

Estrellas de neutrones en la teoría generalizada de Proca $SU(2)$

Jhan Nicolás Martínez Lobo

Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Física

Director

Yeinzon Rodríguez García

Doctorado en Física

Co-Director

José Fernando Rodríguez

Doctorado en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2022

Dedicatoria

Este trabajo viene dedicado:

En especial a mi papá y a mi mamá por hacer posible día a día no solo mi realización como profesional sino que también como persona.

A Danny, Felipe, Angélica, Giselle y Juan Pablo, mis hermanos, a mis tías, a mi abuelita y a mi nona que siempre están ahí brindándome su apoyo incondicional.

A Dennis, mi amor, que por su cariño y bellas palabras siempre se me dibuja una sonrisa en el rostro.

Y finalmente a Juan José, Cristian, David, Stephany, Érika, Leidy, Jaime y Alexis, mis amigos, con los que siempre cualquier plática es posible.

Agradecimientos

Agradezco encarecidamente a mi director de trabajo de grado, por dedicar su tiempo, experiencia y conocimiento en la guía de mi trabajo de grado. De igual manera agradezco encarecidamente a mi co-director de trabajo de grado, por dedicar su tiempo, experiencia, conocimiento y acompañamiento en la guía de mi trabajo de grado. Así como también agradezco a todos los profesores de quienes tuve la oportunidad de ser guiado en mi proceso formativo tanto académico como moral.

Tabla de Contenido

Introducción	18
1. Objetivos	22
2. Marco teórico	24
2.1. Inestabilidad de Ostrogradski	24
2.2. Modelo Λ CDM	25
2.3. La teoría generalizada de Proca $SU(2)$	28
2.4. Estrellas y objetos compactos	34
2.4.1. Enanas blancas Newtonianas	36
2.4.2. Estrellas de neutrones	39
3. Soluciones tipo partícula	42
3.1. Ecuaciones de campo de la GSU2P	43
3.2. Perfil del campo vectorial	47
3.3. Soluciones en series	49
3.3.1. Comportamiento asintótico en el origen	50
3.3.2. Solución en el infinito	53
3.4. Soluciones numéricas	55

3.4.1. Einstein Yang-Mills	56
3.4.2. Perfil de los grados de libertad vectoriales	59
3.4.3. Masa	61
3.4.4. Densidad efectiva	61
3.4.5. Carga efectiva	63
3.4.6. GSU2P con χ_5	68
4. Soluciones con materia bariónica	69
4.1. Solución en series	70
4.1.1. Solución en el origen	71
4.2. Soluciones numéricas	75
4.2.1. Einstein y polítropa con $n = 1$	75
4.2.2. EYM y polítropa con $n = 1$	76
4.2.3. GSU2P con χ_1 y polítropa con $n = 1$	78
4.2.4. GSU2P con χ_2 y polítropa con $n = 1$	79
4.2.5. GSU2P con χ_5 y polítropa con $n = 1$	80
4.2.6. GSU2P con χ_6 y polítropa con $n = 1$	90
4.2.7. GSU2P con α_1 y polítropa con $n = 1$	95
4.2.8. GSU2P con α_3 y polítropa con $n = 1$	96
4.3. GSU2P con χ_5 y polítropa: Modelos alternativos	97
4.3.1. GSU2P con χ_5 y polítropa con $n = 1$	97

4.3.2. GSU2P con χ_5 y politropa con $n = 1/2$	99
5. Discusión	104
5.1. Discusión	104
5.1.1. Sobre estrellas de bosones	104
5.1.2. Sobre estrellas de neutrones	105
5.2. Futuros proyectos	108
5.3. Contribuciones	109
Referencias Bibliográficas	110
Apéndices	122

Lista de Figuras

- Figura 1. Relación masa densidad central para una ecuación de estado polítropa con $n = 1$ y $k = 0.0045m^5 / (\text{kg } s^2)$. 41
- Figura 2. Relación masa radio para una ecuación de estado polítropa con $n = 1$ y $k = 0.0045m^5 / (\text{kg } s^2)$. 41
- Figura 3. Gráfica de ejemplo de perfiles del campo vectorial para las primeras 4 soluciones asintóticamente planas en el caso de EYM. 58
- Figura 4. Gráfica de perfiles de masa para los ejemplos de la Fig.(3). 58
- Figura 5. La gráfica superior muestra los perfiles de los grados de libertad vectoriales para los casos EYM, GSU2P con $\chi_1 = 1$, GSU2P con $\chi_2 = 1$, GSU2P con $\chi_5 = 1$ y GSU2P con $\chi_6 = 1$. La gráfica inferior muestra los perfiles de los grados de libertad vectoriales para los casos EYM, GSU2P con $\alpha_1 = -0.2$ y GSU2P con $\alpha_3 = -0.2$. 60
- Figura 6. La gráfica muestra los perfiles de masa para los casos presentados en la Fig.(5). 62
- Figura 7. La gráfica muestra los perfiles de densidad efectiva para los casos presentados en la Fig.(5). 63

Figura 8. La gráfica muestra las contribuciones a la densidad efectiva total, $\rho_{GSU2P,\chi_i}^{efec}$, normalizadas para GSU2P con $\chi_1 = 1$ y GSU2P con $\chi_2 = 1$. Las gráficas continuas corresponden a las contribuciones a la densidad de energía efectiva asociadas al término de Yang Mills, ρ_{YM}^{efec} , y las gráficas punteadas corresponden a las contribuciones a la densidad de energía efectiva asociadas a los parámetros libres de la GSU2P. 64

Figura 9. La gráfica superior muestra las contribuciones a la densidad efectiva total, $\rho_{GSU2P,\chi_i}^{efec}$, normalizadas para GSU2P con $\chi_5 = 1$ y GSU2P con $\chi_6 = 1$. Similar al caso anterior, la gráfica inferior muestra las contribuciones a la densidad efectiva total, $\rho_{GSU2P,\alpha_i}^{efec}$, normalizadas para GSU2P con $\alpha_1 = -0.2$ y GSU2P con $\alpha_3 = -0.2$. Las gráficas continuas corresponden a las contribuciones a la densidad de energía efectiva asociadas al término de Yang Mills, ρ_{YM}^{efec} , y las gráficas punteadas corresponden a las contribuciones a la densidad de energía efectiva asociadas a los parámetros libres de la GSU2P. 66

Figura 10. La gráfica muestra la carga efectiva, Ec.(82), para los casos de la Fig.(5). 67

Figura 11. La gráfica muestra la densidad central efectiva en función del parámetro χ_5 . Los datos con los cuales se realizó esta gráfica están en la tabla (2). 68

Figura 12. En naranja se puede ver la presión normalizada de la materia y en azul la masa normalizada de la estrella. Este caso corresponde a Einstein con polítropa por lo que no hay curva para los grados de libertad vectoriales. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$. 76

Figura 13. En la gráfica se observa en verde el perfil del campo vectorial, en naranja la presión normalizada de la materia y en azul la masa gravitacional normalizada de la estrella. En este caso se tiene EYM con polítropa. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$. 77

Figura 14. En la gráfica se observa en azul la densidad de energía efectiva y en naranja la densidad de energía de la materia. En este caso se tiene EYM con polítropa. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$. 78

Figura 15. En esta imagen se puede ver el comportamiento de la densidad de energía efectiva central en función del parámetro libre χ_1 . Los datos con los cuales se realizó esta gráfica están en la tabla (4). Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$. 79

Figura 16. La imagen permite ver el comportamiento de la densidad de energía efectiva central en función del parámetro libre χ_2 . Los datos con los cuales se realizó esta gráfica se encuentran en la tabla (5). Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$. 80

Figura 17. En esta imagen se puede ver el comportamiento de la densidad de energía efectiva central en función del parámetro libre χ_5 . Los datos con los cuales se realizó esta gráfica están en la tabla (6). Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$. 81

Figura 18. En la gráfica se observa en azul el perfil del campo vectorial, en verde la presión normalizada de la materia y en naranja la masa normalizada de la estrella, teniendo GSU2P con $\chi_5 = 20$. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$. 82

Figura 19. En la gráfica se observa en azul la densidad de energía efectiva y en la gráfica naranja se observa la densidad de energía de la materia teniendo GSU2P con $\chi_5 = 20$. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$. 83

Figura 20. La gráfica en azul muestra la relación masa radio para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa radio teniendo GSU2P con $\chi_5 = 20$. Los datos de esta gráfica están la tabla (13). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$. 83

Figura 21. La gráfica en azul muestra la relación masa densidad central de materia para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa densidad central de materia teniendo GSU2P con $\chi_5 = 20$. Los datos de esta gráfica están la tabla (13). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$. 84

Figura 22. En la gráfica se observa en azul el perfil del campo vectorial, en verde la presión normalizada de la materia y en naranja la masa normalizada de la estrella, teniendo GSU2P con $\chi_5 = 60$. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$. 85

Figura 23. En la gráfica se observa en azul la densidad de energía efectiva y en la gráfica naranja se observa la densidad de energía de la materia, teniendo GSU2P con $\chi_5 = 60$. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$. 86

Figura 24. La gráfica en azul muestra la relación masa radio para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa radio cuando se tiene GSU2P con $\chi_5 = 60$.

Los datos de esta gráfica están la tabla (15). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(\text{kg } s^2)$. 86

Figura 25. La gráfica en azul muestra la relación masa densidad central de materia para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa densidad central de materia cuando se tiene GSU2P con $\chi_5 = 60$. Los datos de esta gráfica están la tabla (15). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(\text{kg } s^2)$. 87

Figura 26. En la gráfica se observa en verde el perfil del campo vectorial, en naranja la presión normalizada de la materia y en azul la masa normalizada de la estrella, teniendo GSU2P con $\chi_5 = 100$. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18}[\text{Kg}]/[\text{m}]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(\text{kg } s^2)$. 88

Figura 27. En azul se observa la gráfica de la componente g_{00} de la métrica para el caso Einstein, en verde para GSU2P con $\chi_5 = 100$ y en naranja para EYM. Nótese que las gráficas verde y azul son prácticamente iguales, por lo que el corrimiento al rojo gravitacional es prácticamente indistinguible. El caso EYM corresponde a una estrella muy hipotética imitadora de agujeros negros. Las gráficas se realizaron con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18}[\text{Kg}]/[\text{m}]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(\text{kg } s^2)$. 89

Figura 28. En azul se observa la gráfica de ω_{efec} para el caso EYM y en naranja para GSU2P con $\chi_5 = 100$. El parámetro de estado efectivo en el caso EYM toma un valor de $1/3$, justo como lo hace la radiación. Para el caso GSU2P con $\chi_5 = 100$, nótese que el parámetro de estado efectivo toma valores negativos, por lo que el fluido asociado al campo vectorial trata de imitar el comportamiento de la constante cosmológica. Las gráficas se realizaron con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$. 90

Figura 29. La gráfica en azul muestra la relación masa radio para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa radio cuando se tiene GSU2P con $\chi_5 = 100$. Los datos de esta gráfica están la tabla (17). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$. 91

Figura 30. La gráfica en azul muestra la relación masa densidad central de materia para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa densidad central de materia cuando se tiene GSU2P con $\chi_5 = 100$. Los datos de esta gráfica están la tabla (17). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$. 92

Figura 31. En la gráfica se observa la densidad efectiva en función del parámetro χ_6 para la solución asintóticamente plana. Los datos de esta gráfica están la tabla (8). Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$. 92

Figura 32. En la gráfica se observa en azul el perfil del campo vectorial, en verde la presión normalizada de la materia y en naranja la masa normalizada de la estrella, teniendo GSU2P con $\chi_6 = 9$. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$. 93

Figura 33. La gráfica en azul muestra la relación masa radio para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa radio cuando se tiene GSU2P con $\chi_6 = 9$.

Los datos de esta gráfica están la tabla (19). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$. 94

Figura 34. La gráfica en azul muestra la relación masa densidad central de materia para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa densidad central de materia cuando se tiene GSU2P con $\chi_6 = 9$. Los datos de esta gráfica están la tabla (19). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$. 94

Figura 35. En esta imagen se puede ver el comportamiento de la densidad central efectiva en función del parámetro libre α_1 . Los datos de esta gráfica están la tabla (9). Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18}[Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$. 95

Figura 36. En esta imagen se puede ver el comportamiento de la densidad central efectiva en función del parámetro libre α_3 . Los datos de esta gráfica están la tabla (11). Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18}[Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$. 96

Figura 37. En esta gráfica se presenta la relación masa radio para el caso GSU2P con $\chi_5 = 100$ y $n = 1$, para $k = 0.02m^5/(kgs^2)$. Los datos de esta gráfica están las tablas (20) y (22). 98

Figura 38. En esta gráfica se presenta la relación masa radio para el caso GSU2P con $\chi_5 = 100$. Se integró con $n = 1/2$ y $k = 2.246 \times 10^{-20}m^8/(kg^2 s^2)$. Los datos de esta gráfica están en las tablas (24) y (26). 102

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Ecuaciones de Euler-Lagrange	122
Apéndice B. Tablas de datos	129

Resumen

Título: Estrellas de neutrones en la teoría generalizada de Proca SU(2) *

Autor: Jhan Nicolás Martínez Lobo **

Palabras Clave: Gravedad modificada, objetos compactos, estrellas de neutrones, inestabilidad de Ostrogradski, materia oscura.

Descripción: La teoría generalizada de Proca SU(2) es una teoría modificada de la gravedad que involucra un campo vectorial con simetría global interna SU(2). Esta teoría sigue el mismo espíritu de las teorías de Horndeski ya que evita la inestabilidad de Ostrogradski. La construcción de la teoría se ve motivada por ejemplo en proporcionar una explicación, ausente en el modelo Λ CDM, sobre la naturaleza de la materia y la energía oscura. Las implicaciones de la teoría a escalas cosmológicas han sido estudiadas en otros trabajos. Más exactamente, se demostró que es posible obtener una propagación lumínica de las ondas gravitacionales en escalas cosmológicas al establecer una relación entre los parámetros libres. Además, se ha probado que la teoría genera expansión acelerada. Por lo anterior, es necesario estudiar las implicaciones físicas del modelo a escalas astrofísicas en el régimen de campo fuerte. Este trabajo constituye el comienzo de tal estudio. Para ello se analizó el caso con simetría esférica, utilizando como *ansatz* para los grados de libertad vectoriales el monopolo magnético de 't Hooft-Polyakov. Primero, se estudiaron las soluciones construidas únicamente con el campo vectorial y los grados de libertad geométricos. Dichas soluciones no son singulares en el origen y son asintóticamente planas. Se encontró que éstas generalizan las soluciones tipo partícula encontradas por R. Bartnik y J. McKinnon de las ecuaciones de Einstein- Yang-Mills. Puesto que el campo vectorial no interactúa con la materia, dichas soluciones corresponden a estrellas oscuras de bosones, las cuales podrían contribuir al contenido de materia oscura del universo. Posteriormente, se introdujo materia bariónica y se procedió a considerar cada uno de los Lagrangianos constituyentes de la teoría. Se encontraron soluciones que modelan estrellas de neutrones únicamente para dos de estos Lagrangianos. En todos los casos las relaciones masa-radio y masa-densidad central de materia difieren del caso de Einstein. Se conjetura que estas soluciones podrían ser estables y se planea realizar un trabajo perturbativo.

* Trabajo de investigación

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Yeinzon Rodríguez García, Doctorado en Física. Co-Director: José Fernando Rodríguez, Doctorado en Física.

Abstract

Title: Neutron stars in the generalized SU(2) Proca theory *

Author: Jhan Nicolás Martínez Lobo **

Keywords: Modified gravity, compact objects, neutron stars, Ostrogradski's instability, dark matter.

Description: The generalized SU(2) Proca Theory is a modified gravity theory which introduces a vector field with global internal SU(2) symmetry. This theory follows the same spirit of Horndeski's theories due to it avoids Ostrogradski's instability. Theory building is motivated, for example, to provide an explanation that is absent in the model Λ CDM, about the nature of dark matter and dark energy. The implications of the theory at cosmological scales has been studied in other works. More exactly, it was shown that is possible to obtain a luminical gravitational wave propagation at cosmological scales by imposing a relations between the free parameters. In addition, it has been proved that the theory generates accelerated expansion. Therefore, it is necessary to study the the physical implications of the model at astrophysical scales in the regime of strong field. This work constitutes the beginning of such research. For this purpose, the case with spherical symmetry was analyzed, using as ansatz for the vectorial degrees of freedom the 't Hooft-Polyakov magnetic monopole. First, solutions constructed with only the vector field and geometric degrees of freedom were studied. These solutions are not singular at the origin and are asymptotically flat. It was found that these solutions generalize the particle-like configurations found by R. Bartnik y J. McKinnon of the Einstein Yang-Mills equations. Since the vector field does not interact with baryonic matter, these solutions correspond to dark boson stars, which could contribute to the dark matter content of the universe. Subsequently, baryonic matter was introduced and we proceeded to consider each of the constituent Lagrangians of the theory. Solutions which models neutron stars

* MSc Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Yeinzon Rodríguez García, PhD in Physics. Co-Director: José Fernando Rodríguez , PhD in Physics.

were found only for two of these Lagrangians. In all cases the mass - radius and mass - matter central density relations were found to be different from Einstein's. It is conjectured that these solutions could be stable and perturbative work is planned.

Introducción

La teoría generalizada de Proca $SU(2)$ (Gallego Cadavid et al., 2020) es una teoría que involucra gravedad clásica e introduce una tripleta de campos vectoriales con simetría global interna $SU(2)$. Esta teoría vector-tensor ha sido construida siguiendo el mismo espíritu de las teorías de Horndeski ya que se busca evitar la inestabilidad de Ostrogradski. Esta inestabilidad consiste en la ausencia de una cota inferior en el Hamiltoniano de un sistema (Ostrogradski, 1850). Evitar dicha inestabilidad implica, como condición suficiente, tener ecuaciones a lo sumo de segundo orden (Woodard, 2007, 2015), justo como lo son todas las ecuaciones de la física.

Las aplicaciones cosmológicas de las teorías tipo Horndeski se vieron severamente afectadas debido a la detección de la onda gravitacional GW170817 (et. al., 2017a; Abbott et al., 2017b,a), consistente con la fusión de un sistema binario de estrellas de neutrones. La coincidencia espacial y temporal de la señal gravitacional con la señal electromagnética implica que si existe alguna diferencia entre la rapidez de las ondas gravitacionales y la de la luz, es cuando mucho de una parte en 10^{15} . Lo anterior impuso severas restricciones en todas estas teorías, especialmente aquellas que involucran Galileones escalares (o teorías escalar-tensor) (et. al., 2017b; Sakstein and Jain, 2017; Creminelli and Vernizzi, 2017; Ezquiaga and Zumalacárregui, 2017). El caso de la teoría generalizada de Proca (teoría del Galileon vectorial) (Tasinato, 2014; Heisenberg, 2014; Allys et al., 2016b,a; Beltran Jimenez and Heisenberg, 2016), difiere del caso escalar. Debido a la anisotropía inherente de un solo campo vectorial y al principio cosmológico, no es posible obtener aplicaciones en estas escalas cuando el campo vectorial empleado es tipo espacio.

Debido a que la teoría generalizada de Proca SU(2) genera expansión acelerada, los autores de la Ref.(Garnica et al., 2022) escogieron los parámetros libres de la teoría de tal manera que las perturbaciones del sector tensorial de la teoría tuviera la misma forma que su contraparte de relatividad general, al menos hasta segundo orden en teoría de perturbaciones cosmológicas. De esta manera, la propagación de la ondas gravitacionales es lumínica. Además, permitió encontrar que la teoría genera fácilmente el periodo de inflación primordial.

Si bien la teoría de la relatividad general es, a la fecha, la mejor descripción de la interacción gravitacional en el universo local (et. al., 2017a; Abbott et al., 2017b,a; Akiyama et al., 2019; Abuter et al., 2018), no lo es en escalas cosmológicas (escalas mayores a 100 Mpc). Puesto que el modelo Λ CDM no proporciona una explicación sobre la naturaleza de la materia y la energía oscura (Amendola and Tsujikawa, 2015), se han propuesto teorías alternativas de la gravedad de Einstein (Heisenberg, 2019; Clifton et al., 2012; Tsujikawa, 2010), incluyendo versiones cuánticas de la misma (Rovelli, 2004; Ashtekar and Bianchi, 2021). No obstante, los problemas relacionados con la naturaleza de la materia oscura y de la energía oscura continúan sin ser resueltos.

Debido a que la teoría generalizada de Proca SU(2) busca ser el mejor modelo para describir la interacción gravitacional a nivel clásico, es necesario su estudio a escalas astrofísicas en un régimen de campo fuerte. Gracias a las mediciones de masa de estrellas de neutrones que se consideran independientes de la teoría de la gravedad, $2.14_{-0.09}^{+0.10}M_{\odot}$ ¹ (Cromartie et al., 2019) y $2.01 \pm 0.04M_{\odot}$ (Antoniadis et al., 2013) se propuso estudiar el impacto de dichas masas sobre la

¹ M_{\odot} denota la masa solar.

teoría generalizada de Proca $SU(2)$ ².

En este trabajo se estudió el caso con simetría esférica con el propósito de modelar objetos compactos con rotación lenta. Para el perfil del campo vectorial se empleó el caso más general introducido en la Ref. (Witten, 1977), y se probaron una a una las configuraciones asociadas a dicho perfil. Se encontró que únicamente el monopolo magnético de 't Hooft-Polyakov no lleva a contradicción alguna, por lo que se usó dicho monopolo como ansatz para el campo vectorial.

En primera instancia se estudiaron las soluciones construidas únicamente con el campo vectorial y el tensor métrico. Se realizó una expansión asintótica en series alrededor del centro del objeto compacto y se encontraron las condiciones para obtener soluciones que no son singulares allí. Se realizó también una expansión en series de potencias inversas alrededor del infinito espacial, lo cual permitió encontrar que las soluciones son asintóticamente planas. A estas configuraciones se les denomina usualmente soluciones tipo partícula ya que exhiben una estructura compuesta únicamente por el campo vectorial. Se encontró que, a excepción de uno solo, todos los Lagrangianos constituyentes de la teoría generalizada de Proca $SU(2)$ generalizan las soluciones tipo partícula encontradas por R. Bartnik y J. McKinnon de las ecuaciones acopladas de Einstein Yang-Mills.

A partir del estudio de las soluciones tipo partícula se encontró que la densidad efectiva central (asociada a todas las contribuciones del campo vectorial) presenta en todos los casos un

² La cota máxima para el radio de estrellas de neutrones de 13.5 [km] (Abbott et al., 2018) y para su masa de $2.17M_{\odot}$ (Margalit and Metzger, 2017), obtenidas a partir GW170817, formalmente dependen del modelo de gravedad para construir las plantillas. Por consiguiente no constituyen una medición independiente del modelo utilizado.

orden de magnitud de 10^{20} kg/m³. Cuando se introduce materia bariónica, se procedió a variar uno a uno los parámetros libres de la teoría con el objetivo de disminuir en al menos dos órdenes de magnitud la densidad efectiva central. De esta manera se pueden obtener soluciones en las cuales la densidad central de materia es dominante. Mediante este procedimiento se encontró que únicamente dos de los Lagrangianos constituyentes de la teoría permiten soluciones que modelan estrellas de neutrones. A continuación, se escogieron valores particulares de dichos parámetros y se construyeron las relaciones masa radio y masa densidad central de materia, las cuales fueron diferentes con respecto al caso de Einstein.

Finalmente, se concluye que las soluciones tipo partícula encontradas corresponden a estrellas oscuras de bosones, ya que el campo vectorial no interactúa directamente con la materia. Estas soluciones podrían eventualmente contribuir al contenido de materia oscura del universo. Se conjetura que algunas de las soluciones tipo partícula generalizadas podrían ser estables, por lo que se abre la posibilidad de realizar un estudio de estabilidad en el futuro. Se conjetura también que las soluciones que modelan estrellas de neutrones podrían ser estables.

En este trabajo se utilizan unidades geometrizadas, i.e., $G = c = 1$. La signatura de la métrica es mayormente positiva, $(-, +, +, +)$. El tensor de Riemman está dado por, $(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) \nabla_\alpha \pi = R_{\mu\nu\beta\alpha} \nabla^\beta \pi$, mientras que el tensor de Ricci está dado por $R_{\nu\beta} = R^\alpha_{\nu\beta\alpha}$.

1. Objetivos

Objetivo general

Obtener las relaciones masa-radio y masa-densidad central para una estrella de neutrones en la teoría generalizada de Proca $SU(2)$, solucionando las ecuaciones Tolman-Oppenheimer-Volkoff generalizadas con ecuaciones de estado realistas.

Objetivos específicos

Obtener las ecuaciones de campo gravitacional en la teoría generalizada de Proca $SU(2)$;

obtener las ecuaciones de estructura que describen un objeto compacto (estrella de neutrones) en equilibrio hidrostático suponiendo que los campos y la materia tienen simetría esférica;

Estudiar el comportamiento de las ecuaciones de estructura cerca al centro del objeto mediante una expansión en serie de potencias de la coordenada radial;

Solucionar las ecuaciones de estructura con una ecuación de estado politrópica con índice politrópico de 0,5 a 1;

Obtener la masa crítica y comparar con los resultados observacionales de la estrella de neutrones más masiva hasta la fecha;

Acotar los parámetros libres de la teoría para que la masa crítica de las estrellas de neutrones

no supere a las de las estrellas de neutrones más masivas detectadas hasta la fecha Cromartie et al. (2019); Antoniadis et al. (2013).

2. Marco teórico

2.1. Inestabilidad de Ostrogradski

Se define como inestabilidad de Ostrogradski a la cualidad de ciertos sistemas Hamiltonianos de evolucionar hacia valores negativos de energía sin límite alguno (Ostrogradski, 1850; Woodard, 2007, 2015). Esta inestabilidad se presenta en el marco de la teoría clásica de campos con Lagrangianos no degenerados. Lo anterior se ilustra a continuación.

Sea $\mathcal{L}[\phi(t)]$ un Lagrangiano con dependencias de orden superior a uno en derivadas temporales del campo ϕ ,

$$\mathcal{L}[\phi(t)] \equiv \mathcal{L}(\phi \equiv \phi^{(0)}, \frac{d\phi}{dt} \equiv \phi^{(1)}, \dots, \frac{d^n \phi}{dt^n} \equiv \phi^{(n)}). \quad (1)$$

Las ecuaciones de campo obtenidas a partir del anterior Lagrangiano están dadas por,

$$\sum_{k=0}^n \left(-\frac{d}{dt}\right)^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{(k)}} = 0. \quad (2)$$

Si se satisface el criterio de no degeneración, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{(n)}} = f(\phi^{(n)}) \neq 0$, la Ec.(2) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\phi^{(2n)} = F(\phi, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(2n-1)}) \Rightarrow \phi(t) = G(t, \phi_0, \phi_0^{(1)}, \dots, \phi_0^{(2n-1)}). \quad (3)$$

La Ec.(3) es una ecuación diferencial de orden $2n$, y por ello, requiere de $2n$ variables

canónicas independientes para satisfacer los grados de libertad del espacio de fase, sin necesidad de hacer uso de ligaduras. Ostrogradski propuso evitar dichas ligaduras definiendo las variables canónicas del sistema Q_i, P_i de la siguiente manera,

$$Q_i \equiv \phi^{(i-1)}, \quad P_i \equiv \sum_{k=i}^n \left(-\frac{d}{dt} \right)^{k-i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{(k)}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Aplicando una transformación de Legendre al Lagrangiano se deduce que con $n \geq 2$ el Hamiltoniano es lineal en $n - 1$ momentos conjugados P_i . Debido a que estos momentos no tienen restricción alguna, llevarían eventualmente al Hamiltoniano a niveles de energía arbitrariamente grandes en valor absoluto pero negativos generando comportamientos no físicos. Incluso, conllevaría a la no existencia de un estado base a nivel cuántico (Woodard, 2007, 2015).

Para evitar esta inestabilidad en Lagrangianos no degenerados, a partir de la Ec.(1) se encuentra que es necesario (más no suficiente) garantizar que las ecuaciones de movimiento Ec.(2), sean a lo sumo de orden dos al imponer $n = 1$. Alternativas más elaboradas para evitar esta inestabilidad sugieren el uso de Lagrangianos degenerados (Gleyzes et al., 2015; Langlois and Noui, 2016; Chen et al., 2013).

2.2. Modelo Λ CDM

El modelo Λ CDM es a la fecha la descripción más exitosa del universo. Este modelo predice, y acierta en la existencia y la estructura del fondo cósmico de micro-ondas (Aghanim and et. al., 2020). Adicionalmente, es exitoso en explicar la estructura a gran escala de la distribución de galaxias, y en las abundancias de los elementos ligeros. Acierta incluso en la expansión acelerada del

universo observada en la luz de galaxias distantes y en supernovas. El modelo asume homogeneidad e isotropía a gran escala acorde al principio cosmológico (Lyth and Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Hobson et al., 2006; Dodelson, 2003; Wu et al., 1999; Pandey and Sarkar, 2015) y tiene como pilar fundamental a la teoría de la relatividad general (debido a su éxito en la descripción de fenómenos en el universo local (et. al., 2017a; Abbott et al., 2017b,a; Akiyama et al., 2019; Abuter et al., 2018)). Las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia presente en él, estando dadas por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (5)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento. La métrica que satisface los requisitos de homogeneidad e isotropía espacial es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, cuyo elemento de línea en coordenadas cartesianas es (Weinberg, 2008)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[d\vec{x}^2 + K \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - K\vec{x}^2} \right], \quad (6)$$

siendo K la curvatura espacial del universo y $a(t) > 0$ el factor de escala. Adicionalmente, se requiere la introducción de una fuente de materia homogénea e isótropa, por consiguiente el fluido se considera perfecto (Peter and Uzan, 2013; Tooper, 1964). El tensor energía-momento de este tipo fluido es,

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\rho + p)u_\mu u_\nu, \quad (7)$$

en donde u_μ es la cuadrivelocidad de un observador co-móvil con el fluido, $p \equiv p + \Lambda/(8\pi)$ la presión y $\rho \equiv \rho - \Lambda/(8\pi)$ la densidad de energía, los cuales incluyen contribuciones de la materia, de la radiación y de la constante cosmológica. Se suele introducir una ecuación de estado de la forma,

$$p \equiv \omega\rho, \quad (8)$$

en donde ω se le denomina el parámetro de estado. Cuando la materia está compuesta por un conglomerado de partículas ω está relacionado con la velocidad media de dichas partículas (v). De la teoría cinética de gases se sabe que $\omega \equiv v^2/3$, por ello llamamos radiación al límite $\omega \rightarrow 1/3^-$, y materia cuando $\omega \rightarrow 0^+$. Además, el caso cuando $\omega \rightarrow -1$ se asocia con la energía de vacío.

Incorporando la Ec.(6), la Ec.(7) y la Ec.(8) en la Ec.(5) se encuentra un sistema de dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas que permite modelar el comportamiento del universo. Es conveniente definir un parámetro de densidad adimensional $\Omega = \Omega_{mat} + \Omega_R + \Omega_\Lambda \equiv \rho/\rho_{crit}$ para dar cuenta de las abundancias de densidades de energía presentes en el universo, siendo Ω_{mat} el porcentaje de contribución de la materia, Ω_R el porcentaje de contribución de la radiación y Ω_Λ el porcentaje de contribución de la constante cosmológica. Gracias a las mediciones de PLANCK (Aghanim and et. al., 2020) se conoce que el modelo presenta una contribución a la densidad de energía del universo del $69.11\% \pm 0.62\%$ asociada a un fluido desconocido denominado energía oscura. Este fluido es asociado con la constante cosmológica en el modelo Λ CDM. Dicha contribución es la encargada de inducir la expansión acelerada actual del universo (Amendola and Tsujikawa, 2015). Por otro lado, la interpretación de la constante cosmológica como energía de

vacío implica que existe una diferencia de 120 órdenes de magnitud entre el valor predicho por la teoría cuántica de campos y aquél observado (Amendola and Tsujikawa, 2015). Lo anterior conlleva a que el modelo no tenga una respuesta a la naturaleza de la energía oscura, esa extraña energía que mantiene a las galaxias alejándose las unas de las otras de forma acelerada a grandes escalas.

El modelo presenta una contribución del $30.89\% \pm 0.62\%$ de la materia a la densidad de energía total. Sin embargo, solo el $4.86\% \pm 0.10\%$ corresponde a materia bariónica, el restante $25.89\% \pm 0.57\%$ se denomina materia oscura. Esta extraña materia se encarga, por ejemplo, de evitar que las velocidades de rotación de la materia bariónica respecto del centro galáctico disminuyan con la distancia al centro como lo predice la segunda ley de Kepler. La naturaleza de la materia oscura es algo que aún es objeto de estudio, ya que el modelo no permite dar respuesta a su naturaleza.

Debido a los problemas anteriormente mencionados, han surgido diferentes alternativas al modelo Λ CDM, en las cuales se modifica ya sea el lado derecho o el lado izquierdo de la Ec.(5) según argumentos de los autores, pero no hay una conclusión clara que explique qué parte de la ecuación debe modificarse.

2.3. La teoría generalizada de Proca SU(2)

No se sabe si una descripción clásica de la interacción gravitacional es una descripción fundamental o efectiva, pero sí es cierto que independientemente de ello, y a pesar de su enorme éxito experimental (et. al., 2017a; Abbott et al., 2017b,a; Akiyama et al., 2019; Abuter et al., 2018), la teoría de la relatividad general es una teoría efectiva (Donoghue, 1994; Kostelecký and Li, 2021). La inevitable existencia de singularidades en la teoría (Penrose, 1965; Hawking and

Penrose, 1970), incluso asumiendo la validez de la conjetura de censura cósmica (Wald, 1998; Hawking and Israel, 2010; Penrose, 1969), apunta a la ruptura de la teoría. Por ello, muchos físicos han intentado proponer teorías alternativas a la gravedad de Einstein (Heisenberg, 2019; Clifton et al., 2012; Tsujikawa, 2010), incluyendo versiones cuánticas de la misma (Rovelli, 2004; Ash-tekhar and Bianchi, 2021); pero aun así, problemas como el de la energía oscura ó el de la materia oscura continúan sin ser resueltos.

