

UNA INTRODUCCIÓN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

Jorge Leonardo López Agredo

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Matemáticas
Bucaramanga
2015

UNA INTRODUCCIÓN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

Autor

Jorge Leonardo López Agredo

Trabajo de grado como requisito parcial para optar el título de

Matemático

Director

Élder Jesús Villamizar Roa, Ph.D.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Matemáticas

Bucaramanga

2015

Agradecimientos

- ◊ Agradezco a Dios por estar cuidándome y protegiéndome en todo momento, a Cristo por ser mi salvador y guía espiritual.
- ◊ Agradezco al profesor Élder por toda su colaboración e interés en mi proyecto, por todas sus recomendaciones, por su dedicación y empeño, y sobretodo, por sus buenos y sabios consejos.
- ◊ Agradezco todo el apoyo que me brindó mi familia y amigos. En particular, a mi padrino que siempre estuvo ahí para apoyarme y animarme a terminar mi carrera y escribir mi proyecto.
- ◊ A todos quienes hicieron posible este gran logro que representa par mi, en especial Beatriz, Isnardo, Alfredo, Alberto y Norman.
- ◊ Un agradecimiento sincero y especial a la persona que más he amado, mi abuela Teresa Agredo. Descanse en paz, esto es por ti.

Índice general

Introducción	11
1. Historia y origen del modelo	13
1.1. Algo de historia	13
1.1.1. Radiación de cuerpo negro: La constante de Planck	14
1.1.2. Einstein y la explicación del efecto fotoeléctrico: La luz está cuantizada	17
1.1.3. Schrödinger: Un genio que trae en su lámpara la Física ondulatoria	18
1.2. Origen del modelo físico	21
1.3. Interpretación probabilística de la función de onda	24
1.4. Otras motivaciones físicas de la Ecuación de Schrödinger no lineal.	25
2. Fundamentos de Análisis Armónico	29
2.1. Espacios L^p	29
2.1.1. Medida de Lebesgue	29
2.1.2. Funciones medibles	30
2.1.3. Teoría básica de los espacios L^p	31
2.2. Espacios de Sobolev	32
2.3. Transformada de Fourier	34
2.3.1. La transformada de Fourier en L^2	36
2.4. El espacio de Schwartz $\mathcal{S}$	36
2.5. Semigrupos de operadores	38

2.6. Soluciones blandas	41
2.7. Teorema de Hille-Yosida	42
2.8. Grupos	43
3. Ecuación de Schrödinger lineal	45
3.1. Solución de la ecuación de Schrödinger lineal	45
3.2. Grupo de Schrödinger	50
4. La ecuación de Schrödinger no lineal	55
4.1. Teoría local en L^2	56
Conclusiones	67
Bibliografía	68

Índice de figuras

1.1. Max Planck (1858-1947)	15
1.2. Albert Einstein (1879-1955)	18
1.3. Erwin Schrödinger (1887-1961)	19
3.1. Camino cerrado para apoyar la solución de la integral.	47

TITULO: UNA INTRODUCCIÓN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER¹
AUTOR: JORGE LEONARDO LÓPEZ AGREDO²

PALABRAS CLAVE: Origen físico de la ecuación de Schrödinger lineal; Espacios de Sobolev; Transformada de Fourier; Teoría de Grupos y Semigrupos; Problemas de valor inicial asociado a la ecuación de Schrödinger.

DESCRIPCIÓN

La ecuación de Schrödinger, tanto lineal como no lineal, es uno de los modelos de Ecuaciones Diferenciales Parciales de mayor relevancia en la Física Matemática, no solo por el análisis matemático que involucra su estudio y el número de problemas abiertos que aún persisten, sino que también, por la cantidad de aplicaciones que posee.

El presente trabajo tiene como objetivo presentar algunas nociones históricas de la Mecánica Cuántica, que dieron origen a la ecuación de Schrödinger lineal, comentando las ideas que llevaron a plantear la cuantización de la energía y la luz descritas por Planck y Einstein respectivamente, siendo estas, de gran importancia en el desarrollo de la ecuación de Schrödinger (lineal). Así mismo, se presenta algunas ideas físicas (desde el punto de vista de la *óptica no lineal*) que justifican el modelo de Schrödinger no lineal.

Desde el punto de vista matemático, en primer lugar se analiza la existencia de solución al problema lineal, de la ecuación de Schrödinger vía Análisis de Fourier.

Finalmente, se prueba un resultado de existencia y unicidad de la solución en $L^2(\mathbb{R}^n)$, para el caso subcrítico, al problema no lineal, con no linealidad de la forma $|u|^{\alpha-1}u$, $\alpha > 1$, basadas en el Principio de las contracciones de Banach.

¹Proyecto de grado

²FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE MATEMÁTICAS.
 DIRECTOR Ph. D. Élder Jesús Villamizar Roa

TITLE: AN INTRODUCTION TO THE SCHRÖDINGER EQUATION¹

AUTHOR: JORGE LEONARDO LÓPEZ AGREDO²

KEY WORDS: Physical origin of the linear Schrödinger equation; Sobolev Spaces; Fourier transform; Groups and Semigroups Theory; Initial value problems associated to the Schrödinger equation.

DESCRIPTION

Schrödinger equation, both linear and nonlinear, is one of the most important models of Partial Differential Equations in mathematical physics, not only for the mathematical analysis involved in its study, and the number of open problems that still persist, but also, by the number of its applications.

This work presents some historical notions of Quantum Mechanics, which gave the origin of the linear Schrödinger equation. We present some ideas related to the quantization of the energy and the light, described by Planck and Einstein respectively, which were, of great importance in the developing of the Schrödinger equation (linear). Also, we present some physical ideas (in the framework of the *nonlinear optics*) which justify the nonlinear Schrödinger model.

From a mathematical point of view, first we analyze the existence of solution to the linear Schrödinger equation via Fourier analysis.

Finally, we present a result of local well-posedness for the nonlinear Schrödinger with initial data in $L^2(\mathbb{R}^n)$, and considering a nonlinear term of kind $|u|^{\alpha-1}u$, $\alpha > 1$ subcritical, by using Banach Fixed Point Theorem.

¹Degree Project

²SCIENCE FACULTY, MATHEMATICS SCHOOL .
ADVISOR: Ph. D. Élder Jesús Villamizar Roa

Introducción

La ecuación de Schrödinger, tanto lineal como no lineal, es uno de los modelos de Ecuaciones Diferenciales Parciales de mayor relevancia en la Física Matemática, no solo por el análisis matemático que involucra su estudio y el número de problemas abiertos que aún persisten, sino por la cantidad de aplicaciones que posee. Sin embargo, nos atrevemos a decir que cuando se acude a la literatura, se observa que, en su gran mayoría, el contenido relativo a la ecuación de Schrödinger, o bien tiene un enfoque más físico-aplicado de la ecuación y menos matemático, o bien, un contenido cargado de un análisis matemático abstracto que parece bien alejado de interpretaciones físicas.

Este tipo de visiones de contenido fueron la motivación inicial que nos llevó a plantear el presente trabajo de disertación. Se propone llevar a cabo un estudio de la ecuación de Schrödinger, que aunque introductorio, permite crear un puente entre las principales ideas que desde la Física Cuántica llevaron al planteamiento del modelo de la ecuación de Schrödinger lineal, y que llegan hasta lo que sería un primer análisis matemático formal del mismo, de manera tal que un lector, bien sea de formación física o matemática, y que esté en sus inicios en el estudio de la ecuación de Schrödinger, puede tener una primera radiografía de lo que es el modelo, los aspectos más relevantes detrás de su origen, el espectro de sus aplicaciones, y el tipo de herramientas matemáticas necesarias para el análisis de existencia de solución.

Por supuesto, esta disertación no pretende ser completa tanto en la descripción de los orígenes físicos que llevaron al modelo de la ecuación de Schrödinger, ni tampoco en el estudio matemático; en efecto, esto sería una tarea muy difícil de plasmar en un trabajo como este, no solo por la cantidad de teoría que involucra, sino por la dificultad de organizar los resultados existentes hasta el momento; sin embargo, si pretende ser un material que fija las primeras ideas en pro de entender el modelo, un modelo que hoy por hoy, para fortuna de muchos, mantiene en actividad investigativa un gran número de físicos y matemáticos.

El presente trabajo lo hemos organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo presentamos algunas nociones históricas de la Mecánica Cuántica, fijando el origen de esta y comentando las ideas que llevaron a plantear la cuantización de la energía y la luz descritas por Planck y Einstein respectivamente, siendo estas, de gran importancia en el desarrollo de la ecuación de Schrödinger (lineal). Posteriormente, analizamos los planteamientos que llevaron a Schrödinger a formular su célebre ecuación diferencial, sentando así las bases físico matemáticas de la Mecánica Ondulatoria actual; también describimos el origen del modelo físico e interpretación probabilística que Bohr da a la ecuación de onda $\Psi(x, t)$, donde $\Psi(x, t)$ es la solución de la ecuación de Schrödinger. Terminamos este capítulo, exponiendo la ecuación de Schrödinger no lineal, su relación con el campo de la óptica no lineal, y la afinidad de esta en la creación de nuevos conceptos matemáticos como lo son los solitones.

En el segundo capítulo, presentamos algunas definiciones y resultados matemáticos necesarios para el desarrollo de los capítulos posteriores. Recordamos los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y algunas propiedades relevantes; también revisamos los conceptos de la transformada de Fourier, junto con algunas de sus propiedades más destacadas, para posteriormente, mostrar la extensión de la transformada de Fourier al espacio de energía finita $L^2(\mathbb{R}^n)$. Seguidamente introducimos el espacio de Schwartz $\mathcal{S}$, y el espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$ como el dual topológico de $\mathcal{S}$ vía transformada de Fourier. Seguidamente, definimos los semigrupos de operadores de clase C_0 y su respectivo generador infinitesimal; además introducimos el concepto de las soluciones blandas o *mild solution*, de un problema de valor inicial abstracto. Finalizando el capítulo, recordamos el Teorema de Hille-Yosida, esencial en resultados de caracterización de generadores infinitesimales de semigrupos y grupos de clase C_0 , como lo es el Teorema de Stone.

En el tercer capítulo, analizamos la existencia de solución al problema lineal homogéneo de la ecuación de Schrödinger. Lo anterior es importante en el análisis de las propiedades principales del grupo de Schrödinger $\{e^{it\Delta}\}_{t=-\infty}^{\infty}$ caracterizado por el generador infinitesimal $A_0 = -\Delta$.

Finalmente, en el cuarto capítulo, exponemos algunas leyes de conservación que cumplen las soluciones del problema de Cauchy asociado a la ecuación de Schrödinger no lineal, como la conservación de la energía y el momento lineal; también, probaremos un resultado de existencia y unicidad de la solución en $L^2(\mathbb{R}^n)$ al problema no lineal, basadas en el Principio de las contracciones de Banach.

Capítulo 1

Historia y origen del modelo

1.1. Algo de historia

Antes de empezar a navegar por las diferentes corrientes que nos llevarán a hacer un estudio formal de la ecuación de Schrödinger (lineal), queremos rescatar algunos detalles del origen de una nueva teoría que surgía a principios del siglo XX, denominada Física Cuántica, teoría que suplió las limitaciones de la Física Clásica al tratar de explicar el mundo subatómico. Antes que todo, queremos hacer énfasis en el carácter introductorio de este capítulo, para poder pasar al objetivo principal de esta disertación, que no es otro que una introducción al estudio puramente matemático de la ecuación de Schrödinger.

La ecuación de Schrödinger es uno de los modelos de mayor relevancia en la Física Matemática, siendo de gran importancia en la Mecánica Cuántica, donde representa para las partículas microscópicas un papel análogo a la Segunda Ley de Newton en la Mecánica Clásica. En términos generales, la Mecánica Cuántica se ocupa del comportamiento de la materia y la radiación en las escalas atómica y subatómica, más aún, describe y explica las propiedades de las moléculas, los átomos y sus componentes, como lo son los electrones, protones, neutrones y otras partículas más enigmáticas como los quarks y los gluones. Las ideas de esta nueva teoría, de gran aplicación en la tecnología, han sido suficientemente corroboradas experimentalmente. Sin embargo, no son ideas intuitivas ni fáciles de asimilar, ya que chocan abiertamente con la imagen del mundo que nos ofrece nuestra experiencia y nuestro sentido común.

El estudio de la Mecánica Cuántica coloca en manifiesto la metodología esencial de la Física¹, logrando importantes avances tecnológicos con gran cantidad de aplicaciones prácticas a la vida cotidiana, como por ejemplo, el láser², resonancia magnética nuclear, técnicas cuánticas de la comunicación e información, etc., así como el éxito formidable a la hora de dar respuestas válidas desde el punto de vista lógico a problemas en donde los conceptos de la Teoría Cuántica han tenido eco, en particular, respuesta a aquellas “asperezas” de la Física Clásica de finales del siglo XIX [17, 30, 40], siendo estas, las que desencadenaron dos fuertes teorías, la *Teoría de la relatividad* desarrollada por el físico Alemán Albert EINSTEIN (1879-1955), y la *Teoría cuántica* desarrollada por varios físicos como el Alemán Max PLANCK (1858-1947), el austríaco Erwin Rudolf Josef Alexander SCHRÖDINGER (1887-1961), Einstein, entre otros. Entre las “asperezas” que no se acomodaban a la física intuitiva existen dos de gran importancia en el desarrollo de la ecuación de Schrödinger, la primera conocida como *radiación de cuerpo negro*, y la segunda, conocida como *el efecto fotoeléctrico*.

1.1.1. Radiación de cuerpo negro: La constante de Planck

A finales del siglo XIX el desarrollo de la termodinámica así como el electromagnetismo estaban muy avanzados, explicando muy bien la mayoría de los fenómenos físicos relacionados; sin embargo existían algunos fenómenos que involucraban tanto a la termodinámica como el electromagnetismo, como lo era la *radiación de un cuerpo negro*, fenómenos que no lograban ser explicados de manera general por las teorías desarrolladas hasta el momento. Un cuerpo negro es un objeto físico idealizado que absorbe toda la radiación electromagnética en cualquier longitud de onda sin reflejar nada. Dado que el objeto almacena toda la energía absorbida, emite una radiación denominada *radiación de cuerpo negro* con una distribución de frecuencias determinadas, las cuales siguen una curva experimental ya conocida por los físicos de la época.

El problema yacía al aplicar la teoría clásica; los físicos británicos Lord RAYLEIGH (1842-1919) y Sir James JEANS (1877-1946) encontraron una fórmula conocida como la *Ley de Rayleigh-Jeans*, que intentaba explicar el comportamiento del cuerpo negro. A groso modo, esta ley nos dice que la forma de emitir el cuerpo negro la radiación es proporcional al producto de la frecuencia de la radiación al cuadrado por la temperatura del cuerpo ($\nu^2 T$). Pero este resultado es desastroso, puesto que el resultado indica que para frecuencias altas (longitudes cortas) la emisión de energía se va a infinito, lo cual va en contra de toda evidencia experimental y cotidiana. De ser esto cierto, cualquier

¹La metodología esencial de la Física es la relación directa entre lo teórico y lo experimental de los fenómenos físicos estudiados.

²Un láser es un dispositivo que se basa en los principios de la Mecánica Cuántica para crear un haz de luz en la que todos los fotones están en un estado coherente, por lo general con la misma frecuencia y fase.

cuerpo negro emitiría una energía infinita. Además, la curva obtenida teóricamente discrepaba de la experimental cuando las ondas eran de longitud corta, conocida como la catástrofe ultravioleta, bautizada así por el físico austriaco Paul EHRENFEST (1880-1933) [16, p. 150]. Por otro lado, el físico alemán Wilhelm WIEN (1864-1928), se empeñó en encontrar un resultado mejor que valiera para frecuencias altas (longitudes de onda bajas), y lo consiguió en 1896, conocida como *la aproximación de Wien*, pero no del todo. Wien encontró que al bajar en frecuencias (subir en longitudes de onda) otra vez se producía una catástrofe y se encontraba de nuevo una emisión infinita de energía, la cual se llamó Catástrofe Infrarroja.

