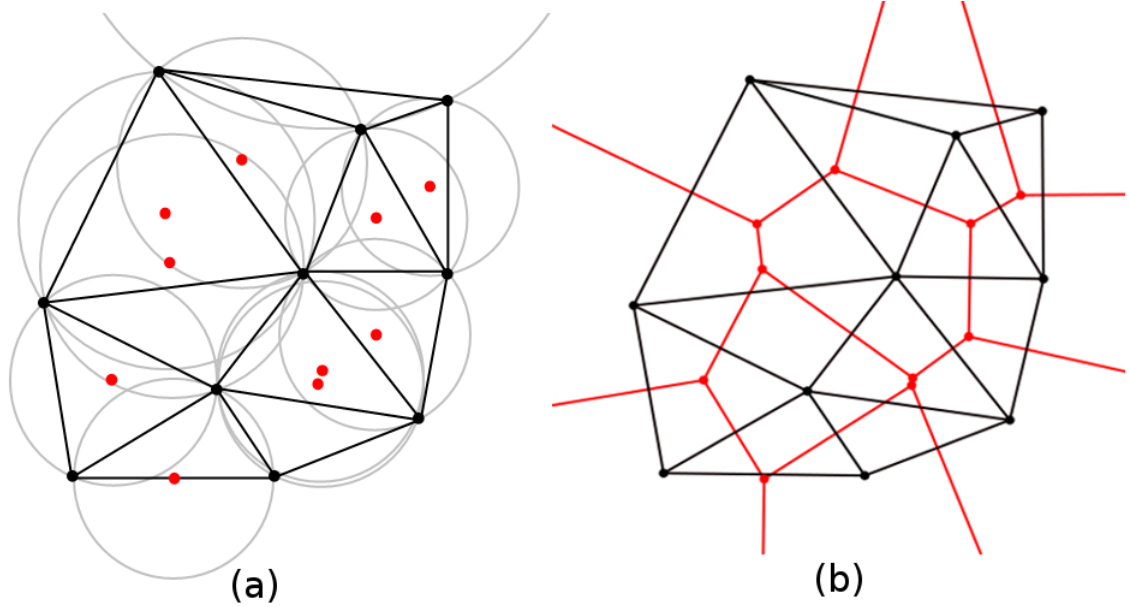


Figura 21: (a) Representación gráfica de la definición de triangulación de Delaunay (segmentos de línea color negro) para un conjunto de puntos. (b) Gráfico del diagrama de Voronoi (segmentos de línea color rojo) del mismo conjunto de puntos de (a) y comparación con la triangulación de Delaunay (trazado color negro). Fuente: Modificación del autor bajo licencia Creative Commons. Autores originales: [Hfree](#)

Al representar una superficie mediante un diagrama de Voronoi se llega a la interpolación con menor error $O(h)$ y por ende mayor proximidad a la superficie que se intenta modelar mediante celdas discretas, sin embargo, esta representación dificulta en gran medida los cálculos computacionales debido a su complejidad. Es por esta razón que se utiliza la triangulación de Delaunay como método interpolativo puesto que es la estructura más simple con la que se puede describir una superficie tridimensional.

3.1 Construcción del mallado triangular

Entre las características de los mallados triangulares $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ se consideran como una representación superficial explícita, aunque no una paramétrica. Un mallado de Delaunay $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ está compuesto de una componente geométrica y una componente topológica, donde dicha componente topológica puede ser representada por un conjunto de vértices como lo muestran Botsch et al. en [10]:

$$\mathcal{V} = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_V\}, \quad (24)$$

y un conjunto de caras o facetas triangulares conectadas entre sí

$$\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_F\}, \quad \forall f_i \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}, \quad (25)$$

donde para cada triángulo se especifican sus tres vértices del conjunto \mathcal{V} . Es posible representar la conectividad de un mallado triangular $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ en términos de los bordes de la gráfica respectiva

$$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_E\}, \quad \forall e_i \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}. \quad (26)$$

El acople geométrico de un triángulo en un mallado triangular en \mathbb{R}^3 se especifica mediante la asociación de un vector posición \vec{p}_i en el espacio tridimensional para cada vértice $\nu_i \in \mathcal{N}$:

$$\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_V\}, \quad \vec{p}_i := \begin{pmatrix} x(\nu_i) \\ y(\nu_i) \\ z(\nu_i) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (27)$$

de tal manera que cada faceta triangular $f \in \mathcal{F}$ representa en realidad un triángulo en el espacio 3D determinado por sus tres vectores posición de los vértices.

Una triangulación o mallado de Delaunay $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ representa una superficie lineal a trozos continua. En consecuencia, una triangulación de Delaunay es la forma más simple de interpolar una superficie lo suficientemente lisa, donde el mallado es una aproximación lineal por tramos; haciendo una expansión de Taylor local es posible demostrar que el error de aproximación de la interpolación es del orden $O(h^2)$, en el cual h denota el borde de máxima longitud. Dado que la interpolación posee este orden de aproximación cuadrático, el error se reduce por un factor de $1/4$ al reducir a la mitad las longitudes de los bordes. Al refinar el mallado, se divide cada triángulo en cuatro sub-triángulos, aumentando el número de triángulos de F a $4F$. Por consiguiente, el error de aproximación de un mallado triangular es inversamente proporcional al número de facetas F . La famosa fórmula de Euler-Poincaré² establece una relación importante entre el número de vértices V , el número de bordes E y el número de caras o triángulos F , en una malla cerrada y conectada

$$G(\mathcal{S}_{\mathcal{T}}) = \frac{-V + E - F + 2 - N_B}{2} \quad (28)$$

donde topológicamente, N_B es el número de fronteras y $G(\mathcal{S}_{\mathcal{T}})$ es el género de la superficie construida a través del mallado triangular $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$; $G(\mathcal{S}_{\mathcal{T}})$ está definido como el invariante topológico que representa a la triangulación de Delaunay y de manera intuitiva representa el número de “agujeros” de un objeto, siendo esta definición un concepto a grandes rasgos. Teniendo en cuenta esto y el hecho de que cada triángulo está delimitado por tres bordes y que cada borde interior es incidente a dos triángulos, se deducen las siguientes estadísticas para el mallado triangular mostradas nuevamente por Botsch et al. en [10]:

- El número de facetas triangulares o triángulos es el doble del número de vértices: $F \approx 2V$.
- El número de aristas o bordes es tres veces el número de vértices: $E \approx 3V$.

Dado que el triángulo es una estructura 2-simplex³, conceptualmente el mallado triangular es la estructura más simple para la representación de superficies y por lo tanto permite la implementación de algoritmos de procesamiento geométrico de alta eficiencia.

²Weisstein, Eric W. “Euler Characteristic.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/EulerCharacteristic.html>

³Weisstein, Eric W. “Simplex.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Simplex.html>

3.2 Computando el mallado triangular

Existen varios tipos de algoritmos y modificaciones a estos para la obtención de una triangulación de Delaunay de una nube de puntos dispersos, como lo muestra Hjelle et al. en el capítulo cuatro de [28]. El objetivo principal del procedimiento radica en cambiar la perspectiva de puntos que proporciona la nube, descritos por el arreglo de vectores posición.

$$\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_v\}, \quad \vec{p}_i := (X_{Ci}, Y_{Ci}, Z_{Ci}), \quad (29)$$

Que define como los vértices de cada faceta triangular del mallado. Consecuentemente, se asigna un índice a cada vértice p_i . A continuación se presentan las instrucciones en general para la triangulación de Delaunay en el algoritmo (1) expuesto por Berg et al. en [8].

Algorithm 1: Algoritmo de la triangulación de Delaunay para encontrar el arreglo de facetas triangulares \mathcal{F}

```

1 TriangulacionDelaunay( $\mathcal{P}$ );
Input : Conjunto  $\mathcal{P}$  de  $v$  puntos en el espacio
Output: Conjunto de facetas triangulares  $\mathcal{F}$  correspondientes a la triangulación de Delaunay
de  $\mathcal{P}$ 
2 Sean  $p_{-1}, p_{-2}$  y  $p_{-3}$  un conjunto adecuado de tres puntos tales que  $\mathcal{P}$  esta contenido en el
triangulo  $p_{-1}p_{-2}p_{-3}$ ;
3 TriangulacionDelaunay( $\mathcal{P}$ );
4 Computamos una permutación randomica  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_v$  de  $\mathcal{P}$ ;
5 for  $v \leftarrow 1$  a n do
6   if  $p_v$  se encuentra en el interior del triangulo  $p_i p_j p_k$  then
7     Agregue bordes desde  $p_v$  a los tres vértices  $p_i p_j p_k$  de esta manera se divide  $p_i p_j p_k$  en
tres triángulos;
8     LegalizarBorde( $p_v, \overline{p_i p_j}, \mathcal{F}$ );
9     LegalizarBorde( $p_v, \overline{p_j p_k}, \mathcal{F}$ );
10    LegalizarBorde( $p_v, \overline{p_k p_i}, \mathcal{F}$ );
11   else
12      $p_v$  se encuentra sobre un borde de  $p_i p_j p_k$ , se afirma el borde  $\overline{p_i p_j}$  then
13     Agregue bordes desde  $p_r$  a  $p_k$  y el tercer vértice  $p_l$  del otro triangulo que es incidente a
 $\overline{p_i p_j}$ , de esta manera de efectúa la división de dos triángulos incidentes a  $\overline{p_i p_j}$  en
cuatro triángulos;
14     LegalizarBorde( $p_v, \overline{p_i p_l}, \mathcal{F}$ );
15     LegalizarBorde( $p_v, \overline{p_l p_j}, \mathcal{F}$ );
16     LegalizarBorde( $p_v, \overline{p_j p_k}, \mathcal{F}$ );
17     LegalizarBorde( $p_v, \overline{p_k p_i}, \mathcal{F}$ );
18   end
19   Descartar  $p_{-1}, p_{-2}$  y  $p_{-3}$ , con todas sus aristas incidentes de  $\mathcal{F}$ ;
20 end
21 return  $\mathcal{F}$ 

```

Gran parte de los algoritmos de mallado triangular generan el arreglo de facetas \mathcal{F} como una matriz de dimensión $(F, 3)$, donde F como se puede observar en la ecuación 25 corresponde al total de facetas computadas para la nube de puntos. Estos algoritmos han sido implementados en la mayoría

de software para generación de gráficos computacionales, como es el caso de MATLAB^{©4} que consta de las funciones delaunay⁵ para la obtención de las facetas triangulares, trimesh⁶ y trisurf⁷ para la visualización del arreglo de vértices y facetas.

En esta investigación se implementó un refinamiento sobre la triangulación de Delaunay en el software MATLAB[®], en el que el usuario define un radio de vecindad. Para los puntos vecinos se asigna entonces la conexión de los índices, donde cada triángulo estará descrito por tres índices vecinos conectados. La función evita la conexión de triángulos que se ubican por fuera de la vecindad; problema que se presenta en la función Delaunay de MATLAB[®]. Esta implementación de la triangulación de Delaunay obtiene el arreglo de facetas \mathcal{F} acompañado de información adicional como los vectores normales a cada faceta y las facetas vecinas más cercanas. Posteriormente, se utilizó una función para escribir esta estructura de datos en un formato estándar como lo son los archivos poligonales, que se describen en la siguiente sección.

3.3 Implementación de archivos poligonales

Actualmente existe un amplio estándar de formatos que almacenan la estructura de datos concerniente a la información de un objeto tridimensional, como es el caso del mallado triangular. Estos archivos poligonales principalmente guardan la información de las posiciones de los puntos o vértices del mallado, junto con las conexiones entre vértices que conforman las facetas. Además, varios de estos formatos permite la inclusión de caracterizaciones digitales, como es el caso del color, el material e iluminación. La principal ventaja de esta implementación en las reconstrucciones tridimensionales como es el caso de las obtenidas por la técnica de proyección de franjas, es la facilidad que representan a la hora de importar o exportar los mallados. Algunos de los software utilizados para la visualización de mallados son: Meshlab⁸, Blender⁹ y Autodesk 3ds Max^{©10}. Las librerías en el lenguaje de programación C++ para el procesamiento de mallados conocidas como OpenMesh¹¹ también importan y exportan la información de los mallados en archivos poligonales y fueron utilizadas en los próximos capítulos.

3.3.1. Formato de archivo de objeto OFF

El formato archivo de objeto OFF por su acrónimo en inglés (Object File Format) es un sencillo formato geométrico que contiene la información esencial de un mallado, i.e. los vectores posición de cada uno de los vértices y el arreglo de índices para las facetas.

A continuación se muestra la estructura general soportada por el formato OFF:

⁴MATLAB[©] 1994-2015 The MathWorks, Inc. <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

⁵MATLAB[©] delaunay: <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/delaunay.htm>

⁶MATLAB[©] trimesh: <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/trimesh.html>

⁷MATLAB[©] trisurf: <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/trisurf.html>

⁸MeshLab makes use of the GNU General Public License version 2.0 (GPLv2). <http://meshlab.sourceforge.net/>

⁹Blender is released under the GNU General Public License. <https://www.blender.org/>

¹⁰Autodesk 3ds Max[©] 2015 Autodesk, Inc. <http://www.autodesk.com/store/3ds-max>

¹¹OpenMesh up to 3.3 are Licensed under the LGPL v3. <http://www.openmesh.org>

```

1      OFF
2      # Esto es un comentario
3      # Numero de vertices , facetas y bordes
4      NV NF NE
5      # Vertices: coordenadas Xc, Yc and Zc
6      x[0] y[0] z[0]
7      .
8      .
9      .
10     x[NV-1] y[NV-1] z[NV-1]
11     # Facetas: Numero de vertices de la faceta , indices a los #
        vertices
12     Nv[0] v[0,0] v[0,1] ... v[0,Nv[0]-1]
13     .
14     .
15     .
16     Nv[NF-1] v[NF-1,0] v[NF-1,1] ... v[NF-1,Nv[NF-1]-1]
17     # Podrian seguir otros elementos...
```

3.3.2. Formato OBJ

El formato OBJ es comúnmente usado para animación por computador y software de modelado. Este formato contiene mayor información en comparación al formato OFF, que para esta investigación no es de consideración. Una plantilla de un archivo OBJ y su respectiva descripción se muestra a continuación:

```

1      # Esto es un comentario
2      # Vertices : v seguido por las coordenadas Xc, Yc y Zc
3      v x[1] y[1] z[1]
4      v x[2] y[2] z[2]
5      .
6      .
7      .
8      # Vectores normales: vn seguido de las coordendas nX, nY y nZ
9      vn nx[1] ny[1] nz[1]
10     vn nx[2] ny[2] nz[2]
11     .
12     .
13     .
14     # Coordendas de textura: vt seguido de u,v (y w)
15     vt u[1] v[1] w[1]
16     vt u[2] v[2] w[2]
17     .
18     .
19     .
20     # Faces: f seguido de los indices a los vertices
21     #(y normales and triangulos)
22     f v[1,1]/vn[1,1]/vt[1,1] v[1,2]/vn[1,2]/vt[1,2]...
```

23	f v[2,1]/vn[2,1]/vt[2,1] v[2,2]/vn[2,2]/vt[2,2]...
24	.
25	.
26	.

Habiendo definido y equipado los objetos tridimensionales conformados por triangulaciones de Delaunay con archivos poligonales, se procedió a estudiar e implementar la optimización sobre estas superficies, para mejorar la calidad de los mallados y los tiempos de computo y visualización de la reconstrucción tridimensional.

3.4 Visualización del mallado triangular

Dada la gran facilidad que brindan los archivos poligonales para la visualización y almacenamiento de las estructuras de datos del mallado triangular, se procedió entonces a visualizar esta representación de los objetos tridimensionales y se efectuó un análisis de las características y condiciones que dichos mallados deben cumplir para satisfacer las necesidades de las reconstrucciones tridimensionales por proyección de franjas. A continuación, la figura 22 muestra el mallado triangular del modelo 3D “Einstein” graficado en la figura 15 mediante la representación de nube de puntos.

La figura 22 muestra un mallado triangular facetado, esto indica que los bordes de las facetas triangulares son resaltadas para su observación sobre la superficie del objeto. En la ampliación se muestra con mayor claridad los detalles del mallado y de la reconstrucción, sin embargo, persiste el problema de visualización del objeto tridimensional. Al aumentar el número de vértices, el número de facetas también aumenta, dificultando la visualización de los detalles de la reconstrucción como se aprecia en la figura 22.

Aplicar el facetado a los objetos tridimensionales proporciona una herramienta de análisis importante para determinar si el mallado es de alta o baja calidad y si es necesaria una mayor optimización sobre la triangulación de Delaunay. De las ampliaciones de la figura 22 se observa la irregularidad en las formas de los triángulos que componen el mallado. Esto se conoce como un mallado de baja isotropía como se muestra en la figura 23. Los triángulos cuasiequiláteros dotan al mallado de una alta isotropía, lo que conlleva a un mayor rendimiento en aplicaciones numéricas y computacionales, como lo explican Botsh et al. en [10]. Por consiguiente, la isotropía define uno de los factores de calidad a ser considerados en los mallados triangulares. Cabe resaltar que dado la gran densidad de puntos que producen la reconstrucción tridimensional por proyección de franjas, es primordial obtener un mallado de alta calidad.

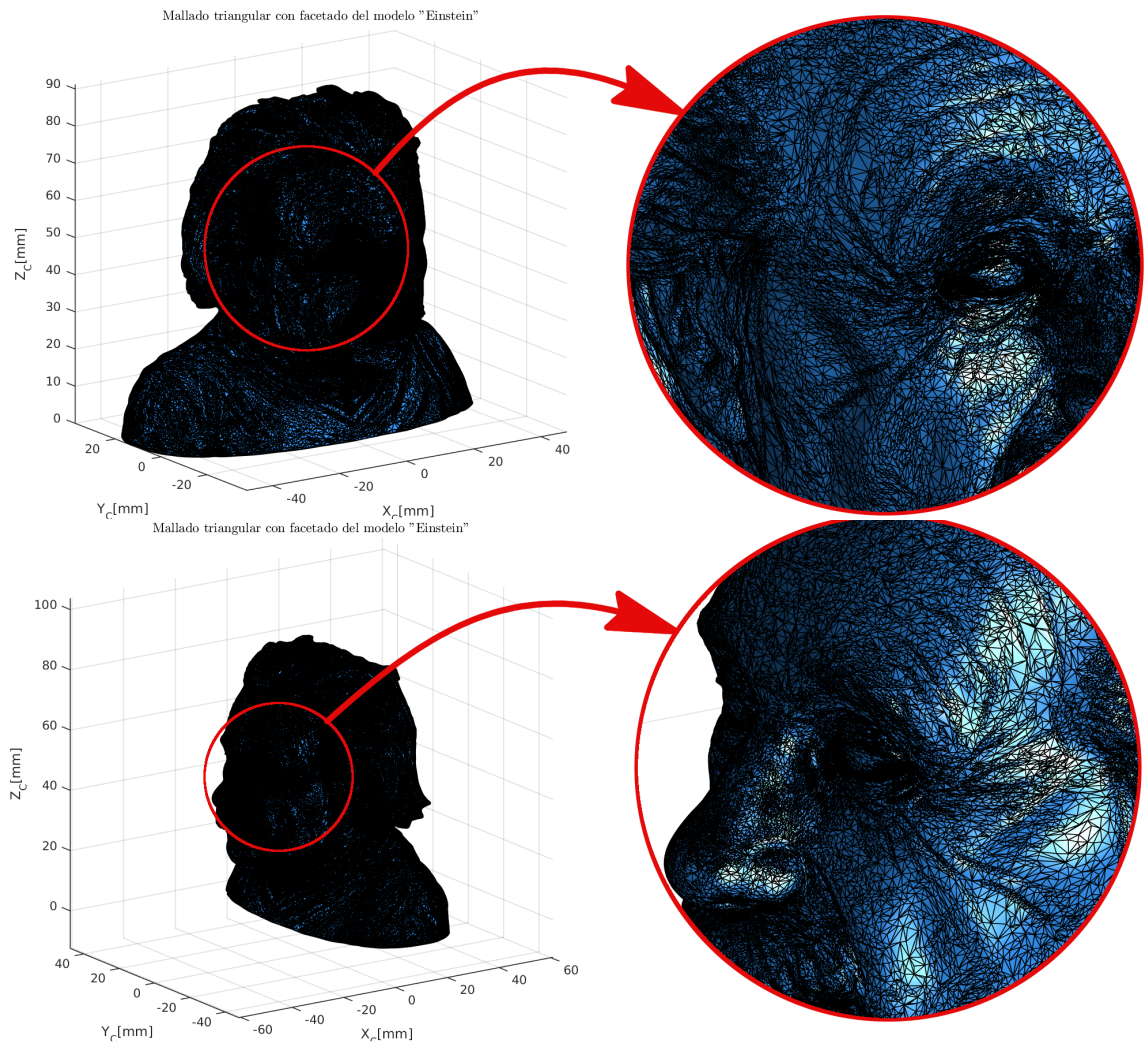


Figura 22: Modelo tridimensional "Einstein" graficado a partir de su mallado triangular facetado.

La figura 24 muestra el mallado triangular facetado del objeto tridimensional "T-Rex" donde se observa claramente que a pesar que las facetas triangulares se encuentran muy bien distribuidas a diferencia de las facetas de la figura 22, el mallado presenta una baja isotropía. Para optimizar este aspecto, es fundamental convertir estas facetas triangulares irregulares a triángulos cuasiiguales.

Por otra parte, controlando la densidad de vértices en las regiones de interés, i.e., definiendo un menor número de puntos en las regiones que el usuario designe como de baja importancia y que en contraste, se mantengan la misma cantidad de vértices e incluso un aumento de estos en regiones de gran importancia para el usuario, define entonces una interacción con el mallado. Es decir, el número de vértices del mallado debe ser optimizado de tal manera que la regiones con detalles importantes mantenga el número necesario de vértices y así no perder información relevante y las regiones sin información particular reduzca el número de vértices. Entre las primeras propuestas de estos mallados interactivos, fue presentada por Zorin et al. en [61] y posteriormente por Alliez et al. en [2]. Esta

interactividad se observa en la figura 24 que aunque anisotrópica, la triangulación de Delaunay de este objeto 3D posee mayor densidad de vértices en regiones como los ojos y las garras del “dinosaurio” modelado.

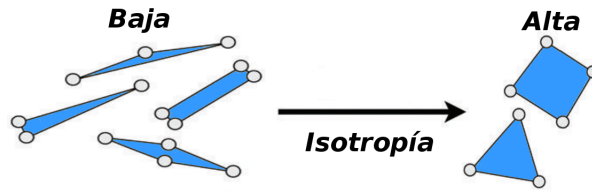


Figura 23: Estructuras del mallado con alta y baja isotropía.

Aunque los mallados con alta isotropía proporcionan una buena calidad del mallado, otros factores necesitan ser tenidos en cuenta a la hora de optimizar los mallados triangulares. Es el caso de las superficies planas; estas deben estar representadas por una menor cantidad de vértices, sin embargo, como se observa en la figura 25, dependiendo de la técnica de reconstrucción o de que tan optimizados se encuentre el mallado triangular, las regiones planas o de baja curvatura pueden albergar la misma cantidad de puntos que las regiones con alta curvatura. Esto caracteriza a un mallado poco optimo.

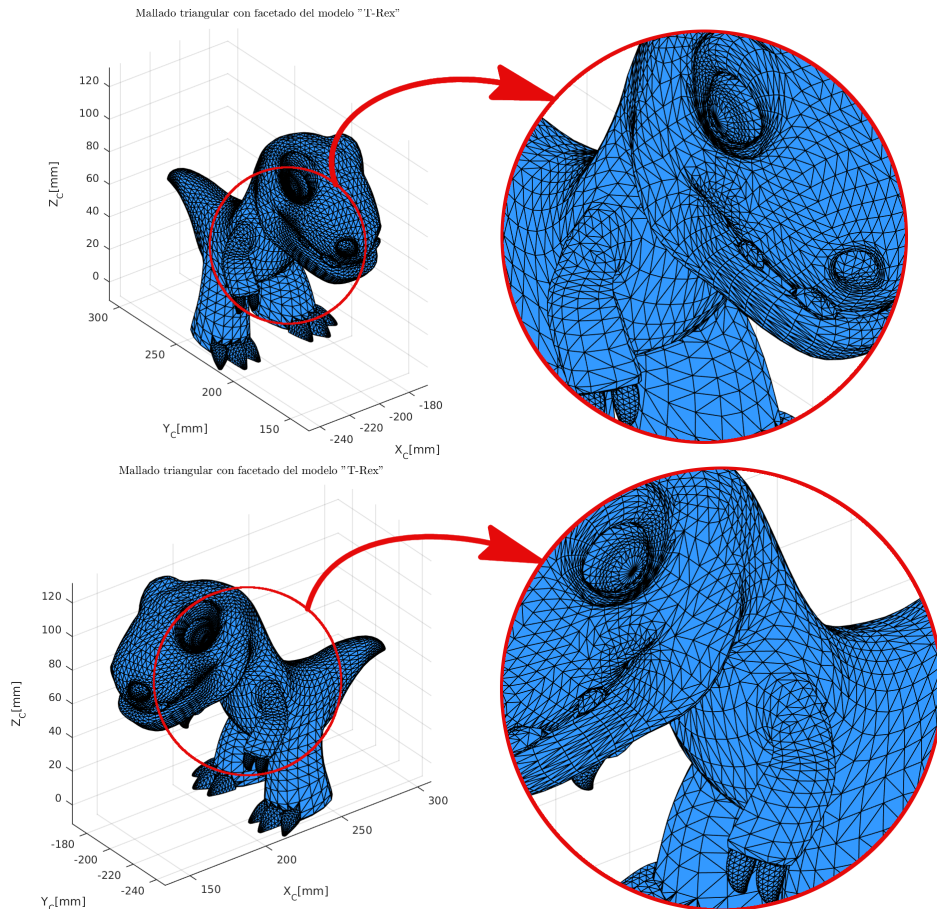


Figura 24: Mallado triangular facetado del Modelo 3D “T-Rex”.

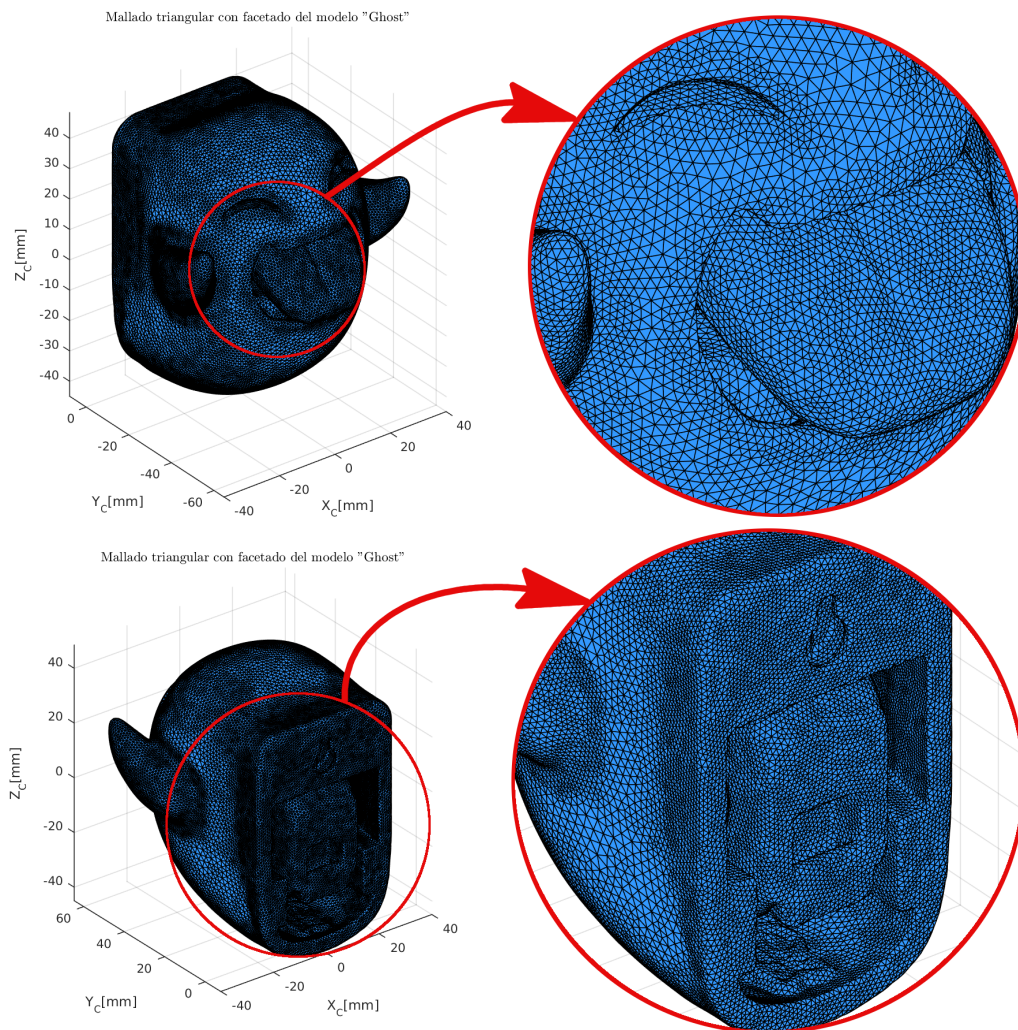


Figura 25: Mallado del objeto 3D "Ghost".

A pesar que los mallados facetados son una gran herramienta para el análisis de la triangulación de Delaunay, dificultan notablemente la visualización del objeto tridimensional. Por esta razón se propuso la visualización del mallado triangular sin facetado que junto a una iluminación digital del objeto 3D, mejora considerablemente la noción de superficie y la visualización de los detalles del modelo tridimensional, en comparación con la nube de puntos mostrada en la figura 15 y a los mallados con facetados mostrados en las figuras 22, 24 y 25. El mallado triangular sin facetado de los objetos 3D "Einstein", "T-Rex"¹² y "Ghost"¹³, son mostrados en las figuras 26, 27 y 28.

¹²Modelo 3D "Two Dinosaurs without support" bajo licencia Creative Commons. <https://pinshape.com/items/2648-3d-printed-two-dinosaurs-without-support>

¹³Objeto 3D "Ghost" bajo licencia Creative Commons. <https://pinshape.com/items/5252-3d-printed-graphica-mega-ghost-print-play-via-3dkitbashcom>

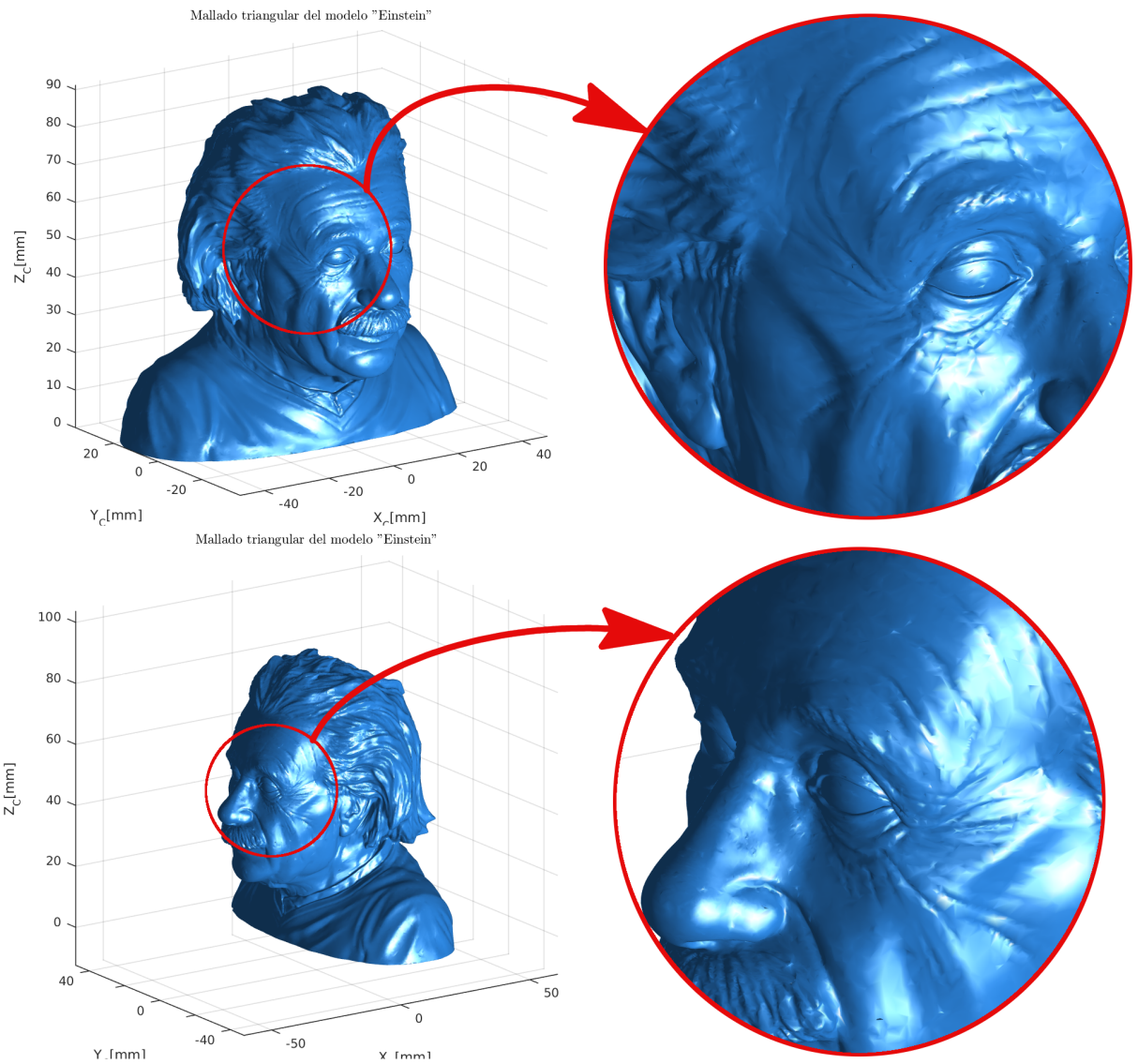


Figura 26: Modelo 3D “Einstein” sin facetado y con iluminación.

Se observa claramente que la representación del mallado triangular proporciona una mejora trascendental en la visualización de los objetos 3D, pues dota al objeto de una noción de superficie que mejora las características cualitativas y que además permite la extracción de datos metrológicos debido a la distribución y ordenamiento de los datos en el archivo poligonal. La idea principal de esta investigación fue implementar este método de visualización y optimizar los datos de los objetos tridimensionales obtenidos por la R3DPF.

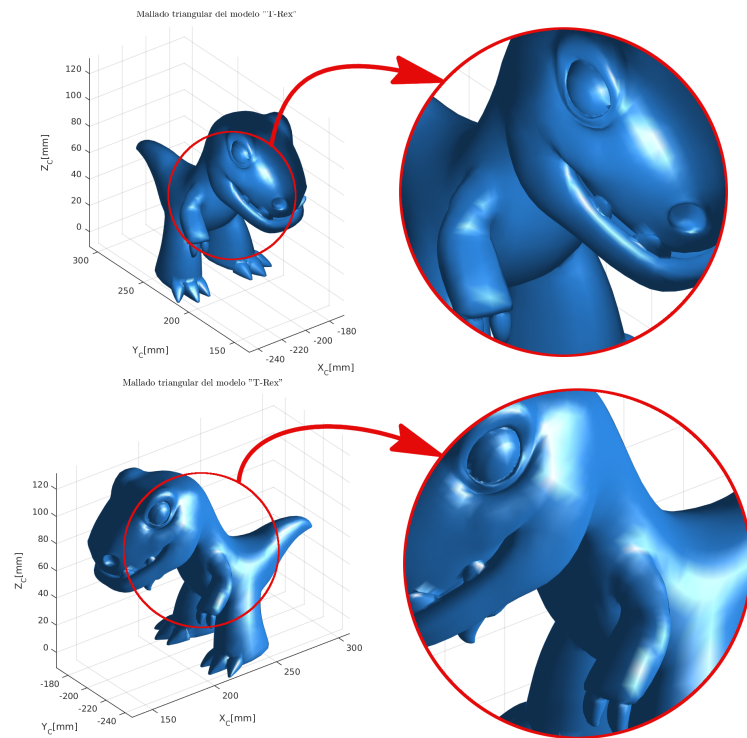


Figura 27: Modelo tridimensional "T-Rex" sin facetado y con iluminación.

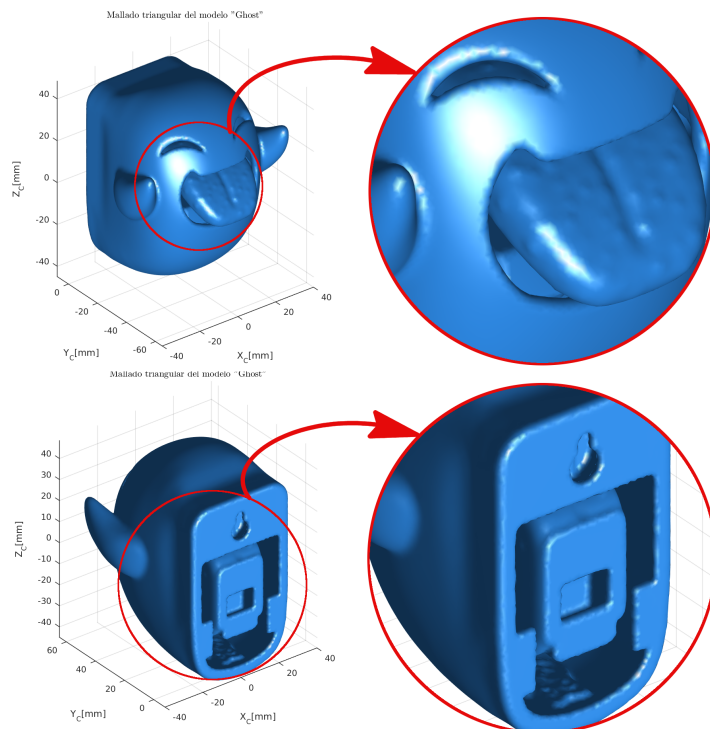


Figura 28: Objeto 3D "Ghost" graficado sin resaltar bordes y con iluminación.

Aunque las imágenes del mallado triangular sin facetado proporcionan más información visual de la superficie del objeto que la representación por nube de puntos 3D, se hace necesario definir e implementar una estrategia de optimización del número de vértices para reducir el número de puntos obtenidos de la R3DPF. EL proceso de optimización principalmente genera un mallado isométrico y conserva detalles superficiales. En los capítulos 4 y 5 se define el criterio para determinar las regiones de interés e implementar la interacción con el mallado. Dicho criterio son las curvaturas de la superficie, lo que optimiza adaptativamente al mallado según el nivel de curvatura de la topografía.

CAPÍTULO 4

Remallado incremental interactivo por curvatura

En el procesamiento de mallados poligonales, para un mallado tridimensional dado, calcular otro mallado a partir de este y que satisfaga determinados requisitos y criterios de calidad mientras que mantiene bien definidas las características del mallado de entrada, se conoce como proceso de remallado. En el capítulo anterior se definió que la calidad de un mallado triangular está relacionada con diferentes aspectos, tales como el submuestreo, la distribución, la forma y el tamaño de sus elementos, como lo explica Alliez et al. en [3]. En este capítulo se define como criterio de remallado la curvatura de la superficie del objeto tridimensional y como requerimientos para el proceso de remallado:

1. Definir el submuestreo de los vértices en función de la curvatura del objeto, i.e., en las áreas con mayor curvatura de la topografía, remallar con una densidad de vértices igual o mayor a la del mallado de entrada; mientras que en las áreas de poca curvatura una densidad de puntos menor define optimamente el mallado.
2. Obtener preferiblemente mallados de alta isotropía, i.e., donde los componentes de la triangulación de Delaunay sean triángulos cuasiequiláteros.
3. Balance cerrado a seis vértices, i.e., obtener celdas hexagonales conformadas por siete vértices y seis triángulos, pues conforman un mallado de Delaunay de alta calidad, expuesto por Botsch et al. en [10].

Para llegar a un remallado incremental basado en el criterio de curvatura como el obtenido por Dunyach et al. en [19], es necesario inicialmente como él mismo lo expone, obtener un remallado isotrópico uniforme al que posteriormente mediante el cálculo y la inclusión de la curvatura máxima absoluta de la superficie, se obtiene un campo de dimensionamiento que modifica las longitudes de control de remallado, pero que en esencia deja invariante la estructura del algoritmo.

Se utilizaron las librerías de C++ especializadas para el procesamiento de modelos tridimensionales llamadas OpenMesh¹ para la programación de los algoritmos de remallado incremental interactivo de este capítulo.

4.1 Remallado incremental isotrópico uniforme

Como su nombre lo indica, este proceso de remallado fue propuesto por Botsch et al. en [9, 10] y se basa en convertir cualquier mallado triangular a uno con alta isotropía, donde todos los triángulos poseen aproximadamente las mismas características: son cuasiequiláteros y con una longitud de borde aproximadamente igual, definida por el usuario. El remallado isotrópico uniforme es la etapa inicial para conseguir un remallado incremental adaptativo por el criterio de curvatura, como lo muestra Dunyach et al. en [19] y que será introducido en la sección 4.2.2 con la inclusión del criterio de curvatura.

Este algoritmo de remallado toma como entrada una triangulación de Delaunay $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$, con sus respectivos arreglos de vértices \mathcal{V} y de facetas \mathcal{F} , junto con un valor de longitud de borde deseada L designado por el usuario y el número de iteraciones que se repite la aplicación de los operadores locales de remallado; como lo muestra Botsch et al. en [9] y Dunyach et al. [19]. Estos operadores dividen los bordes largos de cada faceta, colapsan los bordes cortos sustituyéndolos por un vértice, haciendo las respectivas conexiones y reubican los vértices hasta que todos sean de una longitud aproximadamente igual a la longitud L ingresada por el usuario. Consecuentemente, los vértices son modificados usando la relajación tangencial para regularizar el mallado y luego son proyectados de regreso a la superficie original. Este procedimiento se repite el número de iteraciones que el usuario haya ingresado, donde Dunyach et al. en [19] proponen que sea entre cinco a diez veces. A continuación se describe el procedimiento

¹OpenMesh: Copyright(c) 2001-2015, RWTH-Aachen University

en general en el algoritmo 2.

Algorithm 2: Procedimiento general del remallado isotrópico uniforme.

```

1 Remallado( $\mathcal{V}, \mathcal{F}, Iteraciones, L$ );
   Entrada: Mallado triangular  $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$  con su respectivo arreglo de vértices  $\mathcal{V}$  y facetas  $\mathcal{F}$ . Además,
           el numero de iteraciones para el proceso y la longitud de borde deseada.
   Salida : Remallado  $\mathcal{S}_{r,\mathcal{T}}$ , compuesto de  $\mathcal{V}_r$  y  $\mathcal{F}_r$ .
2 /*Remallado*/
3 for ( $int\ j = 0; j < Iteraciones; j++$ ) do
4     /*Definición de las longitudes de control*/
5     for para cada borde en  $\mathcal{E}$  do
6         if  $longitdBorde(e_i) < (4/3) * L$  then
7             |  $división\_borde\_largo(e_i)$ ;
8         end
9         if  $longitdBorde(e_i) > (4/5) * L$  then
10            |  $colapso\_borde\_corto(e_i)$ ;
11        end
12    end
13    /*Reubicación de vértices*/
14    for para cada borde en  $\mathcal{E}$  do
15        |  $giro\_borde(e_i)$ ;
16    end
17    /*Optimización de la posición de los vértices*/
18    for cada vertice en  $\mathcal{V}$  do
19        |  $relajación\_tangencial(v_i)$ ;
20    end
21    /*Proyección de vértices de regreso a la superficie*/
22    for cada vertice en  $\mathcal{V}$  do
23        |  $proyeccion\_a\_la\_superficie(v_i)$ ;
24    end
25 end
26 return  $\mathcal{V}_r, \mathcal{F}_r$ ;

```

El algoritmo determina a partir de la longitud de borde ingresada el intervalo $[L_{min}, L_{max}]$, determinado por los factores $4/5$ y $4/3$, respectivamente. Estas longitudes de control definidas por

$$L_{min} = \frac{4}{5}L \quad \wedge \quad L_{max} = \frac{4}{3}L, \quad (30)$$

fueron calculados por Dunyach et al. en [19] para que los operadores locales de remallado mantengan a los bordes convergiendo a longitudes de borde uniformes. En la siguiente subsección se encuentra un planteamiento mas detallado de cada operador.

4.1.1. Operadores locales de remallado

Mediante el uso de operaciones locales sobre el mallado, los operadores de remallado modifican y optimizan el mallado de entrada hasta convertirlo en un mallado mas regular, i.e., un mallado de alta

isotropía. Las aplicaciones locales de división de borde, colapso de borde y giro de borde modifican la longitud de los bordes de las facetas hasta conseguir un valor equivalente a la longitud de borde deseada L . Por su parte, las operaciones de relajación tangencial y proyección a la superficie reubican los vértices para conseguir una mayor optimización. Es importante que la topología del mallado triangular de salida $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ no sea destruida y que las modificaciones aproximen el nuevo mallado lo mejor posible a la topografía. La figura 29 muestra gráficamente el efecto de estas transformaciones sobre el mallado.

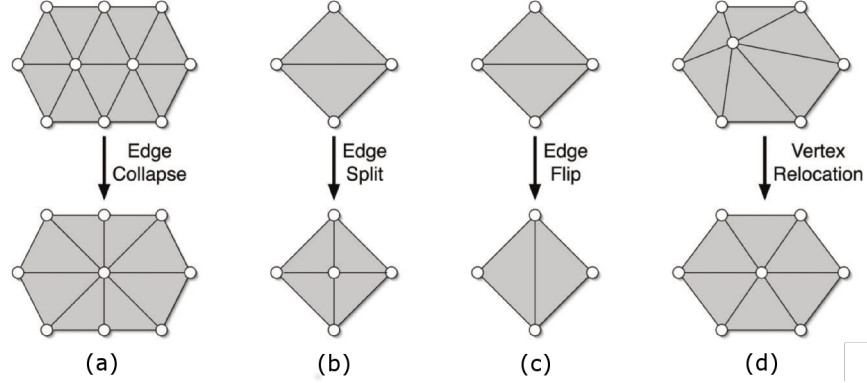


Figura 29: Operadores locales de remallado. Fuente: [10].

División de bordes

Al analizar cada uno de los bordes e_i que pertenecen al mallado triangular $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$, si la longitud de dichos bordes es mayor que L_{max} (Ver ecuación 30), se efectuá las sentencias del algoritmo 3.

Algorithm 3: Función para la división de bordes largos.

```

1 division_borde_largo( $e_i$ );
   Entrada: Bordes que cumplan:  $\text{longitudBorde}(e_i) > L_{max}$ .
   Salida : Nuevos bordes  $e_i \in \mathcal{E}$  y nuevos vertices  $v_i \in \mathcal{V}$ .
2 while  $e_i$  con  $\text{longitudBorde}(e_i) > L_{max}$  do
3   puntoMedio( $e_i$ ) =  $\text{borde.izquierdaPos} + (\text{borde.izquierdaPos} + \text{borde.derechaPos})/2$ ;
4   Divida a  $e_i$  en puntoMedio( $e_i$ );
5   Reemplace a  $e_i$  por  $e_{i1}$  y  $e_{i2}$  en  $\mathcal{E}$ ;
6    $v_i$  = puntoMedio( $e_i$ );
7   Agregue el nuevo vértice  $v_i$  a  $\mathcal{V}$ ;
8 end
9 return  $\mathcal{V}_r, \mathcal{F}_r$ ;

```

Como se describe en el anterior algoritmo, la función de división de bordes largos divide al borde que cumple con la condición en su punto medio, como se muestra en la figura 29.(a) y por consiguiente, los dos triángulos adyacentes son biyectados. Finalmente, el resultado es un nuevo borde $v_i \in \mathcal{V}$, tres nuevos bordes $e_i \in \mathcal{E}$ y dos nuevas facetas $f_i \in \mathcal{F}$.

Colapso de bordes

La función de colapso de bordes cortos remueve todos los bordes con una longitud menor a L_{min} (Ver ecuación 30) y reemplaza los vértices que componen dicho borde e_i en un único vértice, donde la posición de este se calcula exactamente igual que en el operador de división de bordes. El procedimiento es mostrado en la figura 29.(b) y descrito en el algoritmo 4.

Algorithm 4: Función del operador de colapso de bordes cortos.

```
1 colapso_borde_corto( $e_i$ );
   Entrada: Bordes  $\text{longitudBorde}(e_i) < L_{min}$ .
   Salida : Nuevos bordes  $e_i \in \mathcal{E}$  y nuevos vértices  $v_i \in \mathcal{V}$ .
2 while  $e_i$  con  $\text{longitudBorde}(e_i) < L_{min}$  do
3   /*Sea  $e_i = (A, B)$  and sean  $A[1], \dots, A[n]$  el anillo unitario de  $A^*$ */
4   colapso_ok = true;
5   for  $i = 1$  a  $n$  do
6     if  $\text{longitudBorde}(B, A[i]) > L_{max}$  then
7       | colapso_ok = false;
8     end
9   end
10  if colapso_ok then
11    | colapse a  $A$  dentro de  $B$  a lo largo de  $e_i$ ;
12  end
13 end
14 return  $\mathcal{V}_r, \mathcal{F}_r$ ;
```

Al colapsar bordes cortos consecutivos en el mallado triangular $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$, existe la posibilidad que el algoritmo cree nuevos bordes largos arbitrariamente y aniquilando el trabajo hecho por el operador de división de bordes largos. La solución a este problema se basa en la comprobación antes del colapso de vértices, verificando si este producirá un borde que es más largo que L_{max} . Si esta condición se cumple, entonces el operador de colapso de bordes no se ejecuta.