Una de las motivaciones para construir teorías de gravedad modificada que involucren acoplamiento no mínimos con grados de libertad extra gravitacionales se encuentra en el trabajo de D. Lovelock (Lovelock, 1971). Allí se demostró que, en el vacío y en 4 dimensiones, $B_{\mu\nu}$ es el único tensor con divergencia nula, que es simétrico en sus dos índices y que además es función únicamente de la métrica y sus primeras dos derivadas. $B_{\mu\nu}$ está definido como

$$B_{\mu\nu} = aG_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}, \quad (9)$$

en donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $g_{\mu\nu}$ es la métrica y tanto a como b son constantes. Este resultado de D. Lovelock nos dice entonces que el único término posible en la acción, construido únicamente a partir de términos que involucran curvatura y que tiene ecuaciones de campo de segundo orden, es el término de Einstein-Hilbert (Lovelock, 1971).

Por ello, de la gran variedad de teorías modificadas de la gravedad, destacan las teorías tipo Horndeski (Horndeski, 1974), ya que no solo evitan la inestabilidad de Ostrogradski, sino que adicionalmente respetan los resultados de Lovelock. La teoría de Horndeski original incluye un

campo escalar y es conocida hoy en día como la teoría del Galileon escalar (Nicolis et al., 2009; Kobayashi, 2019; Kobayashi et al., 2011; Deffayet et al., 2011). Existe también una teoría tipo Horndeski vector-tensor denominada teoría generalizada de Proca o teoría del Galileon vectorial (Tasinato, 2014; Heisenberg, 2014; Allys et al., 2016b,a; Beltran Jimenez and Heisenberg, 2016). Las posibles aplicaciones cosmológicas de la teoría del Galileon escalar se vieron truncadas debido a la detección de la onda gravitacional GW170817 ya que la teoría fue fuertemente restringida (et. al., 2017b; Sakstein and Jain, 2017; Creminelli and Vernizzi, 2017; Ezquiaga and Zumalacárregui, 2017). Los términos que involucraban acoplos no mínimos con la gravedad se vieron descartados por lo que en la teoría del Galileon escalar el único término que involucra curvatura actualmente es el término de Einstein-Hilbert. De otra parte las aplicaciones cosmológicas de la teoría generalizada de Proca se ven similarmente restringidas debido a la anisotropía propia de los campos vectoriales. Tales anisotropías pueden fácilmente ir más allá de las restricciones experimentales por lo que es necesario tomar precauciones tales como oscilaciones rápidas del campo vectorial (Cembranos et al., 2012), diluir el campo vectorial mediante el uso de un campo escalar (Watanabe et al., 2009), realizar una supresión de las componentes espaciales del campo vectorial conservando la componente temporal (De Felice et al., 2016), ó incluso implementar de una triada cósmica de campos vectoriales que restauren la isotropía (Armendariz-Picon, 2004; Álvarez et al., 2019; Gomez and Rodriguez, 2021). Este último escenario ha sido bien investigado en diferentes contextos y es natural en la presencia de una simetría interna $SU(2)$ (Maleknejad and Sheikh-Jabbari, 2011, 2013; Adshead and Sfakianakis, 2017; Guarnizo et al., 2020; Nieto and Rodriguez, 2016). De hecho, la configuración temporal y la triada cósmica son dos de las cuatro posibles configu-

raciones que son compatibles con una simetría esférica espacial y que cumplen con una simetría interna $SU(2)$ (Witten, 1977; Sivers, 1986). Esta es la principal motivación para construir la teoría generalizada de Proca $SU(2)$, denominada también como GSU2P para abreviar.

La teoría aparece en la literatura por primera vez en publicaciones realizadas por E. Allys, P. Peter y Y. Rodríguez en la Ref. (Allys et al., 2016c) y por L. Heisenberg y J. Beltrán Jiménez en la Ref. (Beltran Jimenez and Heisenberg, 2017). Posteriormente fue demostrado en la Ref. (Errasti Díez et al., 2020) que en la construcción de la teoría no fue tomada en cuenta una ligadura secundaria que garantiza la propagación de únicamente tres grados de libertad, por lo que la teoría tuvo que ser reconstruida y finalmente se presenta en la Ref. (Gallego Cadavid et al., 2020).

A la fecha ya ha sido demostrado que la teoría generalizada de Proca $SU(2)$ genera fácilmente el periodo de inflación primordial, satisfaciendo la restricción en la rapidez de las ondas gravitacionales (Garnica et al., 2022). Vale aclarar que los autores escogieron los parámetros libres de la teoría de tal manera que el sector tensorial de la teoría fuera el mismo que el de relatividad general al menos hasta segundo orden en las perturbaciones. De esta manera se garantizó la propagación lumínica de las ondas gravitacionales.

La teoría introduce nuevos grados de libertad, los cuales se representan mediante un triplete de campos vectoriales. La acción que describe el campo gravitatorio es invariante ante difeomorfismos y transformaciones globales del grupo $SU(2)$ actuando sobre el triplete de campos vectoriales. Al incluir la relación entre los parámetros libres que permiten una rapidez de propagación lumínica

de las ondas gravitacionales, la acción queda expresada por (Garnica et al., 2022):

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} = & \frac{1}{16\pi} \int R \sqrt{-g} d^4x - \frac{1}{16\pi} \int \left(F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + 2\mu^2 B_a^\mu B_\mu^a \right) \sqrt{-g} d^4x \\
& + \frac{\alpha_1}{16\pi} \int \left(\mathcal{L}_{4,2}^1 - 2\mathcal{L}_{4,2}^4 - \frac{20}{3} \mathcal{L}_{4,2}^5 + 5\mathcal{L}_2^7 \right) \sqrt{-g} d^4x \\
& + \frac{\alpha_3}{16\pi} \int \left(2\mathcal{L}_{4,2}^2 + \mathcal{L}_{4,2}^3 + \frac{7}{20} \mathcal{L}_{4,2}^4 + \frac{14}{3} \mathcal{L}_{4,2}^5 - 8\mathcal{L}_{4,2}^6 + \mathcal{L}_2^7 \right) \sqrt{-g} d^4x \quad (10) \\
& + \frac{1}{16\pi} \int \left(\chi_1 \mathcal{L}_2^1 + \chi_2 \mathcal{L}_2^2 + \chi_4 \left(\mathcal{L}_2^4 - \frac{\mathcal{L}_2^7}{2} \right) + \chi_5 \mathcal{L}_2^5 \right) \sqrt{-g} d^4x \\
& + \frac{\chi_6}{16\pi} \int \left(\mathcal{L}_2^6 - 3\mathcal{L}_2^7 \right) \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x,
\end{aligned}$$

en donde R es el escalar de Ricci, $\mu = m_a/\hbar$, m_a es la masa de los campos vectoriales, $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + e \varepsilon_{bc}^a B_\mu^b B_\nu^c$ es el tensor de esfuerzos de gauge, e es la carga de gauge, ε_{bc}^a es el tensor de Levi-Civita, χ_i y α_i son parámetros libres de la teoría, y \mathcal{L}_m es el lagrangiano que describe la materia. La forma explícita de los demás lagrangianos está dada por

$$\mathcal{L}_{4,2}^1 = \frac{1}{4} \left(B_b \cdot B^b \right) \left[S_\mu^{\mu a} S_{\nu a}^\nu - S_\nu^{\mu a} S_{\mu a}^\nu \right] + \frac{1}{2} \left(B_a \cdot B_b \right) \left[S_\mu^{\mu a} S_\nu^{\nu b} - S_\nu^{\mu a} S_\mu^{\nu b} \right], \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_{4,2}^2 = A_{\mu\nu}^a S_\sigma^{\nu b} B_a^\nu B_b^\sigma - A_{\mu\nu}^a S_\sigma^{\mu b} B_b^\nu B_a^\sigma + A_{\mu\nu}^a S_\sigma^{\sigma b} B_a^\mu B_b^\nu, \quad (12)$$

$$\mathcal{L}_{4,2}^3 = B^{\mu a} R^\alpha_{\sigma\rho\mu} B_{\alpha a} B^{\rho c} B_c^\sigma + \frac{3}{4} \left(B_\mu^a B_a^\mu \right) \left(B_b^\nu B_\nu^b \right) R, \quad (13)$$

$$\mathcal{L}_{4,2}^4 = \left[(B^a \cdot B_a) (B^b \cdot B_b) + 2 (B^a \cdot B^b) (B_a \cdot B_b) \right] R, \quad (14)$$

$$\mathcal{L}_{4,2}^5 = G_{\mu\nu} B^{\mu a} B_a^\nu (B^b \cdot B_b), \quad (15)$$

$$\mathcal{L}_{4,2}^6 = G_{\mu\nu} B^{\mu a} B^{\nu b} (B_a \cdot B_b), \quad (16)$$

$$\mathcal{L}_2^1 = B_\mu^a B_a^\mu B_\nu^b B_b^\nu, \quad (17)$$

$$\mathcal{L}_2^2 = B_\mu^a B_b^\mu B_\nu^b B_a^\nu, \quad (18)$$

$$\mathcal{L}_2^3 = B_\mu^b B_{\rho b} A^{\mu\nu a} A_{\nu a}^\rho, \quad (19)$$

$$\mathcal{L}_2^4 = B_\mu^b B_{\rho a} A^{\mu\nu a} A_{\nu b}^\rho, \quad (20)$$

$$\mathcal{L}_2^5 = B_{\mu a} B_\rho^b A^{\mu\nu a} A_{\nu b}^\rho, \quad (21)$$

$$\mathcal{L}_2^6 = B_\rho^b B_b^\rho A_{\mu\nu a} A^{\mu\nu a}, \quad (22)$$

$$\mathcal{L}_2^7 = B_\rho^b B_a^\rho A_{\mu\nu b} A^{\mu\nu a}, \quad (23)$$

en donde $S_{\mu\nu}^a \equiv \nabla_\mu B_\nu^a + \nabla_\nu B_\mu^a$ y $A_{\mu\nu}^a \equiv \nabla_\mu B_\nu^a - \nabla_\nu B_\mu^a$.

Puesto que se estudiará un caso con simetría esférica, se han omitido los lagrangianos que no son invariantes ante transformaciones de paridad (lagrangianos que involucran tensores de Levi-Civita (Gallego Cadavid et al., 2020)).

2.4. Estrellas y objetos compactos

Las estrellas son objetos astronómicos luminosos que bajo la suposición de rotación nula pueden considerarse esféricos. Nacen a partir de nubes de gas interestelar ricas en hidrógeno molecular que colapsan gravitacionalmente. Dicho colapso genera un incremento en la temperatura del gas. Gracias a la presión del gas se logra un equilibrio hidrostático temporal, pero debido a las pérdidas de energía (pérdidas radiativas) el gas disminuye su temperatura, por lo que se reduce la presión y consecuentemente se contrae el gas. Este proceso de contracción y posterior equilibrio del gas se repite durante un tiempo hasta que la temperatura aumenta hasta $T \approx 10^7 K$. Una vez alcanzada esta temperatura se hace posible la fusión de hidrógeno en helio en el núcleo.

Las reacciones nucleares compensan las pérdidas radiativas y mantienen el equilibrio hidrostático durante millones, e incluso miles de millones de años según la masa inicial (Salaris and Cassisi, 2005). Una vez fusionado todo el hidrógeno en helio, las estrellas con masas $M \leq M_\odot$

proceden a fusionar helio formando un núcleo ya sea de carbono u oxígeno según el caso. Cerca a su etapa final de evolución, estas estrellas liberan sus capas más externas. Los gases liberados forman nebulosas planetarias y dejan núcleos desnudos que son sostenidos, según lo teorizado, por la presión de degeneración de electrones. Tales núcleos desnudos son mejor conocidos como enanas blancas (Padmanabhan, 2001).

De otra parte, estrellas con masas $M > 8M_{\odot}$, empiezan un ciclo de fusión de elementos en su núcleo, formando elementos cada vez más pesados pasando por helio, carbono, oxígeno, magnesio, silicio y hierro (Glendenning, 2000). Al alcanzar el hierro, la fusión es endotérmica, lo cual conduce a que estas estrellas no tengan una fuente de energía que mantenga el equilibrio hidrostático. Por lo tanto, colapsan en un evento conocido como supernova. En este evento los cascarones de los distintos elementos más livianos caen sobre el núcleo de hierro desencadenando, mediante mecanismos que no han sido enteramente comprendidos (Janka, 2012), la eyección de gran parte de su masa en una explosión (Woosley and Janka, 2005). Tras la supernova, el núcleo colapsado emite una gran cantidad de energía principalmente en forma de radiación producto de un proceso de enfriamiento y reajuste estructural. Después de alcanzar una composición estable, que se presume contiene neutrones, protones, mesones, hiperones e incluso quarks desconfiados (Lattimer and Prakash, 2004), tanto la presión de degeneración de sus componentes como la interacción de rango corto entre nucleones son las encargadas de sostener el núcleo colapsado (Weinberg, 2019). Finalmente se alcanza una estructura definida conocida generalmente como estrella de neutrones.

Usualmente las enanas blancas y las estrellas de neutrones forman parte de una familia de objetos astrofísicos conocidos como objetos compactos. Realizar una correcta descripción mate-

mática de tales objetos requiere la definición del parámetro σ ,

$$\sigma \equiv \frac{P_{mat}(0)}{\rho_{mat}(0)}, \quad (24)$$

con $P_{mat}(0)$ y $\rho_{mat}(0)$ siendo la presión central y densidad central de materia del objeto compacto en cuestión. Este parámetro σ indica la diferencia de órdenes de magnitud entre la presión y densidad centrales de la configuración. Cuando $\sigma \ll 1$ se dice que domina la energía en reposo por lo cual una descripción con física Newtoniana es suficiente. Por otro lado, cuando $\sigma \sim 1$, la energía cinética media de las partículas es del mismo orden de su energía en reposo lo que hace que este caso esté en un régimen relativista. En este caso se deben tener en cuenta los efectos debidos a la curvatura del espacio-tiempo para realizar una correcta descripción (Tolman, 1939).

2.4.1. Enanas blancas Newtonianas. Las enanas blancas satisfacen la condición $\sigma \ll 1$ por lo que pueden modelarse mediante las ecuaciones de Newton (Chandrasekhar, 1957). Con este fin, se parte de la condición de equilibrio hidrostático la cual establece que

$$\frac{dP_{mat}}{dr} = -\rho_{mat}g = -\rho_{mat} \frac{m(r)}{r^2}, \quad (25)$$

siendo P la presión de radiación, r la distancia radial, ρ la densidad de masa, g la aceleración gravitacional y $m(r)$ la masa encerrada por el cascarón en equilibrio. Como segundo insumo para

el modelamiento de la enana blanca, se usa la ecuación de la conservación de la masa,

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho_{mat}. \quad (26)$$

Ahora bien, al combinar la Ec.(25) con la Ec.(26) se obtiene,

$$r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\rho_{mat}} \frac{dP_{mat}}{dr} \right) + \frac{2r}{\rho_{mat}} \frac{dP_{mat}}{dr} + 4\pi \rho_{mat} r^2 = 0. \quad (27)$$

Nótese que para resolver la Ec.(27) es necesaria una relación entre P y ρ ; para ello se usa una ecuación de estado de la siguiente forma,

$$P_{mat} \equiv k \rho_{mat}^{1+1/n}, \quad (28)$$

que corresponde a una ecuación de estado polítropa. Los parámetros k y n son constantes dependientes del contenido material de la estrella. La ecuación de estado polítropa nace a partir de considerar equilibrio convectivo en el cual los cambios en la cantidad de calor son proporcionales a los cambios en la temperatura localmente (Chandrasekhar, 1957). Usualmente se hace el cambio de variable,

$$P_{mat} \equiv k(\rho_{mat}(0))^{1+1/n} \theta^{n+1}, \quad (29)$$

$$\rho_{mat} \equiv (\rho_{mat}(0)) \theta^n, \quad (30)$$

de esta forma que se obtiene,

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n = 0. \quad (31)$$

con $r \equiv \alpha\xi$ y α dado por,

$$\alpha^2 \equiv \frac{(n+1)k(\rho_{mat}(0))^{1/n-1}}{4\pi}. \quad (32)$$

La Ec.(31) se conoce como ecuación de Lane-Emden y sirve para modelar estrellas y enanas blancas ya que ellas cumplen con el criterio $\sigma \ll 1$. Para dichas configuraciones se calcula la masa total de la estrella (M) mediante,

$$M \equiv 4\pi \int_0^R r^2 \rho_{mat} dr = -4\pi \rho_{mat}(0) \alpha^3 \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) \Big|_0^{\xi'}, \quad (33)$$

siendo R el radio de la estrella, el cual se encuentra a partir del primer cero de la función θ y $\xi' = R/\alpha$.

Como ejemplo, en el caso de enanas blancas con un gas degenerado de electrones relativista que evita el colapso gravitacional se encuentra que $n = 3$ (Shapiro and Teukolsky, 2008) y,

$$k = \frac{3^{1/3} \pi^{2/3}}{4} \frac{\hbar}{m_u^{4/3} \mu_e^{4/3}}, \quad (34)$$

en donde \hbar es la constante reducida de Plank, m_u es la masa de los nucleones y μ_e es el peso molecular promedio por electrón. Con estos valores dados de n y k es posible dar solución a la Ec.(31) para obtener la masa, el radio e incluso las funciones de densidad y presión dentro de la estrella.

2.4.2. Estrellas de neutrones. Las estrellas de neutrones se caracterizan por tener $\sigma \sim 1$, es decir son objetos relativistas y se debe considerar la curvatura del espacio-tiempo (Tolman, 1939). Con el fin de modelar una estrella de neutrones se asume que posee una rotación nula, lo cual implica que la estrella presenta simetría esférica. Se emplea entonces, el elemento de línea,

$$ds^2 = -e^{\mu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (35)$$

en donde $\mu(r)$ y $\lambda(r)$ son funciones arbitrarias de la coordenada radial r , t es el tiempo, θ es el ángulo polar y ϕ es el ángulo azimutal. Este elemento de línea se obtiene a partir de los invariantes rotacionales (Weinberg, 1972). Como contenido material se usa una fuente un fluido perfecto. Los efectos debidos a la constante cosmológica aquí son despreciables. Con el uso de las ecuaciones de campo de Einstein y la conservación local del tensor energía momento,

$$\nabla_{\nu} T^{\text{mat } \nu}_{\mu} = 0, \quad (36)$$

se obtiene un sistema con dos ecuaciones diferenciales y tres incógnitas. De nuevo se usa $r \equiv \alpha \xi$ con α dado por la Ec.(32). Además, para la masa de la configuración se usa la Ec.(33) como definición de masa. Esta masa corresponde asintóticamente a la masa que infiere un observador a partir de las leyes de Kepler. A diferencia del caso Newtoniano esta masa contiene contribuciones de la masa en reposo, de la energía interna, así como también de la energía gravitacional. Finalmente se usa la ecuación de estado, Ec.(29) y Ec.(30), para obtener,

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2 \theta^n, \quad (37)$$

$$\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \frac{1 - 2\sigma(n+1)v/\xi}{1 + \sigma\theta} + v + \sigma\xi\theta \frac{dv}{d\xi} = 0, \quad (38)$$

en donde,

$$v(\xi) \equiv \frac{m(\xi)}{4\pi\rho_{mat}(0)\alpha^3}. \quad (39)$$

Un detalle que se debe resaltar de la Ec. (38) consiste en notar que si se toma $\sigma \ll 1$, esta ecuación puede ser combinada con la Ec. (37) y así obtenerse la Ec. (31) que corresponde al caso Newtoniano.

En este caso relativista R (el radio en el que la presión de materia se hace igual a cero) no corresponde al radio físico de la estrella. A partir de la métrica se deduce que el radio invariante es,

$$\bar{r} = \int_0^R e^{\lambda/2} dr. \quad (40)$$

Por último, se integra numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales Ec.(37) y Ec.(38). Las condiciones iniciales escogidas son $\theta(0) = 1$, $v(0) = 0$, $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$. Se realizaron múltiples integraciones para diferentes valores de densidad central de materia con lo cual se obtiene la gráfica (1). De igual manera, con el uso de la Ec.(40) se pudo construir la relación masa radio la cual se presenta en la gráfica (2).

A partir de la gráfica (1) se obtiene que la estrella más masiva, que presenta equilibrio estable, tiene

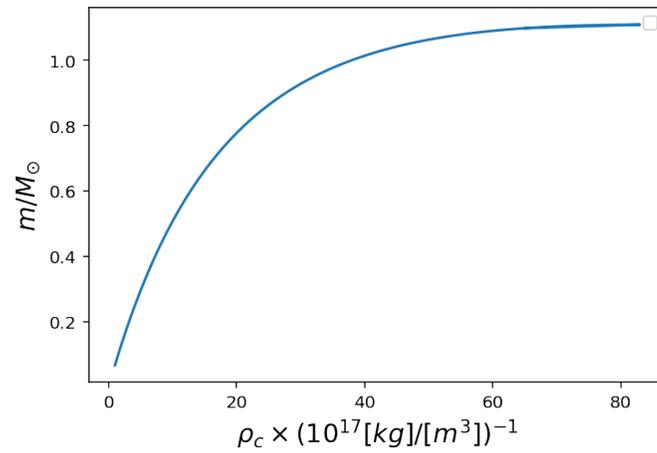


Figura 1. Relación masa densidad central para una ecuación de estado polítropa con $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

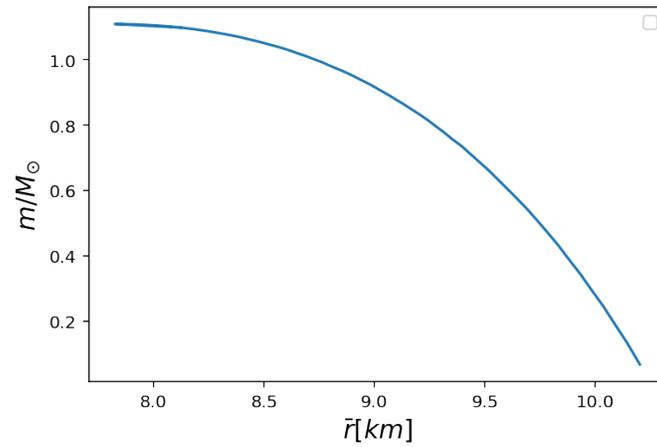


Figura 2. Relación masa radio para una ecuación de estado polítropa con $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

una masa de $1.11 M_{\odot}$ y un radio de $7.8 km$. Obtener esta masa crítica permitirá acotar las posibles modificaciones a la teoría de la gravedad de Einstein.

3. Soluciones tipo partícula

Se llama solución regular a cualquier solución de las ecuaciones de campo de Einstein que presente valores finitos en sus invariantes de curvatura, en la densidad de energía y en los esfuerzos. Para las ecuaciones de Einstein en el vacío, no existen soluciones globalmente regulares, estáticas y asintóticamente planas. De igual manera, no existen soluciones regulares, estáticas y asintóticamente planas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell (Israel, 1968; Robinson, 1977; Bunting and Masood-ul Alam, 1987). De otra parte, las ecuaciones de Yang-Mills en el vacío, tampoco presentan soluciones globalmente regulares y estáticas (Deser, 1984). Por esta razón, es natural conjeturar que no existen soluciones no singulares, estáticas y asintóticamente planas de las ecuaciones de Einstein Yang-Mills (EYM). En 1988, R. Bartnik y J. McKinnon encontraron en la Ref.(Bartnik and Mckinnon, 1988) que sí existen esta clase de soluciones en el contexto de las ecuaciones acopladas de Einstein Yang-Mills. Estas configuraciones existen debido a que la atracción gravitacional está compensada por la fuerza repulsiva de los campos de gauge.

A las soluciones de las ecuaciones de Einstein Yang-Mills usualmente se les llama estrellas de bosones de gauge o soluciones tipo partícula (Volkov and Gal'tsov, 1999). Este último nombre se debe a que estas soluciones son asintóticamente planas, globalmente estacionarias y están construidas únicamente con los grados de libertad vectoriales como contenido material. Las soluciones de R. Bartnik y J. McKinnon también se caracterizan por no presentar una escala específica de longitud ya que ellas escalan según el valor de la carga de gauge (Bartnik and Mckinnon, 1988). Las soluciones tipo partícula son interesantes porque el potencial del campo, y el tensor energía-

momento son no singulares. Además, la energía de los campos vectoriales está concentrada en una pequeña región del espacio.

En el presente trabajo se generalizaron los resultados de R. Bartnik y J. McKinnon debido a que se encontraron soluciones de este tipo en la teoría generalizada de Proca SU(2). Se realizó un análisis numérico en donde se variaron los valores de los parámetros libres de la GSU2P. En todos los casos la estructura de las configuraciones varió con respecto a los resultado de EYM.

Nótese que las soluciones tipo partícula encontradas aquí tienen como contenido material únicamente bosones vectoriales, los cuales no interactúan directamente con la materia bariónica y no emiten radiación electromagnética. Por lo anterior, las soluciones encontradas puede denominarse “estrellas oscuras”. Se conjetura que estas soluciones podrían contribuir eventualmente en algún porcentaje al contenido de materia oscura del universo.

3.1. Ecuaciones de campo de la GSU2P

A partir del principio de acción estacionaria con extremos fijos se obtuvieron las ecuaciones de Euler-Lagrange de la GSU2P. Al variar la acción Ec.(10) con respecto a la variable dinámica $g_{\mu\nu}$ se obtuvo,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{mat} + 8\pi T_{\mu\nu}^{efec}, \quad (41)$$

en donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}^{mat}$ el tensor energía-momento de la materia, definido como,

$$T_{\mu\nu}^{mat} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(\mathcal{L}_m \sqrt{-g} \right), \quad (42)$$

y $T_{\mu\nu}^{efec}$ es el tensor energía-momento efectivo, asociado al campo vectorial, el cual está definido como,

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{efec} = \frac{-1}{8\pi\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} & \left[\left(-F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - 2\mu^2 B_a^\mu B_\mu^a \right. \right. \\ & + \alpha_1 \left(\mathcal{L}_{4,2}^1 - 2\mathcal{L}_{4,2}^4 - \frac{20}{3} \mathcal{L}_{4,2}^5 + 5\mathcal{L}_2^7 \right) \\ & + \alpha_3 \left(2\mathcal{L}_{4,2}^2 + \mathcal{L}_{4,2}^3 + \frac{7}{20} \mathcal{L}_{4,2}^4 + \frac{14}{3} \mathcal{L}_{4,2}^5 - 8\mathcal{L}_{4,2}^6 + \mathcal{L}_2^7 \right) \\ & + \chi_1 \mathcal{L}_2^1 + \chi_2 \mathcal{L}_2^2 + \chi_4 \left(\mathcal{L}_2^4 - \frac{\mathcal{L}_2^7}{2} \right) + \chi_5 \mathcal{L}_2^5 \\ & \left. + \chi_6 \left(\mathcal{L}_2^6 - 3\mathcal{L}_2^7 \right) \right] \sqrt{-g}. \quad (43) \end{aligned}$$

Nótese que el término de Einstein-Hilbert hace parte de GSU2P lo cual permitió escribir la Ec.(41) con el objetivo de caracterizar todos los términos que contienen el campo vectorial como un fluido.

Al variar la acción Ec.(10) con respecto a la variable dinámica A_μ^a se obtuvo,

$$\begin{aligned}
C_a^\alpha = \frac{\delta}{\delta B_\alpha^a} & \left[-F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - 2\mu^2 B_a^\mu B_\mu^a \right. \\
& + \alpha_1 \left(\mathcal{L}_{4,2}^1 - 2\mathcal{L}_{4,2}^4 - \frac{20}{3} \mathcal{L}_{4,2}^5 + 5\mathcal{L}_2^7 \right) \\
& + \alpha_3 \left(2\mathcal{L}_{4,2}^2 + \mathcal{L}_{4,2}^3 + \frac{7}{20} \mathcal{L}_{4,2}^4 + \frac{14}{3} \mathcal{L}_{4,2}^5 - 8\mathcal{L}_{4,2}^6 + \mathcal{L}_2^7 \right) \\
& + \chi_1 \mathcal{L}_2^1 + \chi_2 \mathcal{L}_2^2 + \chi_4 \left(\mathcal{L}_2^4 - \frac{\mathcal{L}_2^7}{2} \right) + \chi_5 \mathcal{L}_2^5 \\
& \left. + \chi_6 \left(\mathcal{L}_2^6 - 3\mathcal{L}_2^7 \right) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{44}$$

Para poder resolver las Ec.(41) y Ec.(44) se usó la métrica de la Ec.(35) de la forma,

$$ds^2 = -e^{2\Upsilon} dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{45}$$

en donde Υ y m son funciones del radio, y $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido. La función m representa la masa gravitacional total del sistema.

Para integrar el sistema se decidió usar la longitud equivalente de una masa solar como medida para normalizar el radio, la cual tiene un valor en el sistema internacional,

$$l_\odot \equiv \frac{GM_\odot}{c^2} = 1477,058, [m], \tag{46}$$

siendo G la constante de gravitación y c la velocidad de la luz. Nótese que en el sistema de unidades

geometrizado la masa solar se hace igual a l_{\odot} .

Con el uso de la métrica de la Ec.(45), la Ec.(36) queda expresada como,

$$\frac{dP_{mat}}{dr} + \frac{1}{2}(\rho_{mat} + P_{mat})\frac{d\Upsilon}{dr} = 0. \quad (47)$$

Para normalizar el sistema de ecuaciones diferenciales se usó la definición de la Ec.(24), de la forma,

$$\sigma \equiv k(\rho_{mat}(0))^{1/n}. \quad (48)$$

Se definió también,

$$\beta \equiv 4\pi l_{\odot}^2 \rho_{mat}(0), \quad (49)$$

una presión normalizada como,

$$\tilde{P}_{mat}(r) \equiv \frac{P_{mat}(r)}{\sigma\beta}, \quad (50)$$

y una densidad normalizada como,

$$\tilde{\rho}_{mat}(r) \equiv \frac{\rho_{mat}(r)}{\rho_{mat}(0)}. \quad (51)$$

Debido a las modificaciones que sufren las ecuaciones de campo en este escenario generalizado, desacoplar la función $\Upsilon(r)$ hace que el sistema de ecuaciones diferenciales se torne demasiado complejo ya que el número de caracteres supera los trescientos mil. Un número tan grande de caracteres en cada ecuación genera un error de redondeo muy grande debido a la gran cantidad

de operaciones aritméticas del sistema (Press et al., 1986). Por lo tanto, no se desacopló la función $\Upsilon(r)$ pero se encontró que su ecuación diferencial es de orden dos. En el caso EYM sí se puede desacoplar fácilmente $\Upsilon(r)$ del sistema de ecuaciones diferenciales.

3.2. Perfil del campo vectorial

El ansatz aquí usado está construido con los invariantes rotacionales de los grupos SU(2) y SO(3), como se puede ver en la Ref. (Sivers, 1986). En su forma más general está dado por,

$$\mathcal{A} = \frac{\tau^j}{2e} \left\{ A_0 \frac{x_j}{r} dt + A_1 \frac{x_j x_k}{r^2} dx_k + \frac{\phi_1}{r} \left(\delta_{jk} - \frac{x_j x_k}{r^2} \right) dx_k - \varepsilon_{jkl} \frac{1 - \phi_2}{r^2} x_k dx_l \right\}, \quad (52)$$

en donde las coordenadas cartesianas x_j , están relacionadas con las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) del mismo modo que en un espacio plano. Las funciones A_0 , A_1 , ϕ_1 y ϕ_2 dependen únicamente de r , y e es la carga de gauge. τ^a son las matrices generadoras del grupo SU(2), las cuales satisfacen $[\tau_i, \tau_j] = \varepsilon_{ij}^k \tau_k$, siendo ε_{ij}^k el símbolo de Levi-Civita. Este ansatz fue encontrado por E. Witten en 1977 (Witten, 1977).

El grupo SO(3) es el grupo de las rotaciones espaciales en 3 dimensiones. Este grupo se caracteriza por ser homomorfo al grupo de transformaciones SU(2). El homomorfismo que presentan estos grupos permite que cualquier cantidad invariante ante transformaciones de uno de los grupos, sea inmediatamente sea invariante ante transformaciones del otro grupo. En términos de la base en coordenadas esféricas el ansatz se puede escribir como

$$\mathcal{A} = \frac{1}{e} [A_0 \tau_r dt + A_1 \tau_r dr + (\phi_1 \tau_\theta - (\phi_2 + 1) \tau_\phi) d\theta + ((1 + \phi_2) \tau_\theta + \phi_1 \tau_\phi) \sin \theta d\phi]. \quad (53)$$

Como se puede ver en la Ec.(53) el perfil del campo vectorial tiene 4 grados de libertad. Para encontrar soluciones de las ecuaciones acopladas de Einstein Yang-Mills en la Ref.(Bartnik and Mckinnon, 1988), los autores realizaron transformaciones de gauge sobre la Ec.(53) con lo cual obtuvieron,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{e} [-(\phi_2 + 1) \tau_\phi d\theta + (1 + \phi_2) \tau_\theta \sin \theta d\phi], \quad (54)$$

este ansatz se conoce como el monopolo magnético de 't Hooft-Polyakov. Debido a los términos nuevos que introduce la GSU2P se rompe la simetría de gauge por lo que el uso del monopolo magnético de 't Hooft-Polyakov en este caso no es correcto en principio, por ello se tomaron uno a uno los grados de libertad la Ec.(53) y se introdujeron en las ecuaciones de Euler-Lagrange de los grados de libertad vectoriales, Ec.(44). En primera instancia se tenía únicamente el grado de libertad $A_0(r)$, y se encontró,

$$e^{-2\Upsilon(r)} A_0(r)^2 = 0, \quad (55)$$

en una de las componentes de las ecuaciones de Euler-Lagrange, por lo que no es posible tener únicamente $A_0(r)$. Para el grado de libertad $A_1(r)$ de la Ec.(53) se encontró,

$$\frac{A_1(r)^2(r - 2m(r))}{r} = 0, \quad (56)$$

por lo que no se pueden construir configuraciones únicamente con $A_1(r)$. Finalmente para $\phi_1(r)$ se encontró,

$$\frac{\phi_1(r)^2}{r^2} = 0, \quad (57)$$

lo que hace que no sea posible tener únicamente $\phi_1(r)$. Entonces, si se tiene en cuenta únicamente un grado de libertad de la Ec.(53) se encuentra que solo el grado de libertad $\phi_2(r)$ permite obtener soluciones que no contradicen las consideraciones físicas impuestas. Se procedió entonces a trabajar con dicho ansatz, el cual corresponde al monopolo magnético de 't Hooft-Polyakov. Finalmente, se redefinió $\phi_2(r)$ como $V(r)$.