Para solucionarlo, Planck³ tuvo una idea genial, la cual fue la de interpolar entre las distribuciones formuladas por Rayleigh-Jeans y Wien, en la que se vio obligado a introducir una constante h , siendo la misma para todos los materiales y para todas las formas del cuerpo negro. Planck para justificar esta constante planteó una idea revolucionaria, aunque alejada de la intuición; si la materia estaba compuesta por partículas infinitamente pequeñas, denominadas *osciladores materiales*, estas no podían tener cualquier energía arbitraria, sino solo valores discretos entre los cuales no era posible ningún otro valor.

Figura 1.1: Max Planck (1858-1947)



³Ver retrato de Planck en la Figura 1.1; Imagen tomada de sitio web oficial: Molecular ExpressionsTM [22].

La *constante de acción de Planck* h fue introducida por Planck a finales de 1900, en el artículo [25] sobre la radiación de cuerpo negro⁴ en la sociedad Física Alemana, como solución al problema descrito y cuyo desarrollo se basó en los experimentos hechos por Otto LUMMER (1860-1925) y Ernst PRINGSHEIM (1859-1917), y también por Herrich RUBENS (1865-1922) y Ferdinand KURLBAUM (1857-1927), los cuales habían hecho mediciones muy precisas en un rango de frecuencias bajas que hasta entonces no se habían estudiado; calculando el valor de h (denominada *Constante de Planck*) como $6,55 * 10^{-27}$ erg s, un valor muy cercano al actual⁵, obteniendo así, un perfecto acuerdo con las mediciones antes mencionadas.

No discutiremos aquí los argumentos de Planck, si embargo referimos al lector interesado a ver el libro [16, Cap. 18]. Solo diremos que Planck llegó a la conclusión que la materia está conformada por partículas que oscilan, emitiendo energía en forma de radiación electromagnética y que la cantidad más pequeña de energía que puede transformarse en las de frecuencia ν , está dada por $E = h\nu$, introduciendo así la **Cuantización de la energía**. La energía solo puede absorberse o emitirse en *cuantos*. Es importante mencionar el artículo [10] publicado por Einstein en 1906 titulado “Sobre el movimiento de pequeñas partículas suspendidas en líquidos estacionarios requerido por la teoría cinética molecular del calor”, el cual explica de forma más precisa la formula de Planck $E = h\nu$ y la hipótesis sobre la cual se basa, al expresar que la energía de los osciladores de Planck pueden tomar valores que son múltiplos enteros del cuanto $h\nu$, y que en la absorción y emisión de radiación, la energía cambia en forma discontinua, es decir, como pequeños escalones dados por estados de energía.

La hipótesis de Planck se puede generalizar y enunciar como un *postulado* de la siguiente forma: [16, p. 214]

⁴Ver por ejemplo [16, Cap. 15-18].

⁵El valor actual es de $6,6260755 * 10^{-27}$ erg s.

Postulado de Planck.

Cualquier ente físico en un grado de libertad mecánico, cuya coordenada generalizada realiza oscilaciones armónicas simples, solo puede poseer valores discretos de energía dada por

$$E_n = nh\nu, n = 0, 1, 2, \dots,$$

*donde ν es la frecuencia de osciladores y h es la constante universal denominada **Constante de planck**.*

Si la energía del ente obedece el Postulado de Planck se dice que está cuantizada; los niveles de energía permitidos se llaman *estados cuánticos* y el número entero n se denomina *número cuántico*. Como observación, el postulado de Planck resuelve un problema totalmente análogo al de la radiación de cuerpo negro conocido como el problema de *los colores específicos de los sólidos* [16, Cap. 15].

1.1.2. Einstein y la explicación del efecto fotoeléctrico: La luz está cuantizada

El proceso de la Física Cuántica viene marcado por grandes pasos, uno de ellos, el dado por el mismo Einstein⁶ cuando en 1905 aplicaba las ideas de Planck para explicar el efecto fotoeléctrico, inexplicable con la teoría establecida en aquella época. El efecto fotoeléctrico fue descubierto por el físico alemán Heinrich R. HERTZ (1857-1894) en 1887, cuando observó que una descarga eléctrica entre dos nodos se produce con mayor facilidad si sobre uno de ellos incide luz ultravioleta. Seguido a esta observación, los físicos Wilhelm HALLWACHS (1888), J. J. THOMSON (1899) y Philipp L. A. LENARD (1890) demostraron que la luz ultravioleta facilita tal descarga, debido a que provoca la emisión de electrones desde la superficie del cátodo, determinando las características de este fenómeno.

En términos generales, el fenómeno consiste en la capacidad de la luz de producir una corriente eléctrica cuando incide sobre un metal conductor, arrancándole electrones y haciéndolos mover. El problema radicaba en que no siempre el haz de luz al colisionar con el metal era capaz de arrancarle electrones, buscando así una explicación lógica a la irregularidad presentada. Einstein influenciado

⁶Ver retrato de Einstein en la Figura 1.2; Imagen tomada de sitio web oficial: Molecular ExpressionsTM [22, Consultado 15 Enero 2015].

Figura 1.2: Albert Einstein (1879-1955)

por los trabajos de Lenard y basado en la Hipótesis cuántica de Planck, y en el supuesto de que la luz, en ocasiones no se comporta como una onda, sino como un chorro de corpúsculos (los fotones), puso en duda la teoría clásica de la luz y propuso en uno de sus cinco (5) artículos revolucionarios titulado “*Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz*” (ver [11]), que la energía luminosa está cuantizada en paquetes concentrados a lo que hoy le llamamos *fotones*. Según Einstein, un haz de luz está formado por un cierto número de fotones en movimiento. Einstein explica en este artículo los fenómenos de radiación del cuerpo negro, fluorescencia y la producción de rayos catódicos con luz ultravioleta.

1.1.3. Schrödinger: Un genio que trae en su lámpara la Física ondulatoria

El crecimiento de la Física Cuántica originó grandes avances tanto teóricos como prácticos en las siguientes décadas⁷, participando en él, grandes genios como lo fue el físico danés Niels Henrik David BOHR⁸ (1885-1962), quien desarrolló las bases para la Mecánica Cuántica y el estudio del átomo, definiendo lo que se conoce como niveles energéticos, siendo muy importante al día de hoy

⁷Los avances han sido significativos desde la publicación de los artículos [10, 11, 25] en la primera década del siglo XX, hasta el día de hoy, donde aún quedan muchos problemas abiertos por lo que no se puede afirmar que la Física Cuántica sea una Teoría completa.

⁸Físico danés, considerado como una de las figuras más deslumbrantes de la física contemporánea y, por sus aportaciones teóricas y sus trabajos prácticos, como uno de los padres de la bomba atómica, fue galardonado en 1922 con el Premio Nobel de Física, por su investigación acerca de la estructura de los átomos y la radiación que emana de ellos.

en los avances tecnológicos biomédicos, químicos, entre otros, dando así, las herramientas para la formulación de gran parte de la teoría que sustenta varias ramas de la Química y la Medicina. Estas investigaciones lo llevaron a ganar el premio Nobel de Física en 1922.

Otra de las ramas que surgió es conocida como *la Mecánica Matricial*, desarrollada entre 1925 y 1926 por el físico Werner HEISENBERG (1901-1976), que tenía como objetivo establecer una base físico-matemática sólida, para la formulación de la Mecánica Cuántica teórica, fundada exclusivamente en las relaciones entre magnitudes que son, en principio, observables [18], para poder así predecir los resultados de los experimentos. Aquí se introduce *el Principio de incertidumbre* (1927), el cual se basa en los conceptos de Planck y Bohr de que todo está cuantizado. La formulación de Heisenberg es, por lo tanto, una especie de afirmación en lenguaje matemático de que “todo es partículas”, y la consecuencia de esa cuantización de todo, es el principio de incertidumbre. Si bien es cierto que esta teoría estaba bien sustentada, el principal dilema era su complejidad para ser entendida, tanto por las suposiciones de las que partía como por la complejidad matemática y la dificultad de traducir las matemáticas desarrolladas a algo relacionado con el mundo real.

Figura 1.3: Erwin Schrödinger (1887-1961)



Erwin Schrödinger
(1887-1961)

Por este motivo, diferentes físicos hicieron esfuerzos para tratar de obtener una formulación ma-

temática más intuitiva y menos abstracta de la Mecánica Matricial. Es así como Schrödinger⁹ en vista del inconveniente que tenía la teoría desarrollada por Heisenberg, publicó en 1926 una serie de artículos¹⁰ que sentaron las bases de la moderna *mecánica cuántica ondulatoria*, y en los cuales transcribió en términos de ecuaciones en derivadas parciales su célebre ecuación diferencial, que relaciona la energía asociada a una partícula microscópica con la función de onda descrita por dicha partícula, denominada **ecuación de Schrödinger**, la cual le llevó a recibir el premio Nobel de Física en 1933. Dedujo este resultado tras adoptar la hipótesis de De Broglie, enunciada en 1924, según la cual la materia y las partículas microscópicas, éstas en especial, son de naturaleza dual y se comportan a la vez como onda y como cuerpo.

Para sustentar lo anterior, nos permitimos exponer un párrafo traducido y adaptado del Artículo escrito por J. J. O’Conner y E. F. Robertson, de la escuela de Matemáticas y Estadística de la Universidad de St Andrews en Escocia, en el Sitio Web [23]: Schrödinger publicó su trabajo revolucionario en relación con la mecánica ondulatoria y la teoría general de la relatividad en una serie de seis (6) documentos en 1926. La mecánica ondulatoria, como propone Schrödinger en estos documentos, fue la segunda formulación de la teoría cuántica, la primera fue la Mecánica Matricial debido a Heisenberg. La relación entre las dos formulaciones de la mecánica ondulatoria y la mecánica matricial fue entendida por Schrödinger inmediatamente como muestra esta cita, tomada de uno de sus documentos: “*Para cada función de las coordenadas de posición -y momento- en la mecánica ondulatoria, ella puede estar relacionada con una matriz de tal manera que estas matrices, en todos los casos cumplen las normas de cálculo formales del Bohr y Heisenberg. . . La solución del problema natural de contorno de esta ecuación diferencial en la mecánica ondulatoria es completamente equivalente a la solución del problema algebraico de Heisenberg*” [23].

Atendiendo a estas circunstancias, la ecuación de Schrödinger arroja como resultado funciones de onda $\Psi(x, t)$, relacionadas con la probabilidad de que se dé un determinado suceso físico, en una posición del espacio y un tiempo específicos, como por ejemplo, la posición específica de un electrón en su órbita alrededor del núcleo. Dada la relación directa que existe entre la función de onda $\Psi(x, t)$ y la localización de una partícula en un espacio de posiciones, muchos textos relacionados con la mecánica cuántica tienen un enfoque “ondulatorio”, se debe por tanto tener especial cuidado para que el término función de onda no lleve al lector a imaginar que existe algún medio ondulatorio

⁹Ver retrato de Schrödinger en la Figura 1.3; Imagen tomada de sitio web oficial: Molecular ExpressionsTM [22, Consultado 16 Enero 2015].

¹⁰Seis artículos publicados primeramente en alemán, [32–37]. Después Schrödinger publicó en inglés el artículo [31] como compilación del trabajo presentado en los seis artículos.

en el sentido mecánico, puesto que puede llevar a consideraciones erróneas. Sin embargo, para esta disertación se considera mantener el término “coloquial” función de onda, primero, para mantener la literatura sobre la teoría ondulatoria de Schrödinger y segundo, $\Psi(x, t)$ se interpretó originalmente como un campo físico o campo de materia que por razones históricas se llamó función de onda y fue el precedente histórico del moderno concepto de función de onda.

1.2. Origen del modelo físico

En el marco de la Física Cuántica, a pesar de la existencia de un gran número de resultados experimentales, son pocos los textos que dedican parte de su contenido al “origen”, deducción e interpretación de la ecuación de Schrödinger. Schrödinger se basó en los estudios y experimentos realizados sobre el átomo de Hidrógeno y la hipótesis de De Broglie, teniendo como propósito modelar el recorrido que hace el electrón sobre el núcleo de este [31]. Intentaremos plasmar las principales ideas de Schrödinger, basándonos en resultados de electromagnetismo, partiendo de la ecuación de onda y utilizando algunas de las ideas descritas en el origen de la Física Cuántica.

Iniciamos diciendo que el movimiento de una partícula libre puede que ser descrito en forma general por una función de onda $\Psi(\vec{r}, t)$, siendo $\vec{r}$ la posición de la partícula en el espacio, y t el tiempo, la cual posee un sentido físico probabilístico de tal forma que $|\Psi|^2 dv$ representa la probabilidad de encontrar a la partícula en el elemento de volumen dv en el tiempo t y la posición $\vec{r}$; además de esto, las funciones de onda cumplen con la condición de normalización $\int |\Psi|^2 dv = 1$, condición que es compatible con la Teoría de la Probabilidad.

Supongamos que describimos la variación de una onda electromagnética, que describe el movimiento de una partícula libre de masa m y momento lineal p , la cual se puede obtener de la ecuación de onda,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

donde $F(x, t)$ representa el campo eléctrico o el campo magnético unidimensional y c denota la velocidad de la onda, la cual tiene como solución las ondas planas¹¹ dadas por

$$F(x, t) = Ae^{i(wt - \kappa x)}, \quad (1.2)$$

¹¹En algunos textos también se les conoce como *traveling waves* u ondas viajeras.

siendo A la amplitud de la onda, $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ el número de onda y $w = 2\pi v$ la frecuencia angular de la onda, donde v es la frecuencia en ciclos por unidad de tiempo y λ es la longitud de onda. Note que si sustituimos en (1.1) la función (1.2) encontramos que para que (1.2) sea solución de (1.1) se debe cumplir que

$$\left(-k^2 + \frac{w^2}{c^2}\right) F(x, t) = 0, \quad (1.3)$$

encontrando así una relación de dispersión dada por $w^2 = c^2 \kappa^2$, propia de la ecuación de Helmholtz. Observe que derivando la expresión (1.2), se obtiene que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (-i\kappa)^2 A e^{i(wt - \kappa x)} = -k^2 F(x, t) \quad (1.4)$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial t} = iw A e^{i(wt - \kappa x)} = iw F(x, t). \quad (1.5)$$

Dejando por un momento la ecuación de onda plana $F(x, t)$, es posible trabajar con sus propiedades de dispersión; así, de (1.4) se observa que la segunda derivada espacial $\partial^2/\partial x^2$ puede ser expresada en términos del coeficiente polinomial $-\kappa^2$ y de (1.5) la derivada temporal $\partial/\partial t$ puede ser expresada en términos del coeficiente polinomial iw .