Giro de borde

El operador encargado de equilibrar las celdas de vértices conocido como giro de borde, efectuó una revisión de la dirección de los bordes en estas, ya sean celdas internas hexagonal o celdas trapezoidales en la frontera del mallado triangular. Al no cumplirse la condición designada para el equilibrio de celdas, el operador efectuó un giro del borde analizado a dos nuevos vértices vecinos consecutivos de la celda a la que pertenece. Esta transformación es mostrada en la figura 29.(c). Por consiguiente, se implementan las funciones $\text{conexiones}()$ y $\text{conexiones_teoricas}()$, estas verifican el número de conexiones que tiene el vértice analizado y el número de conexiones teóricas, respectivamente. Las conexiones teóricas se definen con el escalar seis para vértices internos y cuatro para vértices en la frontera y se basan en el criterio de mallado triangular de alta calidad descrito por Botsch et al. en [10]. En este orden de ideas, la función $\text{conexiones_teoricas}()$ verifica si el vértice pertenece a una frontera o hace parte del mallado interno. Se calcula entonces la desviación antes y después del giro, donde esta operación se mantiene siempre y cuando la desviación posterior al giro sea menor a la desviación previa a este, como se detalla en el algoritmo 5. De no cumplirse la condición de equilibrio de celdas, se ejecuta nuevamente un giro

sobre el borde para retornarlo a la posición inicial.

Algorithm 5: Función para el giro de bordes.

```

1 giro_borde( $e_i$ );
   Entrada: Bordes  $e_i \in \mathcal{E}$ .
   Salida : Nuevos bordes  $e_i \in \mathcal{E}$ .
2 for Para cada borde  $e_i \in \mathcal{E}$  do
3   /*Sean  $a, b, c, d$  los vértices de dos triángulos adyacentes al borde  $e_i$ */
4    $desviacionPre =$ 
    $|conexiones(a) - conexiones.teoricas(a)| + |conexiones(b) - conexiones.teoricas(b)| +$ 
    $|conexiones(c) - conexiones.teoricas(c)| + |conexiones(d) - conexiones.teoricas(d)|;$ 
5   giro( $e_i$ );
6    $desviacionPost =$ 
    $|conexiones(a) - conexiones.teoricas(a)| + |conexiones(b) - conexiones.teoricas(b)| +$ 
    $|conexiones(c) - conexiones.teoricas(c)| + |conexiones(d) - conexiones.teoricas(d)|;$ 
7   if  $desviacionPre \leq desviacionPost$  then
8     | giro( $e_i$ );
9   end
10 end
11 return  $\mathcal{V}_r, \mathcal{F}_r$ ;

```

Relajación tangencial

La transformación de relajación tangencial aplica un proceso discreto sobre el mallado, que filtra y suaviza iterativamente la triangulación de Delaunay con el fin de mejorar la distribución de vértices. El movimiento aplicado por la función esta limitado al plano tangente del vértice estudiado, siendo el objetivo estabilizar la posición de este para la aplicación del operador de proyección a la superficie, detallado más adelante. Para un remallado isotrópico uniforme Botsch et al. en [9] muestran que cada vértice v_i ubicado en el espacio tridimensional por su respectivo vector posición p_i , debe ser movido a la posición promedio q_i ; esta posición se define como el ponderado del suavizado Laplaciano explicado con mayor detalle por Botsch et al. en [10] y representa una nueva posición del vértice que pertenece al conjunto $\mathcal{V}(v_i)$, donde dicho conjunto es una vecindad conformada por los vértices más cercanos. En consecuencia, el calculo de los pesos Laplacianos q_i esta dado por

$$q_i = \frac{1}{|\mathcal{V}(p_i)|} \sum_{p_j \in \mathcal{V}(p_i)} p_j. \quad (31)$$

Posteriormente, la nueva posición p'_i del vértice v_i , se obtiene de

$$p'_i = q_i + \langle n_i, n_i^T \rangle \cdot (p_i - q_i), \quad (32)$$

donde se realiza la proyección del ponderado Laplaciano q_i sobre el plano tangente al vértice v_i , obtenido a partir del vector normal n_i en dicho vértice y su correspondiente vector transpuesto n_i^T . A

continuación, el algoritmo 6 detalla el procedimiento aplicado por el operador de relajación tangencial.

Algorithm 6: Función para el operador de relajación tangencial.

```

1 relajacion_tangencial( $v_i$ );
   Entrada: Vértices  $v_i \in \mathcal{V}$ .
   Salida : Nuevos vértices  $e_i \in \mathcal{E}$ .
2 for Para cada vertice  $v_i$  do
3   |  $q[v_i]$  = el ponderado Laplaciano de los vértices vecinos de  $v_i$ ;
4 end
5 for Para cada vertice  $v_i$  do
6   | /*Sean  $p[v_i]$  y  $n[v_i]$  el vector posición y el vector normal de  $v_i$ , respectivamente.*/
7   |  $p[v_i] = q[v_i] + \langle n[v_i], (p[v_i] - q[v_i]) \rangle \cdot n[v_i]$ ;
8 end
9 return  $\mathcal{V}_r, \mathcal{F}_r$ ;

```

Proyección a la superficie

Esta transformación proyecta nuevamente los vértices movidos por el operador de relajación tangencial, regresándolos de nuevo a la superficie. El proceso es mostrado por la figura 30. Sin embargo, Dunyach et al. afirman en [19] que este paso puede considerarse opcional cuando se aplica sobre mallados con una alta densidad de vértices, característica de los mallados triangulares obtenidos por la técnica de proyección de franjas.

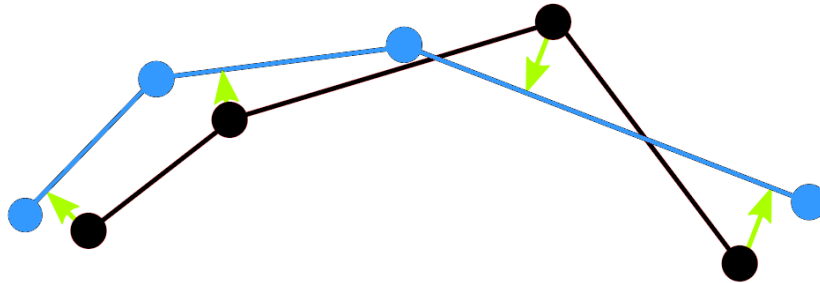


Figura 30: Explicación del operador de proyección a la superficie sobre la vista transversal de un mallado. El mallado de entrada esta definido por el color negro y los vectores en color verde muestran la proyección a realizar sobre cada uno de las nuevas posiciones de los vértices, visualizadas en el mallado azul.

Aplicación del proceso de remallado isotrópico uniforme

La base para el remallado isotrópico se fundamenta en la definición de la longitud de borde L por parte del usuario. A continuación se muestra en las figuras 31.(a) y 31.(b) el remallado uniforme del modelo tridimensional “T-rex” para $L = 1[mm]$ y $L = 3[mm]$, respectivamente.

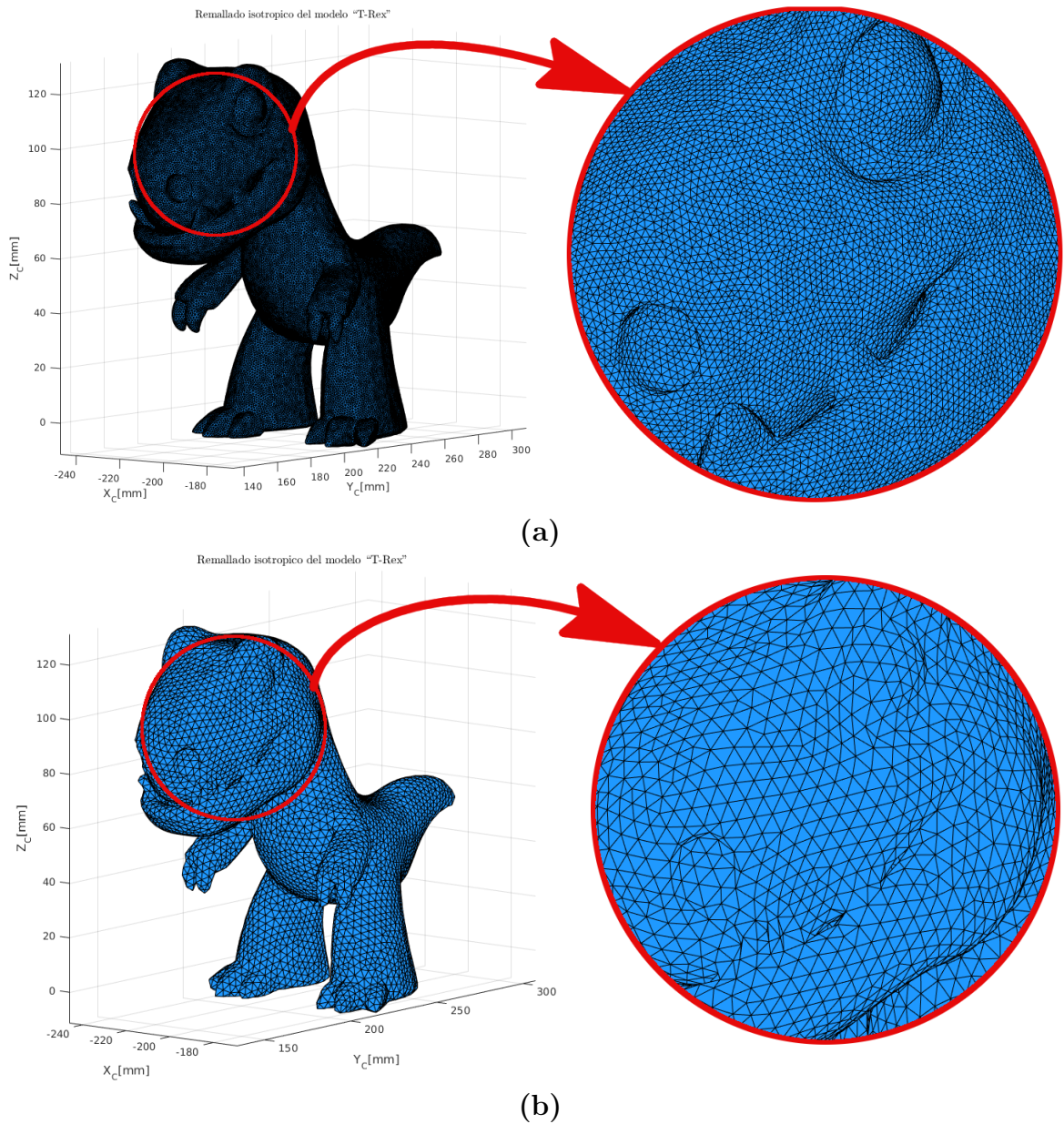


Figura 31: Remallados isotrópicos del modelo tridimensional "T-rex" constituido por 7922 vértices. (a) Remallado uniforme con $L \approx 1[mm]$ y con un numero de 61595 vértices. (b) Remallado uniforme con $L \approx 3[mm]$ con 13394 vértices.

Consecuentemente, se realizó el mismo procedimiento esta vez sobre el objeto tridimensional "Ghost", donde se obtuvo los resultados para $L = 1.0[mm]$ y $L = 3.0[mm]$ en las figuras 32.(a) y 32.(b), respectivamente.

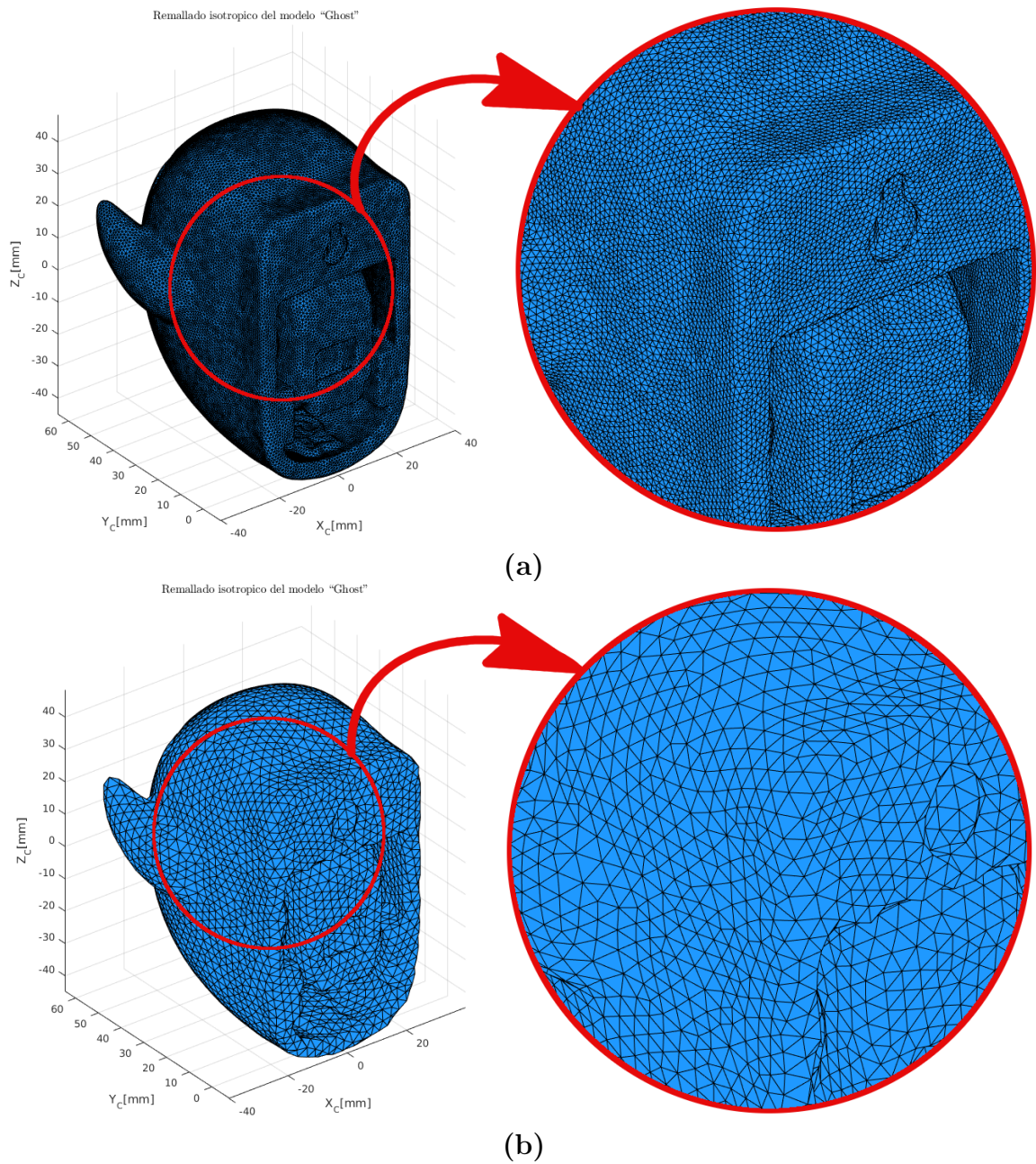


Figura 32: Remallados isotrópicos del modelo tridimensional "T-rex" constituido por 62916 vértices. (a) Remallado uniforme con $L \approx 1[mm]$ y con un numero de 98542 vértices. (b) Remallado uniforme con $L \approx 3[mm]$ con 7065 vértices.

Finalmente, para el modelo tridimensional "Einstein" se usaron exactamente los mismo valores de la longitud de borde L , en el mismo orden mencionado en las anteriores figuras (Ver figuras 33.(a) y 33.(b)).

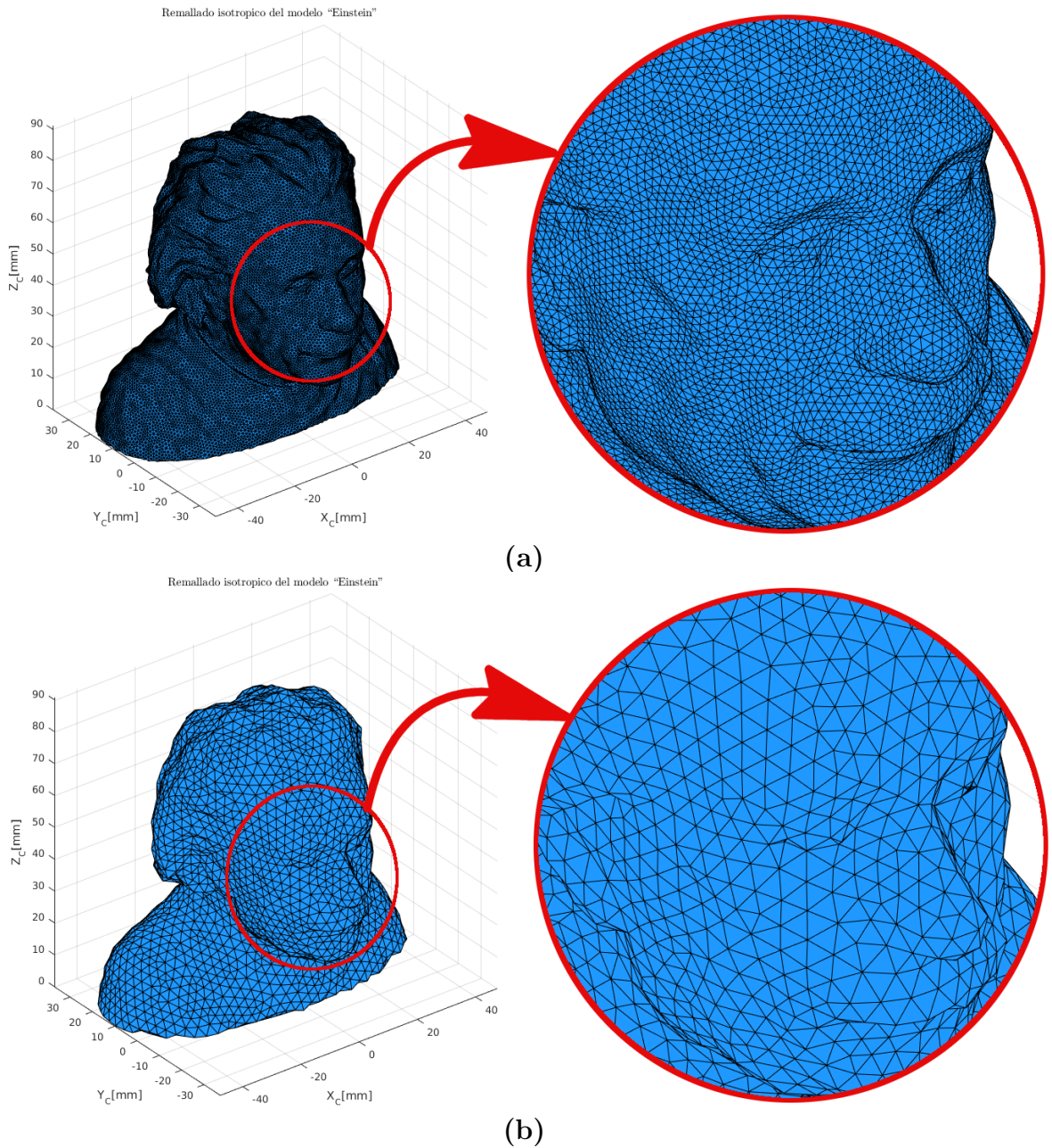


Figura 33: Remallados isotrópicos del modelo tridimensional "Einstein" constituido por 148095 vértices. (a) Remallado uniforme con $L \approx 1[mm]$ y con un numero de 33335 vértices. (b) Remallado uniforme con $L \approx 3[mm]$ con 3460 vértices.

A pesar de que el remallado isotrópico uniforme simplifica el mallado y efectúa una reducción bien distribuida de los triángulos, elimina también información importante de la topografía del objeto. Esta pérdida de información provoca que es causada por la no definición en el algoritmo de un criterio para las regiones de interés. Por el contrario, al refinar el mallado escogiendo una longitud de borde

lo suficientemente pequeña, es posible optimizar parcialmente el mallado, pues son agregados nuevos vértices y por siguientes mas facetas a las regiones de interés, obteniendo una mayor aproximación a la superficie real; con la consecuencia que el número de datos aumenta considerablemente y trayendo consigo trascendentales aumentos en los tiempos de computo y visualización del mallado. Por lo tanto, se hizo necesaria la implementación de un algoritmo adaptativo que refine las regiones de interés y simplifique al mismo tiempo las zonas de menor importancia del objeto reconstruido; dicho criterio adaptativo se definió como la curvatura de la topografía.

Conseguir un remallado que cumpla con el criterio de curvatura y las condiciones de mallado de alta calidad propuestas, implica que el remallado interactúa con las propiedades intrínsecas y extrínsecas de la superficie que representa. Es por esto que inicialmente es necesario extraer dicha información de la superficie, en donde se encuentran los diferentes tipos de curvatura. Entonces, es necesario ampliar la percepción del mallado como la representación de una superficie, al concepto de variedad diferencial bidimensional embebida en el espacio tridimensional Euclideo, con todas las implicaciones a las que esto conlleva.

4.2 Remallado incremental interactivo por curvatura

Una vez visto el proceso de remallado incremental y los diferentes operadores locales de remallado, el objetivo es lograr que el proceso de remallado interactúe con la información superficial del objeto 3D, i.e., que la caracterización de curvaturas de la superficie se convierta en el criterio de eliminación de elementos del mallado. Teniendo en cuenta que el objetivo central de esta investigación es mantener en lo posible la mayor cantidad de datos de entrada en regiones con alta curvatura y submuestrear los elementos del mallado en zonas con baja curvatura, se presenta en este capítulo la manera en la que se incluye la caracterización de las curvaturas en el proceso del remallado incremental.

4.2.1. Variedades diferenciales y análisis de curvaturas

Una superficie en el contexto de las aplicaciones de gráficos por computador es una 2-variedad continua, orientable incrustada en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^3 , que puede ser entendido como la superficie frontera de un sólido tridimensional no degenerado, donde la designación de no degenerado indica que el sólido no tiene ninguna parte infinitamente delgada o característica tal que la superficie propiamente separe el “interior” y el “exterior” del sólido, como lo explica Botsch et al. en [10]. Por lo tanto, un mallado triangular generalmente es una variedad 2-dimensional que representa una superficie en espacio Ecuclideo \mathbb{R}^3 ; sin embargo, en los mallados triangulares existen también las componentes no-variedades o non-manifolds. Un mallado triangular es considerado una variedad 2-dimensional solo si no contiene bordes singulares, vértices singulares y auto-intersecciones. Los vértices singulares se generan pellizcando dos hojas de superficie juntas en dicho vértice, de manera que este es incidente a dos conjuntos de facetas cerradas como lo muestra la figura 34.(b). Por otro lado, un borde singular posee más de dos facetas triangulares incidentes a este, como se observa en la figura 34.(b). Los mallados non-manifold presentan grandes problemas para la mayoría de algoritmos, pues alrededor de los componentes singulares no existen configuraciones de vecindades geodésicas locales bien definidas. Cabe resaltar que los objetos 3D obtenidos por la R3DPF poseen puntos que se consideran singulares,

es por esto que se realiza antes de la triangulación de Delaunay una limpieza de la nube de puntos para eliminar elementos singulares y no tener posteriormente problemas con el mallado triangular.

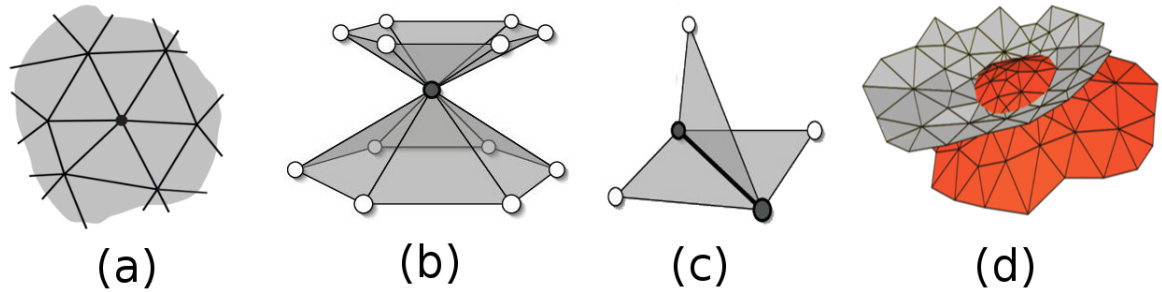


Figura 34: (a) Conjunto de facetas cerrado de balance seis. (b) Vértice singular. (c) Borde singular. (d) Auto-intersección del mallado. Fuente: [6].

Al entender que un mallado triangular es una variedad 2-dimensional, es posible explicar que cualquier superficie puede ser vista como este espacio topológico. Toda superficie puede ser vista como un disco topológico donde su geometría puede ser descrita por la transformación² f tal que $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de una región M en el espacio Euclideo \mathbb{R}^2 a un subconjunto $f(M)$ de \mathbb{R}^3 , como lo representa la figura 35.

La región M se conoce como variedad diferencial³ topológica n -dimensional, conocida también como n -manifold, como lo explica Crane et al. en [15]. Una variedad es entonces un espacio continuo el cual luce localmente como un espacio Euclideo.

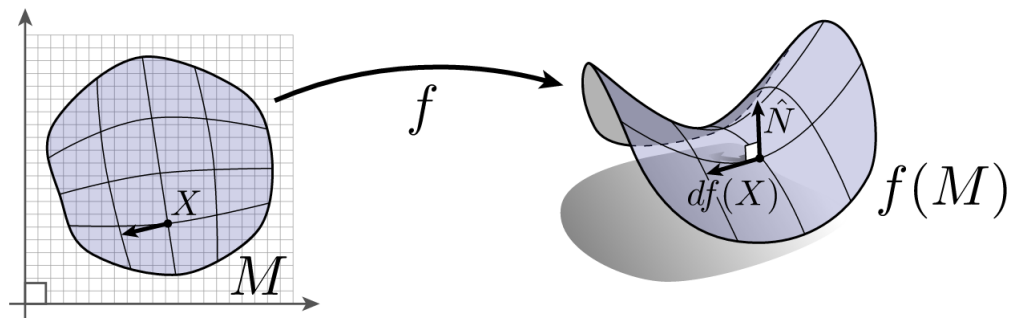


Figura 35: Representación esquemática del homeomorfismo f actuando sobre la variedad M . Fuente: [15].

La figura 35 muestra que el diferencial es proporcionado por la transformación f y es denotado por df , este proporciona la información de como un vector X en el plano, corresponde a un vector $df(X)$ sobre la superficie. Es posible imaginar la variedad M como una lamina deformable y al vector X

²Weisstein, Eric W. “Homeomorphism.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Homeomorphism.html>

³Rowland, Todd. “Manifold.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. <http://mathworld.wolfram.com/Manifold.html>

como un segmento de línea dibujado sobre M . Entonces, a medida que se estira o deforma la variedad M en la superficie $f(M)$, también se deforma o estira en un segmento diferente el vector X , denotado después de dicho cambio como $df(X)$. Luego, el diferencial df es quien posee la información de la transformación, en otras palabras, es quien define como estirarse y deformarse al vector X . El vector $df(X)$ es tangente a la superficie en un punto p . Sí ahora se propone un vector $N \in \mathbb{R}^3$ normal a la superficie en el punto p , ambos vectores deben satisfacer la condición de ortogonalidad

$$\langle df(X), \hat{N} \rangle = 0, \tag{33}$$

donde $\langle a, b \rangle$ denota el producto interno entre los vectores a y b .

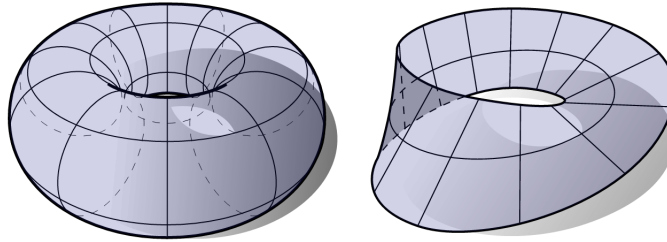


Figura 36: El toroide es una variedad orientable, mientras que la cinta de Möbius no lo es. Fuente: [15].

Para un punto p sobre M existen dos vectores unitarios normales: $+\hat{N}$ y $-\hat{N}$. Si es posible definir una dirección consistente para \hat{N} se dice entonces que la variedad M es orientable. Para esta investigación se asumió que las variedades diferenciales aquí presentadas son compactas, continuas y orientables. Una superficie toroidal es un ejemplo de una variedad orientable y en contraste, la cinta de Möbius⁴ es una variedad diferencial no orientable (Ver figura 36).

Las variedades diferenciales están dotadas de una métrica, i.e., un producto interno en cada uno de sus espacios tangentes. Esta inclusión define intuitivamente un espacio curvado que localmente luce como un espacio Euclideo. Al entender las superficies como variedades diferenciales, se incluye implícitamente el concepto de curvatura, pues una variedad diferencial M con una métrica propia que varía en determinadas direcciones, registra un cambio en comparación a la métrica Euclidea. Estos cambios en la métrica es lo que se conoce como curvatura y toda la información de esta se almacena en el tensor de Riemman o tensor de curvatura⁵. Sin embargo, el problema del tensor de curvatura es bastante amplio, pues se define para variedades n -dimensionales y generaliza el concepto de curvatura. En el caso de las superficies, las variedades 2-dimensionales se definen mediante la definición local de curvatura.

La definición de curvatura de una superficie puede entenderse en términos de las curvas contenidas en esta. Por ejemplo, sobre la superficie de una botella como la de la figura 37, en la dirección del vector X_1 las curvas cambian rápidamente alrededor de una circunferencia; por el contrario, a lo largo de la dirección del vector X_2 , la superficie es completamente plana y se desplaza a lo largo de una línea recta.

⁴Weisstein, Eric W. “Möbius Strip.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/MoebiusStrip.html>

⁵Weisstein, Eric W. “Riemann Tensor.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/RiemannTensor.html>

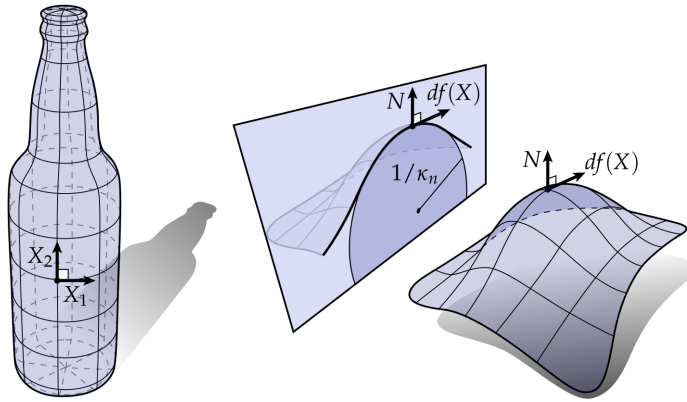


Figura 37: Diferentes ejemplos de curvatura. Fuente: [15].

En particular, al retomar el vector unitario tangente a la superficie $df(X)$ en algún punto p sobre la superficie $f(M)$ y al vector normal \hat{N} en dicho punto, donde ambos están contenidos en el mismo plano como se muestra en la figura 37. Dicho plano intersecta la superficie en una curva. Consecuentemente, es posible definir a \hat{N} como una transformación continua, este mapeo se conoce en geometría diferencial como mapeo de Gauss y se define por $\hat{N} : M \rightarrow \mathcal{S}^2$. El mapeo de Gauss asocia cada punto P de la variedad M con su vector normal unitario, visto como un punto sobre la esfera unitaria $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Por consiguiente, el diferencial $d\hat{N}$ posee la información concerniente al cambio en la dirección normal, a medida que se avanza en una trayectoria sobre la superficie. La variedad \mathcal{S}^2 se observa en la figura 37. Luego, considerando el cambio en el vector normal \hat{N} a lo largo de una dirección tangente particular, es posible evaluar

$$\kappa_n(X) = \frac{\langle df(X), d\hat{N}(X) \rangle}{\langle df(X), df(X) \rangle}, \quad (34)$$

donde κ_n es conocida como la curvatura normal en la dirección del vector X . La curvatura normal κ_n posee un signo determinado, esto indica que la superficie se puede doblar hacia la normal o fuera de ella.

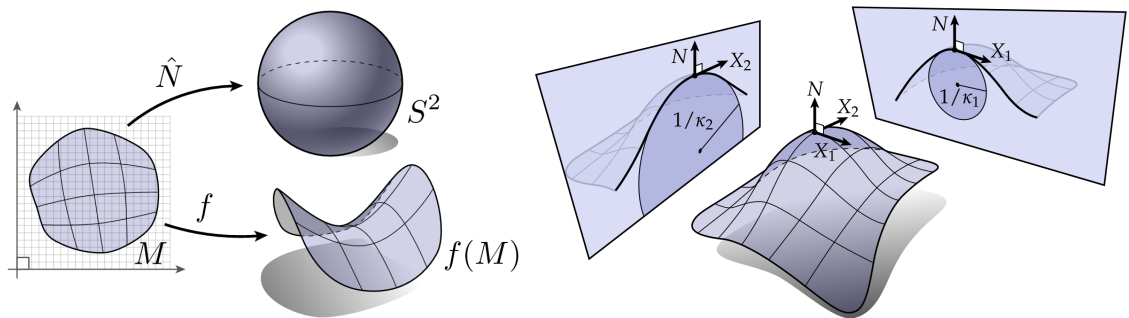


Figura 38: Transformaciones para la geometría de superficies. Fuente: [15].

Ahora, antes de proseguir con el análisis de curvaturas es importante identificar los dos tipos principales de curvatura: intrínseca y extrínseca. Al observar los objetos se puede definir si este es curvo

o no; esta sería la definición de curvatura extrínseca: la curvatura que posee el objeto en relación al espacio tridimensional “plano” o Euclideo del que forma parte. Por el contrario, la curvatura intrínseca proporciona la noción de que la distancia entre dos puntos en la superficie de cualquier objeto es la misma que si dicho objeto o superficie se extendiera o proyectara sobre un plano sin desgarrarla o arrugarla; las líneas paralelas permanecen paralelas cuando la superficie es continua. Por consiguiente, la geometría intrínseca de una variedad 2–dimensional (aunque puede extenderse para variedades n –dimensionales) sólo considera las relaciones entre los puntos de caminos que permanecen en la variedad. Así la curvatura extrínseca se basa en el fundamento de un espacio de más dimensiones y analizar la curvatura de las líneas que están en la superficie en comparación con las líneas “rectas” que van fuera del objeto de estudio [49]. Entre las curvaturas extrínsecas se tienen la curvatura media y la curvatura total. La curvatura Gaussiana hace parte de las curvaturas intrínsecas.

Entre los intereses principales del análisis de curvaturas se encuentra conocer las direcciones en las que la superficie se curva mas, estas son conocidas como direcciones principales y están denotadas en la figura 38 como los vectores X_1 y X_2 , a lo largo de las cuales se produce la máxima y mínima curvatura normal κ_1 y κ_2 , respectivamente. Por ejemplo, en la botella de la figura 37, las curvaturas $\kappa_1 = 1$ y $\kappa_2 = 0$ corresponden a las de la superficie en el punto señalado.

Es de gran utilidad hablar de la curvatura principal en términos del operador de forma⁶ definido como $\mathcal{S} : TM \rightarrow TM$ y de la transformación de Weingarten, siendo esta la única aplicación que satisface

$$df(\mathcal{S}X) = d\hat{N}(X), \quad (35)$$

para todos los vectores tangentes X . En esencia, el operador de forma \mathcal{S} y la transformación de Weingarten representan el mismo concepto fundamental, como cambia la normal \hat{N} a lo largo de una dirección X . La diferencia principal entre estos dos operadores es que dicho cambio se da en términos de un vector tangente, en la variedad M para el caso del operador \mathcal{S} y en la superficie $f(M) \subset \mathbb{R}^3$ en la aplicación del operador $d\hat{N}$. Es posible definir el cambio en términos de vectores tangente debido a que al ser un vector unitario normal a la superficie, no es posible aumentar o reducir la magnitud de \hat{N} en la dirección normal. Es trascendental el hecho de que el las direcciones principales y la curvatura extrínseca principal corresponden a los eigenvectores y eigenvalores respectivamente, del operador de forma \mathcal{S}

$$\mathcal{S}X_i = \kappa_i X_i. \quad (36)$$

Otra característica fundamental, es que la métrica de la variedad $f(M)$ definida como

$$g(X_1, X_2) = \langle df(X_1), df(X_2) \rangle = 0, \quad (37)$$

indica que las direcciones principales son ortogonales con respecto a la métrica de la variedad. Es por este hecho que la curvatura principal se define en términos de la curvatura normal en un punto y es posible computarla siempre y cuando se defina cualquier vector tangente Υ como una combinación lineal de las direcciones principales X_1 y X_2 . La curvatura normal κ_n a lo largo de un vector tangente Υ , donde dicho vector esta relacionado con una de las direcciones principales X_1 por el angulo θ es

⁶Weisstein, Eric W. “Shape Operator.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ShapeOperator.html>

$$\kappa_n(\Upsilon) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta, \quad (38)$$

sin embargo, es de gran dificultad trabajar directamente con curvaturas principales, especialmente para configuraciones discretas como lo son los mallados triangulares. Es por esto que se define la curvatura extrínseca media H , siendo esta el promedio aritmético de las curvaturas principales:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \quad (39)$$

y la curvatura intrínseca Gaussiana es el promedio geométrico

$$K = \kappa_1 \kappa_2. \quad (40)$$

Una interpretación de las curvaturas media H y Gaussiana K define a la curvatura Gaussiana como un operador lógico “y” y a la curvatura media H como un operador lógico “o”, donde se cuestiona si existe curvatura en ambas direcciones o a lo largo de al menos una dirección, respectivamente. Es necesario guardar cautela con esta definición, pues es posible obtener valores de curvatura media H iguales a cero en el caso específico en el que las curvaturas principales sean opuestas, i.e., $\kappa_1 = -\kappa_2$.

Las superficies con curvatura cero son bien estudiadas en matemáticas. El caso en el que la curvatura Gaussiana es igual a cero, la superficie se conoce como superficie desarrollable puesto que pueden aplanarse o desenrollarse en un plano sin ningún estiramiento o desgarramiento. Entre estas superficies tenemos e.g. una parte de un cilindro, como se muestra la figura 39.(a). Para el caso de superficies con curvatura media H igual a cero, se conocen como superficies mínimas pues minimizan el área de esta. Estas superficies mínimas se caracterizan por sus valores en la curvatura Gaussiana dependiendo si es positiva o negativa, como lo son las figuras 39.(b) y 39.(c) respectivamente.

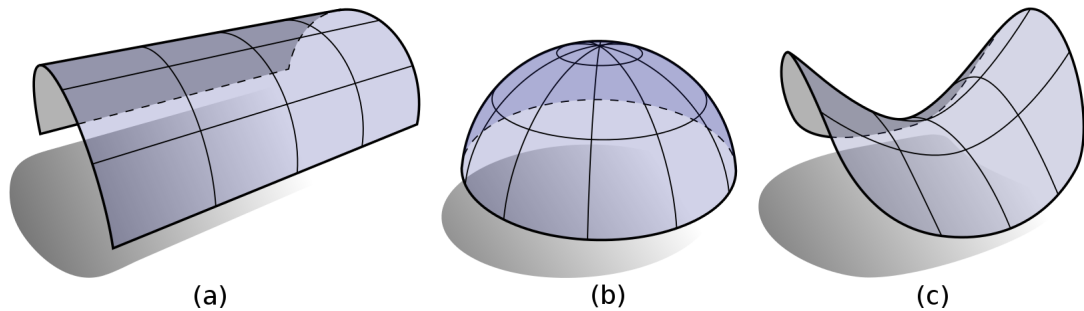


Figura 39: Diferentes variedades diferenciales bidimensionales: (a) Variedad diferencial cilíndrica. (b) Variedad esférica. (c) Paraboloide hiperbólico visto como una variedad diferencial. Fuente: [15].

Entonces, las curvaturas Gaussiana K y media H no son más que promedios geométricos y aritmético respectivamente, de las curvaturas principales κ_1 y κ_2 ; que a su vez son el máximo y el mínimo de la curvatura normal κ_n . Es por esto que la curvatura de una superficie está completamente descrita por la curvatura normal κ_n . Cabe resaltar, que la formulación de las curvaturas K y H se debe a su facilidad de computo en comparación de las curvaturas principales.

Para el caso de los mallados triangulares, al ser sistemas discretos conformados por superficies planas estos no poseen curvaturas; por lo que el análisis de curvaturas para estas representaciones se basa en la concepción de la malla como una aproximación lineal por tramos de una superficie conocida, donde el objetivo primordial es calcular la curvatura de esta superficie desconocida. Un estudio detallado del calculo de curvaturas mediante el uso de operadores de geometría diferencial discreta es expuesto por Meyer et al. en [38], del cual es basado el computo de curvaturas para esta investigación y basa su fundamentación en promedio locales y análisis de componentes principales⁷.

Se procedió entonces a calcular las respectivas curvaturas media H , Gaussiana K y total, para los diferentes modelos tridimensionales ya trabajados. La curvatura total se define como la suma absoluta de las curvaturas Gaussiana y media, siendo usada para criterios de comparación. Para el modelo tridimensional “T-rex” se observa en la figura 40, valores extremos de curvatura en las regiones donde evidentemente existe pronunciadas percepciones de curvatura; así como valores aproximadamente nulos en la curvatura para las zonas cuasi-planas del objeto 3D o de superficies desarrollables. El signo de las curvaturas evidencia regiones de tipo mínima, como las mostradas en la figura 39, donde la curvatura media H es aproximadamente cero y en al cual la percepción de curvatura es definida por la curvatura Gaussiana K . Esto puede observarse e.g., en el lomo del dinosaurio del objeto 3D “T-rex”, donde el valor de la curvatura media H es aproximadamente cero, pero sin embargo se percibe curvatura. Esta concepción es complementada por la curvatura Gaussiana, pues dicha región es similar al ejemplo de la figura 39.(c), que corresponde a una superficie mínima de curvatura Gaussiana negativa y que inequívocamente puede constatararse en el respectivo gráfico de curvatura Gaussiana K de “T-rex” su valor negativo. Cabe aclarar, que el computo de curvaturas fue realizado sobre los mallados de entrada sin modificaciones, i.e., no se utilizaron los remallados isotrópicos uniformes obtenidos en la sección anterior.

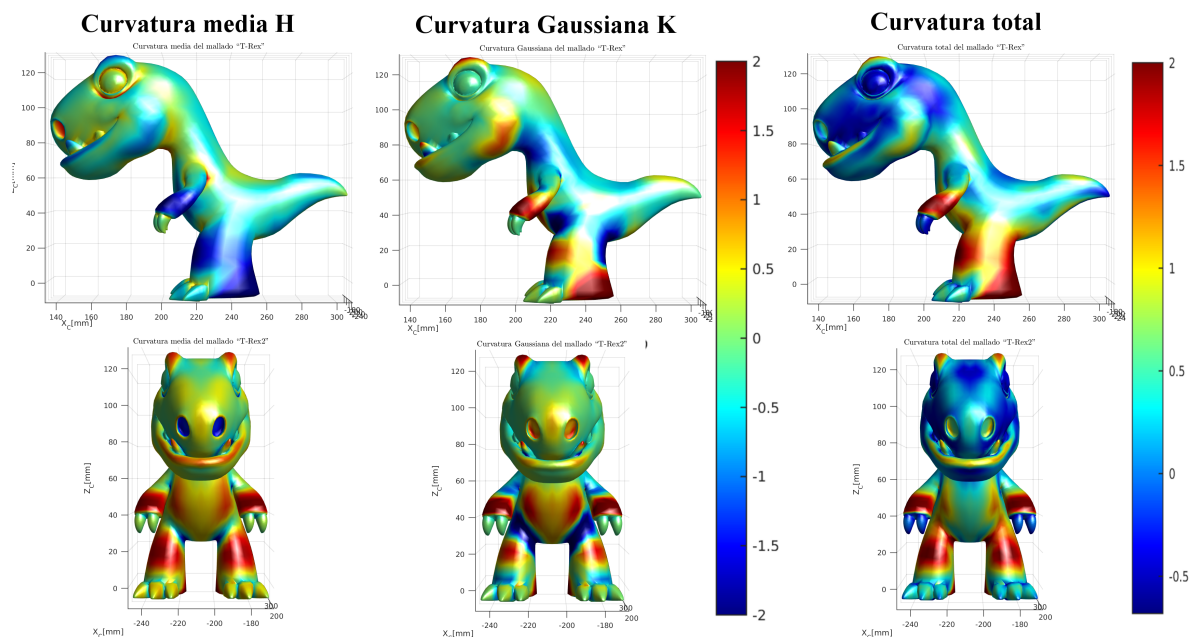


Figura 40: Análisis de las curvaturas media y Gaussiana para el modelo 3D “T-rex”.

El respectivo análisis de curvaturas para el modelo “Ghost” se muestra en la figura 41. Es notable el

⁷Weisstein, Eric W. “Principal Component Analysis” From MathWorld—A Wolfram Web Resource.

hecho de que las curvaturas media H y Gaussiana K corresponden a valores aproximadamente nulos en la región plana del objeto tridimensional.

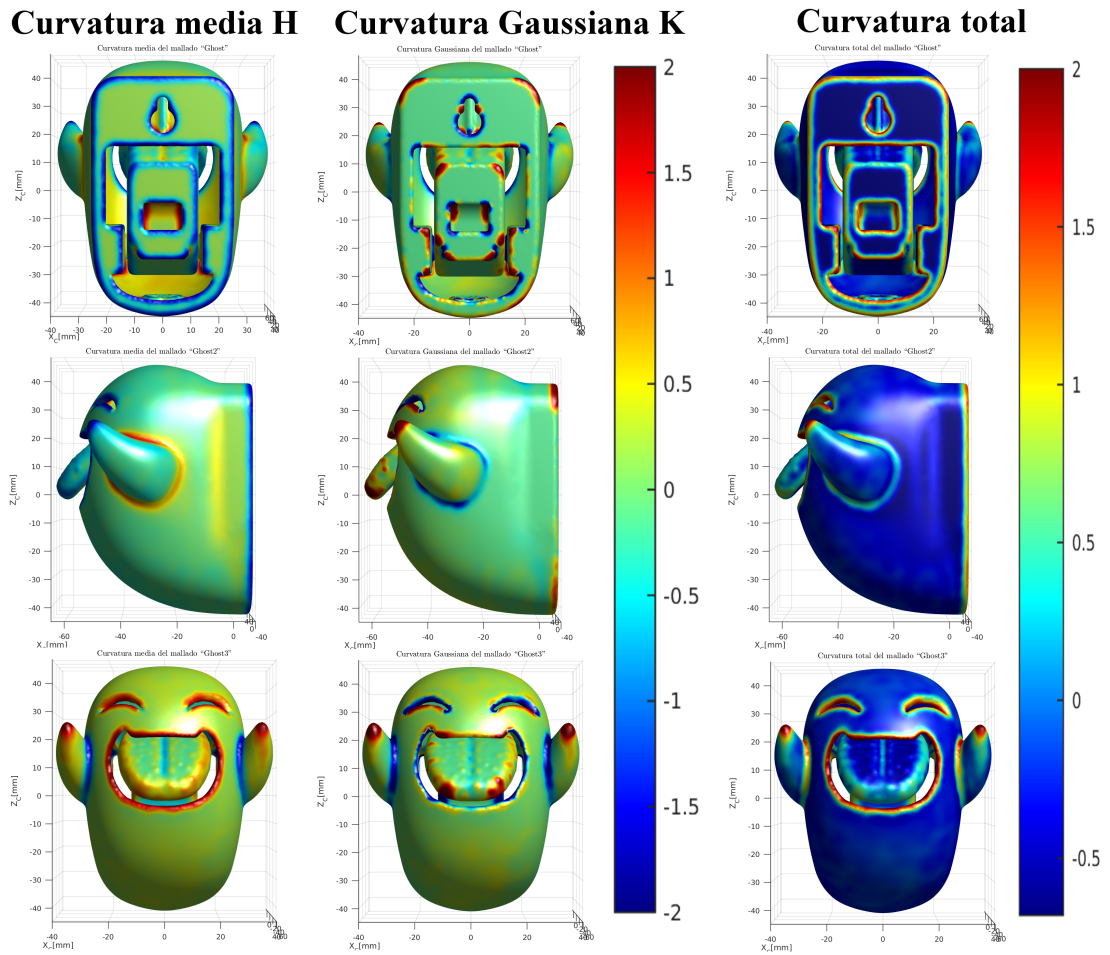


Figura 41: Análisis de las curvaturas media y Gaussiana para el modelo 3D “Ghost”.

Para topografías mas complejas como la descrita por el objeto 3D “Einstein”, puede apreciarse zonas de alta curvatura y curvaturas cercanas a cero. La figura 42 detalla las curvaturas media H , Gaussiana K y total, para esta superficie.

