LA TOPOLOGÍA DE GREEN SOBRE UN SEMIGRUPO

YESLI NATALI DELGADO MORALES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2022

LA TOPOLOGÍA DE GREEN SOBRE UN SEMIGRUPO

YESLI NATALI DELGADO MORALES

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemática

Director
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2022

A Daniel, mi compañía favorita,

por su incondicional y paciente apoyo.

A Lottie, Pantera, Kira y Lenin,

por ser parte de mi motivación.

A mi madre y mis hermanos.

Sin ellos y ellas no hubiese sido posible,

gracias.

AGRADECIMIENTOS

La autora expresa sus agradecimientos:

A mi madre Marisol y mis hermanos Shirley y Daniel.

Al Ph.D. Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

A los profesores Luis Ángel, Jerson Reina y María de Pilar Oyuela.

A los doctores Natalia Jaramillo y Milton Salazar.

A mis colegas y grandes amigos Albert y Álvaro.

CONTENIDO

pág.

INTRODUCCIÓN **12**

1. TOPOLOGÍAS DE ALEXANDROFF **14**

1.1. PRELIMINARES 14

1.2. TOPOLOGÍAS ALEXANDROFF Y CUASIORDENES 15

1.3. DIAGRAMAS DE HASSE 21

1.4. FUNCIONES CONTINUAS Y FUNCIONES QUE PRESERVAN EL ORDEN 21

1.5. ESPACIOS FINITOS 25

2. TOPOLOGÍA DE GREEN DE UN SEMIGRUPO **44**

2.1. SEMIGRUPOS 44

2.2. TOPOLOGÍA DE GREEN 48

2.3. SEMIGRUPOS FINITOS 51

2.3.1. De semigrupos a topologías 53

2.3.2. De topologías a semigrupos 61

BIBLIOGRAFÍA **67**

LISTA DE FIGURAS

pág.

Figura 1.	Abiertos mínimales del Ejemplo 1.2.3	15
Figura 2.	Esquema de los abiertos en la recta de Khalimsky 1.2.6	17
Figura 3.	Diagrama de Hasse para la topología de Khalimsky 1.2.6	21
Figura 4.	Diagrama de Hasse para la topología dada en el Ejemplo 1.2.3	21
Figura 5.	Diagrama de Hasse para X	22
Figura 6.	Diagrama de Hasse para Y	22
Figura 7.	Diagrama sagital de f	23
Figura 8.	Abiertos minimales del Ejemplo 1.5.2	27
Figura 9.	Abiertos minimales del Ejemplo 1.5.3	27
Figura 10.	Diagrama de Hasse del Ejemplo 1.5.2	28
Figura 11.	Diagrama de Hasse del Ejemplo 1.5.3	29
Figura 12.	$\mathcal{B}^X$	30
Figura 13.	Diagrama de Hasse $(X, \preceq_{\mathfrak{T}})$.	30
Figura 14.	Diagrama de Hasse $(X, \leq_E)$.	30
Figura 15.	Abiertos minimales del Ejemplo 1.5.11	31
Figura 16.	Abiertos minimales de $Y = X \backslash \{c\}$	32
Figura 17.	Abiertos minimales del Ejemplo 1.5.12	32
Figura 18.	Abiertos minimales de $Y = X \backslash \{h\}$	33
Figura 19.	$\mathcal{B}^{Y_1}$	36
Figura 20.	$\mathcal{B}^{Y_2}$	36
Figura 21.	$\mathcal{B}^{Y_3}$	36
Figura 22.	$\mathcal{B}^{X_1}$	37
Figura 23.	$\mathcal{B}^{X_2}$	37

Figura 24. $\mathcal{B}^{X_3}$ 38
Figura 25. $\mathcal{B}^{X_4}$ 38
Figura 26. $\mathcal{B}^{X_1}$ 38
Figura 27. $\mathcal{B}^{X_2}$ 39
Figura 28. $\mathcal{B}^{X_3}$ 39
Figura 29. $\mathcal{B}^{X_1}$ 40
Figura 30. $\mathcal{B}^{X_2}$ 40
Figura 31. Topologías de 3 puntos que surgen de añadir un punto a una de 2 puntos. 41
Figura 32. $\mathcal{B}^{Y}$ 41
Figura 33. $\mathcal{B}^{X}$ 42
Figura 34. $\mathcal{B}^{Y}$ 42
Figura 35. $\mathcal{B}^{X_1}$ 42
Figura 36. $\mathcal{B}^{X_2}$ 42
Figura 37. $\mathcal{B}^{X_3}$ 42
Figura 38. $\mathcal{B}^{Y}$ 43
Figura 39. $\mathcal{B}^{X_1}$ 43
Figura 40. $\mathcal{B}^{X_2}$ 43
Figura 41. $\mathcal{B}^{X_3}$ 43
Figura 42. Diagrama de Hasse para el Ejemplo 2.1.16 48
Figura 43. $\mathcal{B}^{S}$ 49
Figura 44. $\mathcal{B}^{V}$ 49
Figura 45. $\mathcal{B}^{W}$ 49
Figura 46. $\mathcal{B}^{S}$ 53
Figura 47. Topologías de tres puntos 53
Figura 48. $\mathcal{B}^{S}$ 54
Figura 49. $\mathcal{B}^{S^{\uparrow}}$ 55

Figura 50. $\mathcal{B}^{S}$ 56

Figura 51. $\mathcal{B}^{S\downarrow}$ 56

Figura 52. $\mathcal{B}^{1}$ 58

Figura 53. $\mathcal{B}^{2}$ 58

Figura 54. $\mathcal{B}^{Q_1 \uparrow Q_2}$ 58

Figura 55. $\mathcal{B}^{Q_2 \uparrow Q_1}$ 58

Figura 56. $\mathcal{B}^{1}$ 61

Figura 57. $\mathcal{B}^{2}$ 61

Figura 58. Diagrama sagital de φ 61

Figura 59. $\mathcal{B}^{Q_1 \cup_{\varphi} Q_2}$ 61

Figura 60. $\mathcal{B}^{1}$ 64

Figura 61. $\mathcal{B}^{2}$ 64

Figura 62. $\mathcal{B}^{Q_1 \odot_w Q_2}$ 64

LISTA DE TABLAS

pág.

Tabla 1. Número de topologías para un conjunto de n elementos 64

RESUMEN

TÍTULO: LA TOPOLOGÍA DE GREEN SOBRE UN SEMIGRUPO *

AUTOR: YESLI NATALI DELGADO MORALES **

PALABRAS CLAVE: TOPOLOGÍA DE ALEXANDROFF , SEMIGRUPO, CUASI-ORDEN, TOPOLOGIA DE GREEN.

DESCRIPCIÓN:

A todo conjunto ordenado le corresponde una estructura topológica que resulta ser una topología de Alexandroff. En todo semigrupo se define un cuasi-orden (llamado cuasi-orden izquierdo de Green), y en consecuencia se obtiene una topología de Alexandroff llamada la topología de Green del semigrupo. En esta presentación, mostraremos algunas características de estas topologías sobre conjuntos finitos. Nos basamos en un trabajo de B. Richmond donde se presenta una clasificación de todas las topologías sobre un conjunto de a lo sumo cinco puntos que provienen de una estructura de semigrupo. En particular, mostró que no toda topología de Alexandroff sobre un conjunto X dado proviene de una estructura de semigrupo sobre X por el cuasi-orden izquierdo de Green.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Ph.D. en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: GREEN'S TOPOLOGY ON A SEMI-GROUP. *

AUTHOR: YESLI NATALI DELGADO MORALES **

KEYWORDS: ALEXANDROFF TOPOLOGY, SEMIGROUP, QUASI-ORDER, GREEN'S TOPOLOGY.

DESCRIPTION:

To every ordered set there corresponds a topological structure that turns out to be an Alexandroff topology. In every semigroup a quasi-order (called Green's left quasi-order) is defined, and consequently an Alexandroff topology called the Green topology of the semigroup is obtained. In this presentation, we will show some features of these topologies on finite sets. We base ourselves on a work by B. Richmond where a classification of all topologies is presented on a set of at most five points that come from a semigroup structure. In particular, he showed that not every Alexandroff topology on a given set X follows from a semigroup structure on X by Green's quasi-left order.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Ph.D. en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

En 1935, Alexandroff y Tucker inventaron de manera independiente un método general de construir topologías sobre conjuntos cuasi-ordenados (con una relación reflexiva y transitiva, no necesariamente antisimétrica). Este método establece una correspondencia uno a uno entre esas topologías (llamadas de Alexandroff o principales) sobre un conjunto X con los cuasi-órdenes sobre X. Los espacios de Alexandroff juegan un papel importante en el estudio del retículo de las topologías. Sus aplicaciones van desde la computación hasta conexiones entre topología y matemáticas discretas (ver por ejemplo el trabajo de Rubiano y Robles en [1]). En este proyecto estaremos interesados en un tipo de topologías principales definidas sobre semigrupos. Es bien conocido que a todo semigrupo S se le asocia el cuasi-orden $\leq_{\mathcal{L}}$ de Green definido de la siguiente manera: $a \leq_{\mathcal{L}} b$ si y solo si $a = ub$ para algún $u \in S^1$ (ver la sección 2.2). La topología principal correspondiente será llamada la topología de Green del semigrupo.

El objetivo fundamental de esta tesis es estudiar un trabajo de B. Richmond [2] donde clasifica todas las topologías sobre un conjunto de a lo sumo cinco puntos que provienen de una estructura de semigrupo. En particular, Richmond mostró que no toda topología principal sobre un conjunto X dado proviene de una estructura de semigrupo sobre X por el cuasi-orden izquierdo de Green.

El proyecto está estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 2, recordamos algunas definiciones básicas sobre topologías de Alexandroff y el cuasi-orden aso-

---

[1] José RUBIANO Gustavo y ROBLES. "Topologías de Alexandroff: diferentes contextos". En: *Boletín de Matemáticas* 20 (2013), págs. 125-134.

[2] Bettina RICHMOND. "Semigroups and their topologies arising from Green's left quasiorder". En: *Applied General Topology* 9.2 (2008), págs. 143-168.

ciado a éstas. Luego, en el capítulo 3 presentamos los resultados principales de esta tesis. Damos entrada a conceptos básicos sobre semigrupos y el casi-orden izquierdo de Green, este cuasi-orden jugará un papel fundamental en este trabajo. Al final el capítulo 3 presentamos los resultados de Richmond [2].

Una de las preguntas que motivó el estudio de B. Richmond [2], fue determinar cuales espacios topológicos Alexandroff provenían de una estructura de semigrupo. Ella se centró en los espacios topológicos finitos. Logró clasificar todas las topologías sobre conjuntos de a lo sumo 5 puntos. Sin embargo, en ese trabajo ella no estudió los espacios Alexandroff sobre conjuntos con más de 5 puntos.

1. TOPOLOGÍAS DE ALEXANDROFF

En esta sección se introducen los conceptos referentes a las topologías principales o topologías de Alexandroff y algunas de sus propiedades como la relación que hay entre estas y los pre-órdenes, la cual usaremos constantemente a lo largo del desarrollo del escrito.

1.1. PRELIMINARES

Definición 1.1.1. *Una topología $\mathfrak{T}$ en un conjunto X es llamada topología principal o **topología de Alexandroff**, si la intersección arbitraria de abiertos es abierta.*

Denotamos por $Top(X)$ a la colección de las topologías sobre X y por $\mathcal{A}(X)$ a la colección de las topologías principales sobre X.

Ejemplo 1.1.2. *Si X es finito, toda topología sobre X es Alexandroff, es decir, $\mathcal{A}(X) = Top(X)$.*

Definición 1.1.3. *Un **cuasi-orden o pre-orden** en un conjunto X es una relación reflexiva y transitiva en X.*

Denotamos por $Pre(X)$ a la colección de los pre-ordenes sobre X.

Definición 1.1.4. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto pre-ordenado y $x \in X$, si para todo $y \in X$ se tiene que*

1. *$y \leq x$, entonces x es **máximo** en X .*
2. *$x \leq y$, entonces x es **mínimo** en X .*
3. *$x \leq y$ implica que $y \leq x$, entonces x es **maximal** en X.*
4. *$y \leq x$ implica que $x \leq y$, entonces x es **minimal** en X.*

1.2. TOPOLOGÍAS ALEXANDROFF Y CUASIORDENES

Definición 1.2.1. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Para $x \in X$, sea*

$$M_x = \bigcap \{U \in \mathcal{T} : x \in U\}.$$

En la siguiente proposición mostramos que $M_x \in \mathcal{T}$ para todo $x \in X$ si el espacio $(X, \mathcal{T})$ es de Alexandroff.

Proposición 1.2.2. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es de Alexandroff si y sólo si para todo $x \in X$, M_x es el abierto mínimal (respecto a $\subseteq$) que contiene x.*

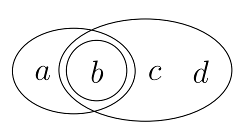
Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio de Alexandroff y $x \in X$. Como el espacio es de Alexandroff se tiene que $M_x \in \mathcal{T}$ y por su definición resulta ser la vecindad mínimal abierta de x.
$(\Leftarrow)$ Sean $U_i \in \mathcal{T}$ para todo $i \in I$ y $V = \bigcap_{i \in I} U_i$. Tomemos $x \in V$. Como M_x es el abierto minimal de x, $M_x \subseteq U_i$ para cada $i \in I$. Así $M_x \subseteq V$ para cada $x \in V$. Por tanto $V \in \mathcal{T}$. En consecuencia $(X, \mathcal{T})$ es espacio de Alexandroff.

$\square$

Ejemplo 1.2.3. *Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\mathcal{T} = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, X, \emptyset\}$. De lo anterior, se tiene que los abiertos mínimales son los siguientes:*

$$M_a = \{a, b\}, \ M_b = \{b\}, \ M_c = \{b, c, d\} = M_d.$$

Figura 1. Abiertos mínimales del Ejemplo 1.2.3



Proposición 1.2.4. *Todo abierto de una topología Alexandroff es la unión de las vecindades minimales de sus puntos.*

Demostración. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio de Alexandroff y $x \in U \in \mathcal{T}$. Debemos ver que $U = \bigcup_{x \in U} M_x$. Como $M_x = \bigcap\{U \in \mathcal{T} : x \in U\}$ entonces $M_x \in \mathcal{T}$. Luego, $\bigcup_{x \in U} M_x \subseteq U$ pues $M_x \subseteq U$ para cada $x \in U$. Por otra parte, si $x \in U$ es claro que $x \in M_x \subseteq \bigcup_{y \in U} M_y$. De esta forma $U \subseteq \bigcup_{x \in U} M_x$.

$\square$

La siguiente proposición caracteriza la base mencionada en la proposición anterior.

Proposición 1.2.5. *(Richmond [2]) Sean X y $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$ una colección de subconjuntos no vacía de X. Entonces $\mathcal{B}$ es una base que tiene como miembros a todas las vecindades minimales abiertas, para alguna topología principal en X si y solo si*

1. $\bigcup \mathcal{B} = X$.
2. *Para cada subcolección $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ y $x \in \bigcap \mathcal{C}$, existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subseteq \bigcap \mathcal{C}$.*
3. *$\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \backslash \{B\}$ no son bases equivalentes, para todo $B \in \mathcal{B}$, es decir, no generan la misma topología.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Como $\mathcal{B}$ es base de alguna topología en X, se tiene que $\bigcup \mathcal{B} = X$. Ahora, como esta topología es principal, la intersección arbitraria de abiertos es abierta. Así se cumplen 1 y 2.
Ahora, sea $B \in \mathcal{B}$. Supongamos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \backslash \{B\}$ son bases equivalentes. Como $\mathcal{B}$ consiste de todas las vecindades minimales abiertas de X. Existe $x \in X$ tal que B es la vecindad minimal abierta de x. Por la equivalencia en las bases, existe $A \in \mathcal{B} \backslash \{B\}$ tal que $x \in A \subset B$. Tenemos que $A \in \mathcal{B}$, $x \in A \subseteq B$ y $A \neq B$, lo que contradice que B es la vecindad minimal de x. Por tanto, $\mathcal{B} \backslash \{B\}$ y $\mathcal{B}$ no son bases equivalentes.