Por otro lado, se conoce que para una partícula en movimiento, la suma de su energía cinética E_c y su energía potencial V es igual a una energía total constante E , esto es,

$$E = E_c + V.$$

Ahora, la energía cinética puede ser expresada en términos del momento p y la masa m como [20, p. 20]

$$E_c = \frac{p^2}{2m}$$

teniendo así

$$E = \frac{p^2}{2m} + V. \quad (1.6)$$

Debido a que estamos trabajando con ondas que se mueven cerca a la velocidad de la luz c , desde el punto de vista cuántico ya sabemos que según Einstein, un haz de luz está formado por un cierto número de fotones en movimiento. Por otro lado, Louis-Victor de BROGLIE (1892-1987) en 1923 generalizó la dualidad onda-corpúsculo a todas las partículas conocidas, denominada como onda de Broglie, llegándose a comprobar experimentalmente hasta 1927, cuando se observó la difracción de electrones. De Broglie asigna a cada partícula libre con energía E y cantidad de movimiento

lineal p una frecuencia v y una longitud de onda λ así:

$$\begin{cases} E = hv \\ p = \frac{h}{\lambda}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Utilizando la “Constante de Dirac” o “Constante de planck normalizada” $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ y escribiendo la frecuencia v en términos de la frecuencia angular $w = 2\pi v$ tenemos que $E = \hbar w$; además,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\hbar\lambda} = \frac{p}{\hbar},$$

de donde se concluye que

$$p = \hbar k \quad (1.8)$$

y

$$E = \hbar w. \quad (1.9)$$

Sustituyendo (1.8) y (1.9) en (1.6) se tiene que

$$\hbar w = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} + V, \quad (1.10)$$

siendo esta una nueva relación de dispersión, la cual caracteriza las funciones de onda de De Broglie $\Psi(x, t)$. Teniendo en cuenta las relaciones (1.4) y (1.5), de (1.10) se obtiene la ecuación de onda

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi. \quad (1.11)$$

La ecuación (1.11) es denominada la ecuación de Schrödinger (en una dimensión), donde $\Psi(x, t)$ contiene la información del sistema mecánico cuántico y representa las probabilidades de la evolución temporal del sistema.

Como observación final a esta sección, tenemos la generalización de la ecuación a $\mathbb{R}^n$, dada por:

$$i\hbar \partial_t \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

donde $V(x, t)$ es la energía potencial relacionada con el medio donde se mueve la partícula. La notación $\Delta \Psi(x, t)$ representa el laplaciano en la variable espacial, de Ψ , esto es, $\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_n^2}$.

1.3. Interpretación probabilística de la función de onda

Teniendo en cuenta que la función de onda $\Psi(x, t)$ descrita en (1.12) es de valor complejo, se creía que esta no se podía medir con un instrumento real (en laboratorio), ni atribuirle una existencia física. Sin embargo, esta creencia fue refutada a principios del siglo XXI (2011), en el artículo [21], titulado “*La medición directa de la función de onda Cuántica*”, en el cual se muestra que la función de onda se puede medir directamente mediante un experimento. En la actualidad, la función de onda se determina a través de métodos tomográficos que estiman la función de onda con una colección diversa de mediciones. El experimento consiste principalmente en “hacer mediciones secuenciales de dos variables complementarias del sistema cuántico, cuyo resultado es que las componentes real e imaginaria de la función de onda aparecen directamente en nuestro aparato de medición” [21], así, la función de onda es obtenida en tiempo real.

Por otro lado, la función de onda posee una interpretación en el sentido probabilístico. Para darle este sentido, debemos relacionar a $\Psi(x, t)$ con las variables dinámicas de la partícula asociada a $\Psi(x, t)$, relacionando la intensidad de $\Psi(x, t)$ en el punto (x, t) con la densidad de probabilidad $P(x, t)$ de encontrar a la partícula en un entorno cercano del punto (x, t) . Claramente, sería absurdo igualar una cantidad compleja como lo es $\Psi(x, t)$ con una magnitud real descrita por $P(x, t)$. Sin embargo, Max Born en 1926 propone la relación correcta entre estas dos, la cual está descrita como sigue: [16, p. 70]

Postulado de Born.

Si en el instante t se lleva a cabo una medida para ubicar la partícula descrita por la función de onda $\Psi(x, t)$, entonces la probabilidad $P(x, t)dx$ de que la partícula se encuentre entre x y $x + dx$ es

$$P(x, t)dx = \frac{\overline{\Psi}(x, t)\Psi(x, t)dx}{\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\Psi}(x, t)\Psi(x, t)dx} = \frac{|\Psi(x, t)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |\Psi(x, t)|^2 dx}, \quad (1.13)$$

donde $\overline{\Psi}(x, t)$ indica el complejo conjugado de $\Psi(x, t)$.

Debido a que el postulado de Born carece de sentido si la integral no es acotada, la función de onda $\Psi(x, t)$ debe ser cuadrado integrable para que sea una función de onda “aceptable”, así, una condición necesaria es que $\Psi(x, t)$ debe tender a cero con suficiente rapidez cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Esto concuerda con la necesidad de poseer un espacio de energía finita para la solución de la ecuación

de Schrödinger, como por el ejemplo el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$, de las funciones cuadrado integrable, en el cual, la energía total E es descrita por

$$E = \int_X |f(x)|^2 dx,$$

para cualquier señal de energía finita $f \in L^2(X)$ [1, p. 368].

1.4. Otras motivaciones físicas de la Ecuación de Schrödinger no lineal.

En la realidad, los fenómenos físicos presentan en general un comportamiento no lineal, necesitando así, ciertas suposiciones matemáticas y aproximaciones para intentar modelar su comportamiento. Por lo general, al estudiar las ondas sonoras y de la luz, se analizan bajo el Principio de superposición, principio que compagina adecuadamente con los fenómenos lineales; en contraste, cuando se observan cuidadosamente sistemas de ondas causadas por la gravedad en la superficie del agua, el Principio de superposición no se puede aplicar para su descripción, dando origen al estudio de ondas no lineales. Estos sistemas, denominados conservativos o temporalmente reversibles, presentan comportamientos extraños tales como oscilaciones, caos temporal o espacio temporal, entre otros, los cuales son generados por perturbaciones en el sistema por la inyección o disipación de energía.

A groso modo, cuando el sistema es descrito por un número pequeño de grados de libertad, su comportamiento ha sido caracterizado de forma lineal; en cambio, en el caso cuando los sistemas poseen un gran número de grados de libertad, denominados *Campos*, los tipos de comportamiento aún son una pregunta abierta en el área de la Física no lineal. Es así, cuando a mediados del siglo XX, el estudio de fenómenos físicos tomó otro camino hacia muchos de los fenómenos físicos en los que el Principio de superposición no se satisface, cobrando gran importancia fenómenos como por ejemplo, los haces de los láseres en óptica y las ondas en plasmas, los cuales exhiben fenómenos ondulatorios no lineales.

La ecuación de Schrödinger no lineal hoy por hoy está presente en aplicaciones de fenómenos físicos de tipo no lineal aplicados en diferentes campos, tales como, Física de semiconductores [4], Física del plasma [9], óptica no lineal [19], condensación de gases atrapados de Bose-Einstein [7], así como

en la Dinámica Biomolecular [8] o en la Mecánica Cuántica [27], entre otros.

Una de las formas mas generales de la ecuación de Schrödinger no lineal es dada por

$$i\Psi_t = -\Delta\Psi + V(x,t)\Psi + g(x,t)|\Psi|^{2\sigma}\Psi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.14)$$

donde x representa la posición del ente estudiado en el tiempo t , V es un potencial y g es una función dada. Considerando $V = 0$, $g = \lambda \in \mathbb{R}$ y $\sigma = \frac{\alpha-1}{2}$ en (1.14) tenemos la ecuación de Schrödinger no lineal homogénea

$$i\partial_t\Psi + \Delta\Psi + \lambda|\Psi|^{\alpha-1}\Psi = 0, \quad (1.15)$$

que estudiaremos en el Capítulo 4 de esta disertación.

Como se mencionó anteriormente, las aplicaciones de la ecuación de Schrödinger no lineal están presentes en distintos campos de la Física; sin embargo, debido a la extensión y complejidad de estos campos no se expondrá cada uno de ellos ni su relación con la ecuación (1.14). Sin embargo, se presenta una pequeña introducción en el campo de la óptica no lineal, recomendando al lector interesado en profundizar sobre este tema, ó en los condensados de Bose-Einstein, consultar [3].

Como se expone en [3, p. 1], el estudio de (1.14) ha servido como impulsor en la creación y desarrollo de nuevas ideas físicas así como en conceptos matemáticos tales como *solitones* [42] o *singularidades* en ecuaciones en derivadas parciales [39]. Físicamente, un solitón es una onda solitaria que se propaga en un medio no lineal sin deformarse, cuya amplitud, forma y velocidad se conservan después de una colisión con otro solitón [38]. Este fenómeno fue descrito por el físico escocés John Scott RUSSELL (1801-1882), el cual en 1834 observó durante varios kilómetros la propagación de una ola a lo largo de un canal de agua, la cual permaneció robusta frente a las pequeñas perturbaciones causadas por la corriente de agua [28]. Cabe aclarar, que Russell no utilizó el término solitón para describir su observación¹², sin embargo, sí fue el primero en describirlo.

En el contexto de la óptica no lineal, antes de introducir el concepto de solitón matemáticamente, las ondas de luz producidas por un haz de láser, se pueden clasificar en dos tipos. Por un lado se encuentran las ondas armónicas, las cuales pueden ser expresadas en términos de funciones periódicas de tipo cosenoidal o senoidal. Por otra parte están los solitones, los cuales es su forma más común, se encuentran expresados en términos de las funciones secante hiperbólica ó tangente hiperbólica,

¹²El término “solitón” fue inventado hasta 1965 cuando Norman Zabusky y Martin Kruskal publicaron sus soluciones numéricas de la ecuación KdV (ecuación Korteweg y de Vries) [41].

dependiendo de si son brillantes, es decir, el solitón presenta su máxima intensidad lumínica en el centro, u oscuros, cuando el solitón presenta su mínima intensidad lumínica en el centro [29].

Los solitones se clasifican en dos formas dependiendo de si el confinamiento de la luz ocurre en el tiempo o en el espacio durante la propagación de la onda, en *temporales* o *espaciales* respectivamente [3, p. 5]. Los solitones temporales representan pulsos ópticos que mantienen su perfil, mientras los solitones espaciales representan haces guiados que permanecen confinados en las direcciones transversales, que son ortogonales a la dirección de propagación de dicho haz. Ambos tipos de solitones aparecen a partir de un cambio en la no linealidad del índice de refracción de un material óptico inducido por la intensidad lumínica, un fenómeno conocido como *efecto Kerr óptico* en el campo de la óptica no lineal [19].

Veamos el modelo que describe la propagación de un rayo láser en un medio no lineal. Para esto, es necesario precisar que la derivación natural del modelo es basado en la ecuación de Helmholtz no lineal, la cual es dada por

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz})F(x, y, z) + k^2 F(x, y, z) = 0, \text{ con } k^2 = k_0 \left(1 + \frac{4\eta_2}{\eta_0} |F|^2 \right) \quad (1.16)$$

donde F es el campo eléctrico, k_0 es el número de onda, η_0 es el índice de refracción linear, y η_2 es el índice no linear o coeficiente Kerr. Separando las oscilaciones rápidas de las amplitudes variando lentamente, consideramos el siguiente cambio de variables

$$\tilde{x} = \frac{x}{r_0}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{r_0}, \quad \tilde{t} = \frac{z}{2l}, \quad \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = 2r_0 k_0 \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_0}} F(x, y, z) e^{-i2k_0^2 r_0^2 \tilde{t}}, \quad (1.17)$$

donde ψ es la amplitud del campo eléctrico adimensional, r_0 es el ancho del haz de entrada, $l = k_0 r_0^2$ es la longitud de la difracción. Observemos que la variable física z juega el rol de “tiempo”. Abusando de la notación, esto es, escribiendo $\psi = \psi(x, y, t)$ en lugar de $\psi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$, obtenemos la ecuación

$$\frac{\delta}{4} \psi_{tt} + i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0, \quad (1.18)$$

donde $\delta = 1/r_0^2 k_0^2 > 0$ y $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Debido a que el ancho del haz de entrada r_0 es mucho más largo que la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k_0$, entonces tenemos que $\delta = \frac{\lambda^2}{\pi^2 r_0^2} < 1$ es un valor muy pequeño. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos tomar $\delta = 0$, así, la ecuación del modelo de propagación de un rayo láser en un medio con una no linealidad Kerr, es dado por la ecuación de

Schrödinger no lineal

$$i\psi_z + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0. \quad (1.19)$$

Por último, volviendo a la ecuación (1.15), la dependencia en la intensidad del índice de refracción lleva a una modulación temporal de la fase y también a una autofocalización (*focusing* ($\lambda > 0$)) ó autodefocalización (*defocusing* ($\lambda < 0$)) espacial, que son los dos mayores efectos no lineales responsables de la formación de solitones ópticos. Un solitón temporal se forma cuando la modulación temporal de la fase, neutraliza la dispersión natural de un pulso óptico. En contraste, es la autofocalización del rayo óptico quien equilibra la dispersión producida por el índice de refracción, llevando a la formación de solitones espaciales. En ambos casos, el pulso (solitón temporal) o el haz (solitón espacial) se propagan a través del medio sin cambiar su perfil, así se dice que el pulso está localizado o el haz está atrapado [3, p. 5].

Capítulo 2

Fundamentos de Análisis Armónico

Con el fin de darle a este trabajo un carácter autocontenido, presentamos algunas definiciones y resultados matemáticos de carácter general que utilizaremos en el desarrollo de los capítulos posteriores. No profundizamos aquí en las demostraciones de los diferentes resultados, pero daremos referencias a cada uno de ellos para que el lector interesado pueda consultarlo.

2.1. Espacios L^p

En esta sección haremos una breve revisión de los espacios L^p tomando como base de definición la medida de Lebesgue. Para el lector interesado en recordar con detalle estos preliminares, recomendamos ver las referencias [2, 5, 12, 15].

2.1.1. Medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue proporciona una manera de describir el volumen de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que es Lebesgue medible. Antes de dar la definición de medida de Lebesgue, iniciaremos recordando la definición de σ -álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1.1. Una colección $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ es llamada una σ -álgebra si

- (i) Si $A \in \mathcal{M}$ entonces $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{M}$;
- (ii) Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$ entonces $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$.

Observe que si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$ entonces $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbb{R}^n \setminus (\cup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus A_k)) \in \mathcal{M}$; además, $\emptyset \in \mathcal{M}$ y $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$, puesto que para cualquier $A \in \mathcal{M}$, $\emptyset = A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$ y $\mathbb{R}^n = A \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$.

Teorema 2.1.2. (Existencia de la medida de Lebesgue y conjuntos medibles Lebesgue) [12, p. 646]
Existen una σ -álgebra $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}^n$ y una función

$$\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$$

con las siguientes propiedades¹

- (i) *Todo subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y por tanto todo subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, pertenece a $\mathcal{M}$.*
- (ii) *Si B es una bola en $\mathbb{R}^n$, entonces $\mu(B)$ es igual al volumen n -dimensional de B .*
- (iii) *Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ y los conjuntos $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ son disjuntos dos a dos, entonces*

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \quad (2.1)$$

- (iv) *Si $A \subseteq B$, donde $B \in \mathcal{M}$ y $\mu(B) = 0$, entonces $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$.*

Los conjuntos en $\mathcal{M}$ son llamados *conjuntos Lebesgue medibles* y $\mu(\cdot)$ es llamada *medida de Lebesgue*. En adelante, cuando nos referimos a los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$, se tendrá por sentado que son Lebesgue medibles, y la medida que consideraremos sobre $\mathbb{R}^n$ será la medida de Lebesgue.

2.1.2. Funciones medibles

Definición 2.1.3. *Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina función medible (función Lebesgue medible) si*

$$f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{M}$$

para cada subconjunto medible $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.

Notemos en particular que si f es continua, entonces f es medible; además, la suma y el producto de dos funciones medibles es medible.