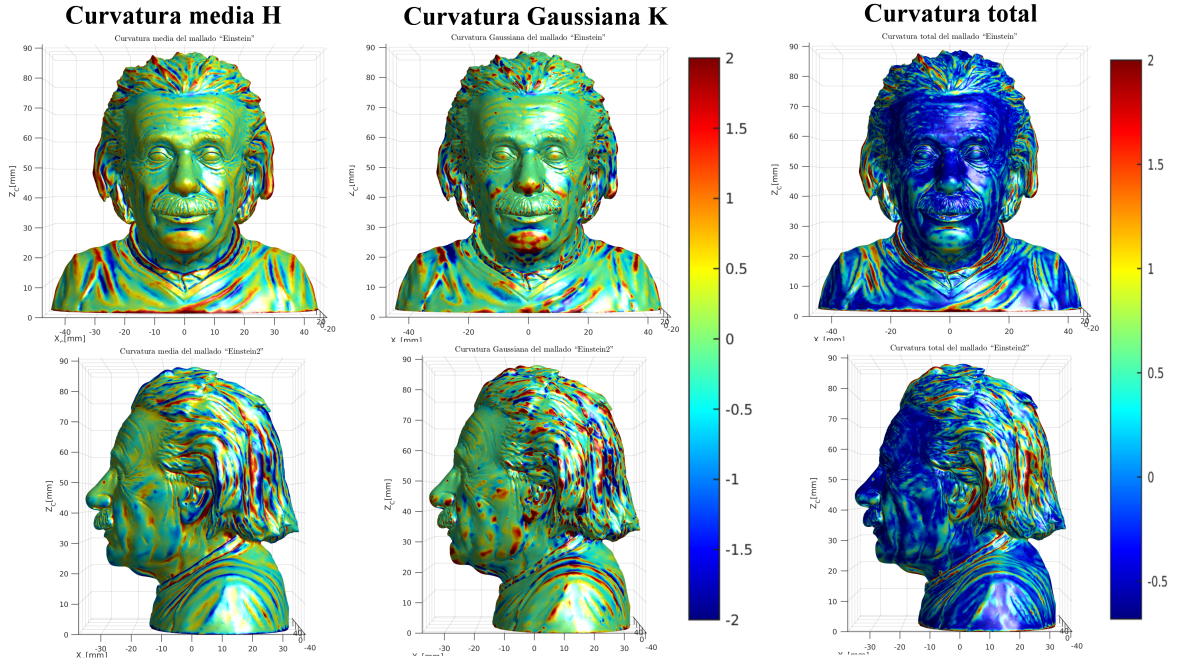


Figura 42: Análisis de las curvaturas media y Gaussiana para el modelo 3D “Einstein”.

4.2.2. Inclusión del criterio de curvatura en el remallado incremental

Al definir los diferentes tipos de curvatura en la sección anterior, se procedió a incorporar dicha caracterización de las superficies al proceso de remallado, donde las longitudes de control L_{max} y L_{min} mencionadas en la sección 4.1 (Ver ecuación 30) se obtienen a partir de este criterio y no como parámetros constantes, si no por el contrario, como un campo escalar de dimensionamiento $L(v_i)$. Al definir las curvaturas normales máxima k_1 y mínima k_2 como

$$k_1(v_i) = H(v_i) + \sqrt{H^2(v_i) - K(v_i)}, \quad (41)$$

$$k_2(v_i) = H(v_i) - \sqrt{H^2(v_i) - K(v_i)}, \quad (42)$$

en [38], Meyer et al. obtienen de manera mas simple el computo de estas curvaturas principales partiendo de las curvaturas Gaussiana K y media H . Por consiguiente, las curvaturas principales k_1 y k_2 contienen la información acerca de la dirección sobre la superficie en la que esta posee mayor o menor curvatura, respectivamente.

Curvatura máxima absoluta

Como se explico al inicio de este capitulo, el remallado establece su criterio de interacción como la curvatura de la superficie, por lo tanto, las regiones de mayor curvatura poseen el privilegio de contener mayor información topográfica, traducida como mayor cantidad de vértices y por tanto, de triángulos en el nuevo mallado; no obstante, el remallado también interacciona con las regiones de baja curvatura, eliminando vértices y formando una menor cantidad de nuevas facetas triangulares. La curvatura principal máxima k_1 de la ecuación 41 establece entonces el criterio trascendental para la obtención del mallado interactivo por curvatura pues define las direcciones en la superficie con mayor curvatura, como lo muestra Dunyach et al. en [19].

Posteriormente se definió un campo de dimensionamiento adaptativo $L(v_i)$ que controla la longitudes de borde de los operadores de remallado y que fundamenta las componentes de este campo escalar según el criterio de la curvatura principal k_1 . Dicho campo $L(v_i)$ se explica en la siguiente sección, pero como requisito exige que los valores de curvatura k_1 sean mayores que cero, por consiguiente la ecuación 41 se convierte en la curvatura máxima absoluta, definida como

$$|k_1(v_i)| = \begin{cases} |H(v_i)| & \text{si } K(v_i) \leq 0 \\ \sqrt{|H(v_i)|^2 - K(v_i)} & \text{para lo demás} \end{cases} . \quad (43)$$

A continuación se muestra la curvatura máxima absoluta de los modelos tridimensionales anteriormente utilizados. La figura 43 muestra la curvatura máxima absoluta del modelo tridimensional "T-rex", es apreciable como las regiones de mayor curvatura como los ojos y los colmillos poseen los mayores valores en la escala de color.

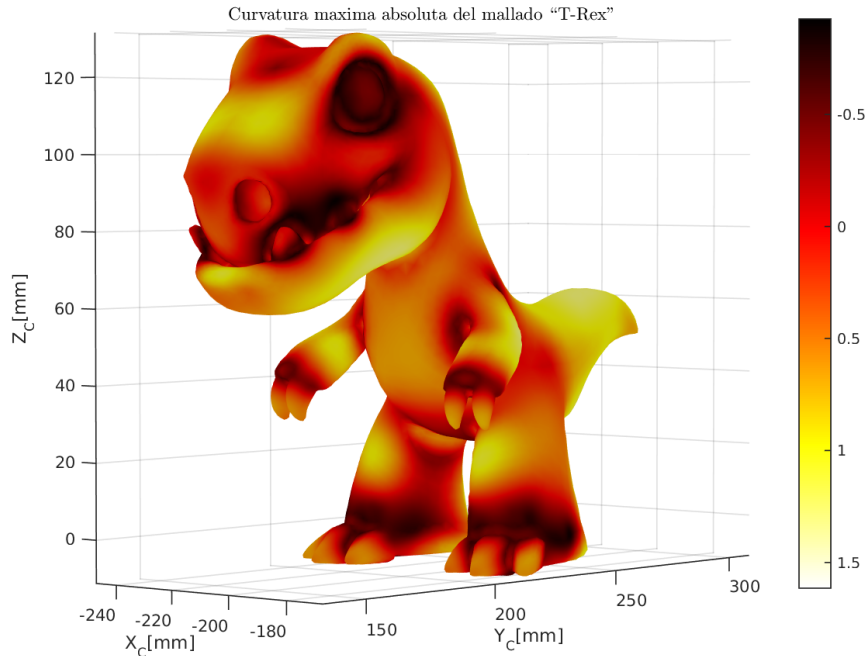


Figura 43: Curvatura máxima absoluta $|k_1|$ del objeto 3D "T-rex".

Para el objeto 3D "Ghost", la curvatura máxima absoluta es mostrada en la figura 44 y donde se observa que las regiones planas del modelo corresponden a regiones con curvatura cero en la escala de color.

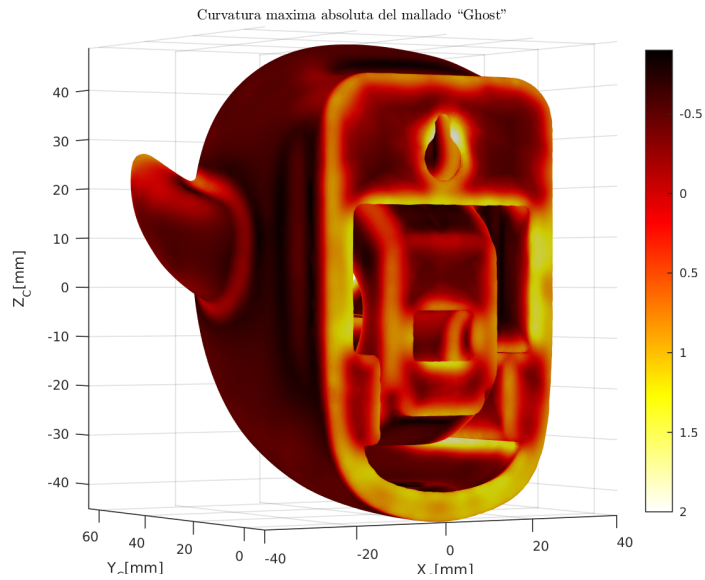


Figura 44: Objeto tridimensional "Ghost" y su respectiva curvatura máxima absoluta $|k_1|$.

Finalmente, para superficies mas complejas como es el caso del objeto tridimensional "Einstein", el algoritmo para el calculo de la curvatura máxima absoluta funciona correctamente y se muestra el resultado en la figura 45.

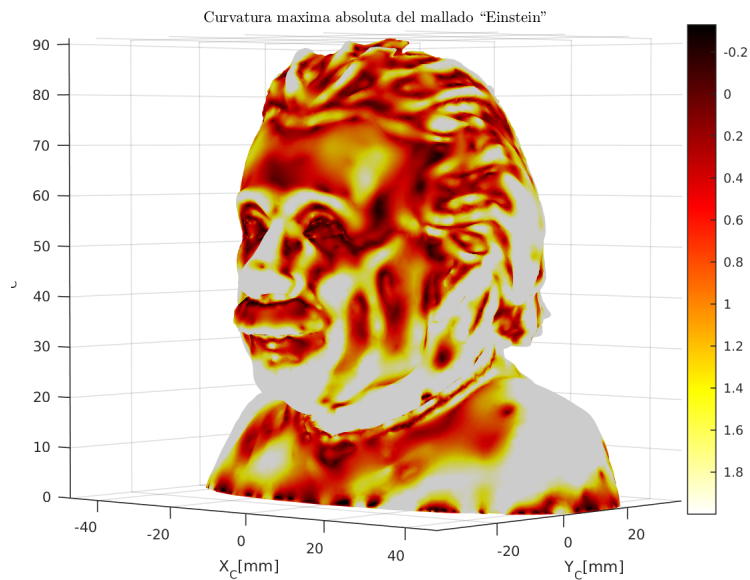


Figura 45: Curvatura máxima absoluta $|k_1|$ del modelo tridimensional "Einstein".

Campo de dimensionamiento

La diferencia trascendental entre el remallado isotrópico uniforme propuesto por Botsch et al. en [9] y el mallado interactivo adaptativo por curvatura implementado por Dunyach et al. en [19] radica en la inclusión del criterio de curvatura máxima k_1 en los parámetros de control L_{max} y L_{min} para las longitudes de borde deseadas. Estas longitudes de control son remplazadas por el campo de dimensionamiento adaptativo $L(v_i)$ definido en función de la curvatura máxima absoluta $|k_1|$ de la ecuación 43 y un parámetro de tolerancia ε relacionado directamente con el error introducido por la interpolación lineal de la superficie representada por la triangulación de Delaunay.

Son Alliez et al. los primeros en definir esta tolerancia ε en [1] y proponer que la densidad de facetas triangulares esta directamente relacionada con la precisión de la interpolación lineal del mallado, en comparación a la superficie que representa; esta diferencia es traducida como la tolerancia ε y es mostrada en la figura 46. La curva azul representa la superficie observada desde un corte transversal y el segmento de línea L y los puntos de sus extremos representan una arista de la faceta triangular perteneciente al mallado de Delaunay de la superficie. El radio r de la circunferencia que mejor se ajusta a la superficie puede escribirse en términos del inverso de la curvatura máxima absoluta $|k_1|$ como se muestra en la figura. Entre mayor sea el valor de la tolerancia de error ε , menor será la fidelidad del mallado triangular a la topografía de la reconstrucción tridimensional.

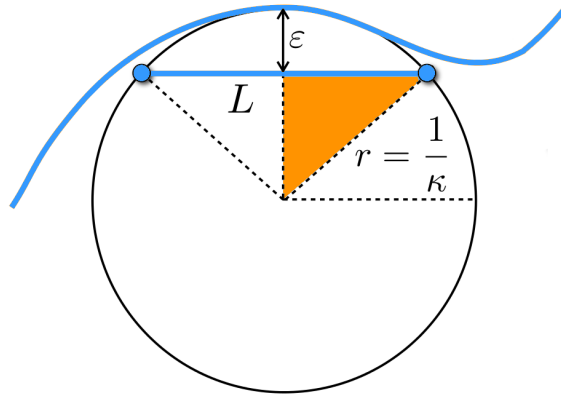


Figura 46: Representación esquemática de la tolerancia de error ε , junto con el mallado de Delaunay representado por la arista L y la superficie reconstruida mostrada como la curva de color azul. Fuente: [19].

En esencia, el cálculo de la longitud L de tal manera que garantice que el error ε sea menor, es obtener una relación de dicha longitud L en función de la tolerancia de error permitida y la curvatura máxima absoluta $|k_1|$ de la triangulación usando el teorema de Pitágoras como lo hizo Alliez et al. en [1] y que posteriormente Dunyach et al. en [19] ampliaron dicho fundamento escalandolo a triángulos equiláteros. Se tiene entonces que el campo de dimensionamiento $L(v_i)$ esta definido por

$$L(v_i) = \sqrt{\frac{6\varepsilon}{k_{1i}} - 3\varepsilon^2}. \quad (44)$$

Con el campo de dimensionamiento adaptativo $L(v_i)$ se consigue un campo escalar de control que define

las longitudes de borde para la posterior aplicación de los operadores locales de remallado introducidos en la sección 4.1.1.

Modificación del operador de relajación tangencial

Con la inclusión del criterio de curvatura en el proceso de remallado, la longitud de control de borde L del remallado isotrópico uniforme se convierte entonces en un campo de dimensionamiento escalar $L(v_i)$, que hace necesaria la modificación del calculo de los baricentros q_i para la aplicación del operador de relajación tangencial del remallado interactivo por curvatura. Dado que el campo de dimensionamiento $L(v_i)$ varia según la posición de cada uno de los vértices y sus vecinos mas cercanos, redefinir la ecuación 31 es primordial. Dunyach et al. en [19] implementan el esquema de suavizado conocido como Triangulación de Delaunay Optima(ODT⁸) propuesto por Chen et al. en [11]. Por consiguiente, fue necesario inicialmente computar los baricentros b_i del conjunto de vértices vecinos $\mathcal{V}(v_i)$. Dado que el baricentro b_i se define como el punto de intersección de las medianas del triangulo, se define entonces la coordenada baricentrica b_i como

$$b_i = \frac{1}{3} (p_{i1} + p_{i2} + p_{i3}) \quad (45)$$

donde evidentemente los vectores p_i definen la posición de cada uno los vértices del triangulo f_i . Una vez calculados los baricentros b_i de cada faceta triangular f_i pertenecientes a la vecindad $\mathcal{V}(v_i)$, se redefinió la ecuación 31 que computa los ponderados Laplacianos q_i con base al campo de dimensionamiento $L(v_i)$

$$q_i = \frac{\sum_{j \in \mathcal{V}(v_i)} |f_i| [L(b_j) \cdot b_j]}{\sum_{j \in \mathcal{V}(v_i)} |f_i| L(b_j)} \quad (46)$$

Consecuentemente, las figuras 47.(a) y 47.(b) muestran mallados interactivos por curvatura del modelo tridimensional “T-rex” donde se evidencia claramente que la disminución de la tolerancia ε permitida, con lleva a un aumento de la densidad de triángulos en regiones de alta curvatura y proporciona mayor definición en la visualización de detalles.

⁸Optimal Delaunay Triangulation

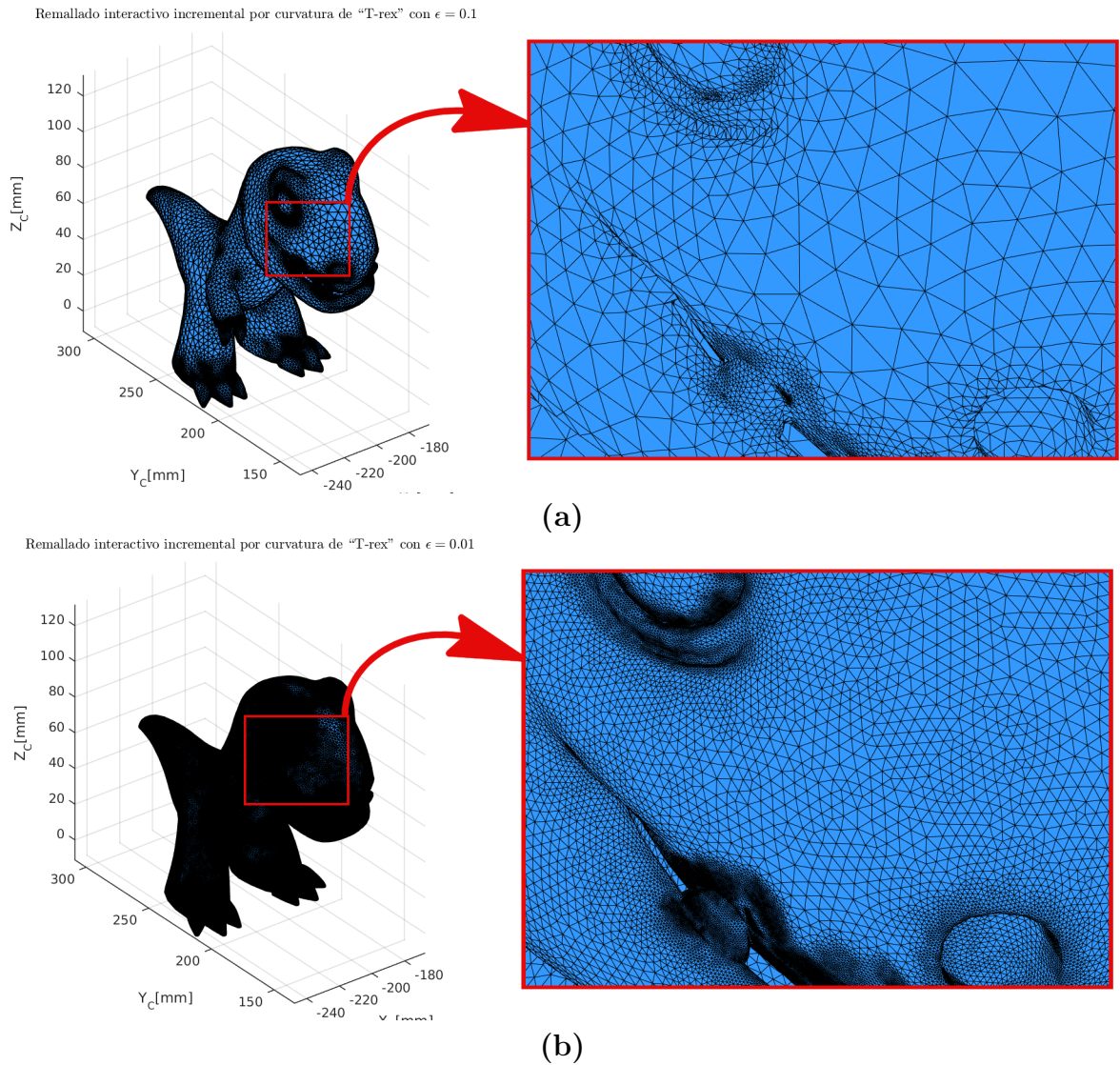
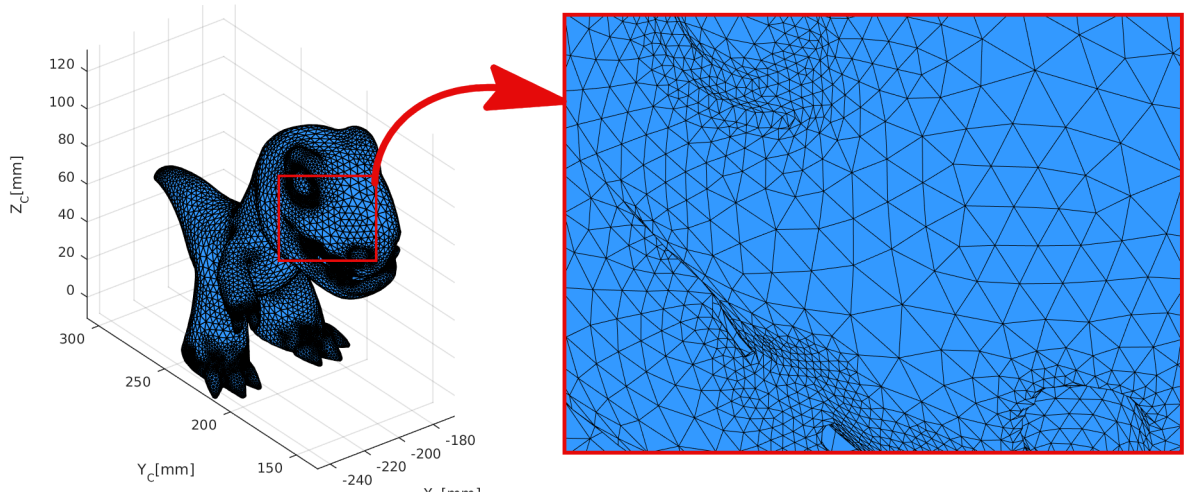


Figura 47: Mallado interactivo por curvatura del modelo tridimensional "T-rex" con una tolerancia: (a) $\epsilon = 0.1$, (b) $\epsilon = 0.01$.

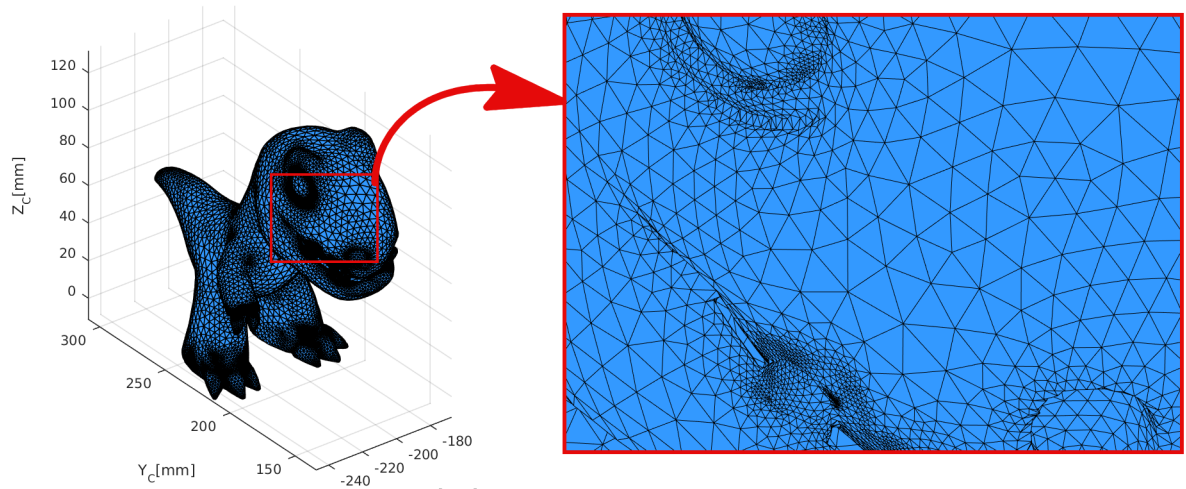
Igualmente, el usuario puede modificar las longitudes de control condicionando cual sea el mayor o menor valor del campo de dimensionamiento, como se muestra en la figura 48.(a) y 48.(b) donde la tolerancia establecida para ambos remallados fue $\epsilon = 0.1$, con la diferencia que se modifico el valor mínimo del campo de dimensionamiento $L(v_i)$ a $L_{min} = 1.0$ y $L_{min} = 0.1$, respectivamente. Se observa que dicho cambio en la longitud mínima permitida del campo de dimensionamiento provoca un evidente efecto de control en la densidad de vértices del remallado adaptativo.

Remallado interactivo incremental por curvatura de "T-rex" con $L_{min} = 1.0[mm]$



(a)

Remallado interactivo incremental por curvatura de "T-rex" con $L_{min} = 0.1[mm]$



(b)

Figura 48: Mallado interactivo por curvatura del modelo tridimensional "T-rex" con una tolerancia $\varepsilon = 0.1$ y el limite inferior del campo de dimensionamiento $L(v_i)$ permitido de: (a) $L_{min} = 1.0$, (b) $L_{min} = 0.1$.

A continuación se muestra los mallados interactivos por curvatura junto a la representación en el esquema de color de la curvatura máxima absoluta k_1 , para cada uno de los objetos tridimensionales anteriormente trabajados. En la figura 49 se observa el mallado adaptativo por curvatura del modelo 3D "T-rex" donde se observa en su respectiva ampliación una mayor densidad de facetas triangulares en las regiones con un valor extremo en el esquema de color de la curvatura máxima absoluta $|k_1|$.

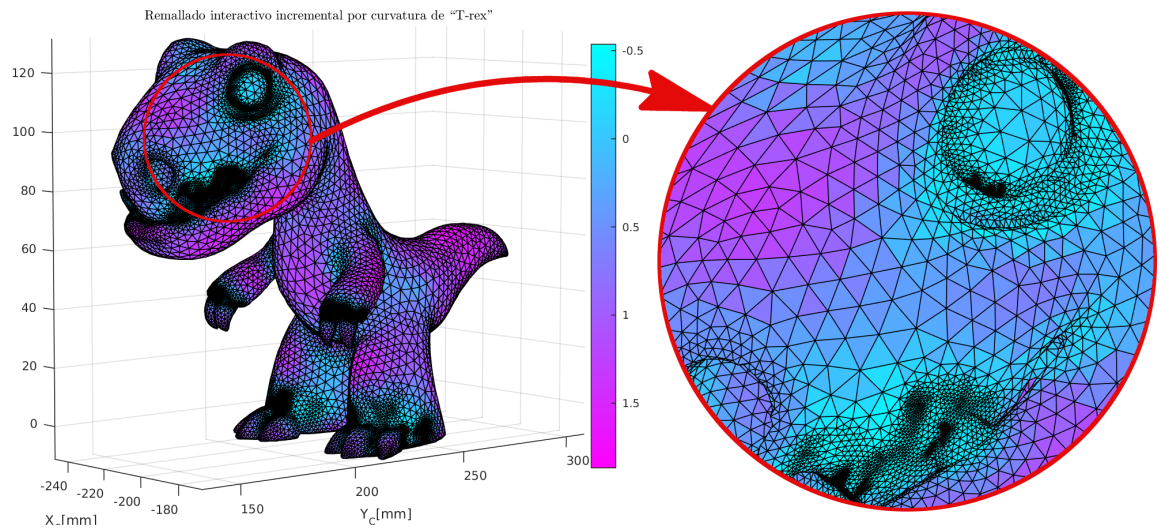


Figura 49: Curvatura máxima absoluta $|k_1|$ y mallado adaptativo por curvatura del objeto tridimensional “T-rex”.

Para el modelo 3D “Ghost” mostrado en la figura 50 en su vista posterior, se observa una región plana, la cual en la escala del esquema de color representa un valor de aproximadamente cero en la curvatura máxima absoluta y donde la densidad de vértices es considerablemente mas baja. Cabe aclarar, que los cálculos de curvatura se realizan sobre sistemas discretos y por consiguiente obtener valores exactos de curvatura cero en regiones planas es improbable. De acuerdo a esta imagen se evidencia el correcto funcionamiento del algoritmo de mallado interactivo por curvatura, pues en los bordes curvos del objeto tridimensional “Ghost” la densidad de vértices es mucho mayor y en las regiones planas es posible describir la superficie con muy pocas facetas triangulares, manteniendo incluso la condición de alta isotropía para la obtención de un mallado de alta calidad.

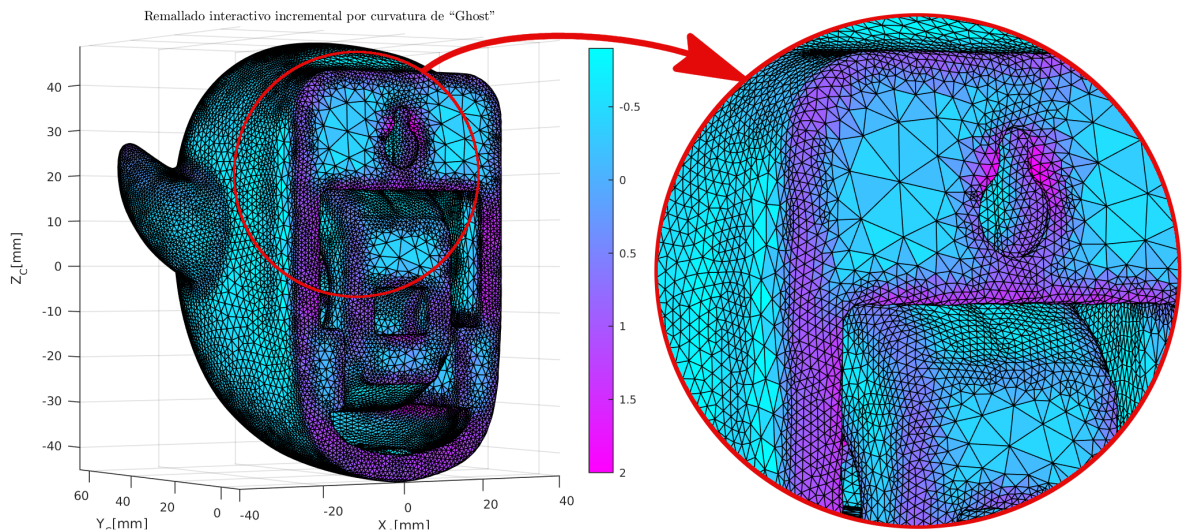


Figura 50: Curvatura máxima absoluta $|k_1|$ y mallado interactivo por curvatura de “Ghost”.

Finalmente, el algoritmo de mallado adaptativo por curvatura es aplicable a topografías mas complejas como la representada por el modelo tridimensional “Einstein”. La figura 51 nuevamente expone la curvatura máxima absoluta del objeto 3D, junto con su respectivo mallado adaptativo.

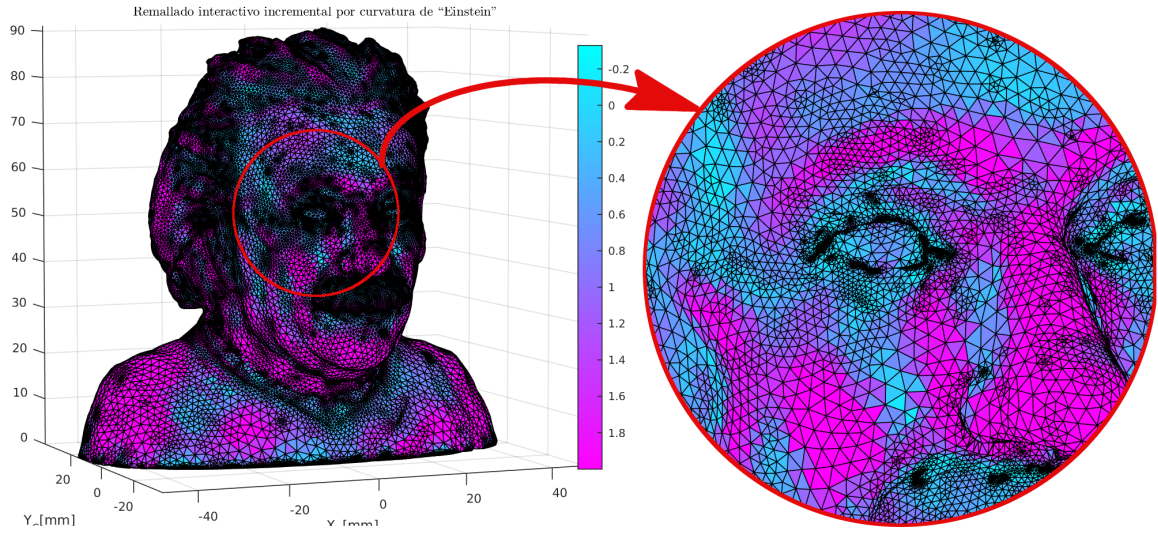


Figura 51: Curvatura máxima absoluta $|k_1|$ y mallado interactivo por curvatura de “Einstein”.

CAPÍTULO 5

Remallado interactivo geodésico

Una superficie puede analizarse como una variedad diferencial bidimensional como se mostró en el capítulo anterior, con todas las características que esto implica, tales como una métrica bien definida, las diferentes curvaturas intrínsecas y extrínsecas, y además la generalización del concepto de línea para este tipo de variedades, que se conoce como geodésica. Dada la estrecha relación entre la métrica de la variedad, las curvaturas y las geodésicas, condujo a la definición de un segundo criterio de remallado basado en la caracterización de geodésicas. Ya que las curvaturas se encuentran implícitas en la definición de curva geodésica sobre la variedad diferencial, se buscó una metodología para la optimización de un mallado preliminar en función de las distancias geodésicas y que permitiera conservar vértices y facetos en regiones de altas curvaturas, y una reducción de dichos elementos del mallado en regiones de baja curvatura. A continuación se presentan los conceptos teóricos referentes al criterio de geodésica y la implementación del remallado geodésico.

5.1 El concepto de geodésica sobre un mallado

En geometría diferencial se define el concepto de geodésica como la generalización de la noción de mínima distancia entre dos puntos de una variedad Riemanniana, en otras palabras, se define como el análogo al concepto de línea recta en la geometría Euclídeana pero para espacios “curvados”. En aplicaciones donde se visualizan campos tensoriales métricos, la métrica no es constante pues cambia de punto a punto en la variedad. En la geometría de Riemann la distancia entre dos puntos en el espacio se define por la longitud de la curva más corta entre ellos, donde la longitud de esta curva es la definición de geodésica. La métrica g_{ij} constante, definida en el espacio tangente $T_p\mathcal{S}$ a un punto p de una variedad \mathcal{S} , permite la medición de longitudes entre vectores tangentes. Es decir, si $x_i \in T_p\mathcal{S}$, $\|x_i\| = \sqrt{g_{ij}x^ix^j}$. Esto fundamenta la definición de la longitud de una curva $c : [a, b]$ en la variedad \mathcal{S} . La distancia geodésica entre dos puntos p y q se define por la mínima longitud sobre todas las curvas de unión p y q posibles, i.e., $c(a) = p$ y $c(b) = q$ [5]

$$d(a, b) = \min_{c: c(a)=p, c(b)=q} \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt, \quad (47)$$

donde de manera más general, al igual que en el caso de una métrica constante. Se puede definir geodésicas en una variedad de Riemann utilizando la métrica de espacio-variante $g_{ij}(x)$

$$d(a, b) = \min_{\gamma: \gamma(0)=a, \gamma(1)=b} \int_0^1 \sqrt{\dot{\gamma}(t)^i g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)^j} dt, \quad (48)$$

en la cual $\gamma(t)$ es la curva que describe la geodésica. La figura 52 muestra un ejemplo de las geodesias sobre una variedad diferencial esférica, donde cualquiera de las curvas que forman los triángulos son líneas geodésicas.

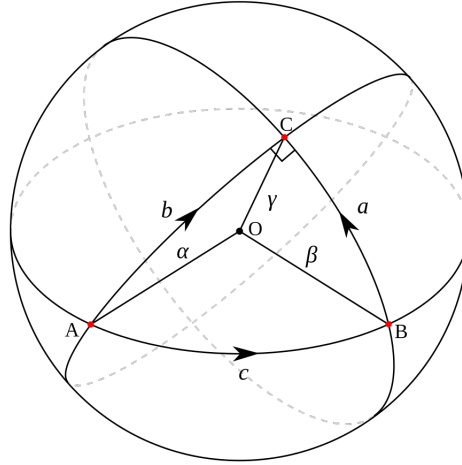


Figura 52: Curvas geodésicas sobre una variedad diferencial esférica. Fuente: [Pbroks13: https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Pbroks13](https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Pbroks13)

Existen diferentes métodos para el cálculo numérico de las distancias geodésicas en superficies tridimensionales, uno de ellos es el método de marcha rápida [50] o “Fast Marching” por su denotación en inglés. Para procesamiento de imágenes son comúnmente utilizados los algoritmos de restauración de imágenes descritos en [33, 40]. En esta investigación se implementó el método de extracción de geodésicas por flujo de calor desarrollado por Crane et al. en [14], que fue ampliado en la siguiente sección.

5.2 El flujo de calor y la extracción de geodésicas

Al entender las superficies como variedades diferenciales bidimensionales el concepto de geodésica define la curva entre los puntos a y b de menor longitud sobre dicha superficie. Ahora, como se expuso en el capítulo 3, un mallado triangular $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ se define por un conjunto indexado de vértices

$\mathcal{V} = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_V\}$, un conjunto de bordes $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_E\}$, $\forall e_i \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ y un conjunto de facetas triangulares $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_F\}$, $\forall f_i \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Como lo explica Botsch et al. en su libro [10], sobre un mallado triangular pueden definirse operadores diferenciales discretos, tales como el operador gradiente, o el operador de Laplace-Beltrami¹, este ultimo tiene gran importancia en el procesamiento de mallados poligonales. Paralelamente, la formula de Varadhan [54] para la difusión del calor establece la relación entre el calor y la distancia, donde dicha difusión puede modelarse como una colección de partículas calientes, que partiendo de un punto fuente, después de un intervalo pequeño de tiempo se moverán por el camino mas corto posible, i.e., el principio de mínima acción. Este camino más corto es interpretado como la distancia geodésica. Crane et al. en [14] proponen una doble discretización, utilizando la solución de la ecuación del núcleo de calor para discretizar el tiempo y el operador de Laplace-Beltrami para la discretización espacial. Combinando estas dos soluciones, se obtiene la solución de la ecuación Eikonal, que computa la distancias geodésicas. Los algoritmos de “fast marching” solucionan la ecuación Eikonal para el computo de las distancias geodésicas.

Botsch et al. en su libro [10] definen en el capitulo de operadores diferenciales discretos el operador de Laplace-Beltrami sobre un mallado triangular como

$$(\Delta u_i) = \frac{1}{2A_f} \sum_j (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (u_j - u_i), \quad (49)$$

donde A_f es el área de todos los triángulos incidentes al vértice de coordenadas u_i , j representa el indice los vértices vecinos al vértice u_i , α_{ij} y β_{ij} son los ángulos opuestos al borde correspondiente. Ahora, para la discretización temporal Crane et al. proponen la solución de la ecuación de calor por un solo paso implícito de Euler² en el tiempo

$$(Id - t\Delta)u = \delta_i, \quad (50)$$

donde Δ es el operador de Laplace-Beltrami y δ_i es el vector de Dirac en el vértice de indice i . Posteriormente se soluciona el sistema lineal de ecuaciones, obteniendo la solución de $u = (Id + t\Delta)\delta_i$. Se soluciona la ecuación de Poisson

$$\Delta \gamma = \nabla \cdot \left(\frac{-\nabla u}{|\nabla u|} \right), \quad (51)$$

donde γ son las distancias geodésicas. El algoritmo diseñado por Crane et al. en [14] es ampliado en el algoritmo 7. En esencia el proceso integra el flujo de calor por un tiempo t . Posteriormente, evalúa el vector de campo $\frac{-\nabla u}{|\nabla u|}$ y finalmente resuelve la ecuación 51, que es la ecuación de Poisson. La figura 53 explica gráficamente el procedimiento.

¹Weisstein, Eric W. "Laplace-Beltrami Operator." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Laplace-BeltramiOperator.html>

²Weisstein, Eric W. "Euler Forward Method." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/EulerForwardMethod.html>

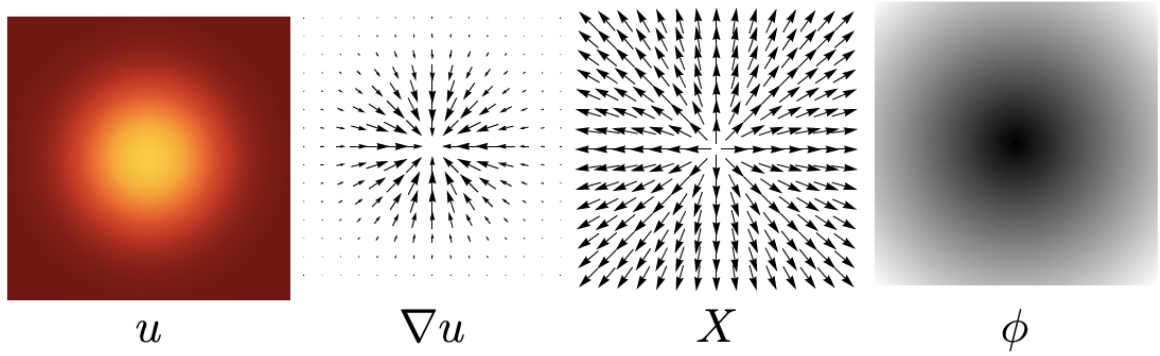


Figura 53: Esquema del método de calor. De izquierda a derecha: (I) Se permite una difusión de calor en un periodo de tiempo t . (II) y (III) Se obtiene el gradiente de temperatura y se normaliza negativamente para un obtener un campo vectorial $X = \frac{-\nabla u}{|\nabla u|}$. (IV) El campo escalar $\phi = \gamma(v_i)$ sigue al gradiente del campo vectorial X , recuperando la distancia final. Fuente: [14]

Algorithm 7: Algoritmo del método del calor para la extracción de distancias geodésicas sobre una superficie discreta.

1. Iniciamos con la discretización espacial. Se define el gradiente ∇ por el método del del gradiente conjugado (MGC^a), donde $\nabla_{\mathbf{S}}$, con $S = 1, 2, 3$ [25].
2. Las matrices dispersas S para el método del gradiente conjugado, poseen dimensión (m, n) , donde m es la dimensión del conjunto de facetas \mathcal{F} y n la dimensión del arreglo de vértices \mathcal{V} .
3. Se calculan los vectores normales a cada faceta f usando la ecuación $N = \bar{e}_0 \times \bar{e}_1$, donde $\bar{e}_0 = v_0 - v_1$ y $\bar{e}_1 = v_2 - v_1$ siendo \bar{e}_i bordes y v_i vértices [10].
4. Computar el área de cada faceta como $A_f = \frac{1}{2}|\bar{e}_0 \times \bar{e}_1|$.
5. Normalizar el arreglo de normales N y almacenelo en el arreglo N_f .
6. El gradiente como operador diferencial discreto se define por $(\nabla u) = \frac{1}{2A_f} \sum_i u_i (N \times \bar{e}_i)$.
7. Se definen los índices $k = \text{mod}(i, 3) + i$ y $l = \text{mod}(i + 1, 3) + 1$, siendo estos los índices de los bordes opuestos \bar{e}_i orientados en dirección levógiara.
8. Efectúe el producto vectorial $(N_f \times \bar{e}_i)$, con $\bar{e}_i = v_l - v_k$.
9. Obtener la matriz dispersa con entradas $\frac{1}{2A_f}$.
10. La divergencia se define como la transpuesta del operador gradiente [10].
11. El Laplaciano se define como la composición del gradiente y la divergencia.
12. Se define la función cotangente de un ángulo entre dos vectores. El ángulo para mallado triangular se define por $\alpha = \text{acos} \left[\frac{v_0 \cdot v_1}{|v_0||v_1|} \right]$ [10].
13. Nuevamente se definen los vértices de los bordes opuestos como $k = \text{mod}(i, 3) + i$ y $l = \text{mod}(i + 1, 3) + 1$.
14. Se define el ángulo del borde adyacente como $\theta = \text{cot} \left[\text{acos} \left(\frac{(v_k - v_i) \cdot (v_l - v_i)}{|(v_k - v_i)||v_l - v_i|} \right) \right]$ [14].
15. Con todo esto definido es posible por MGC se obtienen las matrices dispersas para definir la matriz diagonal de área A_d , la matriz de ponderados cotangente ω_i y el Laplaciano Δ_{ω_i} .
16. Continuamos con la discretización temporal, fijando un punto fuente i y un tiempo t .
17. Se resuelve el sistema lineal $(A_d - t\Delta)u = \delta_i \rightarrow u = (A_d + t\Delta) \setminus \delta_i$.
18. Se soluciona el sistema lineal de la ecuación de calor con el Laplaciano $\nabla_{\omega_i} \rightarrow u = (A_d + t\Delta) \setminus \delta_i$ [14].
19. Computar el gradiente de u .
20. Normalice $\nabla u \rightarrow \hat{\nabla} u = \frac{-\nabla u}{|\nabla u|}$.
21. Se extrae el campo escalar de geodésicas $\gamma(v_i)$ solucionando la ecuación de Poisson $\Delta \gamma = \nabla \cdot (\hat{\nabla} u) \rightarrow \gamma = \Delta \setminus \nabla \cdot (\hat{\nabla} u)$.
22. Se utiliza una función periódica para la visualización de los conjuntos de nivel del campo escalar de geodésicas $\gamma(v_i)$, como $f(\gamma) = \cos(2\pi p \gamma)$, donde p es un paso definido por el usuario.

^aMétodo del gradiente conjugado

Una vez implementado el algoritmo propuesto por Crane et al en [14] se procedió a ser aplicado sobre

los modelos tridimensionales. Inicialmente se tomó el modelo tridimensional “Einstein”, se calculó el operador Laplaciano y se graficó en dirección de la coordenada Y_C de los vértices. El resultado se observa en la figura 54.

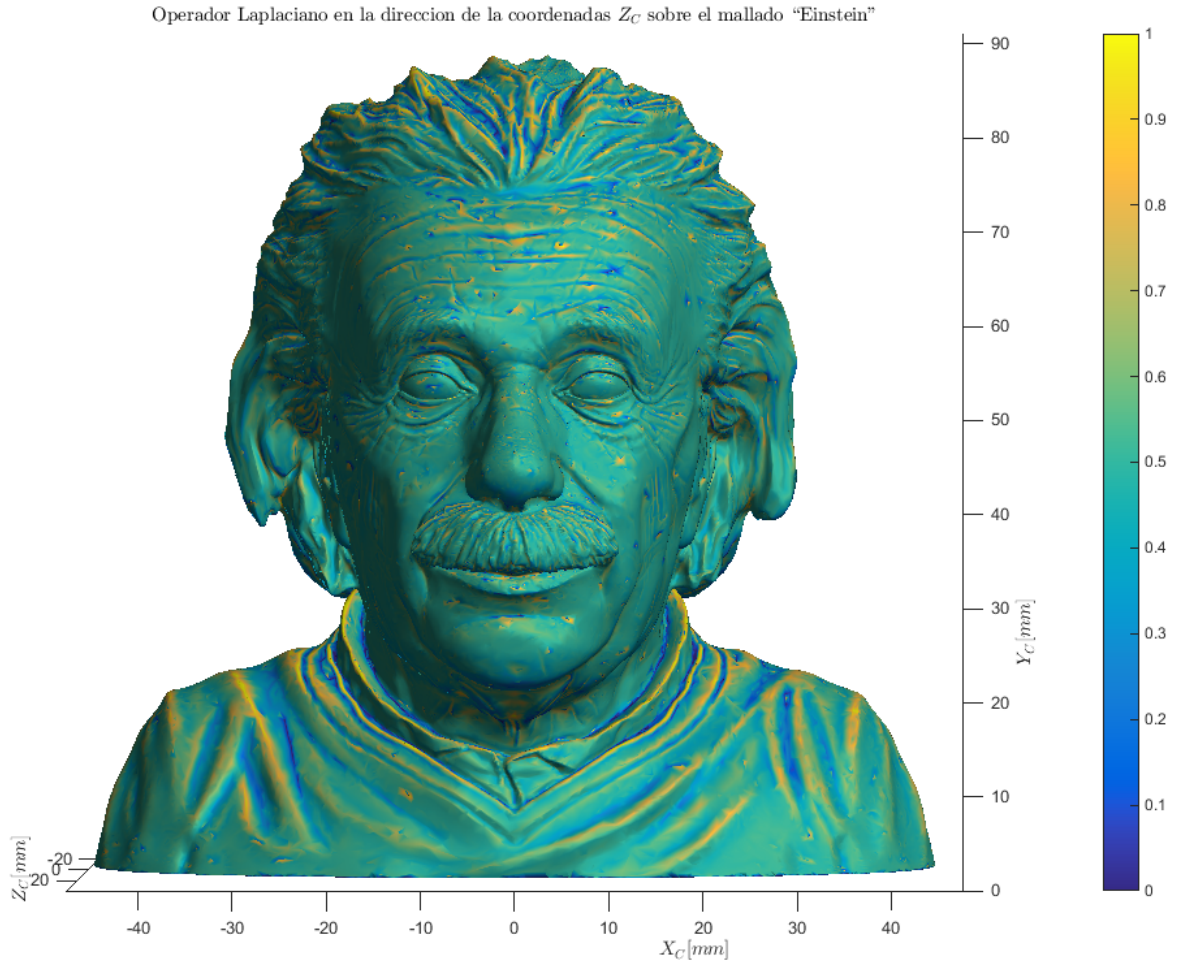


Figura 54: Laplaciano en la dirección de Y_C para el mallado “Einstein”.

Posteriormente se obtuvo la difusión de calor para un punto fuente ubicado en el índice 4870 del arreglo de vértices (X_C, Y_C, Z_C) , es decir en el punto de coordenadas $(-1.8820, 56.4690, 28.4210)$ en milímetros; para un tiempo propio $\tau = 1.0 \times 10^6$. La escogencia de estos parámetros posee relevancia en variedades diferenciales no suavizadas, donde se cruzan los conjuntos de nivel de las distancias geodésicas. El gráfico obtenido para la difusión de calor junto con el punto fuente se muestran en la figura 55.