$(\Leftarrow)$ Por las condiciones 1 y 2 se tiene que $\mathcal{B}$ es base para alguna topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ en X. Veamos ahora si $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es una topología principal. Sea $\mathcal{A}$ una colección de conjuntos en $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ y supongamos $x \in \bigcap \mathcal{A}$. Note que existe $C_i \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C_i \subseteq A_i$. Así, $x \in \bigcap C_i \subseteq \bigcap \mathcal{A}$. Por 2, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq \bigcap C_i$. Luego, $\bigcap C_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es principal.

Finalmente, veamos que $\mathcal{B}$ consiste exactamente de todas las vecindades minimales de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Sea $B \in \mathcal{B}$, supongamos que para cada $x \in B, M_x \neq B$ con M_x la vecindad minimal abierta de x en $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Por la proposición 1.2.4 $B = \bigcup\{M_x : x \in B\}$. Así mismo, como $M_x \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ sabemos que $M_x = \bigcup \mathcal{C}$ con $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$. Pero $M_x \neq B$ para cada $x \in X$. Entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}\setminus\{B\}}$ lo que contradice 3, por lo que existe $x \in B$ tal que $B = M_x$. Luego, $\mathcal{B}$ consiste de todas las vecindades minimales abiertas de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

□

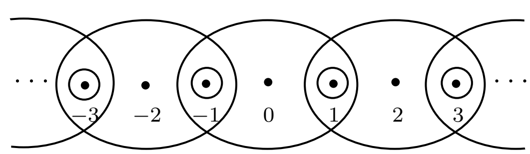
De ahora en adelante, $\mathcal{B}^X$ denotará la base formada por los abiertos minimales.

Ejemplo 1.2.6. ***Topología de Khalimsky:*** *En el espacio topológico $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_k)$ un conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}$ es abierto si para todo $n \in A,\ M_n \subseteq A$ donde M_n es la vecindad minimal de n dada por*

$$M_n = \{n\} \text{ si } n \text{ es impar} \quad \text{y} \quad M_n = \{n-1, n, n+1\} \text{ si } n \text{ es par.}$$

Podemos ver una representación gráfica de la recta de Khalimsky y sus abiertos minimales en la Figura 2.

Figura 2. Esquema de los abiertos en la recta de Khalimsky 1.2.6



Definición 1.2.7. *Sea* $(X, \mathfrak{T})$ *un espacio de Alexandroff, definimos la relación binaria* $\preceq_{\mathfrak{T}}$ *en* X *de la siguiente manera*

$$y \preceq_{\mathfrak{T}} x \Longleftrightarrow y \in M_x.$$

Esta relación se llama **cuasi-orden de especialización***.*

Teorema 1.2.8. *Sea* $(X, \mathfrak{T})$ *un espacio de Alexandroff, entonces la relación* $\preceq_{\mathfrak{T}}$ *define un cuasi-orden en* X*.*

Demostración. Veamos si $\preceq_{\mathfrak{T}}$ es reflexiva y transitiva en X. Sean $x, y, z \in X$, es claro que $x \preceq_{\mathfrak{T}} x$ pues $x \in M_x$. Ahora, si $x \preceq_{\mathfrak{T}} y$ y $y \preceq_{\mathfrak{T}} z$ entonces, $x \in M_y$ y $y \in M_z$. Note que el hecho que $x \in M_y$ implica que $M_x \subseteq M_y$ pues M_x es el abierto más pequeño que contiene a x. Igualmente, como $y \in M_z$, entonces $M_y \subseteq M_z$ y así $x \in M_z$. Por lo tanto, $x \preceq_{\mathfrak{T}} z$.

□

Ejemplo 1.2.9. *El cuasi-orden de especialización de la línea de Khalimsky del Ejemplo 1.2.6 está dado por* $(\mathbb{Z}, \preceq_{\mathfrak{T}})$ *donde* $2k+1 \preceq_{\mathfrak{T}} 2k$ *y* $2k+1 \preceq_{\mathfrak{T}} 2k+2$, *para todo* $k \in \mathbb{Z}$.

Sea $(X, \preceq)$ un conjunto cuasi-ordenado, definimos

$$x \downarrow = \{y \in X : y \preceq x\}. \tag{1}$$

Mostraremos a continuación que esos conjuntos forman una base para un topología de Alexandroff.

Proposición 1.2.10. *Sea* $(X, \preceq)$ *un conjunto cuasi-ordenado. La familia* $\mathcal{B} = \{x \downarrow : x \in X\}$ *es una base para una topología de Alexandroff.*

Demostración. Es claro que $\bigcup \mathcal{B} \subseteq X$. Sea $x \in X$, como $x \in x\downarrow$, entonces $X = \bigcup \mathcal{B}$. Sean $(x\downarrow), (y\downarrow) \in \mathcal{B}$ y $z \in (x\downarrow) \cap (y\downarrow)$ considere $z\downarrow \in \mathcal{B}$ note que $z \in z\downarrow \subset (x\downarrow) \cap (y\downarrow)$. Así, $\mathcal{B}$ es base para alguna topología. Finalmente, veamos que esa topología es de Alexandroff. Sean $V = \bigcap_{i\in I} U_i$ con $U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ para cada $i \in I$ y $x \in V$. Luego, $x \in U_i$ para cada $i \in I$. Note que, $x\downarrow \subseteq U_i$ para cada $i \in I$. Por ende, $V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. En consecuencia, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es de Alexandroff.

□

La topología de Alexandroff dada por la proposición anterior, denotada por $\mathcal{T}(\preceq)$ es llamada *topología de especialización o topología inducida por el cuasi-orden* $\preceq$. Notemos que $M_x = x\downarrow$. Recordemos que $\mathcal{A}(X)$ es la colección de todas las topologías principales sobre X y $Pre(X)$ es la colección de cuasi-ordenes en X. Definimos

$$\xi : \mathcal{A}(X) \to Pre(X) \text{ tal que } \xi(\mathcal{T}) = \preceq_{\mathcal{T}} .$$

$$\psi : Pre(X) \to \mathcal{A}(X) \text{ tal que } \psi(\preceq) = \mathcal{T}(\preceq).$$

Los siguientes teoremas indican que

$$\xi \circ \psi = I_{Pre(X)} \quad \text{y} \quad \psi \circ \xi = I_{\mathcal{A}(X)}.$$

Es decir,

$$\xi(\psi(\preceq)) = \xi(\mathcal{T}(\preceq)) = \preceq \tag{2}$$

$$\psi(\xi(\mathcal{T})) = \psi(\preceq_{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}. \tag{3}$$

De esta forma, las funciones ξ y ψ son una la inversa de la otra.

Teorema 1.2.11. *Sea* $(X, \preceq)$ *un conjunto cuasi-ordenado y* $\mathcal{T}(\preceq)$ *la topología inducida por* $\preceq$ *. El cuasi-orden* $\preceq_{\mathcal{T}(\preceq)}$ *inducido por* $\mathcal{T}(\preceq)$ *coincide con el cuasi-orden* $\preceq$ *.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tal que $x \preceq_{\mathcal{T}(\preceq)} y$. Entonces, $x \in M_y$. Es decir, $x \in \{c \in X : c \preceq y\}$. Luego, $x \preceq y$. Ahora, supongamos que $x \preceq y$ entonces $x \in M_y$. Por tanto, $x \in \{c \in X : c \preceq_{\mathcal{T}(\preceq)} y\}$. Así, $x \preceq_{\mathcal{T}(\preceq)} y$.

□

De esta forma, hemos mostrado (2). Finalmente, veamos que (3) se tiene.

Teorema 1.2.12. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio de Alexandroff y $\preceq_{\mathcal{T}}$ el cuasi-orden inducido por $\mathcal{T}$. La topología $\mathcal{T}(\preceq_{\mathcal{T}})$ inducida por $\preceq_{\mathcal{T}}$ coincide con la topología $\mathcal{T}$.*

Demostración. Sean $U \in \mathcal{T}(\preceq_{\mathcal{T}})$ y $x \in U$. Note que $x \in M_x = \bigcap\{V \in \mathcal{T} : x \in V\}$. Sea $y \in M_x$, entonces $y \preceq_{\mathcal{T}} x$. Luego, $y \in M'_x = \bigcap\{U \in \mathcal{T}(\preceq_{\mathcal{T}}) : x \in U\}$. Por tanto, $M_x \subseteq U$ para todo $x \in U$. En consecuencia, $U \in \mathcal{T}$. Ahora, sean $V \in \mathcal{T}$ y $x \in V$. Es claro que $x \in M'_x = \bigcap\{U \in \mathcal{T}(\preceq_{\mathcal{T}}) : x \in U\}$. Considere $y \in M'_x$. Entonces $y \preceq_{\mathcal{T}} x$. Así, $y \in M_x = \bigcap\{U \in \mathcal{T} : x \in U\}$. Por ende, $V \in \mathcal{T}(\preceq_{\mathcal{T}})$. En conclusión, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\preceq_{\mathcal{T}})$.

□

Resulta natural preguntarse si el producto de espacios de Alexandroff es también de Alexandroff. La respuesta a esta pregunta para un producto finito resulta ser afirmativa.

Proposición 1.2.13. *Sean $(X, \mathcal{T}_1)$ y $(Y, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. El espacio producto $(X \times Y, \mathcal{T})$ es de Alexandroff donde*

$$M^{X \times Y}_{(x,y)} = M^X_x \times M^Y_y.$$

Demostración. Basta observar que el producto de dos vecindades minimales es una vecindad minimal, ya que $\mathcal{B}^{X \times Y} = \mathcal{B}^X \times \mathcal{B}^Y$.

□

El cuasi-orden de especialización de $X \times Y$ es dado por

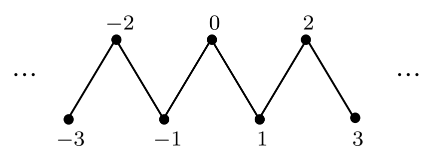
$$(x_1, y_1) \preceq_{\mathcal{T}} (x_2, y_2) \iff x_1 \preceq_{\mathcal{T}_1} x_2 \text{ y } y_1 \preceq_{\mathcal{T}_2} y_2.$$

1.3. DIAGRAMAS DE HASSE

Todo conjunto pre-ordenado $(X, \leq)$ puede ser representado como un grafo dirigido cuyos vértices son los elementos de X. En realidad, lo que se gráfica es la relación estricta. Estos vértices se conectan por medio de aristas dirigidas, donde una arista dirigida va de a hasta b si $a < b$ y no hay otros elementos intermedios entre ellos. A esta representación gráfica se le llama *diagrama de Hasse*. Así, a toda topología principal $\mathcal{T}$ le corresponde un diagrama de Hasse dado por su cuasi-orden de especialización $\preceq_{\mathcal{T}}$.

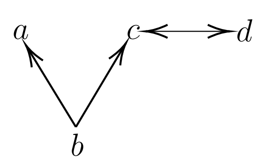
Ejemplo 1.3.1. *El diagrama de Hasse correspondiente para la línea de Khalimsky (ver Ejemplo 1.2.6) es dado por la Figura 3.*

Figura 3. Diagrama de Hasse para la topología de Khalimsky 1.2.6



Ejemplo 1.3.2. *El diagrama de Hasse para la topología descrita en el Ejemplo 1.2.3 es dado por la Figura 4.*

Figura 4. Diagrama de Hasse para la topología dada en el Ejemplo 1.2.3



1.4. FUNCIONES CONTINUAS Y FUNCIONES QUE PRESERVAN EL ORDEN

Recordemos que si $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{H})$ son espacios topológicos y $f : X \to Y$. Decimos que f es continua si para cada $V \in \mathcal{H}$ se tiene que $f^{-1}[V] \in \mathcal{T}$.

Ejemplo 1.4.1. *Cualquier función* $f : (X, \mathfrak{T}_{dis}) \to (Y, \mathfrak{T})$ *es continua donde* $\mathfrak{T}_{dis}$ *es la topología discreta.*

Definición 1.4.2. *Sean* $(X, \preceq)$ *y* $(Y, \preccurlyeq)$ *conjuntos pre-ordenados. Decimos que* $f : X \to Y$ ***preserva los pre-ordenes*** *si para cada* $x, y \in X$ *se tiene que,*

$$x \preceq y \Rightarrow f(x) \preccurlyeq f(y).$$

Ejemplo 1.4.3. *Sean* $X = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $Y = \{a, b, c, d, e\}$ *cuyos diagramas de Hasse están representados en las Figuras 5 y 6 respectivamente.*

Figura 5. Diagrama de Hasse para X

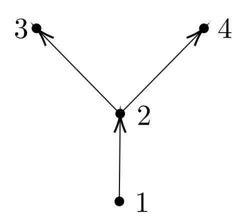
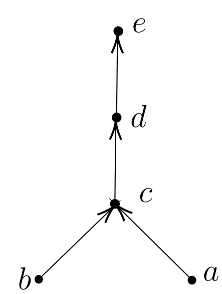


Figura 6. Diagrama de Hasse para Y

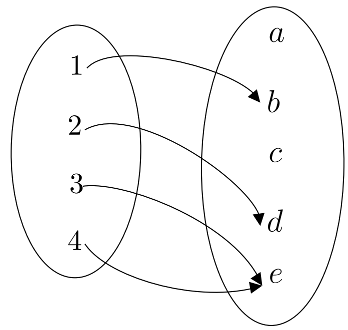


Sea $f : X \to Y$ *tal que* $f(1) = b,\ f(2) = d,\ f(3) = e$ *y* $f(4) = e$*. Note que para cada* $x \in X$ *se verifica que*

$$x \preceq y \Longrightarrow f(x) \preccurlyeq f(y).$$

Por ejemplo, $1 \preceq 3$ *y* $f(1) = b \preccurlyeq e = f(3)$*. El diagrama sagital de* f *está representado en la Figura 7*

Figura 7. Diagrama sagital de f



Definición 1.4.4. *Sean* $(X, \preceq)$ *y* $(Y, \preccurlyeq)$ *conjuntos ordenados. Decimos que* $f : X \to Y$ *es un* ***isomorfismo de pre-ordenes*** *si* f *es biyectiva y para cada* $x, y \in X$, *se tiene que*

$$x \preceq y \text{ si y solo si } f(x) \preccurlyeq f(y).$$

Es posible relacionar las funciones continuas entre espacios de Alexandroff y las funciones que preservan el orden entre conjuntos pre-ordenados.

Proposición 1.4.5. *Sean* $(X, \mathcal{T}_{\preceq}), (Y, \mathcal{H}_{\preccurlyeq})$ *espacios topológicos.* $f : (X, \mathcal{T}_{\preceq}) \to (Y, \mathcal{H}_{\preccurlyeq})$ *es continua si y solo si* f *preserva los pre-ordenes.*

Demostración. $(\Longrightarrow)$ Sean $x, y \in X$ tales que $x \preceq y$. Luego $x \in M_y^X$. Como f es continua, $f^{-1}[M_{f(y)}^Y] \in \mathcal{T}_{\preceq}$. Note que $y \in f^{-1}[M_{f(y)}^Y]$. Entonces $M_y^X \subseteq f^{-1}[M_{f(y)}^Y]$. Por lo tanto, $x \in f^{-1}[M_{f(y)}^Y]$. De esta forma, $f(x) \in M_{f(y)}^Y$. Así, $f(x) \preccurlyeq f(y)$.