Definición 2.1.4. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medible es sumable (Lebesgue sumable) si*

$$\int_{\Omega} |f| dx < \infty.$$

¹La σ -álgebra $\mathcal{M}$ está formada por la familia de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ (o equivalentemente por la familia de conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$) denominada σ -álgebra de Borel.

2.1.3. Teoría básica de los espacios L^p

En el restante de esta disertación será de uso frecuente las propiedades de los espacios L^p . Nos restringiremos a la Teoría de espacios L^p , definido sobre la Medida de Lebesgue $\mu(\cdot)$.

Definición 2.1.5. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$ y Ω abierto de $\mathbb{R}^n$. Se define el conjunto

$$L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es Lebesgue medible y } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Abreviaremos el conjunto $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ por $L^p(\Omega)$ o simplemente L^p siempre y cuando esto no cause confusión. El conjunto L^p con $1 \leq p < \infty$, es un espacio vectorial normado con la norma² $\|\cdot\|_p$ definida por

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Además, L^p es un espacio de Banach [5, p. 93]. Por otro lado, si $p = \infty$ se define el espacio L^∞ como siendo

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es Lebesgue medible y } \|f\|_\infty < \infty\},$$

en donde $\|f\|_\infty = \inf S$ (ínfimo de S) con

$$S = \{\alpha > 0 : |f(x)| \leq \alpha, \text{ c.t.p en } \Omega\},$$

donde la nomenclatura *c.t.p en Ω* significa *que la propiedad vale en todo Ω excepto en $A \subset \Omega$ de medida nula* ($\mu(A) = 0$). El conjunto L^∞ , es un espacio vectorial con la norma $\|\cdot\|_\infty$; además, L^∞ es un espacio de Banach [15, p. 176].

Definición 2.1.6. (Exponente conjugado) Sea $1 \leq p \leq \infty$. El número real p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ se denomina el exponente conjugado de p . Aquí, en el caso $p = \infty$, entendemos $\frac{1}{p'} = 0$.

Proposición 2.1.7. (Desigualdad de Hölder) [5, p. 92] Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y además $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

Proposición 2.1.8. (Desigualdad de Minkowski) [15, p. 175] Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si $f, g \in L^p(\Omega)$, entonces $f + g \in L^p(\Omega)$ y además $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

²La función $f \mapsto \|f\|_p$ es en verdad una seminorma pues no cumple que $\|f\|_p = 0$ si y solo si $f = 0$. Para tornar al espacio vectorial L^p , un espacio normado, basta definir una clase de equivalencia sobre el conjunto L^p donde, $f \equiv g$ si y solo si $f = g$ en casi todo punto, es decir, excepto en un conjunto de medida nula. En adelante cuando se hable de $\|f\|_p$ nos estamos refiriendo al representante de la clase de equivalencia al cual pertenece f , obteniendo así la norma que hace a L^p un espacio normado.

Ejemplo 2.1.9. Sobre el espacio $L^2(\Omega)$ se define el producto escalar

$$(u, v) = \Re \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \overline{v(x)} d\mu, \quad u, v \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

con lo cual el espacio L^2 es un espacio de Hilbert, es decir, un espacio vectorial equipado con un producto escalar tal que es completo para la norma definida por el producto interior. Aquí la notación $\Re u$ denota la parte real de $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

Proposición 2.1.10. [26, p. 28] (Desigualdad de Young) Sea $1 \leq p, q \leq \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ entonces la convolución $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ donde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ y $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Teorema 2.1.11. [26, p. 27] (Teorema de Riesz-Thorin) Sea $1 \leq p, q \leq \infty$ con $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$. Sea T un operador lineal acotado de $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$ con norma M_0 y de $L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$ con norma M_1 . Entonces T es acotado de $L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{q_\theta}(\mathbb{R}^n)$ con norma M_θ , tal que

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

con

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

2.2. Espacios de Sobolev

Aunque el uso de los espacios de Sobolev en esta disertación será bastante limitado, en aras de la completitud en la exposición y dejar bien establecida la notación a ser usada, los recordamos brevemente.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $C^k(\Omega)$ el espacio de todas las funciones sobre Ω tales que todas sus derivadas parciales de orden menor o igual que k son continuas. Además, se define el conjunto $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$, y $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto. Consideremos el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ de las funciones $C_0^\infty(\Omega)$, equipado con la topología inducida por la familia de seminormas

$$g_m^K(\varphi) = \sup_{x \in K} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Aquí, $K \subseteq \Omega$ es un compacto y α es un *multiíndice*, esto es, una n -upla de enteros no negativos

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$. Si α es un multiíndice denotamos x^α por $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Además, denotamos $D_k = \partial/\partial x_k$ y $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ de donde tenemos que

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

El conjunto de las distribuciones sobre Ω , $\mathcal{D}'(\Omega)$, es el espacio dual (topológico) de $\mathcal{D}(\Omega)$. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y α es un multiíndice, se define la distribución

$$D^\alpha T = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} T \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Si $f \in L^p(\Omega)$, entonces f define la distribución $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \Re \left(\int_{\Omega} f(x) \overline{\varphi(x)} d\mu \right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Si $T_f = T_g$, entonces se verifica que $f = g$ c.t.p. Una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se dice que pertenece a $L^p(\Omega)$ si existe $f \in L^p(\Omega)$ tal que $T = T_f$. En este caso f es única.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, y Ω abierto de $\mathbb{R}^n$, el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ se define como

$$W^{k,p}(\Omega) = \{g \in L^p(\Omega) : D^\alpha g \in L^p(\Omega), \text{ para } |\alpha| \leq k\}.$$

El espacio $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach dotado con la norma

$$\|g\|_{W^{k,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha g\|_p.$$

Cuando $p = 2$, es usual denotar $W^{k,p}(\Omega)$ dada por $H^k(\Omega) = H^k$.

2.3. Transformada de Fourier

En adelante usaremos las siguientes notaciones; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un punto variable en el espacio Euclidiano n -dimensional $\mathbb{R}^n$. Para cualesquier dos puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ se define $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ y $|x|^2 = x \cdot x$.

Si $f \in C(\mathbb{R}^n)$, se dice que f se anula en ∞ si para todo $\epsilon > 0$ el conjunto $\{x : |f(x)| \geq \epsilon\}$ es compacto; definimos entonces el conjunto

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) : f \text{ se anula en } \infty\}.$$

Definición 2.3.1. La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ es definida como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n), \\ f &\mapsto \mathcal{F}(f) = \widehat{f}, \end{aligned}$$

donde

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \text{ para } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Ejemplo 2.3.2. Sea $n = 1$ y $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$ (la función característica del intervalo (a, b)). Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_a^b e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= -\frac{e^{2\pi i b \xi} - e^{-2\pi i a \xi}}{2\pi i \xi} \\ &= -e^{-\pi i(b+a)\xi} \left(\frac{e^{-\pi i(b-a)\xi} - e^{\pi i(b-a)\xi}}{2\pi i \xi} \right) \\ &= -e^{-\pi i(b+a)\xi} \frac{\text{sen}(\pi(b-a)\xi)}{\pi \xi}. \end{aligned}$$

En particular, si $(a, b) = (-1, 1)$ tenemos

$$\widehat{f}(\xi) = -\frac{\text{sen}(2\pi \xi)}{\pi \xi}.$$

A continuación recordamos algunas propiedades básicas de la transformada de Fourier en L^1 .

Teorema 2.3.3. [26, p. 1] Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

(i) La aplicación $\mathcal{F}$ define una aplicación lineal acotada con

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1. \quad (2.2)$$

(ii) Para cada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Para cada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ (Riemann-Lebesgue).

(iv) Si $g \in L^1$ y $f * g$ es la convolución de f y g , entonces

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi). \quad (2.3)$$

(iv) Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y)dy. \quad (2.4)$$

Veamos ahora un ejemplo para ilustrar parte de las propiedades establecidas en el Teorema 2.3.3.

Ejemplo 2.3.4. [26, p. 3] Sea $n = 1$ y

$$g(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \in [0, 2) \\ x-2 & \text{si } x \in [-2, 0) \\ 0 & \text{si } x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty). \end{cases} \quad (2.5)$$

(i.e. $g(x) = \chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}(x)$). La identidad (2.3) muestra que

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{\sin^2(2\pi\xi)}{(\pi\xi)^2}.$$

Una propiedad fundamental de la transformada de Fourier es la relación con la diferenciación. Esta es descrita en el siguiente resultado.

Proposición 2.3.5. [15, p. 241] Suponga $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(1) Si $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $|\alpha| \leq k$, entonces $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{(-2\pi i x)^\alpha f}$.

(ii) Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, y $D^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, para $|\alpha| \leq k-1$, entonces $\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$.

Ahora centramos la atención en la siguiente pregunta: Dada la transformada de Fourier $\widehat{f}$ de una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$, ¿podemos recuperar a f ? Desafortunadamente la respuesta en general es negativa (ver Ejemplo 2.3.2). Sin embargo, si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la respuesta es afirmativa, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.3.6. [15, p. 243] (Transformada inversa de Fourier.) Sea $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $(\widehat{f})^\vee = \widehat{f^\vee} = f$ c.t.p; donde $f^\vee$ denota la transformada inversa la cual es definida como:

$$f^\vee(x) = \widehat{f}(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

2.3.1. La transformada de Fourier en L^2

En el estudio de la ecuación de Schrödinger surge la necesidad de resolver el respectivo PVI en el cual la condición inicial pertenece al espacio de energía finita $L^2(\mathbb{R}^n)$. En este sentido se refuerza la necesidad de expandir la definición de la transformada de Fourier. Para esto, recordemos primero un resultado importante de densidad en espacios L^p , el cual establece que, $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto denso de $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.3.7. (Plancherel). [26, p. 4] Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2. \quad (2.6)$$

Como observación, el Teorema 2.3.7 junto con la densidad de $L^1 \cap L^2$ en L^2 , implica que existe una única extensión de la transformada de Fourier al espacio L^2 .

Lema 2.3.8. [15, p. 245] Si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$(\widehat{f\widehat{g}})^\vee = f * g. \quad (2.7)$$

De manera análoga, podemos expandir el Teorema 2.3.6 al espacio L^2 , así:

Teorema 2.3.9. [26, p. 8] La inversa de la transformada de Fourier $\mathcal{F}^{-1}$ puede ser expresada como

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x), \text{ para toda } f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

2.4. El espacio de Schwartz $\mathcal{S}$

El *espacio de Schwartz* $\mathcal{S}$, que consiste de todas las funciones de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ las cuales, junto con todas sus derivadas, decaen a cero en el infinito más rápido que cualquier potencia de $|x|$. Más exactamente, dados cualquier entero no negativo N y cualquier multiíndice α , se define

$$\|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |D^\alpha f(x)|$$

y

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty, \text{ para todo } N, \alpha\}.$$

Note que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $|x^N f(x)| \leq C$ para algún $C > 0$, luego $|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^N}$, $x \neq 0$, así $f \rightarrow 0$ en $\pm\infty$ rápidamente, más que cualquier polinomio.

Observación 2.4.1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$. En efecto, tome $f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-|x|^2}$, para cualquier multiíndice α .

Proposición 2.4.2. [15, p. 227] El espacio $\mathcal{S}$ es un espacio de Banach completo con la topología definida por la norma $\|\cdot\|_{(N,\alpha)}$.

Observación 2.4.3. Se tiene que $C_0^\infty \subsetneq \mathcal{S}$. En efecto, tome la función $f(x) = e^{-|x|^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pero no está en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Como consecuencia de la Proposición 2.3.5 se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.4.4. [15, p. 244] La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ define un isomorfismo de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$.

Definición 2.4.5. El conjunto de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ está definido como el dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 2.4.6. Dada $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, se define la transformada de Fourier de Ψ como $\widehat{\Psi} \in \mathcal{S}'$ tal que

$$\widehat{\Psi}(f) = \Psi(\widehat{f}), \text{ para cualquier } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (2.8)$$

La topología en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ puede ser descrita de la siguiente forma. Sea $\{\Psi_k\} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Se dice que $\Psi_k \rightarrow 0$ en $\mathcal{S}'$ cuando $k \rightarrow \infty$, si para cualquier $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $\Psi_k(f) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Como consecuencia de la Definición 2.4.6 se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.4.7. [26, p. 11] La transformada $\mathcal{F}$ define un isomorfismo de $\mathcal{S}'$ en $\mathcal{S}'$.

Proposición 2.4.8. [26, p. 12] Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definido

$$\Psi * \varphi(x) = \Psi(\varphi(x - \cdot)).$$

Entonces

$$\Psi * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

y

$$\widehat{\Psi * \varphi} = \widehat{\Psi} \widehat{\varphi}, \quad (2.9)$$

donde $\widehat{\Psi} \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ está definido como $\widehat{\Psi} \widehat{\varphi}(\phi) = \widehat{\Psi}(\widehat{\varphi} \phi)$ para cualquier $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Finalizamos esta sección recordando la definición de los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n) = H^s$, $s \in \mathbb{R}$. Dado $s \in \mathbb{R}$ consideramos la aplicación

$$\Lambda_s f = ((1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f})^\vee$$

la cual define un operador continuo sobre $\mathcal{S}'$. Consecuentemente, se definen los espacios H^s , $s \in \mathbb{R}$, como siendo

$$H^s = \{f \in \mathcal{S}' : \Lambda_s f \in L^2\}.$$

El espacio H^s define un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(f, g)_{H^s} := \Re \int_{\mathbb{R}^n} (\Lambda_s f)(\overline{\Lambda_s g}) dx$$

y la norma

$$\|f\|_{H^s} := \|\Lambda_s f\|_2.$$

No es necesario para los objetivos de esta disertación profundizar en las propiedades de los espacios H^s . Simplemente recordemos que si $s = 0$, $H^s = L^2$; $H^s \subset L^2$ continuamente para $s > 0$; además $\mathcal{S}$ es un subespacio denso de H^s .

2.5. Semigrupos de operadores

La Teoría de Semigrupos es una herramienta importante en el tratamiento de las ecuaciones diferenciales parciales no estacionarias (tiempo-dependientes o evolutivas). Antes de introducirnos en el concepto formal de lo que es un semigrupo, consideremos el siguiente problema de valor inicial asociado a una E.D.O lineal

$$\begin{cases} u_t = ku, & k < 0, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Sabemos que la función $u(t) = e^{kt}u_0$ es la única solución del problema de Cauchy (2.10). Si consideramos $X = \mathbb{R}$ y $u(t) = T(t)u_0$, con $T(t)$ dado por e^{kt} , tenemos que $T(0) = 1$, con lo cual $T(0)$ es la identidad sobre X , y además,

$$T(t)T(s)u_0 = e^{kt}e^{ks}u_0 = e^{k(t+s)}u_0 = T(t+s)u_0.$$

También, para cada $u_0 \in X$, la aplicación $t \in [0, \infty) \mapsto T(t)u_0 = e^{kt}u_0 \in X$ es continua.

Pasamos ahora al contexto infinito dimensional y consideremos el siguiente problema de valor inicial asociado a la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(a, t) = u(b, t), & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, & x \in (a, b). \end{cases} \quad (2.11)$$

Consideremos ahora $X = L^2((a, b))$ y $A : D(A) \rightarrow X$ definido como $Au = \partial_{xx}u$, para cada $u \in D(A)$, con

$$D(A) = \{u \in H^2((a, b)) : u(a) = u(b) = 0\}.$$

Con esta definición, podemos reescribir el problema (2.11) como el siguiente problema de Cauchy en X asociado a una E.D.O de primer orden sobre el espacio de Banach X ,

$$\begin{cases} u_t = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Es natural pensar que la solución de (2.12) es de la forma $u(t) = e^{At}u_0$, con lo cual, una vez entendido el sentido de e^{At} en el caso en el que A es un operador definido sobre un espacio infinito dimensional X , pasamos a verificar que la aplicación $T(t) = e^{At}$ verifica que $T(0) = \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ es el operador identidad sobre X) y $T(s+t) = T(s)T(t)$ para cada $s, t \geq 0$, análogo a lo que sucede con la función exponencial. Pues bien, esta generalización es posible, y la teoría que la sustenta se denomina *Teoría de semigrupos*.