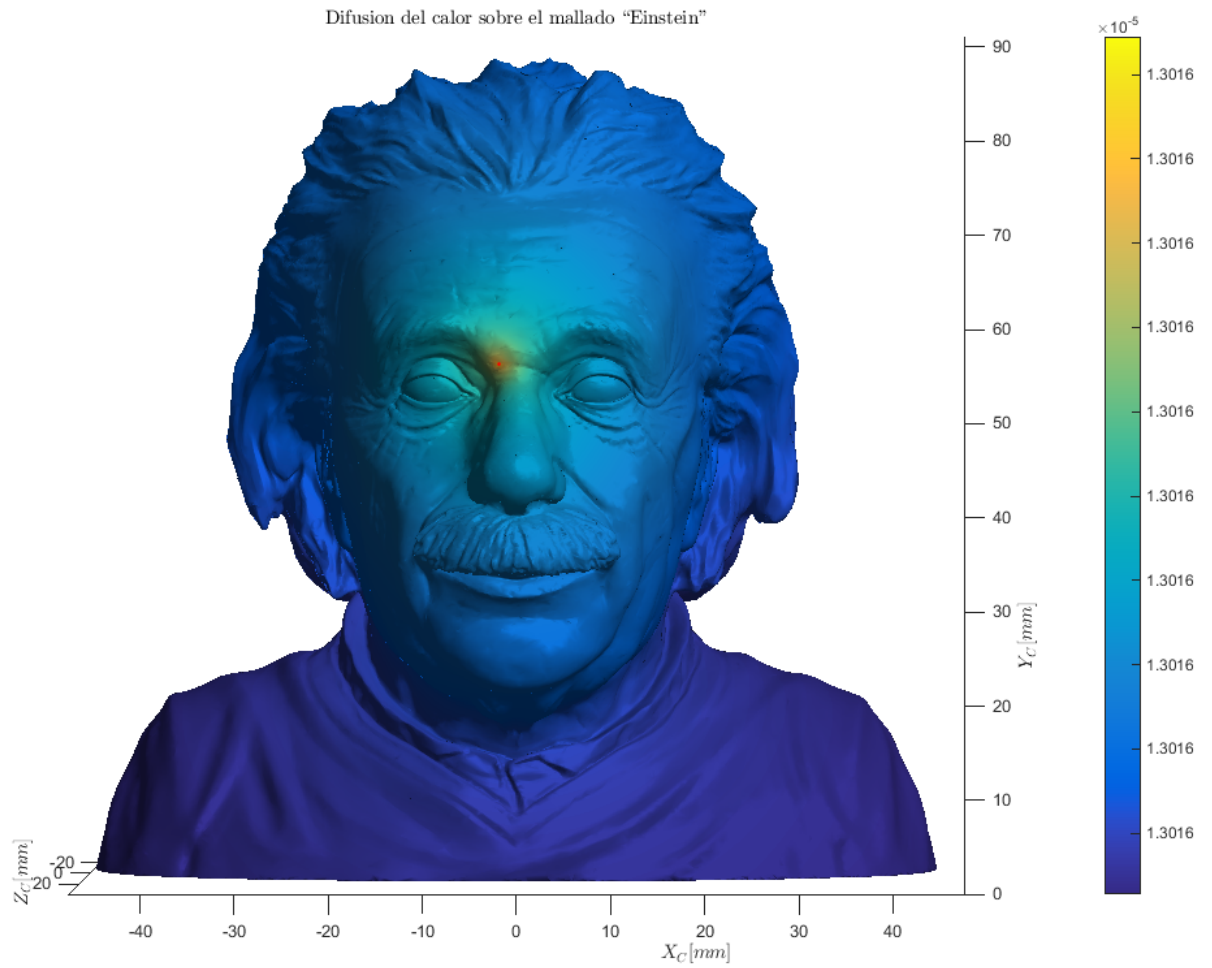


Figura 55: Difusión de calor sobre el mallado "Einstein" desde el punto fuente (color rojo).

Resolviendo la ecuación 51 se obtiene el campo escalar geodésico $\gamma(v_i)$ y graficando sobre el mallado en la figura 56. Este campo es quien posee toda la información de las curvas de mínima distancia entre dos puntos sobre el mallado.

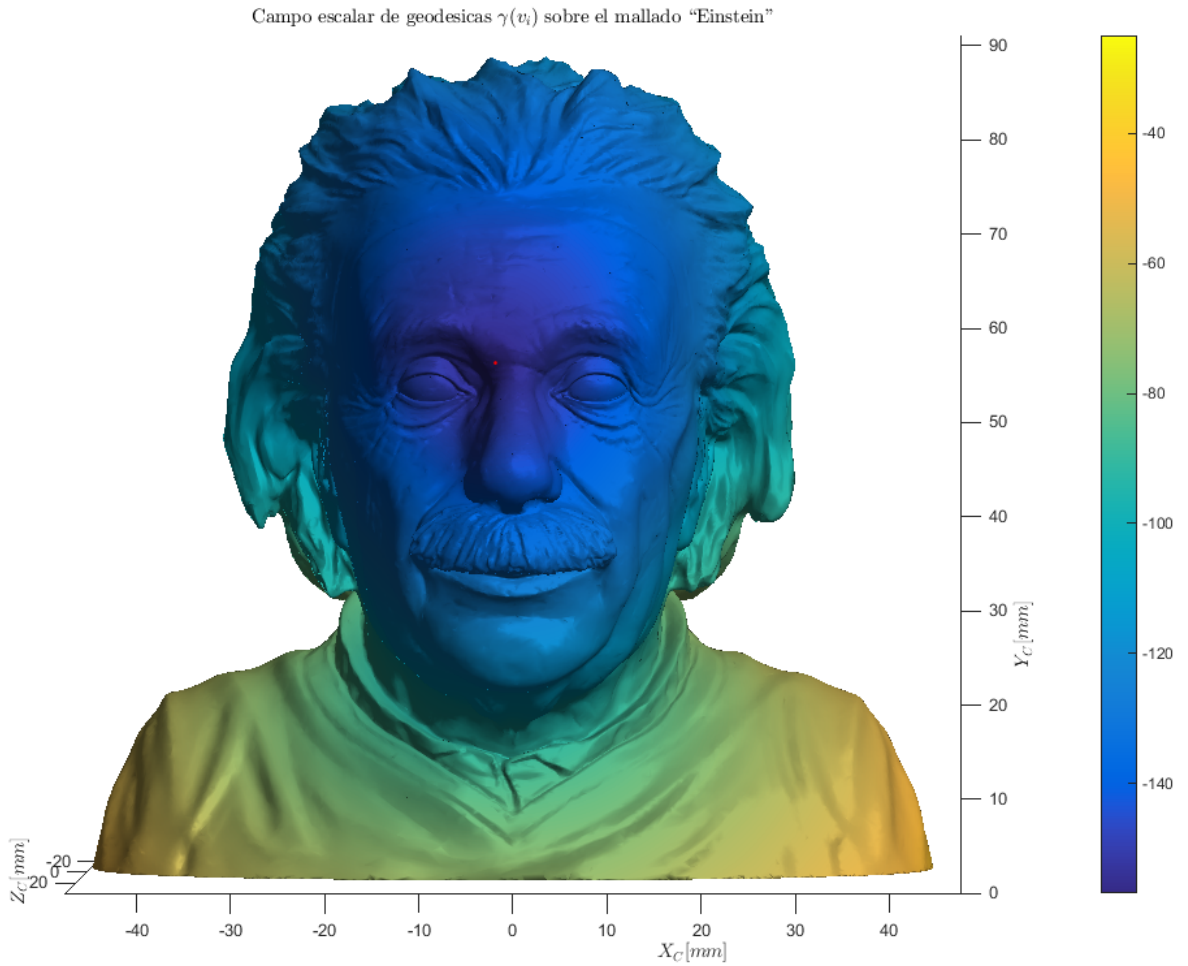


Figura 56: Campo escalar de geodésica $\gamma(v_i)$ para el objeto 3D "Einstein".

Es necesario para visualizar las líneas de isogeodésica, es decir puntos sobre el mallado que posean el mismo valor de geodésicas, una función de visualización como la definida en el algoritmo 7. En este caso la figura 57 posee dicha función de visualización con un paso definido $p = 0.3$. Es aquí donde aprecian los conjuntos de nivel de geodésicas o también conocidas como líneas de isogeodésica.

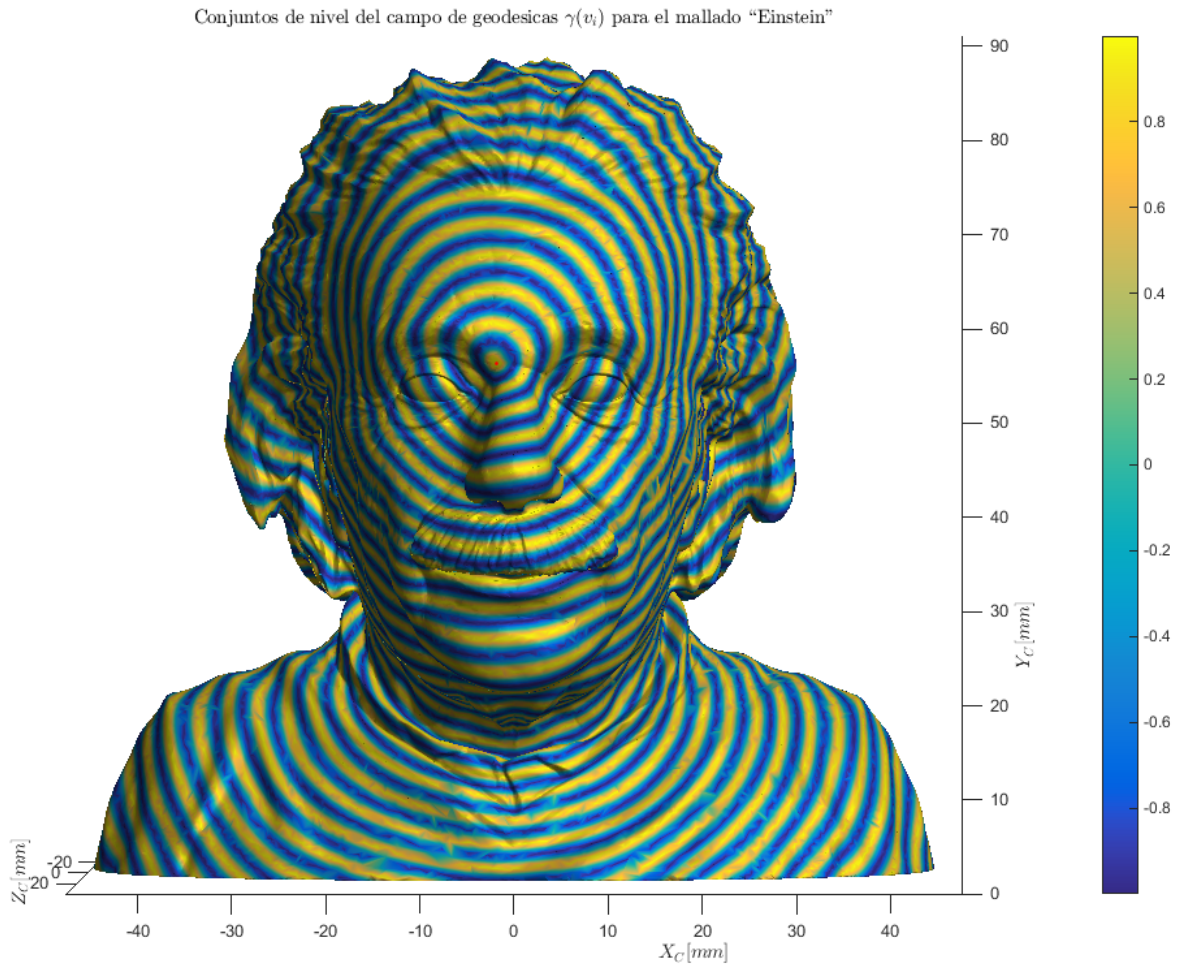


Figura 57: Conjuntos de nivel de geodésicas sobre el objeto 3D “Einstein”.

La caracterización de las distancias más cortas desde el punto a cualquier punto sobre el mallado, esta contenida en el campo escalar geodésico $\gamma(v_i)$. A partir de esta definición puede introducir el proceso de remallado geodésico, con la información de geodésica como criterio de optimización.

5.3 Remallado bajo el criterio de geodésica

Como se observa en la figura 55 se requiere una fuente puntual para obtener un campo escalar geodésico en función de los parámetros del algoritmo 7. Este punto corresponde a un vértice de la faceta mas alejada del modelo tridimensional que se desea procesa. Un algoritmo sencillo de cálculo de distancias permite calcular el par de puntos mas alejados de la nube de puntos que define el modelo. Un punto fuente es usado para calcular el campo escalar geodésico para cada punto del nube. Para el proceso de remallado, se aprovecha a partir del punto fuente utilizado el campo geodésico sobre el mallado, pues dicho valor clasifica y ordena los puntos sobre la superficie. Se define entonces un parámetro conocido como delta de geodésica o simplemente $\Delta\gamma$, dicho parámetro cumple la función de cortar el campo

geodésico cada $\Delta\gamma$ valores de geodésica. Posteriormente en cada ubicación del paso $\Delta\gamma$ se avanza sobre la línea de isogeodésicas $\Delta\gamma$ a intervalos. Posteriormente, interpolando se obtienen las intersecciones de la línea de isogeodésica con las facetas, definiendo así nuevos puntos del remallado. La figura 58 se puede apreciar las líneas isogeodésica para un $\Delta\gamma = 0.1[mm]$. Este proceso asume interpolar nuevos puntos que poseen valores enteros de $\Delta\gamma$ geodesicas.

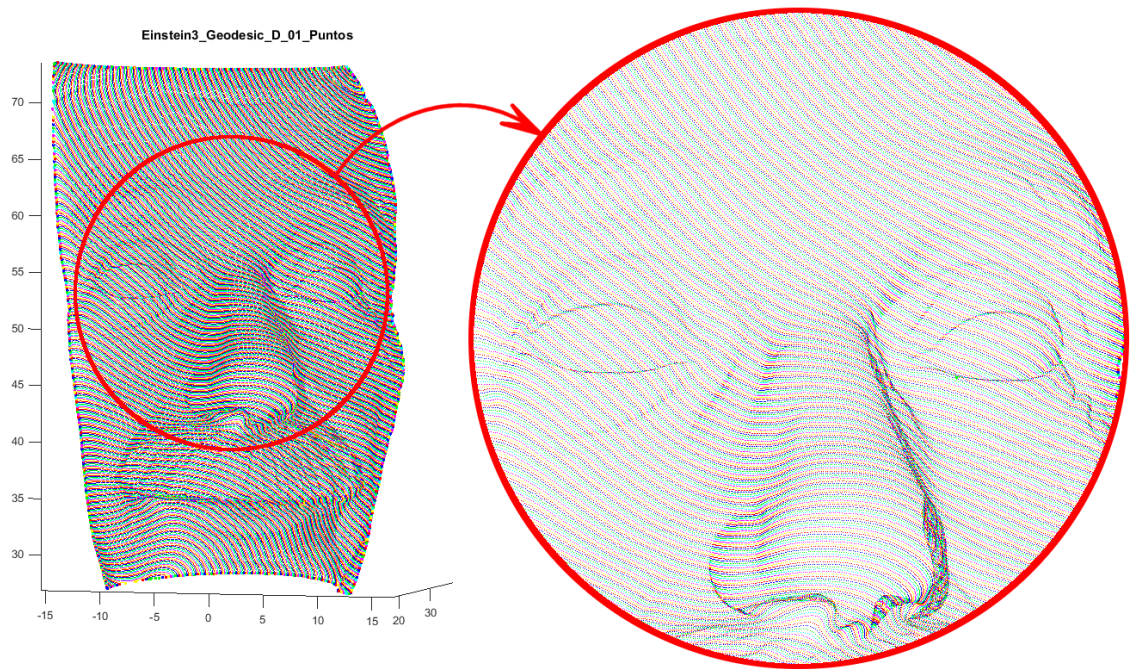


Figura 58: Visualización de las líneas de isogeodésica para un $\Delta\gamma = 0.1[mm]$ de la vista frontal del modelo 3D “Einstein”.

En la ampliación se observan los puntos generados en el proceso de remallado. Dado que las curvaturas están implícitas en el campo escalar geodésico, los conjuntos de nivel de isogeodésica tienden a estrecharse en regiones de alta curvatura y a expandirse en regiones de baja curvatura. La figura 59 muestra el remallado obtenido a partir del proceso de remallado geodésico para un $\Delta\gamma = 0.1[mm]$.

Mallado triangular con facetado del modelo "EinsteinD01"

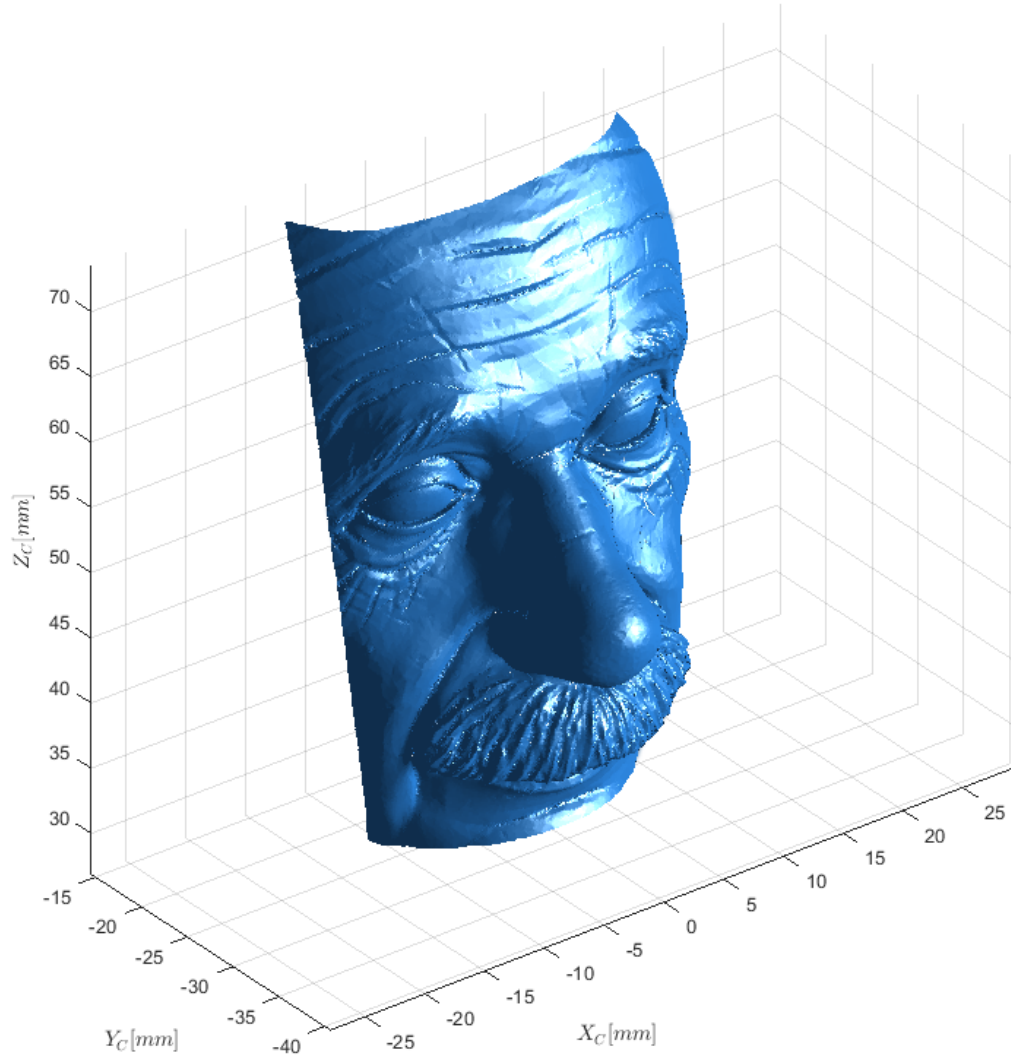


Figura 59: Remallado geodésico de la vista frontal del modelo "Einstein".

La figura 60 muestra una ampliación realizada al remallado geodésico $\Delta\gamma = 0.1[mm]$. Se aprecia gracias al facetado que los elementos triangulares producidos por este método de remallado poseen una alta isotropía. Sin embargo el remallado puede considerarse mas de tipo uniforme, pues no se obtuvo el mismo resultado que con el remallado incremental interactivo por curvatura.

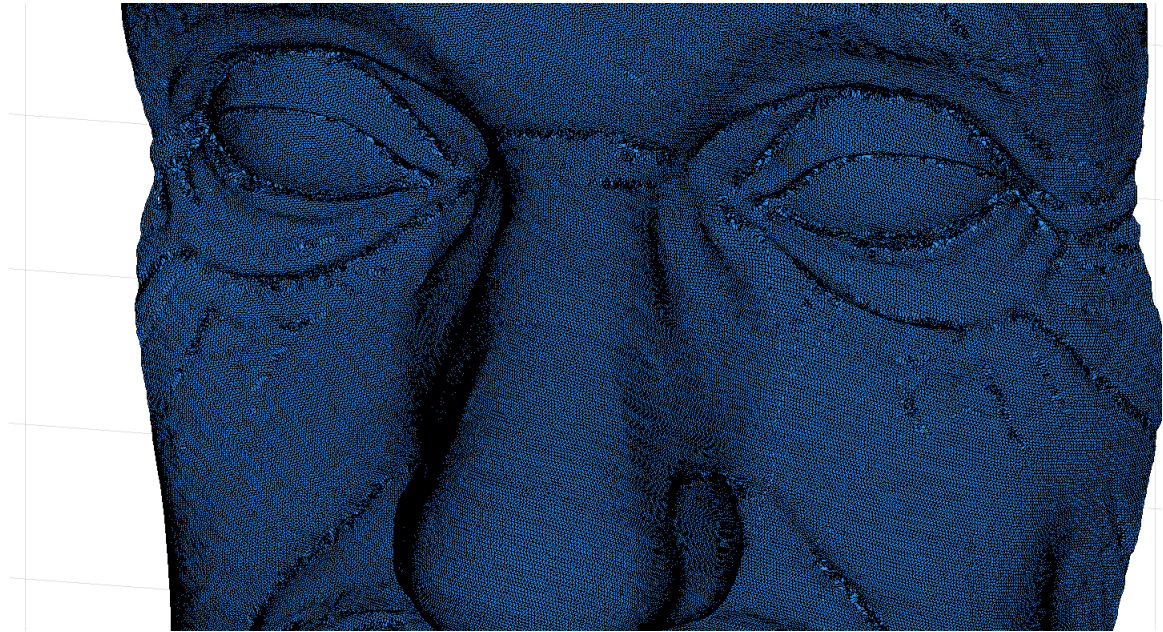


Figura 60: Ampliación de remallado geodesico de “Einstein” con $\Delta\gamma = 0.1[mm]$.

Para un $\Delta\gamma = 0.4[mm]$ se muestra las líneas de isogeodésicas en la figura 61.

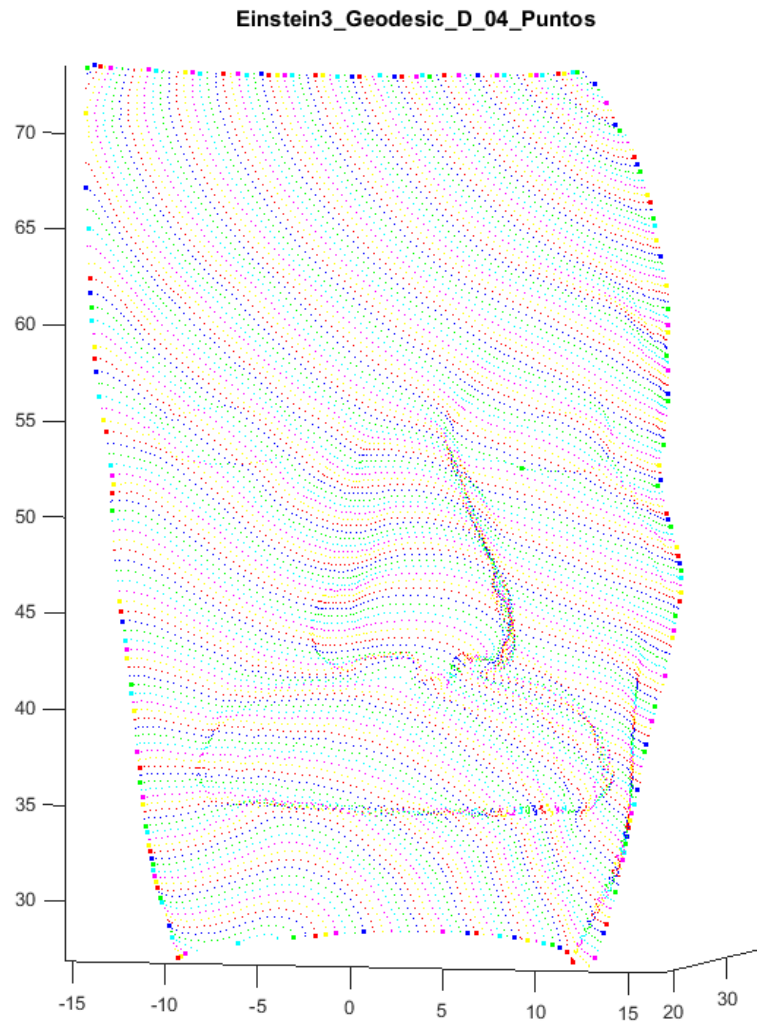


Figura 61: Visualización de las líneas de isogeodésica para un $\Delta\gamma = 0.4[mm]$.

El mallado triangular de la figura 61 se aprecia en la figura 62. Nuevamente en la ampliación se distingue un mallado altamente isotropico y uniforme, pero con bajos efectos adaptativos.

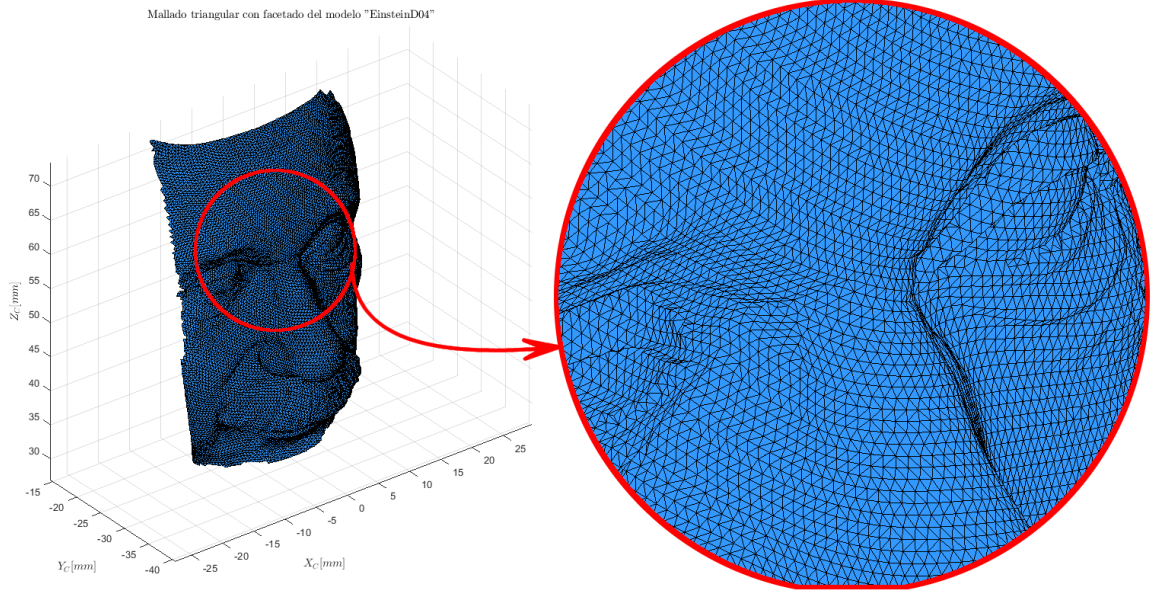


Figura 62: Remallado geodésico de la vista frontal del modelo “Einstein” con $\Delta\gamma = 0.4[mm]$.

Para lograr un remallado de tipo adaptativo bajo el criterio de geodésica, que sigue siendo una herramienta muy poderosa que clasifica los puntos sobre el mallado, se debe idear una estrategia que cree un homólogo al campo de dimensionamiento discutido en la sección 4.2.2, es decir, un campo de dimensionamiento geodésico $\Delta\gamma(v_i)$ que cambie sus valores dependiendo las regiones de baja o alta curvatura. Se prepone dicha investigación como una perspectiva a futuro.

CAPÍTULO 6

Estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas

Llegar a la representación tridimensional de un objeto real es un procedimiento complejo y riguroso dependiendo de la precisión y resolución exigida. Por ende, la aplicación de una gran variedad de herramientas de caracterización se hace necesaria a la hora de obtener una digitalización. Como ya se ha mencionado con anterioridad, una de las bondades de la R3DPF es su alta precisión, esto lleva a que la implementación de la técnica sea un proceso secuencial y amplio hasta obtener la reconstrucción tridimensional final. Una vez revisados los conceptos teóricos e implementados los algoritmos necesarios que convierten una nube de puntos en una superficie aproximada, a partir de un mallado adaptado a su estructura, se plantea la necesidad de ubicar estos conceptos dentro de un procedimiento secuencial de R3DPF unificado. El objetivo final consiste en revisar en detalle el estado actual de las capacidades que posee el GOTS en materia de extracción de información 3D de objetos o escenas, con miras a ofrecer servicios especializados en metrología tridimensional a empresas en la industria y sector médico. Este capítulo muestra la unificación del procedimiento experimental para la obtención de una reconstrucción 3D optimizada mediante el uso de la R3DPF.

6.1 Flujo de trabajo

La metodología de trabajo para la aplicación de la R3DPF en el grupo de investigación GOTS se dividió en tres grandes etapas como puede apreciarse en el diagrama de flujo de dicha metodología mostrado en la figura 63. La primera de estas fue denominada “Digitalización” y centra su objetivo en la obtención de una nube de puntos en el espacio tridimensional, donde cada punto representa una coordenada espacial de la superficie del objeto, todo esto utilizando la técnica de proyección de franjas anteriormente implementada en el GOTS y mostrada en el capítulo 2. La segunda etapa de la reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas consiste inicialmente en optimizar la nube de puntos obtenida en la etapa de “Digitalización” y posteriormente dotarla de una noción más clara de superficie a través del mallado triangular explicado en el capítulo 3. Consecuentemente, al tener dicha superficie el procedimiento extrae la información concerniente a las características de la

topografía, mediante el computo de curvaturas y el calculo de geodésicas como se hizo en los capítulos 4 y 5, que más adelante serán el criterio clave para la tercera etapa de la estrategia de reconstrucción unificada. La optimización de la superficie es una etapa fundamental que amplía el espectro de aplicaciones a las reconstrucciones tridimensionales mejorando considerablemente los tiempos de ejecución y visualización, las estrategias metrológicas y la presentación final del objeto reconstruido digitalmente; dicha optimización es efectuada en la ultima etapa de la estrategia de reconstrucción unificada por proyección de franjas y fue denominada “Optimización de la superficie”. En las siguientes secciones de este capítulo se ampliaron los detalles de cada uno de los procedimientos de la metodología aplicada en esta investigación.

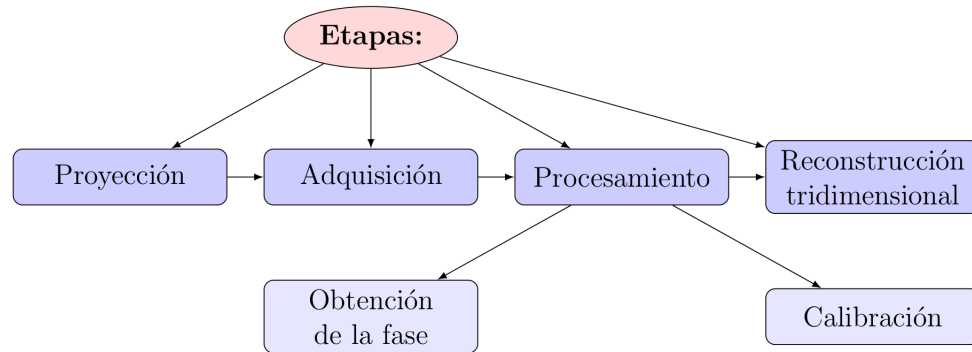


Figura 63: Diagrama de flujo de la metodología utilizada en la estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas.

6.2 Montaje experimental

Para la ejecución de la R3DPF es necesario un esquema experimental como el mostrado en la figura 2, por consiguiente se utilizó una unidad de proyección-adquisición del GOTS mostrada en la figura 64, conformada por un vídeo proyector DELL referencia M210X, con brillo de 2000[lúmenes] ANSI y resolución X VGA de 1024[píxeles] de ancho por 768[píxeles] de alto y una cámara CCD de la marca UEYE referencia UI2310M, con conexión USB 2.0, monocromática y resolución VGA de 640[píxeles] de ancho por 480[píxeles], con lente EDMUND OPTICS de 8.5[mm]/F1.3.



Figura 64: Unidad de proyección-adquisición diseñada por el grupo GOTS.

La unidad de procesamiento empleada fue un computador DELL LATITUDE E6530, con procesador Intel Core i7-3630QM CPU a 2.40[GHz], 16[GB] de memoria RAM y tarjeta gráfica NVIDIA NVS 5200M de 1[GB] de memoria VRAM. El montaje experimental global es mostrado en la figura 65.

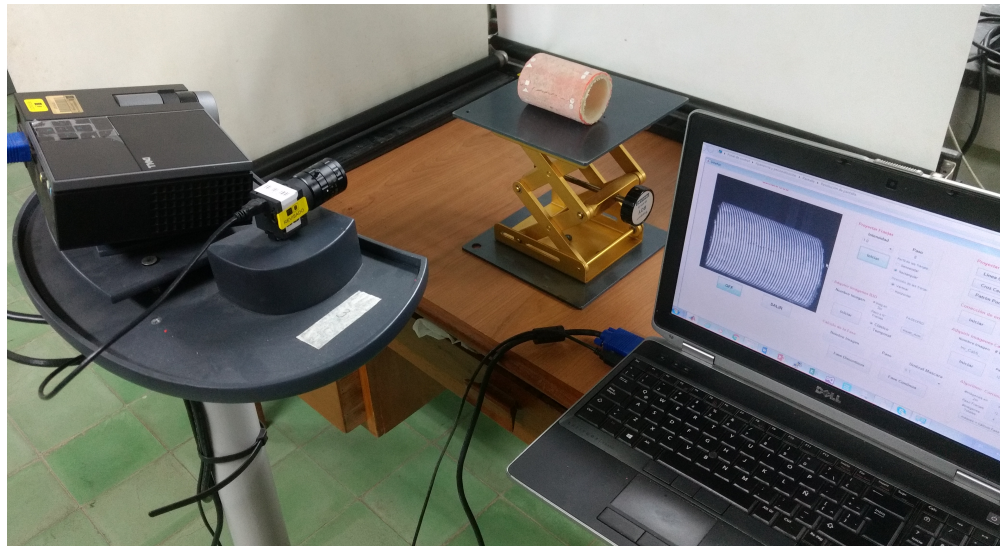


Figura 65: Montaje experimental para la implementación de la R3DPF.

El procedimiento básico de proyección en la R3DPF se fundamenta en utilizar la tarjeta grafica del computador que permite un monitor principal (pantalla del computador) y un monitor secundario con salida de vídeo para el vídeo-proyector; dicho monitor secundario es configurado a una resolución de 800[píxeles] de ancho por 600[píxeles] de alto, ya que las imágenes de franjas generadas en MATLAB fueron configuradas a ese tamaño. El monitor secundario se coloca en modo “pantalla completa”, de este modo las imágenes de las franjas que son proyectadas sobre el objeto a reconstruir ocupan la totalidad de la proyección. La figura 66 muestra con mayor claridad la configuración básica de los monitores. La configuración del monitor secundario se ajusta para tener una relación 1:1, ex decir, píxel a píxel con el LCD del vídeo-proyector.

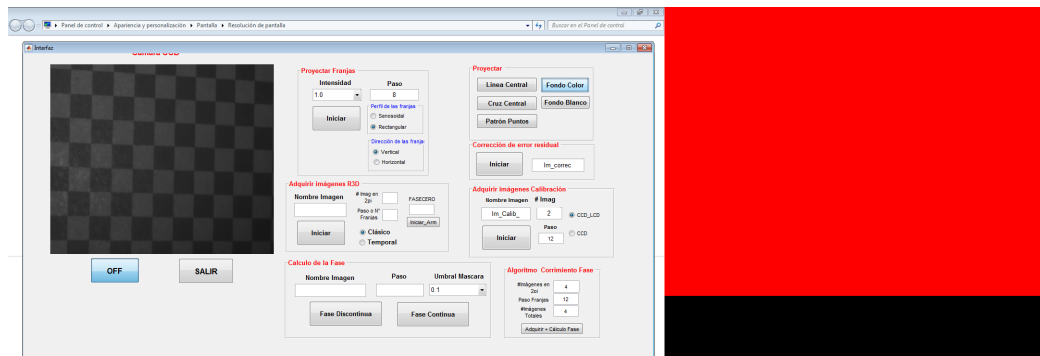


Figura 66: Configuración de monitores para la técnica de proyección de franjas. La pantalla roja es designada para el monitor secundario y por ende al vídeo-proyector, mientras que el monitor principal se utiliza como unidad de procesamiento.

Aprovechando que MATLAB®interfaza vía USB la cámara CCD se diseñó una interfaz gráfica de usuario GUI¹, llamada “Interfaz de adquisición” (mostrada en la figura 67). Esta permite proyectar y adquirir los diferentes patrones de franjas, así como otras herramientas básicas tales como la proyección de una línea central, el patrón pseudo-aleatorio de puntos para la calibración mostrado en la figura 4.(a), el cambio a escala de grises, la proyección de una imagen de color rojo para verificar el contraste en el proceso de calibración, entre otras funciones. Una vez utilizada esta GUI, se obtienen las imágenes que proporcionan la calibración y la fase, para posteriormente utilizar el toolbox² de calibración diseñado por Zhang et al. en [59] y aplicar los algoritmos de desenvolvimiento de fase expuestos por Rodríguez et al. en [46], con lo que se logra el objetivo de la primera etapa de la estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas que consiste en la obtención de una nube de puntos en el espacio 3D que represente las coordenadas espaciales de la superficie del objeto.

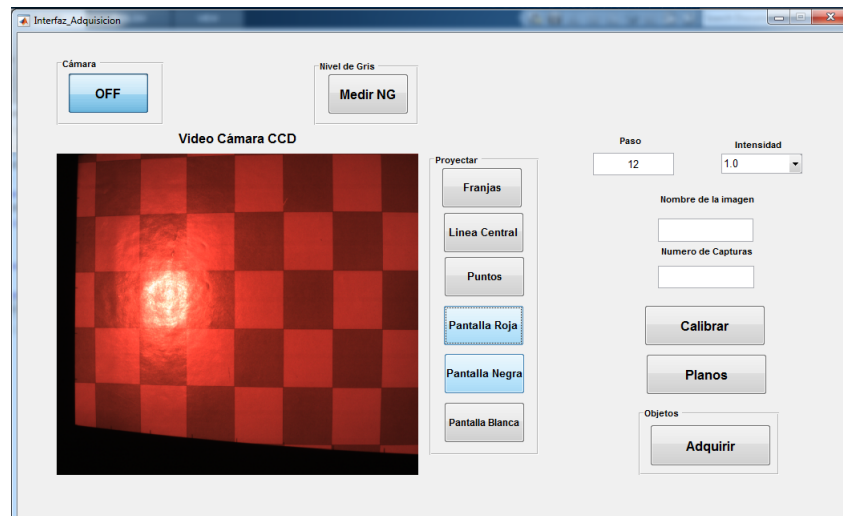


Figura 67: GUI “Interfaz de adquisición” en modo básico.

¹Graphical User Interfaces in MATLAB.

²MATLAB toolbox family.

6.3 Digitalización de un objeto como una nube de puntos en el espacio tridimensional

La primera etapa para la estrategia de reconstrucción 3D unificada por proyección de franjas fue denominada como digitalización; utilizando el montaje experimental y la técnica básica de proyección de franjas, se obtiene una nube de puntos en el espacio tridimensional. Para fines metroológicos, esta nube ha brindado la información exigida en las investigaciones del GOTS pero con grandes falencias en la visualización y la caracterización de la reconstrucción, como se explicó en el planteamiento de problema, específicamente en la sección 2.2. Ahora, el procedimiento en todas las investigaciones del GOTS acerca de reconstrucción tridimensional por la técnica de proyección de franjas, entre las que se tienen los trabajos de González et al. en [21], Arciniegas et al. en [4] y Contreras et al. en [43], definen la metodología de la técnica como la mostrada en el diagrama de flujo de la figura 2 y donde cabe aclarar que los resultados han llegado a la obtención de la reconstrucción tridimensional como una nube de puntos dispersos. Es por esto que a continuación se ampliaron las fases de la digitalización mostrando su respectiva ejecución experimental.

6.3.1. Calibración

Con base al conocimiento teórico de la sección 2.1.1 y a los trabajo de investigación del grupo GOTS efectuados por Contreras et al. en [43] y González et al. en [21], se procedió a la calibración de la unidad de proyección-adquisición (figura 64). Entre las herramientas utilizadas para la calibración, se tiene el uso de un plano de referencia con unas dimensiones de 40[cm] de ancho por 40[cm] de alto y sobre el que se proyectan los diferentes patrones de franjas y el patrón de puntos pseudo-aleatorio. En este plano se situó un patrón ajedrezado con un tamaño de cuadrícula uniforme de 3[cm] de ancho por 3[cm] de alto conformado por un total de 144 cuadrados y con una distribución de dos colores de alto contraste como el que se muestra en la figura 68; al adquirir las imágenes en escala de grises las tonalidades de altos y bajos no deben ser extremos dado que se pierden puntos del patrón pseudo-aleatorio proyectado. Por esta razón, como colores apropiados el grupo GOTS en las investigaciones anteriormente mencionadas [4, 21, 43] escogió un tono de los verdes (R: 165, G: 255, B: 0) para el nivel bajo de gris y uno de los rojos (R: 255, G: 150, B: 0) para el nivel alto de gris del patrón cromático ajedrezado, i.e., usando una cámara monocromática y proyectando el patrón de puntos con luz blanca, en la imagen obtenida no tiene información del patrón cromático ajedrezado, pero si se ilumina con luz roja el patrón se obtiene una imagen del tablero de ajedrez contrastado con alto nivel de gris de los cuadros rojo y bajo nivel de gris para los cuadros verdes. Estas dos imágenes (patrón de puntos proyectado sobre el patrón ajedrezado y la imagen en la cuadrícula al proyectar luz roja) adquiridas en diferentes posiciones relativas dentro del volumen de calibración permiten obtener los parámetros requeridos en el mapeo fase-altura del proceso de reconstrucción tridimensional, como se vera en detalle más adelante.

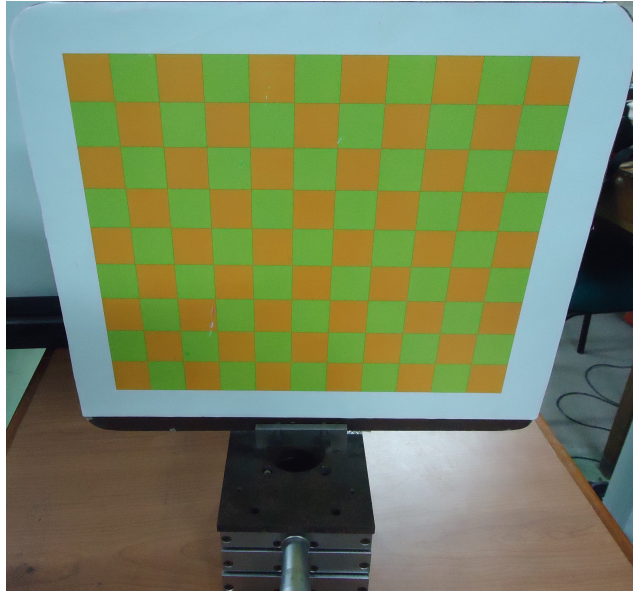


Figura 68: Tablero ajedrezado utilizado para el método de calibración como patrón de calibración.

El procedimiento de calibración se fundamenta esencialmente en el cálculo de los coeficientes w_{ij} de la ecuación 7, pues implícitamente relaciona una transformación proyectiva entre el sistema coordenado de la cámara CCD y el sistema coordenado del proyector, como se mencionó en el capítulo 2. Por consiguiente, inicialmente se procedió a calibrar la cámara CCD para la extracción de los parámetros intrínsecos y extrínsecos de esta. Para este proceso de calibración experimental se requiere un patrón de calibración bien conocido metrológicamente, de tal forma que estén identificadas las coordenadas de los puntos de control; esta función es efectuada por el tablero ajedrezado de la figura 68. Se adquieren entonces varias imágenes del tablero ajedrezado en diferentes posiciones, en este caso se hicieron nueve tomas. En la figura 69 se aprecia como el usuario selecciona de las imágenes de la cuadrícula cuatro puntos de control y automáticamente la CCT³ identifica las intersecciones de la cuadrícula mediante un tratamiento de imágenes que inicialmente no incluye el tratamiento de las aberraciones geométricas de la cámara. Las esquinas de las imágenes son calculadas con una precisión de $0.1[\text{pixel}]$ aproximadamente, usando técnicas de procesamiento digital de imágenes especializadas en detección de bordes desarrolladas por Bouguet et al. en [47] en cada una de las nueve imágenes adquiridas.

³Camera Calibration Toolbox [47]

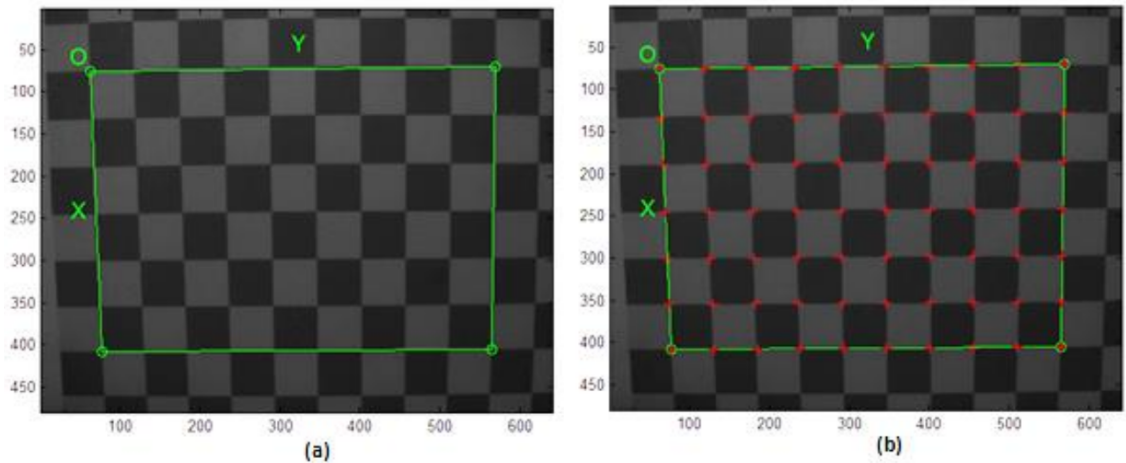


Figura 69: (a) Homografía adquirida del tablero ajedrezado donde el usuario selecciona cuatro puntos de control. (b) La CCT identifica en la selección anterior el número de intersecciones del patrón ajedrezado y las muestra de color rojo. Fuente: [21].

Al ejecutar los algoritmos de calibración de la CCT se obtiene la matriz de calibración de la cámara K definida por

$$K = \begin{bmatrix} 3492.1 & 0 & 538.7 \\ 0 & 3456.4 & 389.0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

y contiene en sus componentes los parámetros intrínsecos de la cámara.

Consecuentemente, a partir de las nueve homografías y la matriz de calibración K el software calcula las diferentes matrices de rotación \mathbf{R}_C y los vectores de traslación \mathbf{t}_C para cada uno de los planos, obteniendo entonces los parámetros extrínsecos de la cámara sin la consideración de aberraciones geométricas. Posteriormente, la CCT utiliza estos parámetros intrínsecos y extrínsecos teóricos, y de las coordenadas de los puntos de control en unidades métricas como valores iniciales para el cálculo de las coordenadas experimentales en píxeles de los puntos de control considerando el efecto de las aberraciones radiales y optimizando el resultado mediante una función de error. Finalmente, se obtienen las coordenadas experimentales mostradas en la figura 70 de color azul y las coordenadas teóricas en color rojo.

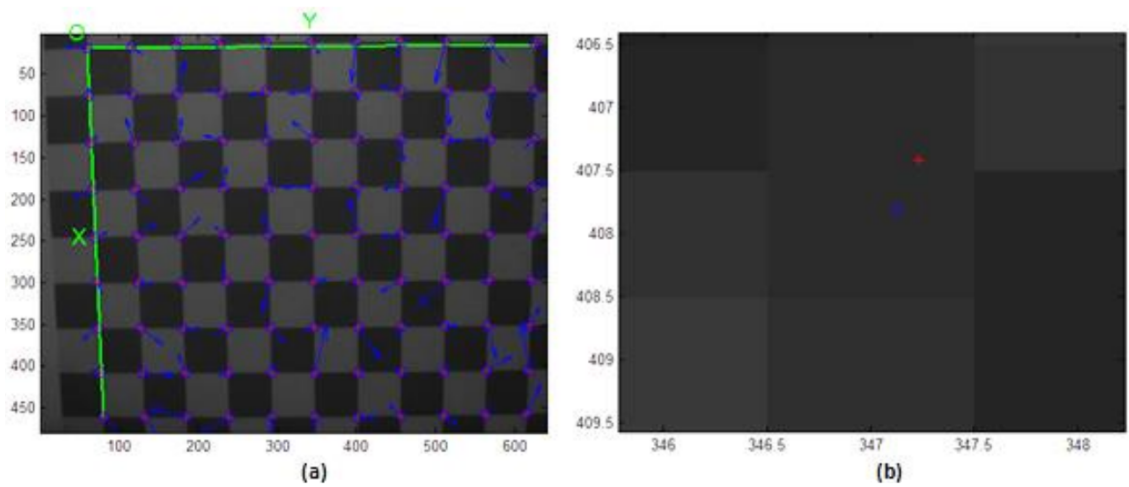


Figura 70: (a) La CCT calcula las coordenadas de los puntos de control (azul) y las compara con las coordenadas teóricas (rojo). (b)Ampliación para mostrar la diferencia entre una coordenada teórica (rojo) y una experimental (azul). Fuente: [21].