$(\Longleftarrow)$ Sea $y \in Y$ y $M_y^Y \in \mathcal{H}_{\preccurlyeq}$. Sean $x \in f^{-1}[M_y^Y]$ y $z \in M_x^X$. Luego, $z \preceq x$. Como f preserva el orden $f(z) \preccurlyeq f(x)$. Ahora, note que $f(x) \in M_y^Y$. Así, $f(z) \preccurlyeq f(x) \preccurlyeq f(y)$. Por lo tanto, $f(z) \in M_y^Y$. De manera que $M_x^X \subseteq f^{-1}[M_y^Y]$ y por ende $f^{-1}[M_y^Y] \in \mathcal{T}_{\preceq}$.

□

Lema 1.4.6. *Sean* $(X, \mathcal{T}_{\preceq}), (Y, \mathcal{H}_{\preccurlyeq})$ *espacios topológicos.* $f : (X, \mathcal{T}_{\preceq}) \to (Y, \mathcal{H}_{\preccurlyeq})$ *es continua si y solo si para cada* $x \in X$ *se tiene que*

$$f[M_x^X] \subseteq M_{f(x)}^Y.$$

Demostración. $(\Longrightarrow)$ Sean $y \in f[M_x^X]$. De esta forma $y = f(z)$ para algún $z \in M_x^X$. Así, $z \preceq x$. Como f es continua, por la proposición anterior sabemos que f preserva el orden. Luego $y = f(z) \preceq f(x)$. Por tanto, $y \in M_{f(x)}^Y$.

$(\Longleftarrow)$ Sea $y \in Y$ y $M_y^Y \in \mathcal{H}_{\preccurlyeq}$. Sean $x \in f^{-1}[M_y^Y]$ y $z \in M_x^X$. Luego, $z \preceq x$. Así, $f(z) \in f[M_x^X]$. Como $f[M_x^X] \subseteq M_{f(x)}^Y$ entonces $f(z) \in M_{f(x)}^Y$ lo que implica que $f(z) \preccurlyeq f(x)$. Ahora, note que $f(x) \in M_y^Y$. Así, $f(z) \preccurlyeq f(x) \preccurlyeq f(y)$. Por lo tanto, $f(z) \in M_y^Y$. De manera que $M_x^X \subseteq f^{-1}[M_y^Y]$ y por ende $f^{-1}[M_y^Y] \in \mathcal{T}_{\preceq}$.

$\square$

Ahora, recordemos que si $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{H})$ son espacios topológicos. $f : X \to Y$ es un **homeomorfismo** si y solo si f es biyectiva y bicontinua.

Una relación más entre homeomorfismo y el cuasi-orden está dada en la siguiente proposición.

Proposición 1.4.7. *Sean* $(X, \mathcal{T}_{\preceq})$, $(Y, \mathcal{H}_{\preccurlyeq})$ *espacios topológicos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. $(X, \mathcal{T}_{\preceq})$ *y* $(Y, \mathcal{H}_{\preccurlyeq})$ *son homeomorfos.*

2. *existe* $f : X \to Y$ *biyectiva tal que para cada* $x \in X,$ *se tiene que*

$$f[M_x^X] = M_{f(x)}^Y.$$

3. $(X, \mathcal{T}_{\preceq})$ *y* $(Y, \mathcal{H}_{\preccurlyeq})$ *son pre-ordenes isomorfos.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Sea $x \in X$ y $y \in Y$ tal que $y \in f[M_x^X]$. Luego, $y = f(a)$, para algún $a \in M_x^X$. Así, $a \preceq x$, como f es homeomorfismo por la Proposición 1.4.5 $y \preccurlyeq f(x)$. Por tanto, $y \in M_{f(x)}^Y$. Luego, $f[M_x^X] \subseteq M_{f(x)}^Y$. Como, $y \in M_{f(x)}^X$, entonces $y \preccurlyeq f(x)$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Sea $y \in Y$. Sea $x \in f^{-1}(M_y^Y)$. Entonces, $f(x) \in M_y^Y$. Así, $M_{f(x)}^Y \subseteq M_y^Y$. Como, $f[M_x^X] = M_{f(x)}^Y$. Entonces, $M_x^X \subseteq f^{-1}(M_y^Y)$. Así, $f^{-1}(M_y^Y) \subseteq \mathcal{T}_{\preceq}$. Luego, f es continua. Note que f es abierta. Por lo tanto, f es bicontinua. De esta manera, $(X, \mathcal{T}_{\preceq})$ y $(Y, \mathcal{H}_{\preccurlyeq})$ son homeomorfos.

$(2 \Rightarrow 3)$ Sean $x, y \in X$ tal que $x \preceq y$. Luego, $x \in M_y^X$. Como $f[M_y^X] = M_{f(y)}^Y$. Entonces, como $f(x) \in M_{f(y)}^Y$. Así, $f(x) \preccurlyeq f(y)$. Ahora, supongamos que $f(x) \preccurlyeq f(y)$. Luego, $f(x) \in M_{f(y)}^Y$. Como $f[M_y^X] = M_{f(y)}^Y$. Entonces, $f(x) \in f[M_y^X]$. Así, $x \in M_y^X$. Por tanto, $x \preceq y$. Luego, $(X, \mathcal{T}_{\preceq})$ y $(Y, \mathcal{H}_{\preccurlyeq})$ son pre-ordenes isomorfos.

$(3 \Rightarrow 2)$ Sea $y \in f[M_x^X]$. Luego, $y = f(z)$ tal que $z \in M_x^X$. Luego, $z \preceq x$. Por f isomorfismo de pre-ordenes sabemos que como $z \preceq x$ entonces $f(z) \preccurlyeq f(x)$. Luego, $y \preccurlyeq f(x)$. Por tanto $y \in M_{f(x)}^Y$. Así, $f[M_y^X] \subseteq M_{f(y)}^Y$. Sea $y \in M_{f(y)}^Y$. Luego, $y \preccurlyeq f(x)$. Por f isomorfismo de pre-ordenes sabemos que como $y \preccurlyeq f(x)$ entonces $f^{-1}(y) \preceq x$. Así, $f^{-1}(y) \in M_x^X$. Por tanto $y \in f[M_y^X]$. Luego, $M_{f(y)}^Y \subseteq f[M_y^X]$.

$\square$

1.5. ESPACIOS FINITOS

Recordemos del Ejemplo 1.1.2, que todo espacio topológico finito X es de Alexandroff. De esta manera, cada que hablemos de un espacio topológico finito, daremos por hecho que este es de Alexandroff sin mencionarlo nuevamente.

Ahora, a cada espacio topológico finito X se le asociará una función q que permitirá primeramente establecer un nuevo orden que nos será útil más adelante para identificar cuáles estructuras topológicas provienen de una estructura de semigrupo.

Sea $E = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$. Sabemos que E está totalmente ordenado por el orden lexicográfico de la siguiente manera: Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ diremos que $(a_n) <_{lex} (b_n)$ si y solo si, se da alguno de los dos siguientes casos:

- $a_0 < b_0$.
- Existe $k \geq 0$ tal que $a_i = b_i$ para todo $i \in \{0, 1, 2, ..., k\}$ y $a_{k+1} < b_{k+1}$.

Definiremos un casi-orden total sobre X asociando una secuencia $q(x) \in E$ a cada $x \in X$. Para ello, necesitamos enumerar cada vecindad minimal de una manera conveniente.
Sea $t \in \mathbb{N}$, definimos

$$P_t = \{x \in X : |M_x| = t\}.$$

Sea $x \in P_t$. Fijaremos una enumeración de M_x y una sucesión de naturales $k_0, \cdots, k_{t-1}$ de la siguiente manera:

$$M_x = \{x_0, x_1, ..., x_{t-1}\}$$

tal que

1. $x_0 = x$ y $k_0 = t$.
2. $x_i \in P_{k_i}$ con $k_{i+1} \leq k_i$ y $k_i = |M_{x_i}|$ para cada $0 \leq i \leq t-1$.

Definición 1.5.1. *Sea X un espacio topológico finito y $x \in P_t$. Definimos $q : X \to E$ tal que*

$$q(x) = (k_0, k_1, ..., k_{t-1}, 0, 0, ...).$$

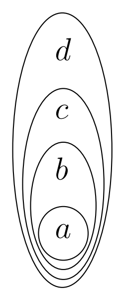
Por conveniencia notaremos a $(k_0, k_1, ..., k_{t-1}, 0, 0, ...)$ como $(k_0, k_1, ..., k_{t-1})$.

Observemos que la enumeración de M_x no es única, sin embargo la sucesión $q(x)$ esta unívocamente determinada al exigir que sea decreciente.

Ejemplo 1.5.2. *Sea* $X = \{a, b, c, d\}$ *tal que* $M_a = \{a\},\ M_b = \{a, b\},\ M_c = \{a, b, c\}$ *y* $M_d = \{a, b, c, d\}$. *De esta forma, tenemos que* $a \in P_1,\ b \in P_2,\ c \in P_3$ *y* $d \in P_4$. *Luego,*

$$q(a) = (1),\ q(b) = (2, 1),\ q(c) = (3, 2, 1)\ \text{ y }\ q(d) = (4, 3, 2, 1).$$

Figura 8. Abiertos minimales del Ejemplo 1.5.2



El ejemplo anterior, es un caso donde q resulta ser inyectiva. Sin embargo, q no es necesariamente inyectiva. Una muestra de ello es el siguiente ejemplo.

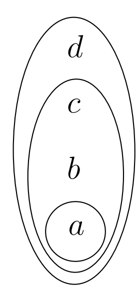
Ejemplo 1.5.3. *Sea* $X = \{a, b, c, d\}$ *tal que*

$$M_a = \{a\},\quad M_b = \{a, b, c\},\quad M_c = \{a, b, c\},\ \text{y}\ \ M_d = \{a, b, c, d\}.$$

Note que $|M_a| = 1,\ |M_b| = |M_c| = 3\ \text{ y }\ |M_d| = 4$. *Luego,*

$$q(a) = (1),\ q(b) = q(c) = (3, 3, 1)\ \text{y}\ q(d) = (4, 3, 3, 1).$$

Figura 9. Abiertos minimales del Ejemplo 1.5.3



Ahora, usando el orden lexicográfico dado en E y la función q obtenemos un cuasi-orden para un espacio topológico finito X dado a continuación.

Proposición 1.5.4. *Sea X un espacio topológico finito. La relación $\leq_E$ dada por*

$$x \leq_E y \Longleftrightarrow q(x) \leq_{lex} q(y),$$

para $x, y \in X$, es un cuasi-orden lineal en X.

Demostración. Sean $x, y, z \in X$. Es claro ver que $x \leq_E x$. Ahora, supongamos que $x \leq_E y$ y $y \leq_E z$. Luego, $q(x) \leq_{lex} q(y)$ y $q(y) \leq_{lex} q(z)$. Así, por transitividad del orden lexicográfico en E, $q(x) \leq_{lex} q(z)$. Por tanto, $x \leq_E z$. Finalmente, veamos que $\leq_E$ es lineal. Sean $x, y \in X$. De la Definición 1.5.1 obtenemos $q(x)$ y $q(y)$. Por la linealidad del orden lexicográfico en E. $q(x) \leq_{lex} q(y)$ o $q(y) \leq_{lex} q(x.)$ Luego, $x \leq_E y$ o $y \leq_E x$.

□

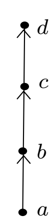
Note que como q no es necesariamente inyectiva, el orden $\leq_E$ puede no ser antisimétrico.

Ejemplo 1.5.5. *El cuasi-orden $\leq_E$ para el Ejemplo 1.5.2 está dado por*

$$a \ \leq_E \ b \ \leq_E \ c \ \leq_E \ d.$$

El diagrama de Hasse en este caso, está respresentado a continuación.

Figura 10. Diagrama de Hasse del Ejemplo 1.5.2

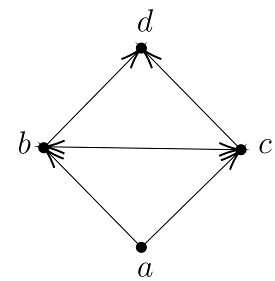


Ejemplo 1.5.6. *El cuasi-orden $\leq_E$ para el Ejemplo 1.5.3 resulta ser:*

$$a \leq_E b \leq_E c \leq_E d.$$
$$a \leq_E c \leq_E b \leq_E d.$$

El diagrama de Hasse correspondiente, está respresentado a continuación.

Figura 11. Diagrama de Hasse del Ejemplo 1.5.3



El cuasi-orden dado por $\leq_E$ no necesariamente coincide con el cuasi-orden de especialización $\preceq_{\mathfrak{T}}$. Sin embargo, es posible relacionarlos de la siguiente manera.

Lema 1.5.7. *Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Si x es $\leq_E$ -maximal, entonces x es $\preceq_{\mathfrak{T}}$ -maximal.*

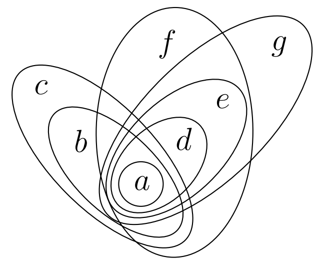
Demostración. Sea $x \in X$ un elemento $\leq_E$ -maximal. Supongamos que existe y tal que $x \preceq_{\mathfrak{T}} y$. Luego, $x \in M_y$. Más aún $M_x \subseteq M_y$. Así, $q(x) \leq_{lex} q(y)$. Entonces, $x \leq_E y$. Como x es $\leq_E$ -maximal, $y \leq_E x$. Luego, $q(y) \leq_{lex} q(x)$ y como $M_x \subseteq M_y$, concluimos que $M_y \subseteq M_x$. Así, $y \preceq_{\mathfrak{T}} x$. Por lo tanto, x es $\preceq_{\mathfrak{T}}$ -maximal.

□

El siguiente ejemplo ilustra que el recíproco de la anterior proposición es falso.

Ejemplo 1.5.8. *Sea $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ un espacio topológico cuya base está representada en la Figura 12.*

Figura 12. $\mathcal{B}^X$



Note que c es $\preceq_{\mathfrak{T}}$-maximal pero no es $\leq_E$-maximal pues $q(c) \leq_{lex} q(f)$ lo que implica que $c \leq_E f$. En las figuras 13 y 14 están representados los diagramas de Hasse de $(X, \preceq_{\mathfrak{T}})$ y $(X, \leq_E)$ respectivamente.

Figura 13. Diagrama de Hasse $(X, \preceq_{\mathfrak{T}})$.

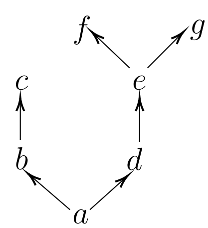
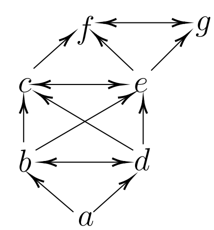


Figura 14. Diagrama de Hasse $(X, \leq_E)$.