3.3. Soluciones en series

Debido a la alta no linealidad de las ecuaciones, obtener una solución analítica no es fácil, por lo que se decidió realizar una exploración numérica. Dicha exploración requiere que se realice una expansión asintótica en $r = 0$ para tener condiciones de frontera con las cuales empezar la integración. Una serie asintótica es una serie formal de potencias enteras, la cual, tiene la propiedad de que al ser truncada converge a una función en un intervalo dado.

Se obtuvieron las soluciones en serie de las cantidades ³ $m(r)$, $\Upsilon(r)$ y $V(r)$ cerca al origen, y

³ La contribución de la materia bariónica se hizo nula.

en el infinito espacial, las soluciones para $m(r)$ y $V(r)$. Con estas expansiones fue posible realizar un primer análisis de $m(r)$ y $V(r)$.

Con el uso del paquete xAct de Mathematica (Martín-García, 2020), se obtuvieron las Ec.(113), Ec.(114) y Ec.(115), las cuales permitieron encontrar las series asintóticas antes mencionadas. Dichas ecuaciones corresponden a dos de las componentes de las ecuaciones Euler-Lagrange de los grados de libertad tensoriales, y una de las componentes de las ecuaciones Euler-Lagrange de los grados de libertad vectoriales. Se usó la métrica esféricamente simétrica, Ec.(45) y el monopolo de 't Hooft-Polyakov, Ec.(54).

Vale aclarar que en la Ec.(41) y la Ec.(44), el parámetro χ_4 de la Ec.(10) no ofrece contribución alguna por lo que este parámetro no pudo ser estudiado en este trabajo. Finalmente el parámetro libre de la teoría, μ , no se investigó ya que se encontró en la Ref.(Greene et al., 1993) que dicho parámetro ya había sido estudiado y que presenta un valor máximo de 4.454×10^{-2} .

3.3.1. Comportamiento asintótico en el origen. Para dar solución en series alrededor del origen se garantizó primero que $m(0)$ fuera igual a cero ya que de esta manera la geometría del espacio es suave en el origen; si $m(0)$ es diferente de cero, la geometría presenta una singularidad en el origen (Thorne et al., 1973). Además la densidad de energía en $r = 0$ debe ser finita, por lo que,

$$m(r) = \mathcal{O}(r^3). \quad (58)$$

El término independiente de la función $\Upsilon(r)$ puede ser removido mediante una transformación de la coordenada t , por ello se escoge igual a cero. Esto da lugar a

$$\Upsilon(r) = \mathcal{O}(r^1). \quad (59)$$

Alrededor del origen para $m(r)$, $V(r)$ y $\Upsilon(r)$ se tiene,

$$m(r) = a_3r^3 + a_4r^4 + a_5r^5 + a_6r^6 + \mathcal{O}(r^7), \quad (60)$$

$$V(r) = b_0 + b_1r + b_2r^2 + b_3r^3 + b_4r^4 + b_5r^5 + \mathcal{O}(r^6), \quad (61)$$

$$\Upsilon(r) = c_1r + c_2r^2 + c_3r^3 + c_4r^4 + c_5r^5 + \mathcal{O}(r^6). \quad (62)$$

El invariante de Kretschmann tiene un valor de,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{8c_1^2}{r^2} + \frac{32c_1c_2}{r} + \mathcal{O}(r^0), \quad (63)$$

lo que puede dar lugar a divergencias en el origen si no se remueven las contribuciones de las potencias inversas, para ello se hace $c_1 = 0$. Para encontrar la densidad efectiva de energía se usa,

$$\rho_{efec} \equiv T_{\mu\nu}^{efec} u^\mu u^\nu, \quad (64)$$

en donde u^μ es la cuadri-velocidad de un observador co-móvil con el fluido. Alrededor del origen

ρ_{efec} está dada por,

$$\rho_{efec} = -\frac{2((680\alpha_1 - 3\alpha_3 - 20\chi_6)(1 + b_0)^4)}{5e^4r^6} + \mathcal{O}(r^5), \quad (65)$$

lo que hace necesario que $b_0 = -1$; lo anterior elimina algunas contribuciones de potencias inversas

y deja como resultado,

$$\begin{aligned} \rho_{efec} = & \frac{2b_1^2(-9e^2 + (-8\alpha_1 + 2\alpha_3 + 3\chi_5 + 9\chi_6)b_1^2)}{3e^4r^2} \\ & + \frac{4(-60e^2b_1b_2 + b_1^3(15e^2 + (-950\alpha_1 + 68\alpha_3 + 45\chi_5 + 75\chi_6)b_2))}{15e^4r} + \mathcal{O}(r^0), \end{aligned} \quad (66)$$

por lo que es necesario hacer $b_1 = 0$. Finalmente al dejar b_2 como parámetro libre se obtiene,

$$a_3 = \frac{2b_2^2}{e^2}, \quad (67)$$

$$a_5 = \frac{3\mu^2b_2^2}{5e^2} - \frac{8b_2^3}{5e^2} + \frac{4\alpha_1b_2^4}{3e^4} + \frac{154\alpha_3b_2^4}{15e^4} - \frac{4\chi_6b_2^4}{e^4}. \quad (68)$$

$$b_4 = \frac{\mu^2b_2}{10} - \frac{3b_2^2}{10} + \frac{4b_2^3}{5e^2} + \frac{\alpha_1b_2^3}{e^2} + \frac{7\alpha_3b_2^3}{10e^2} + \frac{\chi_5b_2^3}{5e^2} - \frac{\chi_6b_2^3}{e^2}. \quad (69)$$

$$c_2 = \frac{2b_2^2}{e^2}, \quad (70)$$

$$c_4 = \frac{\mu^2 b_2^2}{5e^2} - \frac{4b_2^3}{5e^2} + \frac{12b_2^4}{5e^4} + \frac{6\alpha_1 b_2^4}{e^4} - \frac{31\alpha_3 b_2^4}{20e^4} - \frac{2\chi_5 b_2^4}{5e^4} - \frac{2\chi_6 b_2^4}{e^4}, \quad (71)$$

y $a_4 = a_6 = 0$, $b_3 = b_5 = 0$ y $c_3 = c_5 = 0$. Así, la densidad central de energía efectiva adopta el valor

$$\rho_{efec} \Big|_{r=0} = \frac{6b_2^2}{4\pi e^2 l_{\odot}^2} \frac{c^2}{G}, \quad (72)$$

en donde c es la velocidad de la luz y G es la constante de gravitación universal. Nótese que gracias a la Ec.(72) se puede entender que b_2 está relacionado físicamente con la densidad efectiva central de la configuración.

3.3.2. Solución en el infinito. Para la solución en series en el infinito espacial se hizo la masa del campo vectorial igual a cero, $\mu = 0$, ya que ella induce un decaimiento exponencial de las series en el infinito espacial (Greene et al., 1993). Consideramos este caso sin masa ya que de esta manera se obtienen series con un comportamiento asintótico de la forma r^{-n} .

Asumiendo M_{∞} y \tilde{b}_1 como parámetros libres se encontró que,

$$m(r) = M_{\infty} + \frac{\tilde{a}_1}{r^1} + \frac{\tilde{a}_2}{r^2} + \frac{\tilde{a}_3}{r^3} + \frac{\tilde{a}_4}{r^4} + \frac{\tilde{a}_5}{r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^6}\right), \quad (73)$$

siendo $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 0$

$$\tilde{a}_3 = -\frac{\tilde{b}_1^2}{e^2}, \quad (74)$$

$$\tilde{a}_4 = \frac{\tilde{b}_1^2(-5M_\infty + 4\tilde{b}_1)}{2e^2}, \quad (75)$$

$$\tilde{a}_5 = -\frac{3(\tilde{b}_1^2(68e^2M_\infty^2 - 100e^2M_\infty\tilde{b}_1 + (37e^2 - 4(2\chi_1 + \chi_2))\tilde{b}_1^2))}{40e^4}. \quad (76)$$

Al comparar con la solución de Reissner Nordström se encuentra que \tilde{a}_1 corresponde es un término de carga global. Nótese que la función $m(r)$ tiene $\tilde{a}_1 = 0$, por lo que las soluciones no presentan una carga global asociada a los grados de libertad vectoriales.

Para el perfil del campo vectorial se encontró que su expansión en series está dada por,

$$V(r) = -1 + \frac{\tilde{b}_1}{r} + \frac{\tilde{b}_2}{r^2} + \frac{\tilde{b}_3}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (77)$$

$$\tilde{b}_2 = \frac{3(2M_\infty - \tilde{b}_1)\tilde{b}_1}{4}, \quad (78)$$

$$\tilde{b}_3 = \frac{\tilde{b}_1(48e^2M_\infty^2 - 42e^2M_\infty\tilde{b}_1 + (11e^2 - 2(2\chi_1 + \chi_2))\tilde{b}_1^2)}{20e^2}. \quad (79)$$

Nótese que cuando se hace $V = -1$ y $V' = 0$, lo cual es análogo a hacer $r \rightarrow \infty$, la métrica adopta un comportamiento similar al de la métrica de Schwarzschild. Con el uso de la definición

de la presión efectiva isotrópica,

$$P_{\text{efec}} \equiv \frac{1}{3}(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu)T_{\mu\nu}^{\text{efec}}, \quad (80)$$

y la densidad efectiva, Ec.(64), se puede definir un parámetro de estado efectivo $w_{\text{efec}} \equiv P_{\text{efec}}/\rho_{\text{efec}}$,

de acuerdo a la Ec.(8). En el infinito espacial está dado por,

$$w_{\text{efec}} = \frac{1}{3} + \frac{(6250\alpha_1 - 6133\alpha_3 - 30(\chi_5 + 3\chi_6))\tilde{b}_1^2}{135e^2r^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^5}\right). \quad (81)$$

Vale aclarar que en todo el dominio los parámetros χ_1 y χ_2 no modifican el parámetro de estado, únicamente los parámetros libres de la teoría α_1 , α_3 , χ_5 , χ_6 lo modifican. Lo interesante de este resultado es que esta modificación permite que el fluido efectivo deje de comportarse como radiación en la región intermedia.

Nótese que en las expansiones en series, en el origen y en el infinito espacial, los términos de la GSU2P que modifican la gravedad no aparecen en los órdenes dominantes de las series, sino en órdenes mayores. Se puede decir que el cambio debido a los parámetros libres de la teoría está implícito en las series ya que las modificaciones se dan en la región intermedia.

3.4. Soluciones numéricas

Gracias a los resultados de la sección anterior, es posible tener condiciones de frontera para empezar a integrar el sistema de ecuaciones. En el caso EYM sucedió algo similar a lo que se decidió realizar en este caso, ya que primero se realizó la exploración numérica en la Ref.(Bartnik and Mckinnon, 1988) y posteriormente se encontraron soluciones analíticas (Smoller and Wasserman,

1993; Breitenlohner et al., 1994). Además debido a la complejidad del sistema de ecuaciones en este caso, no es sencillo encontrar soluciones analíticas que generalicen las encontradas para EYM.

Para encontrar las soluciones numéricas para las variables $m(r)$, $\Upsilon(r)$ y $V(r)$ se procedió a usar el comando Solve de Mathematica para desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales. Dicho comando se aplicó sobre las Ec.(113), Ec.(114) y Ec.(115). Como resultado se encontró que el sistema de ecuaciones diferenciales se desacopla fácilmente para $m'(r)$, $\Upsilon''(r)$ y $V''(r)$. El sistema desacoplado para las variables $m'(r)$, $\Upsilon''(r)$ y $V''(r)$, se exportó a Python para integrarlo con el uso los paquetes NumPy y SciPy. Se usaron las expansiones en series Ec.(60), Ec.(61) y Ec.(62) como condiciones iniciales para integrar el sistema. Todas las soluciones se empezaron a construir en $r = 0.0001$, y ya que en la variable radial se necesitaba una mayor resolución cerca al origen, pero menor lejos de él, se decidió cambiar de la variable r a otra variable de acuerdo a $r = e^t$.

3.4.1. Einstein Yang-Mills. Debido a que no se conocía el comportamiento del campo vectorial, se procedió a buscar en la literatura soluciones de las ecuaciones acopladas de Einstein Yang-Mills. El más destacado de los resultado fue la Ref.(Bartnik and Mckinnon, 1988). En dicho artículo se tenían en el lagrangiano los términos de Einstein Hilbert y de Yang Mills (esto es análogo al caso GSU2P con $\chi_i = \alpha_i = \mu = 0$), pero no se tenía materia bariónica. R. Bartnik y J. McKinnon encontraron en su artículo que si bien no existe solución para las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío que sea no singular y asintóticamente plana, así como tampoco existe solución no singular y estática en 4 dimensiones para las ecuaciones de Yang Mills, las ecuaciones acopladas de Einstein Yang Mills sí presentan soluciones regulares, estáticas y asintóticamente

planas. Estas configuraciones existen ya que la atracción gravitacional se ve compensada por la fuerza repulsiva de los campos de gauge y se les llama usualmente soluciones tipo partícula. Nótese que dichas configuraciones tienen como contenido material bosones vectoriales por lo que se les denomina también estrellas de bosones.

Se reprodujeron dichos resultados fijando como escala la masa solar para obtener soluciones astrofísicas. Se aprendió que, según el valor de b_2 , el perfil del campo vectorial toma diferentes soluciones. El método de “shooting” allí mencionado consiste en realizar múltiples integraciones del sistema para múltiples valores de b_2 y así poder obtener una solución específica. Por ello a b_2 se le llama también parámetro de shooting. En el intervalo $[0, 0.707)$ para b_2 , las soluciones oscilan para $|V(r)| < 1$ antes de cruzar $|V(r)| = 1$ y posteriormente divergen. Además, los autores también encontraron que existe un conjunto discreto de valores en dicho intervalo para los cuales, después de las oscilaciones, $V(r)$ asintóticamente tiende a ± 1 y el espacio-tiempo es asintóticamente plano.

La tabla 3.2 de la Ref.(Jackson, 2018) muestra valores del parámetro b_2 para las primeras 20 soluciones asintóticamente planas junto con los respectivos perfiles de campo vectorial. Es importante mencionar que las soluciones se etiquetan con un subíndice asociado al número de veces que el campo vectorial cruza el cero. En general el campo presenta un mayor número de oscilaciones a medida que b_2 se acerca más al límite de 0.707, incluso en la misma tabla se encuentra el caso en que las oscilaciones son infinitas. Se realizó la Fig.(3), como ejemplo para mostrar 4 ejemplos de perfiles del campo vectorial cuando la solución tiende asintóticamente a $V(r) = \pm 1$. Para $V_1(r)$ tiene un b_2 de 0.45371627, para $V_2(r)$ tiene un b_2 de 0.65172552, para $V_3(r)$ tiene un b_2 de 0.69704005 y para $V_4(r)$ tiene un b_2 de 0.70487847.

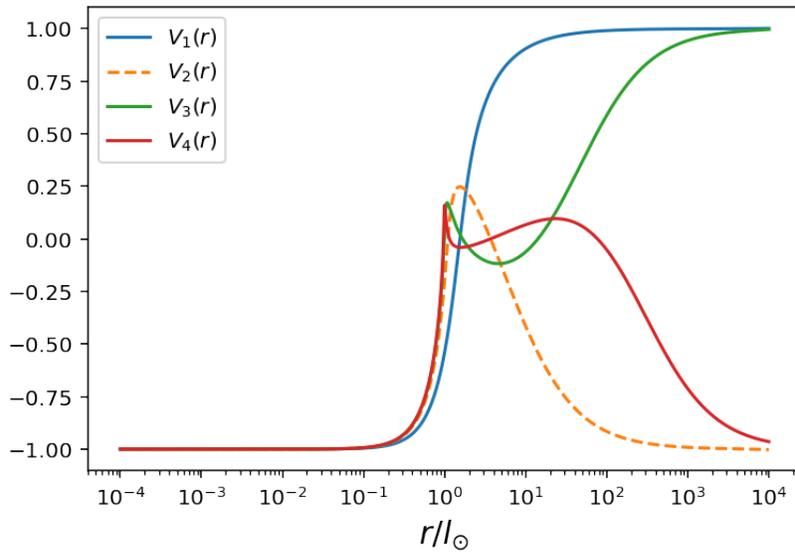


Figura 3. Gráfica de ejemplo de perfiles del campo vectorial para las primeras 4 soluciones asintóticamente planas en el caso de EYM.

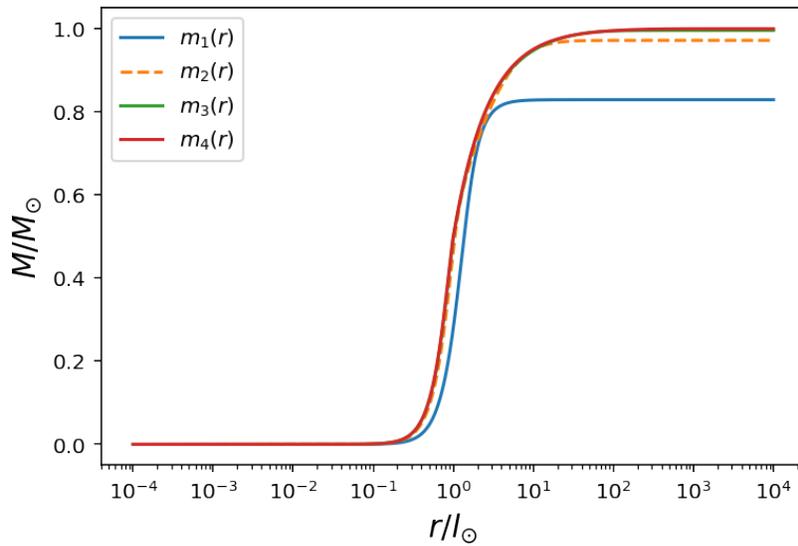


Figura 4. Gráfica de perfiles de masa para los ejemplos de la Fig.(3).

De igual manera, para confirmar el correcto funcionamiento del código se realizaron las gráficas de los perfiles de masa para las cuatro primeras soluciones asintóticamente planas de las

ecuaciones de EYM como se puede ver en la Fig.(4). Nótese además que al tener $V(0) + 1 = 0$, se garantiza que el espacio tiempo es localmente Minkowski en el origen.

Ya que el caso en que GSU2P tiene $\alpha_i = \chi_i = \mu = 0$ se reduce al caso EYM se decidió realizar una exploración a las posibles generalizaciones de las soluciones encontradas por R. Bartnik y J. McKinnon, ya que ellos mismos demostraron mediante argumentos de energía que sus soluciones son inestables cuando el campo cruza más de 3 veces el cero. Para la exploración se hizo no nulo uno a uno los parámetros libres de la teoría. Se buscó en todos los casos la solución asintóticamente plana (solución en naranja de la Fig.(3)), realizando múltiples integraciones para el parámetro b_2 .

Vale aclarar que $V(r)$ no puede ser medido ya que los grados de libertad vectoriales no interactúan con la materia por lo que son oscuros.

3.4.2. Perfil de los grados de libertad vectoriales. En esta sección se realiza una correcta comparación de los perfiles de los grados de libertad vectoriales de los diferentes casos que generalizan lo encontrado en EYM.

Las Fig.(5) muestran cómo, en todos los casos, el comportamiento de los perfiles del campo vectorial fue diferente con respecto al caso EYM, por lo que todos los casos presentados generalizan los resultados de R. Bartnik y J. McKinnon en cuanto al comportamiento de los grados de libertad vectoriales. En todos los casos se buscó la solución asintóticamente plana con dos ceros. En la tabla (1) se reportan los distintos valores de b_2 para las configuraciones aquí presentadas. Nótese además que al tener $V(0) + 1 = 0$, se garantiza que el espacio tiempo es localmente Minkowski en el origen.

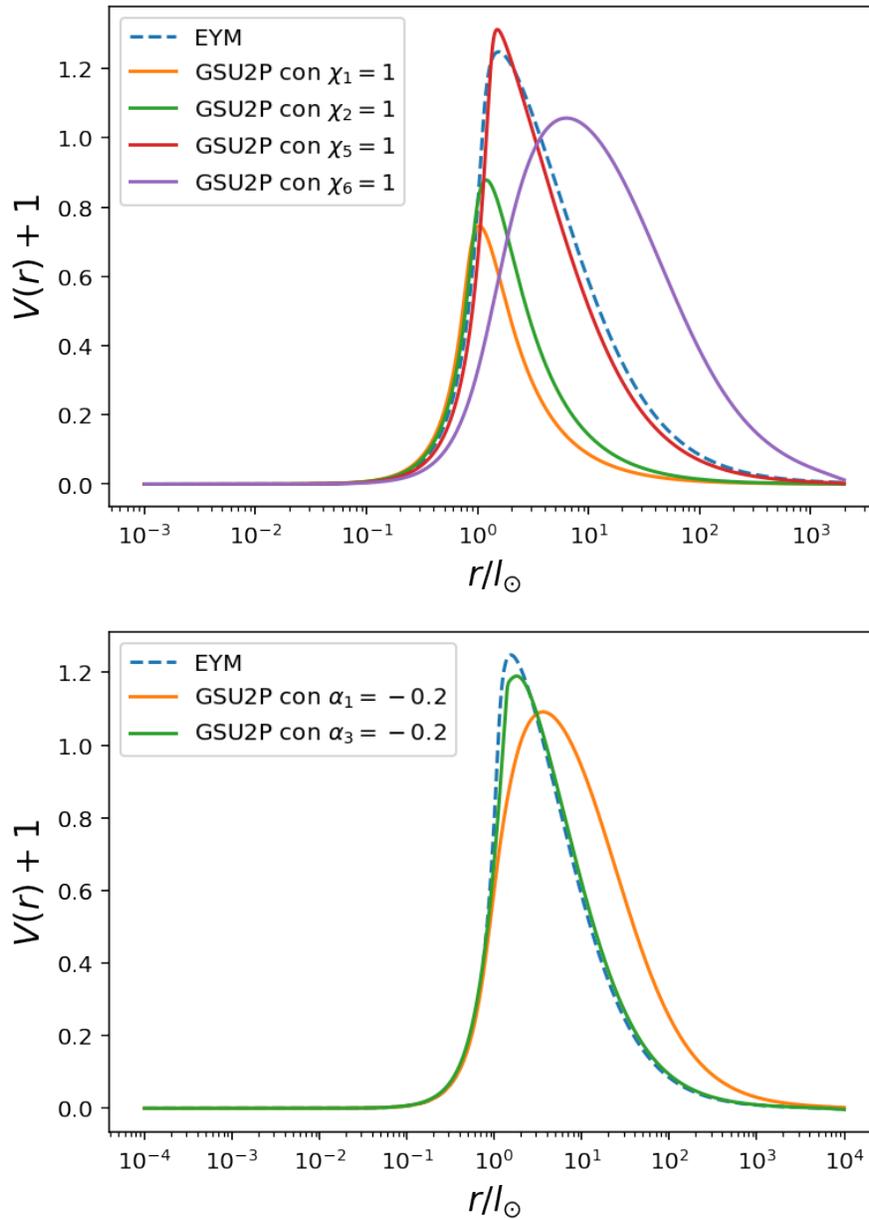


Figura 5. La gráfica superior muestra los perfiles de los grados de libertad vectoriales para los casos EYM, GSU2P con $\chi_1 = 1$, GSU2P con $\chi_2 = 1$, GSU2P con $\chi_5 = 1$ y GSU2P con $\chi_6 = 1$. La gráfica inferior muestra los perfiles de los grados de libertad vectoriales para los casos EYM, GSU2P con $\alpha_1 = -0.2$ y GSU2P con $\alpha_3 = -0.2$.

3.4.3. Masa. Los perfiles de masa aquí graficados corresponden a aquellos asociados a la masa gravitacional del sistema. Esta masa se puede medir mediante experimentos gracias a la tercera ley de Kepler.

Las Fig.(6) muestran cómo, en todos los casos de la GSU2P, el comportamiento de los perfiles de masa fue diferente con respecto al caso EYM. Además las masas gravitacionales de todas las configuraciones fueron diferentes. En la tabla (1) se reportan los distintos valores de masas para las configuraciones aquí presentadas.

3.4.4. Densidad efectiva. Las Fig.(7) muestran cómo, en todos los casos de la GSU2P, el comportamiento de los perfiles de densidad efectiva fue diferente con respecto al caso EYM. Además, las densidades centrales efectivas de todas las configuraciones fueron diferentes. En la tabla (1) se reportan los distintos valores de densidades centrales efectivas para las configuraciones aquí presentadas.

Para los casos antes mencionados se decidió separar de la densidad efectiva total la contribución del término de Yang Mills y la contribución de cada parámetro libre de la teoría. Para ello se llamó como $\rho_{GSU2P,i}^{efec}$ a la densidad efectiva total para cada i -ésimo caso y ρ_{YM}^{efec} a la contribución asociada únicamente al término de Yang Mills de cada caso. La gráfica punteada corresponde en todos los casos a la densidad de energía efectiva asociada únicamente a cada parámetro libre de la teoría.

Nótese que en que en la Fig.(8) y en la Fig.(9) la mayor contribución a la densidad de energía efectiva está dada por el término de Yang Mills. Además la contribución a la densidad de

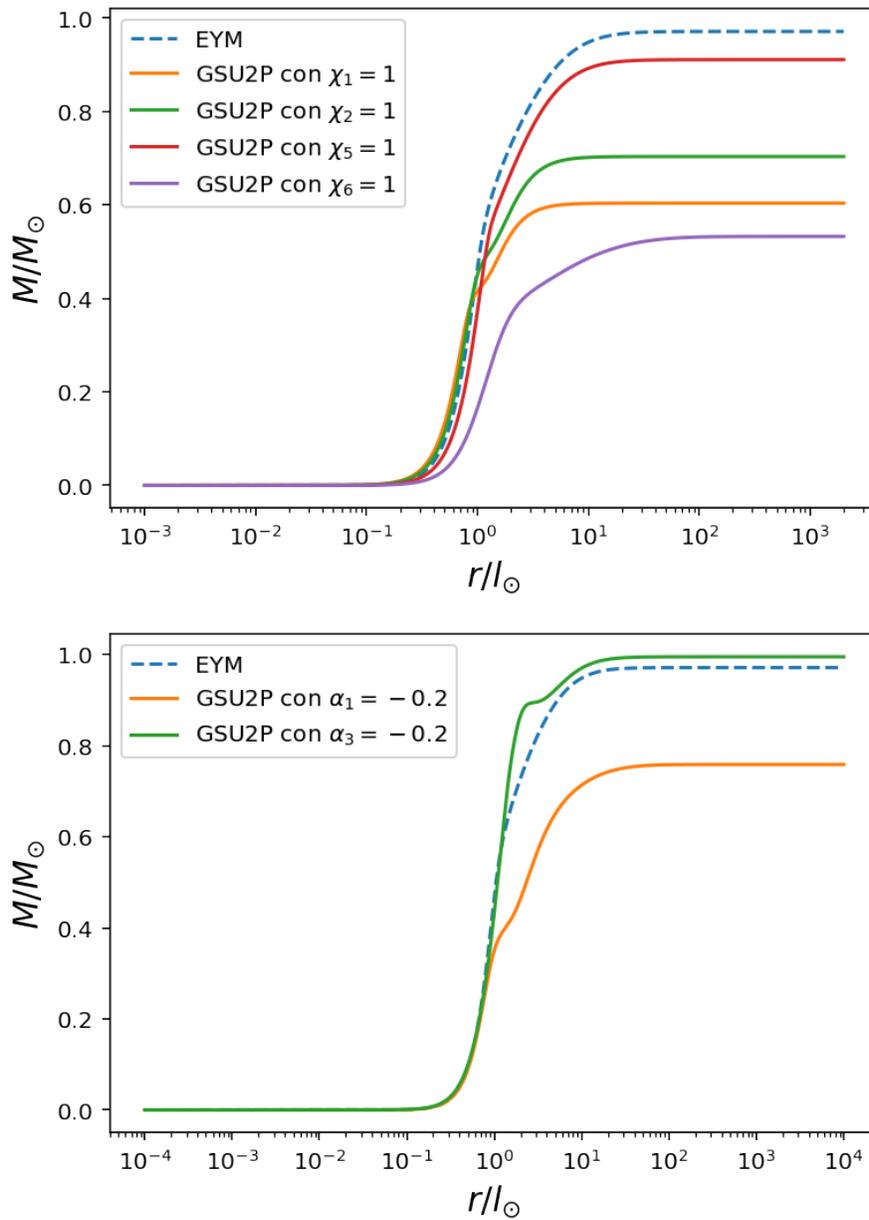


Figura 6. La gráfica muestra los perfiles de masa para los casos presentados en la Fig.(5).

energía efectiva debida a los parámetros libres de la teoría es negativa. De otra parte, la densidad de energía efectiva del término de Yang Mills alcanza siempre su máximo cuando el perfil de los campos vectoriales alcanza su máximo.

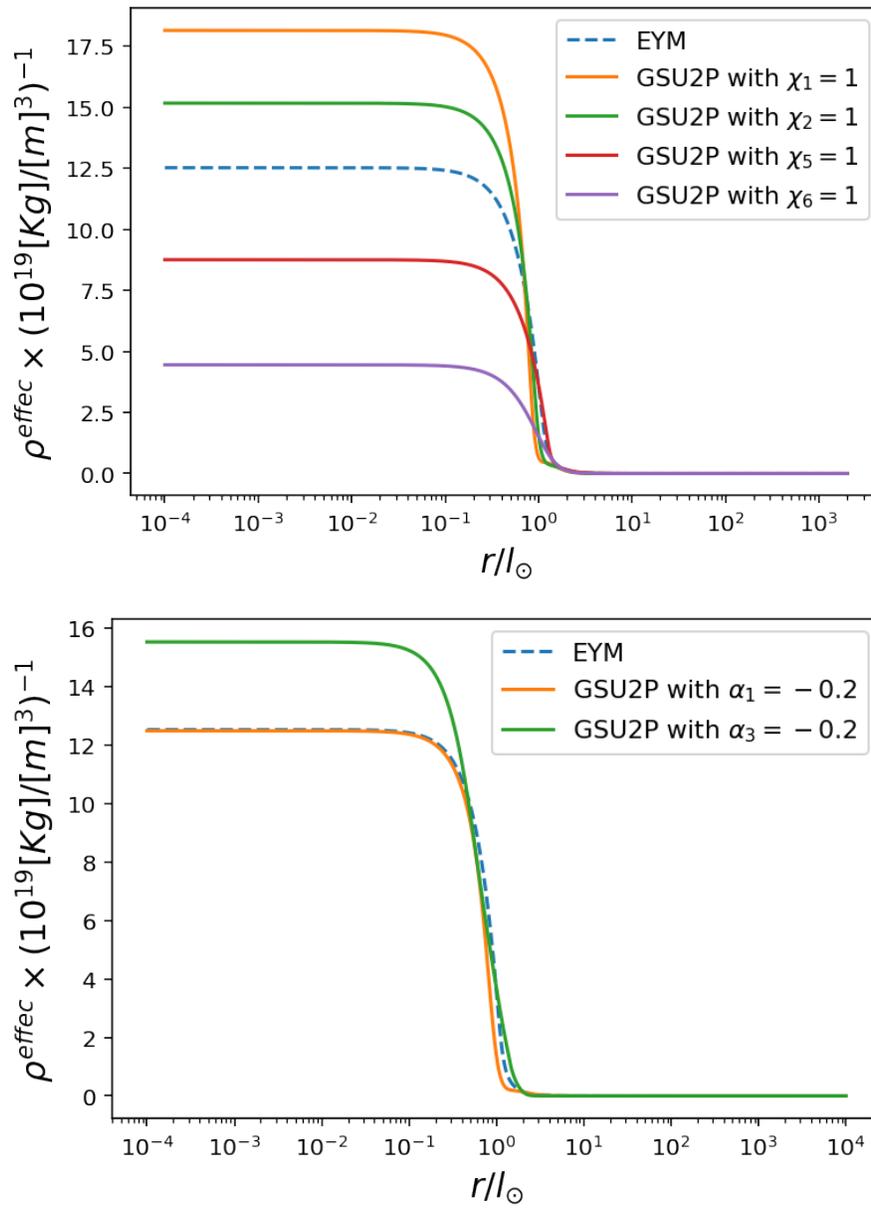


Figura 7. La gráfica muestra los perfiles de densidad efectiva para los casos presentados en la Fig.(5).