A continuación, la nube de error final es mostrada en la figura 71. La posición de cada cruz en la gráfica corresponde a la diferencia entra las coordenadas teóricas y las experimentales, de cada uno de los puntos de las nueve imágenes.

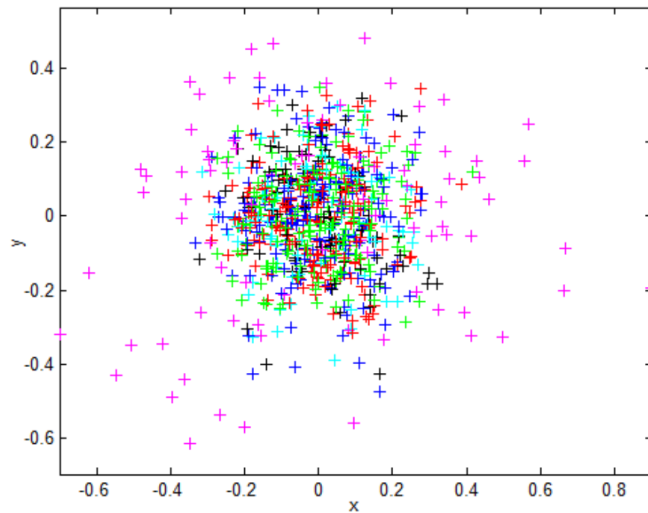


Figura 71: Nube de dispersión de error donde cada color determina una de las posiciones del plano adquiridas. Fuente: [21].

En la figura 72, se observa la representación gráfica de los parámetros extrínsecos finales respecto al sistema coordenado de la cámara.

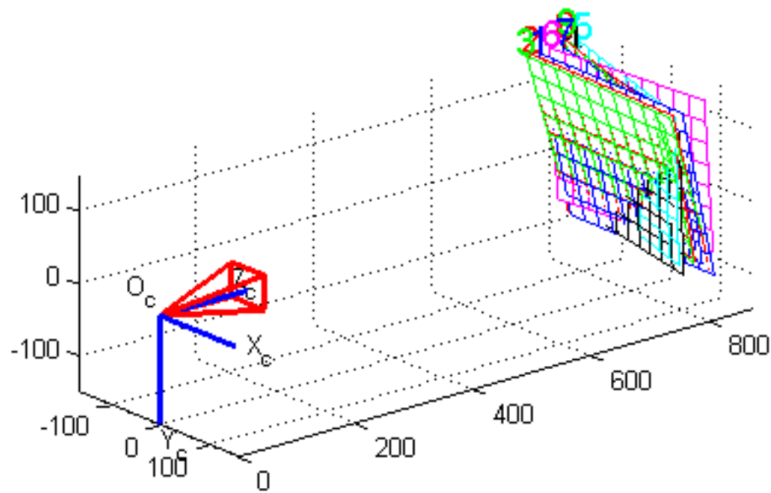


Figura 72: Gráfico de los diferentes planos adquiridos en las homografías y por consiguiente determinación de los parámetros extrínsecos de la cámara. Fuente: [21].

Después de determinar los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara, se procede a proyectar el patrón de puntos pseudo-aleatorio sobre el patrón de calibración. Para esto se utilizó la GUI “Interfaz de adquisición”, donde la figura 73 muestra los dos monitores configurados en el montaje; en el monitor principal se aprecia la GUI junto con la imagen adquirida por la CCD de la proyección del patrón de puntos pseudo-aleatorio sobre el patrón de calibración ajedrezado y en el monitor secundario la imagen proyectada por el vídeo-proyector. De este patrón de puntos pseudo-aleatorios se conoce la posición en coordenadas (m_x, n_y) de cada uno de los puntos de control.

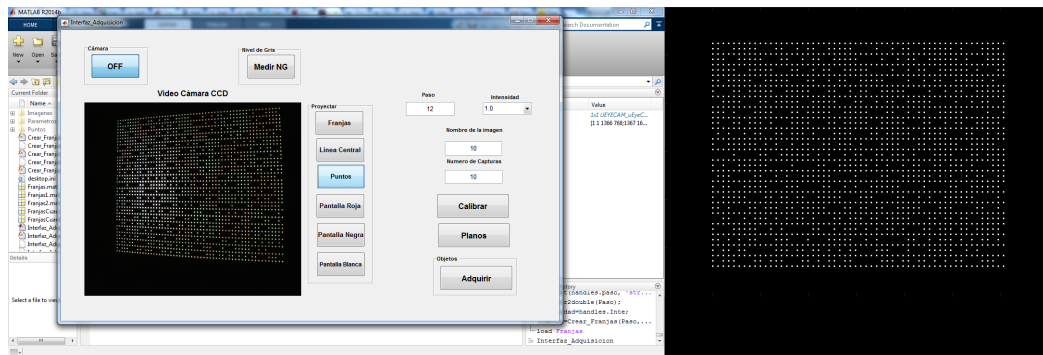


Figura 73: La “Interfaz de adquisición” define y adquiere el patrón de puntos pseudo-aleatorio a proyectar, el cual es mostrado en el monitor secundario.

La figura 74 es la primera de las nueve homografías adquiridas en el proceso de calibración de la cámara CCD y la respectiva proyección adquirida del patrón de puntos pseudo-aleatorio.

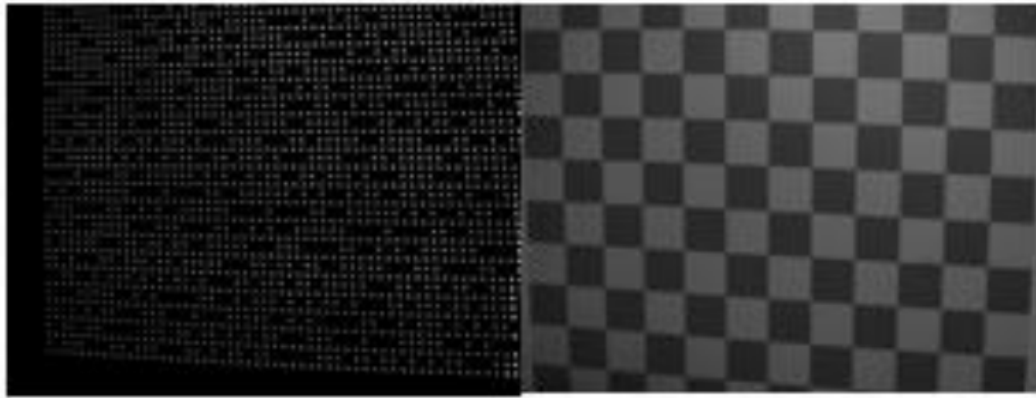


Figura 74: Homografía adquirida para la calibración de la unidad de proyección-adquisición. Fuente: [21].

Mediante un procesamiento digital de imágenes y análisis de Fourier [13] se calculan las coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) de los puntos de control en píxeles sobre el sistema coordinado del plano imagen. Se obtiene entonces para la homografía de la figura 73 la distribución de fase discontinua mostrada en las figuras 75.(a) y 75.(b), siendo estas resultado de la transformación de Fourier al espacio de fase y el análisis de los diferentes lóbulos ortogonales. Posteriormente, haciendo uso de los algoritmos de “unwrapping” expuestos en la sección 2.1.2 se corrige a una fase continua como las mostradas en las figuras 75.(c) y 75.(d). Las figuras 75.(a) y 75.(c) corresponden a distribuciones verticales de fase asociadas a las coordenadas m_x de los diferentes puntos de control; así mismo, las distribuciones horizontales de fase se aprecian en las figuras 75.(b) y 75.(d) para las coordenadas n_y en el sistema de proyección. Como ya se mencionó en la sección 2.1.1, los puntos de intersección de las fases continuas determinan las coordenadas (x, y) de cada punto de control en la imagen, donde además los niveles de gris adquiridos del patrón de calibración ajedrezado permite verificar si efectivamente, a dichas coordenadas, corresponde un punto de control o un punto ausente.

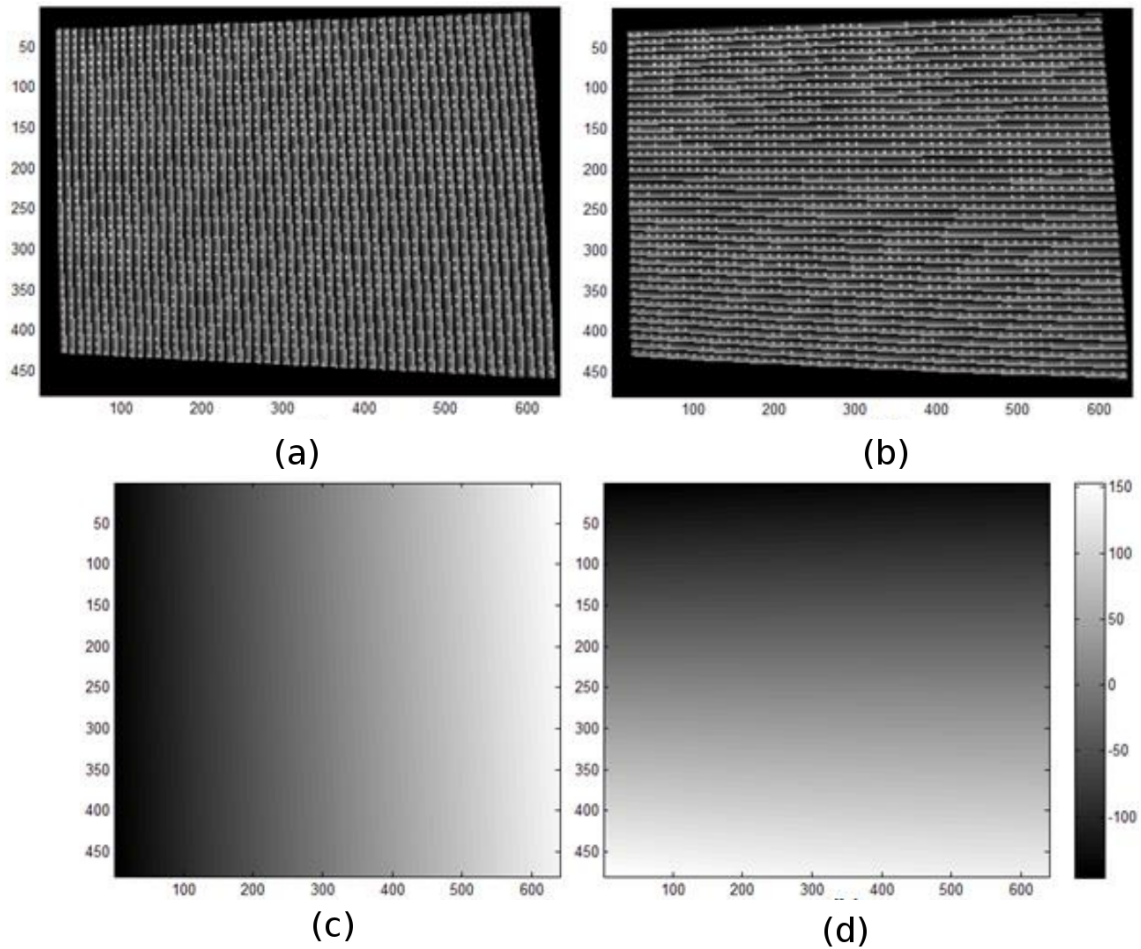


Figura 75: (a) Fase discontinua vertical del patrón seudo-aleatorio. (b) Fase discontinua horizontal del patrón seudo-aleatorio de puntos. (c) Fase continua vertical del patrón de puntos seudo-aleatorio. (d) Fase continua horizontal del patrón seudo-aleatorio. Fuente: [21].

Para la imagen analizada, el algoritmo que ejecuta este procedimiento recuperó las coordenadas (x, y) en píxeles en el plano imagen de 2026 puntos, incluyendo puntos ausentes. Los puntos recuperados son mostrados en la figura 76.(a). Haciendo uso de los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara, se calculan para cada punto con sus respectivas coordenadas (x_i, y_i) en píxeles conocidas en el plano imagen, las coordenadas en milímetros respecto al sistema coordenado de la cámara (X_C, Y_C, Z_C) . El proceso fue mostrado en mayor detalle por Contreras et al. en [43]. El resultado final para cada punto en coordenadas milimétricas con respecto al sistema de referencia de la cámara de la homografía tratada puede observarse en la figura 76.(b).

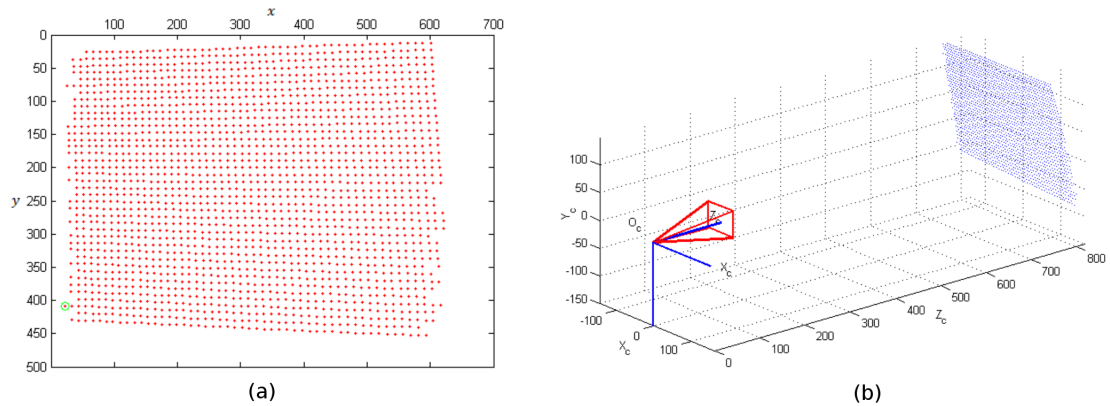


Figura 76: (a) Coordenadas de los puntos de control vistos por la cámara CCD. (b) Coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) de los 2026 puntos de la primera homografía de calibración, con coordenadas (x, y) y (m_x, n_y) conocidas.

Se repite el mismo procedimiento descrito para las ocho homografías restantes y utilizando el algoritmo DLT⁴ desarrollado por Heyden et al. en [26] se obtiene finalmente la matriz de calibración W de la ecuación 7, definida para esta investigación como [43]

$$W = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0.0002 & -0.0016 & 0.9750 \\ 0.0006 & 0.0043 & 0.0007 & 0.2220 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0005 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

donde dicha matriz define un sistema completamente calibrado. Consecuentemente puede procederse a la proyección y adquisición de los diferentes patrones de franjas sobre los objetos a reconstruir.

6.3.2. Proyección y adquisición en el objeto

Para esta investigación se retomó la reconstrucción tridimensional de tuberías de hidrocarburos ya tratada con anterioridad en el grupo GOTS por parte de Arciniegas et al. en [4] y de Contreras et. al en [43]. Este tipo de ductos se conocen como tuberías flexibles con refuerzo no metálico y utilizan sistemas multicapas, donde los componentes poliméricos constituyen gran parte de las diferentes capas junto al refuerzo no metálico de esta. En la figura 77 se aprecia una imagen real de la tubería flexible con refuerzo no metálico que fue objeto de esta investigación.

⁴Direct Linear Transformation

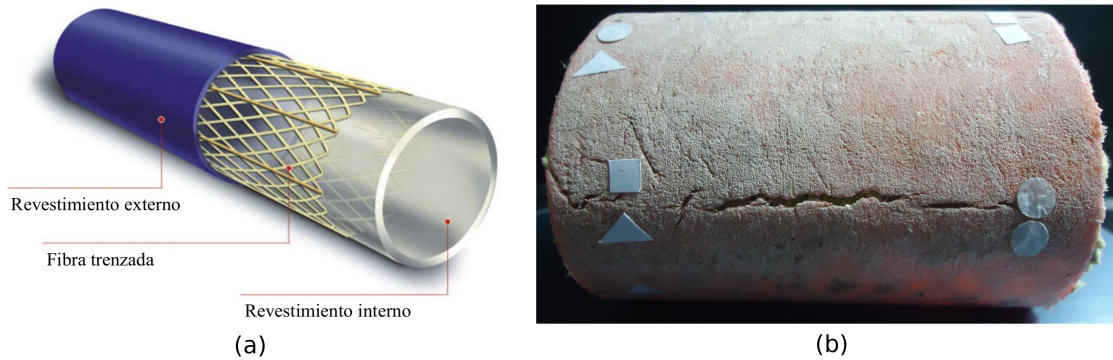


Figura 77: (a) Diagrama esquemático de una tubería flexible con refuerzo no metálico. Fuente: [43]. (b) Fotografía de la tubería que se reconstruyó junto con los patrones geométricos.

Los efectos de entorno a los que se encuentran expuestos este tipo de tuberías pueden variar entre tensiones mecánicas, efectos térmicos, radiación electromagnética, factores biológicos e influencias químicas; siendo estos los causantes individuales o colectivos de diferentes modos de falla de la tubería. Comúnmente los efectos de entorno inducen un modo de falla por agrietamiento o deformación en la tubería, que sumado a las características de presión de operación, puede producir fisuras del orden de centenas de micrómetro, por ende colapsar en una posible ruptura y por consiguiente derramamiento del fluido transportado. Una caracterización metrológica de la superficie de la tubería puede emplearse como diagnóstico preventivo en este tipo de tuberías, siendo este uno de los puntos claves de la investigación de Arciniegas et al. en [44], en la cual la R3DPF fue aplicada como técnica de exploración superficial de grietas y deformaciones en tuberías flexibles con refuerzo no metálico .

Se procedió entonces a la reconstrucción tridimensional de la tubería de la figura 77. El montaje experimental junto con el sistema de referencia de la cámara es mostrado en la figura 78 y consta de la unidad de proyección-adquisición ya calibrada utilizada en la sección anterior.

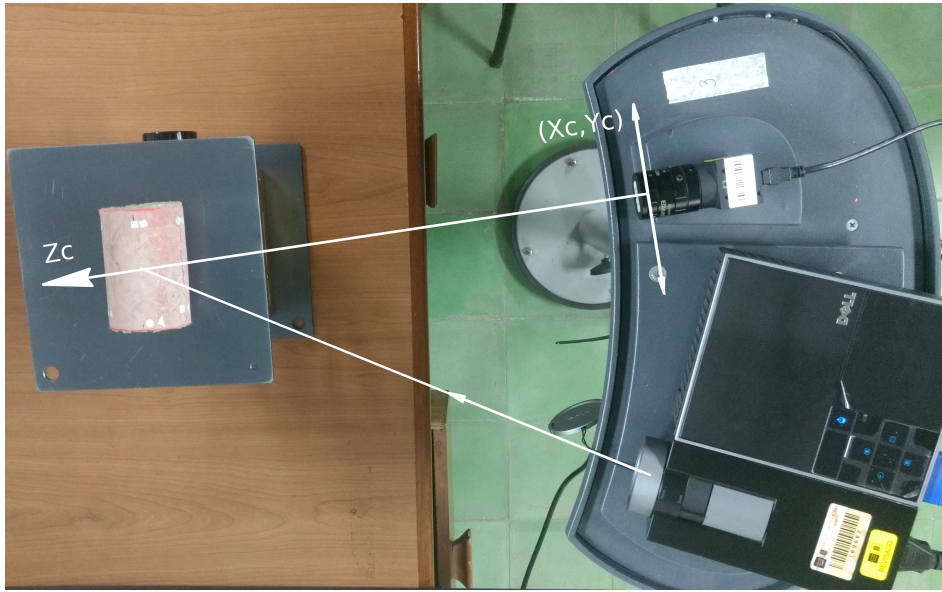


Figura 78: Montaje experimental para la proyección-adquisición y el sistema de referencia de la CCD.

Como ya se explicó en el capítulo 2, la proyección de un patrón de franjas paralelas sobre la tubería produce un desfase en el patrón de franjas sinusoidales observadas. Este efecto se observa claramente en la figura 79 y define el pilar fundamental de la R3DPF.

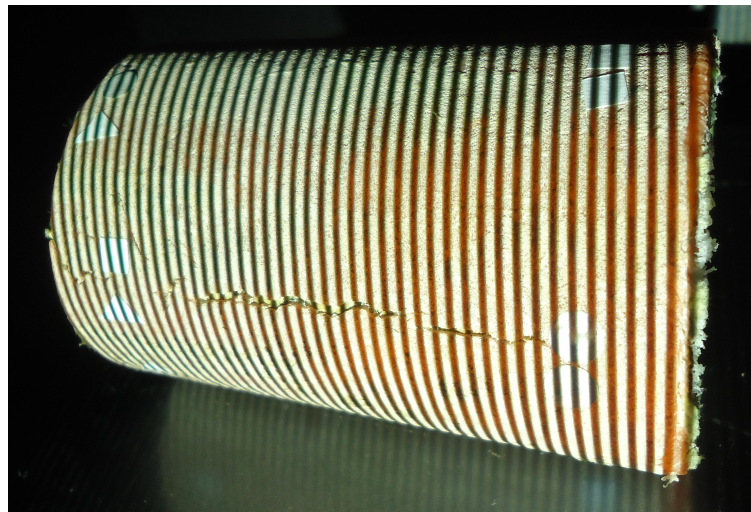


Figura 79: Imagen de las franjas proyectadas sobre la tubería.

Es necesario configurar la cámara para el proceso de adquisición en modo monocromático, pues en el procesamiento de las imágenes los algoritmos utilizan la escala de grises para identificar con mayor facilidad el objeto a reconstruir. La herramienta “Linea Central” de la “Interfaz de adquisición” proyecta una franja en la coordenada $(m_0 = 400, n_y)$ como se muestra en la figura 80 y se utiliza con el

fin de posicionar correctamente el objeto en el campo de visión de la cámara CCD y además definir el punto inicial para la aplicación de los algoritmos de corrección de fase que identifica la fase de orden cero y obtiene la fase absoluta.

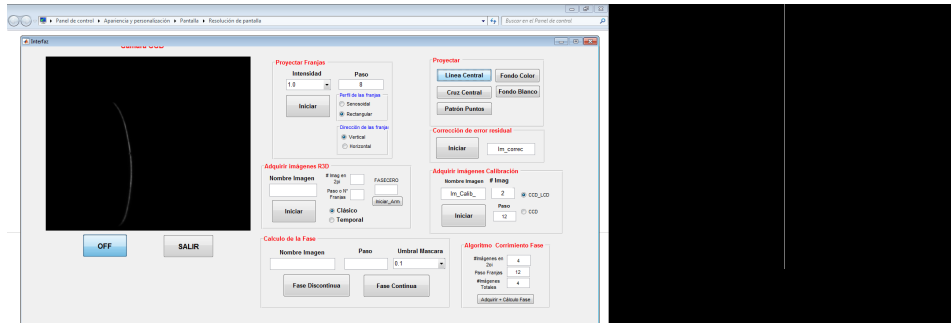


Figura 80: En el monitor principal se muestra la “Interfaz de adquisición y la imagen adquirida sobre la tubería de la línea central. En el monitor secundario se muestra la la imagen de la línea central a proyectar.

Consecuentemente, la etapa de proyección-adquisición se fundamenta en proyectar diferentes patrones de franjas paralelas sobre el objeto a reconstruir, en este caso la tubería y posteriormente adquirir imágenes del patrón de franjas observado sobre la topografía de la tubería. Para esto es utilizada la “Interfaz de adquisición” con lo que se configuró el monitor principal y secundario al igual que en la etapa de calibración, los patrones de franjas proyectados son mostrados en el monitor secundario como se aprecia en la figura 81.

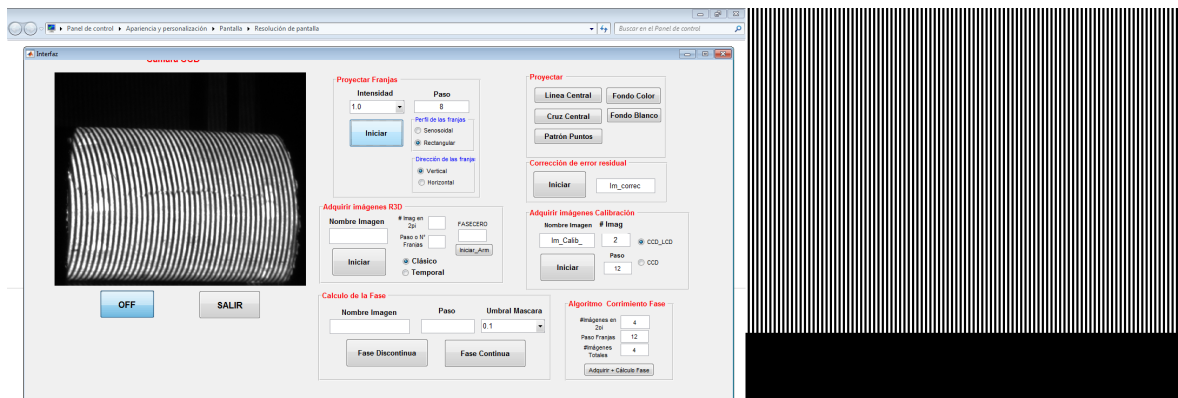


Figura 81: Adquisición del patrón de franjas en la “Interfaz de adquisición” en el monitor principal y patrón de franjas proyectado en el monitor secundario.

Se proyectaron consecutivamente cuatro patrones de franjas con el algoritmo de corrimiento de fase a cuatro imágenes y un paso p igual a $8[\text{píxeles}]$ en el monitor secundario y con una diferencia de fase $\Delta\phi$ de $\pi/2$. Para cada patrón de franjas deformado sobre la tubería se adquiere una imagen utilizando la cámara CCD. Estas capturas son mostradas en la figura 82.

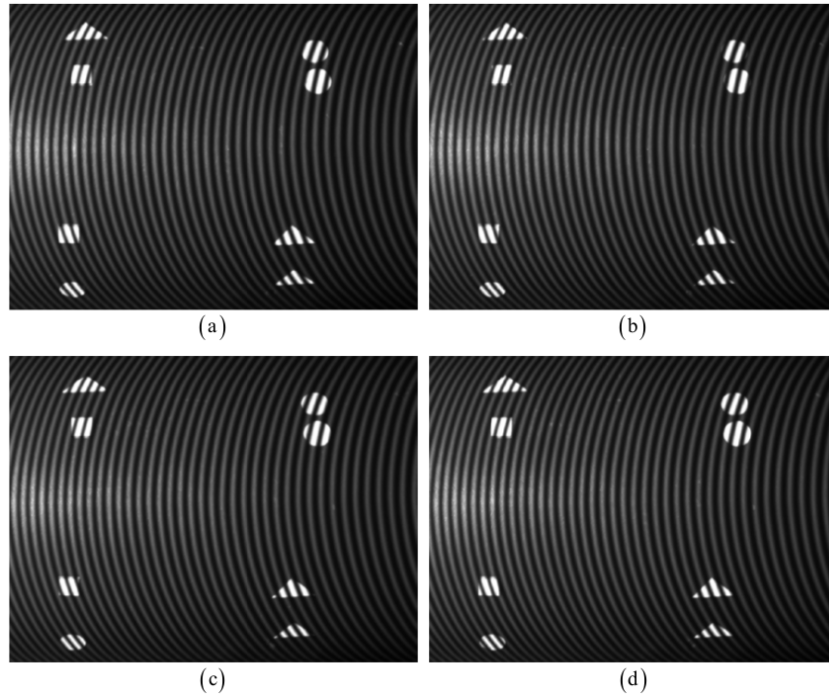


Figura 82: Capturas adquiridas del patrón de franjas proyectados para: (a) $\Delta\phi = 0$, (b) $\Delta\phi = \pi/2$, (c) $\Delta\phi = \pi$ y (d) $\Delta\phi = 3\pi/2$. Fuente: [43].

6.3.3. Corrección a fase continua

La recuperación de la fase es una etapa trascendental en procedimiento de reconstrucción por proyección de franja. Actualmente en el grupo GOTS se han desarrollado e implementado algunos algoritmos de corrección de fase, como se aprecia en la investigación de Rodríguez et al. en [46]. Los mejores resultados se obtuvieron con el algoritmo de desenvolvimiento de fase temporal TPU mostrado en la sección 2.1.2. Sin embargo, para esta investigación se obtuvieron excelentes resultados con el algoritmo de desenvolvimiento de fase espacial SPU, debido a que en el objeto las franjas adquiridas son completamente continuas y no se presentan discontinuidades debido a la topografía cilíndrica de la tubería.

Inicialmente se calcula el desfase del patrón de franjas proyectado, a partir de las imágenes de adquisición mostradas en la figura 82 y la ecuación 12, donde se obtiene la fase discontinua del patrón de franjas proyectado para cada uno de las imágenes adquiridas. La figura 83 muestra la respectiva fase discontinua para la captura con una diferencia de fase $\Delta\phi = \pi/2$ y su respectivo perfil de fase en dirección del eje x , donde se evidencia la discontinuidad en los valores de la fase.

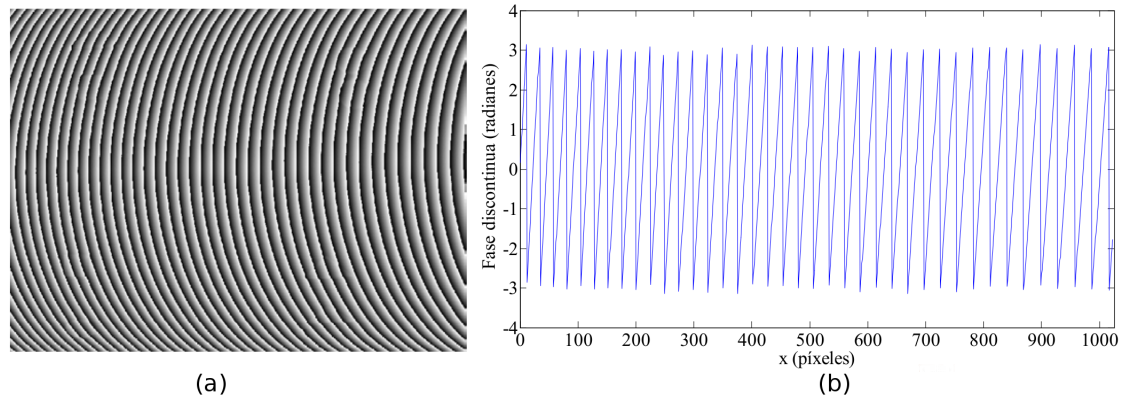


Figura 83: (a) Fase discontinua de las franjas proyectadas sobre la tubería. (b) Perfil transversal de la fase discontinua. Fuente: [43].

Se aplica entonces el algoritmo SPU ya explicado en la sección 2.1.2 e implementado con anterioridad por Meneses et al en [37] y Rodríguez et al. en [46] en el grupo de investigación GOTS. Se obtiene la fase continua mostrada en la figura 84 junto a su respectivo perfil de fase.

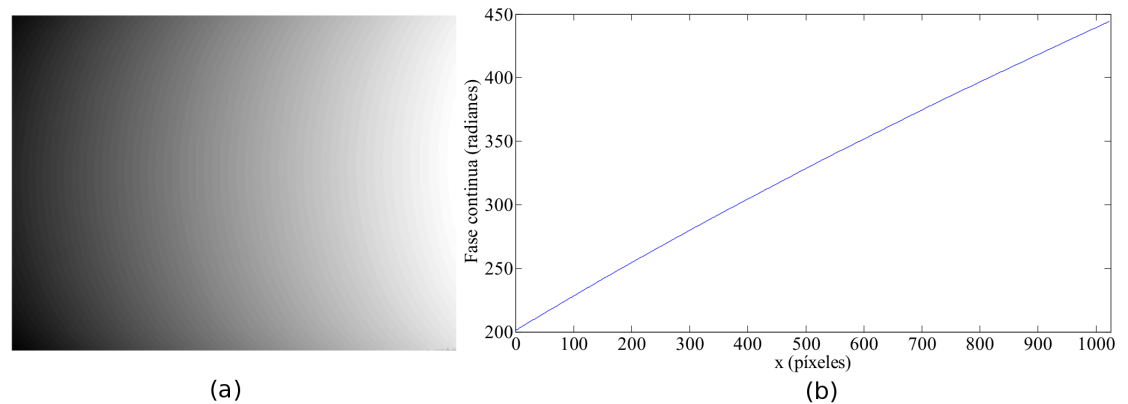


Figura 84: (a) Fase continua de las franjas proyectadas sobre la tubería. (b) Perfil transversal de la fase continua. Fuente: [43]

Como ya se ha mencionado, la fase ϕ posee una relación lineal con la posición horizontal m_x de sistema de franjas en la LCD del vídeo-proyector. Por consiguiente, al tener bien definida la fase del patrón adquirido es posible recuperar las coordenadas m_x necesarias para calcular la ecuación de cada uno de los planos que se forman con la proyección del patrón de franjas sobre la tubería, siendo este procedimiento el último paso en la fase de digitalización mediante la estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas, que se amplía en la siguiente sección.

6.3.4. Nube de puntos

A partir de las nubes del tablero ajedrezado y el software de código abierto “Toolbox Camera Calibration” desarrollado por Bouguet et al. en [47], se calculan los parámetros intrínsecos de la cámara, teniendo en cuenta las aberraciones geométricas. Con estos parámetros se calcula para cada punto p_C sobre la imagen de coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) en píxeles, la ecuación métrica de la línea de visión que pasa por dicho punto, es decir, la ecuación de la recta $O_C P$ de la figura 85. Por otro lado, como se reconoce el valor de fase para el punto p_C de coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) , se calcula el valor de la columna m de la LCD del vídeo-proyector y su respectivo valor de fase absoluta, utilizando la ecuación 23. Con este valor de fase y las ecuaciones del plano 7, se obtiene la ecuación del plano de luz que pasa por m e ilumina el punto $P(X_C, Y_C, Z_C)$ expresado en coordenadas $O_C(X_C, Y_C, Z_C)$. Obteniendo el punto de intersección de la línea de visión con el plano de luz, se determinan las coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) de cada uno de los puntos P sobre la superficie de la tubería, respecto al sistema coordenado de la CCD.

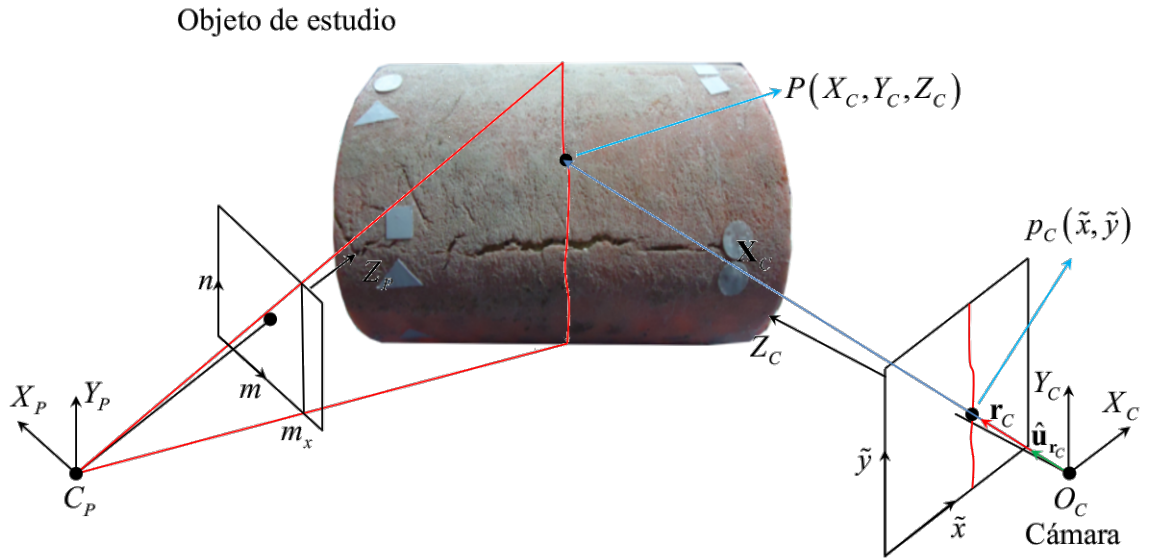


Figura 85: Representación gráfica de los vectores \mathbf{R}_C , \mathbf{r}_C y \mathbf{u}_{rC} .

De manera puntual, el procedimiento consiste en identificar cada uno de los puntos en el plano imagen, como ejemplo se identificó el punto p_C de coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) equivalente a $(1024, 768)$ con un valor de fase continua ϕ que corresponde a $405.2[\text{rad}]$. Se utiliza entonces la ecuación 23 para calcular el respectivo valor de la coordenada m_{1024} donde se obtuvo un valor de $515.9167[\text{píxeles}]$, que hace alusión a la posición del píxel en el LCD del vídeo-proyector. La ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{bmatrix} \quad (54)$$

relaciona la matriz K de los parámetros intrínsecos de la cámara CCD y las coordenadas en el plano imagen (\tilde{x}, \tilde{y}) , por consiguiente para el punto $(1024, 768)$ se obtuvo entonces el vector \mathbf{r}_C de componentes (x_C, y_C, z_C) en coordenadas métricas equivale a $(0.1390, 0.1096, 1.0000)$ en milímetros. Se

calculó entonces el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_C}$ en dirección del vector \mathbf{r}_C con valores (0.1369, 0.1079, 0.9847) en milímetros. Consecuentemente, se procede a calcular el vector posición \mathbf{R}_C de componentes (X_C, Y_C, Z_C) siendo este un punto digitalizado sobre la superficie de la tubería, partiendo de la proposición de que los vectores \mathbf{R}_C y $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_C}$ son colineales se cumple entonces que el producto vectorial $\mathbf{R}_C \times \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}_C}$ es igual a cero. Por consiguiente, se obtienen dos ecuaciones lineales de la forma

$$Y_C(u_{r_C})_z - Z_C(u_{r_C})_y = 0, \quad (55)$$

$$X_C(u_{r_C})_z - Z_C(u_{r_C})_x = 0. \quad (56)$$

Ahora, de la ecuación 7 es posible expresar los coeficientes w_{ij} de la matriz de calibración W en términos de los coeficientes de la ecuación del plano vertical

$$AX_C + BY_C + CZ_C + D = 0, \text{ donde } A = w_{11} - w_{31}m, B = w_{12} - w_{32}m, C = w_{13} - w_{33}m \text{ y } D = w_{34}m - w_{14}, \quad (57)$$

donde al reemplazar los valores de las componentes X_C y Y_C obtenidos de las ecuaciones 55 y 56, se llega a una expresión para la componente Z_C como

$$Z_C = \frac{D}{\left[A \frac{(u_{r_C})_x}{(u_{r_C})_z} + B \frac{(u_{r_C})_y}{(u_{r_C})_z} + C \right]}, \quad (58)$$

con lo cual la componente Z_C corresponde a 354.2267[mm]. Posteriormente, utilizando nuevamente las ecuaciones 55 y 56, se computan las demás componentes, con lo que el punto (1024, 768) del plano imagen posee las coordenadas métricas (X_C, Y_C, Z_C) correspondientes a (354.2267, 38.8377, 49.2241) en milímetros. Repitiendo el mismo procedimiento para los 533188 puntos restantes se obtiene la respectiva nube de puntos para la reconstrucción tridimensional de la tubería y se muestra en la figura 86. Sin embargo, para una reconstrucción total de la tubería se hace necesario efectuar nuevamente la etapa de digitalización de la estrategia unificada de la R3DPF con el fin de obtener las reconstrucciones 3D de las otras vistas de la tubería, para posteriormente aplicar el proceso de registro de información tridimensional para ensamblar todas las nubes de puntos del objeto reconstruido. En este aspecto el GOTS ha tenido avances significativos, en la investigación de Contreras et al. en [43] se diseñó una estrategia utilizando figuras geométricas y sus respectivos centroides donde posteriormente se calculó las matrices de rotación y los vectores de traslación y así hacer coincidir dichos puntos de referencia y obtener el registro de información tridimensional de la reconstrucción. Por su parte González et al. en [21] utilizando un patrón 3D de calibración para reconstrucciones tridimensionales a 360° con cinco unidades de proyección-adquisición y el algoritmo ICP⁵ mostrado en mayor detalle por Rusinkiewicz y Levoy en [48], llegó a un resultado inicial del registro de información tridimensional. En esta investigación se propuso para su utilización en el GOTS una alternativa para el registro de información tridimensional que será tratada más adelante.

⁵Iterative Closest Point Algorithm.

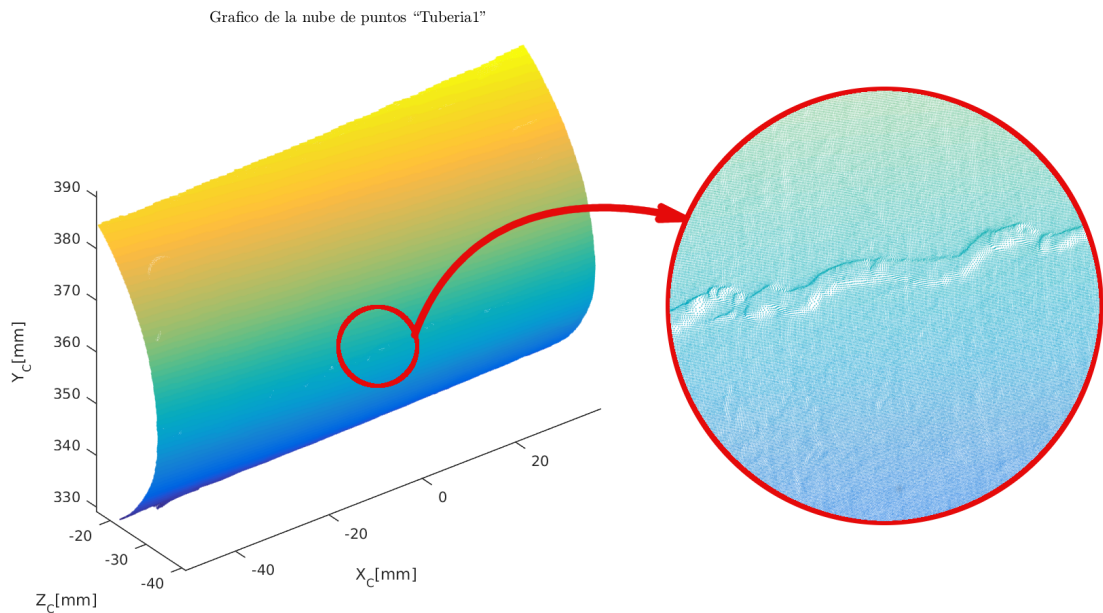


Figura 86: Gráfico de la nube de puntos correspondiente a una vista de la tubería.

Las investigaciones en reconstrucción tridimensional por proyección de franjas en el GOTS han logrado la obtención de la nube de puntos y la extracción de información meteorológica de esta. No obstante el hecho de que la reconstrucción tridimensional no posea una superficie bien definida limita y complica el análisis de la reconstrucción. Por otra parte, nuevamente se observan los problemas ya mencionados en la sección 2.2, por lo que dotar a la nube de puntos de una noción mas clara de superficie es un objetivo primordial en la estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas. En la siguiente sección se introduce el concepto de mallado como herramienta de interpolación para la construcción de la superficie y los diferentes métodos de caracterización de dicha superficie, como lo son el calculo de curvaturas y el computo de geodésicas.

6.4 Transformación de la nube puntos en una superficie por medio de un mallado triangular

El proceso de visualización en las reconstrucciones tridimensionales es un aspecto de vital importancia para las aplicaciones de este tipo de técnicas. Consecuentemente, a estas alturas de la estrategia unificada de la R3DPF es necesario dotar a la nube de puntos, obtenida al final de la etapa de digitalización, de una superficie clara para la observación. Esencialmente en esto se basó la segunda etapa de la estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas, en suministrar una noción de superficie al nuevo objeto 3D que es la nube de puntos, y además caracterizar y extraer la mayor cantidad de información que se considera coyuntural en la metodología de la estrategia. Dicha caracterización se logró retomando los conocimientos teóricos expuestos en el capítulo 4 con el cálculo de las curvaturas de la superficie y con lo expuesto en el capítulo 5, donde se introdujo el concepto de geodésica de una variedad diferencial y la trascendental información que esta representa a la hora de caracterizar un modelo 3D. No obstante, en el flujo de la metodología aquí presentada, es necesario

optimizar en lo posible los datos de entrada a cada etapa de la estrategia de reconstrucción tridimensional unificada, por consiguiente se define entonces en las siguientes subsecciones las herramientas computacionales para lograr el objetivo de la etapa de transformación de la nube de puntos a una superficie del objeto tridimensional.

6.4.1. Optimización de la nube de puntos

Tras obtener la nube de puntos de la tubería en la sección anterior, el siguiente paso en la estrategia unificada por R3DPF corresponde a la optimización de dicha nube de puntos. Este procedimiento consiste en la eliminación de puntos ruidosos no acordes a la reconstrucción, pues la técnica de proyección de franjas presenta algunos problemas en específico por la adquisición de franjas discontinuas sobre el objeto. Este hecho depende del grado de complejidad de la topografía a reconstruir. Para el caso de la tubería, al ser un objeto regular tales discontinuidades en los patrones de franjas adquiridos no se presentaron. Sin embargo, en la sección de resultados se muestra la estrategia unificada aplicada a la reconstrucción 3D de un cráneo humano real, en el cual la topografía es mucho más compleja y se producen estas discontinuidades en las imágenes adquiridas, como se muestra en la figura 87.



Figura 87: Fotografía de las franjas proyectadas sobre un cráneo humano real.

El proceso de optimización de la nube de puntos evita que al dotar a la nube de puntos con un mallado triangular como el explicado en el capítulo 3 se generen inconsistencias en el indexado de los vértices y por lo tanto impliquen errores en las facetas, i.e. regiones de superficie inexistentes en el objeto real. La figura 88.(a) muestra la nube de puntos bruta obtenida de la técnica de proyección de franjas con corrección de fase espacial de un cráneo humano y la figura 88.(b) expone la nube de puntos modificada, precisamente sin las regiones de posible conflicto.

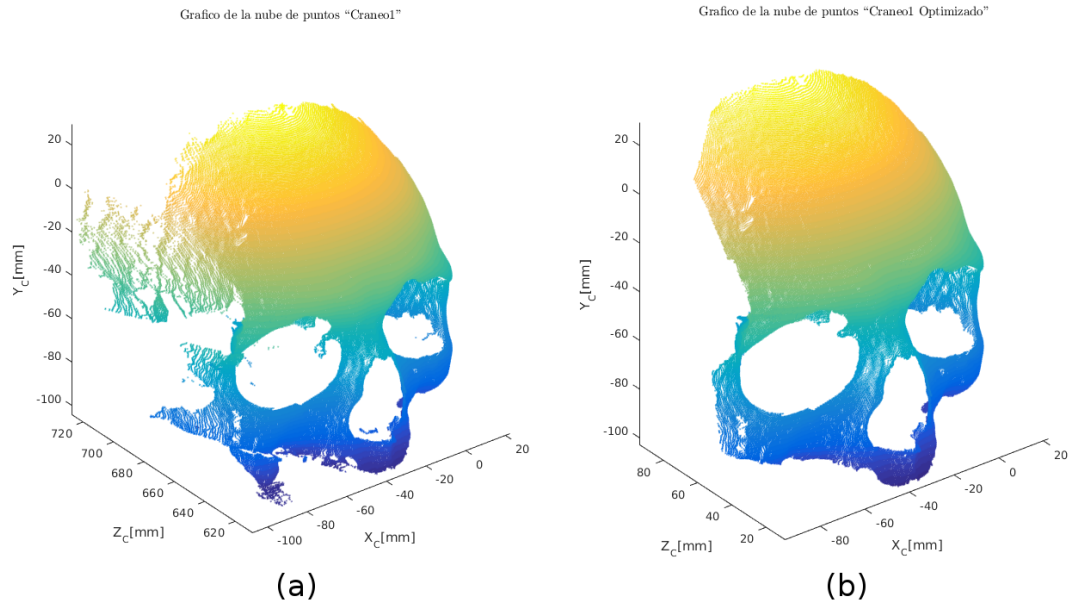


Figura 88: (a) Nube de puntos de entrada de la reconstrucción tridimensional de un cráneo humano real. (b) Nube de puntos optimizada del cráneo.

El software Meshlab ya mencionado en el capítulo 3 suministra la herramienta de selección de vértices y la eliminación de los vértices seleccionados. Para esto se exportan desde MATLAB los puntos de coordenadas (X_C, Y_C, Z_C) como filas de una matriz de n filas por tres columnas, donde n es el total de puntos de la nube, en un archivo de datos con extensión “.xyz” para que sea reconocido por Meshlab. Se identifican los puntos aislados producto del ruido o de las discontinuidades en la R3DPF como los seleccionados en la figura 89.(a), puntos no correspondientes a la topografía estudiada producidos por errores en la fase como los mostrados en la figura 89.(b) y puntos dispersos en regiones donde las franjas se expandieron por la profundidad del objeto denotados en la figura 89.(c). Finalmente, la nueva nube de puntos ya optimizada se exporta como un archivo de extensión “.xyz” para usarse como datos de entrada en el procedimiento de obtención del mallado triangular preliminar.

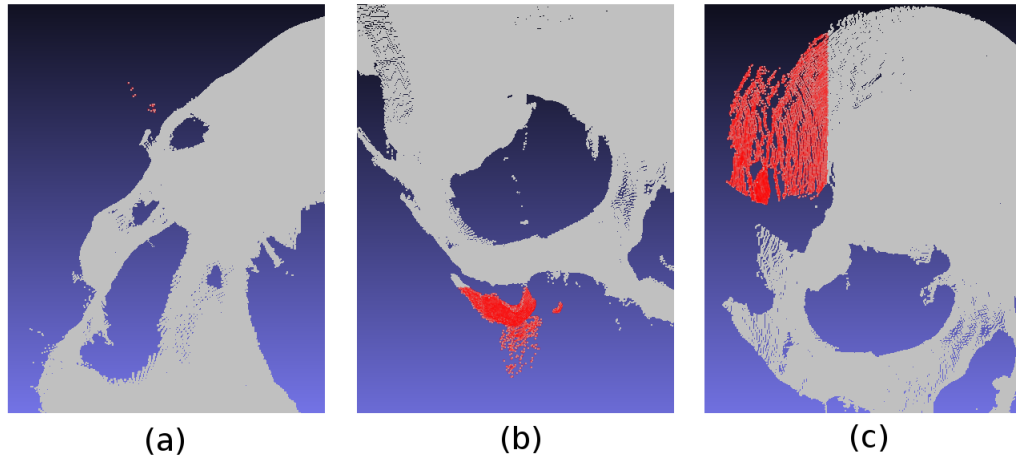


Figura 89: Criterios de identificación de puntos no definidos dentro del objeto (color rojo): (a) puntos aislados de la superficie reconstruida. (b) Regiones no pertenecientes al objeto real producido por las discontinuidades en las franjas adquiridas. (c) Zonas con franjas dispersas o poco definidas.