Proposición 1.5.9. *Sean X un espacio topológico finito y sea $\mathcal{B}^X$ la base que consiste de todas las vencidades minimales abiertas de X. Entonces, X contiene un elemento maximal m respecto al preorden $\leq_E$, y su vecindad minimal M_m es maximal en $\mathcal{B}^X$ respecto a la inclusión de conjuntos.*

Demostración. La existencia de tal elemento maximal m es evidente, pues X es finito y el pre-orden $\leq_E$ es lineal. Ahora veamos M_m es $\subseteq$-maximal. En efecto, supongamos que existe $m_1 \in X$ tal que $M_m^X \subseteq M_{m_1}^X$ entonces $m \leq_E m_1$. Por ser m $\leq_E$-maximal, tenemos que $m_1 \leq_E m$. Luego, $q(m_1) \leq_{lex} q(m)$. Así, $|M_{m_1}^X| \leq |M_m^X|$. De esta forma, $M_m^X = M_{m_1}^X$. Por tanto, M_m^X es maximal en $\mathcal{B}^X$ respecto a la inclusión de conjuntos.

$\square$

La idea ahora es usar la Proposición 1.5.9 para construir espacios topológicos, ya sea añadiendo un punto maximal o quitando este.

Notemos que si m es maximal en $X,$ respecto al cuasi-orden $\leq_E$ y $m \in M_x$ entonces, $M_m = M_x$.

Lema 1.5.10. *Sean X un espacio topológico finito, $\mathcal{B}^X$ la base de X que consiste de todas las vecindades minimales y $m \in X$ un elemento $\leq_E^X$-maximal. Sea $Y = X\backslash\{m\}$ con la topología de subespacio. Entonces la base $\mathcal{B}^Y$ que consiste de todas las vecindades minimales abiertas de Y es dada por:*

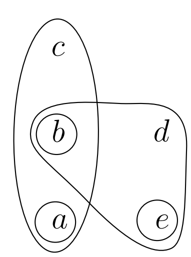
$$\mathcal{B}^Y = \{M_x^X\backslash\{m\} : x \in Y\} = \{B \in \mathcal{B}^X : m \notin B\} \cup \{M_m^X\backslash\{m\}\}.$$

Demostración. 1. Supongamos que $M_m^X \neq M_x^X$ para cada $x \in X$ con $x \neq m.$ Por la Proposición 1.5.9 M_m^X es maximal en $\mathcal{B}$ respecto a la inclusión. De esta forma, $M_x^Y = M_x^X$ para cada $x \in Y.$ Luego, $\mathcal{B}^Y = \mathcal{B}\backslash\{M_m^X\} = \{B \in \mathcal{B}^X : m \notin B\} \cup \{M_m^X\backslash\{m\}\}$.
2. Supongamos que existe $x \in X$ con $x \neq m$ tal que $M_m^X = M_x^X$. Así, si $m \notin M_y^X$ entonces $M_y^Y = M_y^X$ y $M_x^Y = M_x^X\backslash\{m\}$ en el caso contrario. Luego, $\mathcal{B}^Y = \{B \in \mathcal{B} : m \notin B\} \cup \{M_m^X\backslash\{m\}\}$.

$\square$

Ejemplo 1.5.11. *Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ tal que $M_a = \{a\},\ M_b = \{b\},\ M_c = \{a, b, c\},\ M_d = \{b, d, e\}$ y $M_e = \{e\}$.*

Figura 15. Abiertos minimales del Ejemplo 1.5.11

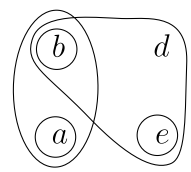


Las sucesiones asociadas a los elementos de X son:

$$q(a) = (1),\ q(b) = (1),\ q(c) = (3,1,1),\ q(d) = (3,1,1),\ q(e) = (1).$$

De esta manera, los elementos c y d resultan ser $\leq_E$-maximales de X. Si tomamos $Y = X\backslash\{c\}$. Así, por el Lema 1.5.10, $\mathcal{B}^Y = \{M_x^X\backslash\{m\} : x \in Y\}$. En este caso, note que $c \notin M_x$ para cada $x \in X$. Luego, $\mathcal{B}^Y = \mathcal{B}\backslash\{M_c^X\}$.

Figura 16. Abiertos minimales de $Y = X\backslash\{c\}$

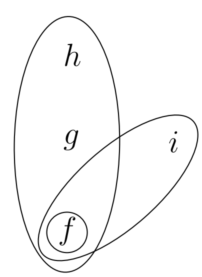


De esta forma, hemos hallado un subespacio de X al eliminar uno de los $\leq_E$-maximales, por medio del lema 1.5.10. Veamos ahora un ejemplo de la aplicación de este Lema en un espacio donde hay dos elementos cuya vecindad minimal coincide.

Ejemplo 1.5.12. *Sea $X = \{f, g, h, i\}$ tal que $M_f = \{f\},\ M_g = \{f, g, h\},\ M_h = \{f, g, h\}$ y $M_i = \{f, i\}$. Las sucesiones asociadas a los elementos de X son:*

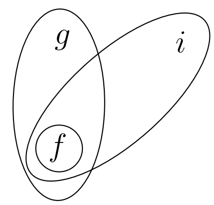
$$q(f) = (1),\ q(g) = (3,3,1),\ q(h) = (3,3,1),\ q(i) = (2,1).$$

Figura 17. Abiertos minimales del Ejemplo 1.5.12



Luego, h y g resultan ser $\leq_E$-maximales de X. Así, si tomamos $Y = X\backslash\{h\}$. Como $M_h = M_g$. Por el Lema 1.5.10, $\mathcal{B}^Y = \{B \in \mathcal{B} : m \notin B\} \cup \{M_m^X\backslash\{m\}\}$.

Figura 18. Abiertos minimales de $Y = X \backslash \{h\}$



Ahora, veamos como obtener un espacio topológico al agregar un elemento a un espacio topológico finito dado que sea el proceso inverso a lo expresado en el Lema 1.5.10. Veremos inicialmente un procedimiento para definir un espacio topológico al añadir un punto m a un espacio Y dejando las vecindades de Y intactas y definiendo la vecindad de m.

Por la Proposición 1.5.9 existe un $y \in Y$ tal que y es $\leq_E^Y$- maximal, haremos uso de este hecho en lo que sigue.

Definición 1.5.13. *Sea Y un espacio topológico finito, $\mathcal{B}^Y$ la base que consiste de todas las vecindades minimales de Y y $m \notin Y$. Diremos que $X = Y \cup \{m\}$ es una* **extensión** *de Y si*

(i) Y *es un subespacio de* X *y*

(ii) m *es* $\leq_E$*-maximal en* X*.*

Lema 1.5.14. *Sea Y un espacio topológico finito, y un elemento $\leq_E^Y$-maximal, $\mathcal{B}^Y$ la base que consiste de todas las vecindades minimales de Y y $m \notin Y$. Si existe $c \in Y$ con $M_c^Y = M_y^Y \backslash \{y\}$, entonces existe una extensión de Y, $X = Y \cup \{m\}$, tal que $\mathcal{B}^X = \mathcal{B}^Y \cup \{M_m^X\}$, donde $M_m^X = M_c^Y \cup \{m\}$.*

Demostración. Definiremos una topología sobre X describiendo sus vecindades minimales. Para esto usaremos la Proposición 1.2.5.

Note que $\bigcup \mathcal{B}^Y = Y$. Luego, $\bigcup \mathcal{B}^X = \bigcup \mathcal{B}^Y \cup \{M_m^X\} = Y \cup \{m\} = X$. Ahora, sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}^X$ y $x \in \bigcap \mathcal{C}$. Si $M_m^X \notin \mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}^Y$ luego existe $B \in \mathcal{B}^Y$ tal que $x \in B \subseteq \bigcap \mathcal{C}$. Por otro lado, si $M_m^X \in \mathcal{C}$. Definimos $\mathcal{A} = \{C \in \mathcal{C} : C \neq M_m^X\}$. Note que $A \subseteq \mathcal{B}^Y$. Así,

$$\begin{aligned} \bigcap \mathcal{C} &= \left(\bigcap \mathcal{A}\right) \cap M_m^X = \left(\bigcap \mathcal{A}\right) \cap \left(M_c^Y \cup \{m\}\right). \\ &= \left(\left(\bigcap \mathcal{A}\right) \cap M_c^Y\right) \cup \left(\left(\bigcap \mathcal{A}\right) \cap \{m\}\right). \\ &= \left(\bigcap \mathcal{A}\right) \cap M_c^Y. \end{aligned}$$

Consideremos, $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \{M_c^Y\}$. Note que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}^Y$ y $\bigcap \mathcal{D} = \bigcap \mathcal{C}$. Como $x \in \bigcap \mathcal{D}$, sabemos que existe $B \in \mathcal{B}^Y$ tal que $x \in B \subseteq \bigcap \mathcal{D}$. Por tanto, $x \in B \subseteq \bigcap \mathcal{C}$.

Falta demostrar que $\mathcal{B}^X$ y $\mathcal{B}^X \backslash \{B\}$ no son bases equivalentes para cualquier B. Para ello, note que $\mathcal{B}^X$ y $\mathcal{B}^X \backslash \{M_m^X\} = \mathcal{B}^Y$ no son bases equivalentes. Consideremos ahora $B \in \mathcal{B}^X \backslash \{M_m^X\}$. Entonces $\mathcal{B}^X \backslash \{B\} = \mathcal{B}^Y \backslash \{B\} \cup \{M_m^X\}$. Como $\mathcal{B}^Y$ es base que consiste de todas las vecindades minimales de Y sabemos que $\mathcal{B}^Y$ y $\mathcal{B}^Y \backslash \{B\}$ no son equivalentes. Luego, $\mathcal{B}^X$ y $\mathcal{B}^X \backslash \{B\}$ no son equivalentes. Así, por la Proposición 1.2.5, $\mathcal{B}^X$ es la base que consiste de todas las vecindades minimales de X.

Veamos que $X = Y \cup \{m\}$ es una extensión de Y. Como $M_m^X = M_y^Y \backslash \{y\} \cup \{m\}$, donde $y \in Y$ es $\leq_E^Y$-maximal. Entonces, $q(y) = q(m)$. Por tanto, m es $\leq_E^X$-maximal. Por otra parte, $M_x^Y = M_x^X \cap Y$ para todo $x \in Y$. Luego, Y es un subespacio de X.

□

En los siguientes lemas construimos la topología sobre X sin necesidad de suponer que existe el elemento c.

Lema 1.5.15. *Sea Y un espacio topológico finito, y un elemento $\leq_E^Y$-maximal, $\mathcal{B}^Y$ la base que consiste de todas las vecindades minimales de Y y $m \notin Y$. Existe una* *extensión de Y, $X = Y \cup \{m\}$, tal que $\mathcal{B}^X = \mathcal{B}^Y \cup \{M_m^X\}$, donde $M_m^X = M_y^Y \cup \{m\}$.*

Demostración. Definiremos una topología sobre X describiendo sus vecindades minimales. Usaremos la Proposición 1.2.5.

Así, note que $\bigcup \mathcal{B}^X = \bigcup \mathcal{B}^Y \cup \{M_m^X\} = Y \cup \{m\} = X$. Por otro lado, sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}^X$ y $x \in \bigcap \mathcal{C}$. Si $M_m^X \notin \mathcal{C}$. Existe $B \in \mathcal{B}^Y$ tal que $x \in B \subseteq \bigcap \mathcal{C}$. Si $M_m^X \in \mathcal{C}$. Definimos $\mathcal{A} = \{C \in \mathcal{C} : C \neq M_m^X\}$. Note que $A \subseteq \mathcal{B}^Y$. Así,

$$\begin{aligned}
\bigcap \mathcal{C} &= \left(\bigcap \mathcal{A}\right) \cap M_m^X = \left(\bigcap \mathcal{A}\right) \cap \left(M_y^Y \cup \{m\}\right). \\
&= \left(\left(\bigcap \mathcal{A}\right) \cap M_y^Y\right) \cup \left(\left(\bigcap \mathcal{A}\right) \cap \{m\}\right). \\
&= \left(\bigcap \mathcal{A}\right) \cap M_y^Y.
\end{aligned}$$

Al considerar, $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \{M_y^Y\}$. Note que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}^Y$ y $\bigcap \mathcal{D} = \bigcap \mathcal{C}$. Por tanto, $x \in B \subseteq \bigcap \mathcal{C}$.

Sabemos que $\mathcal{B}^X$ y $\mathcal{B}^X \backslash \{B\} = \mathcal{B}^Y \backslash \{B\} \cup \{M_m^X\}$ no son equivalentes para todo $B \in \mathcal{B}^X$. De esta forma, por la Proposición 1.2.5, $\mathcal{B}^X$ es la base que consiste de todas las vecindades minimales de X.

Finalmente, veamos que X es una extensión de Y. Como $M_m^X = M_y^Y \cup \{m\}$, donde $y \in Y$ es $\leq_E^Y$-maximal. Entonces, $q(y) \leq_{lex} q(m)$. Por tanto, m es $\leq_E^X$-maximal. Por otra parte, $M_x^Y = M_x^X \cap Y$ para todo $x \in Y$. Luego, Y es un subespacio de X.

$\square$

Lema 1.5.16. *Sea Y un espacio topológico finito, y un elemento $\leq_E^Y$-maximal, $\mathcal{B}^Y$ la base que consiste de todas las vecindades minimales de Y y $m \notin Y$. Existe una extensión de Y, $X = Y \cup \{m\}$, tal que $\mathcal{B}^X = \mathcal{B}^Y \cup \{M_m^X\}$, donde $M_m^X = X$.*

Demostración. La prueba de este lema sigue la idea de la demostración de los dos lemas anteriores y para no ser demasiado repetitivos la omitiremos.

□

Ahora, es posible definir el espacio topológico X al dejar todas las vecindades minimales de Y intactas a excepción de una y que se tenga lo expresado en 2 y 3 como lo muestra el siguiente lema.

Lema 1.5.17. *Sea Y un espacio topológico finito, y un elemento $\leq_E^Y$-maximal, $\mathcal{B}^Y$ la base que consiste de todas las vecindades minimales de Y y $m \notin Y$. Existe una extensión de Y, $X = Y \cup \{m\}$, tal que $\mathcal{B}^X = B^Y \backslash \{M_y^Y\} \cup \{M_m^X\}$, donde $M_m^X = M_y^Y \cup \{m\}$.*

Demostración. La prueba de este lema sigue la idea de la demostración de los dos lemas anteriores y para no ser demasiado repetitivo la omitiremos.

□

Lema 1.5.18. *Sea Y un espacio topológico discreto y finito, $\mathcal{B}^Y$ la base que consiste de todas las vecindades minimales de Y y $m \notin Y$. Existe una extensión de Y, $X = Y \cup \{m\}$, con la topologia discreta tal que $\mathcal{B}^X = \mathcal{B}^Y \cup \{M_m^X\}$, donde $M_m^X = \{m\}$.*

En el siguiente ejemplo ilustraremos cada uno de los lemas anteriores.

Ejemplo 1.5.19. *Consideremos $Y = \{a, b\}$ las topologías dadas en este conjunto (salvo homeomorfismo) son:*

$$Y_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, Y\}, \quad Y_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, Y\} \text{ y } Y_3 = \{\emptyset, Y\}.$$

Figura 19. $\mathcal{B}^{Y_1}$

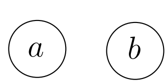


Figura 20. $\mathcal{B}^{Y_2}$

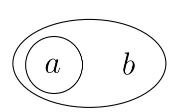
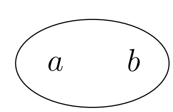


Figura 21. $\mathcal{B}^{Y_3}$



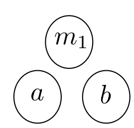
Tomemos el espacio topológico Y_1 y veamos los espacios topológicos que resultan de agregar un elemento. Para ello, primero veamos los subespacios posibles que resultan al dejar todas las vecindades minimales de cada $y \in Y_1$ intactas.