3.4.5. Carga efectiva. Para caracterizar correctamente el comportamiento métrico de las soluciones, se definió una carga efectiva como

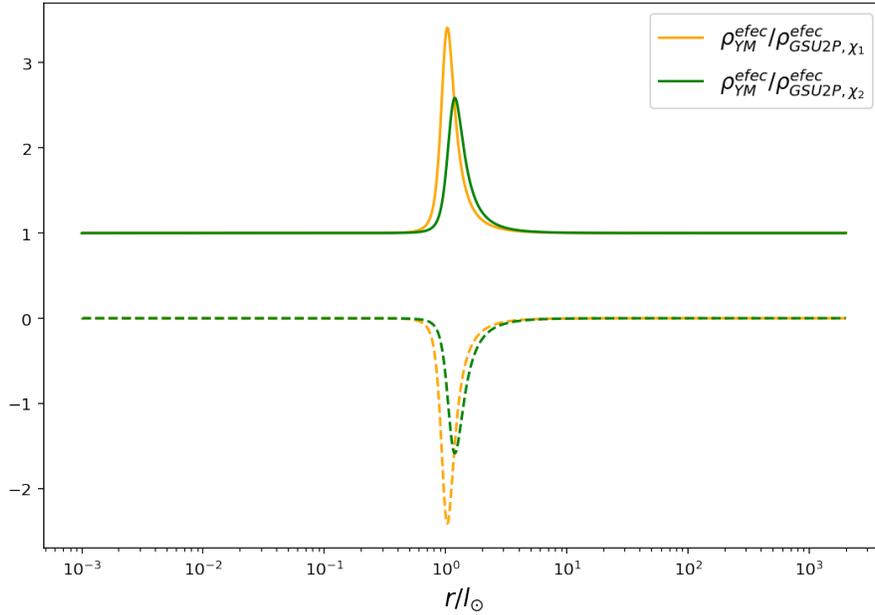


Figura 8. La gráfica muestra las contribuciones a la densidad efectiva total, $\rho_{GSU2P, \chi_i}^{efec}$, normalizadas para GSU2P con $\chi_1 = 1$ y GSU2P con $\chi_2 = 1$. Las gráficas continuas corresponden a las contribuciones a la densidad de energía efectiva asociadas al término de Yang Mills, ρ_{YM}^{efec} , y las gráficas punteadas corresponden a las contribuciones a la densidad de energía efectiva asociadas a los parámetros libres de la GSU2P.

$$Q_{efec}^2 \equiv 2r(M_{\infty} - m(r)), \quad (82)$$

en donde M_{∞} es la masa gravitacional en el infinito de la configuración y $m(r)$ es la función de masa. Esta definición permite mostrar que en la región inmediatamente exterior de las configuraciones la solución es similar al caso Reissner Nordström con una carga efectiva que en todos los casos se va gradualmente a cero. La solución asintótica en el infinito corresponde, en todos los casos, a la de Schwarzschild justo como se buscó.

Nótese en las Fig.(10) que para los diferentes parámetros libres de la teoría la carga efectiva

siempre es diferente.

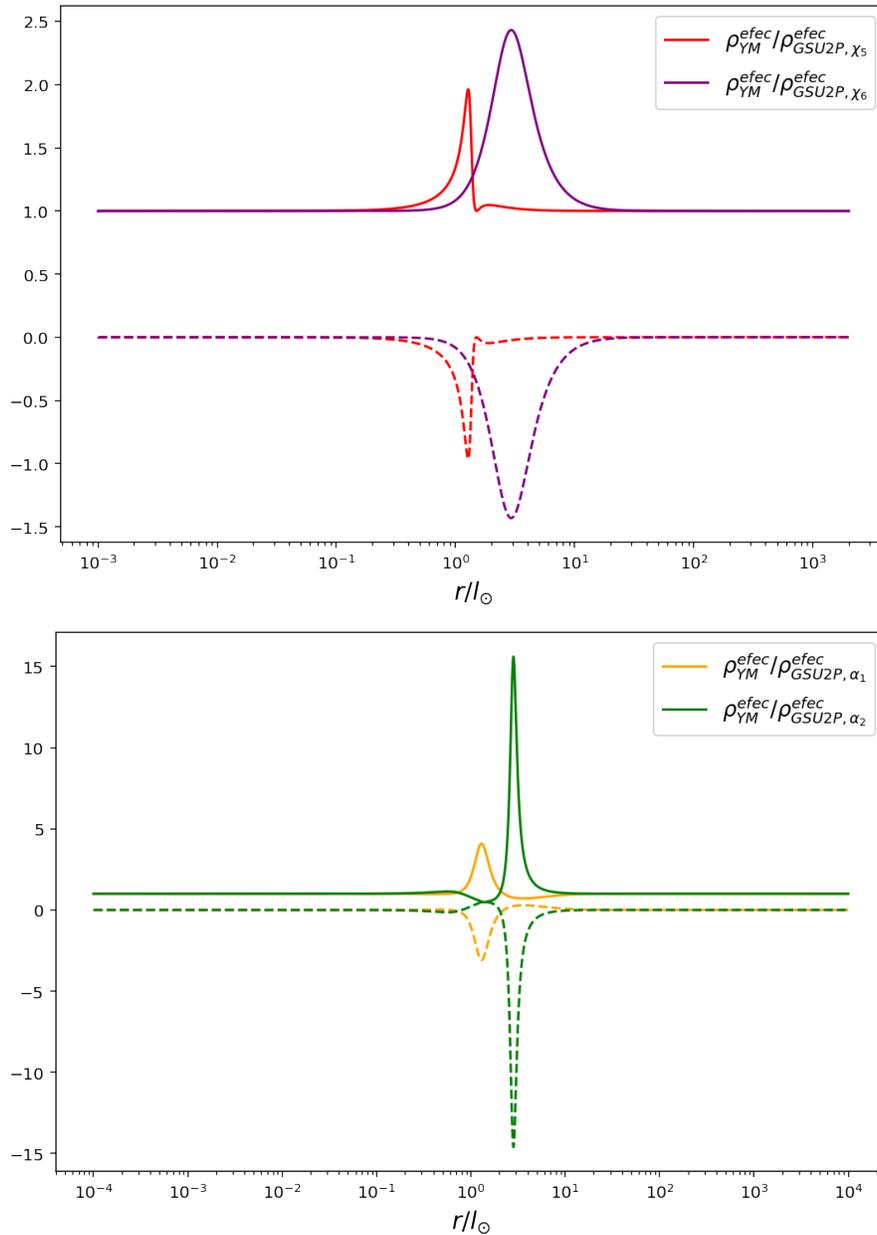


Figura 9. La gráfica superior muestra las contribuciones a la densidad efectiva total, $\rho_{GSU2P,\chi_i}^{efec}$, normalizadas para GSU2P con $\chi_5 = 1$ y GSU2P con $\chi_6 = 1$. Similar al caso anterior, la gráfica inferior muestra las contribuciones a la densidad efectiva total, $\rho_{GSU2P,\alpha_i}^{efec}$, normalizadas para GSU2P con $\alpha_1 = -0.2$ y GSU2P con $\alpha_3 = -0.2$. Las gráficas continuas corresponden a las contribuciones a la densidad de energía efectiva asociadas al término de Yang Mills, ρ_{YM}^{efec} , y las gráficas punteadas corresponden a las contribuciones a la densidad de energía efectiva asociadas a los parámetros libres de la GSU2P.

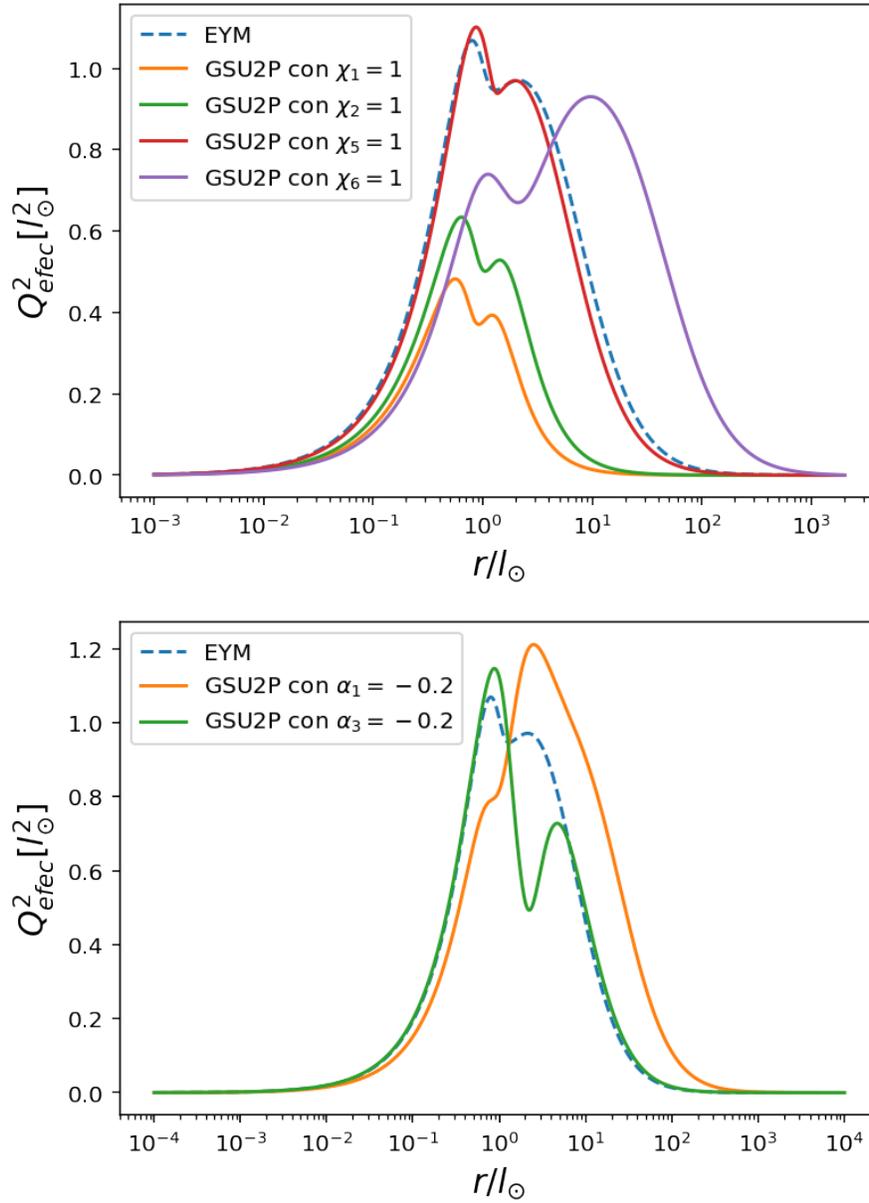


Figura 10. La gráfica muestra la carga efectiva, Ec.(82), para los casos de la Fig.(5).

3.4.6. GSU2P con χ_5 . El parámetro libre de la teoría más interesante fue χ_5 ya que únicamente con este parámetro se obtuvieron soluciones de estrellas de bosones con densidades centrales del orden de $10^{17} [Kg]/[m]^3$. Este valor es de gran interés ya que de este orden es la densidad del núcleo atómico, y es justamente éste el orden de densidades centrales de materia de las estrellas de neutrones. Por ello se decidió realizar la gráfica (11), y así conocer el comportamiento de la densidad efectiva central en función de χ_5 . En todos los casos se buscó la solución asintóticamente plana con dos ceros.

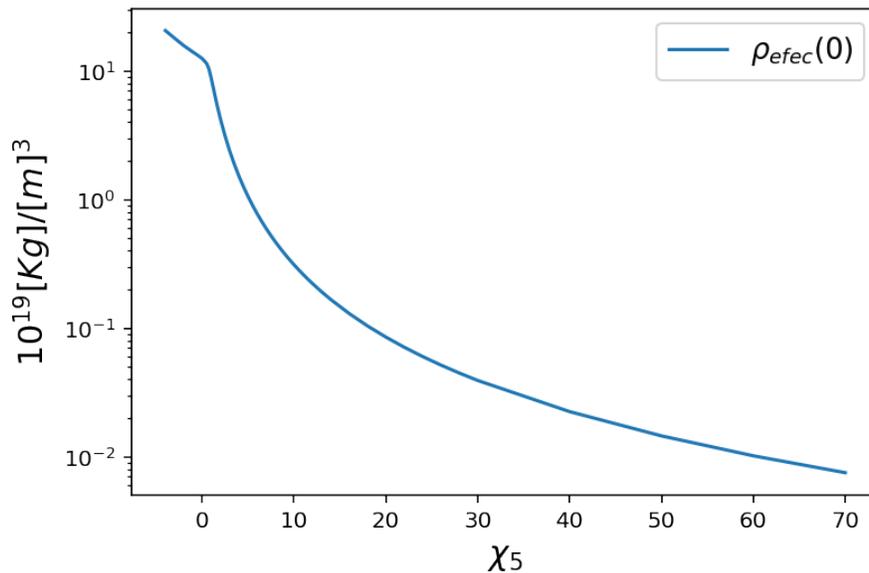


Figura 11. La gráfica muestra la densidad central efectiva en función del parámetro χ_5 . Los datos con los cuales se realizó esta gráfica están en la tabla (2).

La gráfica (11) no se extendió más en el eje horizontal debido a que no se encontró la solución asintóticamente plana con dos ceros cuando el parámetro χ_5 toma los valores de -5 y 40 .

4. Soluciones con materia bariónica

Puesto que el capítulo anterior permitió estudiar el comportamiento de los grados de libertad vectoriales gracias a que se reprodujeron y se generalizaron los resultados de la Ref.(Bartnik and Mckinnon, 1988), en este capítulo se procedió entonces a hallar las soluciones que modelan estrellas de neutrones al incluir la materia bariónica. A la fecha ya se ha estudiado el impacto que tiene la teoría generalizada de Proca en modelos de estrellas de neutrones (Kase et al., 2018), pero no en la GSU2P. Se sabe por lo tanto, que el grado de libertad vectorial modifica las relaciones masa radio y masa densidad central de materia, por lo que se espera lo mismo en este caso.

Por otro lado, en la literatura se encontró una propiedad interesante asociada a los grados de libertad extra gravitacionales. Cuando el grado de libertad extra gravitacional es un campo escalar, dicha propiedad es denominada como escalarización espontánea. Para el caso vectorial, se llama vectorización espontánea (Kase et al., 2020). Dicha propiedad consiste en la existencia de grados de libertad extra gravitacionales únicamente en el interior de configuraciones con materia bariónica. Esta propiedad se presenta cuando existen acoples no mínimos entre los grados de libertad extra gravitacionales y el tensor métrico. Mediante una transformación conforme se puede reescribir el Lagrangiano de la teoría acoplada de forma no mínima (marco de Jordan), como un Lagrangiano que presenta acoplamiento mínimo (marco de Einstein) (Dabrowski et al., 2009).

En el contexto de la teoría generalizada de Proca se encontró dicha propiedad al intentar modelar estrellas de neutrones cuando existen acoples entre la materia y el campo vectorial en el Lagrangiano. Contrario al caso de la teoría generalizada de Proca, los grados de libertad de la

GSU2P tiene un simetría interna no abeliana por lo que se esperan en este caso modificaciones adicionales para las relaciones masa-radio y masa -densidad central de materia.

Con el uso del paquete xAct de Mathematica (Martín-García, 2020) se pudo obtener la Ec.(41) y la Ec.(44) a partir del lagrangiano de la teoría generalizada de Proca SU(2), Ec.(10), asumiendo el principio de acción estacionaria con extremos fijos. Con ellas se halló además la Ec.(36). Posteriormente se usó la métrica esféricamente simétrica, Ec.(45), el tensor de la materia bariónica⁴, Ec.(7), y el monopolo de 't Hooft-Polyakov, Ec.(54), para encontrar dos de las componentes de las ecuaciones de Euler-Lagrange de los grados de libertad tensoriales Ec.(113) y Ec.(114), una de las componentes de las ecuaciones de Euler-Lagrange de los grados de libertad vectoriales Ec.(115) y la única componente no nula de la ecuación de la conservación local del tensor energía momento de materia, Ec.(47).

Es importante mencionar que en la Ec.(41) y la Ec.(44) el parámetro χ_4 de la Ec.(10) no contribuye de forma alguna por lo que este parámetro no pudo ser estudiado en este trabajo. Debido a que μ presenta un límite de 4.454×10^{-2} (Greene et al., 1993), en las soluciones tipo partícula, se decidió no estudiar dicho parámetro libre de la teoría.

4.1. Solución en series

Con el fin de obtener las soluciones en serie de las cantidades $m(r)$, $\Upsilon(r)$, $V(r)$ y $\tilde{\rho}_{mat}(r)$, se usaron las Ec.(113), Ec.(114), Ec.(115) y Ec.(47).

⁴ Se hizo nula la contribución de la constante cosmológica.

4.1.1. Solución en el origen. Para dar solución en series alrededor del origen para las funciones $m(r)$, $\Upsilon(r)$, $\tilde{\rho}_{mat}(r)$ y $V(r)$ se debe garantizar en primera instancia que la densidad de energía en el centro sea finita, lo cual implica que

$$m(r) = \mathcal{O}(r^3). \quad (83)$$

La serie de la función $\Upsilon(r)$ no posee término independiente ya que este se puede remover mediante un cambio de coordenadas, por lo que

$$\Upsilon(r) = \mathcal{O}(r^1). \quad (84)$$

Se relacionó $\rho_{mat}(r)$ y $P_{mat}(r)$ con una ecuación de estado polítropa de la forma Ec.(28) y con $n = 1$. Así, alrededor del origen $m(r)$, $\Upsilon(r)$, $V(r)$ y $\tilde{\rho}_{mat}(r)$ están dadas por,

$$m(r) = a_3r^3 + a_4r^4 + a_5r^5 + a_6r^6 + \mathcal{O}(r^7), \quad (85)$$

$$V(r) = b_0 + b_1r + b_2r^2 + b_3r^3 + b_4r^4 + b_5r^5 + \mathcal{O}(r^6), \quad (86)$$

$$\Upsilon(r) = c_1r + c_2r^2 + c_3r^3 + c_4r^4 + c_5r^5 + \mathcal{O}(r^6), \quad (87)$$

$$\tilde{\rho}_{mat}(r) = 1 + d_1 r + d_2 r^2 + d_3 r^3 + d_4 r^4 + \mathcal{O}(r^6). \quad (88)$$

Ya que la densidad de energía de la materia debe alcanzar un máximo en el centro y debe decrecer monótonamente se debe hacer $d_1 = 0$. El invariante de Kretschmann tiene un valor de

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{8c_1^2}{r^2} + \frac{32c_1c_2}{r} + \mathcal{O}(r^0), \quad (89)$$

lo que puede dar lugar a divergencias en el origen si no se remueven las contribuciones de las potencias inversas, para ello se hace $c_1 = 0$. Para encontrar la densidad efectiva de energía se usa,

$$\rho_{efec} \equiv T_{\mu\nu}^{efec} u^\mu u^\nu, \quad (90)$$

en donde u^μ es la cuadri-velocidad de un observador co-móvil con el fluido. Alrededor del origen, ρ_{efec} está dada por,

$$\rho_{efec} = -\frac{2((680\alpha_1 - 3\alpha_3 - 20\chi_6)(1 + b_0)^4)}{5e^4 r^6} + \mathcal{O}(r^5), \quad (91)$$

lo que hace necesario que $b_0 = -1$, esto elimina algunas contribuciones de potencias inversas y deja como resultado

$$\begin{aligned} \rho_{efec} = & \frac{2b_1^2(-9e^2 + (-8\alpha_1 + 2\alpha_3 + 3\chi_5 + 9\chi_6)b_1^2)}{3e^4r^2} \\ & + \frac{4(-60e^2b_1b_2 + b_1^3(15e^2 + (-950\alpha_1 + 68\alpha_3 + 45\chi_5 + 75\chi_6)b_2))}{15e^4r} + \mathcal{O}(r^0), \end{aligned} \quad (92)$$

por lo que es necesario hacer $b_1 = 0$. Finalmente, al dejar b_2 como parámetro libre se obtiene

$$a_3 = \frac{\beta}{3} + \frac{2b_2^2}{e^2}, \quad (93)$$

$$\begin{aligned} a_5 = & -\frac{\beta^2}{15} - \frac{\beta^2}{60\sigma} - \frac{\beta^2\sigma}{20} + \frac{\beta b_2^2}{15e^2} + \frac{3\mu^2 b_2^2}{5e^2} - \frac{\beta b_2^2}{5e^2\sigma} - \frac{4\beta\sigma b_2^2}{5e^2} \\ & - \frac{8b_2^3}{5e^2} + \frac{4\alpha_1 b_2^4}{3e^4} + \frac{154\alpha_3 b_2^4}{15e^4} - \frac{4\chi_6 b_2^4}{e^4}, \end{aligned} \quad (94)$$

$$b_4 = \frac{\beta b_2}{5} + \frac{\mu^2 b_2}{10} - \frac{\beta\sigma b_2}{5} - \frac{3b_2^2}{10} + \frac{4b_2^3}{5e^2} + \frac{\alpha_1 b_2^3}{e^2} + \frac{7\alpha_3 b_2^3}{10e^2} + \frac{\chi_5 b_2^3}{5e^2} - \frac{\chi_6 b_2^3}{e^2}, \quad (95)$$

$$c_2 = \frac{\beta}{6} + \frac{\beta\sigma}{2} + \frac{2b_2^2}{e^2}, \quad (96)$$

$$c_4 = -\frac{\beta^2}{360} - \frac{\beta^2}{240\sigma} - \frac{\beta^2\sigma}{80} - \frac{\beta^2\sigma^2}{8} + \frac{9\beta b_2^2}{20e^2} + \frac{\mu^2 b_2^2}{5e^2} - \frac{\beta b_2^2}{20e^2\sigma} - \frac{3\beta\sigma b_2^2}{10e^2} - \frac{4b_2^3}{5e^2} + \frac{12b_2^4}{5e^4} + \frac{6\alpha_1 b_2^4}{e^4} + \frac{9\alpha_3 b_2^4}{10e^4} - \frac{2\chi_5 b_2^4}{5e^4} - \frac{2\chi_6 b_2^4}{e^4}, \quad (97)$$

$$d_2 = -\frac{\beta}{3} - \frac{\beta}{12\sigma} - \frac{\beta\sigma}{4} - \frac{b_2^2}{e^2} - \frac{b_2^2}{e^2\sigma}, \quad (98)$$

$$d_4 = \frac{23\beta^2}{720} + \frac{\beta^2}{480\sigma^2} + \frac{\beta^2}{144\sigma} + \frac{29\beta^2\sigma}{240} + \frac{3\beta^2\sigma^2}{32} + \frac{31\beta b_2^2}{120e^2} - \frac{\mu^2 b_2^2}{10e^2} + \frac{\beta b_2^2}{40e^2\sigma^2} - \frac{7\beta b_2^2}{60e^2\sigma} - \frac{\mu^2 b_2^2}{10e^2\sigma} + \frac{2\beta\sigma b_2^2}{5e^2} + \frac{2b_2^3}{5e^2} + \frac{2b_2^3}{5e^2\sigma} - \frac{7b_2^4}{10e^4} - \frac{3\alpha_1 b_2^4}{e^4} - \frac{9\alpha_3 b_2^4}{20e^4} + \frac{\chi_5 b_2^4}{5e^4} + \frac{\chi_6 b_2^4}{e^4} - \frac{7b_2^4}{10e^4\sigma} - \frac{3\alpha_1 b_2^4}{e^4\sigma} - \frac{9\alpha_3 b_2^4}{20e^4\sigma} + \frac{\chi_5 b_2^4}{5e^4\sigma} + \frac{\chi_6 b_2^4}{e^4\sigma}, \quad (99)$$

$a_4 = a_5 = 0$, $b_3 = b_5 = 0$, $c_3 = c_5 = 0$ y $d_3 = d_5 = 0$. Gracias a la ecuación de estado se puede expresar la presión de materia como

$$\tilde{P}_{mat}(r) = 1 + 2d_2 r^2 + (d_2^2 + 2d_4) r^4 + \mathcal{O}(r^6). \quad (100)$$

En todas las expansiones los términos de Einstein Yang-Mills dominan y las modificaciones debidas a los parámetros libres de la teoría no aparecen en el orden dominante de las expansiones. Esto también sucedió en el caso de las soluciones tipo partícula pero, a pesar de ello, en las soluciones numéricas se encontró que dichos parámetros modifican la dinámica respecto del caso

EYM.

Vale aclarar que las expansiones en serie en el infinito espacial del capítulo anterior aplican también en este caso.

4.2. Soluciones numéricas

Para encontrar las soluciones numéricas de las Ec.(113), Ec.(114), Ec.(115) y la Ec.(47), se usó el comando Solve de Mathematica para desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales para las variables $m'(r)$, $\Upsilon''(r)$, $V''(r)$ y $\tilde{P}'_{mat}(r)$. Se realizó el cambio de variable de la variable r de acuerdo a $r = e^t$ ya que se necesitaba una mayor resolución de la variable radial cerca al origen, pero menor lejos de él.

El sistema desacoplado para las variables $m'(r)$, $\Upsilon''(r)$, $V''(r)$ y $\tilde{P}'_{mat}(r)$, se exportó a Python para integrarlo con el uso los paquetes NumPy y SciPy. Se usaron las expansiones en series Ec.(85), Ec.(86), Ec.(87) y Ec.(100) como condiciones iniciales para integrar el sistema. Se usó la definición (40) para el radio físico de las estrellas. Las soluciones se empezaron a construir en $r = 0.0001$ con $k = 0.0045m^5 / (\text{kg } s^2)$ y $n = 1$.

4.2.1. Einstein y politropa con $n = 1$. Para comprobar el correcto funcionamiento del código se hizo $\alpha_i = \chi_i = \mu = b_2 = 0$, para tener a la relatividad general como la teoría de la gravedad. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [\text{Kg}] / [m]^3$.

El resultado de la integración muestra en la Fig.(12) el perfil de la masa y de la presión normalizada de la materia. La masa gravitacional de la Fig.(12) es de $1.0627M_{\odot}$ y tiene un radio físico de $8.4644[\text{Km}]$. Este caso coincide con lo encontrado al integrar la Ec.(37) y la Ec.(38), que se presenta en la Fig. 1 y la Fig. 2.

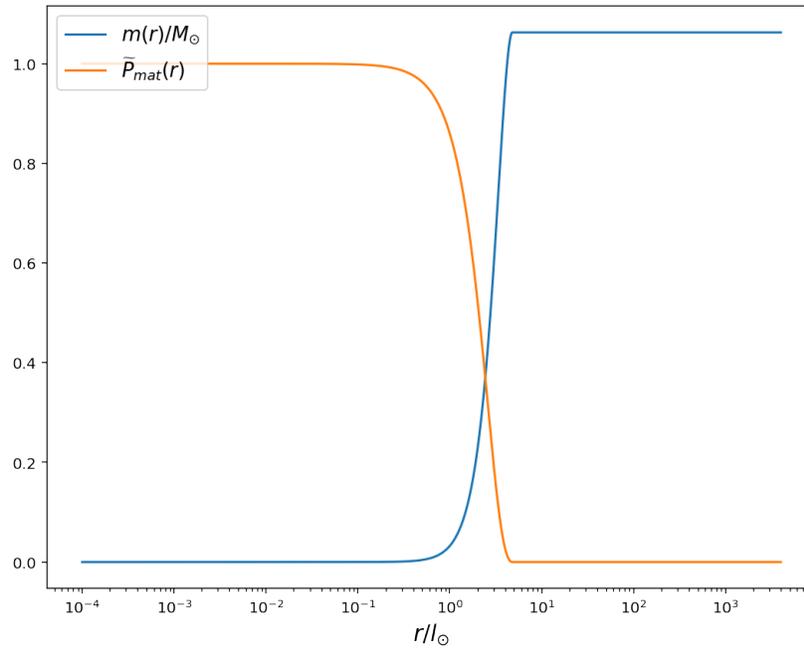


Figura 12. En naranja se puede ver la presión normalizada de la materia y en azul la masa normalizada de la estrella. Este caso corresponde a Einstein con polítropa por lo que no hay curva para los grados de libertad vectoriales. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

4.2.2. EYM y polítropa con $n = 1$. En este punto se procedió entonces a hacer $b_2 \neq 0$ para tener el caso Einstein Yang-Mills con polítropa o GSU2P con $\alpha_i = \chi_i = \mu = 0$ y polítropa, el cual corresponde a la mínima modificación posible a la teoría de la gravedad de Einstein. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$. El parámetro b_2 encontrado para la configuración de la Fig.(13) tiene un valor de 0.64632818.

La masa de la Fig.(13) es de $0.9714 M_\odot$ y tiene un radio físico para la materia de $1.1566 [Km]$. Como se puede ver respecto al caso en que se tiene gravedad de Einstein, el radio disminuyó cerca de $7 [Km]$.

De la Fig.(14) se puede ver que la densidad de energía en el centro de la estrella es-

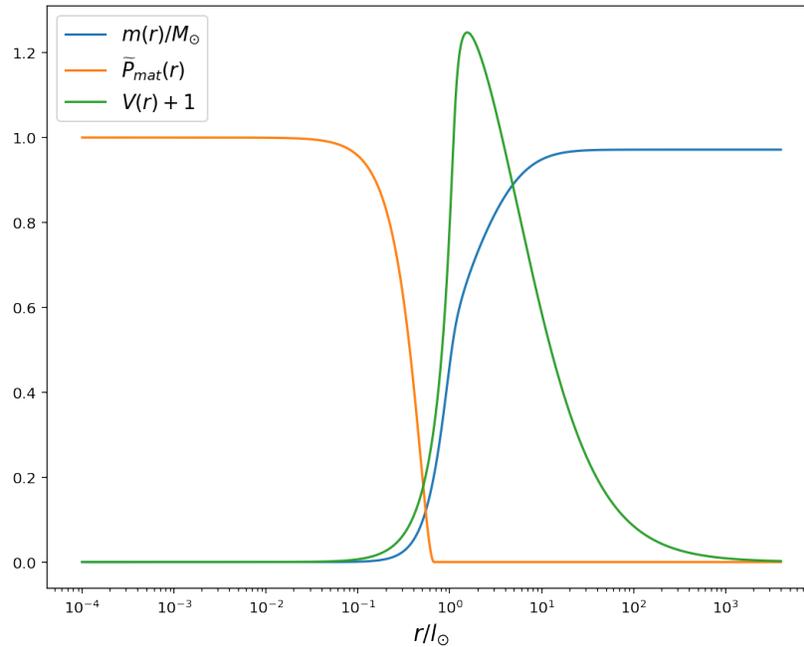


Figura 13. En la gráfica se observa en verde el perfil del campo vectorial, en naranja la presión normalizada de la materia y en azul la masa gravitacional normalizada de la estrella. En este caso se tiene EYM con polítropa. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

tá dominada por la contribución de Yang-Mills (densidad efectiva), ya que tiene un valor de $1.2 \times 10^{20} [Kg]/[m]^3$.

El radio físico de la materia bariónica de la configuración de la Fig.(13) es mucho menor a el del caso de la Fig.(12). Además la densidad de energía efectiva central de la Fig.(13) está, casi dos órdenes de magnitud, por encima de la densidad de energía central de la materia bariónica. En el caso de la Fig.(12) únicamente la materia bariónica contribuye a la densidad de energía central. Vale aclarar que los radios típicos de las estrellas de neutrones están alrededor de los $11 [Km]$ (Abbott et al., 2018), por lo que la configuración de la Fig.(13) correspondería a un objeto muy hipotético.

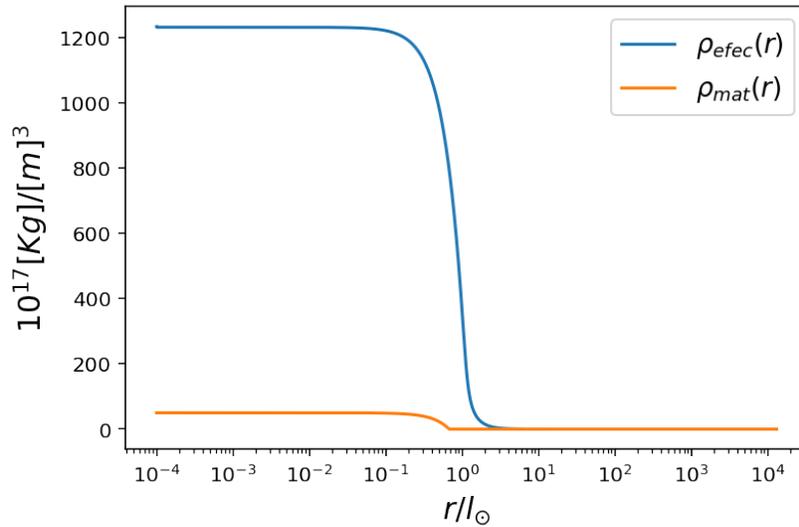


Figura 14. En la gráfica se observa en azul la densidad de energía efectiva y en naranja la densidad de energía de la materia. En este caso se tiene EYM con polítropa. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 \text{m}^5 / (\text{kg s}^2)$.

Se decidió variar uno a uno los parámetros libres de la teoría con el objetivo de encontrar configuraciones de equilibrio que presenten una densidad de energía central de la materia al menos un orden de magnitud por encima de la densidad central efectiva y que además presenten radios físicos para la materia de valor cercano al caso de Einstein-Polítropa. En todos los casos se buscó la solución asintóticamente plana para el perfil del campo vectorial.

4.2.3. GSU2P con χ_1 y polítropa con $n = 1$. Para poder variar la densidad central efectiva se trabajó haciendo en primera instancia $\alpha_i = \chi_i = \mu = 0$ excepto por χ_1 . Se varió χ_1 con el objetivo de disminuir el valor del parámetro b_2 , y con ello $\rho_{efec}(0)$, con respecto al caso EYM. La densidad central de la materia bariónica se dejó constante y con un valor de $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$.

Como se puede observar en la Fig.(15) el parámetro χ_1 varía entre los valores -0.05 y

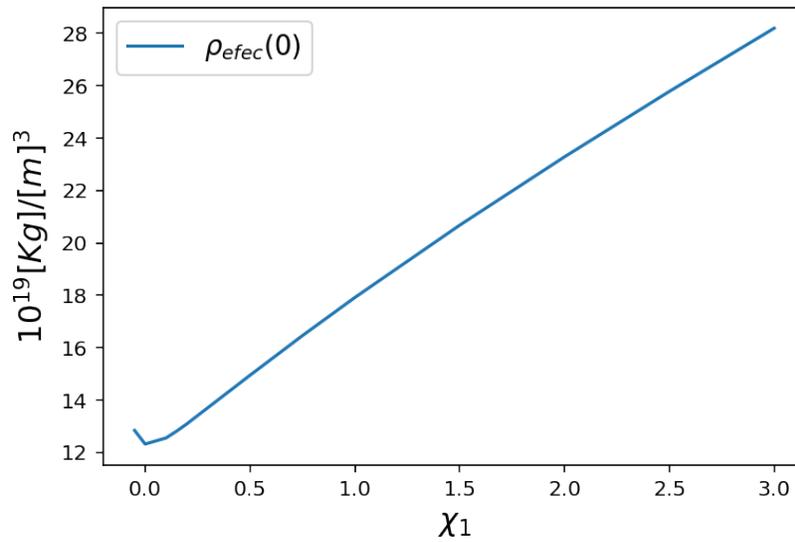


Figura 15. En esta imagen se puede ver el comportamiento de la densidad de energía efectiva central en función del parámetro libre χ_1 . Los datos con los cuales se realizó esta gráfica están en la tabla (4). Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 \text{m}^5 / (\text{kg s}^2)$.