Corroboraremos su aplicabilidad en el análisis de problemas de Cauchy no homogéneos, en particular, en el estudio de existencia de solución de la ecuación de Schrödinger no lineal.

Definición 2.5.1. Sea X un espacio de Banach. Una familia $\{T(t)\}$, $t \geq 0$, de operadores lineales acotados de X en X se denomina *semigrupo fuertemente continuo* o *semigrupo de clase C_0* , si se verifican las siguientes condiciones:

$$(i) \quad T(t+s) = T(t)T(s), \quad t, s \geq 0.$$

$$(ii) \quad T(0) = \mathcal{I}.$$

$$(iii) \quad \text{Para todo } x \in X, \text{ la aplicación } t \in [0, \infty) \mapsto T(t)x \in X \text{ es continua.}$$

Ejemplo 2.5.2. Sea A un operador lineal acotado en un espacio de Banach y sea $T(t) : X \rightarrow X$ el

operador dado por

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Entonces la familia $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ define un operador de clase C_0 . Más aún, es continuo en la topología de la norma, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - \mathcal{I}\| = 0.$$

Tales semigrupos se denominan semigrupos uniformemente continuos.

Definición 2.5.3. Sea $\{T(t)\}$, $t \geq 0$, un semigrupo de clase C_0 de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach X . El generador infinitesimal del semigrupo es el operador A definido por

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h},$$

y el dominio $D(A)$ de A es dado por el conjunto de elementos $x \in X$ para los cuales el límite existe.

De la Definición 2.5.3 no es claro que elementos distintos a 0 pertenecen a $D(A)$. Sin embargo, el conjunto $D(A)$ es en efecto, grande; de hecho, el conjunto $D(A)$ es denso en X . Antes de enunciar dicho resultado, presentaremos la siguiente proposición que reúne algunas propiedades útiles para esta propuesta.

Proposición 2.5.4. [24] Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 . Entonces

$$(i) \text{ Para } x \in X, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

$$(ii) \text{ Para } x \in X \text{ y todo } t > 0, \int_0^t T(s)x ds \in D(A) \text{ y}$$

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

(iii) Para $x \in D(A)$, se tiene que $T(t)x \in D(A)$. Además, la función $t \in [0, \infty) \mapsto T(t)x \in X$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

$$(iv) \text{ Para } x \in D(A), T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Teorema 2.5.5. [24] Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 . Entonces $D(A)$ es denso en X y A es cerrado.

Demostración. Para todo $x \in X$, definamos $x_h = \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds$. Por el item (i) de la Proposición 2.5.4 tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds = T(0)x = x,$$

así $x_h \rightarrow x$ cuando $h \rightarrow 0$. Por el item (ii) de la Proposición 2.5.4, $\int_0^h T(s)x ds \in D(A)$, con lo cual $D(A)$ es denso en X .

Ahora asuma que $x_n \in D(A)$, $x_n \rightarrow x$ y $Ax_n \rightarrow y$. Entonces por el item (iv) de la Proposición 2.5.4 encontramos que

$$T(h)x_n - x_n = \int_0^h T(s)Ax_n ds.$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos

$$T(h)x - x = \int_0^h T(s)y ds.$$

Dividiendo por h y tomando el límite $h \rightarrow 0^+$, concluimos que

$$Ax = y.$$

□

2.6. Soluciones blandas

Sea $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 de operadores en X y A el generador infinitesimal.

Consideremos el problema de valor inicial abstracto dado por

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Asumamos que $u_0 \in D(A)$ y $f \in C([0, T]; X)$. Diremos que u es una solución (clásica) de (2.13) si $u \in C^1([0, T]; X) \cup C([0, T]; D(A))$ y verifica la ecuación (2.13) puntualmente.

Teorema 2.6.1. [24, p. 106] *Sea u una solución clásica de (2.13). Entonces u es dada por la fórmula*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \quad (2.14)$$

Demostración. Sea $g(s) = T(t-s)u(s)$. Entonces, usando el item (iii) de la Proposición 2.5.4

obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dg}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(t) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)(Au(s) + f(s)) \\ &= T(t-s)f(s).\end{aligned}$$

Así,

$$g(t) - g(0) = u(t) - T(t)u_0 = \int_0^t T(t-s)f(s)ds,$$

lo cual completa la demostración. $\square$

Observemos que la integral (2.14) tiene sentido bajo condiciones más débiles sobre f . Por ejemplo, (2.14) representa una función continua en t si asumimos que $u_0 \in X$ y $f \in L^1([0, T]; X)$. Aquí, $L^1([0, T]; X)$ denota el espacio de Banach de (clases de) funciones medibles $f : [0, T] \rightarrow X$ tales que $\int_0^T \|f\|_X dt < \infty$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.6.2. *Asuma $u_0 \in X$ y $f \in L^1([0, T]; X)$. La función $u(t)$ dada por (2.14) es llamada una solución blanda³ de (2.13).*

De la Definición 2.6.2 surge inmediatamente la pregunta de cuándo una solución blanda es una solución clásica.

Teorema 2.6.3. *[24, p. 111] Asuma $u_0 \in D(A)$ y $f \in C([0, T]; X)$ tal que $f \in L^1([0, T]; D(A))$. Entonces la solución blanda dada por (2.14) es una solución clásica de (2.13).*

2.7. Teorema de Hille-Yosida

Hemos visto que todo semigrupo de clase C_0 tiene un generador infinitesimal, y además, por lo visto en la Sección 2.6, sabemos cómo usar el semigrupo para resolver un problema de valor inicial. Desde el punto de vista de la Teoría de las E.D.Ps, un aspecto relevante es saber cuáles operadores diferenciales son generadores infinitesimales de un semigrupo de clase C_0 . Una respuesta a este interrogante es dado por el teorema de Hille-Yosida.

Recordemos que si A es un operador lineal de X , no necesariamente acotado, el conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, es el conjunto de todos los números complejos λ para los cuales $\lambda I - A$ es invertible,

³El término solución blanda proviene del inglés, como traducción de *mild solution*.

i.e., $(\lambda\mathcal{I} - A)^{-1}$ es un operador lineal acotado en X . La familia de operadores lineales acotados $R(\lambda : A) = (\lambda\mathcal{I} - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ es llamado *el resolvente* de A .

Teorema 2.7.1. (Hille-Yosida) [24, p. 8] Sea A un operador en un espacio de Banach X . A es generador infinitesimal de un semigrupo $\{T(t)\}$ de clase C_0 si y solo si

(i) $D(A)$ es denso y A es cerrado

(ii) El conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contiene $\mathbb{R}^+$ y además para todo $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (2.15)$$

En la práctica, la verificación de la hipótesis del Teorema de Hille-Yosida no es tarea fácil. Sin embargo este teorema es esencial en resultados de caracterización de generadores infinitesimales de semigrupos (y grupos) como lo es el Teorema de Stone que será presentado en la Sección 2.8. Es por ello que hemos decidido dedicar la Sección 2.7 a recordar el Teorema de Hille-Yosida.

2.8. Grupos

Definición 2.8.1. Sea X un espacio de Banach. Una familia $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$, de operadores lineales acotados de X en X se denomina un grupo C_0 de operadores acotados, o simplemente un grupo C_0 , si satisface las siguientes propiedades:

(i) $T(0) = \mathcal{I}$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para $t, s \in \mathbb{R}$,

(iii) $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$ para toda $x \in X$.

Definición 2.8.2. El generador infinitesimal A de un grupo $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ es definido por

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad (2.16)$$

siempre que el límite exista; el dominio de A , $D(A)$, es el conjunto de todos los elementos $x \in X$ para los cuales el límite (2.16) existe.

Sea $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ un grupo C_0 . De la Definición 2.8.2 se tiene que para $t \geq 0$, $\{T(t)\}_{t=0}^{\infty}$ es un semigrupo de clase C_0 cuyo generador infinitesimal es A . Más aún, para $t \geq 0$, $\{S(t)\}_{t=0}^{\infty} = \{T(-t)\}_{t=0}^{\infty}$ es también un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal dado por $-A$. Así si $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ es

un grupo C_0 en X , A y $-A$ ambos son generadores infinitesimales de semigrupos C_0 denotados por $\{T_+(t)\}_{t=0}^\infty$ y $\{T_-(t)\}_{t=0}^\infty$ respectivamente. Recíprocamente, Si A y $-A$ son generadores infinitesimales de semigrupos $\{T_+(t)\}_{t=0}^\infty$ y $\{T_-(t)\}_{t=0}^\infty$ de clase C_0 , entonces es posible mostrar que (ver [24]) A es el generador infinitesimal de un grupo $\{T(t)\}_{t=-\infty}^\infty$ de clase C_0 , obtenido por

$$\{T(t)\}_{t=-\infty}^\infty = \begin{cases} \{T_+(t)\}_{t=0}^\infty & \text{para } t \geq 0, \\ \{T_-(t)\}_{t=0}^\infty & \text{para } t \leq 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Recordemos que dado un espacio de Banach X con su respectivo dual topológico X^* , denotemos por $\langle x^*, x \rangle$ la evaluación de $x^* \in X^*$ con $x \in X$. Sea A un operador lineal con dominio denso $D(A)$ en X . El *adjunto* A^* de A es un operador lineal de $D(X^*) \subseteq X^*$ en X^* definido como sigue: $D(A^*)$ es el conjunto de todos los elementos $x^* \in X^*$ para los cuales existe una $y^* \in X^*$ tal que

$$\langle x^*, Ax \rangle = \langle y^*, x \rangle \text{ para toda } x \in D(A) \quad (2.18)$$

y si $x^* \in D(A^*)$ entonces $y^* = A^*x^*$ donde y^* es un elemento de A^* satisfaciendo la igualdad (2.18).

Sea $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal, X un espacio de Hilbert, y $\overline{D(A)} = X$. El operador A se denomina *simétrico* si $\langle Ax, y \rangle = \langle y, Ax \rangle$, $\forall x, y \in D(A)$. En este caso $D(A) \subseteq D(A^*)$. Si además $D(A) = D(A^*)$ se dice que A es *autoadjunto*. Además se dice que $A : X \rightarrow X$ es *unitario* si $A^* = A^{-1}$.

Finalizamos esta sección con el *Teorema de Stone* el cual caracteriza la generación de grupos de clase C_0 en términos de la propiedad de ser autoadjunto.

Teorema 2.8.3. (Teorema de Stone) [24, p. 41] *A es el generador infinitesimal de un grupo C_0 de operadores unitarios en un espacio de Hilbert H si y solamente si iA es autoadjunto.*

El Teorema 2.8.3 nos permitirá mostrar que la familia de operadores definido a través de las soluciones de la ecuación lineal de Schrödinger, forman un grupo de clase C_0 , como se verá en el Capítulo 3.

Capítulo 3

Ecuación de Schrödinger lineal

El objetivo de este capítulo es estudiar las propiedades más importantes de la ecuación de Schrödinger lineal. En particular, analizamos la existencia de solución, y las propiedades de grupo de Schrödinger, lo cual será fundamental para el estudio del problema no lineal, como veremos en el Capítulo 4.

3.1. Solución de la ecuación de Schrödinger lineal

Ahora analizamos el problema de Cauchy asociado a la ecuación de Schrödinger lineal

$$\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u, & t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $u_0 \in \mathcal{S}$ es una función que representa la condición inicial. Aplicando la transformada de Fourier en (3.1) con respecto a la variable espacial $x \in \mathbb{R}^n$, y teniendo en cuenta que $\widehat{\partial_t u} = \partial_t \widehat{u}$, tenemos

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi, t) = i\widehat{\Delta u}(\xi, t), & t \in \mathbb{R}, \ \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{u_0}(\xi). \end{cases} \quad (3.2)$$

Teniendo en cuenta el item (ii) de la Proposición 2.3.5 se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta u}(\xi, t) &= (2\pi i)^2 \cdot (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2) \widehat{u}(\xi, t) \\ &= -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t). \end{aligned}$$

Así, de (3.2) obtenemos

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi, t) = -4\pi^2 i |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t), \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{u}_0(\xi). \end{cases} \quad (3.3)$$

Como podemos ver, (3.3) es una E.D.O lineal de la forma $\frac{d}{dt}y + ky = 0$, la cual tiene como única solución

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 i t |\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi). \quad (3.4)$$

Si aplicamos la transformada inversa de Fourier en (3.4) y usamos el Lema 2.3.8 obtenemos

$$(\widehat{u}(\xi, t))^\vee = (e^{-4\pi^2 i t |\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi))^\vee,$$

es decir,

$$u(x, t) = (e^{-4\pi^2 i t |\xi|^2})^\vee * u_0(x). \quad (3.5)$$

Basta ahora hallar $(e^{-4\pi^2 i t |\xi|^2})^\vee$ para obtener una representación más explícita de (3.1). Para ello usamos los siguientes lemas:

Lema 3.1.1. *Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\Re(a) \geq 0$, entonces*

$$\widehat{e^{-a|x|^2}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\pi^2 |\xi|^2 / a}. \quad (3.6)$$

Demostración. En primer lugar podemos ver que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (3.7)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\theta \right)^{1/2} \\ &= \left(2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Ahora consideremos la función $g(x) = e^{-a|x|^2}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, con $\Re(a) \geq 0$. Por definición de transfor-

mada de Fourier

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2 - 2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x_k|^2 - 2\pi i x_k \cdot \xi_k} dx_k.\end{aligned}$$

Denotemos por $I(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2 - 2\pi i x \cdot \xi} dx$, $x \in \mathbb{R}$. Notemos que

$$2\pi i x \xi + ax^2 = \left(\sqrt{a}x + \frac{\pi i \xi}{\sqrt{a}} \right)^2 + \frac{\pi^2 \xi^2}{a}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}I(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{a}x + \pi i \xi / \sqrt{a})^2 - \pi^2 \xi^2 / a} dx \\ &= e^{-\pi^2 \xi^2 / a} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{a}x + \pi i \xi / \sqrt{a})^2} dx.\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable, definamos $y = \sqrt{a}x$. Entonces,

$$I(\xi) = \frac{e^{-\pi^2 \xi^2 / a}}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y + \pi i \xi / \sqrt{a})^2} dy. \quad (3.8)$$

Por otro lado, dado que la función $h(z) = e^{-z^2}$ es entera sobre $\mathbb{C}$, entonces $\int_C e^{-z^2} dz = 0$, donde C es cualquier camino cerrado contenido en $\mathbb{C}$.

Como vemos, en (3.8) necesitamos calcular $\int_{\mathbb{R}} e^{-(y + \pi i \xi / \sqrt{a})^2} dy$. Consideremos el diagrama presentado en la Figura 3.1.