1. *Sea $X_1 = Y_1 \cup \{m_1\}$. Como Y_1 es discreto. Entonces si definimos $M_{m_1}^{X_1} = \{m_1\}$. Por Lema 1.5.18 sabemos que*

$$\mathcal{B}^{X_1} = \{\{a\}, \{b\}, \{m_1\}\}$$

es la base de todas las vecindades minimales de X_1.

Figura 22. $\mathcal{B}^{X_1}$

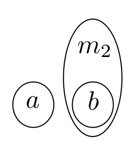


2. *Si $X_2 = Y_1 \cup \{m_2\}$. Como b es $\leq_E^Y$-maximal. Definimos $M_{m_2}^{X_2} = M_b^{Y_1} \cup \{m_2\} = \{b, m_2\}$. Por el Lema 1.5.15 sabemos que*

$$\mathcal{B}^{X_2} = \{\{a\}, \{b\}, \{b, m_2\}\}$$

es la base de todas las vecindades minimales de X_2.

Figura 23. $\mathcal{B}^{X_2}$

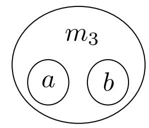


3. *Si $X_3 = Y_1 \cup \{m_3\}$. Definimos $M_{m_3}^{X_3} = X_3 = \{a, b, m_3\}$. Por el Lema 1.5.16 sabemos que*

$$\mathcal{B}^{X_3} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b, m_3\}\}$$

es la base de todas las vecindades minimales de X_3.

Figura 24. $\mathcal{B}^{X_3}$



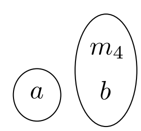
Ahora, veamos los subespacios posibles que resultan al dejar todas las vecindades minimales de cada $y \in Y_1$ intactas a excepción de la de un elemento $\leq_E^{Y_1}$-maximal.

1. *Si $X_4 = Y_1 \cup \{m_4\}$. Como b es $\leq_E^{Y}$-maximal. Definimos $M_{m_4}^{X_4} = M_b^{Y_1} \cup \{m_4\} = \{b, m_4\}$. Por el Lema 1.5.17 sabemos que*

$$\mathcal{B}^{X_4} = \{\{a\}, \{b, m_4\}\}$$

es la base de todas las vecindades minimales de X_4.

Figura 25. $\mathcal{B}^{X_4}$



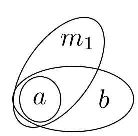
Haciendo un procedimiento similar con Y_2 obtenemos los siguientes espacios.

1. *Si $X_1 = Y_2 \cup \{m_1\}$. Como b es $\leq_E^{Y}$-maximal y $M_a^{Y_2} = M_b^{Y_2} \backslash \{b\}$. Definimos $M_{m_1}^{X_1} = M_a^{Y_2} \cup \{m_1\} = \{a, m_1\}$. Por el Lema 1.5.14 sabemos que*

$$\mathcal{B}^{X_1} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, m_1\}\}$$

es la base de todas las vecindades minimales de X_1.

Figura 26. $\mathcal{B}^{X_1}$

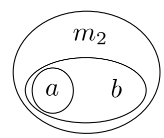


2. *Si* $X_2 = Y_2 \cup \{m_2\}$. *Definimos* $M_{m_2}^{X_2} = X_2 = \{a, b, m_2\}$. *Por el Lema 1.5.16 sabemos que*

$$\mathcal{B}^{X_2} = \{\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, m_2\}\}$$

es la base de todas las vecindades minimales de X_2.

Figura 27. $\mathcal{B}^{X_2}$

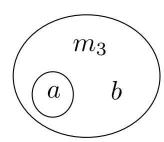


3. *Si* $X_3 = Y_2 \cup \{m_3\}$. *Como* b *es* $\leq_E^Y$*-maximal. Definimos* $M_{m_3}^{X_3} = M_b^{Y_2} \cup \{m_3\} = \{a, b, m_3\}$. *Por el Lema 1.5.17 sabemos que*

$$\mathcal{B}^{X_3} = \{\{a\}, \{a, b, m_3\}\}$$

es la base de todas las vecindades minimales de X_3.

Figura 28. $\mathcal{B}^{X_3}$



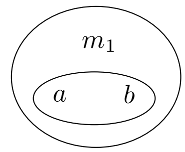
Finalmente, al agregar un punto al espacio topológico Y_3 *obtenemos los siguientes espacios.*

1. *Si* $X_1 = Y_3 \cup \{m_1\}$. *Definimos* $M_{m_1}^{X_1} = X_1 = \{a, b, m_1\}$. *Por el Lema 1.5.16 sabemos que*

$$\mathcal{B}^{X_1} = \{\{\{a, b\}, \{a, b, m_1\}\}$$

es la base de todas las vecindades minimales de X_1.

Figura 29. $\mathcal{B}^{X_1}$

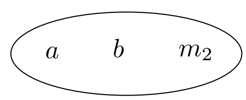


2. *Si* $X_2 = Y_3 \cup \{m_2\}$. *Como* b *es* $\leq_E^{Y_3}$*-maximal. Definimos* $M_{m_2}^{X_2} = M_b^{Y_3} \cup \{m_2\} = \{a, b, m_2\}$. *Por el Lema 1.5.17 sabemos que*

$$\mathcal{B}^{X_2} = \{\{a, b, m_2\}\}$$

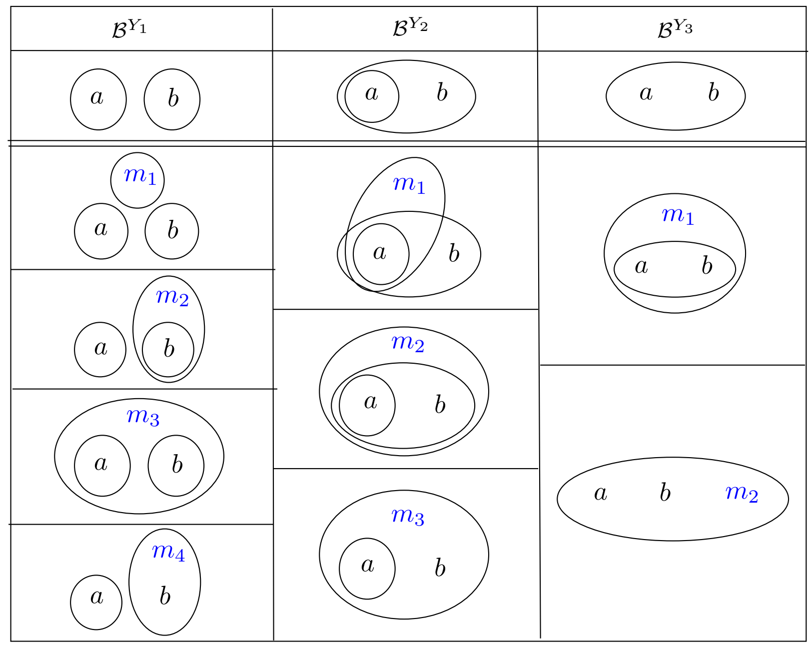
es la base de todas las vecindades minimales de X_2.

Figura 30. $\mathcal{B}^{X_2}$



En la siguiente tabla presentamos un resumen de las topologías construidas en el ejemplo anterior.

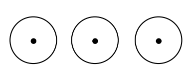
Figura 31. Topologías de 3 puntos que surgen de añadir un punto a una de 2 puntos.



Note que en el ejemplo anterior, por medio de los lemas hemos formado todas las topologías de 3 puntos (salvo homeomorfismo) al añadir un punto a una de 2 puntos. Sin embargo, con estos cinco lemas, no es posible determinar todas las topologías de $n+1$ puntos al agregar un punto a una topología de n puntos.

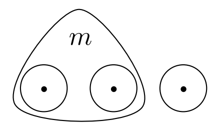
Ejemplo 1.5.20. *Sea Y un espacio topológico dado a continuación en la Figura 32*

Figura 32. $\mathcal{B}^Y$



Uno de los espacios topológicos que surgen al agregar un m a Y es el espacio topológico X dado por la Figura 33

Figura 33. $\mathcal{B}^X$



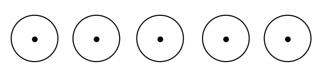
Sin embargo, este espacio no surge de ninguno de los 5 lemas anteriormente formulados.

Los ejemplos que mostraremos a continuación indican que el método, sugerido por los lemas anteriores para construir topologías agregando un punto, no es completo. Es una pregunta interesante averiguar si existe un algoritmo para generar sistemáticamente todas esas topologías.

El siguiente ejemplo ilustra algunos espacios generados al agregar un punto a un espacio finito.

Ejemplo 1.5.21. *Sea Y un espacio topológico dado a continuación en la Figura 34*

Figura 34. $\mathcal{B}^Y$



Así, los espacios X_1, X_2 y X_3 que se muestran a continuación resultan de añadir un punto m a Y.

Figura 35. $\mathcal{B}^{X_1}$

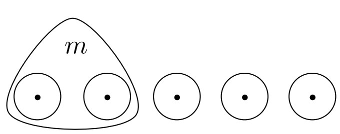


Figura 36. $\mathcal{B}^{X_2}$

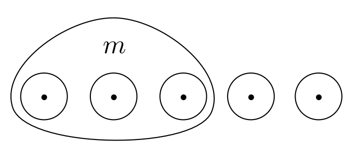
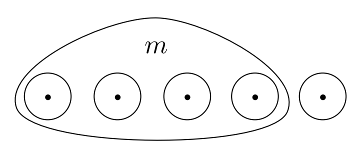


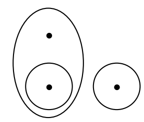
Figura 37. $\mathcal{B}^{X_3}$



El siguiente ejemplo ilustra que una situación análoga a la anterior pero comenzando con un espacio no discreto.

Ejemplo 1.5.22. *Sea Y el espacio topológico dado a continuación en la Figura 38*

Figura 38. $\mathcal{B}^{Y}$



Los espacios X_1, X_2 y X_3 que se muestran a continuación resultan de añadir un punto m a Y.

Figura 39. $\mathcal{B}^{X_1}$

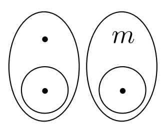


Figura 40. $\mathcal{B}^{X_2}$

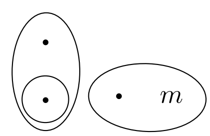
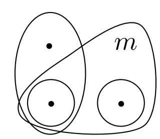


Figura 41. $\mathcal{B}^{X_3}$



Para finalizar, queremos notar que no hemos analizado los espacios que se obtienen agregando un punto tal que su vecindad minimal no es $\subseteq$-maximal.

2. TOPOLOGÍA DE GREEN DE UN SEMIGRUPO

En esta sección, daremos inicialmente una breve introducción de los semigrupos y el orden parcial asignado a estos conocido como orden parcial izquierdo de Green. Usaremos como referencia general para la teoría de semigrupos el libro [3]. La idea es tener claros los conceptos básicos que nos servirán para definir la topología de Green en un semigrupo, que es la topología principal asociada al cuasi-orden de Green denotada por $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$. Esta topología es el objeto con el que trabajaremos de ahora en adelante. En esta sección describiremos algunas de sus propiedades y usos.

2.1. SEMIGRUPOS

Definición 2.1.1. *Un **semigrupo** es un conjunto S no vacío con una operación binaria asociativa $\cdot$.*

Sea $(S, \cdot)$ un semigrupo, se dice que S tiene identidad si existe $e \in S$ tal que $e \cdot s = s \cdot e = s$ para todo $s \in S$.

Ejemplo 2.1.2. *Sea X un conjunto, entonces el conjunto X^X de todas las funciones $f : X \longrightarrow X$ es un semigrupo con la composición de funciones. Es claro ver que la función identidad $1_X \in X^X$ corresponde a la identidad del semigrupo.*

Sin embargo, podemos encontrar semigrupos sin identidad.

[3] P. A. GRILLET. "Semigroups: an introduction to the structure theory". En: *Marcel Dekker, Inc. New York* (1995).

Ejemplo 2.1.3. *Sea*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{Z}_2).$$

S *resulta ser un semigrupo con la multiplicación de matrices, pero al hacer las respectivas operaciones notamos que no hay un elemento en* S *que cumpla la condición para ser la identidad.*

De este modo, surge la siguiente definición.

Definición 2.1.4. *Sea* $(S, *)$ *un semigrupo sin identidad,* $S^1 = S \cup \{1\}$ *es un semigrupo, donde* $1 \notin S$ *y la operación binaria* $\cdot$ *en* S^1 *se define como sigue:*

$$s \cdot a = \begin{cases} s * a & \textit{si} \quad s, a \in S \\ s & \textit{si} \quad a = 1 \\ a & \textit{si} \quad s = 1 \end{cases}$$

En otras palabras 1 *es la identidad de* $(S^1, \cdot)$.

Si S es un semigrupo con identidad, entonces pondremos $S^1 = S$.

Ejemplo 2.1.5. *En el Ejemplo 2.1.3 es fácil ver que* $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ *podría ser la identidad, pero* $1 \notin S$. *De esta forma,* $S^1 = S \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Definición 2.1.6. *Un* ***subsemigrupo*** *de un semigrupo* $(S, \cdot)$ *es un conjunto no vacío* $A \subseteq S$ *tal que* $xy \in A$ *si* $x, y \in A$.

Ejemplo 2.1.7. *Sea* S *como en el Ejemplo 2.1.3, considere*

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \textit{y} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es claro que $V, W \subseteq S$ y que tanto $(V, \cdot)$ como $(W, \cdot)$ son semigrupos. De esta manera, $(V, \cdot)$ y $(W, \cdot)$ resultan ser subsemigrupos de $(S, \cdot)$.

Un concepto interesante de analizar son las funciones entre semigrupos que conservan las operaciones: los homomorfismos de semigrupos.

Definición 2.1.8. *Sean $(S_1, \cdot)$ y $(S_2, *)$ dos semigrupos y $f : S_1 \to S_2$ una función. Se dice que f es un **homomorfismo** entre S_1 y S_2 si para todos $x, y \in S_1$ se verifica que*

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

Denotaremos por $Hom(S_1, S_2)$ al conjunto de los homomorfismos entre S_1 y S_2.

Definición 2.1.9. *Un **monomorfismo** o **inmersión de semigrupo** es un homomorfismo inyectivo. Un **epimorfismo** es un homomorfismo sobreyectivo. Finalmente, un **isomorfismo** es un homomorfismo biyectivo.*

Cuando exista un isomorfismo entre los semigrupos S_1 y S_2 diremos que son semigrupos isomorfos y lo denotaremos por $S_1 \cong S_2$.

Definición 2.1.10. *Un **ideal izquierdo** de S es un subconjunto no vacío $L \subseteq S$ tal que $SL \subseteq L$.*

Definición 2.1.11. *Sea S un semigrupo. El **ideal principal izquierdo** es el generado por un elemento $a \in S$, esto es, el conjunto*

$$Sa \cup \{a\}.$$

A los semigrupos se les puede pre-ordenar por medio de cuasi-órdenes. Como se mencionó anteriormente nos interesa el cuasi-orden izquierdo de Green que se define a continuación.