6.4.2. Obtención del mallado triangular preliminar

Optimizar los resultados de cada una de las etapas de la estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas es trascendental para una mejor aplicación secuencial de la estrategia. Por ende, antes de proporcionarle al objeto 3D una superficie es necesario optimizar los datos de entrada para el posterior computo del mallado triangular. Nubes de puntos “limpias” generan mejores mallados triangulares. El mallado triangular \mathcal{S}_T de la tubería flexible se obtuvo a partir de la implementación del algoritmo de mallado triangular expuesto en el capítulo 3 y con mayor detalle en la modificación realizada para el GOTS en el apéndice ???. Después de aplicar el algoritmo de mallado sobre la nube de puntos de la tubería, el resultado obtenido se aprecia en la figura 90. El color oscuro del mallado triangular se debe a la gran densidad de vértices V que produce la R3DPF y del modo de graficación, pues los bordes E de las facetas triangulares F son graficados en color negro. El mallado sin embargo persiste con muchos de los problemas expuestos en el planteamiento del problema (Sección 2.2). En la ampliación de la figura 90 se muestra detalladamente cierta región de la grieta en la tubería flexible de refuerzo no metálico.

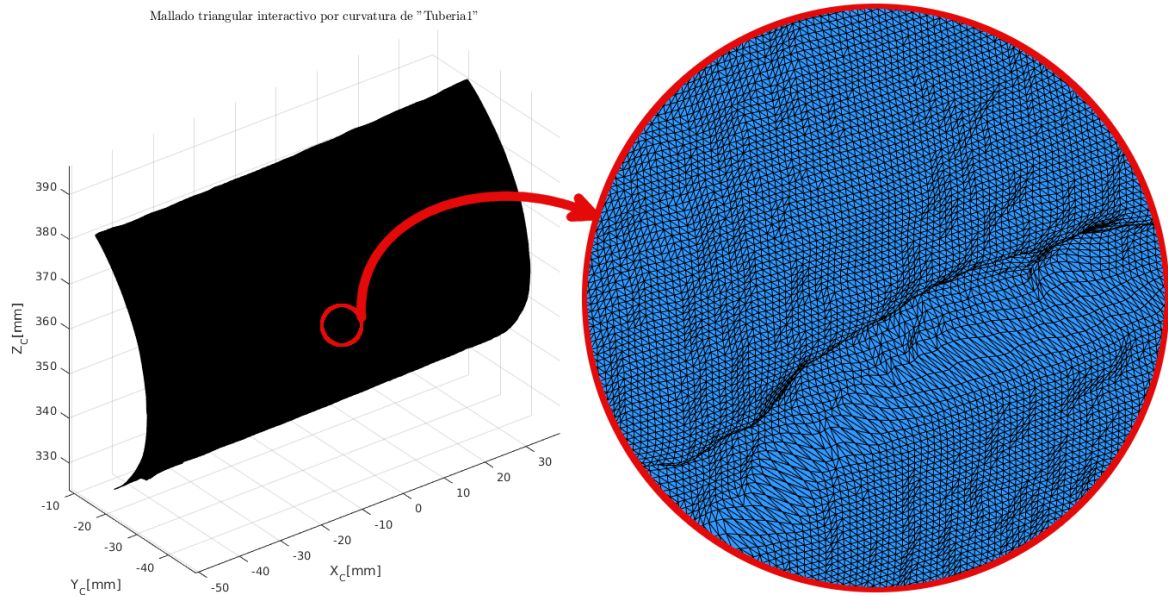


Figura 90: Mallado triangular preliminar de la tubería reconstruida.

La visualización del nuevo objeto tridimensional conocido como “Tuberial” mejoró considerablemente con respecto a la representación en nube de puntos de la figura 86. Al designar paletas de colores a un mallado triangular sin facetado⁶, es necesario aplicar un función de luminosidad para la correcta apreciación de la superficie. MATLAB implementa en sus librerías esta función y se conoce como “Lighting”⁷. El resultado final del mallado triangular preliminar sin facetado y con una función de luminosidad establecida es mostrado en la figura 91. En esta etapa se corroboró lo propuesto por Contreras et al. en [43], quienes afirmaron por análisis en el procedimiento de corrección de fase que existen ondas residuales provenientes del factor de gamma del proyector, son visualizadas con mayor facilidad al dotar al objeto digitalizado con una superficie. La presencia de las ondas residuales generó una fuerte investigación que concluyó con una propuesta novedosa para su reducción y que actualmente está en proceso de publicación internacional.

⁶Es conocido como facetado o por su anglicismo “faceted” al proceso de graficación que designa un color diferente para los bordes de las facetas del mallado, en contraste con el color de la superficie.

⁷MATLAB function: [Lighting](#)

Mallado triangular del modelo "Tuberial"

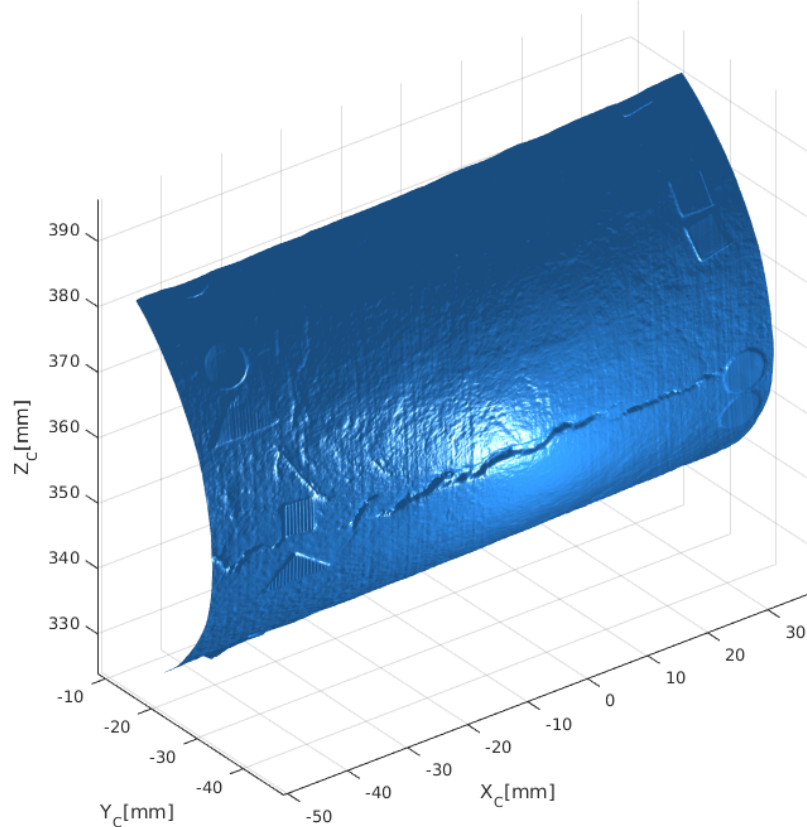


Figura 91: Gráfico del mallado de Delaunay de la tubería, sin facetado y con función de luminosidad.

Es de resaltar que en la construcción de la superficie es coyuntural y primordial la implementación de los archivos poligonales mencionados en la sección 3.3. Actualmente la mayoría de los softwares de modelamiento tridimensional utilizan este tipo de archivos como datos de entrada y de almacenamiento de información 3D. La obtención de este mallado triangular preliminar es un pilar fundamental en el proceso de reconstruir objetos, pues amplía el espectro de extracción de información metrológica y mejora enormemente la visualización del objeto tridimensional. Además de poseer las bondades de la extracción de información metrológica que posee la nube de puntos, el mallado triangular adiciona la posibilidad de extraer otros tipos de caracterizaciones posibles, como lo son el cálculo de curvaturas y la extracción de geodésicas. Estas caracterizaciones brindan información relevante del objeto estudiado y además proporcionan criterios para la optimización del mallado.

6.4.3. Caracterización de la superficie: Cómputo de curvaturas y cálculo de geodésicas

La noción de superficie amplía las opciones de extraer información del objeto reconstruido, es por esto que se hace tan importante la obtención de un mallado triangular preliminar como el que se logró en

la subsección anterior. Consecuentemente, se procedió a extraer la información necesaria que define los criterios de optimización, como lo son el cálculo de curvaturas y el computo de geodésicas aplicados sobre la estructura tridimensional ya vista anteriormente, i.e., el mallado triangular preliminar del objeto reconstruido. Con base en lo presentado en el capítulo 4 y en el capítulo 5 se expone entonces la caracterización de la superficie por curvaturas y geodésicas, respectivamente; siendo ambas poderosas herramientas para el análisis de los objetos de estudio.

Computo de curvaturas

Como parámetros de entrada se tiene el mallado triangular de “Tubería1”, implementado como un archivo poligonal OFF con el nombre de “Tubería1.off”. Una vez cargados los arreglos de los vértices V y las facetas F , se procede a computar las curvaturas Gaussiana K y media H . Utilizando el algoritmo expuesto por Meyer et al. en [38], se obtienen entonces para cada vértice V del mallado preliminar un valor de curvatura Gaussiana K y media H , i.e., la información de las curvaturas queda almacenada en vectores con un número de componentes igual al numero total de vértices del mallado y con el mismo orden de correspondencia. Se ingresó el respectivo arreglo de curvatura en las opciones de color para la función de graficación especializada en mallados, expuesta en el apéndice ???. En la figura 92.(a) se observa la curvatura media H de la tubería y en la figura 92.(b) la curvatura Gaussiana K .

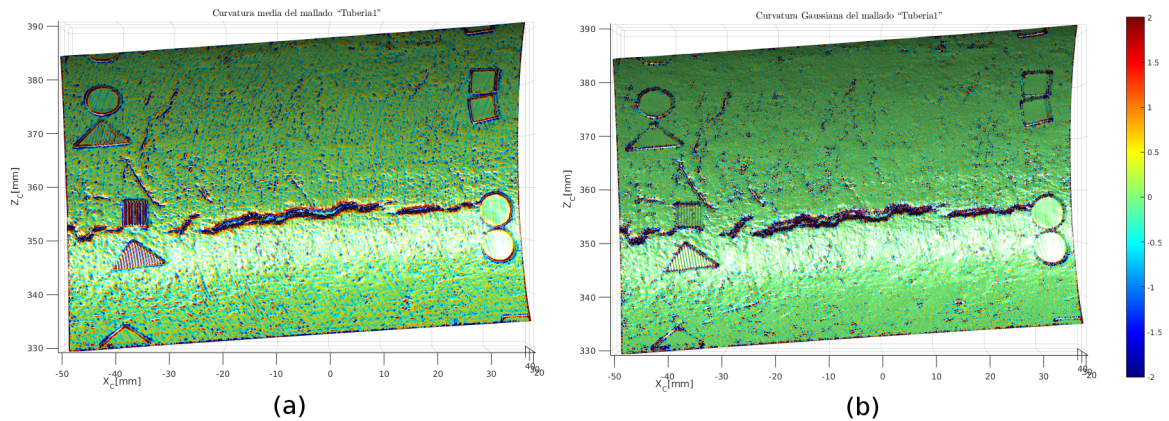


Figura 92: (a) Curvatura media H del mallado “Tubería1”.(b) Curvatura Gaussiana K del mallado “Tubería1”.

Las figuras 92.(a) y 92.(b) fueron ampliadas y expuestas en las figuras 93 para la curvatura media H y 94 para la curvatura Gaussiana K , en la región de la grieta.

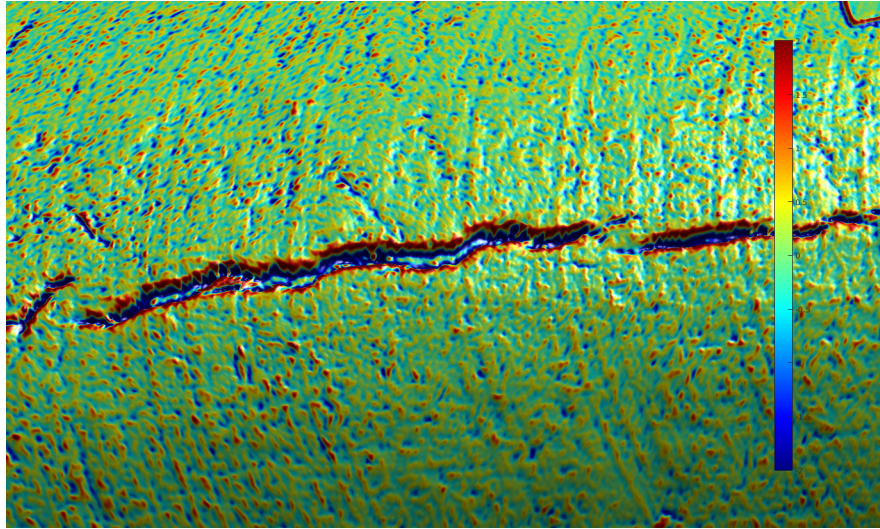


Figura 93: Ampliación de la gráfica de curvatura media H del mallado “Tubería1”.

Análogamente a los conceptos explicados en la sección 4.2, específicamente en la figura 39, se identifican en la grieta los valores positivos y negativos de curvatura.

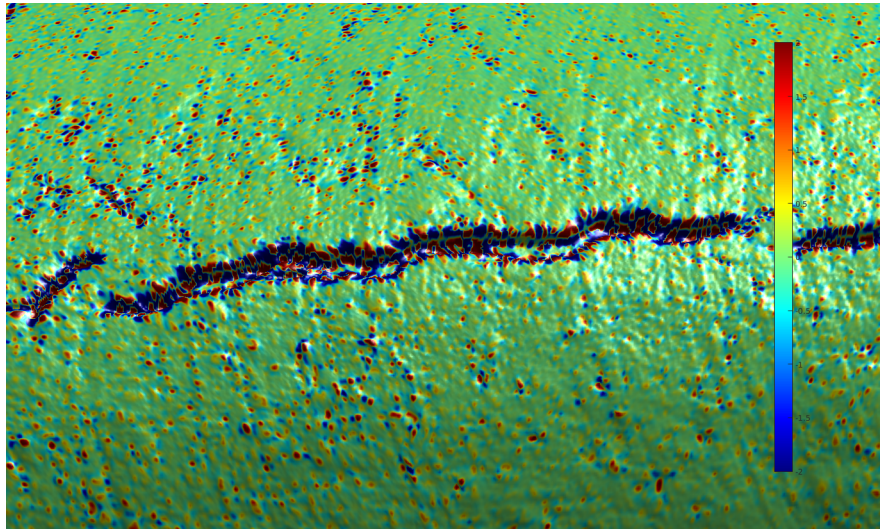


Figura 94: Ampliación del gráfico de curvatura media H del mallado “Tubería1”.

En ambos casos se aprecia que la curvatura en el cuerpo de la tubería tiende a cero, pues esta tiene simetría cilíndrica aproximadamente. No obstante, en la grieta donde existe una curvatura bien pronunciada, se obtiene valores extremos para las curvaturas media H y Gaussiana K . Los valores intermedios y extremos de curvatura sobre el cuerpo de la tubería se deben a que el material en esta región es bastante irregular, como se aprecia en la figura 77.(b).

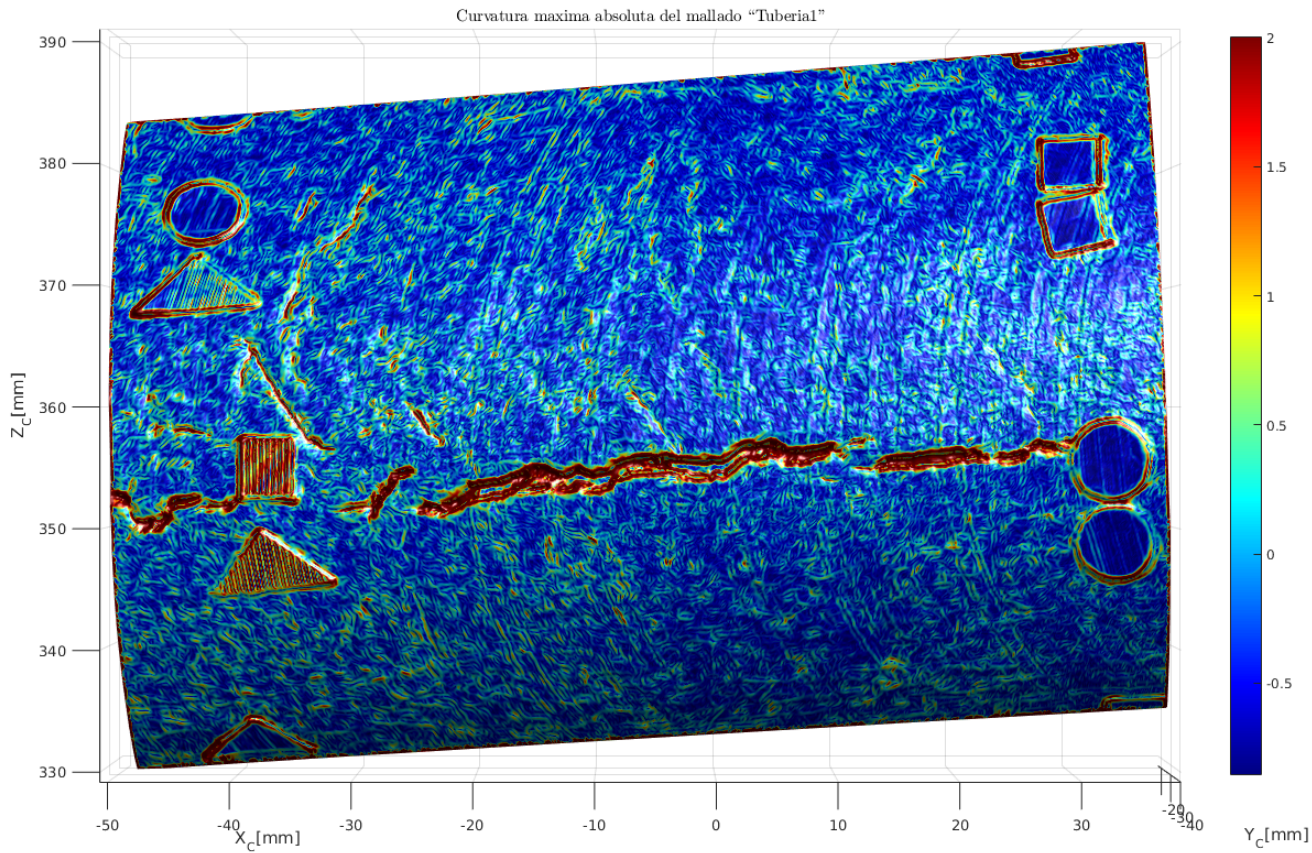


Figura 95: Curvatura máxima absoluta k_1 del mallado "Tuberial".

A partir de la ecuación 43 y de los arreglos de curvatura Gaussiana K y curvatura media H , se calculó entonces el arreglo de curvatura máxima absoluta k_1 para cada vértice del mallado preliminar, mostrando el resultado en la figura 95. Nuevamente se aprecia en promedio que el cuerpo de la tubería posee un valor de curvatura máxima absoluta k_1 que tiende a cero y valores extremos en las regiones de las grietas (Ver figura 96). Con esto la caracterización de curvaturas en pro de la optimización del mallado quedó completa, sin embargo, al considerar las reconstrucciones tridimensionales como variedades diferenciales bidimensionales, el criterio de geodésica expuesto en el capítulo 5 fue un argumento fuerte para modificar el mallado triangular pues como se mostró en el capítulo 5. Las distancias geodésicas están estrechamente relacionadas con la métrica que define la variedad diferencial, por lo tanto, implícitamente el concepto de curvatura está incluido en el criterio de geodésica.

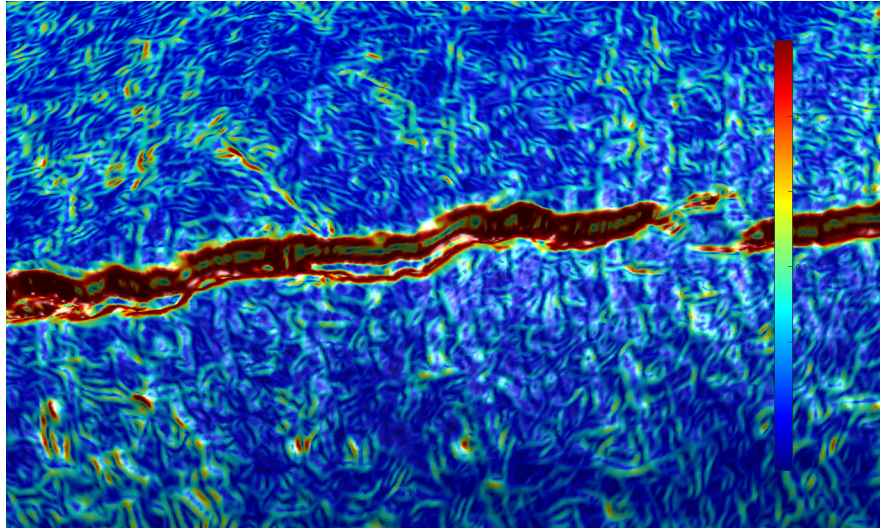


Figura 96: Ampliación del gráfico de la curvatura máxima absoluta k_1 del mallado “Tuberial”.

Calculo de geodésicas

Es bien conocida la relación entre la difusión de calor y el cálculo de las distancias geodésicas, como se mostró en el capítulo 5, por esta razón se optó por la implementación del calculo de geodésicas mediante el algoritmo desarrollado por Crane et al. en [14] y el cual fue ampliado en la sección 5.2. Usando el mallado triangular preliminar obtenido en la sección 6.4.2 y el algoritmo 7, se obtiene un campo escalar de geodésicas $\gamma(v_i)$ que mediante una función de visualización se grafican los diferentes conjuntos de nivel de geodésicas, como se muestra en la figura 97. De la figura se observa el punto fuente encontrado por distancias máximas y seleccionado por el algoritmo.

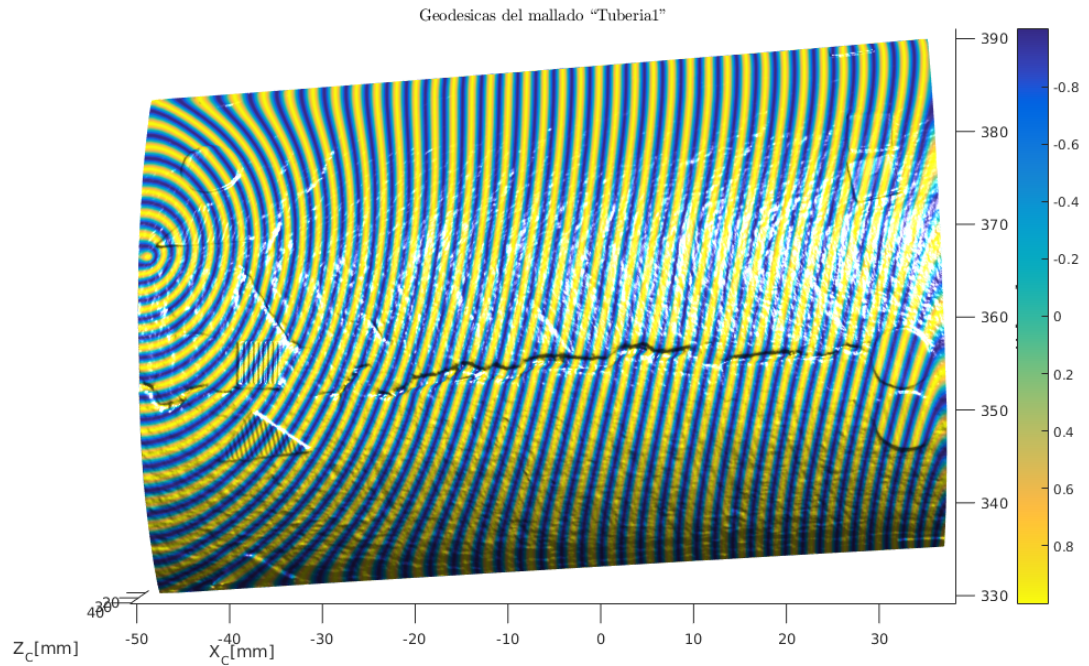


Figura 97: Geodésicas del mallado "Tuberial".

En la interpretación de este resultado figura el hecho de que todos los puntos sobre el mismo conjunto de nivel geodésico poseen la curva de mínima longitud posible entre el punto fuente y el punto analizado, donde dicha curva está embebida en la superficie. En las regiones de alta curvatura (Ver figura 98) el espesor de los conjuntos de nivel del campo escalar geodésico $\gamma(v_i)$ tienden a estrecharse y por el contrario, para las regiones de baja curvatura los conjuntos de nivel de geodésica tienden a expandirse. Este comportamiento evidencia la estrecha relación que poseen las curvas geodésicas y las curvaturas de la superficie, siendo esta una razón de peso para considerar las líneas geodésicas sobre una superficie como un criterio de optimización de remallado.

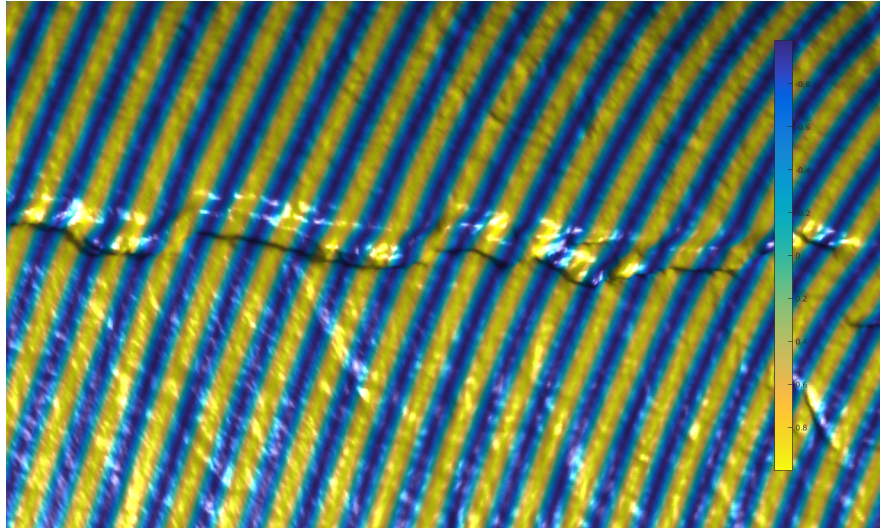


Figura 98: Ampliación del gráfico de geodésicas del mallado “Tuberia1”.

6.5 Optimización de la superficie

Caracterizar apropiadamente una superficie tridimensional permite la correcta definición de criterios de optimización de dicha superficie. Esta etapa de la estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas posee los procesos finales de optimización que proporcionan considerables mejoras en la visualización, en comparación a lo logrado en el grupo GOTS para la R3DPF. Estos procesos de optimización mejoran considerablemente aspectos relevantes de la metodología, modificando los parámetros de entrada según el criterio designado de la caracterización de la superficie 3D. El planteamiento del problema aclarado en la sección 2.2 define entonces graves problemas de visualización, tiempo de cómputo y de falta de optimización de las nubes de puntos en el espacio 3D logrados en el grupo GOTS, siendo entonces necesaria la modificación de los objetos tridimensionales según las orientaciones a la que está destinado el objeto 3D. Se establecieron entonces dos criterios fundamentales para la optimización, el primero de estos es el cálculo de curvaturas y como ya fue mencionado en el capítulo 4, la idea fundamental se basa en determinar y definir las regiones de alta curvatura con una alta densidad de vértices o puntos, mientras que las regiones con baja curvatura se hicieron una reducción del volumen de datos. El segundo criterio comparte con el primero el objetivo final de optimización, i.e., regiones de alta curvatura con alta densidad de puntos y regiones de baja curvatura con una baja densidad de puntos, pero esta vez desde la perspectiva de caracterización de distancias geodésicas, como se trató en el capítulo 5. Para realizar una buena escogencia del tipo de remallado a aplicar según las necesidades o requisitos del usuario, es fundamental conocer la precisión asociada de la aplicación; más adelante se profundiza las pautas para basar la selección del tipo de remallado. A continuación, se amplía la descripción de la implementación teniendo en cuenta aspectos experimentales en el desarrollo de los diferentes procesos de remallado.

6.5.1. Remallado incremental isotrópico uniforme

Como se describió en la sección 4.1, el usuario designa una longitud de borde deseada L y el número total de iteraciones para la aplicación de los operadores locales de remallado; el resultado es un mallado triangular donde sus respectivas facetas triangulares tienden a ser triángulos cuasiequiláteros. Este mallado posee una alta isotropía pero una baja optimización, pues si la longitud de borde designada es mayor que los detalles de la topografía, se pierde gran parte de la información. Es el caso de la figura 99, donde la longitud de borde fijada fue de $L = 3[mm]$, por lo que los bordes de cada una de las facetas modificadas del mallado tendieron a un valor aproximado de L . Como consecuencia, esto eliminó la información de la grieta, pues el espesor de esta era mucho menor a $3[mm]$. El número de vértices del mallado de entrada se redujo de 533189 a 1005 vértices.

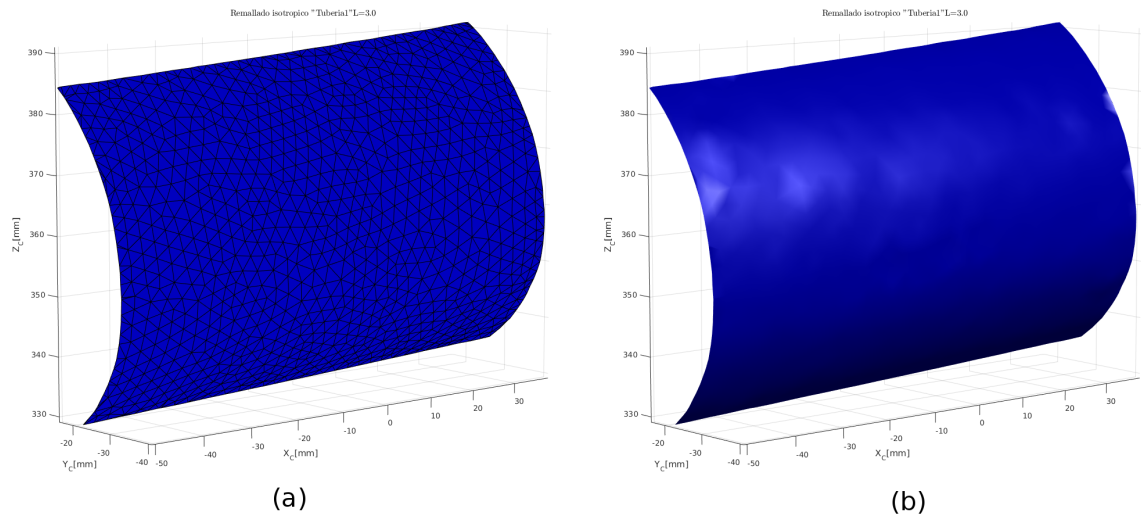


Figura 99: Remallado incremental isotrópico uniforme con longitud de borde definida por el usuario como $L = 3.0[mm]$: (a) Con facetado y sin función de luminosidad. (b) Sin facetado y con función de luminosidad.

Nuevamente se efectuó el remallado isotrópico uniforme pero esta vez para una longitud de borde de control de $L = 1[mm]$ y se observa en la figura 100. El total de puntos antes del proceso de remallado era de 533189 vértices para convertirse finalmente en 8190. Sin embargo, se aprecia una reducción trascendental en la información tridimensional de la representación.

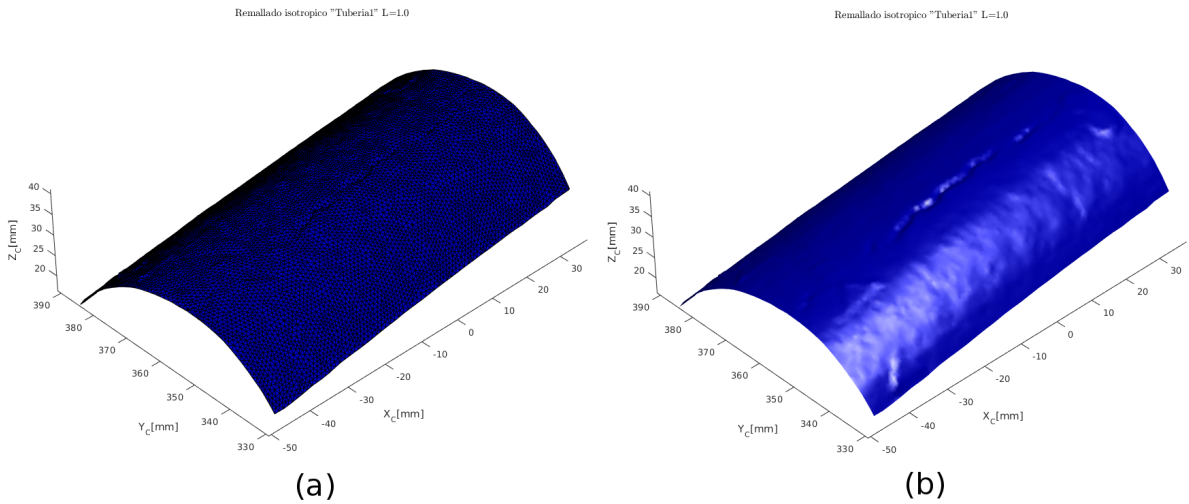


Figura 100: Remallado incremental isotrópico uniforme con longitud de borde $L = 1.0[mm]$: (a) Con facetado y sin función de luminosidad. (b) Sin facetado y con función de luminosidad.

En los objetos tridimensional “Tubería1” sin facetado y con función de luminosidad en ambas figuras (99 y 100) puede compararse en el nivel de detalle de la representación con el mallado preliminar mostrado en la figura 91. En contraste fue significativo el cambio de la topografía y por consiguiente la pérdida de información, en comparación al objeto real. Aun así, este tipo de mallados reducidos con una alta pérdida de información se conocen como mallados de control y permite conservar la geometría global del objeto para posteriormente realizar un análisis o comparación con un objeto 3D mas detallado, e.g., comparaciones entre el volumen de una tubería sin daños superficiales que sería modelada como un remallado isotrópico uniforme como el mostrado en la figura 99, pues este remallado conserva la geometría global del objeto reconstruido con una superficie “suavizada” por la pérdida de información superficial. Esta conclusión plantea una posible solución a un problema encontrado en el análisis metrológico de los detalles superficiales de un objeto: ¿cómo calcularla forma global de la superficie del objeto?. En el GOTS se realizaron aproximaciones polinomiales que funcionan para objetos muy regulares, pero que introducen errores para objetos con variaciones abruptas. Cabe resaltar que los operadores locales de remallado incremental actuaron eficientemente sobre las reconstrucciones tridimensionales por proyección de franjas, lo que indicó un primer paso conseguido para alcanzar el remallado interactivo por curvatura que aplica los mismos operadores de remallado, salvo la respectiva modificación sobre el operador de relajación tangencial, ya mencionada en la sección 4.2.2.

6.5.2. Remallado incremental interactivo por curvatura

Del fundamento teórico expuesto en el capítulo 4, el mallado incremental interactivo por curvatura en esencia mantiene las mismas operaciones locales del remallado incremental isotrópico uniforme y unicamente incluye el campo de dimensionamiento $L(v_i)$ basado en el computo de la curvatura máxima absoluta k_1 . El campo $L(v_i)$ es una herramienta poderosa para la obtención de un remallado adaptativo. La figura 101 muestra el campo de dimensionamiento calculado a partir de la curvatura máxima absoluta k_1 (Ver figura 95) y la ecuación 44. El campo de dimensionamiento evidencia claramente las

regiones en las que la escala de color mas baja, en este caso el color azul denota los valores mas pequeños del campo de dimensionamiento $L(v_i)$, i.e., las regiones en las que las facetas triangulares deben tener la menor longitud de borde L que traduce en una mayor densidad de puntos. Al observar la figura 95 de la curvatura máxima absoluta k_1 , estas regiones coinciden con valores máximos de la curvatura k_1 . Por lo que en principio indicó que el campo de dimensionamiento $L(v_i)$ identificó correctamente las regiones con mayor curvatura y estableció las respectivas longitudes de borde L , interactuando directamente con la superficie de la tubería.

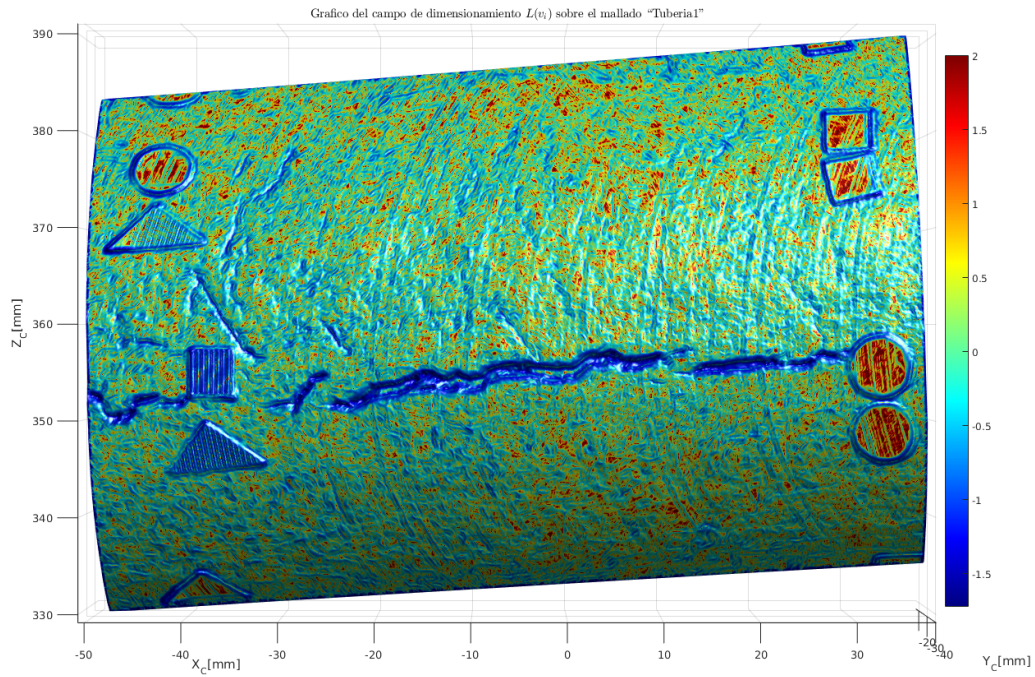


Figura 101: Gráfico del campo de dimensionamiento $L(v_i)$ sobre el mallado "Tubería1".

La figura 102 no es más que una ampliación enfocada en la grieta a la figura 101, correspondiente al campo de dimensionamiento $L(v_i)$ del mallado triangular preliminar "Tubería1".

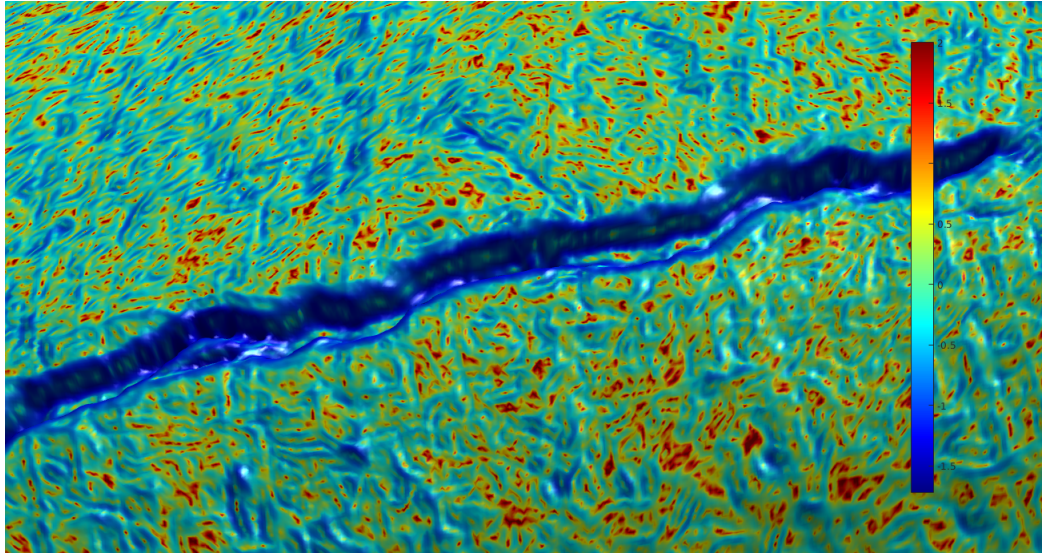


Figura 102: Ampliación del gráfico del campo de dimensionamiento $L(v_i)$ sobre el mallaado “Tubería1”.

Una vez comprobado que el campo de dimensionamiento $L(v_i)$ es necesario que el usuario defina la orientación a la que va dirigida la reconstrucción tridimensional, es decir, el grado de eliminación de información permitida en la superficie, en función de la resolución que se desea. Teniendo claro esta premisa, se establecen los valores numéricos para la tolerancia ε explicada en la sección 4. Como se expuso en la sección 4.1, el número de iteraciones para la aplicación de los distintos operadores locales recomendado es diez [19]. Con el fin de definir la orientación de la reconstrucción tridimensional con el mismo objetivo establecido por Arciniegas et al. en [4], en esencia se estudió en el grupo GOTS los daños superficiales sobre tuberías compuestas flexibles de refuerzo no metálico para la temprana detección de fisuras o grietas del orden de centenas de micrómetro, con el fin de diseñar un dispositivo que reconstruya por R3DPF grandes longitudes de tubería en tiempo real. Por consiguiente, bajo estas condiciones se define la importancia de tener un gran número de puntos en las regiones con grietas y que en el cuerpo de la tubería se efectúe una reducción considerable de los datos generados por la R3DPF.

Después de definir la orientación de la reconstrucción tridimensional, se procedió a escoger una metodología para el proceso de remallado. El remallado interactivo por curvatura para este caso se efectuó de manera secuencial en cinco diferentes remallados, donde su aplicación se efectuó sobre el remallado anterior, con el fin de que el campo de dimensionamiento $L(v_i)$ aumente en cada aplicación. La aplicación de los remallados interactivos por curvatura se denotaron por a_i , donde el subíndice i indica el número de aplicación. Para el remallado a_0 se definió una tolerancia ε equivalente a 0.001 para que el remallado se acercara lo más posible al mallaado preliminar “Tubería1”. Lo ideal para una futura estimación del valor de la tolerancia ε más indicada para la R3DPF es utilizar las aproximaciones de precisión de la técnica de proyección de franjas con lo ya registrado en el grupo GOTS, e.g., el resultado encontrado en el intervalo de $(50[\mu m], 100[\mu m])$ como lo mostró González et al. en [21] y un estudio metrológico de la pérdida de información superficial y la propagación de error introducidos por el proceso de remallado. En esta investigación se obtuvo una primera aproximación a dicha función de error, que es explicada más adelante. Para las aplicaciones del remallado $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ se definió una tolerancia ε igual a 0.01 con el fin de obtener diferencia entre las superficies remalladas y el mallaado original. Evidentemente los datos de entrada para el proceso de remallado fue el obtenido en la subsección 6.4.2 como mallaado

preliminar “Tuberial” y mostrado en la figura 90. La figura 103 muestra el resultado del remallado interactivo por curvatura a_0 correspondiente a la primera aplicación del proceso de remallado sobre el mallada de entrada “Tuberial”.

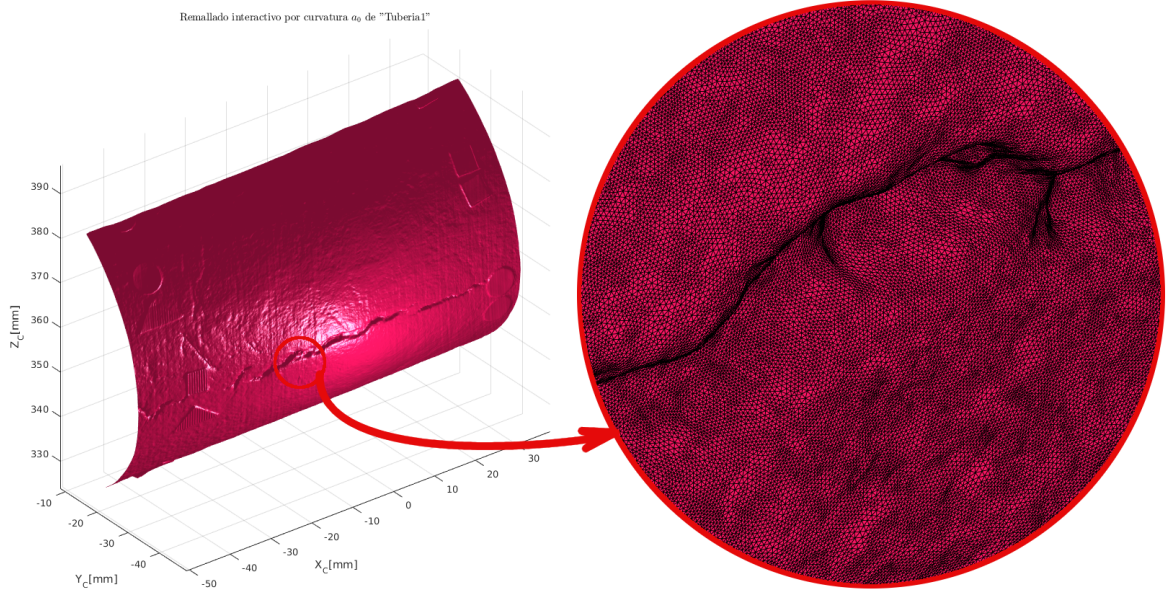


Figura 103: Remallado interactivo por curvatura a_0 , con $\varepsilon = 0.001$, número de iteraciones i igual a 10, vértices $V = 1504423$ y facetas $F = 2995706$.

Es indiscutible el hecho de que el para el remallado a_0 el numero de vértices aumento de 533189 a 1504423 y para las facetas triangulares se produjo un aumento de 1066191 a 2995706 facetas. La idea principal de este aumento en los elementos del mallado de Delaunay es obtener el mayor grado de isotropía en el primer remallado, puesto que el mallado preliminar de entrada es anisotrópico. Además, al tener un mayor número de elementos en los que aplicar los operadores locales de remallado, asegura que el campo de dimensionamiento $L(v_i)$ del remallado a_0 sea lo mas parecido posible al del mallado preliminar y por lo tanto, las modificaciones siguientes del remallado introduzcan un menor error. A medida que se aplican los demás remallados, el número inicial de elementos del mallado de entrada disminuye. La figura 104 expone el resultado del remallado interactivo de reducción a_1 .

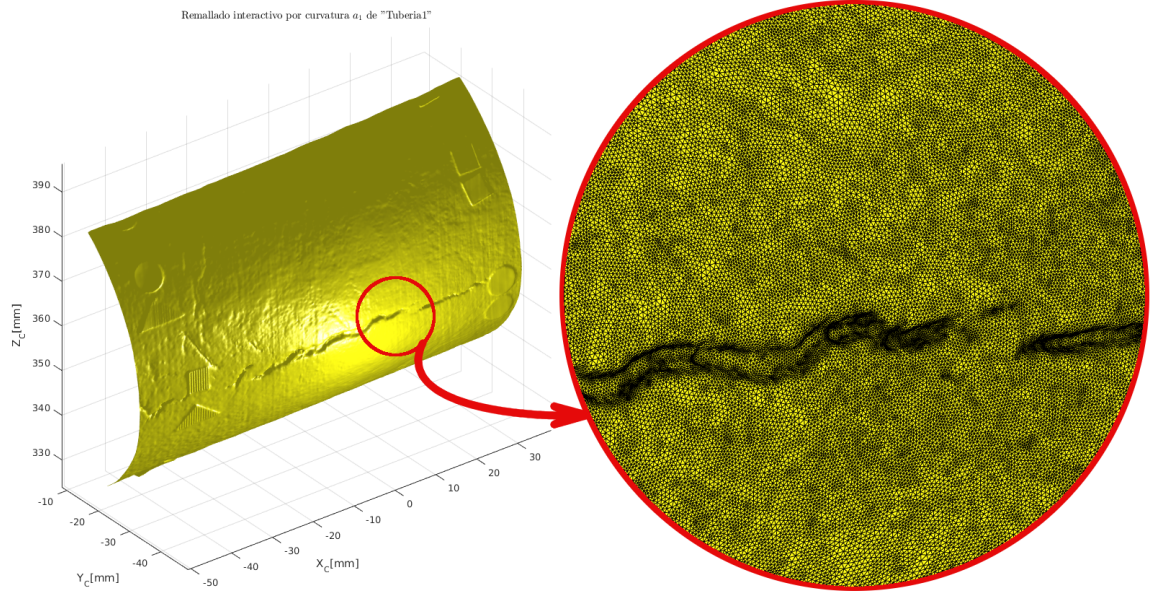


Figura 104: Remallado interactivo por curvatura a_1 , con $\varepsilon = 0.01$, iteraciones $i = 10$, vértices $V = 146716$ y facetas $F = 288663$.