Analicemos $\int_{\ell_2} h(z) dz$ y $\int_{\ell_4} h(z) dz$ cuando $R \rightarrow \infty$. Observemos que podemos parametrizar ℓ_2 por $\rho(t) = -R + t\omega$, con $0 \leq t \leq 1$ y $R > 0$. Así,

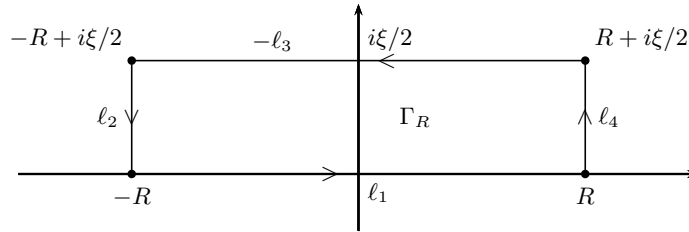


Figura 3.1: Camino cerrado para apoyar la solución de la integral.

$$\int_{\ell_2} e^{-z^2} dz = \int_0^1 e^{-(R+t\omega)^2} \omega dt.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{\ell_2} e^{-z^2} dz \right| &\leq \int_0^1 |e^{-(R^2+2Rt\omega+\omega^2 t^2)} \omega| dt \\ &\leq \frac{\pi i \xi}{\sqrt{a}} e^{-R^2} \int_0^1 |e^{-(2Rt\omega+\omega^2 t^2)}| dt. \end{aligned}$$

Como $\int_0^1 |e^{-(2Rt\omega+\omega^2 t^2)}| dt$ es acotada al ser la integral de una función continua sobre un compacto, y $e^{-R^2} \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$, entonces

$$\int_{\ell_2} e^{-z^2} dz \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty.$$

De manera análoga afirmamos que

$$\int_{\ell_4} e^{-z^2} dz \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty.$$

En efecto, observemos que podemos parametrizar ℓ_4 por $\rho(t) = -R + (1-t)\omega$, con $0 \leq t \leq 1$ y $R > 0$. Así,

$$\int_{\ell_4} e^{-z^2} dz = \int_0^1 e^{-(-R+(1-t)\omega)^2} \omega dt.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{\ell_4} e^{-z^2} dz \right| &\leq \int_0^1 |e^{-(R^2-2R(1-t)\omega+\omega^2(1-t)^2)} \omega| dt \\ &\leq \frac{\pi i \xi}{\sqrt{a}} e^{-R^2} \int_0^1 |e^{-(-2Rt\omega+\omega^2(1-t)^2)}|. \end{aligned}$$

Como $\int_0^1 |e^{-(-2Rt\omega+\omega^2(1-t)^2)}| dt$ es acotada al ser la integral de una función continua sobre un compacto, y $e^{-R^2} \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$, entonces

$$\int_{\ell_4} e^{-z^2} dz \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty.$$

Como

$$\int_C e^{-z^2} dz = 0 = \left(\int_{\ell_1} + \int_{\ell_2} + \int_{\ell_3} + \int_{\ell_4} \right) e^{-z^2} dz,$$

entonces

$$\int_{-\ell_3} e^{-z^2} dz = - \int_{\ell_3} e^{-z^2} dz = \left(\int_{\ell_1} + \int_{\ell_2} + \int_{\ell_4} \right) e^{-z^2} dz = \int_{\ell_1} e^{-z^2} dz.$$

Tomando la parametrización de $\ell_1 : \rho(y) = y$ y la parametrización de $\ell_3 : \rho(y) = y + \frac{\pi i \xi}{\sqrt{a}}$ obtenemos

$$\int_{\ell_1} e^{-z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-y^2} dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy, \text{ cuando } R \rightarrow \infty.$$

Así, de (3.7) concluimos,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(y+\pi i \xi / \sqrt{a})^2} dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}. \quad (3.9)$$

Juntando (3.9) y (3.8) tenemos

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \frac{e^{-\pi^2 \xi^2 / a}}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y+\pi i \xi / \sqrt{a})^2} dy \\ &= \frac{e^{-\pi^2 \xi^2 / a}}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 \xi^2 / a}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x_k \cdot \xi_k - a x_k^2} dx_k \\ &= \prod_{k=1}^n I(\xi_k) \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 \xi_k^2 / a} \right) \\ &= \left(\frac{\pi}{a} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-\pi^2 |\xi|^2 / a}, \end{aligned}$$

con lo cual se completa la demostración de (3.6). □

Lema 3.1.2. $\widehat{e^{-4\pi^2 it |x|^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{e^{-4\pi^2(\varepsilon + it)|x|^2}}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Además $\widehat{e^{-4\pi^2 it |x|^2}}(\xi) = \frac{e^{i|\xi|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}}$.

Demostración. Dado que $\Re(\varepsilon + it) = \varepsilon > 0$, del Lema 3.1.1 tenemos que

$$\widehat{e^{-4\pi^2(\varepsilon + it)|x|^2}} = \frac{e^{-|\xi|^2/4(\varepsilon + it)}}{(4\pi(\varepsilon + it))^{n/2}} \rightarrow \frac{e^{i|\xi|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}}.$$

Por otro lado, para cada $\varphi \in \mathcal{S}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \widehat{e^{-4\pi^2(\varepsilon + it)|x|^2}}, \varphi \rangle &= \langle e^{-4\pi^2(\varepsilon + it)|x|^2}, \widehat{\varphi} \rangle \\ &\rightarrow \langle e^{-4\pi^2 it |x|^2}, \widehat{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

$$= \widehat{\langle e^{-4\pi^2 it|x|^2}, \varphi \rangle},$$

con lo cual se concluye la demostración. $\square$

Ahora volvamos a la expresión (3.5). En vista del Teorema 2.3.9 vemos que

$$\mathcal{F} \left(\widehat{e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}} \right) = e^{-4\pi^2 it|\xi|^2},$$

por tanto

$$\widehat{(e^{-4\pi^2 it|x|^2})}(\xi, t) = (e^{-4\pi^2 it|x|^2})^\vee(\xi, t). \quad (3.10)$$

Del Lema 3.1.2 y (3.10) concluimos que

$$(e^{-4\pi^2 it|x|^2})^\vee(\xi, t) = \frac{e^{i|\xi|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}}. \quad (3.11)$$

Llevando (3.11) a (3.5) obtenemos la forma explícita de la solución $u(x, t)$ al problema de Cauchy (3.1), la cual es dada por

$$u(x, t) = \frac{e^{i|\xi|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}} * u_0(x) = e^{it\Delta} u_0(x). \quad (3.12)$$

3.2. Grupo de Schrödinger

Dada la ecuación lineal de Schrödinger $\partial_t u = i\Delta u$, definamos el operador

$$A_0 = i\Delta : D(A_0) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \text{ siendo } D(A_0) = H^2(\mathbb{R}^n).$$

Entonces se tiene el siguiente resultado preliminar.

Lema 3.2.1. *El operador iA_0 es autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Denotando por $(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \bar{v} dx$, donde $\bar{v}$ representa la parte imaginaria de v , tenemos que

$$(iA_0 u, v) = (-\Delta u, v)_0 = - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot \bar{v} dx = - \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \overline{\Delta v} dx = (-u, \Delta v) = (u, iA_0 v), \quad \forall u, v \in D(A);$$

y por tanto, $iA_0 = -\Delta$ es simétrico, esto es, $\overline{D(iA_0)} = L^2$, $D(iA_0) \subseteq D((iA_0)^*)$ y $(iA_0 u, v) = (u, iA_0 v)$.

Por lo tanto, para mostrar que iA_0 es autoadjunto resta ver que $D(iA_0) = D((iA_0)^*)$. En primer

lugar, para $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\Im(\lambda) \neq 0$, y $f \in L^2$ tenemos que existe solución al problema $(\lambda \mathcal{I} - iA_0)u = f$. Para ello basta aplicar la transformada de Fourier, usando la Proposición 2.3.5 y el Teorema 2.3.9. Más aún, la solución $u \in D(iA_0) = H^2(\mathbb{R}^n)$ es dada por

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi}}{\lambda + 4\pi^2 |\xi|^2} d\xi.$$

Sea entonces $h \in D((iA_0)^*)$. Dado que $((iA_0)^* - \lambda \mathcal{I})h \in L^2$, entonces existe $g \in D(iA_0)$ tal que

$$(iA_0 - \lambda \mathcal{I})h = ((iA_0)^* - \lambda \mathcal{I})h.$$

Por tanto, como $D(iA_0) \subseteq D((iA_0)^*)$ entonces

$$((iA_0)^* - \lambda \mathcal{I})(g - h) = 0.$$

Consecuentemente, como $Rango((iA_0) + \lambda \mathcal{I}) = L^2$ entonces

$$Nu((iA_0)^* - \lambda \mathcal{I}) = (Rango((iA_0) + \lambda \mathcal{I}))^\perp = \{0\},$$

y así $h = g \in D(iA_0)$. Por tanto, $D((iA_0)^*) \subseteq D(iA_0)$. □

Por el Teorema de Stone (Teorema 2.8.3) tenemos el siguiente corolario:

Proposición 3.2.2. A_0 es el generador infinitesimal de un grupo $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ de operadores unitarios en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Este grupo de operadores unitarios denominado *grupo de Schrödinger* describe la solución $u(x, t)$ del problema lineal de (3.1). En efecto, observamos que dada $u_0 \in L^2$, la función $u(t) = T(t)u_0$ es la única solución del problema

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}, (D(A))^*) \\ i\partial_t u + \Delta u = 0, \text{ en } (D(A))^*, \forall t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Adicionalmente, por lo visto en la Sección 3.1 $\{T(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ puede ser expresado explícitamente en variables de Fourier, es decir $T(t)u_0 = e^{it\Delta}u_0$ donde

$$e^{it\Delta}u_0 = u(x, t) = \frac{e^{i|\xi|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}} * u_0(x), \quad u_0 \in \mathcal{S}. \quad (3.13)$$

Observemos que de (3.13) se tiene que $|\mathcal{F}(e^{it\Delta}u_0)(\xi)| = |u_0(\xi)|$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$. En particular, para cada $s \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, $\|e^{it\Delta}u_0\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}$. Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \in \mathbb{R}$, se deduce que $\{e^{it\Delta}\}_{t=-\infty}^{\infty}$ puede ser extendido a un grupo de isometrías en $H^s(\mathbb{R}^n)$ para cada $s \in \mathbb{R}$. El generador de $\{e^{it\Delta}\}_{t=-\infty}^{\infty} \mapsto H^s(\mathbb{R}^n)$ es el operador A_s definido por $A_s u = i\Delta u$, para $u \in D(A_s) = H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$.

Veamos algunas propiedades de la familia de operadores $\{e^{it\Delta}\}_{t=-\infty}^{\infty}$.

Proposición 3.2.3. (i) Para todo $t \in \mathbb{R}$, $e^{it\Delta} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ es una isometría, es decir

$$\|e^{it\Delta}f\|_2 = \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

$$(ii) \quad e^{it\Delta}e^{is\Delta} = e^{i(t+s)\Delta} \text{ con } (e^{it\Delta})^{-1} = e^{-it\Delta}.$$

$$(iii) \quad e^{i0\Delta} = \mathcal{I}.$$

$$(iv) \quad \text{Fijando } f \in L^2(\mathbb{R}^n), \text{ la función } \Gamma_f : \mathbb{R} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \text{ definida por } \Gamma_f(t) = e^{it\Delta}f \text{ es continua.}$$

Demostración. Por el Teorema de Plancherel (Teorema 2.3.7) y la igualdad (3.4) se sigue que

$$\|e^{it\Delta}f\|_2 = \|\widehat{e^{it\Delta}f}\|_2 = \|e^{-4\pi^2 it|\xi|^2} \widehat{f}\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2. \quad (3.14)$$

Lo anterior concluye el ítem (i) de la Proposición. Los ítems (ii), (iii) y (iv) son claros de la Definición 2.5.1. $\square$

Ahora enunciemos algunas propiedades de decaimiento en el infinito del grupo $\{e^{it\Delta}\}_{t=-\infty}^{\infty}$ sobre los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.2.4. Si $t \neq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $p' \in [1, 2]$, entonces

$$\|e^{it\Delta}f\|_p \leq (4\pi|t|)^{-n/2(1/p'-1/p)} \|f\|_{p'}.$$

Demostración. Por la desigualdad de Young (Proposición 2.1.10) tenemos

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta}f\|_\infty &= \left\| \frac{e^{i|\xi|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}} * f \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \frac{e^{i|\xi|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}} \right\|_\infty \|f\|_1 \\ &\leq (4\pi|t|)^{-n/2} \|f\|_1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Así, $e^{it\Delta}$ es un operador lineal acotado de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ con norma

$$M_0 = \sup\{\|e^{it\Delta}f\|_\infty : f \neq 0, \|f\|_1 \leq 1\} = (4\pi|t|)^{-n/2}. \quad (3.16)$$

Por otro lado, usando la Proposición 3.2.3 tenemos que $\|e^{it\Delta}f\|_2 = \|f\|_2$. Así, $e^{it\Delta}$ es un operador lineal acotado de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ con norma

$$M_1 = \sup\{\|e^{it\Delta}f\|_2 : f \neq 0, \|f\|_2 \leq 1\} = 1. \quad (3.17)$$

Consecuentemente, usando el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin (Teorema 2.1.11) tenemos que $e^{it\Delta}$ es un operador acotado de $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con norma

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta = ((4\pi|t|)^{-n/2})^{(1-\theta)},$$

con

$$\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Así,

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2}, \quad 1-\theta = 1 - \frac{2}{p} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}.$$

Luego,

$$\|e^{it\Delta}f\|_p \leq ((4\pi|t|)^{-n/2})^{(1-\theta)} \|f\|_{p'} = (4\pi|t|)^{-n/2(1/p' - 1/p)} \|f\|_{p'}$$

de donde se concluye la prueba. $\square$

Las estimativas dadas en el Lema 3.2.4 aunque fundamentales, no son suficientes para resolver la ecuación de Schrödinger no lineal. Recurrimos entonces estimativas espacio-temporales conocidas como estimativas tipo Strichartz (Ver [6, 26]).

Definición 3.2.5. *Un par (q, p) se dice que es admisible si*

$$\frac{2}{q} = \frac{n}{2} - \frac{n}{p} \text{ y } 2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}.$$

En el caso $n = 1$, $2 \leq p \leq \infty$, y $n = 2$, $2 \leq p < \infty$.

Teorema 3.2.6. (Estimativas tipo Strichartz) [6, p. 33]

a) Para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la aplicación $t \mapsto e^{it\Delta}f$ pertenece a la clase $L^q(\mathbb{R}^n; L^p(\mathbb{R}^n)) \cap C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$,

para toda pareja admisible (q, p) . Además existe una constante $c > 0$ tal que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|e^{it\Delta} f\|_p^q dt \right)^{1/q} \leq c \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (3.18)$$

b) Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, $J = \overline{I}$, y $t_0 \in J$. Si (σ, ρ) una pareja admisible y $f \in L^{\sigma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^n))$, entonces para cada (q, p) pareja admisible, la aplicación $t \mapsto \int_{t_0}^t e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds$ pertenece a la clase $L^q(I; L^p(\mathbb{R}^n)) \cap C(J, L^2(\mathbb{R}^n))$. Además, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\left(\int_I \left\| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds \right\|_p^q dt \right)^{1/q} \leq c \left(\int_I \|f(t)\|_{\rho'}^{\sigma'} dt \right)^{1/\sigma'}, \quad (3.19)$$

para toda $f \in L^{\sigma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^n))$.

Capítulo 4

La ecuación de Schrödinger no lineal

El grupo de Schrödinger cobra importancia en este capítulo, en el que estudiaremos los resultados de buena colocación de la ecuación de Schrödinger no lineal definida en (1.15) con la no-linealidad dada por el término $-\lambda|u|^{\alpha-1}u$, que corresponde a uno de los modelos físicos no lineales de mayor relevancia desde el punto de vista matemático y de las aplicaciones, como se mencionó en el Capítulo 1.