Definición 2.1.12. *Sea S un semigrupo. El **cuasi-orden izquierdo de Green** $\leq_{\mathcal{L}}$ es dado por*

$$a \leq_{\mathcal{L}} b \textit{ si } a = u \cdot b \textit{ para algún } u \in S^1.$$

O, de otra forma

$$a \leq_{\mathcal{L}} b \textit{ si } S \cdot a \cup \{a\} \subseteq S \cdot b \cup \{b\}.$$

Ejemplo 2.1.13. *Sea $(S, \cdot)$ un grupo. Para cada $a, b \in S$ se tiene que $a = (a \cdot b^{-1}) \cdot b$. Luego, $Sa = Sb = S$ para todo $a, b \in S$. Así, $a \leq_{\mathcal{L}} b \leq_{\mathcal{L}} a$. Este cuasi-orden se conoce como el cuasi-orden **indiscreto.***

Ejemplo 2.1.14. *Sea S un conjunto y defina una operación de la siguiente manera: $a \cdot b = a$ para todo $a, b \in S$. Entonces $S^1 a = S^1 b = S$ para cada $a, b \in S$. De esta forma, el cuasi-orden izquierdo de Green nuevamente resulta ser el cuasi-orden indiscreto.*

Ejemplo 2.1.15. *Sea $(S, \cdot)$ un semigrupo tal que $a \cdot b = b$ para cada $a, b \in S$ entonces $S^1 a = \{a\}$ y $S^1 b = \{b\}$ para cada $a, b \in S$. De esta forma, la única forma para comparar $a, b \in S$ es cuando $a = b$. Este cuasi-orden se conoce como cuasi-orden **discreto.***

Ejemplo 2.1.16. *Sea S^1 como en el Ejemplo 2.1.5, llamemos*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$S^1 0 = \{0\}, \quad S^1 e_{11} = \{0, e_{11}, e_{21}\} = S^1 e_{21}, \quad S^1 e_{12} = \{0, e_{12}, e_{22}\} = S^1 e_{22}.$$

Luego, el cuasi-orden izquierdo de Green está definido por $0 \leq_{\mathcal{L}} e_{ij}$ *para cada* $i, j \in \{1, 2\}$, $e_{11} \leq_{\mathcal{L}} e_{21} \leq_{\mathcal{L}} e_{11}$ *y* $e_{12} \leq_{\mathcal{L}} e_{22} \leq_{\mathcal{L}} e_{12}$. *De esta forma, el diagrama de Hasse es dado por la Figura 42.*

Figura 42. Diagrama de Hasse para el Ejemplo 2.1.16

$$\begin{tikzcd}
e_{21} \arrow[r, shift left] & e_{11} \arrow[l, shift left] & & e_{12} \arrow[r, shift left] & e_{22} \arrow[l, shift left] \\
& & 0 \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

2.2. TOPOLOGÍA DE GREEN

Definición 2.2.1. *Sea* S *un semigrupo, la* ***topología de Green*** $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ *en* S *es la topología principal dada por el cuasi-orden de Green. O de manera equivalente, aquella donde la vecindad minimal abierta de* $x \in S$ *es dada por*

$$M_x^S = S^1 x = \{s \cdot x : s \in S^1\}.$$

Note que $\{M_x^S : x \in S\}$, es una base para $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$. Cuando no haya confusión, escribiremos M_x.

Diremos que una topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X **proviene de una estructura de semigrupo** si existe una operación de semigrupo $\cdot$ sobre X tal que $\mathcal{T}$ resulta ser la topología de Green de $(X, \cdot)$. Es decir, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.

Ejemplo 2.2.2. *Sea* $(S, \cdot)$ *un grupo, como vimos en el Ejemplo 2.1.13* $Sa = Sb = S$ *para todo* $a, b \in S$, *de esta forma, la vecindad minimal de* $a \in S$ *coincide con* S, *esto implica que* $\mathcal{T}_{\mathcal{L}} = \{S, \emptyset\}$, *es decir,* $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ *es la topología indiscreta.*

Ejemplo 2.2.3. *Sea* $(S, \cdot)$ *el semigrupo definido en el Ejemplo 2.1.14, dado por* $a \cdot b = a$ *para todo* $a, b \in S$. *Al igual que en el ejemplo anterior, para este caso,* $S^1 a = S^1 b = S^1$ *para todo* $a, b \in S$, *luego, la topología de Green* $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ *también es la indiscreta.*

Ejemplo 2.2.4. *Consideremos el caso del semigrupo dado por el Ejemplo 2.1.15 donde* $a \cdot b = b$ *para cada* $a, b \in S$*. Como concluimos allí* $S^1 a = \{a\}$ *y* $S^1 b = \{b\}$ *para cada* $a, b \in S$*. De esta forma,* $\mathcal{T}_{\mathcal{L}} = \mathcal{P}(S)$*, es decir* $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ *resulta ser la topología discreta.*

Sea S un semigrupo con la topología de Green. Observemos que si B un subsemigrupo de S, B tiene dos posibles topologías: La topología de subespacio y la topología de Green. El siguiente ejemplo muestra que esas dos topologías no son necesariamente iguales. En relación con esto, tenemos el siguiente resultado.

Ejemplo 2.2.5. *Sea* S^1 *como en el Ejemplo 2.1.5, llamemos*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que

$$M_0^S = \{0\},\quad M_{e_{11}}^S = \{0, e_{11}, e_{21}\} = M_{e_{21}}^S, \quad \text{y} \quad M_{e_{12}}^S = \{0, e_{12}, e_{22}\} = M_{e_{22}}^S$$

Como vimos en el Ejemplo 2.1.7. $V = \{0, e_{11}, e_{21}\}$ *y* $W = \{0, e_{11}, e_{22}\}$ *resultan ser subsemigrupos de* S*. Así, tenemos que en* $(V, \mathcal{T}_{\mathcal{L}})$

$$M_0^V = \{0\},\quad M_{e_{11}}^V = \{0, e_{11}, e_{21}\} \quad \text{y} \quad M_{e_{21}}^V = \{0, e_{21}\}$$

Por otro lado en $(W, \mathcal{T}_{\mathcal{L}})$

$$M_0^W = \{0\},\quad M_{e_{11}}^W = \{0, e_{11}\} \quad \text{y} \quad M_{e_{22}}^W = \{0, e_{22}\}$$

Figura 43. $\mathcal{B}^S$

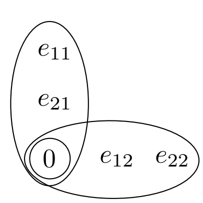


Figura 44. $\mathcal{B}^V$

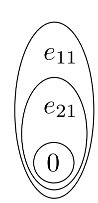
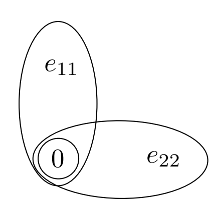


Figura 45. $\mathcal{B}^W$



Luego, V es abierto en S, sin embargo las vecindades minimales de V (como semigrupo con la topología de Green) no son abiertos en S. Luego, $(V, \mathcal{T}_{\mathcal{L}})$ no es subespacio topológico de S. Por otro lado, $(W, \mathcal{T}_{\mathcal{L}})$ es subespacio topológico de S, pero no es un abierto de S.

Claramente, para cualquier subsemigrupo B de un semigrupo A y cada $x \in B$ se tiene que $M_x^B \subseteq M_x^A$.

Proposición 2.2.6. *Sea B un subsemigrupo de un semigrupo A. Entonces $(B, \mathcal{T}_{\mathcal{L}})$ es un subespacio topológico de $(A, \mathcal{T})$ si y solo si*

$$Bb \cup \{b\} = (Ab \cup \{b\}) \cap B \quad \textit{para cada } b \in B.$$

Demostración. $(\Longrightarrow)$ Note que $Bb \cup \{b\} = M_b^B$. Como $(B, \mathcal{T}_{\mathcal{L}})$ es un subespacio topológico de A entonces $M_b^B = M_b^A \cap B = (Ab \cup \{b\}) \cap B$. Luego, $Bb \cup \{b\} = (Ab \cup \{b\}) \cap B$.

$(\Longleftarrow)$ Sea V abierto de B. Entonces $V = \bigcup_{b \in B} M_b^B$. Como $M_b^B = M_b^A \cap B$ para cada $b \in B$. Entonces, $V = \left(\bigcup_{b \in B} M_b^A\right) \cap B$. Luego, B es un subespacio topológico de A.

□

Definición 2.2.7. *Sea $(S, \odot)$ un semigrupo. Decimos que S es un semigrupo topológico si $\odot : S \times S \to S$ es continua.*

Es natural preguntarse si la topología de Green hace al semigrupo un semigrupo topológico. La siguiente proposición trata de ese problema.

Proposición 2.2.8. *Sea $(S, \odot)$ un semigrupo. $\odot : S \times S \to S$ es continua si y solo si para cada $(x, y) \in S \times S$ se tiene que*

$$M_x \odot M_y \subseteq M_{x \odot y}.$$

Demostración. Del Lema 1.4.6 tenemos que $\odot$ es continua si y solo si, $\odot[M_{(x,y)}] \subseteq M_{\odot(x,y)}$. De la Proposición 1.2.13 sabemos que $\odot[M_{(x,y)}] = M_x \odot M_y \subseteq M_{\odot(x,y)} = M_{x\odot y}$.

$\square$

2.3. SEMIGRUPOS FINITOS

En esta sección vemos como construir nuevos semigrupos y sus topologías de Green. Así mismo, vemos como construir espacios topológicos que provienen de un semigrupo.

La siguiente proposición, es una de las propiedades interesantes que tiene la topología de Green de un semigrupo.

Proposición 2.3.1. *(Richmond [2]) Sea S un semigrupo finito con topología $\mathfrak{T}_{\mathcal{L}}$. Para $x, y \in S$ con $x \in P_k$ se tiene que $xy \in P_t$ para algún $t \leq k$. Más aún, para cualquier $x, y \in S,\ q(xy) \leq q(x)$.*

Demostración. Como $x \in P_k$ tenemos que $M_x = Sx \cup \{x\} = \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$ con $x_1 = x$ y $x_i \in P_{a_i}$ tal que $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k$ donde $k = a_1$ y por tanto $q(x) = (k, a_2, \ldots, a_k)$. Supongamos que $xy \in P_t$. Luego, $M_{xy} = Sxy \cup \{xy\} = \{x_1y, x_2y, \ldots, x_ky\}$ donde $xy = x_1y = y_1$ y cada $x_iy = y_i$ para $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Luego, $|M_{xy}| \leq |M_x|$. Es decir, $t \leq k$. En general, se sigue que $|M_{x_iy}| \leq |M_{x_i}|$ y por tanto $q(xy) \leq q(x)$.

$\square$

Ejemplo 2.3.2. *Sea $(S, \cdot)$ un semigrupo con la multiplicación de matrices, tal que*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Llamemos a los elemento de S de la siguiente manera

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que $M^S_{e_{11}} = \{0, e_{11}, e_{21}\}$ *y* $M^S_{e_{22}} = \{0, e_{12}, e_{22}\}$. *Luego,* $q(e_{11}) = (3, 3, 1)$ *y* $q(e_{22}) = (3, 3, 1)$. *Ahora,*

$$e_{11} \cdot e_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Luego, $M^S_{e_{11} \cdot\ e_{22}} = M^S_0 = \{0\}$. *Por tanto* $q(e_{11} \cdot e_{22}) = (1)$. *De esta forma,* $q(e_{11} \cdot e_{22}) \leq q(e_{11})$.

El siguiente teorema es una de las herramientas que nos permitirá verificar qué topologías provienen de una estructura de semigrupo, observando la base $\mathcal{B}$ de la topología a estudiar.

Teorema 2.3.3. *(Richmond [2]) Sea S un semigrupo finito con topología $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ y base $\mathcal{B}$ que consiste de todas las vecindades minimales abiertas. Entonces todos los conjuntos en $\mathcal{B}$ que son $\subseteq$-minimales tienen la misma cardinalidad.*

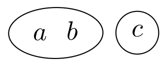
Demostración. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $y_1, y_2, \ldots, y_t$ elementos en S con $M_{x_1} = M_{x_2} = \ldots = M_{x_k} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ y $M_{y_1} = M_{y_2} = \ldots = M_{y_t} = \{y_1, y_2, \ldots, y_t\}$ tales que M_{y_1} y M_{x_1} son $\subseteq$-minimales. Note que $q(x_1) = q(x_2) = \ldots = q(x_k) = (k, k, k, \ldots, k)$, así mismo $q(y_1) = q(y_2) = \ldots = q(y_t) = (t, t, t, \ldots, t)$. De la Proposición 2.3.1 como $x_1 y_1 \in M_{y_1}$ se tiene que $t \leq k$. Análogamente, obtenemos que $y_1 x_1 \in M_{x_1}$ y por tanto $k \leq t$. Luego, $t = k$.

$\square$

En consecuencia, si $z \in S$ y la última coordenada diferente de cero de $q(z)$ es j, entonces para cada $x \in S$, $q(x)$ contiene al menos j entradas iguales a j como las entradas finales distintas de cero.

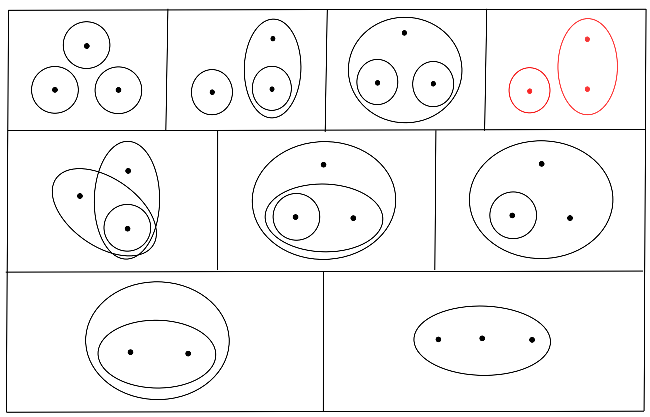
Ejemplo 2.3.4. *Sea $S = \{a, b, c\}$ un espacio topológico tal que $M_a = \{a, b\} = M_b$ y $M_c = \{c\}$, note que ambas son $\subseteq$-minimales, pero como $|M_a| = |M_b| \neq |M_c|$ entonces dicha topología no proviene de una estructura de semigrupo.*

Figura 46. $\mathcal{B}^S$



Ejemplo 2.3.5. *De las topologías sobre un conjunto con tres puntos, por el teorema anterior, concluimos que solo una (resaltada en rojo) no proviene de un semigrupo.*

Figura 47. Topologías de tres puntos



2.3.1. De semigrupos a topologías En el capítulo anterior presentamos algunos procedimientos para la construcción de espacios topológicos agregando un punto a otro espacio. A continuación mostraremos algunos procedimientos similares para generar topologías de Green.

Proposición 2.3.6. *Sea $(S, *)$ un semigrupo finito con topología $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ y base $\mathcal{B}$ de vecindades mínimales abiertas. Para $m \notin S$, sea $S^{\uparrow} = S \cup \{m\}$. Entonces hay una estructura de semigrupo en $S^{\uparrow}$ tal que $\mathcal{B}^{\uparrow} = \mathcal{B} \cup \{S^{\uparrow}\}$ es la base de vecindades minimales de su topología de Green.*

Demostración. Sean $s, a \in S^{\uparrow}$ considere la siguiente operación sobre $S^{\uparrow}$

$$s \cdot a = \begin{cases} s * a & \text{, si} \quad s, a \in S; \\ s & \text{, si} \quad a = m; \\ a & \text{, si} \quad s = m. \end{cases}$$

Note que m actúa como identidad, independientemente de si S ya tenía una identidad. Así, es claro ver que $\cdot$ es asociativa.

Ahora, sea $x \in S^{\uparrow}$. Si $x \neq m$. Note que

$$\begin{aligned} M_x^{S^{\uparrow}} &= S^{\uparrow}x = Sx \cup \{m \cdot x\}. \\ &= Sx \cup \{x\}. \\ &= M_x^S. \end{aligned}$$

Si $x = m$, como m es la identidad de $S^{\uparrow}$, entonces

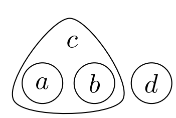
$$M_m^{S^{\uparrow}} = S^{\uparrow}m = S^{\uparrow}.$$

Luego, $\mathcal{B}^{\uparrow} = \mathcal{B} \cup \{S^{\uparrow}\}$. Así, $S^{\uparrow}$ proviene de una estructura de semigrupo.