3. La gráfica es discontinua para valores menores a -0.05 ya que cuando se hizo $\chi_1 = -0.1$ no se encontró la solución asintóticamente plana. De igual manera no se exploraron valores en el intervalo -0.1 a -0.05 ya que a partir de la gráfica se puede inferir un comportamiento creciente de la densidad efectiva de energía en dicho intervalo. De otra parte, no se exploraron valores mayores a 3 ya que la gráfica (15) permite inferir un comportamiento creciente de $\rho_{efec}(0)$ para dichos valores. El valor mínimo que $\rho_{efec}(0)$ toma en el intervalo mostrado en la gráfica es de $1.2 \times 10^{20} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$, por lo que se ve descartado el parámetro χ_1 para encontrar configuraciones que modelen estrellas de neutrones.

4.2.4. GSU2P con χ_2 y polítopa con $n = 1$. En este caso se varió la densidad central efectiva en función del parámetro χ_2 . Se hizo $\alpha_i = \chi_i = \mu = 0$ excepto por χ_2 y se varió con el objetivo de disminuir el valor del parámetro b_2 , y con ello $\rho_{efec}(0)$, con respecto al caso

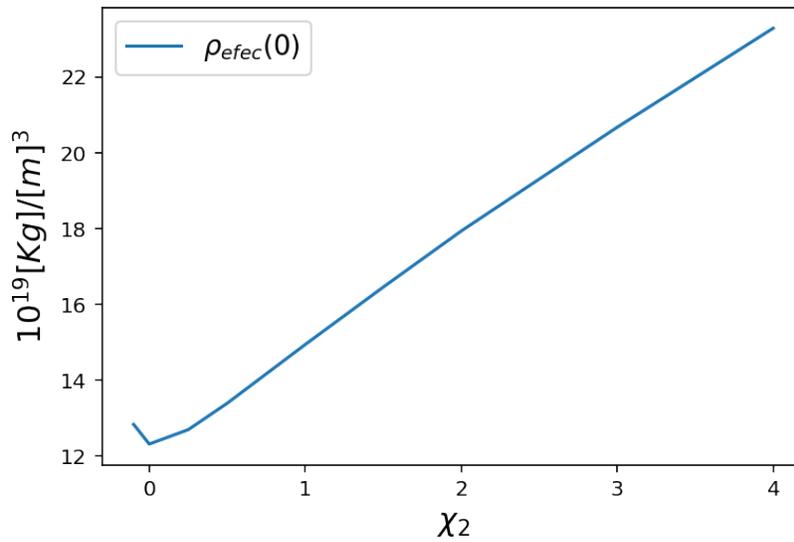


Figura 16. La imagen permite ver el comportamiento de la densidad de energía efectiva central en función del parámetro libre χ_2 . Los datos con los cuales se realizó esta gráfica se encuentran en la tabla (5). Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 \text{m}^5 / (\text{kg s}^2)$.

EYM. La densidad central de la materia bariónica se dejó constante y con un valor de $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$.

La Fig.(16) se pudo variar continuamente en el intervalo -0.1 a 4 para χ_2 . Para el valor de -0.2 en χ_2 no se encontró la solución asintóticamente plana. Nótese que la función $\rho_{efec}(0)$ permite inferir un comportamiento creciente para valores de χ_2 mayores a 4 , razón por la cual no se exploraron dichos valores. El valor mínimo que toma $\rho_{efec}(0)$ aquí es de $1.2 \times 10^{20} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$, por lo que se ve descartado el parámetro χ_2 para encontrar configuraciones que modelen estrellas de neutrones.

4.2.5. GSU2P con χ_5 y polítropa con $n = 1$. En este caso se varió la densidad central efectiva en función del parámetro χ_5 . Se usó $\alpha_i = \chi_i = \mu = 0$ excepto por χ_5 con el objetivo de disminuir el valor del parámetro b_2 , y con ello disminuir $\rho_{efec}(0)$, con respecto al caso EYM.

La densidad central de la materia bariónica se dejó constante y con un valor de $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$.

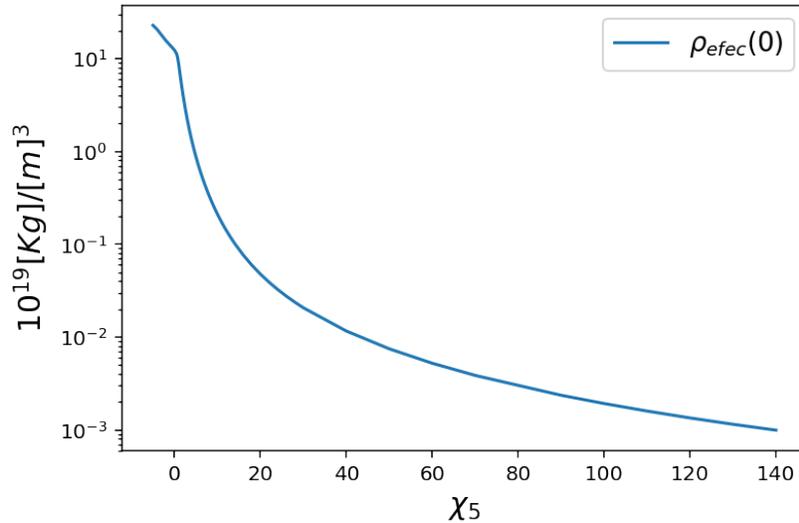


Figura 17. En esta imagen se puede ver el comportamiento de la densidad de energía efectiva central en función del parámetro libre χ_5 . Los datos con los cuales se realizó esta gráfica están en la tabla (6). Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

Como se puede observar en la Fig.(17), el parámetro χ_5 varió de -5 a 140 . No se exploraron valores menores a -5 debido al comportamiento creciente de $\rho_{efec}(0)$ inferido para dichos valores. Los valores mayores a 140 en χ_5 no fueron explorados en este trabajo ya que para $\chi_5 = 140$, $\rho_{efec}(0)$ toma un valor de $9.9259 \times 10^{15} [Kg]/[m]^3$.

Cuando χ_5 es igual a 20 , la densidad central efectiva toma un valor de $4.7576 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$, la cual es similar a $\rho_{mat}(0)$. Por ello se procedió a dejar constante χ_5 en 20 para realizar las gráficas de masa radio y masa densidad central de materia.

La masa de la Fig.(18) es de $1.1423 M_{\odot}$ y tiene un radio físico de $7.9341 [Km]$. El parámetro b_2 toma un valor de 0.04017565 , y $\rho_{efec}(0) = 4.7576 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$. Nótese que no hay indicios

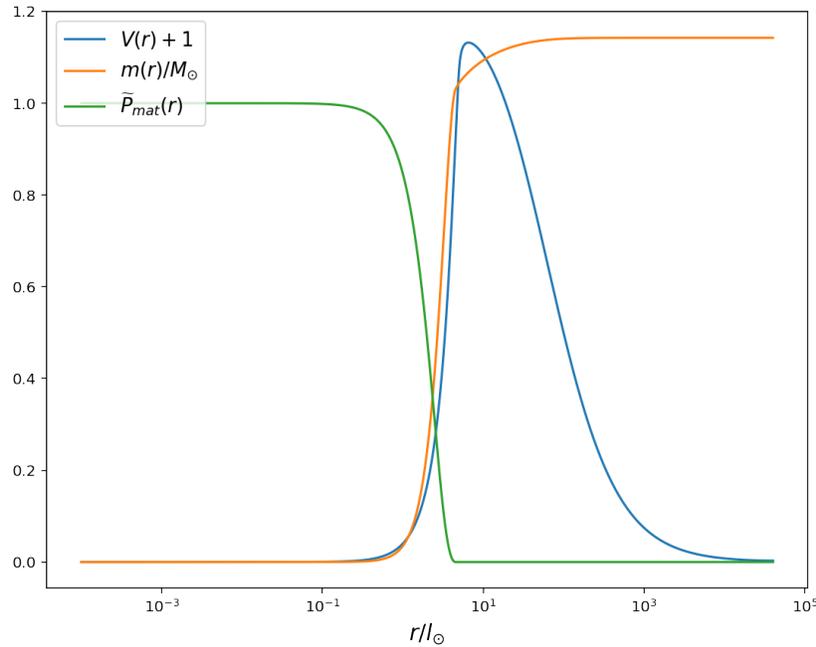


Figura 18. En la gráfica se observa en azul el perfil del campo vectorial, en verde la presión normalizada de la materia y en naranja la masa normalizada de la estrella, teniendo GSU2P con $\chi_5 = 20$. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

de vectorización espontánea ya que los grados de libertad vectoriales existen tanto dentro de la configuración, como fuera de ella.

La gráfica (19) permite observar cómo la densidad de materia central está un orden de magnitud por encima de la densidad efectiva central y además permite observar cómo ambas densidades se hacen nulas aproximadamente en el mismo radio.

La gráfica (20) muestra en naranja la relación masa radio para GSU2P con $\chi_5 = 20$. Esta gráfica se realizó para $\rho_{mat}(0)$ entre $4.9126 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ y $83.5149 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$. En el intervalo entre $39.3011 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ y $4.9126 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$, para $\rho_{mat}(0)$, los radios de las configuraciones son menores con respecto al caso Einstein. Nótese que el intervalo de densidades presentado en la gráfica existe un radio máximo para las estrellas de neutrones aproximadamente

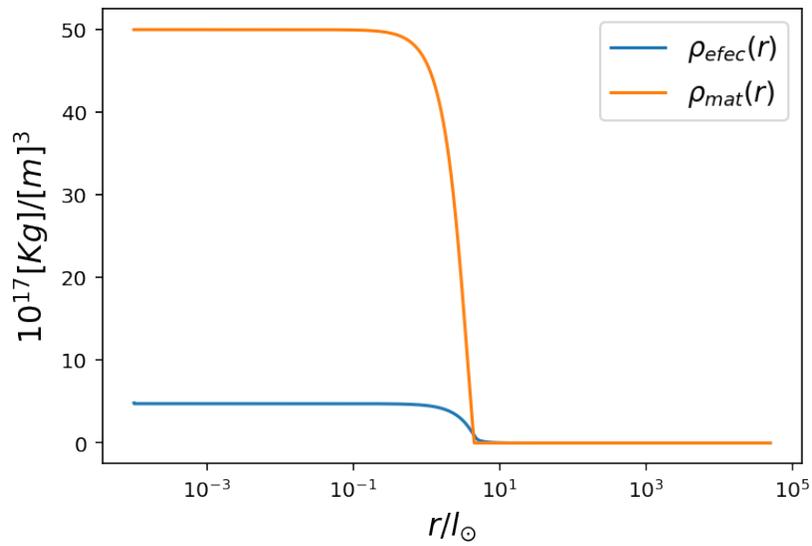


Figura 19. En la gráfica se observa en azul la densidad de energía efectiva y en la gráfica naranja se observa la densidad de energía de la materia teniendo GSU2P con $\chi_5 = 20$. Se integró con $\rho_{\text{mat}}(0) = 5 \times 10^{18} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 \text{m}^5 / (\text{kg s}^2)$.

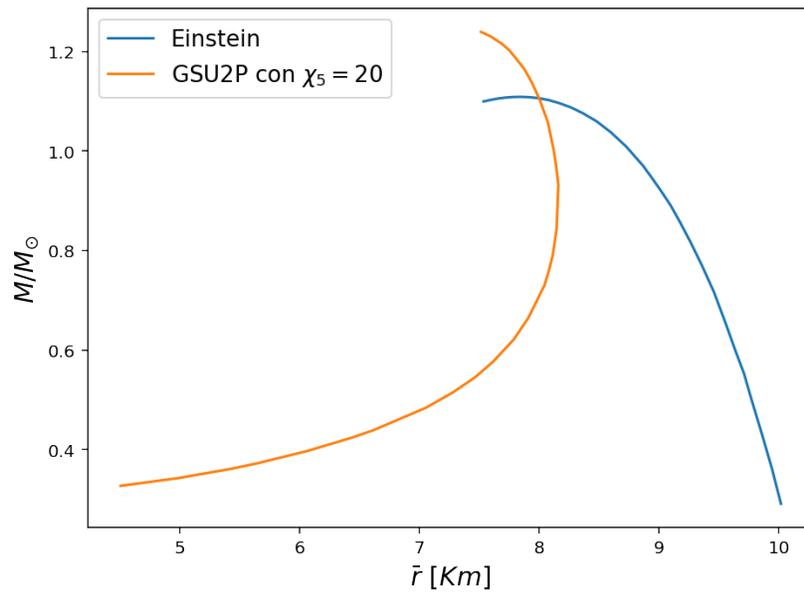


Figura 20. La gráfica en azul muestra la relación masa radio para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa radio teniendo GSU2P con $\chi_5 = 20$. Los datos de esta gráfica están la tabla (13). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045 \text{m}^5 / (\text{kg s}^2)$.

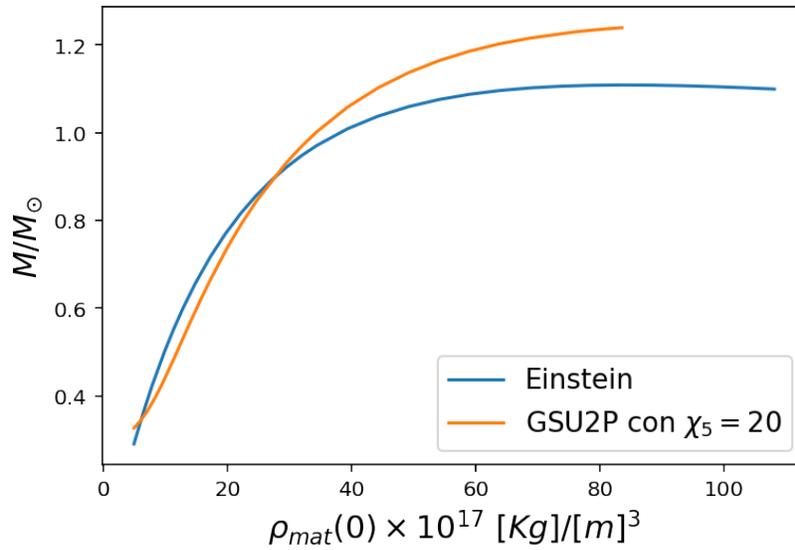


Figura 21. La gráfica en azul muestra la relación masa densidad central de materia para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa densidad central de materia teniendo GSU2P con $\chi_5 = 20$. Los datos de esta gráfica están en la tabla (13). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

de $8.16 [Km]$ para $\rho_{mat}(0)$ cercano a $24 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$.

La Fig.(21) muestra la relación masa densidad central de materia; nótese que entre $7.3689 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ y $24.5632 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$, para $\rho_{mat}(0)$ (en este intervalo $\rho_{efec}(0)$ varía desde $7.9702 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ hasta $6.0779 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$), las masas gravitacionales de las configuraciones son menores con respecto al caso de relatividad general; pero para los demás valores de $\rho_{mat}(0)$, las masas gravitacionales son mayores con respecto al caso de relatividad general.

Cuando χ_5 es igual a 60, la densidad central efectiva está un orden de magnitud por debajo de la densidad central de la materia, por ello se procedió a realizar las gráficas de masa radio y masa densidad central dejando el parámetro χ_5 constante.

La masa de la Fig.(22) es de $1.1801 M_{\odot}$ y tiene un radio físico de $8.3367 [Km]$ y $b_2 =$

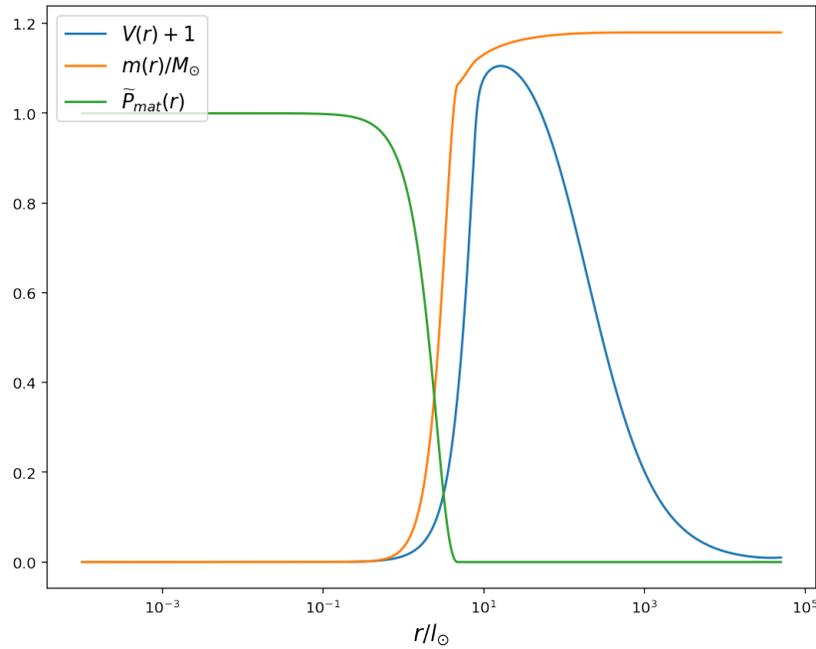


Figura 22. En la gráfica se observa en azul el perfil del campo vectorial, en verde la presión normalizada de la materia y en naranja la masa normalizada de la estrella, teniendo GSU2P con $\chi_5 = 60$. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

0.01329589. Como se puede ver en la gráfica (23), la densidad de energía de la materia domina en el centro de la estrella, pero se hace nula antes que la densidad de energía efectiva. Nótese que no hay indicios de vectorización espontánea ya que los grados de libertad vectoriales existen tanto dentro de la configuración como fuera de ella.

La gráfica (24) muestra en naranja la relación masa radio para el caso cuando se tiene GSU2P con $\chi_5 = 60$. Esta gráfica se realizó para $\rho_{mat}(0)$ entre $4.9126 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ y $108.0781 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$.

En el intervalo de $\rho_{mat}(0)$ entre $4.9126 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ y $24.5632 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$, los radios de las configuraciones son menores con respecto al caso Einstein. En la gráfica naranja se

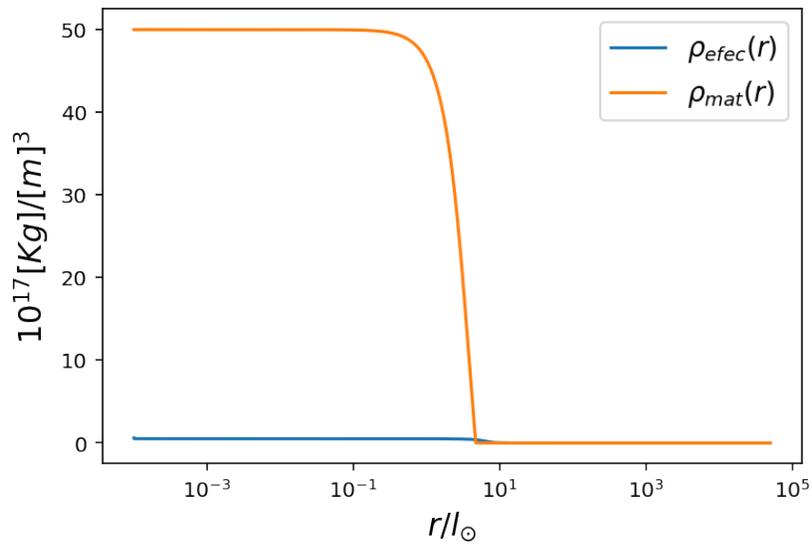


Figura 23. En la gráfica se observa en azul la densidad de energía efectiva y en la gráfica naranja se observa la densidad de energía de la materia, teniendo GSU2P con $\chi_5 = 60$. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

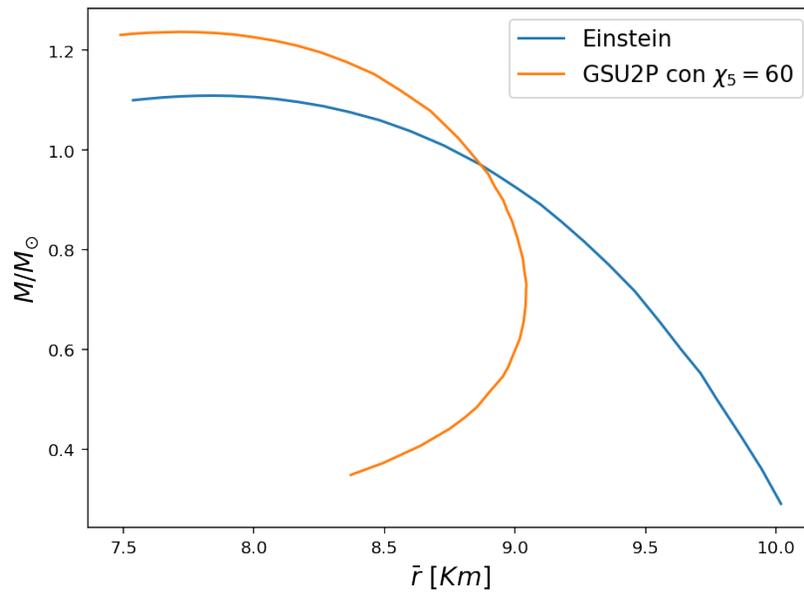


Figura 24. La gráfica en azul muestra la relación masa radio para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa radio cuando se tiene GSU2P con $\chi_5 = 60$. Los datos de esta gráfica están la tabla (15). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

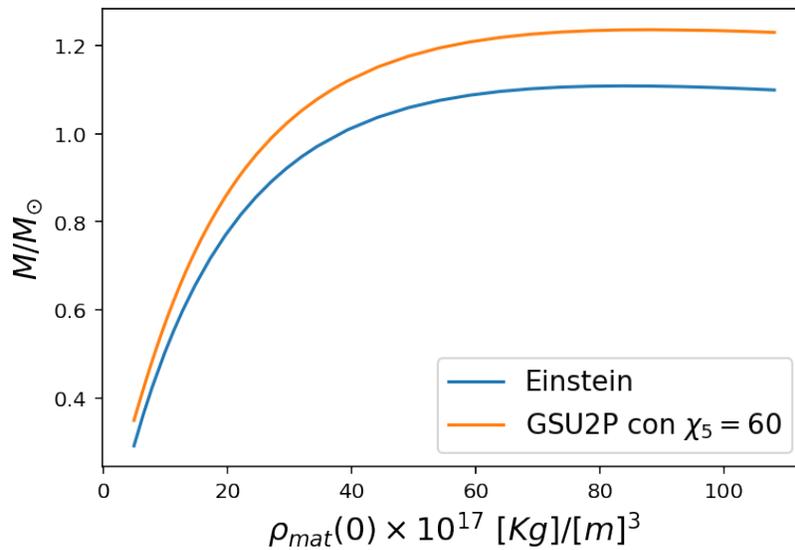


Figura 25. La gráfica en azul muestra la relación masa densidad central de materia para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa densidad central de materia cuando se tiene GSU2P con $\chi_5 = 60$. Los datos de esta gráfica están en la tabla (15). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

puede apreciar que existe un radio máximo para las estrellas de neutrones aproximadamente igual a $9.04 [Km]$ para $\rho_{mat}(0)$ cercano a $14.73 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$.

La Fig.(25) muestra la relación masa densidad central de materia para el caso cuando se tiene GSU2P con $\chi_5 = 60$; nótese que en todos los casos las masas gravitacionales de las configuraciones son mayores con respecto al caso Einstein.

Cuando χ_5 es igual a 100, la densidad central efectiva está un orden de magnitud por debajo de la densidad central de la materia, por ello se procedió a realizar las gráficas de masa radio y masa densidad central dejando el parámetro χ_5 constante.

La masa de la Fig.(26) es de $1.1681 M_{\odot}$ y tiene un radio físico de $8.4039 [Km]$ y $b_2 = 0.00806727$. Nótese que no hay indicios de vectorización espontánea ya que los grados de libertad

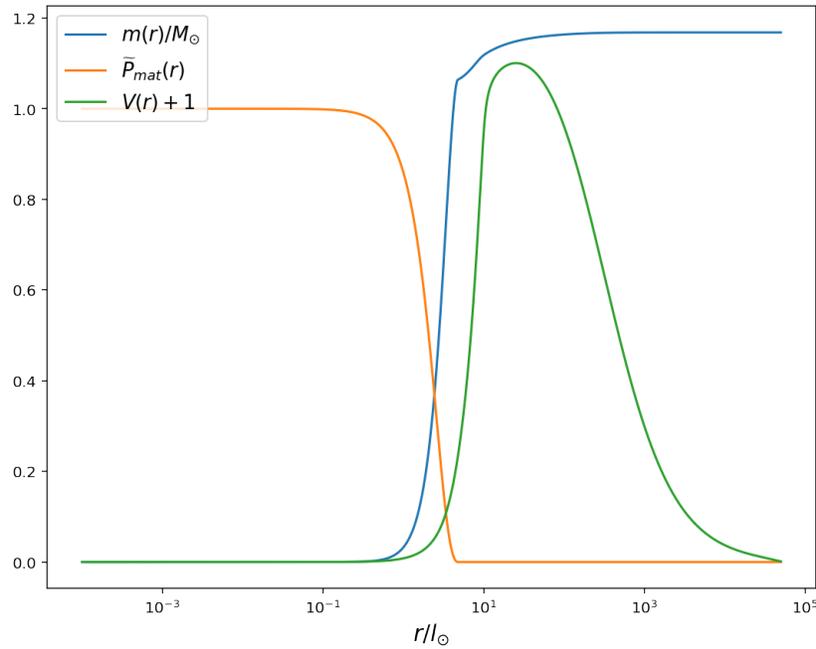


Figura 26. En la gráfica se observa en verde el perfil del campo vectorial, en naranja la presión normalizada de la materia y en azul la masa normalizada de la estrella, teniendo GSU2P con $\chi_5 = 100$. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

vectoriales existen tanto dentro de la configuración como fuera de ella. En la Fig.(27) se puede ver que el corrimiento al rojo gravitacional de los casos Einstein y GSU2P con $\chi_5 = 100$ es prácticamente igual, pero con respecto al caso EYM difieren en cerca de dos órdenes de magnitud.

En la Fig.(28) se graficó ω_{efec} para los casos EYM y GSU2P con $\chi_5 = 100$. Nótese que los grados de libertad vectoriales en el caso EYM se comportan como radiación, pero en el caso GSU2P con $\chi_5 = 100$, dichos grados de libertad intentan imitar el comportamiento de la constante cosmológica en la región de campo fuerte.

La gráfica (29) muestra en naranja la relación masa radio para GSU2P con $\chi_5 = 100$. Esta gráfica se realizó para $\rho_{mat}(0)$ entre $9.8252 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ y $10.8078 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, ya que

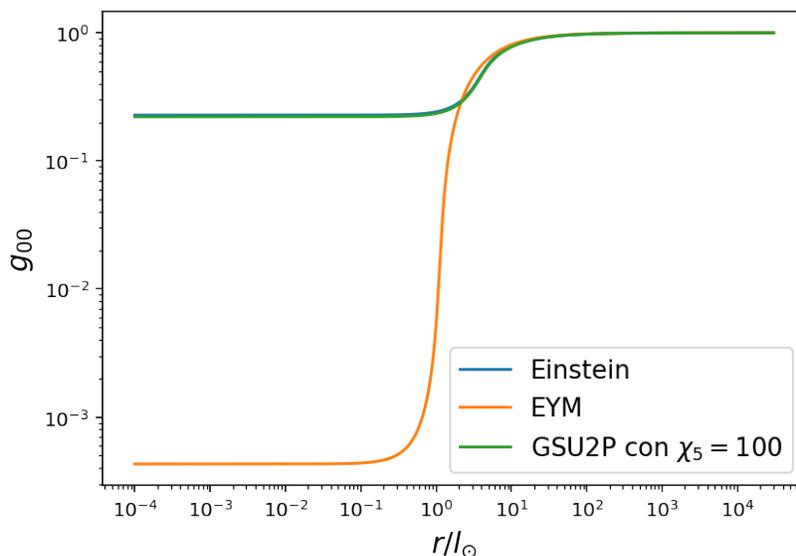


Figura 27. En azul se observa la gráfica de la componente g_{00} de la métrica para el caso Einstein, en verde para GSU2P con $\chi_5 = 100$ y en naranja para EYM. Nótese que las gráficas verde y azul son prácticamente iguales, por lo que el corrimiento al rojo gravitacional es prácticamente indistinguible. El caso EYM corresponde a una estrella muy hipotética imitadora de agujeros negros. Las gráficas se realizaron con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

para el valor de $4.9126 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ no se encontró la solución asintóticamente plana. De igual manera, la Fig.(30) muestra la relación masa densidad central de materia. En el intervalo para $\rho_{mat}(0)$ entre $20.6331 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ y $108.0781 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$, las masas son mayores con respecto al caso canónico. En el intervalo para $\rho_{mat}(0)$ entre $9.8252 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ y $17.1942 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$, los radios de las configuraciones son menores con respecto al caso Einstein. Nótese que en todos los casos las masas gravitacionales de las configuraciones son mayores con respecto al caso Einstein. Nótese que además, no hay indicios de vectorización espontánea ya que los grados de libertad vectoriales existen tanto dentro de la configuración como fuera de ella.

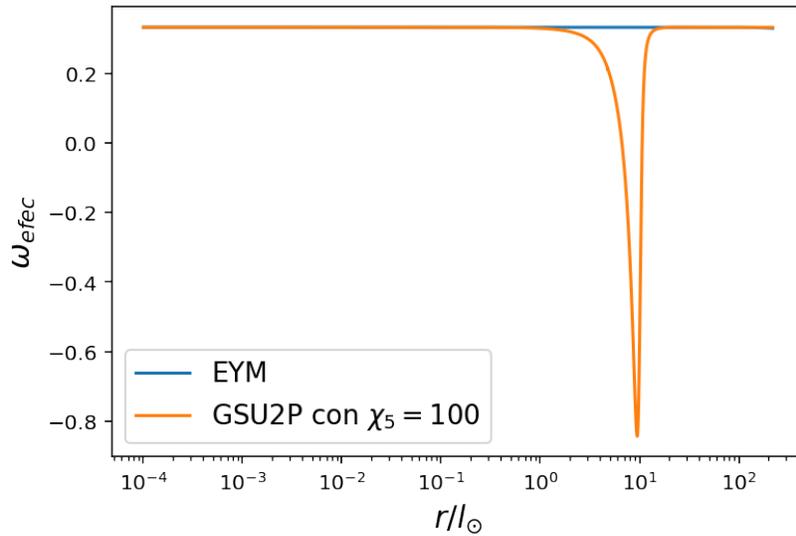


Figura 28. En azul se observa la gráfica de ω_{efec} para el caso EYM y en naranja para GSU2P con $\chi_5 = 100$. El parámetro de estado efectivo en el caso EYM toma un valor de $1/3$, justo como lo hace la radiación. Para el caso GSU2P con $\chi_5 = 100$, nótese que el parámetro de estado efectivo toma valores negativos, por lo que el fluido asociado al campo vectorial trata de imitar el comportamiento de la constante cosmológica. Las gráficas se realizaron con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

4.2.6. GSU2P con χ_6 y polítropa con $n = 1$. En este caso se hizo $\alpha_i = \chi_i = \mu = 0$, excepto por χ_6 , el cual se varió para ver el comportamiento del parámetro b_2 . La densidad central de la materia bariónica se dejó constante y con un valor de $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$.

La gráfica (31) muestra la densidad efectiva central en función del parámetro libre χ_6 . Como se puede ver en la gráfica, no se exploraron valores inferiores a -0.01 en χ_6 debido a que no se encontró la solución asintóticamente plana cuando χ_6 toma el valor de -0.02 . Además tampoco se exploraron valores mayores a 14.8 en χ_6 ya que no se encontró, de nuevo, la solución asintóticamente plana.

Cuando χ_6 es igual a 9 , la densidad central efectiva está un orden de magnitud por debajo

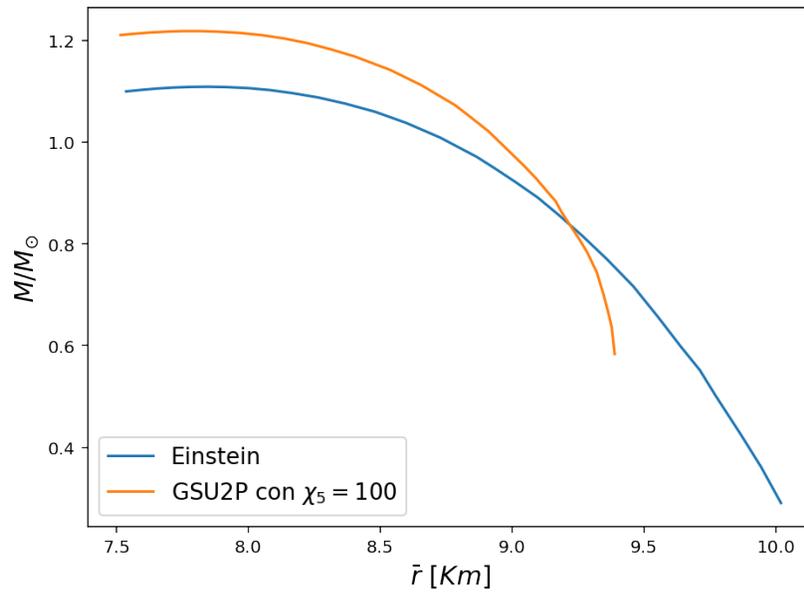


Figura 29. La gráfica en azul muestra la relación masa radio para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa radio cuando se tiene GSU2P con $\chi_5 = 100$. Los datos de esta gráfica están en la tabla (17). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$.

de la densidad central de la materia, por ello se procedió a realizar las gráficas de masa radio y masa densidad central de la materia dejando el parámetro χ_6 constante.