Consideremos el PVI

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u - \lambda|u|^{\alpha-1}u, & t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (4.1)$$

donde λ y α son constantes reales con $\alpha > 1$ y $u_0(x)$ es el dato inicial. Aplicando el Teorema 2.6.1 encontramos que la formulación integral del problema (4.1) es dada por la ecuación

$$u(t) = e^{it\Delta}u_0 + i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u|^{\alpha-1}u)(s)ds, \quad (4.2)$$

denominada *solución blanda* (o *Mild Solution*) del PVI (4.1).

4.1. Teoría local en L^2

Las soluciones del problema (4.1) poseen al menos dos leyes de conservación

$$\|u(\cdot, t)\|_2 = \|u_0\|_2, \quad (4.3)$$

y

$$\|\nabla_x u(t)\|_2^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1} \|u(t)\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} = \|\nabla_x u_0\|_2^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1} \|u_0\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}, \quad (4.4)$$

las cuales corresponden a la conservación de la energía y el momento lineal respectivamente. En (4.4) el primer término del lado derecho corresponde a la energía cinética mientras que el segundo, corresponde a la energía potencial. El dato inicial se asume que pertenece al espacio de energía $H^1(\mathbb{R}^n)$, lo que implica que $\|\nabla_x u_0\|_2 < \infty$.

Proposición 4.1.1. *Sea $u(x, t)$ una solución del PVI (4.1) con dato inicial u_0 . Entonces para $t \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\|u(\cdot, t)\|_2 = \|u_0\|_2. \quad (4.5)$$

Demostración. Con el propósito de simplificar los cálculos, tomemos el caso unidimensional, esto es, $n = 1$. Sea $u(\cdot, t)$ una solución al PVI (4.1). Entonces $u(\cdot, t)$ satisface la ecuación

$$iu_t + u_{xx} + \lambda|u|^{\alpha-1}u = 0. \quad (4.6)$$

Dado que $u(\cdot, t)$ es una función compleja notemos por $u = v + iw$; luego $u_t = v_t + iw_t$ y $u_{xx} = v_{xx} + iw_{xx}$. Notemos que

$$iu_t \bar{u} = (iv_t - w_t)(v - iw) = (-vw_t + wv_t) + i(v_tv + w_tw). \quad (4.7)$$

Entonces el conjugado de (4.7) es dado por

$$\overline{iu_t \bar{u}} = (-vw_t + wv_t) - i(v_tv + w_tw). \quad (4.8)$$

Por tanto, restando (4.8) de (4.7) obtenemos

$$iu_t \bar{u} - \overline{iu_t \bar{u}} = (-vw_t + wv_t) + i(v_tv + w_tw) - (-vw_t + wv_t) + i(v_tv + w_tw) = i(2v_tv + 2w_tw). \quad (4.9)$$

De manera análoga,

$$u_{xx}\bar{u} = (v_{xx} + iw_{xx})(v - iw) = (v_{xx}v + w_{xx}w) + i(w_{xx}v - v_{xx}w) \quad (4.10)$$

y

$$\overline{u_{xx}\bar{u}} = (v_{xx}v + w_{xx}w) - i(w_{xx}v - v_{xx}w). \quad (4.11)$$

Luego, restando (4.12) de (4.11) tenemos

$$u_{xx}\bar{u} - \overline{u_{xx}\bar{u}} = (v_{xx}v + w_{xx}w) + i(w_{xx}v - v_{xx}w) - (v_{xx}v + w_{xx}w) + i(w_{xx}v - v_{xx}w) = i(2w_{xx}v - 2v_{xx}w). \quad (4.12)$$

Por otro lado, dado que $u\bar{u} = |u|^2$ y $\overline{u\bar{u}} = |u|^2$, concluimos que

$$\lambda|u|^{\alpha-1}u\bar{u} - \overline{\lambda|u|^{\alpha-1}u\bar{u}} = 0. \quad (4.13)$$

De los cálculos anteriores podemos concluir que si multiplicamos (4.6) por $\bar{u}$, y le restamos el conjugado de este resultado, utilizando (4.9), (4.12) y (4.13) tenemos que

$$(2v_tv + 2w_tw) + (2w_{xx}v - 2v_{xx}w) = 0, \quad (4.14)$$

o equivalentemente

$$|u|_t^2 + i(u\bar{u}_x - u_x\bar{u})_x = 0. \quad (4.15)$$

En efecto, observe que

$$\begin{aligned} |u|_t^2 &= \frac{d}{dt}(v^2 + w^2) \\ &= (2v_tv + 2w_tw), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u\bar{u}_x - u_x\bar{u} &= (v + iw)(v_x - iw_x) - (v_x + iw_x)(v - iw) \\ &= vv_x - i vw_x + i wv_x + ww_x - vv_x + i v_xw - i v w_x - w_xw \\ &= 2i wv_x - 2i v w_x, \end{aligned}$$

y

$$(u\bar{u}_x - u_x\bar{u})_x = (2i wv_x - 2i v w_x)_x$$

$$\begin{aligned}
&= 2iw_x v_x + 2i w v_{xx} - 2i w_x v_x - 2i v w_{xx} \\
&= i(2w v_{xx} - 2v w_{xx}),
\end{aligned}$$

así,

$$i(u\overline{u_x} - u_x\overline{u})_x = i^2(2w v_{xx} - 2v w_{xx}) = 2w_{xx}v - 2v_{xx}w.$$

Integrando la igualdad (4.15) entre $-\infty < x < \infty$ y considerando que $u\overline{u_x} - u_x\overline{u} \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx = -i(u\overline{u_x} - u_x\overline{u})|_{x=-\infty}^{\infty} = 0, \quad (4.16)$$

es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx = C,$$

donde C es constante. Como $u(x, 0) = u_0(x)$ (la condición inicial del PVI), se concluye que

$$\|u(\cdot, t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx = \|u_0\|_2^2, \quad (4.17)$$

lo cual finaliza la prueba. $\square$

Proposición 4.1.2. Sea $u(x, t)$ una solución del PVI (4.1) con dato inicial u_0 . Entonces para $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\|\nabla_x u\|_2^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1} \|u(\cdot, t)\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} = \|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1} \|u_0\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}. \quad (4.18)$$

Demostración. Con el propósito de simplificar los cálculos, tomemos el caso unidimensional, esto es, $n = 1$. Sea $u(\cdot, t)$ una solución al PVI (4.1). Entonces $u(\cdot, t)$ satisface la ecuación

$$iu_t + u_{xx} + \lambda|u|^{\alpha-1}u = 0. \quad (4.19)$$

Dado que $u(\cdot, t)$ es una función compleja notemos por $u = v + iw$; luego $u_t = v_t + iw_t$ y $u_{xx} = v_{xx} + iw_{xx}$. Multiplicando la ecuación (4.19) por $-\overline{u_t}$, obtenemos que

$$-iu_t\overline{u_t} = -i|u_t|^2; \quad (4.20)$$

por otro lado

$$-\overline{u_t}u_{xx} = (-v_t + iw_t)(v_{xx} + iw_{xx})$$

$$= -(v_t v_{xx} + w_t w_{xx}) + i(w_t v_{xx} - v_t w_{xx}), \quad (4.21)$$

y

$$\begin{aligned} (-\overline{u_t})(\lambda|u|^{\alpha-1}u) &= -\lambda|u|^{\alpha-1}\overline{u_t}u \\ &= -\lambda|u|^{\alpha-1}[(v_tv + w_tw) + i(v_tw - w_tv)]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Tomando dos veces la parte real de (4.20), (4.21) y (4.22) tenemos que

$$-2v_tv_{xx} - 2w_tw_{xx} = 2\lambda|u|^{\alpha-1}(v_tv + w_tw). \quad (4.23)$$

Notemos que, al integrar por partes la ecuación (4.23) en la variable espacial, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (-2v_tv_{xx} - 2w_tw_{xx}) dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(v_x^2 + w_x^2) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} (v_x^2 + w_x^2) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $|u|^{\alpha-1} \frac{d}{dt}|u|^2 = \frac{2}{\alpha+1} \frac{d}{dt}|u|^{\alpha+1}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (2\lambda|u|^{\alpha-1}(v_tv + w_tw)) dx &= \lambda \int_{\mathbb{R}} |u|^{\alpha-1} \frac{d}{dt}(v^2 + w^2) dx \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\alpha+1} \frac{d}{dt}|u|^{\alpha+1} dx \\ &= \frac{2\lambda}{\alpha+1} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u|^{\alpha+1} dx. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Así, de (4.24) y (4.25) obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx - \frac{2\lambda}{\alpha+1} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u|^{\alpha+1} dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} (|u_x|^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1} |u|^{\alpha+1}) dx = 0, \quad (4.26)$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx - \frac{2\lambda}{\alpha+1} \int_{\mathbb{R}} |u|^{\alpha+1} dx = \int_{\mathbb{R}} (|u_x|^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1} |u|^{\alpha+1}) dx = K, \quad (4.27)$$

donde K es constante. Como $u(x, 0) = u_0(x)$ y $(u_0)_x(x, 0) = (u_0)_x(x)$ (las condiciones iniciales del

PVI), se concluye que

$$\|u_x(\cdot, t)\|_2^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1} \|u(\cdot, t)\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} = \int_{\mathbb{R}} (|u_x|^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1} |u|^{\alpha+1}) dx = \|(u_0)_x\|_2^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1} \|u_0\|_{\alpha+1}^{\alpha+1},$$

lo cual finaliza la prueba. $\square$

Presentaremos ahora un resultado de *buena colocación local*, considerando el dato inicial $u_0 \in L^2$.

Observemos que si $u(x, t)$ es una solución de (4.1), la función $u_\delta(x, t) = \delta^{\frac{2}{\alpha-1}} u(\delta x, \delta^2 t)$, $\delta > 0$, también es solución. Así, considerando $\alpha = 1 + 4/n$ observamos que el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ es invariante bajo la relación de escala

$$u(x, t) \mapsto \delta^{\frac{2}{\alpha-1}} u(\delta x, \delta^2 t) = u_\delta(x, t),$$

esto es,

$$\|u_\delta(x, t)\|_2 = \|\delta^{\frac{2}{\alpha-1}} u(\delta x, \delta^2 t)\|_2 = \delta^{\frac{2}{\alpha-1}} \delta^{-\frac{n}{2}} \|u(x, \delta^2 t)\|_2 = \|u(x, \delta^2 t)\|_2.$$

Analizaremos entonces la buena colocación del problema de Cauchy asociado a la ecuación de Schrödinger (4.1) en el caso $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in (1, 1 + 4/n)$. El valor $\alpha = 1 + 4/n$ se denomina *exponente crítico* de (4.1). Este resultado es esencialmente tomado de [26].

Teorema 4.1.3. (Teoría Local en L^2) *Si $1 < \alpha < 1 + 4/n$ entonces para toda $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existe $I_0(\|u_0\|_2, n, \lambda, \alpha) > 0$ y una única solución u de la ecuación integral (4.2) en el intervalo de tiempo $[-I_0, I_0]$ con*

$$u \in C([-I_0, I_0] : L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^r([-I_0, I_0] : L^{\alpha+1}(\mathbb{R}^n))$$

donde $r = \frac{4(\alpha+1)}{n(\alpha-1)}$.

Demostración. La demostración es basada en el principio de las contracciones de Banach, el cual establece que si (X, d) un espacio de Banach, y $\psi : X \rightarrow X$ una contracción, entonces ψ tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $p \in X$ talque $\psi(p) = p$.

Para cualesquier constantes positivas I y d definamos el espacio $D(I, d)$ como sigue

$$D(I, d) = \{u \in C([-I, I] : L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^r([-I, I] : L^{\alpha+1}(\mathbb{R}^n)) :$$

$$\|u\|_I \equiv \sup_{[-I, I]} \|u(t)\|_2 + \left(\int_{-I}^I \|u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \leq d \Bigg\}$$

con $1 < \alpha < 1 + 4/n$ y $r = \frac{4(\alpha+1)}{n(\alpha-1)}$. El espacio normado $D(I, d)$ con norma definida por $\|\cdot\|_I$ es un espacio de Banach.

Sobre el espacio $D(I, d)$ definamos la aplicación $\psi : D(I, d) \rightarrow D(I, d)$, tal que para $u \in D(I, d)$, $\psi(u)$ es dada por:

$$\psi(u)(t) = e^{it\Delta} u_0 + i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^{\alpha-1} u)(s) ds. \quad (4.28)$$

Afirmamos que para valores apropiados de d e $I > 0$ la aplicación ψ define una contracción sobre $D(I, d)$. Por la Desigualdad de Minkowski (Proposición 2.1.8)

$$\begin{aligned} \left(\int_0^I \|\psi(u)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} &= \left(\int_0^I \|e^{it\Delta} u_0 + i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^{\alpha-1} u)(s) ds\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \\ &\leq \left(\int_0^I \|e^{it\Delta} u_0\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} + |\lambda| \left(\int_0^I \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^{\alpha-1} u)(s) ds \right\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

Ahora, por hipótesis tenemos que $1 < \alpha < 1 + 4/n$ y tomando la restricción $\frac{2}{r} = \frac{n}{2} - \frac{n}{\alpha+1}$ tenemos que el par $(r, \alpha + 1)$ es una pareja admisible. Así, aplicando respectivamente las estimativas tipo Strichartz descritas en (3.18) (tomando $f = u_0$, $(q, p) = (r, \alpha + 1)$) y (3.19) (tomando $f = |u|^{\alpha-1} u$, $(\sigma, \rho) = (q, p) = (r, \alpha + 1)$) a cada una de las integrales de la parte derecha de la desigualdad inmediatamente anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\int_0^I \|\psi(u)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} &\leq c\|u_0\|_2 + c|\lambda| \left(\int_0^I \| |u|^{\alpha-1} u \|_{(\alpha+1)/\alpha}^{r'} dt \right)^{1/r'} \\ &\leq c\|u_0\|_2 + c|\lambda| \left(\int_0^I \| |u|^\alpha \|_{(\alpha+1)/\alpha}^{r'} dt \right)^{1/r'} \\ &\leq c\|u_0\|_2 + c|\lambda| \left(\int_0^I \|u(t)\|_{\alpha+1}^{\alpha r'} dt \right)^{1/r'}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde $c = c(\alpha, n)$ es una constante que depende solamente de α y n . Observemos que, de la restricción $\frac{2}{r} = \frac{n}{2} - \frac{n}{\alpha+1}$ implica que $r = \frac{4(\alpha+1)}{n(\alpha-1)}$. Además, se tiene que $\alpha r' \leq r$.