□

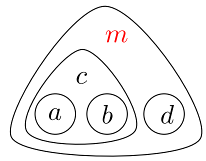
Ejemplo 2.3.7. *Sea S el semigrupo cuya base $\mathcal{B}^S$ es dada en la Figura 48*

Figura 48. $\mathcal{B}^S$



Sea $m \notin S$. El semigrupo $S^{\uparrow} = S \cup \{m\}$ está dado por la Figura 49.

Figura 49. $\mathcal{B}^{S^{\uparrow}}$



Proposición 2.3.8. *Sea $(S, *)$ un semigrupo finito con topología $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ y base $\mathcal{B}$ de vecindades mínimales abiertas. Para $m \notin S$, sea $S^{\downarrow} = S \cup \{m\}$. Entonces hay una estructura de semigrupo en $S^{\downarrow}$ tal que $\mathcal{B}^{\downarrow} = \{B \cup \{m\} : B \in \mathcal{B}\} \cup \{\{m\}\}$ es la base de vecindades minimales de su topología de Green.*

Demostración. Añadiendo un elemento m a S que actúa como un cero, independientemente de si S ya tenía un cero, obtenemos el semigrupo $S^{\downarrow} = S \cup \{m\}$ con la topología deseada. En efecto, sean $s, a \in S^{\downarrow}$ considere la siguiente operación sobre $S^{\downarrow}$

$$s \cdot a = \begin{cases} s * a & \text{, si} \quad s, a \in S; \\ m & \text{, si} \quad a = m; \\ m & \text{, si} \quad s = m. \end{cases}$$

Note que m actúa como cero. Así, es claro ver que $\cdot$ es asociativa.

Ahora, sea $x \in S^{\downarrow}$. Si $x \neq m$. Note que

$$\begin{aligned} M_x^{S^{\downarrow}} &= S^{\downarrow}x \cup \{x\} = Sx \cup \{m \cdot x\} \cup \{x\}. \\ &= Sx \cup \{m\} \cup \{x\}. \\ &= M_x^S \cup \{m\}. \end{aligned}$$

Si $x = m$, como m es el cero de $S^{\downarrow}$, entonces

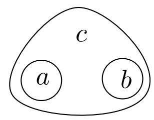
$$M_m^{S^{\downarrow}} = S^{\downarrow}m = \{m\}.$$

Luego, $\mathcal{B}^{\downarrow} = \{B \cup \{m\} : B \in \mathcal{B}\} \cup \{\{m\}\}$. Así, $S^{\downarrow}$ proviene de una estructura de semigrupo.

$\square$

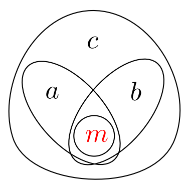
Ejemplo 2.3.9. *Sea S el semigrupo cuya base $\mathcal{B}^S$ es dada en la Figura 50*

Figura 50. $\mathcal{B}^S$



Sea $m \notin S$. El semigrupo $S^{\downarrow} = S \cup \{m\}$ está dado por la Figura 51.

Figura 51. $\mathcal{B}^{S^{\downarrow}}$



Los siguientes dos teoremas permiten definir semigrupos desde la unión de otros dos semigrupos.

Teorema 2.3.10. *Sean $(Q_1, \cdot_1)$ y $(Q_2, \cdot_2)$ semigrupos finitos disjuntos con topologías $\mathcal{T}^1_{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{T}^2_{\mathcal{L}}$ con bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de vecindades minimales abiertas, respectivamente. Sea $Q^* = Q_1 \cup Q_2$. Entonces Q^* es un semigrupo con la siguiente operación binaria:*

$$x \cdot y = \begin{cases} x \cdot_1 y & , si \quad x, y \in Q_1; \\ x \cdot_2 y & , si \quad x, y \in Q_2; \\ x & , si \quad x \in Q_1 \text{ e } y \in Q_2; \\ y & , si \quad x \in Q_2 \text{ e } y \in Q_1. \end{cases}$$

La topología correspondiente $\mathcal{T}^*_{\mathcal{L}}$ para Q^* tiene base $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_1 \cup \{B \cup Q_1 : B \in \mathcal{B}_2\}$.

Demostración. Sean $x, y, z \in Q^*$. Para verificar si $\cdot$ es asociativa surgen los siguientes 8 casos

Caso 1 $x, y, z \in Q_1$. Entonces $(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot_1 y) \cdot_1 z = x \cdot_1 (y \cdot_1 z) = x \cdot (y \cdot z)$.

Caso 2 $x, y \in Q_1$ y $z \in Q_2$. Entonces $(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot y) = x \cdot (y \cdot z)$.

Caso 3 $x \in Q_1$ y $y, z \in Q_2$. Entonces $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot z = x = x \cdot (y \cdot_2 z) = x \cdot (y \cdot z)$.

Caso 4 $y \in Q_1$ y $x, z \in Q_2$. Análogo al caso 3.

Caso 5 $x, z \in Q_1$ y $y \in Q_2$. Análogo al caso 2.

Caso 6 $y, z \in Q_1$ y $x \in Q_2$. Análogo al caso 2.

Caso 7 $z \in Q_1$ y $x, y \in Q_2$. Análogo al caso 3.

Caso 8 $x, y, z \in Q_2$. Análogo al caso 1.

Así, $\cdot$ es asociativa y por tanto $(Q^*, \cdot)$ es un semigrupo.
Veamos ahora que $\mathcal{B}^*$ es la base de $\mathcal{T}^*_{\mathcal{L}}$. Para ello veamos que $\{M_x^{Q^*} : x \in Q^*\} = \mathcal{B}^*$.
$(\subseteq)$ Sea $x \in Q^*$. Si $x \in Q_1$ entonces, como $Q_2 \cdot x = \{x\}$ se tiene que

$$M_x^{Q^*} = (Q^* \cdot x) \cup \{x\} = (Q_1 \cdot x) \cup \{x\} = M_x^{Q_1}.$$

Luego, $M_x^{Q^*} \in \mathcal{B}_1$ y por tanto $M_x^{Q^*} \in \mathcal{B}^*$. Si $x \in Q_2$ entonces,

$$M_x^{Q^*} = Q^* \cdot x \cup \{x\} = (Q_1 \cdot x) \cup (Q_2 \cdot x) \cup \{x\} = Q_1 \cup M_x^{Q_2}.$$

Entonces, $M_x^{Q^*} \in \{B \cup Q_1 : B \in \mathcal{B}_2\}$ y por ende $M_x^{Q^*} \in \mathcal{B}^*$. Por tanto, $\{M_x^{Q^*} : x \in Q^*\} \subseteq \mathcal{B}^*$.
$(\supseteq)$ Sea $D \in \mathcal{B}^*$. Si $D \in \mathcal{B}_1$ entonces $D \in \{M_x^{Q^*} : x \in Q^*\}$. Si $D \in \{B \cup Q_1 : B \in \mathcal{B}_2\}$, entonces $D = B \cup Q_1$ para algún $B \in \mathcal{B}_2$. Como $B \in \mathcal{B}_2$ sabemos que $B = M_z^{Q_2}$ para algún $z \in Q_2$. Así, $D = M_z^{Q^*}$. Luego, $D \in \{M_x^{Q^*} : x \in Q^*\}$. Así, $\mathcal{B}^* \subseteq \{M_x^{Q^*} : x \in Q^*\}$.
$\square$

Denotaremos por $Q_1 \uparrow Q_2$ el semigrupo Q^* construido en la proposición anterior.

Ejemplo 2.3.11. *Sean Q_1 y Q_2 los semigrupos cuyas bases de vecindades minimales $\mathcal{B}^1$ y $\mathcal{B}^2$ respectivamente, son dadas en las Figuras 52 y 53.*

Figura 52. $\mathcal{B}^1$

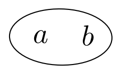
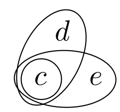
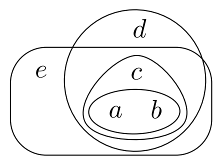


Figura 53. $\mathcal{B}^2$



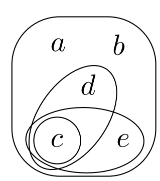
Entonces por el Teorema 2.3.10 se tiene que $Q_1 \uparrow Q_2$ es un semigrupo tal que la topología de Green correspondiente tiene base $\mathcal{B}^{Q_1 \uparrow Q_2} = \mathcal{B}_1 \cup \{B \cup Q_1 : B \in \mathcal{B}_2\}$ representada en la Figura 54.

Figura 54. $\mathcal{B}^{Q_1 \uparrow Q_2}$



Si consideramos $Q_2 \uparrow Q_1$ igualmente esto es un semigrupo donde la topología de Green correspondiente tiene base $\mathcal{B}^{Q_2 \uparrow Q_1} = \mathcal{B}_2 \cup \{B \cup Q_2 : B \in \mathcal{B}_1\}$ representada en la Figura 55.

Figura 55. $\mathcal{B}^{Q_2 \uparrow Q_1}$



Mientras que $Q_1 \uparrow Q_2$ siempre es un espacio topológico conexo, el siguiente teorema da una construcción de un semigrupo cuya topología de Green es disconexa.

Teorema 2.3.12. *Sean* $(Q_1, \cdot_1)$ *y* $(Q_2, \cdot_2)$ *semigrupos finitos disjuntos con topologías* $\mathcal{T}^1_{\mathcal{L}}$ *y* $\mathcal{T}^2_{\mathcal{L}}$ *con bases* $\mathcal{B}_1$ *y* $\mathcal{B}_2$ *de vecindades mínimas abiertas, respectivamente. Suponga que existe una inmersión de semigrupos* $\varphi : Q_1 \to Q_2$ *que preserva vecindades minimales abiertas, es decir,* $\varphi(M^{Q_1}_{s_1}) = M^{Q_2}_{\varphi(s_1)}$ *para todo* $s_1 \in Q_1$. *Sea* $Q^* = Q_1 \cup Q_2$. *Entonces* Q^* *se convierte en un semigrupo cuando se le da la siguiente operación binaria:*

$$x \cdot y = \begin{cases} x \cdot_1 y & , si \quad x, y \in Q_1; \\ x \cdot_2 y & , si \quad x, y \in Q_2; \\ \varphi(x) \cdot_2 y & , si \quad x \in Q_1 \text{ e } y \in Q_2; \\ \varphi^{-1}(x \cdot_2 \varphi(y)) & , si \quad x \in Q_2 \text{ e } y \in Q_1. \end{cases}$$

La topología correspondiente $\mathcal{T}^*_{\mathcal{L}}$ *para* Q^* *tiene base* $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$*.*

Demostración. Sean $x, y, z \in Q^*$. Para verificar si $\cdot$ es asociativa surgen los siguientes 8 casos

Caso 1 $x, y, z \in Q_1$. Entonces $(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot_1 y) \cdot_1 z = x \cdot_1 (y \cdot_1 z) = x \cdot (y \cdot z)$.

Caso 2 $x, y \in Q_1$ y $z \in Q_2$. Entonces

$$(x \cdot y) \cdot z = \varphi(x \cdot_1 y) \cdot_2 z = \varphi(x) \cdot_2 \varphi(y) \cdot_2 z = \varphi(x) \cdot_2 (y \cdot z) = x \cdot (y \cdot z).$$

Caso 3 $x \in Q_1$ y $y, z \in Q_2$. Entonces $(x \cdot y) \cdot z = \varphi(x) \cdot_2 y \cdot_2 z = \varphi(x) \cdot_2 (y \cdot_2 z) = x \cdot (y \cdot z)$.

Caso 4 $y \in Q_1$ y $x, z \in Q_2$. Análogo al caso 3.

Caso 5 $x, z \in Q_1$ y $y \in Q_2$. Análogo al caso 2.

Caso 6 $y, z \in Q_1$ y $x \in Q_2$. Análogo al caso 2.

Caso 7 $z \in Q_1$ y $x, y \in Q_2$. Análogo al caso 3.

Caso 8 $x, y, z \in Q_2$. Análogo al caso 1.

Así, $\cdot$ es asociativa y por tanto $(Q^*, \cdot)$ es un semigrupo.

Veamos ahora, que $\mathcal{B}^*$ es la base de $\mathcal{T}^*_{\mathcal{L}}$. Para ello veamos que $\{M_x^{Q^*} : x \in Q^*\} = \mathcal{B}^*$.

$(\subseteq)$ Sea $x \in Q^*$. Si $x \in Q_1$. Note que, $\varphi^{-1}(Q_2 \cdot_2 \varphi(x)) = \varphi^{-1}(M^{Q_2}_{\varphi(x)}) = M_x^{Q_1}$, pues φ preserva vecindades minimales abiertas. Así,

$$M_x^{Q^*} = (Q_1 \cdot x) \cup (Q_2 \cdot x) \cup \{x\} = (Q_1 \cdot_1 x) \cup \varphi^{-1}(Q_2 \cdot_2 \varphi(x)) \cup \{x\} = M_x^{Q_1}.$$

Luego, $M_x^{Q^*} \in \mathcal{B}^*$. Si $x \in Q_2$. Note que $\varphi(Q_1) \cdot_2 x = Q_2 \cdot_2 x$. Entonces

$$M_x^{Q^*} = (Q_1 \cdot x) \cup (Q_2 \cdot x) \cup \{x\} = (\varphi(Q_1) \cdot_2 x) \cup (Q_2 \cdot_2 x) \cup \{x\} = M_x^{Q_2}.$$

Entonces, $M_x^{Q^*} \in \mathcal{B}^*$. Por tanto, $\{M_x^{Q^*} : x \in Q^*\} \subseteq \mathcal{B}^*$.

$(\supseteq)$ Sea $D \in \mathcal{B}^*$. Si $D \in \mathcal{B}_1$ entonces $D \in \{M_x^{Q^*} : x \in Q^*\}$. Si $D \in \mathcal{B}_2$, entonces $D \in \{M_x^{Q^*} : x \in Q^*\}$. Así, $\mathcal{B}^* \subseteq \{M_x^{Q^*} : x \in Q^*\}$.

□

Denotaremos por $Q_1 \cup_\varphi Q_2$ al semigrupo Q^* construido en la proposición anterior a partir de los semigrupos Q_1 y Q_2. Observe que mientras $Q_1 \uparrow Q_2$ se puede formar a partir de cualquier semigrupo Q_1 y Q_2, $Q_1 \cup_\varphi Q_2$ solo se puede definir si existe una inmersión de semigrupo apropiada $\varphi : Q_1 \to Q_2$.

Ejemplo 2.3.13. *Sean Q_1 y Q_2 los semigrupos cuyas bases de vecindades minimales $\mathcal{B}^1$ y $\mathcal{B}^2$ respectivamente, es dada en las Figuras 56 y 57.*

Figura 56. $\mathcal{B}^1$

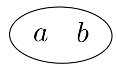
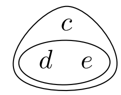
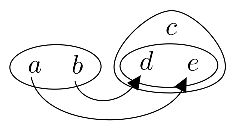


Figura 57. $\mathcal{B}^2$



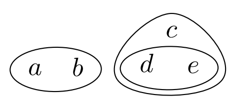
Note que es posible definir una inmersión de semigrupos $\varphi : Q_1 \to Q_2$ que preserva vecindades minimales abiertas, cuyo diagrama sagital está representado a continuación en la Figura 58.