La masa de la Fig.(32) es de $1.0779M_{\odot}$ y tiene un radio físico de $7.9806[Km]$. Nótese que no hay indicios de vectorización espontánea en este caso ya que los grados de libertad vectoriales existen tanto dentro de la configuración como fuera de ella.

Nótese que en el intervalo $17.1942 \times 10^{17}[Kg]/[m]^3$ a $39.3011 \times 10^{17}[Kg]/[m]^3$ para $\rho_{mat}(0)$, $\rho_{efec}(0)$ toma valores entre $1.8172 \times 10^{18}[Kg]/[m]^3$ y $6.1723 \times 10^{17}[Kg]/[m]^3$ (Véase (19)). Para este intervalo se puede ver en la Fig.(34) que las masas de las configuraciones obtenidas con relatividad general son mayores con respecto al caso GSU2P con $\chi_6 = 9$. Para $\rho_{mat}(0)$ mayores a aproximadamente $50 \times 10^{17}[Kg]/[m]^3$, las masas gravitacionales de las configuraciones, línea

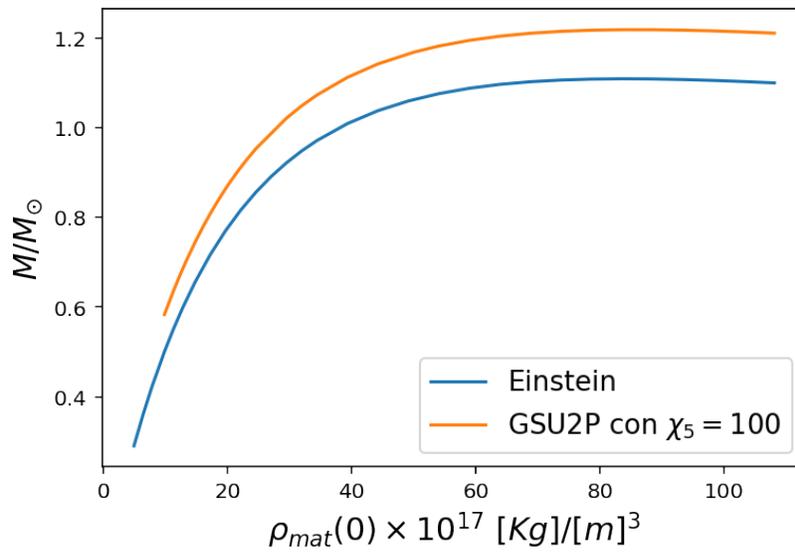


Figura 30. La gráfica en azul muestra la relación masa densidad central de materia para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa densidad central de materia cuando se tiene GSU2P con $\chi_5 = 100$. Los datos de esta gráfica están la tabla (17). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$.

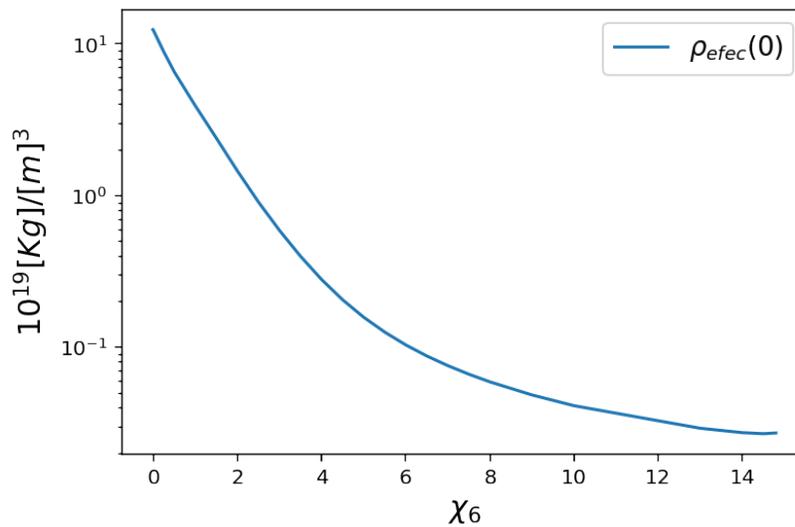


Figura 31. En la gráfica se observa la densidad efectiva en función del parámetro χ_6 para la solución asintóticamente plana. Los datos de esta gráfica están la tabla (8). Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$.

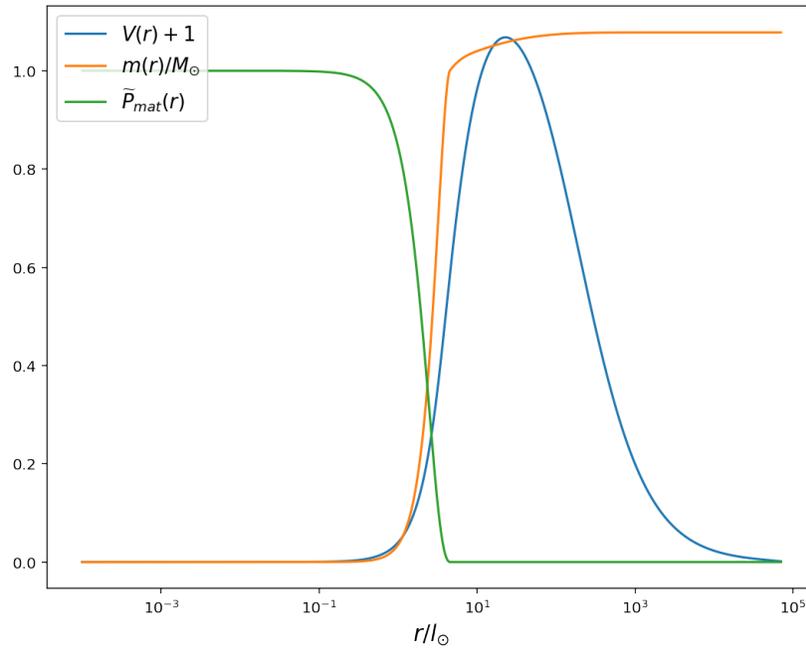


Figura 32. En la gráfica se observa en azul el perfil del campo vectorial, en verde la presión normalizada de la materia y en naranja la masa normalizada de la estrella, teniendo GSU2P con $\chi_6 = 9$. Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

naranja, son mayores con respecto al caso de Einstein.

Las masas de las configuraciones de la Fig.(33), para $\rho_{mat}(0)$ entre $58.9517 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ y $76.7420 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$, son mayores con respecto al caso de Einstein. Para $\rho_{mat}(0)$ entre $49.1264 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ y $17.1942 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ se puede observar que, si bien las masas siguen siendo del mismo orden, los radios del caso GSU2P con $\chi_6 = 9$ son mucho menores con respecto al caso canónico. En la gráfica naranja se puede apreciar que existe un radio máximo para las estrellas de neutrones aproximadamente igual a $8.04 [Km]$ cuando $\rho_{mat}(0)$ toma un valor cercano a $39.30 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$.

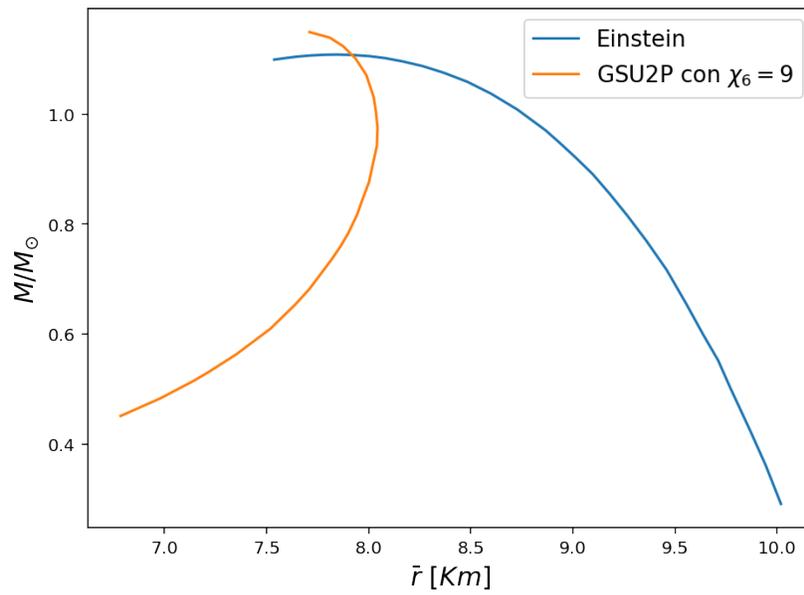


Figura 33. La gráfica en azul muestra la relación masa radio para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa radio cuando se tiene GSU2P con $\chi_6 = 9$. Los datos de esta gráfica están la tabla (19). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$.

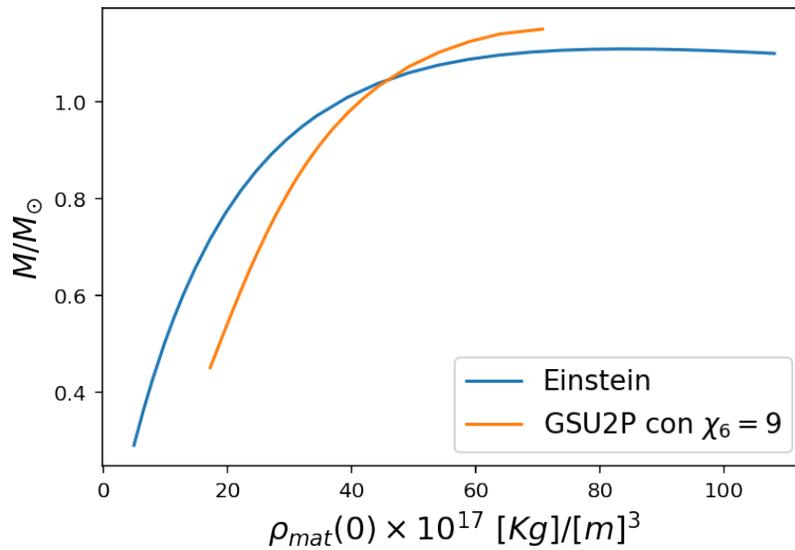


Figura 34. La gráfica en azul muestra la relación masa densidad central de materia para el caso de Einstein y la gráfica en naranja muestra la relación masa densidad central de materia cuando se tiene GSU2P con $\chi_6 = 9$. Los datos de esta gráfica están la tabla (19). Se integró con $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$.

4.2.7. GSU2P con α_1 y polítropa con $n = 1$. Para este caso se procedió a variar el parámetro α_1 . Se hizo $\alpha_i = \chi_i = \mu = 0$, excepto por α_1 , y se varió de nuevo con el objetivo de disminuir el valor del parámetro b_2 , y con ello disminuir $\rho_{efec}(0)$, con respecto al caso EYM. La densidad central de la materia bariónica se dejó constante y con un valor de $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$.

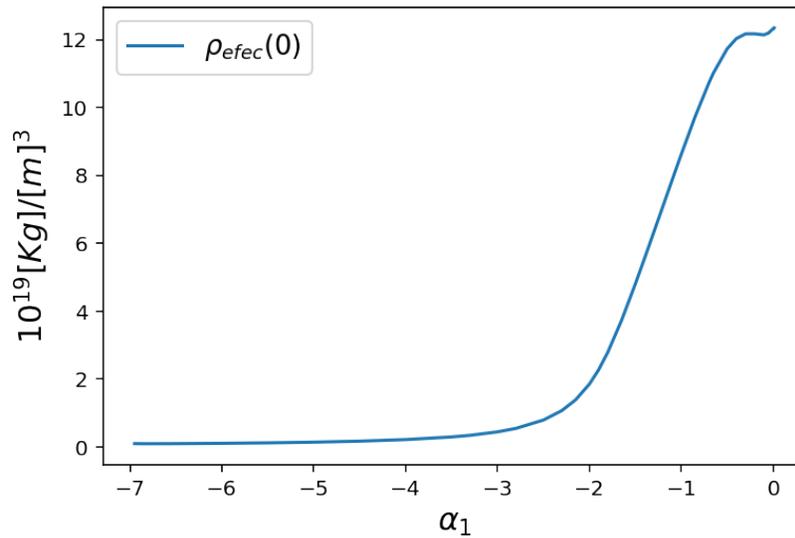


Figura 35. En esta imagen se puede ver el comportamiento de la densidad central efectiva en función del parámetro libre α_1 . Los datos de esta gráfica están en la tabla (9). Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

El parámetro α_1 se pudo variar continuamente entre -6.95 y 0.012 . Para el valor de 0.013 no se encontró solución asintóticamente plana. Para los valores negativos no se exploraron valores inferiores a -6.98 , ya que no se encontró solución asintóticamente plana con dos ceros cuando se toman valores cada vez menores de α_1 . El valor mínimo que toma $\rho_{efec}(0)$ aquí es de $1.03 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, lo cual conlleva a descartar este escenario.

4.2.8. GSU2P con α_3 y polítropa con $n = 1$. Finalmente se varió el parámetro α_3 . Se hizo $\alpha_i = \chi_i = \mu = 0$, excepto por α_1 , y se siguió el procedimiento antes mencionado. La densidad central de la materia bariónica se dejó constante y con un valor de $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$.

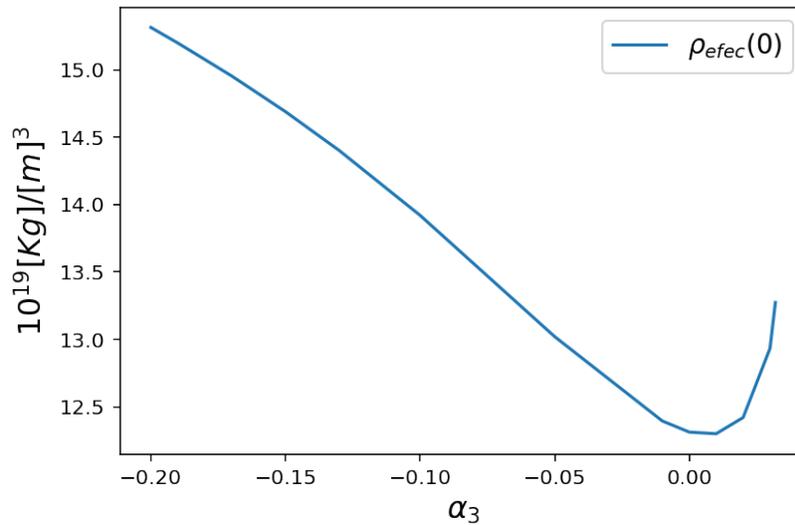


Figura 36. En esta imagen se puede ver el comportamiento de la densidad central efectiva en función del parámetro libre α_3 . Los datos de esta gráfica están la tabla (11). Se integró con $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$, $n = 1$ y $k = 0.0045 m^5 / (kg s^2)$.

La Fig.(36) presenta una discontinuidad, ya que α_3 no puede tomar valores menores a -0.1 debido a que no se encuentra la solución asintóticamente plana. Para los valores positivos de α_3 , no se pudieron explorar valores mayores a 0.75 debido a que la solución asintóticamente plana no se encontró. El mínimo valor que puede tomar $\rho_{efec}(0)$ es de $6.4319 \times 10^{19} [Kg]/[m]^3$, por lo que se descartó este escenario.

4.3. GSU2P con χ_5 y polítropa: Modelos alternativos

En la sección 4.2 se encontró que únicamente los parámetros χ_5 y χ_6 permiten soluciones que modelan estrellas de neutrones. Además, únicamente el parámetro χ_5 permitió configuraciones en las que la densidad central de materia bariónica está dos órdenes de magnitud por encima de la densidad central efectiva. Debido a lo anterior, se decidió realizar esta sección con el fin de explorar el parámetro χ_5 con diferentes ecuaciones de estado. Vale aclarar que los modelos realistas de ecuaciones de estado para estrellas de neutrones no son completamente politrópicos, pero es posible trabajar con una ecuación de estado aproximada (Chau et al., 1992; Chagoya et al., 2017).

4.3.1. GSU2P con χ_5 y polítropa con $n = 1$. Se realizó la integración para una ecuación de estado de la forma (28), con $n = 1$ y $k = 0.02m^5/(kgs^2)$. Esta ecuación de estado polítropa es de gran interés ya que ella tiene en cuenta la interacción entre neutrones (Momeni et al., 2017). Además esta ecuación de estado permite tener masas de valores cercanos a la masa de la estrella de neutrones más masiva detectada hasta la fecha, la cual tiene un valor de $2.14_{-0.09}^{+0.10}M_{\odot}$ (Cromartie et al., 2019).

La Fig.(37) muestra la relación masa radio para el caso GSU2P con $\chi_5 = 100$ y $n = 1$, para $k = 0.02m^5/(kgs^2)$. Nótese que de forma similar al caso de la Fig.(29), el efecto que tienen los grados de libertad vectoriales sobre la relación masa radio la GSU2P es el de aumentar la masa máxima de las configuraciones y disminuir el radio máximo.

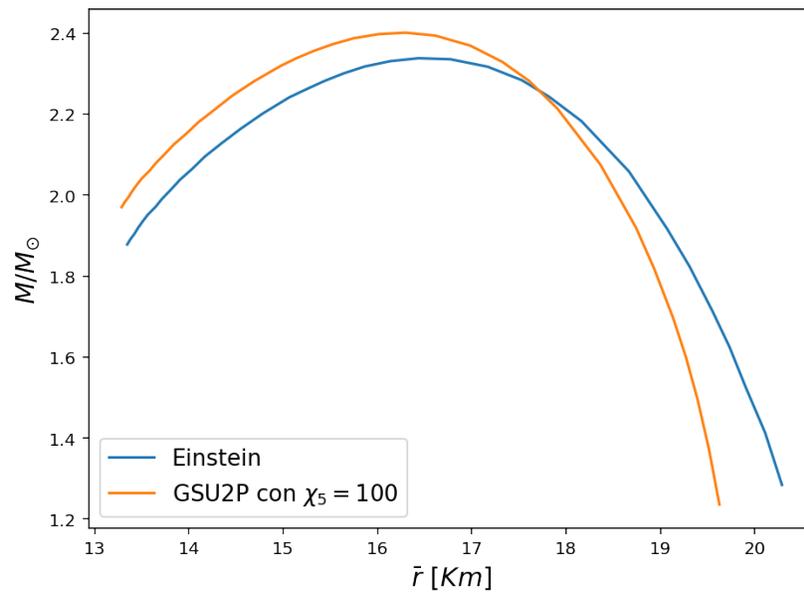


Figura 37. En esta gráfica se presenta la relación masa radio para el caso GSU2P con $\chi_5 = 100$ y $n = 1$, para $k = 0.02m^5/(kgs^2)$. Los datos de esta gráfica están en las tablas (20) y (22).

4.3.2. GSU2P con χ_5 y polítropa con $n = 1/2$. Se decidió realizar esta sección con el fin de explorar el parámetro χ_5 para una ecuación de estado de la forma (28) pero con $n = 1/2$. Se decidió usar este índice ya que en muchos ajustes a ecuaciones de estado polítropas, el índice toma un valor cercano a 0.5 (Ferrari et al., 2010).

Se realizó un procedimiento similar al de la primera sección de este capítulo para dar solución en series alrededor del origen de las funciones $m(r)$, $\Upsilon(r)$, $\tilde{\rho}_{mat}(r)$ y $V(r)$. Se encontró que

$$m(r) = a_3r^3 + a_4r^4 + a_5r^5 + a_6r^6 + \mathcal{O}(r^7), \quad (101)$$

$$V(r) = b_0 + b_1r + b_2r^2 + b_3r^3 + b_4r^4 + b_5r^5 + \mathcal{O}(r^6), \quad (102)$$

$$\Upsilon(r) = c_1r + c_2r^2 + c_3r^3 + c_4r^4 + c_5r^5 + \mathcal{O}(r^6), \quad (103)$$

$$\tilde{\rho}_{mat}(r) = 1 + d_1r + d_2r^2 + d_3r^3 + d_4r^4 + \mathcal{O}(r^6), \quad (104)$$

con b_2 como parámetro libre, y

$$a_3 = \frac{\beta}{3} + \frac{2b_2^2}{e^2}, \quad (105)$$

$$a_5 = -\frac{2\beta^2}{45} - \frac{\beta^2}{90\sigma} - \frac{\beta^2\sigma}{30} + \frac{2\beta b_2^2}{15e^2} - \frac{2\beta b_2^2}{15e^2\sigma} - \frac{4\beta\sigma b_2^2}{5e^2} - \frac{8b_2^3}{5e^2}, \quad (106)$$

$$b_4 = \frac{\beta b_2}{5} - \frac{\beta\sigma b_2}{5} - \frac{3b_2^2}{10} + \frac{4b_2^3}{5e^2} + \frac{\chi_5 b_2^3}{5e^2}, \quad (107)$$

$$c_2 = \frac{\beta}{6} + \frac{\beta\sigma}{2} + \frac{2b_2^2}{e^2}, \quad (108)$$

$$c_4 = \frac{\beta^2}{360} - \frac{\beta^2}{360\sigma} - \frac{\beta^2\sigma}{120} - \frac{\beta^2\sigma^2}{8} + \frac{7\beta b_2^2}{15e^2} - \frac{\beta b_2^2}{30e^2\sigma} - \frac{3\beta\sigma b_2^2}{10e^2} - \frac{4b_2^3}{5e^2} + \frac{12b_2^4}{5e^4} - \frac{2\chi_5 b_2^4}{5e^4}, \quad (109)$$

$$d_2 = -\frac{2\beta}{9} - \frac{\beta}{18\sigma} - \frac{\beta\sigma}{6} - \frac{2b_2^2}{3e^2} - \frac{2b_2^2}{3e^2\sigma}, \quad (110)$$

$$\begin{aligned}
d_4 = & \frac{23\beta^2}{720} + \frac{\beta^2}{480\sigma^2} + \frac{\beta^2}{144\sigma} + \frac{29\beta^2\sigma}{240} + \frac{3\beta^2\sigma^2}{32} + \frac{31\beta b_2^2}{120e^2} + \frac{\beta b_2^2}{40e^2\sigma^2} \\
& - \frac{7\beta b_2^2}{60e^2\sigma} + \frac{2\beta\sigma b_2^2}{5e^2} + \frac{2b_2^3}{5e^2} + \frac{2b_2^3}{5e^2\sigma} - \frac{7b_2^4}{10e^4} + \frac{\chi_5 b_2^4}{5e^4} - \frac{7b_2^4}{10e^4\sigma} \\
& + \frac{\chi_5 b_2^4}{5e^4\sigma},
\end{aligned} \tag{111}$$

$a_4 = a_5 = 0$, $b_3 = b_5 = 0$, $c_3 = c_5 = 0$ y $d_3 = d_5 = 0$. Gracias a la ecuación de estado se puede expresar la presión de materia como

$$\tilde{P}_{mat}(r) = 1 + 3d_2 r^2 + 3(d_2^2 + d_4)r^4 + \mathcal{O}(r^6). \tag{112}$$

Nótese que $\tilde{P}_{mat}(0)'' < 0$ está garantizado ya que $d_2 < 0$. En todas las expansiones los términos de Einstein Yang-Mills dominan y las modificaciones debidas a los parámetros libres de la teoría no aparecen en el orden dominante de las expansiones. Esto también sucedió en los casos previos pero, a pesar de ello, se encontró en las soluciones numéricas que dichos parámetros modifican la dinámica con respecto al caso EYM.

Vale aclarar que las expansiones en serie en el infinito espacial del capítulo anterior aplican también en este caso.

Se procedió a encontrar las soluciones numéricas de las Ec.(113), Ec.(114), Ec.(115) y la Ec.(47), se usó el comando Solve de Mathematica para desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales para las variables $m'(r)$, $\Upsilon''(r)$, $V''(r)$ y $\tilde{P}'_{mat}(r)$. Se realizó el cambio de variable de la variable r de acuerdo a $r = e^t$ ya que se necesitaba una mayor resolución de la variable radial

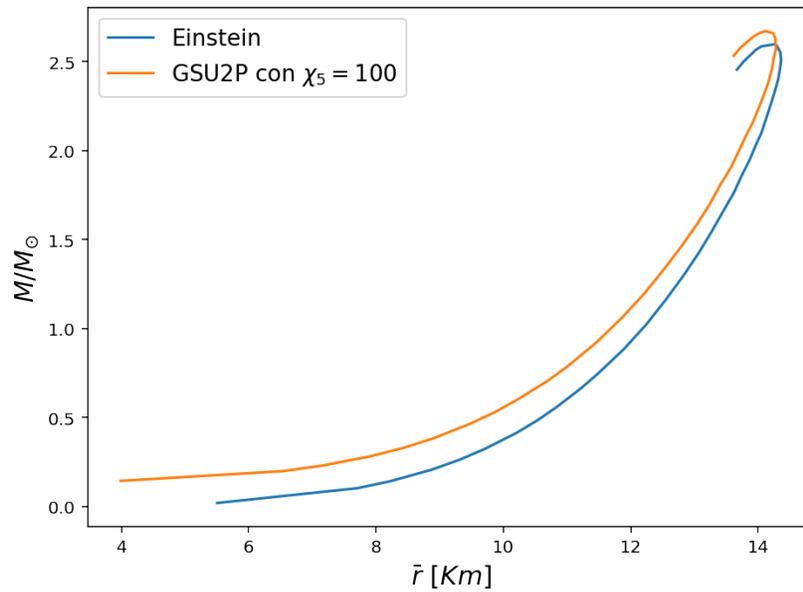


Figura 38. En esta gráfica se presenta la relación masa radio para el caso GSU2P con $\chi_5 = 100$. Se integró con $n = 1/2$ y $k = 2.246 \times 10^{-20} m^8 / (kg^2 s^2)$. Los datos de esta gráfica están en las tablas (24) y (26).

cerca al origen, pero menor lejos de él.

El sistema desacoplado para las variables $m'(r)$, $\Upsilon''(r)$, $V''(r)$ y $\tilde{P}'_{mat}(r)$, se exportó a Python para integrarlo con el uso los paquetes NumPy y SciPy. Se usaron las expansiones en series Ec.(101), Ec.(102), Ec.(103) y Ec.(112) como condiciones iniciales para integrar el sistema. Las soluciones se empezaron a construir en $r = 0.0001$ con $k = 2.246 \times 10^{-20} m^8 / (kg^2 s^2)$.

La gráfica (38) muestra en naranja la relación masa radio para GSU2P con $\chi_5 = 100$ y $n = 1/2$. Esta gráfica se realizó para $\rho_{mat}(0)$ entre $2 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$ y $50 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$. En esta gráfica se encontró que la masa máxima alcanzada en el caso Einstein fue de aproximadamente $2.59M_{\odot}$ mientras que al tener GSU2P con $\chi_5 = 100$ y $n = 1/2$ se encontró que la masa máxima es de $2.67M_{\odot}$. Para el radio máximo en el caso Einstein se encontró que el radio máximo es

aproximadamente $14.36[Km]$ y en el caso GSU2P con $\chi_5 = 100$ y $n = 1/2$ se encontró que es $14.28[Km]$.

5. Discusión

5.1. Discusión

Debido a que χ_4 no contribuye a las ecuaciones de campo gravitacional, como tampoco lo hace a las ecuaciones del campo vectorial, en este proyecto no fue posible estudiar su impacto en configuraciones astrofísicas. El parámetro libre de la teoría, μ , no se investigó ya que se encontró en la Ref.(Greene et al., 1993) que dicho parámetro presenta un valor máximo de 4.454×10^{-2} en configuraciones ausentes de materia bariónica.

5.1.1. Sobre estrellas de bosones. En el capítulo 3 se encontró que los parámetros $\chi_1, \chi_2, \chi_5, \chi_6, \alpha_1$ y α_3 de la GSU2P permiten generalizar las soluciones de estrellas de bosones encontradas por R. Bartnik y J. McKinnon. Se les denomina estrellas de bosones ya que estas configuraciones se construyeron únicamente con los grados de libertad vectoriales y el tensor métrico.

Las soluciones encontradas por R. Bartnik y J. McKinnon presentan una escala de longitud no especificada lo que en principio permite fijar una escala y así las soluciones se ajustarían a dicha escala. Para las soluciones aquí presentadas de la GSU2P con cualquiera de los parámetros libres de la teoría se puede definir $\tilde{m} = mg_c, \tilde{r} = rg_c$, y las ecuaciones automáticamente son invariantes ante este cambio de variables; se escogió $g_c = 1/M_\odot$ para que la masa esté en la escala de masas solares.

En todos los casos explorados, los perfiles de densidad de las configuraciones, así como las masas gravitacionales, fueron diferentes con respecto al caso EYM. Si bien las soluciones de R. Bartnik y J. McKinnon son inestables, en este caso generalizado alguno de los parámetros

libres de la teoría podría hacer que eventualmente se encuentren soluciones estables. Nótese que la contribución negativa a la densidad de energía efectiva debida a los parámetros libres de la GSU2P permitió contrarrestar al término de Yang Mills. Este efecto hizo posible que posteriormente se realizara la construcción de estrellas de neutrones.

Nótese que en todos los casos la métrica tiende a la solución de Schwarzschild en campo lejano. En el campo cercano (alrededor del borde de la estrella) la métrica presenta un comportamiento similar al caso Reissner Nordström con una carga efectiva que gradualmente decae a cero (Véase la Fig.(10)). Para todos los casos explorados, los perfiles de la carga efectiva fueron diferentes.

Ya que no hay una interacción directa entre la materia y los grados de libertad vectoriales, estas estrellas no emiten ni absorben radiación electromagnética por lo que serían oscuras. Gracias a esta propiedad, dichas configuraciones de equilibrio podrían eventualmente contribuir en algún porcentaje al contenido de materia oscura del universo.

5.1.2. Sobre estrellas de neutrones. En el capítulo 4 se variaron los parámetros χ_1 , χ_2 , α_1 y α_3 de la GSU2P, y se encontró que ninguno de ellos conduce a configuraciones en las cuales la densidad efectiva central fuera del mismo orden de la densidad central de materia (se usó $\rho_{mat}(0) = 5 \times 10^{18} [Kg]/[m]^3$), como se puede ver en las gráficas (15), (16), (35) y (36). Además para ninguno de estos parámetros el radio físico de la materia superó los $1.5 [Km]$ (véase las tablas (4), (5), (9) y (11)). Este trabajo permite concluir que si se consideran uno a uno estos parámetros libres de la GSU2P, ellos se ven descartados para construir modelos de estrellas de neutrones, por lo que no se construyeron relaciones masa radio y masa densidad central con ellos.

De igual manera, en el capítulo 4 se variaron los parámetros χ_5 y χ_6 , y se encontró que ellos sí permiten encontrar configuraciones en las que la densidad central de la materia domina a la densidad central efectiva; para ello se eligieron los casos en que χ_5 tomaba los valores de 20, 60 y 100, y χ_6 el valor de 9, para posteriormente obtener las relaciones masa radio y masa densidad central con $n = 1$. Además, para $\chi_5 = 100$, se obtuvo la relación masa radio para una ecuación de estado polítropa con $n = 1/2$.

Se encontró que en las relaciones masa densidad central de materia para χ_5 igual a 60 y a 100 con $n = 1$, las masas gravitacionales son mayores que en el caso de relatividad general, lo cual se debe a la contribución de masa gravitacional que realizan los grados de libertad vectoriales. En las relaciones masa densidad central de materia para $\chi_5 = 20$ con $n = 1$ y $\chi_6 = 9$ con $n = 1$, sucede algo diferente a los dos casos previos ya que hay regiones, para $\rho_{mat}(0)$ menor a $50 \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$, en las cuales la masa gravitacional es menor que en el caso de relatividad general.

Físicamente χ_5 y χ_6 se pueden pensar como contribuciones a la densidad de energía efectiva, que contrarrestan a la contribución del término de Yang Mills. Este efecto es muy interesante ya que evita que la contribución de los grados de libertad vectoriales domine a la densidad de energía de las configuraciones. Por ello se realizaron gráficas para distintos valores de estos parámetros libres pudiéndose así observar el efecto que tiene sobre las relaciones masa radio y masa densidad central de materia.

En el caso en que $\chi_5 = 100$ con $n = 1$, en comparación con el caso Einstein (Fig.29), se puede ver que el efecto que tiene el campo vectorial sobre la relación masa radio físico es el de incrementar la masa de las configuraciones y disminuir el radio de las mismas teniendo en cuenta

que $\chi_5 = 100$ no domina la densidad efectiva de energía. De manera similar, cuando se tiene GSU2P con $\chi_5 = 100$ y $n = 1/2$ (Fig.38), la masa máxima de la gráfica es de $2.76M_{\odot}$ pero en el caso Einstein es de $2.59M_{\odot}$. En cuanto al radio máximo, pasa éste de tomar un valor de $14.36[Km]$ aproximadamente en el caso Einstein a tomar un valor aproximadamente de $14.28[Km]$ en este caso.

Para el caso en que $\chi_5 = 60$ con $n = 1$ (Fig.24), se puede ver que aparece un máximo en el radio de las estrellas de neutrones, aproximadamente de $9.04[Km]$, debido a que en este caso la densidad de energía central de materia llega a estar únicamente un orden de magnitud por encima de la densidad de energía central efectiva.

Finalmente, en el caso $\chi_5 = 20$ con $n = 1$ (Fig.20) la relación masa radio muestra un radio máximo para las estrellas de neutrones, aproximadamente de $8.16[Km]$. En este caso las densidades de energía son del mismo orden por lo que se puede apreciar en mayor medida cómo el campo vectorial tiende a disminuir el radio y aumentar la masa de las configuraciones. El caso en que se tiene $\chi_6 = 9$ con $n = 1$ (Fig.33) es similar al caso $\chi_5 = 20$ con $n = 1$.