Aplicando la Desigualdad de Hölder (Proposición 2.1.7) en (4.29) obtenemos

$$\left(\int_0^I \|u(t)\|_{\alpha+1}^{\alpha r'} dt \right)^{1/r'} \leq \left(\int_0^I 1 dt \right)^\theta \left(\int_0^I \|u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{\alpha/r}$$

$$= I^\theta \left(\int_0^I \|u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{\alpha/r}, \quad (4.30)$$

donde $\theta = 1 - \frac{n(\alpha-1)}{4} > 0$. Entonces, si tomamos $u \in D(I, d)$ tenemos

$$\left(\int_0^I \|u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \leq \|u\|_I \leq d.$$

Por lo tanto, de (4.30) obtenemos

$$\left(\int_0^I \|u(t)\|_{\alpha+1}^{\alpha r'} dt \right)^{1/r'} \leq I^\theta d^\alpha. \quad (4.31)$$

Reemplazando (4.31) en (4.29) vemos que

$$\left(\int_0^I \|\psi(u)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \leq c \|u_0\|_2 + c |\lambda| I^\theta d^\alpha. \quad (4.32)$$

Ahora calculemos la norma $\sup_{[0, I]} \|\psi(u)\|_2$. Por el item b) del Teorema 3.2.6 (con $(\sigma, \rho) = (r, \alpha + 1)$, $(q, p) = (\infty, 2)$ y $f = |u|^{\alpha-1}u$) tenemos que

$$\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^{\alpha-1}u)(s) ds \|_2 \leq c \left(\int_0^t \| |u|^{\alpha-1}u \|_{(\alpha+1)/\alpha}^{r'} dt \right)^{1/r'}. \quad (4.33)$$

Por la Desigualdad de Minkowski, el item (i) de la Proposición 3.2.3, además de las Desigualdades 4.31 y 4.33 vemos que

$$\begin{aligned} \|\psi(u)\|_2 &= \|e^{it\Delta}u_0 + i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^{\alpha-1}u)(s) ds\|_2 \\ &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_2 + |\lambda| \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^{\alpha-1}u)(s) ds \right\|_2 \\ &\leq c \|u_0\|_2 + c |\lambda| \left(\int_0^I \| |u|^\alpha \|_{(\alpha+1)/\alpha}^{r'} dt \right)^{1/r'} \\ &\leq c \|u_0\|_2 + c |\lambda| \left(\int_0^I \|u(t)\|_{\alpha+1}^{\alpha r'} dt \right)^{1/r'} \\ &\leq c \|u_0\|_2 + c |\lambda| I^\theta d^\alpha. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Entonces de (4.32) y (4.34) concluimos

$$|||\psi(u)|||_I \leq 2c||u_0||_2 + 2c|\lambda|I^\theta d^\alpha.$$

Si fijamos $d = 4c||u_0||_2$ y tomando $I_0 > 0$ tal que

$$4^\alpha c^\alpha |\lambda| I_0^\theta ||u_0||_2^{\alpha-1} < 1, \quad (4.35)$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} |||\psi(u)|||_I &\leq 2c||u_0||_2 + 2c|\lambda|I^\theta d^\alpha \\ &\leq 2(c||u_0||_2 + 4^\alpha c|\lambda|I^\theta c^\alpha ||u_0||_2^\alpha) \\ &\leq 2c||u_0||_2(1 + 4^\alpha |\lambda|I^\theta c^\alpha ||u_0||_2^{\alpha-1}) \\ &\leq 4c||u_0||_2 = d. \end{aligned}$$

Por tanto, la aplicación $\psi : D(I, d) \rightarrow D(I, d)$. Veamos ahora que ψ es una contracción.

Sean $u, v \in D(I, d)$. Entonces

$$(\psi(v) - \psi(u))(t) = i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u)(s)ds.$$

Por (4.30) y usando la Desigualdad $| |v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u | \leq k_\alpha |v - u| (|v|^{\alpha-1} + |u|^{\alpha-1})$, para alguna constante $k_\alpha > 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\int_0^I || |v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u ||_{(\alpha+1)/\alpha}^{r'} dt \right)^{1/r'} &\leq k_\alpha \left(\int_0^I (||v||_{\alpha+1}^{\alpha-1} + ||u||_{\alpha+1}^{\alpha-1})^{r'} ||v - u||_{\alpha+1}^{r'}(t) dt \right)^{1/r'} \\ &\leq k_\alpha I^\theta \left\{ \left(\int_0^I ||v||_{\alpha+1}^r dt \right)^{(\alpha-1)/r} + \left(\int_0^I ||u||_{\alpha+1}^r dt \right)^{(\alpha-1)/r} \right\} \\ &\quad \times \left(\int_0^I ||v(t) - u(t)||_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \\ &\leq 2k_\alpha I^\theta d^{\alpha-1} \left(\int_0^I ||v(t) - u(t)||_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r}. \quad (4.36) \end{aligned}$$

Aplicando la estimativa tipo Strichartz descrita en (3.19) (tomando $f = |v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u$, $(\sigma, \rho) =$

$(q, p) = (r, \alpha + 1)$), y la Desigualdad 4.36 vemos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^I \|\psi(v) - \psi(u)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} &= |\lambda| \left(\int_0^I \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u)(s) ds \right\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \\
&\leq c|\lambda| \left(\int_0^I \| |v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u \|_{(\alpha+1)/\alpha}^{r'} dt \right)^{1/r'} \\
&\leq 2ck_\alpha |\lambda| I^\theta d^{\alpha-1} \left(\int_0^I \|v(t) - u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \\
&= 2c|\lambda| I^\theta d^{\alpha-1} \left(\int_0^I \|v(t) - u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r}. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Por el item *b*) del Teorema 3.2.6 (con $(\sigma, \rho) = (r, \alpha + 1)$, $(q, p) = (\infty, 2)$ y $f = |v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u$) tenemos que

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u)(s) ds \right\|_2 \leq c \left(\int_0^I \| |v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u \|_{(\alpha+1)/\alpha}^{r'} dt \right)^{1/r'}. \tag{4.38}$$

Así, utilizando las Desigualdades 4.36 y 4.38 vemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{[0, I]} \|\psi(v) - \psi(u)\|_2 &= |\lambda| \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u)(s) ds \right\|_2 \\
&\leq c|\lambda| \left(\int_0^I \| |v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u \|_{(\alpha+1)/\alpha}^{r'} dt \right)^{1/r'} \\
&\leq 2ck_\alpha |\lambda| I^\theta d^{\alpha-1} \left(\int_0^I \|v(t) - u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \\
&= 2c|\lambda| I^\theta d^{\alpha-1} \left(\int_0^I \|v(t) - u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r}. \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (4.37) y (4.39) tenemos

$$\begin{aligned}
\|\psi(v) - \psi(u)\|_I &\leq 4c|\lambda| I^\theta d^{\alpha-1} \left(\int_0^I \|v(t) - u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \\
&\leq 4c|\lambda| I^\theta d^{\alpha-1} \|v(t) - u(t)\|_I. \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Ahora, del valor fijado de d , donde $d \leq 4c\|u_0\|_2$ y la Desigualdad 4.35 tenemos

$$4c|\lambda| I^\theta d^{\alpha-1} \leq 4^\alpha c^\alpha |\lambda| I^\theta \|u_0\|_2^{\alpha-1} < 1. \tag{4.41}$$

Finalmente de (4.40) y (4.41), concluimos que ψ es contracción. Por el Teorema de Punto fijo de Banach, tenemos que existe una única solución $u \in D(I, d)$ de la ecuación integral (4.2).

□

Teorema 4.1.4. *Si $u(t)$ es solución de la ecuación integral (4.2) en el intervalo $[-I_0, I_0]$, entonces para todo $\tilde{I} < I_0$ existe una vecindad B de u_0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que la aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi : B &\rightarrow C([- \tilde{I}, \tilde{I}] : L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^r([- \tilde{I}, \tilde{I}] : L^{\alpha+1}(\mathbb{R}^n)), \\ u_0 &\mapsto u(t) \end{aligned}$$

es Lipschitz.

Demostración. Sean u, v soluciones correspondientes de (4.2) con dato inicial u_0, v_0 respectivamente, entonces

$$v(t) - u(t) = e^{it\Delta}(v_0 - u_0) + i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u)(s)ds. \quad (4.42)$$

Aplicando en (4.42) la Desigualdad de Minkowski (Proposición 2.1.8), y aplicando respectivamente las estimativas tipo Strichartz descritas en (3.18) (tomando $f = v_0 - u_0$, $(q, p) = (r, \alpha + 1)$) y (3.19) (tomando $f = |v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u$, $(\sigma, \rho) = (q, p) = (r, \alpha + 1)$), tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\int_0^I \|v(t) - u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} &= \left(\int_0^I \|e^{it\Delta}(v_0 - u_0) + i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u)(s)ds\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \\ &\leq \left(\int_0^I \|e^{it\Delta}(v_0 - u_0)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \\ &\quad + |\lambda| \left(\int_0^I \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u)(s)ds \right\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \\ &\leq c\|v_0 - u_0\|_2 + c|\lambda| \left(\int_0^I \| |v|^{\alpha-1}v - |u|^{\alpha-1}u \|_{(\alpha+1)/\alpha}^{r'} dt \right)^{1/r'}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Teniendo en cuenta (4.36) en (4.43) vemos que

$$\left(\int_0^I \|v(t) - u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \leq c\|v_0 - u_0\|_2 + 2c|\lambda|k_\alpha I^\theta d^{\alpha-1} \left(\int_0^I \|v(t) - u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r}$$

$$= c\|v_0 - u_0\|_2 + 2c|\lambda|I^\theta d^{\alpha-1} \left(\int_0^I \|v(t) - u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r}.$$

Así, si I es suficientemente pequeño (ver (4.35)), entonces

$$\left(\int_0^I \|v(t) - u(t)\|_{\alpha+1}^r dt \right)^{1/r} \leq \vartheta \|v_0 - u_0\|_2,$$

con $\vartheta = \frac{c}{1 - 2c|\lambda|I^\theta d^{\alpha-1}}$. Análogamente podemos probar que

$$\sup_{[0,I]} \|v(t) - u(t)\|_2 \leq \vartheta \|v_0 - u_0\|_2.$$

Con lo cual concluimos la prueba. □

Conclusiones

- ◇ Se realizó una reseña histórica sobre los aspectos más relevantes que llevaron a la formulación de la ecuación de Schrödinger lineal, así como también, se presentó algunas ideas físicas (óptica no lineal) que justifican el modelo de Schrödinger no lineal.
- ◇ Mediante técnicas del Análisis de Fourier se analizó la existencia de solución del problema de valor inicial asociado a la ecuación de Schrödinger lineal con dato inicial en L^2 .
- ◇ Se probó un resultado de buena colocación local, para el problema de valor inicial asociado a la ecuación de Schrödinger no lineal, en el caso subcrítico, con dato inicial en L^2 , utilizándose el Principio de contracciones de Banach y estimativas tipo Strichartz.

Bibliografía

- [1] APPEL, W. *Mathematic for Physics & Physicists*. Princeton University Press, 2007.
- [2] BARTLE, R. *Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley Classics Library, 1995.
- [3] BELMONTE, J.G. *Ecuaciones de Schrödinger no lineales con no linealidad espacialmente inhomogénea*. Tesis de Doctorado en Matemáticas. Ciudad Real: Universidad de Castilla- La Mancha, Departamento de Matemáticas, (2009). 102 p.
- [4] BREZI, F. & MARKOWICH, P. A. *The three-dimensional Wigner-Poisson problem: existence, uniqueness and approximation*. Math. methods Appl. Sci. 14, (1991). p. 35-61.
- [5] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [6] CAZENAVE, T. *Semilinear Schrödinger Equation*. Lecture notes 10, A.M.S, 2003.
- [7] DALFOVO, F.; GIORGINI, S.; PITAEVSKII, L. P. & STRINGARI, S. *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*. Rev. Mod. Phys. 71, (1999). p. 463–512.
- [8] DAVIDOV, A.S. *Solitons in Molecular Systems*. Reidel, Dordrecht. New York, Springer, 1985.
- [9] DODD, R. K.; EILBECK, J. C.; GIBBON, J. D. & MORRIS, H. C. *Solitons and nonlinear wave equations*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], Ed. London, 1982.
- [10] EINSTEIN, A. *Annalen der Physik XVII*. Folge 549, 1905.
- [11] EINSTEIN, A. *Annalen der Physik XVII*. Folge 132, 1905.
- [12] EVANS, L.C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, 1998.
- [13] FIBICH, G.; ILAN, B. & PAPANICOLAOU, G. *Self-Focusing With Fourth-Order Dispersion*. SIAM J. APPL. MATH. 62, (2002). p. 1437–1462.

- [14] FIBICH, G. *Small beam nonparaxiality arrests self-focusing of optical beams*. Phys. Rev. Lett. 76, (1996). p. 4356–4359.
- [15] FOLLAND, G.B. *Real analysis, Modern Techniques and Their Applications*. Wiley-Interscience, 1984.
- [16] GRATTON, J. *Termodinámica e introducción a la Mecánica Estadística*. Buenos Aires, website: Instituto de Física del Plasma. 2003. [Consultado 25 Marzo 2015]. Disponible en <<http://www.lfp.uba.ar/es/index.php>>.
- [17] GETTYS, W. E.; KELLER, F. J. & SKOVE, M. J. *Física Clásica y Moderna*. McGRAW-HILL, 1991.
- [18] HEISENBERG, W. *Quantum-theoretical re-interpretation of kinematic and mechanical relations*. Phys. 33, (1925). p. 879-893.
- [19] KIVSHAR, Y. S. & AGRAWAL, G. P. *Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals*. Burlington: Academic Press, 2003.
- [20] LIPSON, S. G.; LIPSON, H. *Optical Physics*. 2 ed. New York: Cambridge University Press, 1981.
- [21] S. LUNDEEN, J. S.; SUTHERLAND, B.; PATELL, A.; STEWART C. & BAMBERT, C. *Direct measurement of the quantum wavefunction*. Nature 474, (2011). p. 188-191.
- [22] MOLECULAR EXPRESSIONSTM. *Exploring the World of Optics and Microscopy* [en línea]. website: MOLECULAR EXPRESSIONSTM. [Fecha de consulta: 15 Enero 2015]. Disponible en <<http://micro.magnet.fsu.edu/index.html>>.
- [23] O'CONNOR, J. J. & ROBERTSON, E. F. *Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger* [en línea]. Escocia: Universidad de St Andrews. [Fecha de consulta: 24 marzo 2015]. Disponible en <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schrodinger.html>>.
- [24] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences 44, Springer, 1983.
- [25] PLANCK, M. *Annalen der Physik IV*. Folge 4, 1901.
- [26] PONCE G. & LINARES F. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. Springer, 2009.
- [27] ROSALES, J. L. & SÁNCHEZ-GÓMEZ, J. L. *Nonlinear Schrödinger equation coming from the action of the particles gravitational field on the quantum potential*. Phys. Lett. A 66, (1992). p. 111–115.

- [28] RUSSELL, J. S. *Report on Waves*. Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, (1844). p. 311–390.
- [29] SAATY, T. L. & BRAM, J. *Nonlinear Mathematics*. USA: Dover Publications, (1994). p. 199–203.
- [30] SÁNCHEZ, C. *Física Cuántica*. Pirámide, 2008.
- [31] SCHRÖDINGER, E. *An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules*. Physical Review 28, Issue 6, (1926). p. 1049–1070.
- [32] SCHRÖDINGER, E. *Annalen der Physik* *ILXXX*. Folge 361, 1926.
- [33] SCHRÖDINGER, E. *Annalen der Physik* *ILXXX*. Folge 489, 1926.
- [34] SCHRÖDINGER, E. *Annalen der Physik* *ILXXX*. Folge 734, 1926.
- [35] SCHRÖDINGER, E. *Annalen der Physik* *LXXX*. Folge 487, 1926.
- [36] SCHRÖDINGER, E. *Annalen der Physik* *LXXXI*. Folge 109, 1926.
- [37] SCHRÖDINGER, E. *Dic Naturwissenschaften* *XIV*. Folge 664, 1926.
- [38] SCOTT, A. C. *Encyclopedia of Nonlinear Science*. New York: Taylor & Francis Group. 2005.
- [39] SULEM, C. & SULEM, P. *The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse*, Applied Mathematical Sciences 139, Springer, 1999.
- [40] WICHMANN, E. H. *Física cuántica*, Berkeley physics course. 4. Editorial Reverté, S.A., 2008.
- [41] ZABUSKY, T. L. & BRAM, J. *Dynamics of Nonlinear Lattices I. Localized Optical Excitations, Acoustic Radiation, and Strong Nonlinear Behavior*. Journal of Computational Physics 2, (1967). p. 126–153.
- [42] ZAKHAROV, V. E. & SHABAT, A.B. *Exact theory of two dimensional self focusing and one dimensional self modulation of waves in nonlinear media*. Sov. Phys. J.E.T.P. 34, (1972). p. 62–69.