Figura 58. Diagrama sagital de φ



Entonces por el Teorema 2.3.12 se tiene que $Q_1 \cup_\varphi Q_2$ es un semigrupo tal que la topología de Green correspondiente tiene base $\mathcal{B}^{Q_1 \cup_\varphi Q_2} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ representada en la Figura 59.

Figura 59. $\mathcal{B}^{Q_1 \cup_\varphi Q_2}$



2.3.2. De topologías a semigrupos Al determinar que topologías surgen de semigrupos a través del cuasi-orden izquierdo de Green, la siguiente proposición es útil para construir semigrupos que produzcan topologías deseadas a partir de estructuras de semigrupos en subespacios abiertos apropiados.

Teorema 2.3.14. *Sea $X = X_1 \cup X_2$ un espacio topológico finito con subespacios abiertos X_1 y X_2 tales que $X_1 \cap X_2 = \{w\}$. Suponga que X_1 y X_2 surgen de las estructuras de semigrupos $(Q_1, \cdot_1)$ y $(Q_2, \cdot_2)$ respectivamente. Entonces X surge de una estructura de semigrupo $Q = Q_1 \cup Q_2$ y además $\mathcal{B}^X = \mathcal{B}^{X_1} \cup \mathcal{B}^{X_2}$.*

Demostración. Note que $\{w\} = X_1 \cap X_2$ es abierto. Luego, $M_w^{X_1} = \{w\} = M_w^{X_2}$. De modo que, $s_1 \cdot_1 w = s_2 \cdot_2 w = w$ para todo $s_1 \in Q_1, s_2 \in Q_2$.

Sea $Q = Q_1 \cup Q_2$ y definamos una operación binaria en Q como sigue:

$$x \cdot y = \begin{cases} x \cdot_1 y & , si \quad\quad x, y \in Q_1; \\ x \cdot_2 y & , si \quad\quad x, y \in Q_2; \\ w \cdot_2 y & , si \quad x \in Q_1 \text{ e } y \in Q_2; \\ w \cdot_1 y & , si \quad x \in Q_2 \text{ e } y \in Q_1. \end{cases}$$

Como $w \in Q_1 \cap Q_2$ observe que esta operación está bien definida, es decir, para $s_1 \in Q_1$, al considerar $w \in Q_1$, tenemos $s_1 \cdot w = s_1 \cdot_1 w = w$ y al considerar $w \in Q_2$, tenemos $s_1 \cdot w = w \cdot_2 w = w$.

Sean $x, y, z \in Q$. Para verificar si $\cdot$ es asociativa surgen los siguientes 8 casos:

Caso 1 $x, y, z \in Q_1$. Luego, $(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot_1 y) \cdot_1 z = x \cdot_1 (y \cdot_1 z) = x \cdot (y \cdot z)$.

Caso 2 $x, y \in Q_1$ y $z \in Q_2$. Luego, $(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot_1 y) \cdot z = w \cdot_2 z = (w \cdot_2 w) \cdot_2 z = w \cdot_2 (w \cdot_2 z) = x \cdot (w \cdot_2 z) = x \cdot (y \cdot z)$.

Caso 3 $x \in Q_1$ y $y, z \in Q_2$. Luego, $(x \cdot y) \cdot z = (w \cdot_2 y) \cdot z = (w \cdot_2 y) \cdot_2 z = w \cdot_2 (y \cdot_2 z) = x \cdot (y \cdot_2 z) = x \cdot (y \cdot z)$.

Caso 4 $y \in Q_1$ y $x, z \in Q_2$. Luego, $(x \cdot y) \cdot z = (w \cdot_1 y) \cdot z = w \cdot_2 z = (x \cdot_2 w) \cdot_2 z = x \cdot (w \cdot_2 z) = x \cdot (y \cdot z)$.

Caso 5 $x, z \in Q_1$ y $y \in Q_2$. Análogo al caso 4.

Caso 6 $y, z \in Q_1$ y $x \in Q_2$. Análogo al caso 3.

Caso 7 $z \in Q_1$ y $x, y \in Q_2$. Análogo al caso 2.

Caso 8 $x, y, z \in Q_2$. Análogo al caso 1.

Así, $\cdot$ es asociativa y por tanto $(Q, \cdot)$ es un semigrupo.

Veamos ahora que la topología de Green $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}^{Q}$ de $(Q, \cdot)$ es la del espacio topológico X. Para ello verifiquemos que

$$\mathcal{B}^{\mathcal{T}_{\mathcal{L}}^{Q}} = \mathcal{B}^{X}.$$

Note que como $X = X_1 \cup X_2$ donde $X_1 \cap X_2 = \{w\}$. Entonces $\mathcal{B}^{X} = \mathcal{B}^{X_1} \cup \mathcal{B}^{X_2}$. Luego, sea $B \in \mathcal{B}^{\mathcal{T}_{\mathcal{L}}^{Q}}$. Así, $B = M_x^Q$ para algún $x \in Q$. Debemos considerar tres casos:

Caso 1 Si $x = w$. Entonces $B = M_x^Q = M_x^{Q_1} = M_x^{Q_2} = \{w\}$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{B}^X$.

Caso 2 Si $x \in Q_1 \backslash \{w\}$. Entonces $M_x^Q = M_x^{Q_1}$. Luego $B \in \mathcal{B}_{Q_1} = \mathcal{B}_{X_1}$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{B}^X$.

Caso 3 Si $x \in Q_2 \backslash \{w\}$. Entonces $M_x^Q = M_x^{Q_2}$. Luego $B \in \mathcal{B}_{Q_2} = \mathcal{B}_{X_2}$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{B}^X$.

Así, $\mathcal{B}^{\mathcal{T}_{\mathcal{L}}^{Q}} \subseteq \mathcal{B}^X$. Ahora, sea $B \in \mathcal{B}^X$. Si $B \in \mathcal{B}^{X_1}$. Como Q_1 corresponde a la estructura de semigrupo asociada a X_1 entonces $B = M_x^{Q_1}$ para algún $x \in Q_1$. Así, $B \in \mathcal{B}^{\mathcal{T}_{\mathcal{L}}^{Q}}$. Si $B \in \mathcal{B}^{X_2}$. Como Q_2 es la estructura de semigrupo asociada a X_2. Entonces $B = M_x^{Q_2}$ para algún $x \in Q_2$. Luego, $B \in \mathcal{B}^{\mathcal{T}_{\mathcal{L}}^{Q}}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}^X \subseteq \mathcal{B}^{\mathcal{T}_{\mathcal{L}}^{Q}}$.

$\square$

Denotaremos por $Q_1 \odot_w Q_2$ al semigrupo Q construido en la proposición anterior a partir de los semigrupos Q_1 y Q_2.

Ejemplo 2.3.15. *Sean Q_1 y Q_2 semigrupos tales que $Q_1 \cap Q_2 = \{a\}$ cuyas bases de vecindades minimales $\mathcal{B}^1$ y $\mathcal{B}^2$ respectivamente, es dada en las Figuras 60 y 61.*

Figura 60. $\mathcal{B}^1$

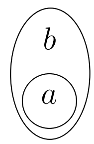
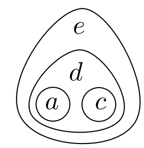
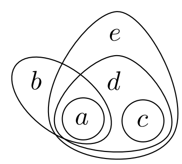


Figura 61. $\mathcal{B}^2$



Entonces por el Teorema 2.3.10 se tiene que $Q_1 \odot_w Q_2$ es un semigrupo tal que la topología de Green correspondiente tiene base $\mathcal{B}^{Q_1 \odot_w Q_2} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ representada en la Figura 62.

Figura 62. $\mathcal{B}^{Q_1 \odot_w Q_2}$



Se conoce que en un conjunto de 5 puntos hay 139 topologías salvo homeomorfismo, Gustavo N. Rubiano [4] (ver Tabla 1).

Tabla 1. Número de topologías para un conjunto de n elementos

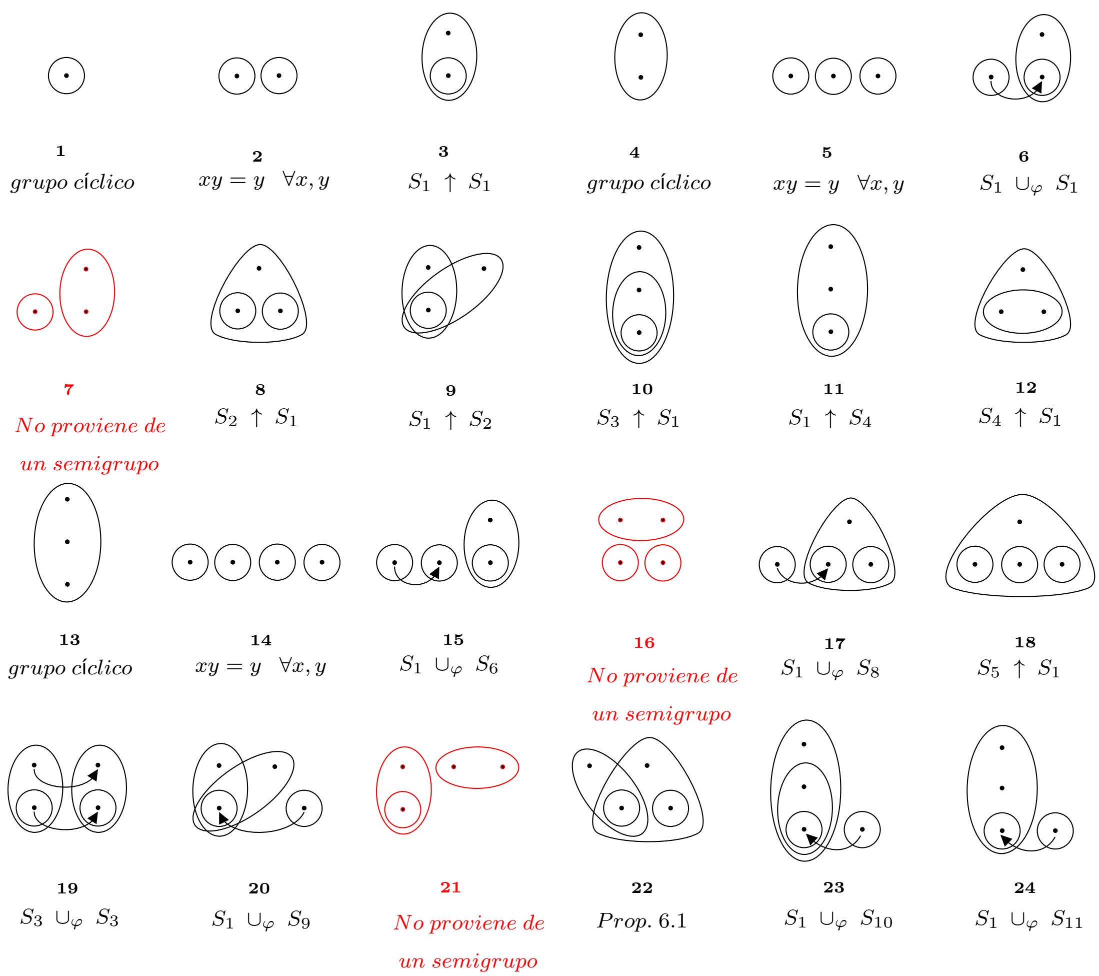
n	$\lvert T(n)\rvert$	Clases de homeomorfismo
1	1	1
2	4	3
3	29	9
4	355	33
5	6942	139

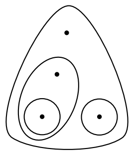
Bettina Richmond [2] clasificó y estudio todas las topologías de hasta 5 puntos. De esta forma, usando el Teorema 2.3.3, logró encontrar que 32 de las topologías entre

4 Gustavo N. RUBIANO. “Sobre el número de Topologías en un conjunto finito.” En: *Nueva Serie* ().

los 3 y 5 puntos no provenían de una estructura de semigrupo y para las demás topologías señaló un semigrupo del que cada una provenía usando los Teoremas 2.3.10, 2.3.12 y la 2.3.14.

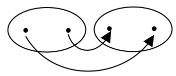
En la siguiente tabla, denotaremos por S_i para $i = 1, 2, ..., 46,$ a una estructura de semigrupo (en caso de que exista) que produce la topología i. La tabla incluye solo las topologías sobre un conjunto de a lo sumo 4 puntos, que como se deduce en la Tabla 1 son 46 (salvo homeomorfismo). Las topologías ilustradas en rojo son aquellas que no provienen de ninguna estructura de semigrupo y las flechas hacen referencia a la inmersión de semigrupo φ.





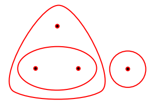
25

$S_6 \uparrow S_1$



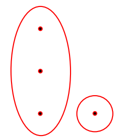
26

$S_4 \cup_{\varphi} S_4$



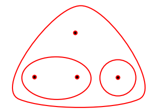
27

No proviene de un semigrupo



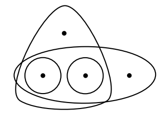
28

No proviene de un semigrupo



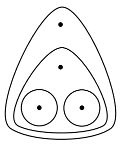
29

No proviene de un semigrupo



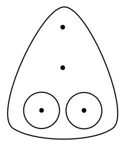
30

$S_2 \uparrow S_2$



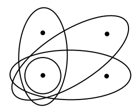
31

$S_8 \uparrow S_1$



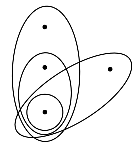
32

$S_2 \uparrow S_4$



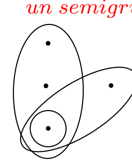
33

$S_1 \uparrow S_5$



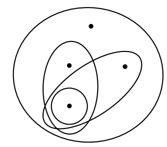
34

$S_1 \uparrow S_6$



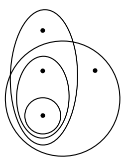
35

Prop. 6.1



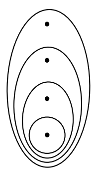
36

$S_9 \uparrow S_1$



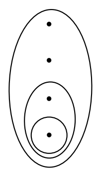
37

$S_3 \uparrow S_2$



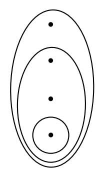
38

$S_{10} \uparrow S_1$



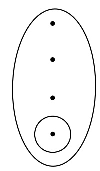
39

$S_3 \uparrow S_4$



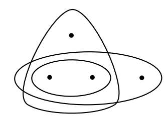
40

$S_{11} \uparrow S_1$



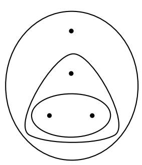
41

$S_1 \uparrow S_{13}$



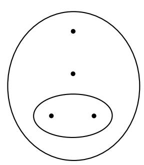
42

$S_4 \uparrow S_2$



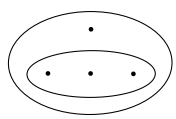
43

$S_{12} \uparrow S_1$



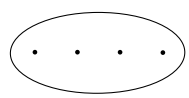
44

$S_4 \uparrow S_4$



45

$S_{13} \uparrow S_1$



46

grupo cíclico

BIBLIOGRAFÍA

GRILLET, P. A. “Semigroups: an introduction to the structure theory”. En: *Marcel Dekker, Inc. New York* (1995) (vid. pág. 44).

RICHMOND, Bettina. “Semigroups and their topologies arising from Green’s left quasiorder”. En: *Applied General Topology* 9.2 (2008), págs. 143-168 (vid. págs. 12, 13, 16, 51, 52, 64).

RUBIANO, Gustavo N. “Sobre el número de Topologías en un conjunto finito.” En: *Nueva Serie* () (vid. pág. 64).

RUBIANO Gustavo y ROBLES, José. “Topologías de Alexandroff: diferentes contextos”. En: *Boletín de Matemáticas* 20 (2013), págs. 125-134 (vid. pág. 12).