Se puede concluir que los grados de libertad vectoriales tienen el efecto de compactificar las configuraciones que tienen materia bariónica. Además, este estudio permite concluir que si se trabaja uno a uno los parámetros libres de la GSU2P, únicamente χ_5 y χ_6 permiten construir configuraciones físicas. Este resultado puede variar en la medida en que se tengan no nulos dos o más parámetros libres de la teoría.

5.2. Futuros proyectos

De este proyecto se desprenden muchas propuestas de trabajo que pueden ser abordadas en el futuro; se destaca entre ellas el estudio de la estabilidad de las configuraciones de estrellas de bosones aquí encontradas ya que las estrellas de R. Bartnik y J. McKinnon corresponden a configuraciones inestables. Nótese que en este escenario generalizado todos los parámetros modifican la masa, el perfil del campo e incluso la carga efectiva de manera única. Dicho estudio se puede realizar mediante perturbaciones radiales de las configuraciones.

También se destaca el estudio de configuraciones con materia bariónica que usen ecuaciones de estado realistas y no solo modelos politrópicos, ya que con ecuaciones de estado realistas se puede comparar con los datos observacionales, y de esta la teoría puede ser aún más restringida a escalas astrofísicas en un régimen de campo fuerte.

Cabe mencionar que, a partir de la Ec.(53), la cual representa la configuración más general esféricamente simétrica para un campo vectorial con simetría global interna $SU(2)$, solo se estudió un grado de libertad en este proyecto. Por lo anterior, se puede tener en cuenta en un futuro proyecto los otros grados de libertad. Explorar estos grados de libertad podría abrir la posibilidad de explorar el parámetro χ_4 .

Se desprende también la posibilidad de estudiar soluciones de agujeros negros, ya que solo se necesitaría realizar una expansión en series alrededor del horizonte para posteriormente integrar las ecuaciones de campo gravitacional y de los grados de libertad vectoriales.

Se podría estudiar a futuro también discos galácticos ya que, como se pudo ver, el campo

vectorial está presente tanto dentro de las estrellas como fuera de ellas, pero en dicho caso, la simetría del problema es axial por lo que el *ansatz* debe cambiar (Kleihaus and Kunz, 1997). Nótese que en los casos en que dominaba la materia bariónica, se encontró que la densidad de energía del campo vectorial estaba en un buen porcentaje fuera de la estrella por lo que dicho campo, en el contexto de discos galácticos, podría dar cuenta de algún porcentaje de la materia oscura presente en halos alrededor de las galaxias.

Finalmente, se podrían estudiar junto con la perturbaciones radiales, las perturbaciones angulares de las configuraciones, y con ello la generación de ondas gravitacionales. En especial se podrían estudiar los modos normales de oscilación de las configuraciones tipo partícula para posteriormente ser comparadas con las de un agujero negro en relatividad general.

5.3. Contribuciones

Como resultados de esta investigación, se presentaron las soluciones tipo partícula de este trabajo en *The fifth edition of the MOCa workshop (Materia Oscura en Colombia)*⁵ a través de la charla titulada “Astrophysical solutions in the generalized $SU(2)$ Proca theory” en la cual el autor fue ponente.

Se presentaron las soluciones tipo partícula de este trabajo y parte de las soluciones con materia en *The third CoCo meeting (Cosmología en Colombia)*⁶ a través de la charla titulada

⁵ <https://indico.cern.ch/event/1004867/>

⁶ <https://indico.cern.ch/event/1040803/>

“Astrophysical solutions in the generalized $SU(2)$ Proca theory” en la cual el autor fue ponente.

Actualmente se está trabajando en la realización de dos publicaciones de los resultados aquí presentados por parte de los autores de este proyecto.

Referencias Bibliográficas

- Abbott, B. P. et al. (2017a). Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB170817A. *Astrophys. J.*, 848:L13.
- Abbott, B. P. et al. (2017b). Multi-messenger observations of a binary neutron star merger. *Astrophys. J.*, 848:L12.
- Abbott, B. P. et al. (2018). GW170817: Measurements of neutron star radii and equation of state. *Phys. Rev. Lett.*, 121:161101.
- Abuter, R. et al. (2018). Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole. *Astron. Astrophys.*, 615:L15.
- Adshead, P. and Sfakianakis, E. I. (2017). Higgsed Gauge-flation. *JHEP*, 08:130.
- Aghanim, N. and et. al. (2020). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 641:A6.
- Akiyama, K. et al. (2019). First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophys. J.*, 875:L1.
- Allys, E., Beltran Almeida, J. P., Peter, P., and Rodríguez, Y. (2016a). On the 4D generalized Proca action for an Abelian vector field. *JCAP*, 1609:026.
- Allys, E., Peter, P., and Rodríguez, Y. (2016b). Generalized Proca action for an Abelian vector field. *JCAP*, 1602:004.

- Allys, E., Peter, P., and Rodriguez, Y. (2016c). Generalized SU(2) Proca Theory. *Phys. Rev.*, D94:084041.
- Álvarez, M., Orjuela-Quintana, J. B., Rodriguez, Y., and Valenzuela-Toledo, C. A. (2019). Einstein Yang–Mills Higgs dark energy revisited. *Class. Quant. Grav.*, 36:195004.
- Amendola, L. and Tsujikawa, S. (2015). Dark energy: theory and observations. Cambridge University Press.
- Antoniadis, J. et al. (2013). A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary. *Science*, 340:6131.
- Armendariz-Picon, C. (2004). Could dark energy be vector-like? *JCAP*, 07:007.
- Ashtekar, A. and Bianchi, E. (2021). A short review of loop quantum gravity. *Rept. Prog. Phys.*, 84:042001.
- Bartnik, R. and Mckinnon, J. (1988). Particle Like Solutions of the Einstein Yang-Mills Equations. *Phys. Rev. Lett.*, 61:141–144.
- Beltran Jimenez, J. and Heisenberg, L. (2016). Derivative self-interactions for a massive vector field. *Phys. Lett. B*, 757:405.
- Beltran Jimenez, J. and Heisenberg, L. (2017). Generalized multi-Proca fields. *Phys. Lett. B*, 770:16.
- Breitenlohner, P., Forgacs, P., and Maison, D. (1994). Static spherically symmetric solutions of the einstein-yang-mills equations. *Commun. Math. Phys.*, 163:141–172.

- Bunting, G. L. and Masood-ul Alam, A. K. M. (1987). Nonexistence of multiple black holes in asymptotically euclidean static vacuum space-time. *Gen. Relativ. Gravit.*, 19:147–154.
- Cembranos, J. A. R., Hallabrin, C., Maroto, A. L., and Jareno, S. J. N. (2012). Isotropy theorem for cosmological vector fields. *Phys. Rev. D*, 86:021301.
- Chagoya, J., Niz, G., and Tasinato, G. (2017). Black Holes and Neutron Stars in Vector Galileons. *Class. Quant. Grav.*, 34:165002.
- Chandrasekhar, S. (1957). An introduction to the study of stellar structure, volume 2. Courier Corporation.
- Chau, W. Y., Cheng, K. S., and Zhang, J. L. (1992). Remarks on Triaxiality, Spin-up, and Magnetic Field Obliquity of Some Millisecond Pulsars. *Astrophys. J.*, 390:486.
- Chen, T., Fasiello, M., Lim, E. A., and Tolley, A. J. (2013). Higher derivative theories with constraints: Exorcising Ostrogradski’s Ghost. *JCAP*, 02:042.
- Clifton, T., Ferreira, P. G., Padilla, A., and Skordis, C. (2012). Modified Gravity and Cosmology. *Phys. Rept.*, 513:1.
- Creminelli, P. and Vernizzi, F. (2017). Dark energy after GW170817 and GRB170817A. *Phys. Rev. Lett.*, 119:251302.
- Cromartie, H. et al. (2019). Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. *Nat. Astron.*, 4:72.

- Dabrowski, M. P., Garecki, J., and Blaschke, D. B. (2009). Conformal transformations and conformal invariance in gravitation. *Ann. Phys. (Berl.)*, 18:13–32.
- De Felice, A., Heisenberg, L., Kase, R., Mukohyama, S., Tsujikawa, S., and Zhang, Y. (2016). Cosmology in generalized Proca theories. *JCAP*, 06:048.
- Deffayet, C., Gao, X., Steer, D. A., and Zahariade, G. (2011). From k-essence to generalised galileons. *Phys. Rev.*, D84:064039.
- Deser, S. (1984). Absence of static einstein-yang-mills excitations in three dimensions. *Class. Quant. Grav.*, 1:L1–L2.
- Dodelson, S. (2003). *Modern cosmology*. Academic Press.
- Donoghue, J. F. (1994). General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections. *Phys. Rev. D*, 50:3874–3888.
- Errasti Díez, V., Gording, B., Méndez-Zavaleta, J. A., and Schmidt-May, A. (2020). Maxwell-Proca theory: Definition and construction. *Phys. Rev. D*, 101:045009.
- et. al., B. P. A. (2017a). GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119:161101.
- et. al., T. B. (2017b). Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A. *Phys. Rev. Lett.*, 119:251301.

- Ezquiaga, J. M. and Zumalacárregui, M. (2017). Dark energy after GW170817: Dead ends and the road ahead. *Phys. Rev. Lett.*, 119:251304.
- Ferrari, L., Rossi, P. C. R., and Malheiro, M. (2010). A Polytropic Approach to Neutron Stars. *Int. J. Mod. Phys. D*, 19:1569–1574.
- Gallego Cadavid, A., Rodriguez, Y., and Gómez, L. G. (2020). Generalized SU(2) Proca theory reconstructed and beyond. *Phys. Rev. D*, 102:104066.
- Garnica, J. C., Gomez, L. G., Navarro, A. A., and Rodriguez, Y. (2022). Constant-Roll Inflation in the Generalized SU(2) Proca Theory. *Ann. Phys. (Berl.)*, 534:2100453.
- Glendenning, N. (2000). *Compact Stars*. Springer-Verlag New York.
- Gleyzes, J., Langlois, D., Piazza, F., and Vernizzi, F. (2015). Healthy theories beyond Horndeski. *Phys. Rev. Lett.*, 114:211101.
- Gomez, L. G. and Rodriguez, Y. (2021). Coupled multi-Proca vector dark energy. *Phys. Dark Univ.*, 31:100759.
- Greene, B. R., Mathur, S. D., and O'Neill, C. M. (1993). Eluding the no hair conjecture: Black holes in spontaneously broken gauge theories. *Phys. Rev. D*, 47:2242–2259.
- Guarnizo, A., Orjuela-Quintana, J. B., and Valenzuela-Toledo, C. A. (2020). Dynamical analysis of cosmological models with non-Abelian gauge vector fields. *Phys. Rev. D*, 102:083507.
- Hawking, S. and Israel, W. (2010). *General relativity: an Einstein centenary survey*.

Hawking, S. W. and Penrose, R. (1970). The singularities of gravitational collapse and cosmology.

Proc. R. Soc. Lond., 14:529–549.

Heisenberg, L. (2014). Generalization of the Proca Action. *JCAP*, 1405:015.

Heisenberg, L. (2019). A systematic approach to generalisations of General Relativity and their cosmological implications. *Phys. Rept.*, 796:1.

Hobson, M. P., Efstathiou, G. P., and Lasenby, A. N. (2006). General relativity: an introduction for physicists. Cambridge University Press.

Horndeski, G. W. (1974). Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space.

Int. J. Theor. Phys., 10:363.

Israel, W. (1968). Event horizons in static electrovac space-times. *Commun. Math. Phys.*, 8:245 – 260.

Jackson, D. (2018). A Numerical Exploration of the Spherically Symmetric SU(2) Einstein-Yang-Mills Equations. PhD thesis. Monash University.

Janka, H. T. (2012). Explosion Mechanisms of Core-Collapse Supernovae. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 62:407.

Kase, R., Minamitsuji, M., and Tsujikawa, S. (2018). Relativistic stars in vector-tensor theories.

Phys. Rev., D97:084009.

- Kase, R., Minamitsuji, M., and Tsujikawa, S. (2020). Neutron stars with a generalized Proca hair and spontaneous vectorization. *Phys. Rev. D*, 102:024067.
- Kleihaus, B. and Kunz, J. (1997). Static black-hole solutions with axial symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 79:1595–1598.
- Kobayashi, T. (2019). Horndeski theory and beyond: a review. *Rept. Prog. Phys.*, 82:086901.
- Kobayashi, T., Yamaguchi, M., and Yokoyama, J. (2011). Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations. *Prog. Theor. Phys.*, 126:511.
- Kostelecký, V. A. and Li, Z. (2021). Backgrounds in gravitational effective field theory. *Phys. Rev. D*, 103:024059.
- Langlois, D. and Noui, K. (2016). Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability. *JCAP*, 02:034.
- Lattimer, J. M. and Prakash, M. (2004). The physics of neutron stars. *Science*, 304:536.
- Lovelock, D. (1971). The einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, 12:498–501.
- Lyth, D. H. and Liddle, A. R. (2009). The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure. Cambridge University Press.
- Maleknejad, A. and Sheikh-Jabbari, M. M. (2011). Non-Abelian Gauge Field Inflation. *Phys. Rev. D*, 84:043515.

- Maleknejad, A. and Sheikh-Jabbari, M. M. (2013). Gauge-flaton: Inflation From Non-Abelian Gauge Fields. *Phys. Lett. B*, 723:224–228.
- Margalit, B. and Metzger, B. D. (2017). Constraining the Maximum Mass of Neutron Stars From Multi-Messenger Observations of GW170817. *Astrophys. J.*, 850:L19.
- Martín-García, J. M. (2004. (accessed on 13/06/2020)). xAct, Efficient Tensor Computer Algebra for Mathematica. <http://www.xact.es>.
- Momeni, D., Faizal, M., Myrzakulov, K., and Myrzakulov, R. (2017). Compact stars in vector–tensor-horndeski theory of gravity. *Eur. Phys. J. C*, 77:37.
- Mukhanov, V. (2005). Physical foundations of cosmology. Cambridge University Press.
- Nicolis, A., Rattazzi, R., and Trincherini, E. (2009). The galileon as a local modification of gravity. *Phys. Rev.*, D79:064036.
- Nieto, C. M. and Rodriguez, Y. (2016). Massive Gauge-flaton. *Mod. Phys. Lett. A*, 31:1640005.
- Ostrogradski, M. (1850). Memoires sur les equations differentielles relatives au probleme des isoperimetres. *Mem. Ac. St. Petersbourg*, VI:385.
- Padmanabhan, T. (2001). Theoretical Astrophysics: Volume 2, Stars and Stellar Systems. Cambridge University Press.
- Pandey, B. and Sarkar, S. (2015). Testing homogeneity in the Sloan Digital Sky Survey Data Release Twelve with Shannon entropy. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 454:2647–2656.

- Penrose, R. (1965). Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.*, 14:57–59.
- Penrose, R. (1969). Gravitational collapse: The role of general relativity. *Riv. del Nuovo Cim.*, 1:252.
- Peter, P. and Uzan, J. P. (2013). *Primordial cosmology*. Oxford University Press.
- Press, W. H., Vetterling, W. T., Teukolsky, S. A., and Flannery, B. P. (1986). *Numerical recipes*, volume 818. Cambridge university press Cambridge.
- Robinson, D. C. (1977). A simple proof of the generalization of Israel's theorem. *Gen. Relativ. Gravit.*, 8:695 – 698.
- Rovelli, C. (2004). *Quantum gravity*. Cambridge University Press.
- Sakstein, J. and Jain, B. (2017). Implications of the neutron star merger GW170817 for cosmological scalar-tensor theories. *Phys. Rev. Lett.*, 119:251303.
- Salaris, M. and Cassisi, S. (2005). *Evolution of stars and stellar populations*. John Wiley & Sons.
- Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A. (2008). *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. John Wiley & Sons.
- Sivers, D. W. (1986). Variational Approach to Classical SU(2) Gauge Theory With Spherical Symmetry. *Phys. Rev. D*, 34:1141.
- Smoller, J. A. and Wasserman, A. G. (1993). Existence of infinitely-many smooth, static, global solutions of the Einstein/Yang-Mills equations. *Commun. Math. Phys.*, 151:303–325.

- Tasinato, G. (2014). Cosmic Acceleration from Abelian Symmetry Breaking. *JHEP*, 1404:067.
- Thorne, K. S., Misner, C. W., and Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. Macmillan.
- Tolman, R. C. (1939). Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev.*, 55:364.
- Tooper, R. F. (1964). General relativistic polytropic fluid spheres. *Astrophys. J.*, 140:434.
- Tsujikawa, S. (2010). Modified gravity models of dark energy. *Lect. Notes Phys.*, 800:99.
- Volkov, M. S. and Gal'tsov, D. V. (1999). Gravitating nonAbelian solitons and black holes with Yang-Mills fields. *Phys. Rept.*, 319:1–83.
- Wald, R. M. (1998). *Black holes and relativistic stars*. University of Chicago Press.
- Watanabe, M., Kanno, S., and Soda, J. (2009). Inflationary Universe with Anisotropic Hair. *Phys. Rev. Lett.*, 102:191302.
- Weinberg, S. (1972). *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley & Sons.
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press.
- Weinberg, S. (2019). *Lectures on Astrophysics*. Cambridge University Press.
- Witten, E. (1977). Some exact multipseudoparticle solutions of classical yang-mills theory. *Phys. Rev. Lett.*, 38:121–124.

Woodard, R. P. (2007). Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity. *Lect. Notes Phys.*, 720:403.

Woodard, R. P. (2015). Ostrogradsky's theorem on hamiltonian instability. *Scholarpedia*, 10:32243.

Woosley, S. and Janka, H. T. (2005). The physics of core-collapse supernovae. *Nature Phys.*, 1:147.

Wu, K., Lahav, O., and Rees, M. J. (1999). The large-scale smoothness of the universe. *Nature*, 397:225–230.

Apéndices

Apéndice A. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler Lagrange de los grados de libertad tensoriales para la GSU2P se obtienen variando con respecto a $g_{\mu\nu}$ la Ec.(10). La componente cero Ec.(41) está dada por,

$$\begin{aligned}
& -\frac{e^{2\Upsilon(r)}}{15e^4r^7} \left((V(r))^4 \left((-9280\alpha_1 + 52\alpha_3)m(r) + r \left(3 \left(1360\alpha_1 - 6\alpha_3 - 5(8\chi_6 + (-e^2 \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 2\chi_1 + \chi_2)r^2 \right) \right) + (760\alpha_1 - 13\alpha_3) \frac{\partial m(r)}{\partial r} \right) \right) - 2m(r) \left(4640\alpha_1 - 26\alpha_3 + (-9200\alpha_1 r \right. \\
& \left. + 149\alpha_3 r) \frac{\partial V(r)}{\partial r} + 6r^2(740\alpha_1 - 23\alpha_3 - 5\chi_5 + 5\chi_6 + 5e^2r^2) \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 + 2(760\alpha_1 \right. \\
& \left. - 13\alpha_3)r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} \right) + r \left(4080\alpha_1 - 18\alpha_3 - 120\chi_6 + 15e^2r^2 - 30\chi_1r^2 - 15\chi_2r^2 \right. \\
& \left. + 30e^2M^2r^4 + 6r^2(740\alpha_1 - 23\alpha_3 - 5\chi_5 + 5\chi_6 + 5e^2r^2) \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 + (760\alpha_1 - 13\alpha_3 \right. \\
& \left. - 30e^4r^4) \frac{\partial m(r)}{\partial r} - 2r \frac{\partial V(r)}{\partial r} (4220\alpha_1 - 68\alpha_3 + (760\alpha_1 - 13\alpha_3) \frac{\partial m(r)}{\partial r}) \right) \quad (113) \\
& \left. + 1520\alpha_1r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} - 26\alpha_3r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} \right) + 6(V(r))^2 \left(r \left(4080\alpha_1 - 18\alpha_3 - 120\chi_6 - 5e^2r^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - 30\chi_1r^2 - 15\chi_2r^2 + 5e^2M^2r^4 + (740\alpha_1 - 23\alpha_3 - 5\chi_5 + 5\chi_6)r^2 \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 + (760\alpha_1 \right. \right. \\
& \left. \left. - 13\alpha_3) \frac{\partial m(r)}{\partial r} + r \frac{\partial V(r)}{\partial r} (-4220\alpha_1 + 68\alpha_3 + (-760\alpha_1 + 13\alpha_3) \frac{\partial m(r)}{\partial r}) \right) \right. \\
& \left. + 760\alpha_1r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} - 13\alpha_3r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} \right) + m(r) \left(-9280\alpha_1 + 52\alpha_3 + (9200\alpha_1 \right. \\
& \left. - 149\alpha_3)r \frac{\partial V(r)}{\partial r} - 2(740\alpha_1 - 23\alpha_3 - 5\chi_5 + 5\chi_6)r^2 \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 + 2(-760\alpha_1 \right. \\
& \left. + 13\alpha_3)r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} \right) \left. \right) + 2V(r) \left(m(r) \left(-18560\alpha_1 + 104\alpha_3 + 3(9200\alpha_1 \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -149\alpha_3)r\frac{\partial V(r)}{\partial r} - 12(740\alpha_1 - 23\alpha_3 - 5\chi_5 + 5\chi_6)r^2\left(\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right)^2 + 6(-760\alpha_1 \\
& + 13\alpha_3)r^2\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2}) + r\left(6(740\alpha_1 - 23\alpha_3 - 5\chi_5 + 5\chi_6)r^2\left(\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right)^2 + 2(760\alpha_1 \right. \\
& - 13\alpha_3)\frac{\partial m(r)}{\partial r} - 3r\frac{\partial V(r)}{\partial r}(4220\alpha_1 - 68\alpha_3 + (760\alpha_1 - 13\alpha_3)\frac{\partial m(r)}{\partial r}) \\
& + 3\left(2\left(1360\alpha_1 - 6\alpha_3 - 5(8\chi_6 + r^2(2\chi_1 + \chi_2 - e^2M^2r^2))\right) + (760\alpha_1 \right. \\
& \left. - 13\alpha_3)r^2\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2}\right)\left.\right) + 2(V(r))^3\left(r\left(8160\alpha_1 - 36\alpha_3 - 240\chi_6 - 60\chi_1r^2 - 30\chi_2r^2 \right. \right. \\
& \left. + 2(760\alpha_1 - 13\alpha_3)\frac{\partial m(r)}{\partial r} + r\frac{\partial V(r)}{\partial r}(-4220\alpha_1 + 68\alpha_3 + (-760\alpha_1 + 13\alpha_3)\frac{\partial m(r)}{\partial r}) \right. \\
& \left. + 760\alpha_1r^2\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} - 13\alpha_3r^2\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2}\right) + m(r)\left((9200\alpha_1 - 149\alpha_3)r\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right. \\
& \left. + 2(-9280\alpha_1 + 52\alpha_3 + (-760\alpha_1 + 13\alpha_3)r^2\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2})\right)\left.\right) = 2e^{2\Upsilon(r)}\beta\rho_{mat}(r).
\end{aligned}$$

La componente uno de las ecuaciones de campo gravitacional (Ec.(41)) está dada por,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{15e^4r^6(r-2m(r))} \left(r \left(-3 \left(720\alpha_1 + 6\alpha_3 + 5 \left(8\chi_6 + r^2(2\chi_1 + \chi_2 - e^2(1 + 2M^2r^2)) \right) \right) \right) \right. \\
& + 30r^2(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6 - e^2r^2) \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 + (-760\alpha_1r + 13\alpha_3r + 30e^4r^5) \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \\
& \left. + 2r \frac{\partial V(r)}{\partial r} \left(4(295\alpha_1 - 4\alpha_3) + (760\alpha_1 - 13\alpha_3)r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right) \right) - (V(r))^4 \left(r(3(720\alpha_1 + 6\alpha_3 \right. \\
& + 40\chi_6 - 5e^2r^2 + 10\chi_1r^2 + 5\chi_2r^2) + (760\alpha_1 - 13\alpha_3)r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \left. \right) - m(r)(3960\alpha_1 + 39\alpha_3 \\
& + 2(760\alpha_1 - 13\alpha_3)r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \left. \right) + m(r) \left(3960\alpha_1 + 39\alpha_3 - 30e^4r^4 + 60r^2(-4\alpha_1 - 2\alpha_3 \right. \\
& - \chi_5 + \chi_6 + e^2r^2) \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 - 2r(-760\alpha_1 + 13\alpha_3 + 30e^4r^4) \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} + 4r \frac{\partial V(r)}{\partial r} (-1180\alpha_1 \\
& + 16\alpha_3 + (-760\alpha_1r + 13\alpha_3r) \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \left. \right) + 6(V(r))^2 \left(r(-2160\alpha_1 - 18\alpha_3 - 120\chi_6 \right. \\
& \left. - 5e^2r^2 - 30\chi_1r^2 - 15\chi_2r^2 + 5e^2M^2r^4 + 5(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6)r^2 \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 \right.
\end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned}
& + (-760\alpha_1 r + 13\alpha_3 r) \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} + r \frac{\partial V(r)}{\partial r} (4(295\alpha_1 - 4\alpha_3) + (760\alpha_1 - 13\alpha_3) r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r}) \\
& + m(r) \left(3960\alpha_1 + 39\alpha_3 - 10(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6) r^2 \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 + 2(760\alpha_1 \right. \\
& \left. - 13\alpha_3) r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} + 2r \frac{\partial V(r)}{\partial r} (-1180\alpha_1 + 16\alpha_3 + (-760\alpha_1 r + 13\alpha_3 r) \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r}) \right) \\
& + 2(V(r))^3 \left(r \left(r \frac{\partial V(r)}{\partial r} (4(295\alpha_1 - 4\alpha_3) + (760\alpha_1 - 13\alpha_3) r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r}) - 2(3(720\alpha_1 \right. \right. \\
& \left. \left. + 6\alpha_3 + 40\chi_6 + 10\chi_1 r^2 + 5\chi_2 r^2) + (760\alpha_1 - 13\alpha_3) r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right) + m(r) (7920\alpha_1 + 78\alpha_3 \right. \\
& \left. + 4(760\alpha_1 - 13\alpha_3) r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} + 2r \frac{\partial V(r)}{\partial r} (-1180\alpha_1 + 16\alpha_3 + (-760\alpha_1 r \right. \\
& \left. + 13\alpha_3 r) \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r}) \right) + 2V(r) \left(r \left(30(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6) r^2 \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 3r \frac{\partial V(r)}{\partial r} (4(295\alpha_1 - 4\alpha_3) + (760\alpha_1 - 13\alpha_3) r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r}) - 2(3(720\alpha_1 + 6\alpha_3 + 40\chi_6 \right. \right. \\
& \left. \left. + 10\chi_1 r^2 + 5\chi_2 r^2 - 5e^2 M^2 r^4) + (760\alpha_1 - 13\alpha_3) r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right) + m(r) (7920\alpha_1 \right. \\
& \left. + 78\alpha_3 - 60(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6) r^2 \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 + 4(760\alpha_1 - 13\alpha_3) r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right. \\
& \left. \left. + 6r \frac{\partial V(r)}{\partial r} (-1180\alpha_1 + 16\alpha_3 + (-760\alpha_1 r + 13\alpha_3 r) \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r}) \right) \right) = \frac{2\beta \sigma r \rho_{mat}(r)^2}{r - 2m(r)}.
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de Euler Lagrange de los grados de libertad vectoriales para la GSU2P se obtienen variando con respecto a A_{μ}^a la Ec.(10). La ecuación Ec.(44) está dada por,

$$\begin{aligned}
& r \left(60\alpha_1 + 90\alpha_3 - 240\chi_6 - 60\chi_1 r^2 - 30\chi_2 r^2 + 30e^2 M^2 r^4 + 30(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 \right. \\
& - \chi_6) r^2 \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 - 1180\alpha_1 \frac{\partial m(r)}{\partial r} + 16\alpha_3 \frac{\partial m(r)}{\partial r} + 1180\alpha_1 r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} - 16\alpha_3 r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \\
& - 760\alpha_1 r \frac{\partial m(r)}{\partial r} \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} + 13\alpha_3 r \frac{\partial m(r)}{\partial r} \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} + 760\alpha_1 r^2 \left(\frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right)^2 - 13\alpha_3 r^2 \left(\frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right)^2 \\
& - 30r \frac{\partial V(r)}{\partial r} (2(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6) + (4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6 - e^2 r^2) \frac{\partial m(r)}{\partial r} + r(-4\alpha_1 \\
& - 2\alpha_3 - \chi_5 + \chi_6 + e^2 r^2) \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r}) + 120\alpha_1 r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} + 60\alpha_3 r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} + 30\chi_5 r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} \\
& - 30\chi_6 r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} - 30e^2 r^4 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} + 760\alpha_1 r^2 \frac{\partial^2 \Upsilon(r)}{\partial r^2} - 13\alpha_3 r^2 \frac{\partial^2 \Upsilon(r)}{\partial r^2} \left. \right) - m(r) \left(60(4\alpha_1 \right. \\
& + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6) r^2 \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 + (1600\alpha_1 - 19\alpha_3) r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} + 2(760\alpha_1 - 13\alpha_3) r^2 \left(\frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right)^2 \\
& + 30r \frac{\partial V(r)}{\partial r} (-20\alpha_1 - 10\alpha_3 - 5\chi_5 + 5\chi_6 + e^2 r^2 + 2r(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6 \\
& - e^2 r^2) \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r}) + 2(-170\alpha_1 + 95\alpha_3 + 30r^2(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6 - e^2 r^2) \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} \\
& + (760\alpha_1 - 13\alpha_3) r^2 \frac{\partial^2 \Upsilon(r)}{\partial r^2} \left. \right) + (V(r))^3 \left(r \left(60\alpha_1 + 90\alpha_3 - 240\chi_6 + 30e^2 r^2 - 60\chi_1 r^2 \right. \right. \\
& - 30\chi_2 r^2 + 4(295\alpha_1 - 4\alpha_3) r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} + (760\alpha_1 - 13\alpha_3) r^2 \left(\frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial m(r)}{\partial r} (-1180\alpha_1 \\
& + 16\alpha_3 + (-760\alpha_1 r + 13\alpha_3 r) \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r}) + 760\alpha_1 r^2 \frac{\partial^2 \Upsilon(r)}{\partial r^2} - 13\alpha_3 r^2 \frac{\partial^2 \Upsilon(r)}{\partial r^2} \left. \right) \\
& + m(r) \left(340\alpha_1 - 190\alpha_3 + (-1600\alpha_1 r + 19\alpha_3 r) \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} + 2(-760\alpha_1 + 13\alpha_3) r^2 \left(\frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right)^2 \right. \\
& + 2(-760\alpha_1 + 13\alpha_3) r^2 \frac{\partial^2 \Upsilon(r)}{\partial r^2} \left. \right) + 3(V(r))^2 \left(r \left(60\alpha_1 + 90\alpha_3 - 240\chi_6 - 60\chi_1 r^2 \right. \right. \\
& - 30\chi_2 r^2 + 1180\alpha_1 r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} - 16\alpha_3 r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} + 760\alpha_1 r^2 \left(\frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right)^2 - 13\alpha_3 r^2 \left(\frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right)^2 \\
& + 10(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6) r \frac{\partial V(r)}{\partial r} \left(-2 - \frac{\partial m(r)}{\partial r} + r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial m(r)}{\partial r} (-1180\alpha_1 \\
& + 16\alpha_3 + (-760\alpha_1 r + 13\alpha_3 r) \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r}) + 40\alpha_1 r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} + 20\alpha_3 r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} \left. \right)
\end{aligned}$$

(115)

$$\begin{aligned}
& + 10\chi_5 r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} - 10\chi_6 r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} + 760\alpha_1 r^2 \frac{\partial^2 \Upsilon(r)}{\partial r^2} - 13\alpha_3 r^2 \frac{\partial^2 \Upsilon(r)}{\partial r^2} \\
& - m(r) \left((1600\alpha_1 - 19\alpha_3) r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} + 2(760\alpha_1 - 13\alpha_3) r^2 \left(\frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right)^2 + 10(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 \right. \\
& - \chi_6) r \frac{\partial V(r)}{\partial r} \left(-5 + 2r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right) + 2(-170\alpha_1 + 95\alpha_3 + 10(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 \\
& - \chi_6) r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} + (760\alpha_1 - 13\alpha_3) r^2 \frac{\partial^2 \Upsilon(r)}{\partial r^2} \left. \right) \Big) + 3V(r) \left(r \left(60\alpha_1 + 90\alpha_3 - 240\chi_6 \right. \right. \\
& - 10e^2 r^2 - 60\chi_1 r^2 - 30\chi_2 r^2 + 10e^2 M^2 r^4 + 10(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6) r^2 \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 \\
& + 1180\alpha_1 r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} - 16\alpha_3 r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} + 760\alpha_1 r^2 \left(\frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right)^2 - 13\alpha_3 r^2 \left(\frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right)^2 + 20(4\alpha_1 \\
& + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6) r \frac{\partial V(r)}{\partial r} \left(-2 - \frac{\partial m(r)}{\partial r} + r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial m(r)}{\partial r} (-1180\alpha_1 + 16\alpha_3 \\
& + (-760\alpha_1 r + 13\alpha_3 r) \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \left. \right) + 80\alpha_1 r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} + 40\alpha_3 r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} + 20\chi_5 r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} \\
& - 20\chi_6 r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} + 760\alpha_1 r^2 \frac{\partial^2 \Upsilon(r)}{\partial r^2} - 13\alpha_3 r^2 \frac{\partial^2 \Upsilon(r)}{\partial r^2} \Big) - m(r) \left(20(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 \right. \\
& - \chi_6) r^2 \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 + (1600\alpha_1 - 19\alpha_3) r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} + 2(760\alpha_1 - 13\alpha_3) r^2 \left(\frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right)^2 + 20(4\alpha_1 \\
& + 2\alpha_3 + \chi_5 - \chi_6) r \frac{\partial V(r)}{\partial r} \left(-5 + 2r \frac{\partial \Upsilon(r)}{\partial r} \right) + 2(-170\alpha_1 + 95\alpha_3 + 20(4\alpha_1 + 2\alpha_3 + \chi_5 \\
& - \chi_6) r^2 \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} + (760\alpha_1 - 13\alpha_3) r^2 \frac{\partial^2 \Upsilon(r)}{\partial r^2} \left. \right) \Big) = 0.
\end{aligned}$$

Apéndice B. Tablas de datos

	b_2	m/M_\odot	$\rho_{efec}(0) \times 10^{19} [Kg]/[m]^3$
EYM	0.65172552	0.9713	12.5173
GSU2P con $\chi_1 = 1$	0.78452331	0.6039	18.1417
GSU2P con $\chi_2 = 1$	0.71725488	0.7036	15.2978
GSU2P con $\chi_5 = 1$	0.54489542	0.9109	8.8289
GSU2P con $\chi_6 = 1$	0.38847615	0.5326	4.4875
GSU2P con $\alpha_1 = -0.2$	0.65074327	0.7586	12.4796
GSU2P con $\alpha_3 = -0.2$	0.72562634	0.9951	15.5170

Tabla 1

Datos de b_2 , masa y $\rho_{efec}(0)$ para las soluciones tipo partícula.

	b_2	$\rho_{efec}(0) \times 10^{19} [Kg]/[m]^3$
-4	0.83690474	20.64517765
-3	0.78160231	18.00687035
-2	0.73147969	15.77143148
-1	0.69032842	14.04682188
-0.5	0.67148185	13.29031045
0	0.65172546	12.51975827
0.5	0.62310870	11.44443084
0.75	0.59252888	10.34869565
1	0.54489542	8.75170931
1.25	0.49495605	7.22104154
1.5	0.45031456	5.97721046
1.7	0.41905152	5.17608512
2	0.37876714	4.22874170
2.5	0.32557727	3.12445823
3	0.28500930	2.39433345
3.5	0.25322110	1.89001979
4	0.22771280	1.52841558
4.5	0.20682414	1.26086626
5	0.18942103	1.05760369
5.5	0.17470698	0.89967796
6	0.16210824	0.77459868
6.5	0.15120198	0.67387838
7	0.14167020	0.59159376
7.5	0.13326939	0.52351290
8	0.12581010	0.46654935
8.5	0.11914280	0.41841011
9	0.11314784	0.37736282

Tabla 2

Datos de b_2 y $\rho_{efec}(0)$ para las soluciones tipo partícula asintóticamente planas con dos cero del parámetro χ_5 .

	b_2	$\rho_{efec}(0) \times 10^{19} [Kg]/[m]^3$
9.5	0.10772858	0.34208060
10	0.10280595	0.31153229
10.5	0.09831470	0.28490724
11	0.09420047	0.26156083
11.5	0.09041777	0.24097620
12	0.08692801	0.22273376
13	0.08070101	0.19196609
14	0.07530906	0.16717103
16	0.06643748	0.13010467
18	0.05944116	0.10414565
20	0.05378191	0.08525876
22	0.04910974	0.07108891

Tabla 3

Datos de b_2 y $\rho_{efec}(0)$ para las soluciones tipo partícula asintóticamente planas con dos cero del parámetro χ_5 (Continuación).