Para el remallado a_1 como tuvo como datos de entrada el remallado a_0 , el número de vértices se redujo de 1504423 a 146716 y las facetas se redujeron de 2995706 a 288663. En esta parte del procedimiento del remallado incremental interactivo por curvatura, las aplicaciones $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ se denominaron remallados de reducción y evidentemente ejecutan la fase de reducción de vértices y facetas. La figura 105 muestra el resultado del siguiente proceso de remallado operado sobre el mallado a_1 .

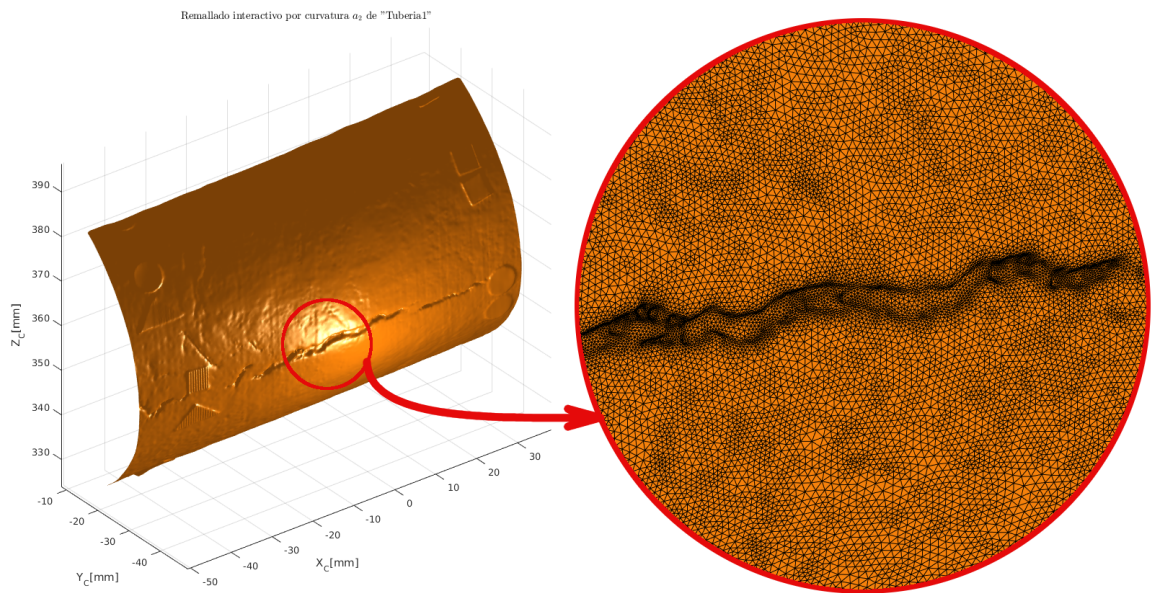


Figura 105: Remallado interactivo por curvatura a_2 , con $\varepsilon = 0.01$, iteraciones $i = 10$, vértices $V = 71918$ y facetas $F = 141539$.

Nuevamente como se esperaba, el número de vértices se redujo a 71918 y 141539 fue el nuevo resultado para las facetas. En la ampliación de la figura 105 se evidencia que a pesar de que se redujeron considerablemente los elementos del malla preliminar “Tuberia1”, se mantuvo un buen grado de detalle en la resolución de la topografía después de aplicar el remallado a_2 . El error introducido por los diferentes remallados que se traduce como pérdida de información de la superficie reconstruida, es ampliado al final de esta sección. La figura 106 presenta el remallado interactivo a_3 que tuvo como malla de entrada el remallado a_2 , redujo a 44174 y 87000 el número de vértices y de facetas respectivamente.

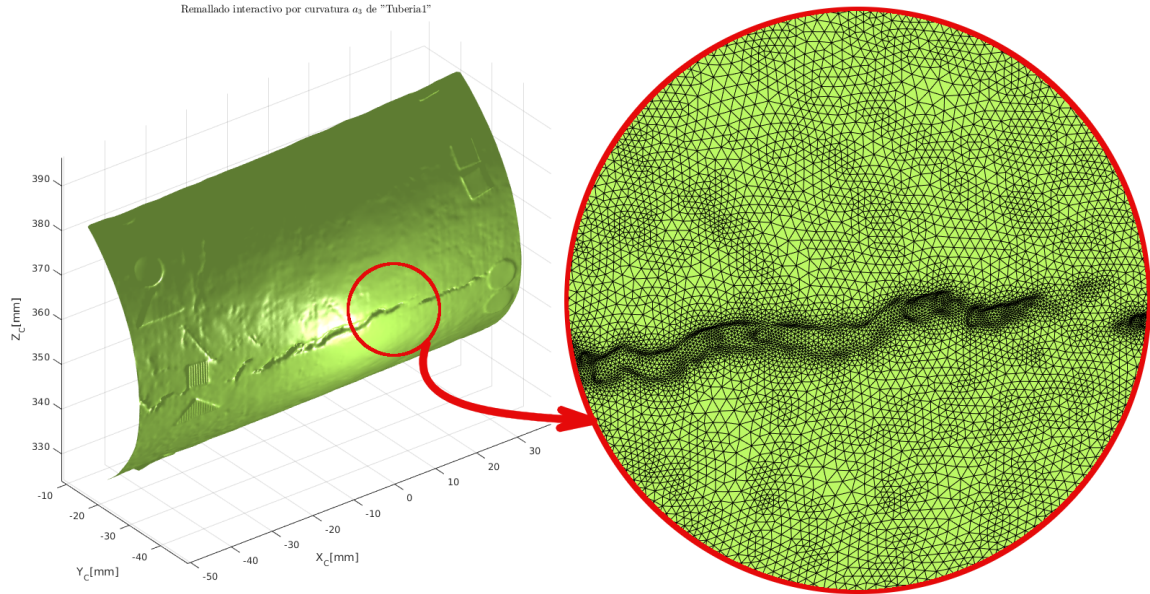


Figura 106: Remallado interactivo por curvatura a_3 , con $\varepsilon = 0.01$, iteraciones $i = 10$, vértices $V = 44174$ y facetas $F = 87000$.

El remallado interactivo por curvatura final para el objeto tridimensional “Tuberia1” se fija en a_4 , que se muestra en la figura 107 y redujo finalmente a 32868 vértices y 64789 facetas triangulares.

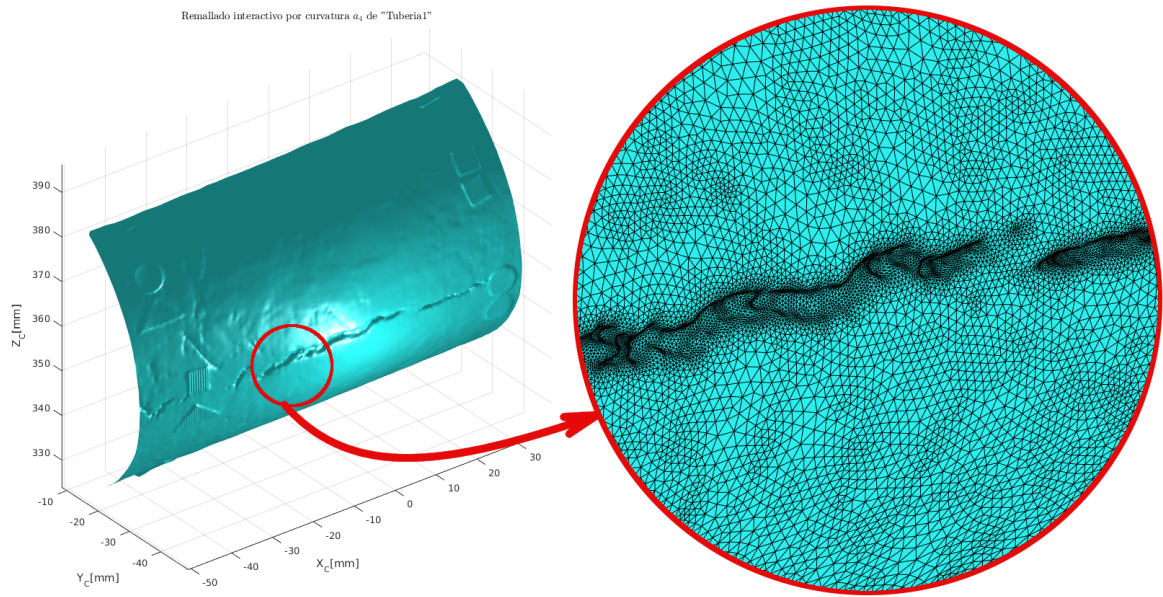


Figura 107: Remallado interactivo por curvatura a_4 , con $\varepsilon = 0.01$, iteraciones $i = 10$, vértices $V = 32868$ y facetas $F = 64789$.

La ampliación de la figura 107 evidencia notoriamente que la densidad de puntos dentro de la grieta es alta, conservando gran parte de los detalles en regiones como esta, i.e., zonas con altas curvaturas. La figura 108 muestra el remallado a_4 con el objetivo de observar la comparación entre este y el mallado facetado de la tubería reconstruida, es decir, el modelo tridimensional "Tubería1" de la figura 90.

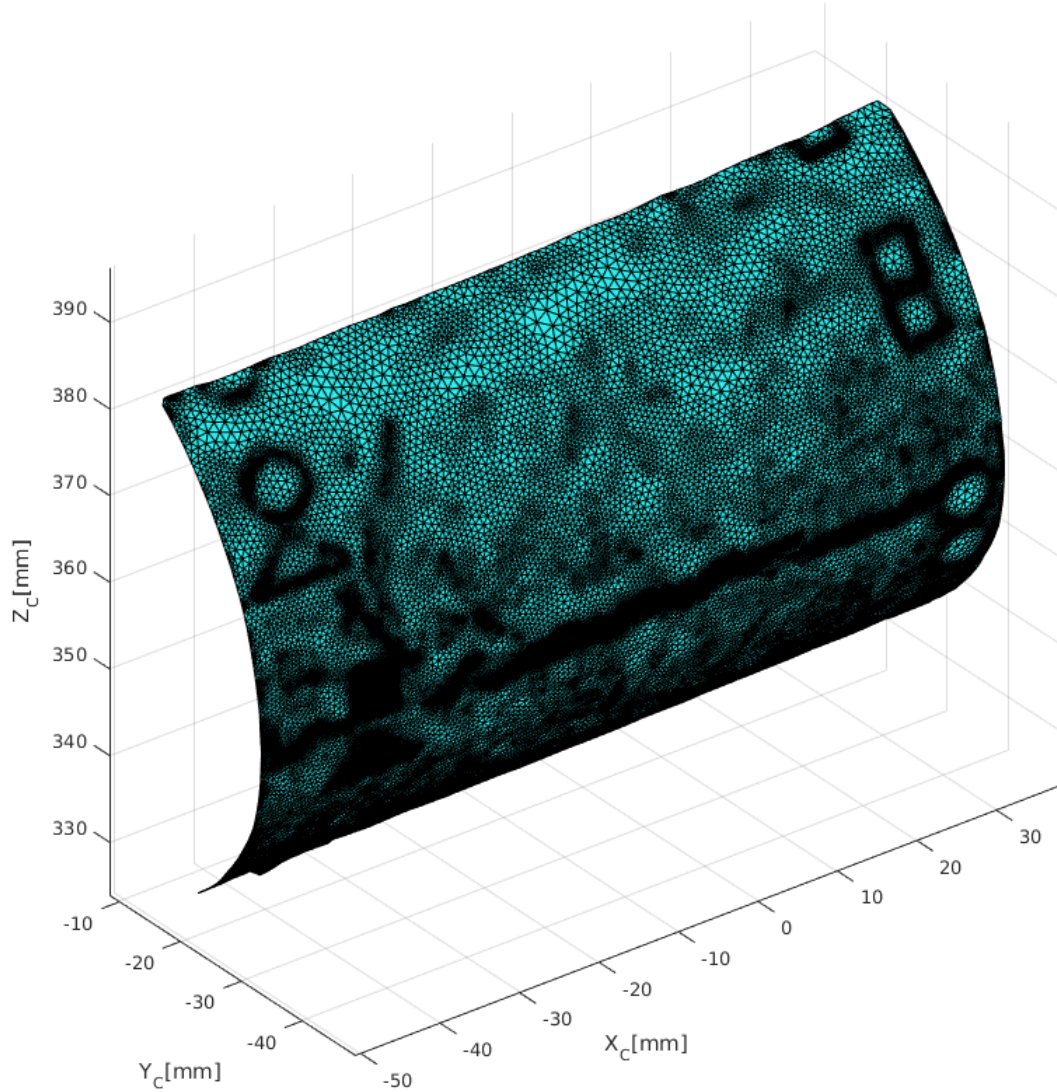


Figura 108: Grafico del remallado a_4 facetado.

En el cuerpo de la tubería se observa un aumento del área de las facetas triangulares, que se ve como la eliminación de vértices y bordes mediante el proceso de remallado. En la grieta por el contrario se muestra una densidad alta de facetas, lo que indica que la información reducida en región fue mucho menor. A manera de comprobación visual, se obtuvo la superposición del campo de dimensionamiento $L(v_i)$ de la figura 101 y la nube de vértices correspondiente al remallado interactivo por curvatura a_4 . Esta superposición de objetos tridimensionales se muestra en la figura 109.

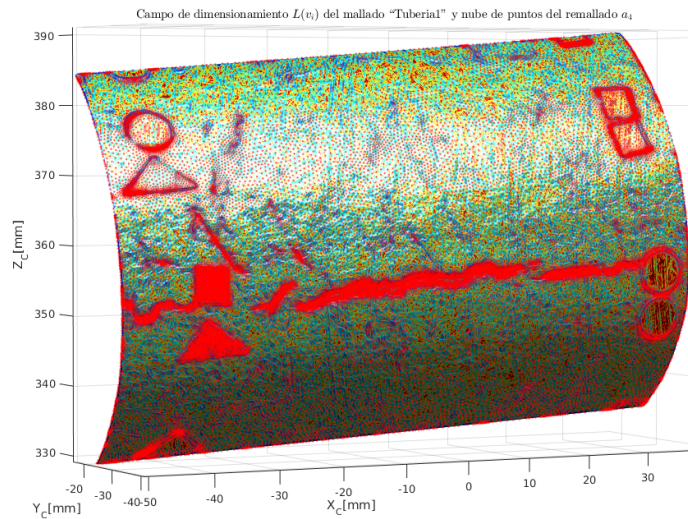


Figura 109: Superposición de la nube de vértices correspondiente al remallado a_4 (puntos color rojo) y el campo de dimensionamiento $L(v_i)$ del mallado preliminar “Tuberia1” (paleta de colores).

Para lograr una mejor visualización se efectuó una ampliación de la figura 109 en la región de la grieta y se muestra en la figura 110.

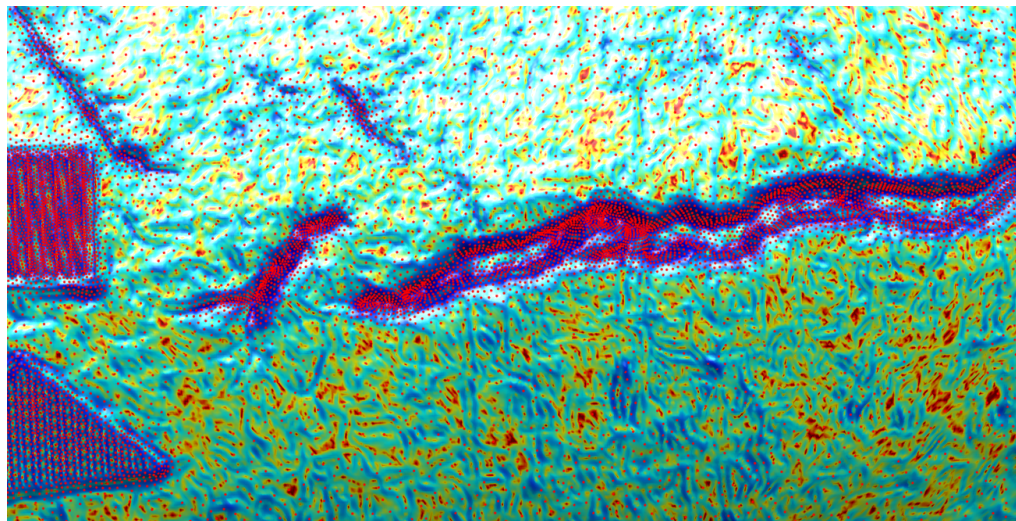


Figura 110: Ampliación de la superposición de la nube de vértices correspondiente al remallado a_4 (puntos color rojo) y el campo de dimensionamiento $L(v_i)$ del mallado preliminar “Tuberia1” (paleta de colores).

Como se esperaba, el producto del proceso de remallado efectivamente basa la selección de puntos en el criterio de curvaturas. La caracterización de curvaturas y los operadores locales de remallado

están interrelacionadas por el campo de dimensionamiento $L(v_i)$. En la figura 110 se aprecia en la zona de la grieta mayor densidad de vértices rojos correspondientes al remallado a_4 , contrastados con el color azul del campo de dimensionamiento, que bajo la escala de colores de $L(v_i)$ tienen asignado la menor longitud de borde para las modificaciones de los elementos del mallado. El hecho de reducir la información superficial trae consigo una propagación de error, que comienza por la inclusión de la tolerancia de error ε , un análisis riguroso de este aspecto generará la opción de escoger un intervalo de valores permitidos para la tolerancia ε según las necesidades del usuario, la técnica de reconstrucción 3D utilizada o la orientación de la reconstrucción tridimensional. En la siguiente sección se presenta una primera aproximación a dicho estudio de la función de error entre las reconstrucciones tridimensionales obtenidas por la R3DPF y los procesos de remallado.

6.5.3. Comparación entre mallados y primera aproximación de error

A continuación, de manera apreciativa se graficó desde una misma vista los diferentes remallados a_i con sus respectivas características para la misma región del objeto; dicha comparación se muestra en la figura 111.

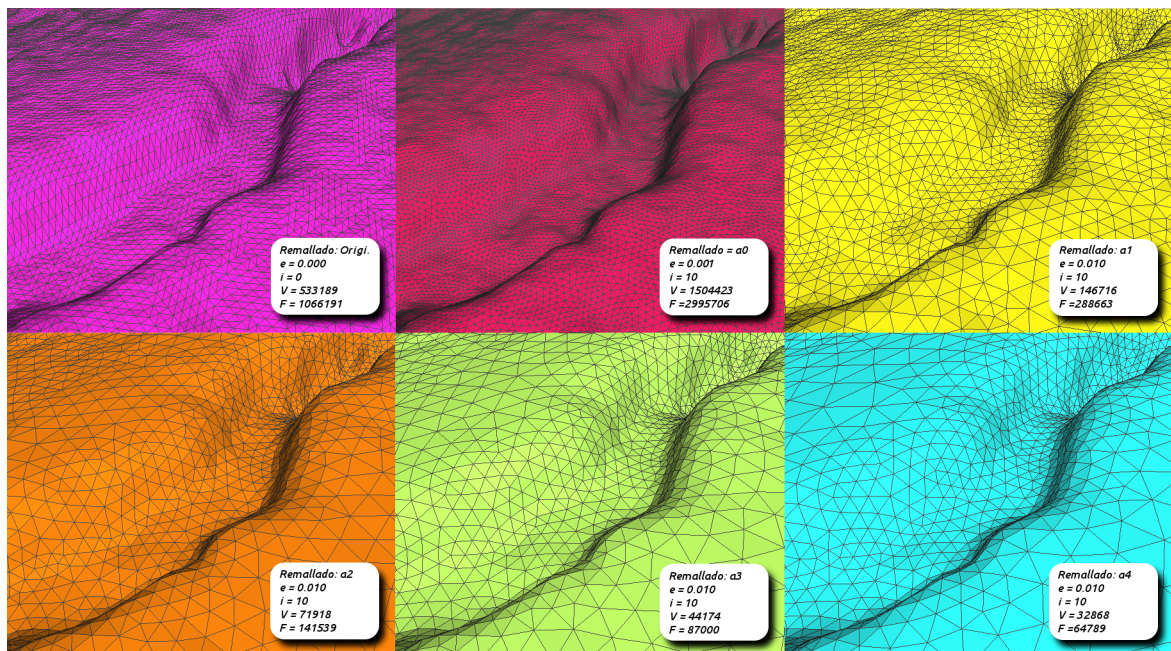


Figura 111: Comparación de una misma región entre el mallado original y los diferentes remallados.

Se esperaba entonces una propagación de error al comparar los remallados obtenidos y el mallado triangular preliminar “Tuberial”. Para generar una imagen mas clara de este error se graficó la superposición del mallado triangular preliminar “Tuberial” y el remallado interactivo por curvatura a_4 , dicho gráfico se presenta en la figura 112.

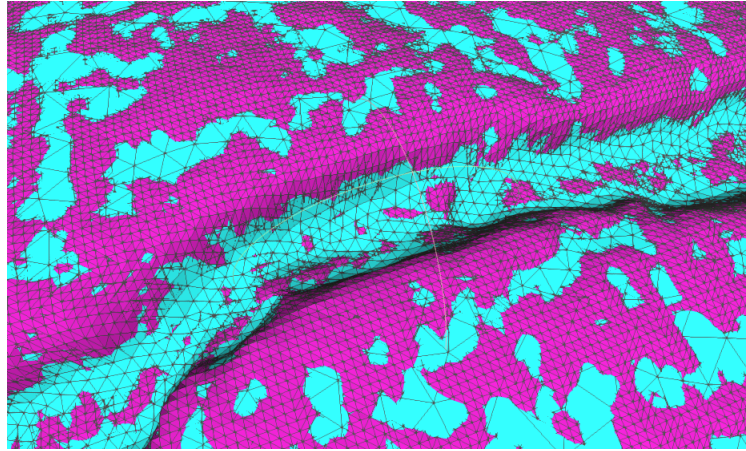


Figura 112: Superposición del mallado preliminar “Tuberial” (color morado) y el remallado interactivo por curvatura a_4 (color azul aguamarina).

La figura 112 muestra claramente el solapamiento que existe entre las superficies mallado preliminar “Tuberial” y el remallado a_4 . Esta diferencia es producida por la inclusión de la tolerancia de error ε en el proceso de remallado. La comparación entre los diferentes remallados condujo la investigación a una estimación aproximada del error introducido por la tolerancia ε y la eliminación de información superficial por cada uno de los remallados. La aproximación de error introducido en el remallado se basó en comparar la posición 3D de los vértices de cada remallado con las facetas del mallado original, ya que esta última posee un error introducido por el procedimiento de reconstrucción tridimensional. La comparación consiste en calcular la faceta del mallado original para cada vértice del remallado a analizar. Con el vector normal a la faceta se calculó la distancia más cercana entre la faceta y el vértice. El valor absoluto mide aproximadamente el error como una distancia Euclideana entre las dos superficies. De esta manera cada vértice del remallado obtenido tiene asociado un valor positivo de error que corresponde a la distancia más cercana a la superficie del mallado original.

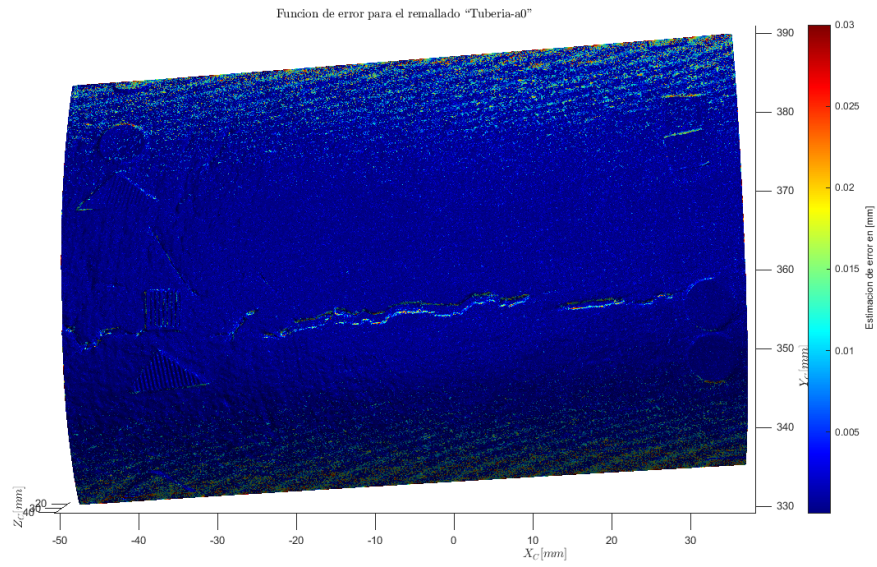


Figura 113: Función de error sobre el remallado a_0 .

La figura 114 es una ampliación de la figura 113 en la región de la grieta.

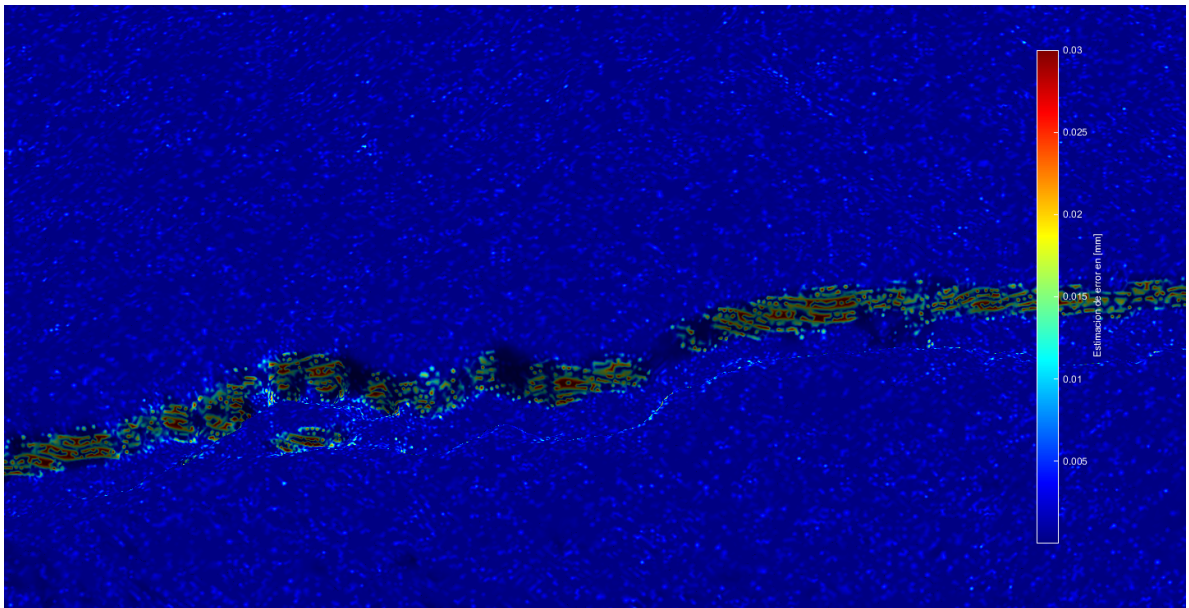


Figura 114: Ampliación de la función de error sobre el remallado a_0 sobre la región agrietada.

Ya que la función del remallado a_0 es aumentar el número de vértices y facetas utilizando un valor de tolerancia ε pequeño, es evidente que el remallado se acercaría lo más posible al mallado triangular preliminar. Esta proposición se comprobó en el gráfico 113, pues en la escala el color azul representa

la mínima distancia Euclideana entre el respectivo punto del remallado analizado y su correspondiente región en el mallado “Tubería1” y como se observa, dicho color es el predominante en la imagen. Esto indica que el operadores de relajación tangencial y proyección a la superficie cumplen efectivamente con su función, pues los vértices del remallado se encuentran a una distancia pequeña de la superficie original, como puede observarse en la función de error que actua en un intervalo de distancia inferior $40[\mu m]$. Consecuentemente, para cada uno de los remallados se repitió el proceso de estimación de error comparando cada remallado a_i con el mallado preliminar “Tubería1”. La figura 115 expone la estimación de error para el remallado interactivo a_1 .

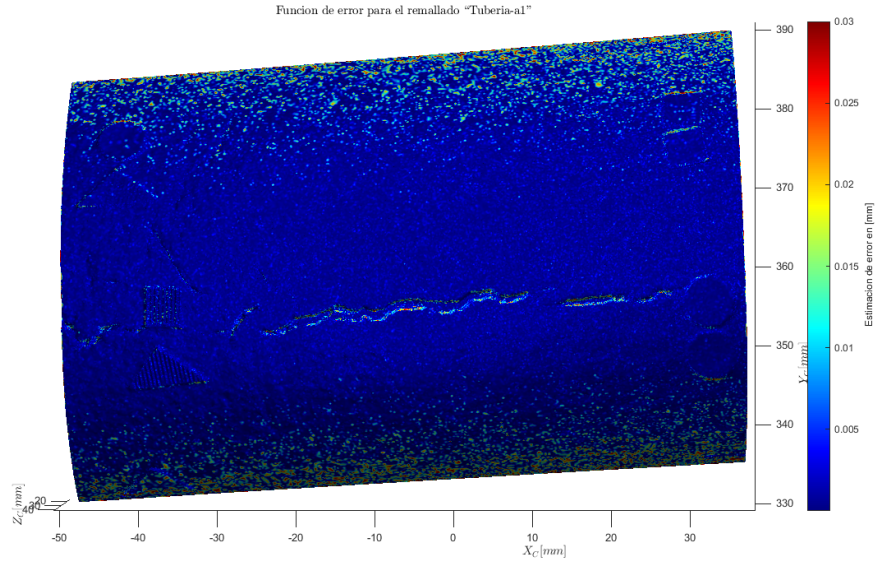


Figura 115: Función de error sobre el remallado a_1 .

A medida que los remallado disminuyen el numero de vértices y facetas, se introduce la propagación de error de la tolerancia ε . Sin embargo es de resaltar que el efecto más predominante de la propagación de error se dió en el cuerpo de la tubería, como se muestra en la figura 115, en comparación a la estimación de error del remallado a_0 . Por el contrario, al analizar la región de la grieta el error tendió a mantenerse constante, señal que indicó que el algoritmo de remallado interactivo por curvatura es eficiente. Este resultado se evidencia en las posterior gráficas de error para los diferentes remallados. La figura 116 presenta la ampliación de la función de error sobre el remallado a_1 .

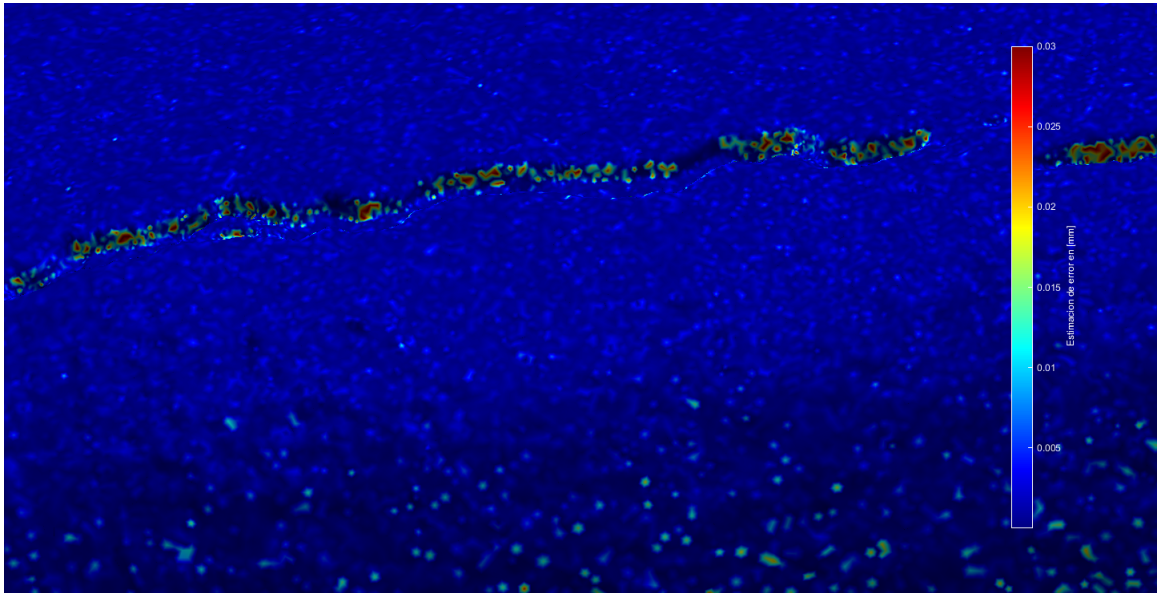


Figura 116: Ampliación de la función de error sobre el remallado a_1 sobre la región agrietada.

Para el remallado a_2 la estimación de error se muestra en la figura 117. Nuevamente se evidencia un aumento de la función de error en el cuerpo de la tubería y un comportamiento constante en de la función de error en la zona de la grieta.

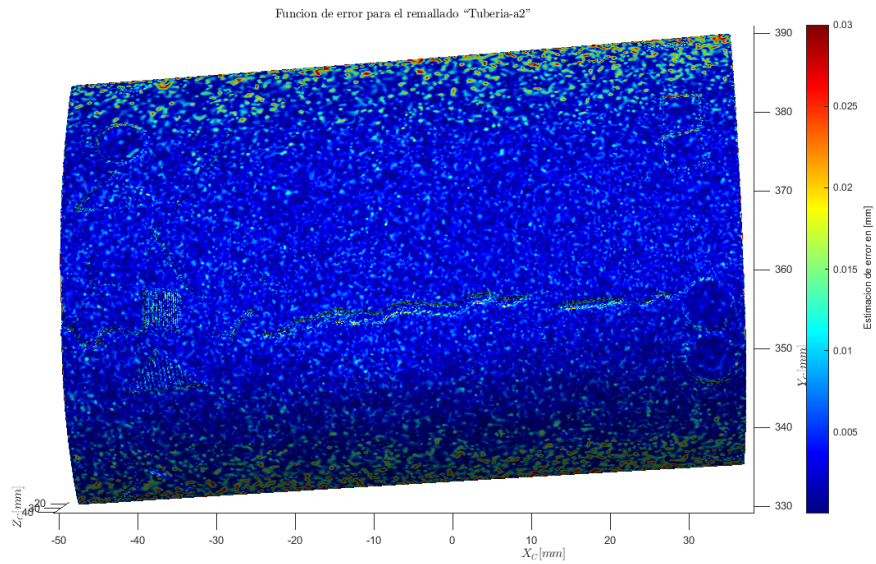


Figura 117: Función de error sobre el remallado a_2 .

Dicho comportamiento constante en la función de error puede observarse en la ampliación de la estimación de error en el remallado a_2 , ver figura 118.

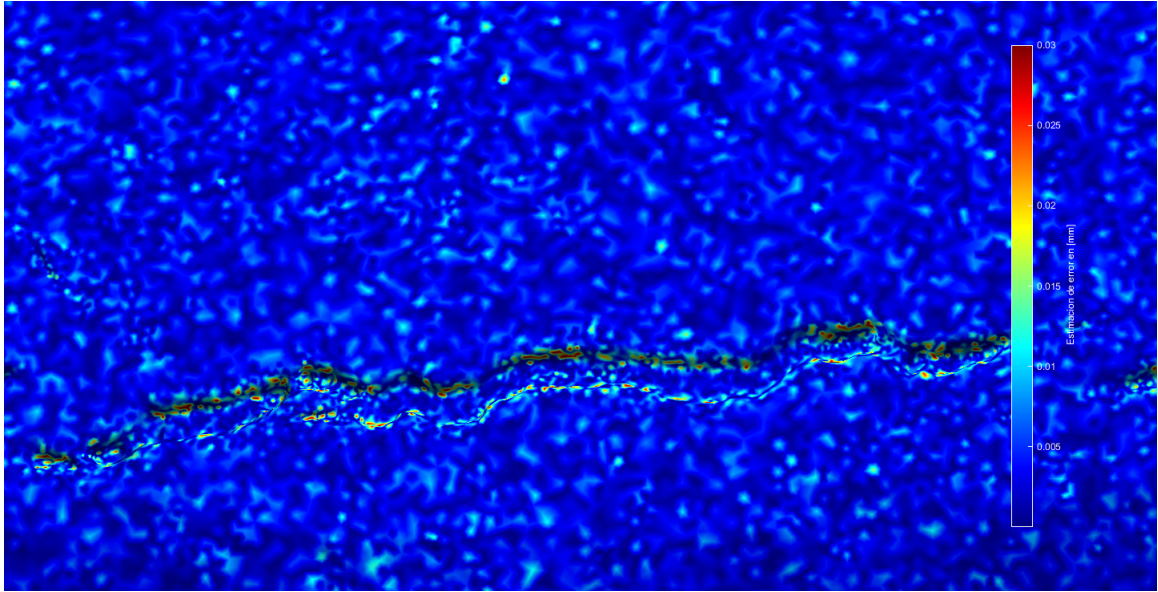


Figura 118: Ampliación de la función de error sobre el remallado a_2 sobre la región agrietada.

Seguido a esto, el algoritmo de la función de error calculó los valores para el remallado a_3 , se obtuvo como resultado la figura 119. Incluso para la cuarta aplicación del proceso de remallado, i.e., el remallado a_3 el aumento considerable en la función de error siguió dándose en el cuerpo de tubería y no en la grieta, como se observa en la figura 120.

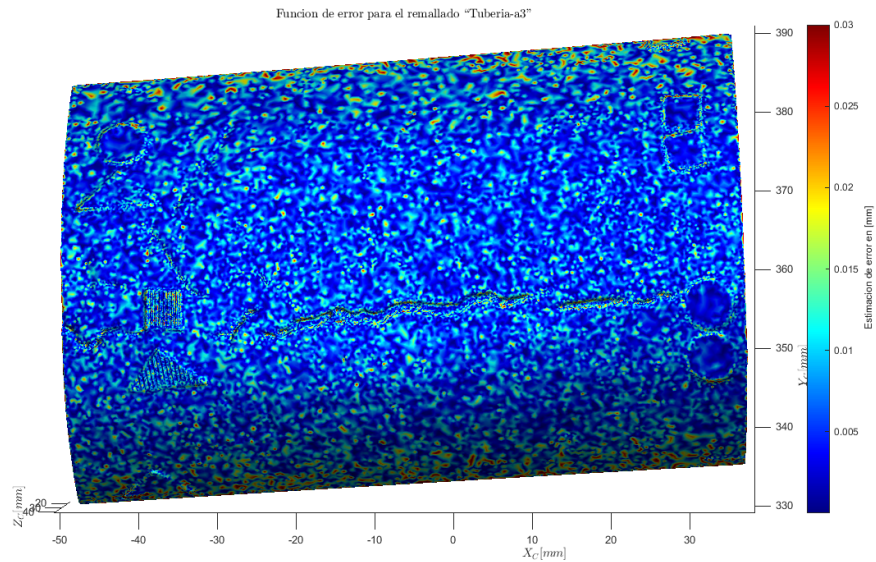


Figura 119: Función de error sobre el remallado a_3 .

Una ampliación de la función de error enfocada en la región agrietada para el remallado a_3 se muestra

en la figura 120.

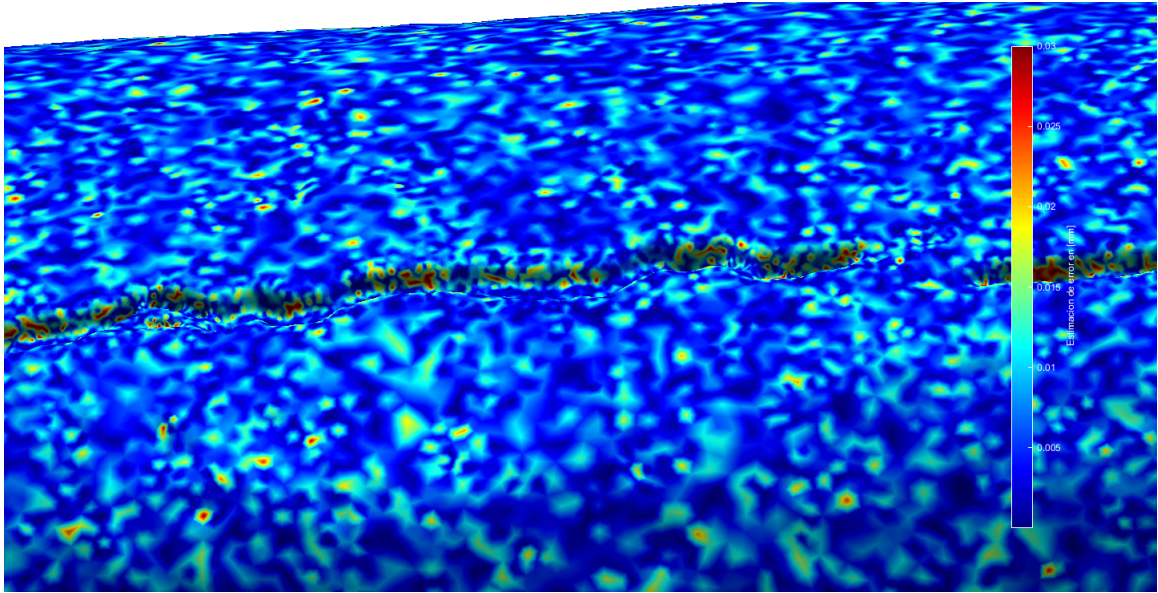


Figura 120: Ampliación de la función de error sobre el remallado a_3 sobre la región agrietada.

Finalmente, se esperaba que el error más alto se obtuviera en el remallado a_4 donde se obtuvo la mayor pérdida de información superficial. Esta premisa fue comprobada por la función de error y mostrada en la figura 121. A pesar de que los resultados de la función de error para el remallado a_4 no son precisamente alto, se encuentran entre valores aceptables para la orientación de la reconstrucción tridimensional sobre una tubería compuesta flexible de refuerzo no metálico que transporta hidrocarburos, pues Arciniegas et al. [4] pretendieron encontrar daños superficiales de entre $50[\mu m]$ y $100[\mu m]$, correspondientes a la precisión de la R3DPF. No obstante por el análisis de las funciones de error de los diferentes remallados se tiende a pensar que el proceso de remallado incremental interactivo por curvatura funciona efectivamente y mantiene un valor aceptable de resolución sobre las regiones agrietadas, incluso permitiendo la propagación del error respectivo a la tolerancia ϵy teniendo en cuenta la gran reducción de datos después del proceso de remallado.

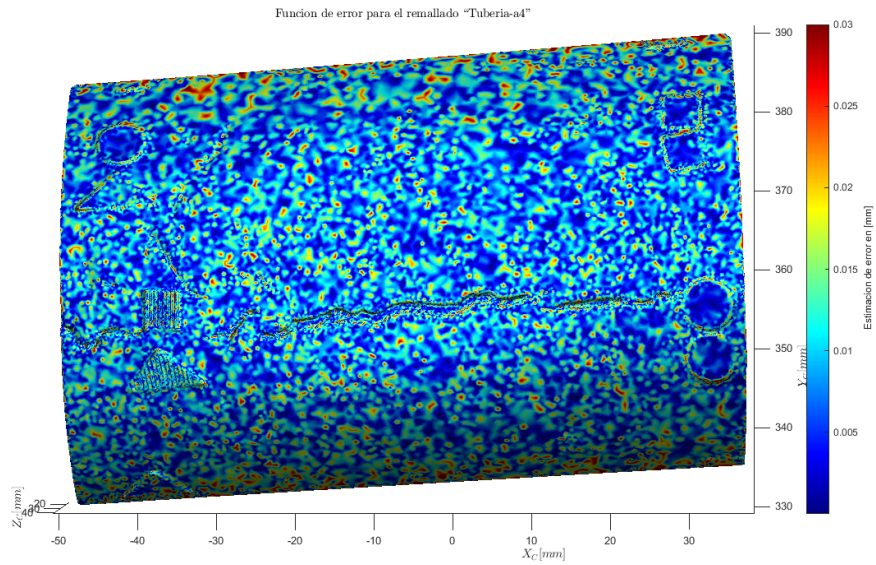


Figura 121: Función de error sobre el remallado a_4 .

Al analizar la función de error sobre la grieta en el remallado a_4 se percibió un aumento en el error. Otra punto favorable para el proceso de estimación de errores sobre el remallado, pues indirectamente al función de error indica la aplicación final del proceso de remallado, es decir, la función de error expresa si es posible realizar la aplicación de más remallados de reducción a_i , e.g., un remallado a_5 , a_6 o incluso a_7 , siempre y cuando el usuario defina la resolución que desea del proceso de remallado. Para el caso de la tubería, se concluyo que bajo esta primera estimación del error del proceso de remallado aplicado a la reconstrucción tridimensional de una tubería de hidrocarburos orientada a la exploración de daños superficiales, la aplicación de remallado a_4 es la ultima permitida en función de la resolución exigida para la reconstrucción.

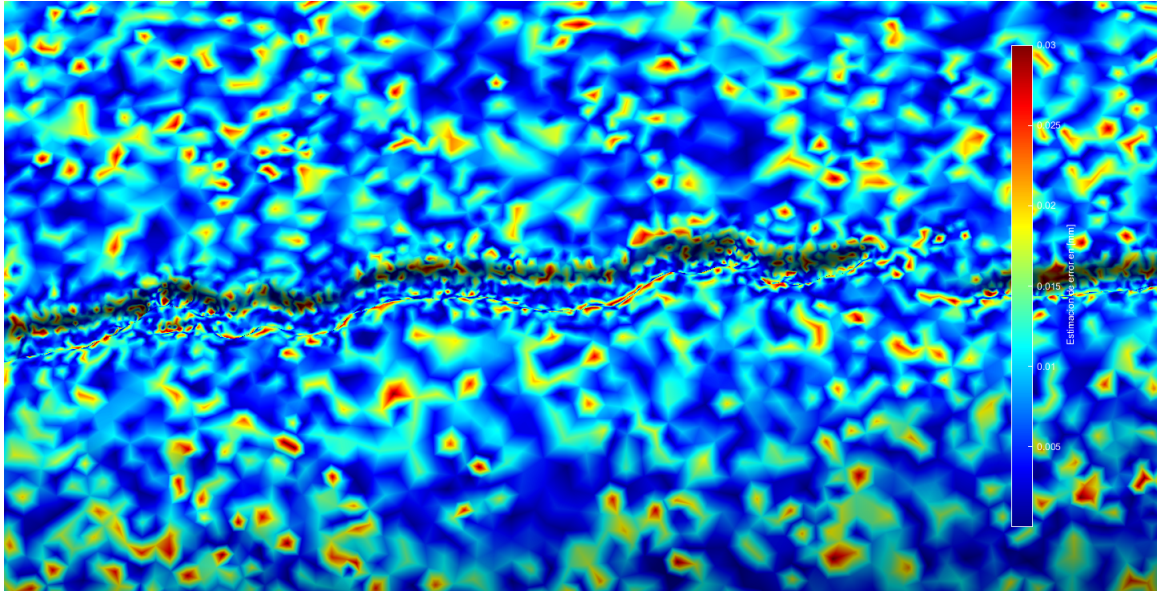


Figura 122: Ampliación de la función de error sobre el remallado a_4 sobre la región agrietada.

En general, las diferentes funciones de error demostraron que para cada uno de los remallados, a pesar de que los operadores locales de remallado modifican los elementos del mallado de entrada, la aplicación de los operadores de relajación tangencial y de proyección a la superficie cumple eficientemente su trabajo y que el desempeño general del algoritmo de remallado incremental interactivo por curvatura es alto. Aunque el método de análisis de errores acá expuesto es una primera aproximación a la estimación del error introducido por los diferentes remallados, un cálculo más eficiente sería sin lugar a dudas obtener perfiles de corte de la reconstrucción y calcular las diferencias entre los volúmenes. La idea central de obtener el error se fundamenta en determinar valores óptimos de la tolerancia ε según las necesidades del usuario, además del análisis metrológico que ya es de por sí analizar la pérdida de información superficial. Sin lugar a dudas un estudio más serio del error introducido por el remallado es una perspectiva a futuro de esta investigación. Igualmente se esperaría aplicar dicha estimación de error a otros tipos de remallado como el mostrado en la siguiente sección, el remallado geodésico.

6.5.4. Remallado geodésico

El concepto de geodésica es una herramienta altamente poderosa, que clasifica los puntos en el mallado y los “ordena” según un campo escalar calculado de un punto fuente sobre el mallado. Al ser la curva de mínima distancia entre dos puntos de la variedad diferencial, en este caso, cualquier reconstrucción tridimensional, trae implícito los conceptos de curvaturas, como se mostró en el capítulo 5. Por consiguiente, tras haber caracterizado la superficie tridimensional “Tubería1” y haber extraído los respectivos valores de geodésica como se mostró en las figuras 97 y 98, se procedió entonces a implementar el algoritmo de remallado geodésico sobre el mallado preliminar “Tubería1”. Como se definió en el capítulo 5, el parámetro de entrada para el proceso de remallado es el delta de geodésica $\Delta\gamma$, que divide el campo geodésico en $m\Delta\gamma$ líneas isogeodésicas. La figura 123 presenta el remallado geodésico

del mallado preliminar “Tubería1” para un $\Delta\gamma$ equivalente a 0.2, donde se produjo una disminución a 150880 vértices y 300710 facetas, en comparación a los 533189 vértices y 1066191 facetas triangulares.

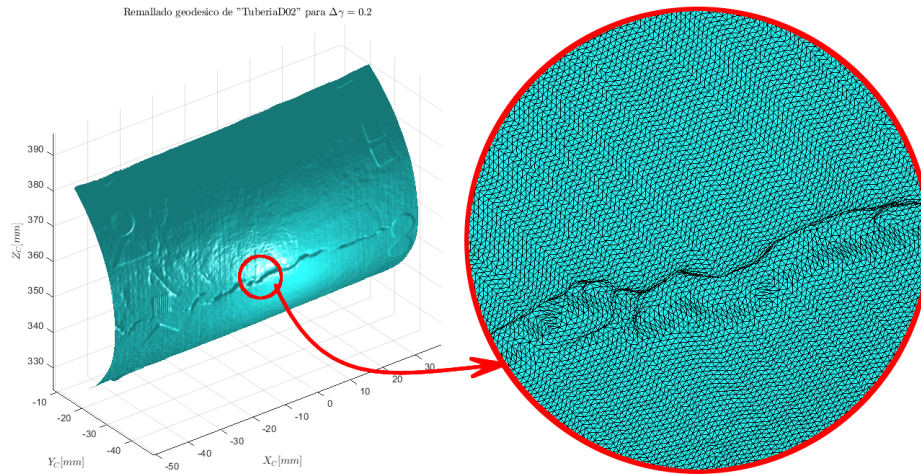


Figura 123: Remallado geodésico para un $\Delta\gamma = 0.2[mm]$.

Como se aprecia en la ampliación del remallado geodésico para $\Delta\gamma$ igual a $0.2[mm]$, la región de la grieta por observación esta bien definida. Entre las características del mallado se observó que el resultado es bastante isotrópico y uniforme, pero con la salvedad de que no se obtiene una interacción notoria con la curvatura de la topografía. La figura 124 muestra el remallado geodésico para $\Delta\gamma = 0.4[mm]$, donde el numero de vértices se redujo a 38114 y de facetas a 75710.

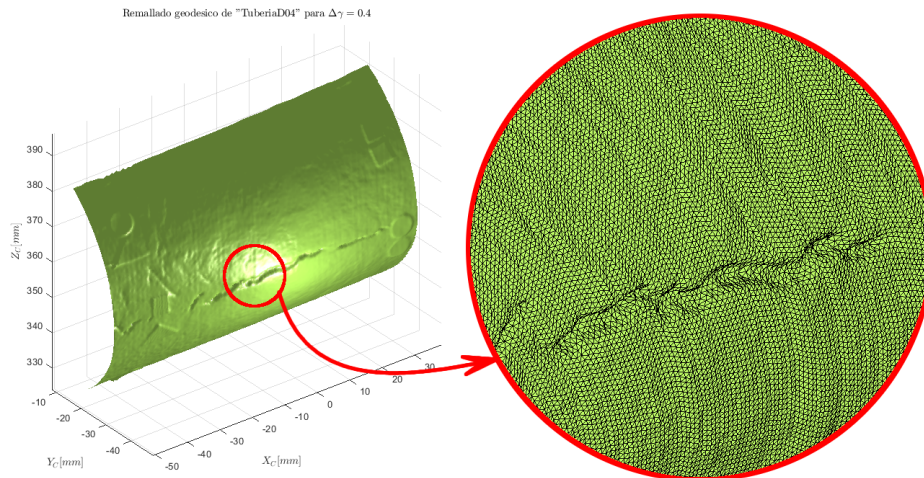


Figura 124: Remallado geodésico para un $\Delta\gamma = 0.4[mm]$.

Por ultimo, para un valor de delta de geodésica $\Delta\gamma$ igual a $0.06[mm]$, se obtuvo el remallado de la figura 125, con una reducción a 16949 vértices y 33535 triángulos.

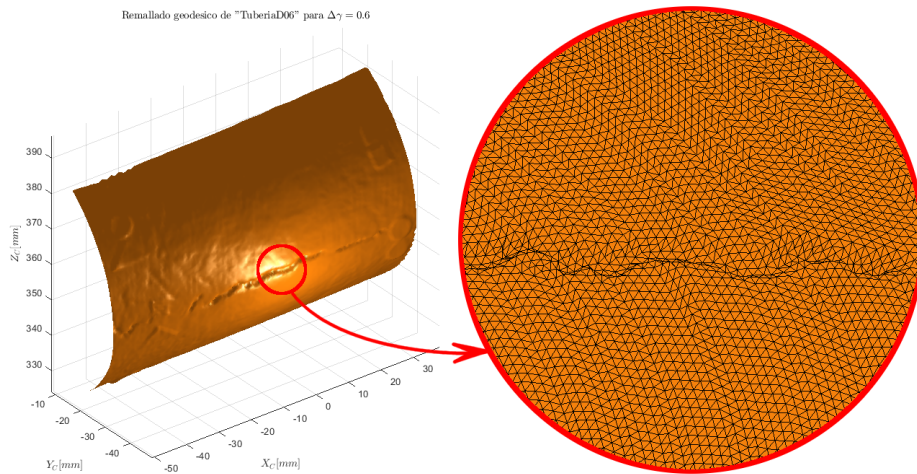


Figura 125: Remallado geodésico para un $\Delta\gamma = 0.6[mm]$.

En conclusión, los resultados de interacción y adaptación del remallado geodésico fueron muy buenos al tener un grado de isotropía bastante alto. No obstante, a pesar de que reduce considerablemente los datos de entrada y que distingue entre las regiones con altas y bajas curvaturas, el remallado geodésico implementado debe ser modificado hacia un campo escalar del parámetro $\Delta\gamma$, con el fin de obtener un campo $\Delta\gamma(v_i)$ que proporcione valores variables en la interpolación efectuada en el algoritmo. Sin embargo, la caracterización por geodésicas es un herramienta poderosa para ser explotada en las futuras investigaciones del GOTS y llegar así a un refinamiento del remallado geodésico. Como se aprecia en esta sección y las anteriores, el desarrollo de la estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas se efectuó sobre una región de la tubería compuesta flexible, sin embargo, la reconstrucción realizada fue a 360° por solicitud del usuario, por lo tanto se obtuvo múltiples digitalizaciones de la tubería. La siguiente fase se designa registro de información tridimensional y se encarga de agrupar y consolidar un único objeto tridimensional.

6.5.5. Registro de información tridimensional

En gran numero de técnicas de reconstrucción tridimensional el escaneo del objeto se realiza segmentado, es decir, se obtienen múltiples reconstrucciones tridimensionales de diferentes zonas del objeto y posteriormente se consolida un único objeto 3D en un sistema coordenado. El GOTS realiza el mismo procedimiento, ya se con una reconstrucción tridimensional a 360° como las realizadas por Contreras et al. en [43] o por González et al. en [21] con múltiples unidades de proyección-adquisición o simplemente posicionando el objeto en diferentes vistas para una única unidad de proyección-adquisición. Cual sea el método, el resultado de reconstrucciones tridimensionales a 360° es el mismo, múltiples digitalizaciones independientes. Esta fase de la etapa de optimización se conoce como registro de información tridimensional y el objetivo es unificar todas las digitalizaciones en único objeto 3D. Para el caso de la tubería compuesta flexible de refuerzo no metálico Contreras et al. en [43] diseñó una estrategia usando patrones geométricos colocados sobre el objeto a reconstruir, como los mostrados sobre la tubería en la figura 77.(b). La idea central fue calcular los centroides de estos patrones geométricos y posteriormente computando las matrices de rotación y los vectores de traslación entre estos, se hacían coincidir los centroides y se obtenía una aproximación inicial del objeto 3D. Al retomar en esta investigación la

reconstrucción tridimensional de la tubería, fue necesario una etapa de registro de información tridimensional que unifico las reconstrucciones obtenidas implementando el procedimiento ya obtenido por Contreras et al., con la salvedad de que al contar con las digitalizaciones tridimensionales como superficies, los algoritmos de ICP están ampliamente implementados. El software especializado en modelos tridimensionales Meshlab incorpora una herramienta de alineación basada en el algoritmo ICP, por lo que se utilizó dicha herramienta para desarrollar el registro de información tridimensional en esta investigación.

Para la correcta utilización del algoritmo ICP de Meshlab inicialmente se cargan todos los archivos poligonales de la reconstrucción tridimensional. Para el caso de la tubería se obtuvieron después de aplicar todas las etapas de la estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas siete remallados de tipo a_4 para diferentes vistas de la tubería, como se muestra en la figura 126.

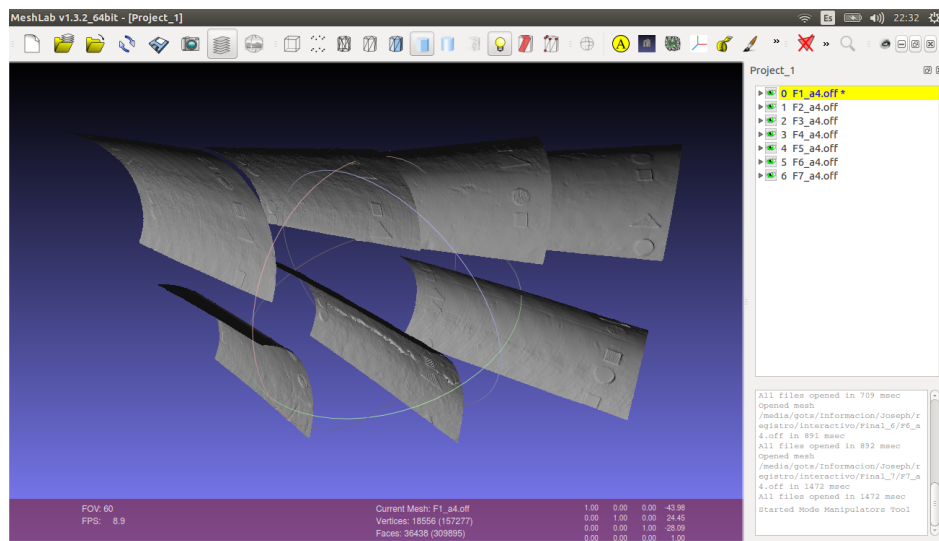


Figura 126: Remallados a_4 para los diferentes puntos de visión obtenidos de la R3DPF.

Al ejecutar la herramienta de alineación de Meshlab, se fija uno de los mallados con la opción “Glue Here Mesh” y posteriormente se selecciona el siguiente mallado, específicamente el mallado vecino en la reconstrucción. Se identifican en ambos mallados los patrones geométricos y usando la herramienta “Point Based Glueing” se definen las aristas y centros de los patrones geométricos, secuencialmente en ambos mallados, i.e., se selecciona un punto de control en el remallado uno sobre una arista o centro de los patrones geométricos y seguido a esto se selecciona el mismo punto de control pero en el remallado dos. El proceso es mostrado en la figura 127.

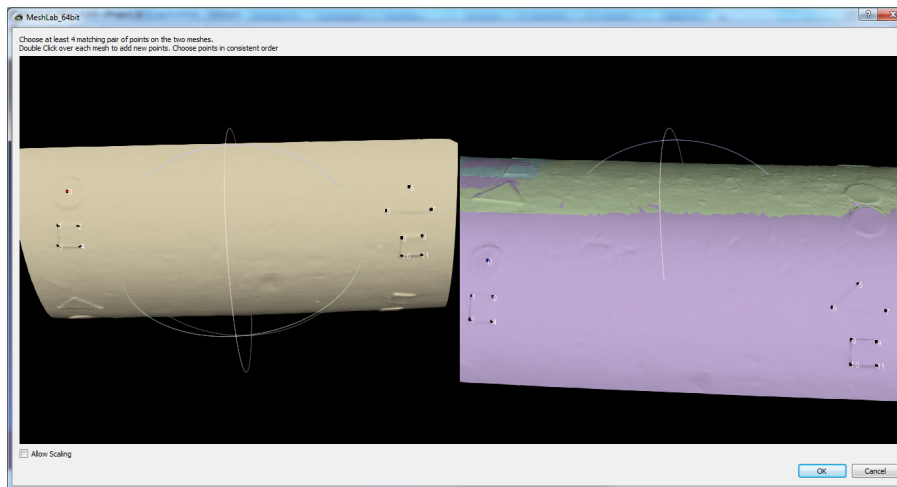


Figura 127: Selección de los puntos de control para el algoritmo ICP utilizando los patrones geométricos propuestos en el GOTS.

En la figura 128 se muestra el menú de la herramienta de alineación de mallados de Meshlab y las diferentes funciones mencionadas anteriormente. El procedimiento se repitió para cada uno de los siete mallados, obteniendo como resultado la figura 129.

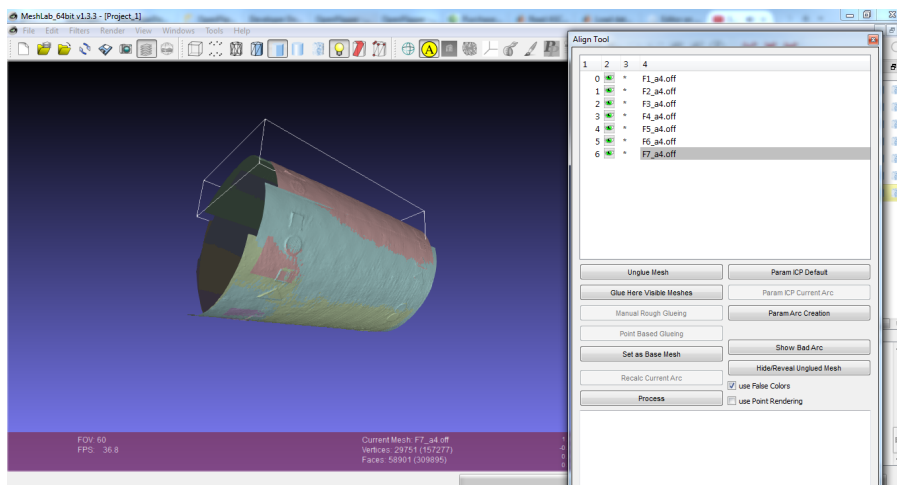


Figura 128: Remallados ya alineados con la herramienta “Align” ofrecida por Meshlab.

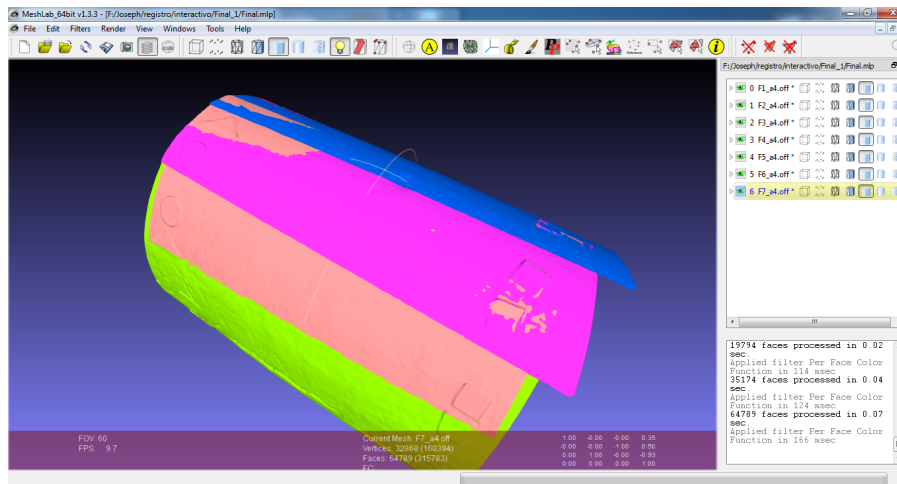


Figura 129: Resultado del proceso de registro de información tridimensional mediante el algoritmo ICP de Meshlab.

Después de realizar el registro de información tridimensional de la tubería, se procedió a optimizar la reconstrucción tridimensional eliminando las regiones de superficie repetidas y solapadas. La figura 130 es un claro ejemplo de este solapamiento entre mallados, que produce un aumento de vértices y facetas innecesario en el modelo tridimensional final.

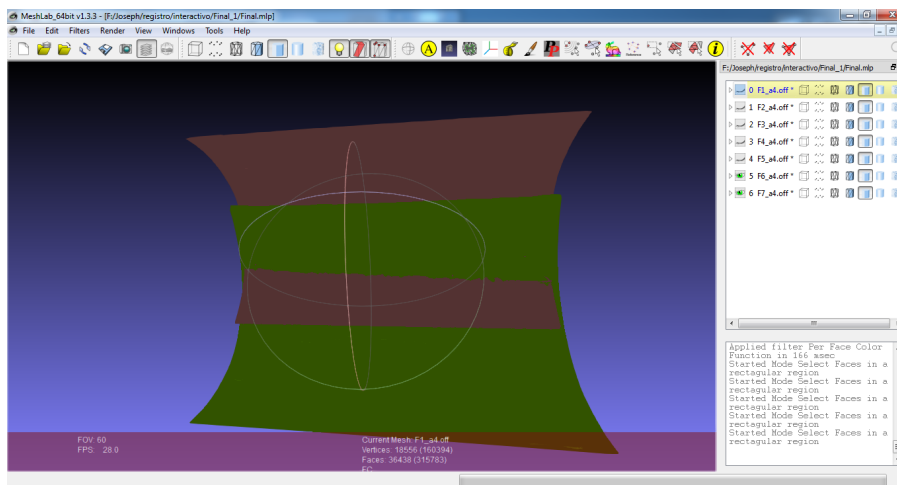


Figura 130: Solapamiento entre remallados después del registro de información tridimensional.

Con la herramienta de Meshlab de selección de facetas y vértices, se procedió a eliminar este tipo de regiones, como se muestra en la figura 131.

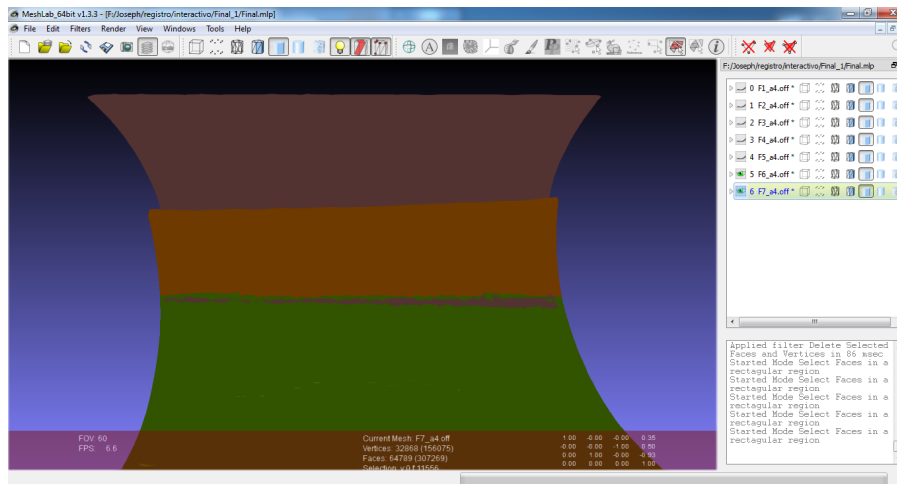


Figura 131: Eliminación de facetas y vértices sobre un remallado solapado.

El resultado de esta optimización se muestra en la figura 132, donde se aprecia que el solapamiento de los dos mallas es menor.

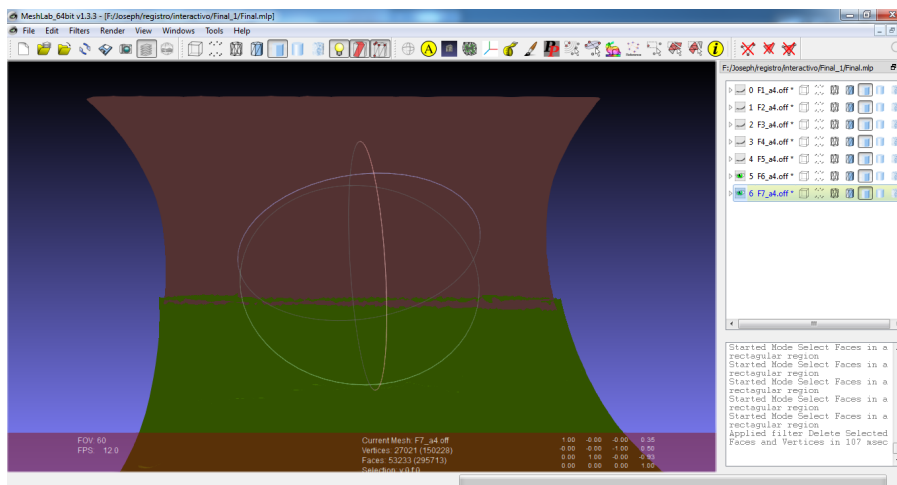


Figura 132: Resultado final de la eliminación de vértices y facetas en el solapamiento de remallados.

Cabe aclarar que aun persisten vértices y facetas repetidas, por lo que el procedimiento ideal sería la eliminación de estas y remallar la unión de los mallas. Este proceso conocido en el área del modelamiento tridimensional como “cierra de cremallera” o Zippering por su anglicismo fue desarrollado por Turk et al. en [53] y se implementará en esta estrategia unificada de reconstrucción por R3DPF a futuro, mientras que por el momento es una perspectiva de esta investigación. Finalmente, se repitió el mismo procedimiento para todas las intersecciones entre mallas y se obtuvo un modelo 3D optimizado como lo muestra la figura 133.

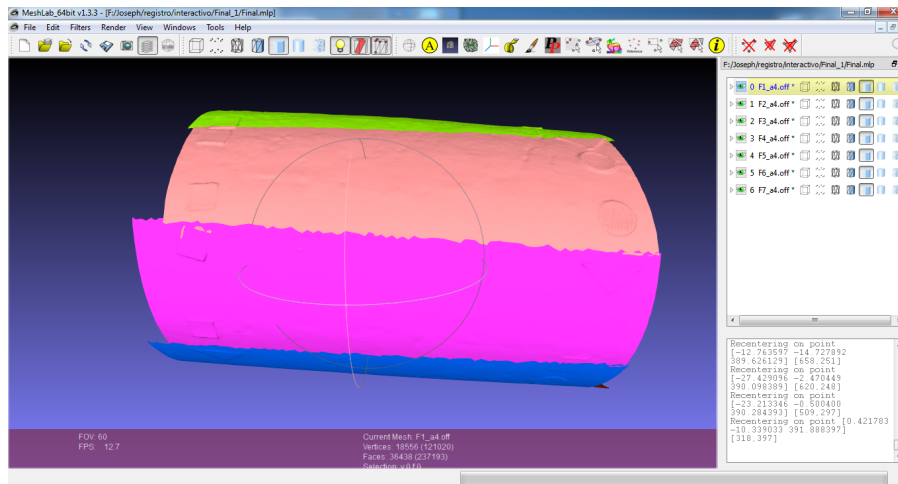


Figura 133: Remallados optimizados después del registro de información tridimensional.

Finalmente se utiliza la opción “Flatten Visible Layers” para mezclar las diferentes vértices y facetas de cada uno de los mallados, en un único arreglo de vértices y facetas para exportar los datos en su correspondiente archivo poligonal. Al finalizar este procedimiento, se graficó nuevamente en MATLAB el modelo obtenido, siendo este la reconstrucción tridimensional final por proyección de franjas de una tubería compuesta flexible de refuerzo no metálico. El resultado es mostrado en la figura 134.

Reconstrucción 3D de "TuberiaFinal"

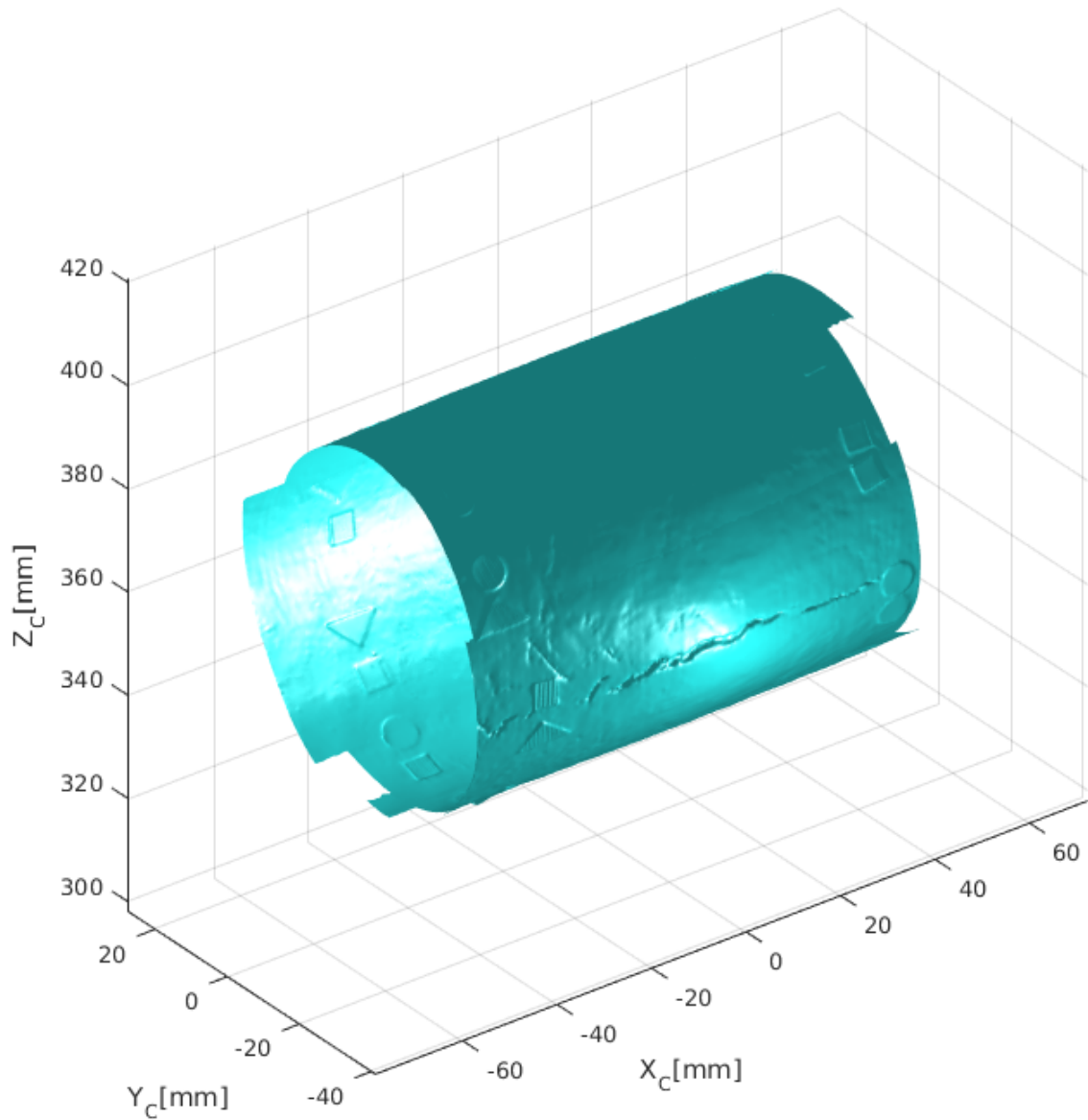


Figura 134: Reconstrucción tridimensional final de "TuberiaFinal".

La figura 135 muestra una ampliación del objeto tridimensional "TuberiaFinal" en el área de la grieta, donde se verificó que el remallado mantiene mayor densidad de puntos en las regiones con altas curvaturas. El objeto tridimensional "TuberiaFinal" posee 121020 vértices y 237193 facetas triangulares.

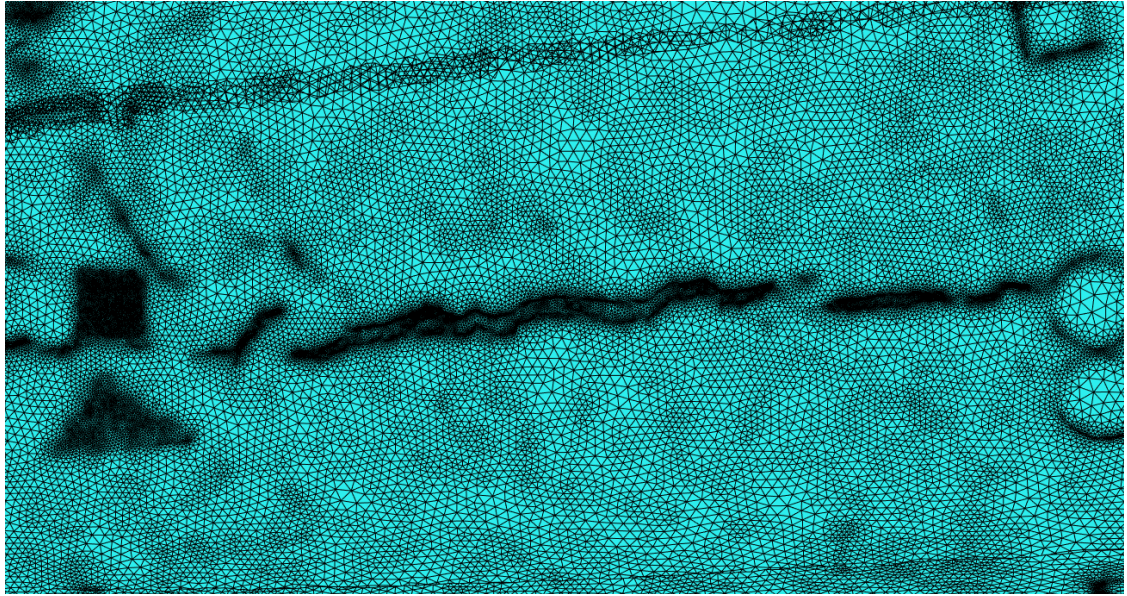


Figura 135: Ampliación del mallado facetado sobre el objeto 3D “TuberíaFinal”.

Para facilitar la visualización de objeto 3D se graficó la tubería 3D desde diferentes ángulos de visión y el resultado se expone en la figura [136](#).

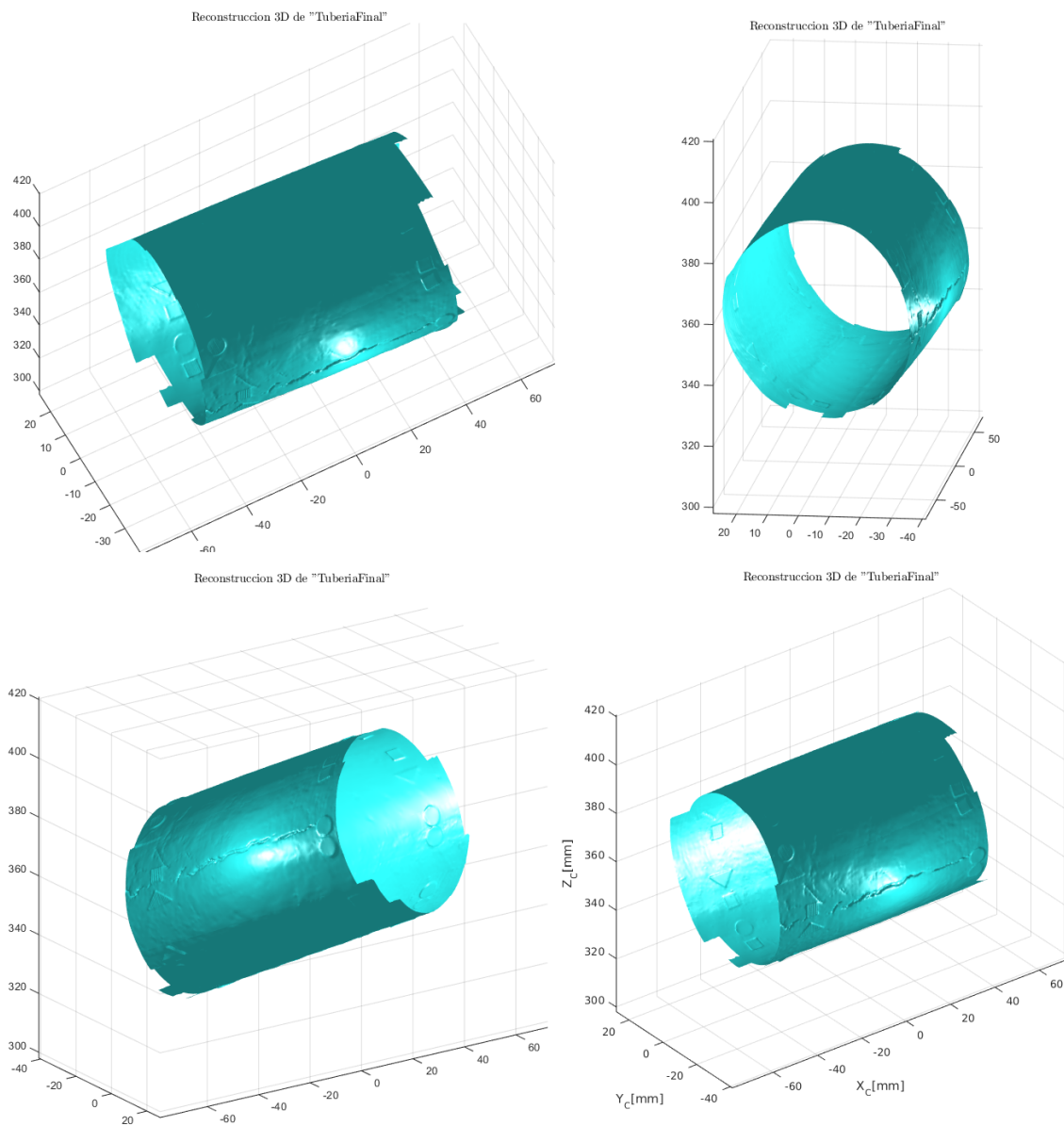


Figura 136: Diferentes vistas del objeto tridimensional "TuberiaFinal".

Finalmente, sumando la cantidad de puntos total obtenidos por la R3DPF para las múltiples reconstrucciones tridimensionales de la tubería que es de 3691581 puntos y comparándolo con el resultado final de la estrategia de reconstrucción tridimensional unificada por proyección de franjas con un remallado incremental interactivo por curvatura, se obtuvo una diferencia de 3570561 vértices eliminados.

CAPÍTULO 7

Conclusiones y perspectivas

El objetivo central del presente trabajo consistió de determinar los procedimientos necesarios para convertir una nube de datos 3D, obtenida del método de proyección de franjas, en una superficie 3D, que visiblemente permita explorar detalles superficiales, analizar su estructura con fines metrológicos y permita optimizar su almacenamiento y manipulación digital. Con el fin de cumplir con este objetivo y después de una revisión bibliográfica exhaustiva, se encontró como mejor opción revisar el concepto de Triangulación de Delaunay e implementar su algoritmo. La triangulación de Delaunay permite agrupar puntos vecinos de la nube 3D para formar facetas triangulares, basados en el criterio de no-inclusión de otros puntos dentro del círculo que circunscribe los tres puntos de la faceta. Algoritmos gráficos de MATLAB generan imágenes 3D o “render” a partir de facetas triangulares con adición de iluminación virtual. Los resultados obtenidos muestran que el mallado por triangulación de Delaunay genera imágenes 3D que permite visualizar detalles superficiales pero son de gran tamaño para su manipulación computacional. Una primera adaptación realizada al mallado original consistió en obtener una distribución isotrópica y uniforme de facetas. Esta regularización fue generada aplicando cinco operadores a partir de una distancia L de borde definida por el usuario: Colapso de borde, división de borde, giro de borde, relajación tangencial y proyección a la superficie. Los resultados obtenidos muestran la eficiencia de los algoritmos implementados al uniformizar los triángulos del mallado original de objetos 3D. De igual forma, con el fin de optimizar el número de facetas se introdujo el concepto de campo de dimensionamiento, basado en alterar el valor de L en función de la curvatura local de la superficie: puntos superficiales con curvatura alta requerían valores de L pequeños y puntos con bajas curvaturas requerían altos valores de L . La definición del campo de dimensionamiento incluyó la definición de un error ε que media la distancia entre la superficie a la faceta ajustada. Los resultados obtenidos muestran que valores de ε bajos incrementan el número de facetas, con respecto a la faceta original pero obtienen un mallado más exacto para describir detalles superficiales. Se analizaron diferentes valores de ε y su influencia en el mallado obtenido. Se observa que cada mallado conserva la estructura en forma del objeto y conserva los detalles superficiales. Una función de error fue implementada como una primera aproximación a la comparación de remallados: distancia más pequeña entre un punto del remallado a la superficie que define el mallado original. Los resultados obtenidos de la función de error indican que los rangos de distancias no superan en promedio $40[\mu m]$, aunque hay una tendencia a obtener distancias de error más altas para valores altos de ε , los valores son pequeños indicando que la relajación tangencial y proyección a la superficie funcionan efectivamente.

Otra alternativa empleada para obtener un remallado adaptado consistió en el uso del campo escalar geodésico. Basados en la forma de la superficie y usando el concepto de distancia más cercana en la superficie se obtuvo un escalar de distancias geodésicas para cada punto de la superficie a partir de un punto fuente. Definiendo un delta de distancia geodésica $\Delta\gamma$, se obtenían curvas isogeodésicas a múltiplos de $\Delta\gamma$; a lo largo de cada curva isogeodésica se interpolaban puntos a distancias regulares de $\Delta\gamma$. De esta manera se obtenía un nuevo mallado triangular al interpolar los puntos 3D ubicados a intervalos $\Delta\gamma$. Los resultados obtenidos indican que con este criterio, aunque la geodésica tiene en cuenta de manera implícita la curvatura local, se obtiene un mallado uniforme, perdiéndose información en detalles superficiales para valores altos de $\Delta\gamma$.

Una vez implementados los anteriores conceptos fue necesario revisar en detalle el procedimiento metodológico de reconstrucción 3D por proyección de franjas, con el fin de determinar la posición exacta e influencia de los procedimientos implementados de remallado. De igual forma, fue necesario realizar este análisis con el fin de establecer las variaciones necesarias de los algoritmos implementados para efectivamente realizar remallados a objetos utilizados en las investigaciones tradicionales del GOTS. En análisis realizado puso en evidencia los adelantos y aportes realizados por el GOTS en metrología óptica por proyección de franjas, como también de sus falencias, que se convierten en futuras investigaciones. Los resultados obtenidos indican que los algoritmos fueron adaptados y funcionan correctamente, de acuerdo a lo esperado. De igual forma se obtuvieron planteamientos a problemas encontrados en metrología, como la obtención de la forma global de un objeto para extraer detalles superficiales. Tradicionalmente se utilizaban aproximaciones polinomiales, pero dejaban de funcionar para objetos abruptos. El uso de un remallado uniforme con valores altos de L permite obtener la forma global del objeto, conservando variaciones fuertes de la superficie. Las conclusiones obtenidas en este trabajo permiten plantear nuevas investigaciones, centradas en la necesidad de definir un criterio de error que permita optimizar los parámetros usados en los algoritmos de remallado, generar un nuevo algoritmo de remallado implementado con un campo de dimensionamiento espacialmente variable basado en el campo escalar geodésico y la obtención de un criterio de registro de información 3D basado en el campo geodésico.

Finalmente es importante destacar que con la realización del presente trabajo se pudo obtener un estado actualizado de las capacidades del GOTS en la caracterización metrológica de objetos 3D y escenas. Se destaca que es importante trabajar en la obtención de múltiples herramientas computacionales que individualmente aportan a procedimientos en el desarrollo metodológico de reconstrucción 3D. Por ejemplo, se deben desarrollar diferentes algoritmos para la corrección de la fase discontinua, usando procedimientos de corrección temporales o espaciales de acuerdo al objeto; desarrollar algoritmos de calibración manual del sistema Proyector-Cámara; Agrupar los diversos algoritmos que reducen la influencia de armónicos, etc. Con el desarrollo de la integración de estas múltiples herramientas se podrá incursionar en el campo de la investigación aplicada con el fin de ofrecer servicios de extensión a empresas en el sector ingenieril y médico.

Bibliografia

- [1] Pierre Alliez, David Cohen-Steiner, Olivier Devillers, Bruno Lévy, and Mathieu Desbrun. Anisotropic polygonal remeshing. *ACM Trans. Graph.*, 22(3):485–493, July 2003.
- [2] Pierre Alliez, Mark Meyer, and Mathieu Desbrun. Interactive geometry remeshing. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 21(3):347–354, 2002.
- [3] Pierre Alliez, Giuliana Ucelli, Craig Gotsman, and Marco Attene. Recent advances in remeshing of surfaces. In *Shape analysis and structuring*, pages 53–82. Springer, 2008.
- [4] Javier R Arciniegas, Andrés L González, LA Quintero, Carlos R Contreras, and Jaime E Meneses. Three-dimensional shape measurement system applied to superficial inspection of non-metallic pipes for the hydrocarbons transport. In *SPIE Sensing Technology+ Applications*, pages 91100U–91100U. International Society for Optics and Photonics, 2014.
- [5] George B Arfken and Hans J Weber. *Mathematical Methods For Physicists International Student Edition*. Academic press, 2005.
- [6] Marco Attene, Marcel Campen, and Leif Kobbelt. Polygon mesh repairing: An application perspective. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 45(2):15, 2013.
- [7] Andy Beane. *3D animation essentials*. John Wiley & Sons, 2012.
- [8] Mark Berg, Marc Kreveld, Mark Overmars, and Otfried Cheong Schwarzkopf. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, chapter Computational Geometry, pages 1–17. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [9] Mario Botsch and Leif Kobbelt. A remeshing approach to multiresolution modeling. In *Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, pages 185–192. ACM, 2004.
- [10] Mario Botsch, Leif Kobbelt, Mark Pauly, Pierre Alliez, and Bruno Lévy. *Polygon mesh processing*. CRC press, 2010.
- [11] Long Chen and Michael Holst. Efficient mesh optimization schemes based on optimal delaunay triangulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9):967–984, 2011.
- [12] Lujie Chen, Chenggen Quan, Cho Jui Tay, and Yuanhao Huang. Fringe contrast-based 3d profilometry using fringe projection. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 116(3):123–128, 2005.
- [13] Wenjing Chen, Xianyu Su, Yipping Cao, Liqun Xiang, and Qican Zhang. Fourier transform profilometry based on a fringe pattern with two frequency components. In *ICO20: Optical Information Processing*, pages 60271I–60271I. International Society for Optics and Photonics, 2006.
- [14] Keenan Crane, Clarisse Weischedel, and Max Wardetzky. Geodesics in heat: A new approach to computing distance based on heat flow. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 32(5):152, 2013.

-
- [15] Keenan M Crane. *Conformal geometry processing*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2013.
- [16] Charles Dapogny, Cécile Dobrzynski, and Pascal Frey. Three-dimensional adaptive domain remeshing, implicit domain meshing, and applications to free and moving boundary problems. *Journal of Computational Physics*, 262:358–378, 2014.
- [17] Mark De Berg, Marc Van Kreveld, Mark Overmars, and Otfried Cheong Schwarzkopf. *Computational geometry*. Springer, 2000.
- [18] Julie Digne and Jean-Michel Morel. Numerical analysis of differential operators on raw point clouds. *Numerische Mathematik*, 127(2):255–289, 2014.
- [19] Marion Duniach, David Vanderhaeghe, Loïc Barthe, and Mario Botsch. Adaptive remeshing for real-time mesh deformation. *Eurographics Short Papers*, pages 29–32, 2013.
- [20] N El-Hayek, H Nouira, N Anwer, M Damak, and O Gibaru. Reconstruction of freeform surfaces for metrology. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 483, page 012003. IOP Publishing, 2014.
- [21] Andres Leonardo González Gómez. Reconstrucción 3d del torso humano a 360° de observación mediante la técnica de proyección de franjas. Tesis de maestria, Universidad Autónoma de Bucaramanga, Mayo 2013.
- [22] Andrés Leonardo González Gómez, Jaime Enrique Meneses Fonseca, Alexánder Ballesteros Díaz, and Jaury León Téllez. Método para la extracción de puntos de control en la calibración de una cámara basado en la estimación de la fase de un patrón de puntos codificado. *Iteckne*, 10(1), 2013.
- [23] Andrés L González, Carlos R Contreras, and Jaime E Meneses. Accurate and flexible calibration technique for fringe projection profilometry by using encoded points and fourier analysis. In *SPIE Sensing Technology+ Applications*, pages 91100X–91100X. International Society for Optics and Photonics, 2014.
- [24] Andrés L. González, Carlos R. Contreras, and Jaime E. Meneses. Accurate and flexible calibration technique for fringe projection profilometry by using encoded points and fourier analysis. volume 9110, pages 91100X–91100X–7, 2014.
- [25] Magnus Rudolph Hestenes and Eduard Stiefel. *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, volume 49. NBS, 1952.
- [26] Anders Heyden. Reconstruction from multiple images by means of using relative depths. *Int. J. Comput. Vis.*, 24(2):155–161, 1997.
- [27] K Hibino, BF Oreb, DI Farrant, and KG Larkin. Phase shifting for nonsinusoidal waveforms with phase-shift errors. *JOSA A*, 12(4):761–768, 1995.
- O
- [28] yvind Hjelle and Morten Dæhlen. *Triangulations and applications*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [29] Jonathan M Huntley and Henrik O Saldner. Error-reduction methods for shape measurement by temporal phase unwrapping. *JOSA A*, 14(12):3188–3196, 1997.
- [30] Nikolaus Karpinsky and Song Zhang. Composite phase-shifting algorithm for three-dimensional shape compression. *Optical Engineering*, 49(6):063604–063604, 2010.
- [31] Ara Kermanian. *Introducing Mudbox*. John Wiley & Sons, 2010.
- [32] Kwang In Kim, James Tompkin, and Christian Theobalt. Curvature-aware regularization on riemannian submanifolds. In *Computer Vision (ICCV), 2013 IEEE International Conference on*, pages 881–888. IEEE, 2013.

-
- [33] Ron Kimmel. *Numerical geometry of images: Theory, algorithms, and applications*. Springer, 2004.
- [34] Rongjie Lai and Hongkai Zhao. Multi-scale non-rigid point cloud registration using robust sliced-wasserstein distance via laplace-beltrami eigenmap. *arXiv preprint arXiv:1406.3758*, 2014.
- [35] John A Lee and Michel Verleysen. *Nonlinear dimensionality reduction*. Springer, 2007.
- [36] Zisheng Li, Guofu Ding, Rong Li, and Shengfeng Qin. A new extracting algorithm of k_i nearest neighbors searching for point clouds. *Pattern Recognition Letters*, 2014.
- [37] Jaime Meneses, Tijani Gharbi, and Philippe Humbert. Phase-unwrapping algorithm for images with high noise content based on a local histogram. *Applied optics*, 44(7):1207–1215, 2005.
- [38] Mark Meyer, Mathieu Desbrun, Peter Schröder, and Alan H Barr. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In *Visualization and mathematics III*, pages 35–57. Springer, 2003.
- [39] Atsuyuki Okabe, Barry Boots, Kokichi Sugihara, and Sung Nok Chiu. *Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*, volume 501. John Wiley & Sons, 2009.
- [40] Stanley Osher and Ronald Fedkiw. Image restoration. In *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, volume 153 of *Applied Mathematical Sciences*, pages 97–118. Springer New York, 2003.
- [41] Giuseppe Patané. Laplacian spectral distances and kernels on 3d shapes. *Pattern Recognition Letters*, 2014.
- [42] Gabriel Peyré and Laurent D. Cohen. Geodesic remeshing using front propagation. *International Journal of Computer Vision*, 69(1):145–156, 2006.
- [43] Carlos Ricardo Contreras Pico. *Análisis tridimensional de objetos a 360° de observación y campo extendido con múltiple configuración proyector-cámara a partir de iluminación estructurada*. Tesis de doctorado, Universidad Industrial de Santander, Junio 2014.
- [44] Luz Amparo Quintero, Javier Arciniegas Villamizar, and Jaime Meneses Fonseca. Análisis de técnicas de inspección no destructiva en tubería flexible con refuerzo no metálico para el transporte de hidrocarburos. *Revista Colombiana de Materiales*, (5):78–85, 2014.
- [45] Hassan Radvar-Esfahlan and Souheil-Antoine Tahan. Robust generalized numerical inspection fixture for the metrology of compliant mechanical parts. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 70(5-8):1101–1112, 2014.
- [46] Paola Rodriguez. Desarrollo de una estrategia para la corrección de fase discontinua de objetos con topografía compleja basada en algoritmos de fase temporal. Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander, Abril 2016.
- [47] Jean-Yves Rubino. Camera calibration toolbox for matlab.
- [48] Szymon Rusinkiewicz and Marc Levoy. Efficient variants of the icp algorithm. In *3-D Digital Imaging and Modeling, 2001. Proceedings. Third International Conference on*, pages 145–152. IEEE, 2001.
- [49] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [50] James A Sethian et al. Level set methods and fast marching methods. *Journal of Computing and Information Technology*, 11(1):1–2, 2003.
- [51] Kenji Suzuki. *Computational Intelligence in Biomedical Imaging*. Springer, 2014.
- [52] Gabriel Taubin. Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation. In *Computer Vision, 1995. Proceedings., Fifth International Conference on*, pages 902–907. IEEE, 1995.

-
- [53] Greg Turk and Marc Levoy. Zippered polygon meshes from range images. In *Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 311–318. ACM, 1994.
- [54] Sathamangalam R Srinivasa Varadhan. On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 20(2):431–455, 1967.
- [55] Andrés L. González y Jaime E. Meneses. Proyección de franjas en metrología óptica facial. *Revista INGE CUC*, 8(1):191–206, 2012.
- [56] Dong-Ming Yan, Jianwei Guo, Xiaohong Jia, Xiaopeng Zhang, and Peter Wonka. Blue-noise remeshing with farthest point optimization. In *Computer Graphics Forum*, volume 33, pages 167–176. Wiley Online Library, 2014.
- [57] Song Zhang and Peisen S Huang. Novel method for structured light system calibration. *Optical Engineering*, 45(8):083601–083601, 2006.
- [58] Song Zhang and Peisen S. Huang. Novel method for structured light system calibration. *Optical Engineering*, 45(8):083601–083601–8, 2006.
- [59] Song Zhang and Peisen S. Huang. Novel method for structured light system calibration. *Optical Engineering*, 45(8):083601–083601–8, 2006.
- [60] Jianhui Zhao, Chengjiang Long, Shuping Xiong, Cheng Liu, and Zhiyong Yuan. A new k nearest neighbours algorithm using cell grids for 3d scattered point cloud. *Electronics and Electrical Engineering*, 20(1):81–87, 2013.
- [61] Denis Zorin, Peter Schröder, and Wim Sweldens. Interactive multiresolution mesh editing. In *Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 259–268. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 1997.