χ_1	b_2	m/M_\odot	$\bar{r} [Km]$	$\rho_{efec}(0) \times 10^{19} [Kg]/[m]^3$
-0.05	0.65980403	1.05568034	1.13471992	12.83206340
0	0.64632818	0.97147439	1.15979665	12.31325157
0.1	0.65239864	0.87596563	1.14793874	12.54563544
0.15	0.65904948	0.84275923	1.13671376	12.80273076
0.2	0.66637593	0.81484648	1.12446920	13.08896096
0.5	0.71191171	0.70390369	1.04940432	14.93890764
0.75	0.74712641	0.64659491	0.99831233	16.45336553
1	0.77949082	0.60418352	0.95537246	17.90971104
1.5	0.83747346	0.54337246	0.88739895	20.67324611
2	0.88880359	0.50037956	0.83510335	23.28510332
2.5	0.93530207	0.46755096	0.79193571	25.78519144
3	0.97810576	0.44125937	0.75641385	28.19929183

Tabla 4

Datos de b_2 , masa, radio físico y densidad central efectiva para el parámetro libre χ_1 .

χ_2	b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{efec}(0) \times 10^{19}[\text{Kg}]/[\text{m}]^3$
-0.1	0.65980403	1.05568034	1.13471992	12.83206340
0	0.64632818	0.97147439	1.15979665	12.31325157
0.25	0.65618082	0.85857586	1.14223437	12.69151984
0.5	0.67398395	0.79075988	1.11097265	13.38954065
1	0.71191171	0.70390369	1.04940432	14.93890764
1.5	0.74712641	0.64659491	0.99831233	16.45336553
2	0.78002298	0.60418352	0.95537246	17.93417338
3	0.83747346	0.54337246	0.88739895	20.67324611
4	0.88880359	0.50037956	0.83510335	23.28510332

Tabla 5

Datos de b_2 , masa, radio físico y densidad central efectiva para el parámetro libre χ_2 .

χ_5	b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{efec}(0) \times 10^{19} [Kg]/[m]^3$
-5	0.87942136	0.99936547	0.80074647	22.79610186
-4	0.83380611	0.99890682	0.85123724	20.49258361
-3	0.77815415	0.99712462	0.92061371	17.84834060
-2	0.72752188	0.99314657	0.99627969	15.60122454
-1	0.68573947	0.98601331	1.07270388	13.86069043
-0.5	0.66652394	0.98030990	1.11360809	13.09477603
0	0.64632818	0.97147439	1.15979665	12.31325157
0.5	0.61712621	0.95450069	1.23050911	11.22572897
0.75	0.58625147	0.93788157	1.30761604	10.13058345
1	0.53827984	0.91239278	1.44174434	8.54049020
1.25	0.48777034	0.88167884	1.61565490	7.01289516
1.5	0.44239505	0.85040587	1.81276752	5.76882131
1.7	0.41046941	0.82703927	1.98291456	4.96624526
2	0.36910730	0.79602223	2.26298155	4.01579781
2.5	0.31401596	0.75737475	2.81326936	2.90649790
3	0.27165015	0.73725300	3.57645135	2.17513626
3.5	0.23840354	0.73849177	4.43626115	1.67529761
4	0.21175265	0.75716720	5.15610734	1.32167379
4.5	0.18998858	0.78578096	5.72197943	1.06395084
5	0.17193375	0.81796348	6.14728134	0.87134239
5.5	0.15674992	0.84982623	6.47054508	0.72423786
6	0.14382604	0.87952367	6.71117193	0.60973569
6.5	0.13270877	0.90640634	6.89978412	0.51911768
7	0.12305612	0.93042158	7.04450599	0.44634739
7.5	0.11460619	0.95176900	7.16411205	0.38715308

Tabla 6

Datos de b_2 , masa, radio físico y densidad central efectiva para el parámetro libre χ_5 .

χ_5	b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{efec}(0) \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$
8	0.10715531	0.97073595	7.26419336	33.84495673
8.5	0.10054301	0.98762086	7.34323060	29.79684862
9	0.09464117	1.00270347	7.40812425	26.40138865
9.5	0.08934628	1.01622917	7.46636774	23.52986954
10	0.08457381	1.02841012	7.51759378	21.08328894
10.5	0.08025401	1.03942623	7.56148623	18.98453887
11	0.07632890	1.04943252	7.59777442	17.17293699
11.5	0.07274975	1.05855666	7.62622792	15.60017893
12	0.06947539	1.06691094	7.65519526	14.22749874
13	0.06370586	1.08166409	7.70591904	11.96259321
14	0.05879517	1.09427846	7.74948722	10.18942953
16	0.05091587	1.11468235	7.82257245	7.64139953
18	0.04490217	1.13030419	7.88147593	5.94293840
20	0.04017565	1.14236615	7.93413748	4.75764894
22	0.03636659	1.15171591	7.97991449	3.89826833
24	0.03323221	1.15898705	8.02740808	3.25525501
26	0.03060765	1.16465464	8.06715196	2.76138233
28	0.02837744	1.16907471	8.09879374	2.37362986
30	0.02645844	1.17251712	8.12206117	2.06345517
40	0.01983059	1.18078925	8.23729354	1.15914520
50	0.01590376	1.18181197	8.29470332	0.74553184
60	0.01329589	1.18012198	8.33675618	0.52107639
70	0.01143312	1.17739061	8.36179216	0.38529741
90	0.00894252	1.17117020	8.39571986	0.23571456
100	0.00806724	1.16811792	8.40397997	0.19183000
110	0.00734918	1.16520709	8.41252579	0.15920047
120	0.00674920	1.16245905	8.42127551	0.13426758
130	0.00624027	1.15987730	8.42070812	0.11478188
140	0.00580301	1.15745643	8.42971555	0.09925976

Tabla 7

Datos de b_2 , masa, radio físico y densidad central efectiva para el parámetro libre χ_5 (Continuación).

χ_6	b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{efec}(0) \times 10^{19} [Kg]/[m]^3$
-0.01	0.64924778	0.99184924	1.15154896	12.42474590
0	0.64632818	0.97147439	1.15979665	12.31325157
0.25	0.54770559	0.74563811	1.43889625	8.84221185
0.5	0.47050787	0.64937831	1.76757266	6.52529805
1	0.36372993	0.55491649	2.56928806	3.89964117
1.5	0.28448145	0.53218759	3.67182136	2.38547283
2	0.22172054	0.57593719	4.94462752	1.44903349
2.5	0.17520732	0.66110808	5.94181270	0.90483848
3	0.14123573	0.74958062	6.55929280	0.58797076
3.5	0.11604516	0.82546475	6.94575439	0.39693613
4	0.09731343	0.88618143	7.20108054	0.27913361
4.5	0.08342804	0.93313444	7.38391723	0.20515904
5	0.07308999	0.96889218	7.51993012	0.15746440
5.5	0.06527408	0.99612310	7.62322137	0.12558798
6	0.05923393	1.01706623	7.70982065	0.10342075
6.5	0.05445533	1.03340554	7.77076611	0.08740723
7	0.05059071	1.04634718	7.83182397	0.07544112
7.5	0.04740401	1.05674447	7.87550542	0.06623640
8	0.04473229	1.06520345	7.91043223	0.05898055
9	0.04050678	1.07793100	7.98060538	0.04836398
10	0.03732456	1.08680101	8.02429852	0.04106350
13	0.03144450	1.10044857	8.12072751	0.02914446
14	0.03041045	1.10192816	8.13804490	0.02725915
14.5	0.03016991	1.10178809	8.14673128	0.02682962
14.8	0.03033675	1.10070808	8.17849714	0.02712718

Tabla 8

Datos de b_2 , masa, radio físico y densidad central efectiva para el parámetro libre χ_6 .

α_1	b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{efec}(0) \times 10^{19} [Kg]/[m]^3$
0.012	0.64708829	1.00673495	1.14974395	12.34223043
0.01	0.64671400	0.99978797	1.15727644	12.32795653
0.004	0.64645241	0.98186273	1.15687132	12.31798545
0.002	0.64639495	0.97654401	1.15833799	12.31579578
0	0.64632818	0.97147439	1.15979665	12.31325157
-0.002	0.64624949	0.96662196	1.16442195	12.31025349
-0.007	0.64600075	0.95530501	1.16404931	12.30077893
-0.02	0.64512811	0.92995073	1.17087306	12.26756875
-0.05	0.64312732	0.88501134	1.19229885	12.19159386
-0.1	0.64168021	0.83155925	1.22153400	12.13679063
-0.2	0.64250397	0.75983388	1.28314599	12.16797196
-0.3	0.64248209	0.70989529	1.35251509	12.16714323
-0.4	0.63878629	0.67141467	1.43656950	12.02756582
-0.5	0.63077010	0.64020148	1.53647226	11.72758978
-0.65	0.61123939	0.60259826	1.71059789	11.01258406
-0.7	0.60301363	0.59194240	1.77688457	10.71817458
-0.85	0.57426441	0.56443846	1.97853820	9.72053957
-1	0.54071625	0.54269437	2.21725132	8.61797862
-1.1	0.51625437	0.53113407	2.39515647	7.85586571
-1.25	0.47678595	0.51835717	2.70162435	6.70059652
-1.4	0.43399482	0.51205350	3.06970250	5.55182363
-1.5	0.40358981	0.51256117	3.36394191	4.80116857
-1.65	0.35570433	0.52314316	3.87495648	3.72945072
-1.8	0.30756300	0.54899265	4.46014470	2.78826949
-1.9	0.27760693	0.57501650	4.86540064	2.27157550
-2	0.25078714	0.60623765	5.23977221	1.85386069
-2.15	0.21725984	0.65734077	5.73887702	1.39131504
-2.3	0.19096864	0.70752636	6.12983136	1.07495598
-2.5	0.16442292	0.76721014	6.51591541	0.79687698

Tabla 9

Datos de b_2 , masa, radio físico y densidad central efectiva para el parámetro libre α_1 .

α_1	b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{efec}(0) \times 10^{19}[\text{Kg}]/[m]^3$
-2.8	0.13670888	0.83835165	6.90725777	0.55088382
-3	0.12344894	0.87510577	7.08716628	0.44920161
-3.3	0.10850454	0.91817158	7.28260456	0.34702630
-3.5	0.10083271	0.94078110	7.38661419	0.29968807
-4	0.08674043	0.98274077	7.56421218	0.22177353
-4.5	0.07719093	1.01106069	7.68952140	0.17563017
-5	0.07035323	1.03097525	7.77931567	0.14589307
-5.5	0.06530368	1.04531407	7.85080665	0.12570191
-6	0.06157311	1.05561595	7.90413366	0.11175031
-6.5	0.05904013	1.06245549	7.93904489	0.10274511
-6.6	0.05871209	1.06334447	7.94760182	0.10160654
-6.7	0.05847696	1.06399866	7.95605389	0.10079434
-6.8	0.05838434	1.06430193	7.95553682	0.10047530
-6.9	0.05860283	1.06385814	7.96337567	0.10122872
-6.95	0.05922522	1.06242035	7.96214595	0.10339033

Tabla 10

Datos de b_2 , masa, radio físico y densidad central efectiva para el parámetro libre α_1 (Continuación).

α_3	b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{efec}(0) \times 10^{19}[\text{Kg}]/[m]^3$
-0.1	0.65977381	0.96951632	1.14020407	12.83088798
0	0.64632818	0.97147439	1.15979665	12.31325157
0.01	0.64492459	0.97165988	1.16203410	12.25982982
0.05	0.63919408	0.97238330	1.17091223	12.04292709
0.1	0.63175214	0.97323164	1.18182919	11.76413535
0.2	0.61579517	0.97468865	1.20780127	11.17735708
0.4	0.57785942	0.97607298	1.27917019	9.84262556
0.6	0.52526829	0.97333581	1.40271327	8.13259109
0.7	0.48870424	0.96864716	1.50625762	7.03977507
0.75	0.46713074	0.96468660	1.57565218	6.43196191

Tabla 11

Datos de b_2 , masa, radio físico y densidad central efectiva para el parámetro libre α_3 .

m/M_{\odot}	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17}$ [Kg]/[m] ³
1.09962571	7.53697834	108.07817424
1.10263375	7.59544498	103.16552996
1.10518941	7.65141216	98.25288568
1.10717708	7.71349362	93.34024139
1.10845473	7.78154600	88.42759711
1.10884708	7.84637092	83.51495282
1.10813685	7.91665383	78.60230854
1.10605327	8.00128310	73.68966426
1.10225696	8.08171114	68.77701997
1.09631982	8.16664876	63.86437569
1.08769797	8.26499898	58.95173141
1.07569507	8.36701245	54.03908712
1.05941172	8.48154736	49.12644284
1.03767514	8.59848388	44.21379855
1.00893972	8.72655209	39.30115427
0.97114436	8.86487421	34.38850999
0.94801478	8.93510504	31.93218784
0.92150425	9.01234877	29.47586570
0.89110098	9.09648323	27.01954356
0.85620118	9.17747985	24.56322142
0.81608930	9.26497657	22.10689928
0.76991343	9.35877861	19.65057714
0.71665415	9.45866181	17.19425499
0.65508516	9.55431849	14.73793285
0.59886019	9.63759985	12.77287514
0.55204388	9.71064056	11.29908185
0.50076137	9.77173932	9.82528857
0.42457047	9.86704254	7.86023085
0.36082122	9.94374870	6.38643757
0.29067498	10.01827892	4.91264428

Tabla 12

Datos del caso de Einstein-Polítropa con $n = 1$ y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$ de masa, radio y densidad central de materia.

b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$
0.03782411	1.23942763	7.51509272	83.51495282
0.03790267	1.23682496	7.54038948	81.05863068
0.03799214	1.23377255	7.56471536	78.60230854
0.03809324	1.23022113	7.59691886	76.14598640
0.03847566	1.21599923	7.68707076	68.77701997
0.03880697	1.20284849	7.75017320	63.86437569
0.03921111	1.18593958	7.80794747	58.95173141
0.03970049	1.16435798	7.87784008	54.03908712
0.04028984	1.13693839	7.94125777	49.12644284
0.04099656	1.10218994	8.00652151	44.21379855
0.04184068	1.05820434	8.07286542	39.30115427
0.04284411	1.00252862	8.12151191	34.38850999
0.04341244	0.96935676	8.14235093	31.93218784
0.04402868	0.93202147	8.16075448	29.47586570
0.04541373	0.84273868	8.14610093	24.56322142
0.04618630	0.78964449	8.11368903	22.10689928
0.04667636	0.75476408	8.07619604	20.63310599

Tabla 13

Datos del caso GSU2P con $\chi_5 = 20$ y polítropa con $n = 1$ y $k = 0.0045\text{m}^5/(\text{kg s}^2)$ de masa, radio y densidad central de materia.

b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$
0.04701433	0.73019349	8.04532351	19.65057714
0.04789945	0.66407745	7.90941328	17.19425499
0.04845861	0.62128770	7.78966562	15.72046171
0.04903942	0.57645555	7.61629134	14.24666842
0.04943898	0.54570365	7.46961772	13.26413957
0.04984853	0.51458249	7.28087060	12.28161071
0.05026810	0.48351059	7.05376143	11.29908185
0.05091477	0.43827529	6.61450815	9.82528857
0.05113376	0.42391577	6.44158557	9.33402414
0.05157267	0.39683464	6.06648434	8.35149528
0.05200477	0.37250379	5.65653254	7.36896643
0.05221428	0.36154704	5.44324110	6.87770200
0.05261083	0.34229576	4.99066280	5.89517314
0.05296460	0.32675712	4.50831745	4.91264428

Tabla 14

Datos del caso GSU2P con $\chi_5 = 20$ y polítropa con $n = 1$ y $k = 0.0045 \text{m}^5 / (\text{kg s}^2)$ de masa, radio y densidad central de materia (Continuación).

b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$
0.01272172	1.23047244	7.48912698	108.07817424
0.01271346	1.23287895	7.53854115	103.16552996
0.01271167	1.23478257	7.59417425	98.25288568
0.01273096	1.23655907	7.71464196	88.42759711
0.01275397	1.23609278	7.77903497	83.51495282
0.01278758	1.23442868	7.84886507	78.60230854
0.01283332	1.23127673	7.92386900	73.68966426
0.01289299	1.22627316	7.99455005	68.77701997
0.01296883	1.21895794	8.07883365	63.86437569
0.01306356	1.20874562	8.16715160	58.95173141
0.01318049	1.19488472	8.25897152	54.03908712
0.01332386	1.17640158	8.35366278	49.12644284
0.01349889	1.15202283	8.45995571	44.21379855
0.01371222	1.12006462	8.55807514	39.30115427
0.01383597	1.10056721	8.61325691	36.84483213
0.01397271	1.07827457	8.67556057	34.38850999
0.01412405	1.05277888	8.72568828	31.93218784
0.01429176	1.02360288	8.78262005	29.47586570
0.01447795	0.99018633	8.83658883	27.01954356
0.01468503	0.95187015	8.89702168	24.56322142
0.01482043	0.92621116	8.92445853	23.08942813
0.01486755	0.91717211	8.93092044	22.59816371
0.01496511	0.89832024	8.95545167	21.61563485

Tabla 15

Datos para el caso GSU2P con $\chi_5 = 60$ y polítropa con $n = 1$, y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$ para la masa, el radio y la densidad central de materia.

b_2	m/M_{\odot}	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$
0.01506707	0.87838333	8.96977904	20.63310599
0.01517376	0.85729387	8.98832695	19.65057714
0.01534326	0.82333982	9.00900786	18.17678385
0.01546296	0.79904400	9.02122869	17.19425499
0.01555653	0.77989208	9.03058384	16.45735835
0.01565352	0.75990218	9.03479911	15.72046171
0.01578841	0.73187942	9.04306107	14.73793285
0.01589399	0.70978406	9.04169465	14.00103621
0.01600347	0.68671963	9.03999651	13.26413957
0.01615613	0.65438922	9.03248269	12.28161071
0.01631665	0.62016828	9.01734851	11.29908185
0.01644263	0.59320775	8.99805941	10.56218521
0.01657362	0.56509995	8.97390209	9.82528857
0.01666391	0.54571044	8.95074536	9.33402414
0.01680384	0.51563769	8.90561797	8.59712750
0.01694965	0.48437666	8.85377420	7.86023085
0.01705019	0.46288520	8.80573627	7.36896643
0.01715349	0.44089008	8.74899424	6.87770200
0.01731380	0.40701405	8.63809091	6.14080535
0.01748063	0.37222293	8.49412135	5.40390871
0.01759536	0.34865171	8.37126105	4.91264428

Tabla 16

Datos para el caso GSU2P con $\chi_5 = 60$ y polítropa con $n = 1$, y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$ para la masa, el radio y la densidad central de materia (Continuación).

b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$
0.00770763	1.21046211	7.51602434	108.07817424
0.00770436	1.21320288	7.57438257	103.16552996
0.00770499	1.21547281	7.63023841	98.25288568
0.00770998	1.21715372	7.69220426	93.34024139
0.00771997	1.21810011	7.75117810	88.42759711
0.00773547	1.21813267	7.81582092	83.51495282
0.00775727	1.21702880	7.88591438	78.60230854
0.00778624	1.21451097	7.97033615	73.68966426
0.00782342	1.21023111	8.05055699	68.77701997
0.00787009	1.20374952	8.13527862	63.86437569
0.00792774	1.19450708	8.22405268	58.95173141
0.00799825	1.18178653	8.31634528	54.03908712
0.00806727	1.16811792	8.40397997	50.01071881
0.00818767	1.14191480	8.53741149	44.21379855
0.00831318	1.11194881	8.65532261	39.30115427
0.00846525	1.07261951	8.78330248	34.38850999
0.00855319	1.04857396	8.84346406	31.93218784
0.00865029	1.02102308	8.91052942	29.47586570
0.00887679	0.95316582	9.04526284	24.56322142
0.00895450	0.92885665	9.08994304	23.08942813

Tabla 17

Datos para el caso GSU2P con $\chi_5 = 100$ y polítropa con $n = 1$, y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$ para la masa, el radio y la densidad central de materia.

b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$
0.00903742	0.90241163	9.13334779	21.61563485
0.00909578	0.88349405	9.16481489	20.63310599
0.00915678	0.86346902	9.18586230	19.65057714
0.00925359	0.83119654	9.22605267	18.17678385
0.00932192	0.80807711	9.25530162	17.19425499
0.00939353	0.78357410	9.28387663	16.21172614
0.00950754	0.74402244	9.32051936	14.73793285
0.00963017	0.70080827	9.34572329	13.26413957
0.00971722	0.66977911	9.36160703	12.28161071
0.00980892	0.63683403	9.37673941	11.29908185
0.00995576	0.58354232	9.38824576	9.82528857

Tabla 18

Datos para el caso GSU2P con $\chi_5 = 100$ y polítropa con $n = 1$, y $k = 0.0045 \text{m}^5 / (\text{kg s}^2)$ para la masa, el radio y la densidad central de materia (Continuación).

b_2	m/M_{\odot}	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$
0.04121278	1.14983846	7.70917429	70.74207769
0.03888140	1.13978879	7.80810198	63.86437569
0.03890565	1.12408660	7.87412556	58.95173141
0.03953313	1.10197323	7.93421967	54.03908712
0.04078216	1.07180687	7.98749731	49.12644284
0.04278490	1.03108819	8.02399284	44.21379855
0.04413555	1.00572364	8.03450096	41.75747641
0.04576519	0.97632861	8.04262902	39.30115427
0.04771349	0.94230438	8.03939323	36.84483213
0.04905241	0.91940227	8.02568730	35.37103884
0.05002108	0.90301102	8.01606874	34.38850999
0.05159391	0.87663729	8.00090547	32.91471670
0.05272545	0.85780663	7.98166251	31.93218784
0.05392535	0.83793525	7.96210104	30.94965899
0.05519515	0.81699078	7.94222378	29.96713013
0.05723362	0.78350298	7.89913054	28.49333685
0.05868313	0.75976778	7.86176144	27.51080799
0.06020604	0.73489171	7.81601459	26.52827913
0.06347479	0.68173321	7.70853745	24.56322142
0.06522239	0.65349674	7.63913110	23.58069256
0.06798881	0.60921793	7.51661303	22.10689928
0.07093406	0.56292870	7.35037109	20.63310599
0.07299978	0.53121269	7.21710975	19.65057714
0.07406380	0.51518146	7.14422012	19.15931271
0.07625409	0.48295979	6.97952917	18.17678385
0.07852534	0.45084170	6.78447744	17.19425499

Tabla 19

Datos para el caso GSU2P con $\chi_6 = 9$ y pol trope con $n = 1$, y $k = 0.0045m^5/(kg s^2)$ para la masa, el radio y la densidad central de materia.

m/M_{\odot}	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$
1.87801673	13.34609456	108.07817424
1.89036590	13.37809391	103.16552996
1.90375303	13.42078085	98.25288568
1.91829150	13.45895586	93.34024139
1.93410918	13.50671364	88.42759711
1.95135018	13.56340682	83.51495282
1.97017644	13.64342015	78.60230854
1.99076879	13.71542736	73.68966426
2.01332708	13.80865704	68.77701997
2.03806790	13.90613240	63.86437569
2.06521776	14.03740680	58.95173141
2.09499733	14.16834702	54.03908712
2.12758790	14.34415827	49.12644284
2.16306250	14.54494494	44.21379855
2.20124454	14.78190703	39.30115427
2.24141255	15.06471431	34.38850999
2.26172269	15.24882243	31.93218784
2.28166149	15.43601055	29.47586570
2.30057202	15.64178667	27.01954356
2.31744890	15.86351227	24.56322142

Tabla 20

Datos para el caso de Einstein-Polítropa con $n = 1$, y $k = 0.02m^5/(kgs^2)$ para la masa, el radio y la densidad central.

m/M_{\odot}	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [Kg]/[m]^3$
2.33074373	16.13493874	22.10689928
2.33804373	16.43404706	19.65057714
2.33552434	16.77459798	17.19425499
2.31698388	17.16937828	14.73793285
2.28387280	17.53032419	12.77287514
2.24308404	17.81956917	11.29908185
2.18285546	18.16273442	9.82528857
2.05855581	18.66664202	7.86023085
1.91656566	19.07244047	6.38643757
1.82354026	19.31046314	5.64954093
1.71157158	19.55688841	4.91264428
1.62435352	19.73457910	4.42137986
1.52533146	19.90574113	3.93011543
1.41270756	20.11214309	3.43885100
1.28435349	20.28990019	2.94758657

Tabla 21

Datos para el caso de Einstein-Polítropa con $n = 1$, y $k = 0.02m^5/(kgs^2)$ para la masa, el radio y la densidad central (Continuación).

b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$
0.01090876	1.97015585	13.28645233	108.07817424
0.01068430	1.98217300	13.31806458	103.16552996
0.01046049	1.99519342	13.36034008	98.25288568
0.01023744	2.00932548	13.39804800	93.34024139
0.01001535	2.02469093	13.44530080	88.42759711
0.00979452	2.04142658	13.50144275	83.51495282
0.00957524	2.05968527	13.58087419	78.60230854
0.00935799	2.07963663	13.65220556	73.68966426
0.00914322	2.10146628	13.74470216	68.77701997
0.00893172	2.12537249	13.84134462	63.86437569
0.00872447	2.15155775	13.97171459	58.95173141
0.00852280	2.18021037	14.10160454	54.03908712
0.00836295	2.20564539	14.24287503	49.12644284
0.00814473	2.24533471	14.45892959	44.21379855
0.00797507	2.28154076	14.69401792	39.30115427
0.00782601	2.31920868	14.97465027	34.38850999
0.00776220	2.33799702	15.13984767	31.93218784
0.00770768	2.35617185	15.32547555	29.47586570
0.00766498	2.37300889	15.52954433	27.01954356
0.00763717	2.38740795	15.74939853	24.56322142
0.00762863	2.39768332	16.01869709	22.10689928
0.00764538	2.40121790	16.29653095	19.65057714
0.00769591	2.39387381	16.61487178	17.19425499
0.00779269	2.36895365	16.98628827	14.73793285
0.00791577	2.32909347	17.32358878	12.77287514

Tabla 22

Datos para el caso GSU2P con $\chi_5 = 100$ y polítropa con $n = 1$, y $k = 0.02m^5/(\text{kgs}^2)$ de masa, radio y densidad central.

b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$
0.00804364	2.28188354	17.60926440	11.29908185
0.00821097	2.21365512	17.90809351	9.82528857
0.00851456	2.07533316	18.36408287	7.86023085
0.00882005	1.91938893	18.74256136	6.38643757
0.00900275	1.81793217	18.93534884	5.64954093
0.00920759	1.69633110	19.13591603	4.91264428
0.00935709	1.60191632	19.26883355	4.42137986
0.00951743	1.49499209	19.39519964	3.93011543
0.00968908	1.37368572	19.51459906	3.43885100
0.00987252	1.23580815	19.62661770	2.94758657

Tabla 23

Datos para el caso GSU2P con $\chi_5 = 100$ y polítropa con $n = 1$, y $k = 0.02m^5/(kgs^2)$ de masa, radio y densidad central (Continuación).

m/M_{\odot}	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$
0.10227732	7.70908975	2
0.14213789	8.23399427	2.3
0.20574925	8.86966482	2.7
0.26086366	9.30250136	3
0.32179869	9.70091020	3.3
0.41108904	10.19517807	3.7
0.48323870	10.53248801	4
0.55905157	10.83960884	4.3
0.66458995	11.22176360	4.7
0.74615910	11.48493429	5
0.88468104	11.89410401	5.5
1.02389967	12.24717571	6
1.16126346	12.54955468	6.5
1.29466632	12.82313454	7
1.42246013	13.06411335	7.5
1.54343438	13.26869310	8
1.65677374	13.44873271	8.5
1.76200379	13.61774490	9
1.85893213	13.74182222	9.5
1.94759070	13.86754055	10
2.02818259	13.96076122	10.5
2.10103542	14.05388078	11
2.22522834	14.16768625	12

Tabla 24

Datos del caso de Einstein-Polítropa con $n = 1/2$ para masa, radio y densidad central.

m/M_{\odot}	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17}$ [Kg]/[m] ³
2.32396335	14.25581196	13
2.40120832	14.31551516	14
2.46069730	14.34457141	15
2.50573945	14.36059726	16
2.55226373	14.34975660	17.5
2.56331013	14.33281519	18
2.59114731	14.29163336	20
2.59765100	14.26250169	21
2.58564963	14.05081989	27
2.56637546	13.96525697	30
2.50125195	13.77489880	40
2.45470014	13.66702937	50

Tabla 25

Datos del caso de Einstein-Polítropa con $n = 1/2$ para masa, radio y densidad central (Continuación).

b_2	m/M_\odot	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [\text{Kg}]/[\text{m}]^3$
0.01102186	0.19801797	6.52917375	2
0.01093284	0.22873337	7.14928020	2.3
0.01079375	0.28084545	7.90291422	2.7
0.01067737	0.32815702	8.42169900	3
0.01055336	0.38214855	8.89688047	3.3
0.01038010	0.46361834	9.47189105	3.7
0.01024669	0.53098303	9.87383814	4
0.01011205	0.60289543	10.23312654	4.3
0.00993272	0.70449893	10.69060986	4.7
0.00979974	0.78396675	10.99663598	5
0.00958312	0.92036058	11.45724110	5.5
0.00937505	1.05884586	11.85721281	6
0.00917737	1.19652807	12.21298237	6.5
0.00899143	1.33100731	12.51753313	7
0.00881811	1.46039363	12.79285801	7.5
0.00865806	1.58328498	13.03505390	8
0.00851154	1.69871788	13.24023708	8.5
0.00837876	1.80611068	13.40464259	9
0.00825965	1.90519160	13.57296228	9.5
0.00815394	1.99594225	13.69566310	10
0.00806136	2.07852691	13.80298862	10.5
0.00798145	2.15325792	13.91084667	11
0.00785768	2.28082741	14.05652549	12

Tabla 26

Datos del caso GSU2P con $\chi_5 = 100$ y polítropa con $n = 1/2$ para masa, radio y densidad central.

b_2	m/M_{\odot}	\bar{r} [Km]	$\rho_{mat}(0) \times 10^{17} [\text{Kg}]/[m]^3$
0.00777847	2.38244144	14.16068073	13
0.00773920	2.46211487	14.21902063	14
0.00773569	2.52365099	14.24699726	15
0.00776394	2.57042443	14.28135707	16
0.00785847	2.61907610	14.27001187	17.5
0.00790232	2.63073137	14.27264533	18
0.00813084	2.66061459	14.23168768	20
0.00879209	2.67138322	14.11037006	24
0.00942278	2.65942503	14.01368183	27
0.01014189	2.64126663	13.92945498	30
0.01301131	2.57840939	13.72302259	40
0.01642415	2.53296912	13.61824361	50

Tabla 27

Datos del caso GSU2P con $\chi_5 = 100$ y polítropa con $n = 1/2$ para masa, radio y densidad central (Continuación).